# SMC e Pendolo Inverso: Controllo & Simulazione

Andrea Boscolo Camiletto

L'obiettivo di questo progetto è di sintetizzare e validare un controllore Sliding Mode in un pendolo inverso, simulandolo in Gazebo e valutandone la robustezza.
Per conseguire questo obiettivo è stato utilizzato Gazebo come simulatore fisico, ROS per il controllo dei giunti e Python per il codice del controllore, nonchè per i calcoli simbolici e la risoluzione numerica delle equazioni differenziali.

## Analisi del problema

La descrizione dinamica del problema è discretamente semplice, e si può raggiungere sia attraverso le equazioni di Newton che tramite la Lagrangiana. Il risultato è il seguente:

$$\begin{cases} (M+m)\ddot{x} - ml\ddot{\theta}\cos\theta + ml\dot{\theta}^2\sin\theta = u \\ l\ddot{\theta} - g\sin\theta = \ddot{x}\cos\theta \end{cases}$$

Dove le grandezze che compaiono nelle equazioni sono coerenti con la figura 1.

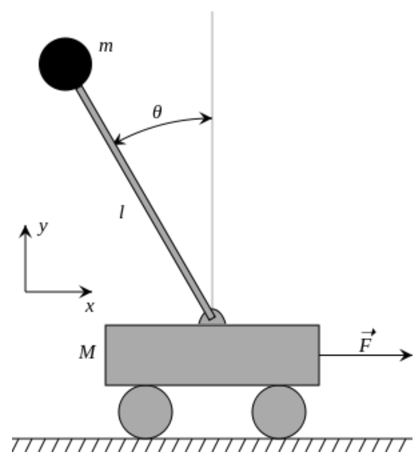


Figure 1: Schema del problema in analisi

Il sistema, chiaramente non lineare, è piuttosto complesso (e calcoloso) da affrontare come tale. Si noti inoltre come un'approssimazione lineare del sistema sia particolarmente sensata viste le specifiche d'uso del sistema.
Linearizzando otteniamo:

$$\begin{cases} (M+m)\ddot{x} - ml\ddot{\theta} = u \\ l\ddot{\theta} - g\theta = \ddot{x} \end{cases}$$

A questo punto potremmo pensare di scrivere una solo equazione in funzione di solo $\theta$ e delle sue derivate. Ciò ci semplificherebbe di molto i conti, e porterebbe a un sistema stabile, ma non avremmo controllo sulla variabile $x$, ciò significa che il controllore non contrasterà un moto a velocità costante.

Sia $\boldsymbol{x} = (x, \dot{x}, \theta, \dot{\theta})$. Scriviamo il sistema in forma di stato:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m}{M}g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{M+m}{Ml}g & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \\ 0 \\ \frac{1}{Ml} \end{pmatrix} \boldsymbol{u}$$

## Ricerca della superficie di Sliding

La nostra superficie di sliding sarà una combinazione lineare degli stati, dunque possiamo scriverla come:

$$s = C\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4$$

Imponendo la condizione di $\dot{s}(x) = 0$ possiamo escludere $u$ dalle equazioni di moto e ottenere la traiettoria *ideale* del sistema, senza chattering. Ci vogliamo assicurare che questa sia limitata e non diverga.

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \left[I - B(CB)^{-1}C\right] A\boldsymbol{x}$$

Ora per mantenere il testo leggibile e comprensibile sostituiamo i valori fisici del problema: $m = 1Kg$, $M = 1Kg$, $l = 1m$, $g = 10m/s^2$.

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{c_1}{c_2+c_4} & -\frac{10c_2}{c_2+c_4} - \frac{20c_4}{c_2+c_4} + 10 & -\frac{c_3}{c_2+c_4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{c_1}{c_2+c_4} & -\frac{10c_2}{c_2+c_4} - \frac{20c_4}{c_2+c_4} + 20 & -\frac{c_3}{c_2+c_4} \end{pmatrix} \boldsymbol{x}$$

Dalla quale si ricava un'equazione caratteristica:

$$l\left(c_1l^2 - 10c_1 + c_2l^3 - 10c_2l + c_3l^2 + c_4l^3\right) = 0$$

Come evidente, non è possibile rimuovere il polo in zero.
Questo però non deve sorprendere: il sistema è agnostico della posizione iniziale $x_0$ e più in generale della posizione lungo $x$. Non è pensabile imporre una traiettoria che converga anche su $x$.
Ciò però non è un problema: ci è sufficiente che sia limitata superiormente ed inferiormente! Ponendo i 3 poli liberi in $-1$ si ottiene:

$$\begin{aligned} c_1 &= -0.1 \\ c_2 &= -0.3 \\ c_3 &= 3.1 \\ c_4 &= 1.3 \end{aligned}$$

## Sintesi del Controllore

Per sintetizzare il controllore effettivo usiamo il metodo di diagonalizzazione. Ciò significa che definiamo:

$$\boldsymbol{u_c}(t) = Q^{-1}(t,x)\frac{\partial s}{\partial x}B\boldsymbol{u}(t)$$

Dove per comodità poniamo $Q = I$. In questo caso svolgendo i conti si ottiene $\boldsymbol{u_c}(t) = \boldsymbol{u}(t)$.
Come è lampante analizzando il luogo dei punti descritto da $s$ con Lyapounov $V = \frac{1}{2}s^2$, imponiamo che $s \cdot \dot{s} < 0 \; \forall s \neq 0$. Supponiamo $\boldsymbol{u_c} = -K\boldsymbol{x}$, otterremo:

$$s = -0.1x_1 - 0.3x_2 + 3.1x_3 + 1.3x_4$$
$$\dot{s} = -k_1x_1 + x_2\left(-k_2 - 0.1\right) + x_3\left(23.0 - k_3\right) + x_4\left(3.1 - k_4\right)$$

Che con un po' di casistica ci porta a:

$$k_1 = \begin{cases} > 0 \quad \text{se } \ s \cdot x_1 > 0 \\ < 0 \quad \text{se } s \cdot x_1 < 0 \end{cases} \qquad k_3 = \begin{cases} > 23 \quad \text{se } \ s \cdot x_3 > 0 \\ < 23 \quad \text{se } s \cdot x_3 < 0 \end{cases}$$

$$k_2 = \begin{cases} > -0.1 \quad \text{se } \ s \cdot x_2 > 0 \\ < -0.1 \quad \text{se } s \cdot x_2 < 0 \end{cases} \qquad k_4 = \begin{cases} > 3.1 \quad \text{se } \ s \cdot x_4 > 0 \\ < 3.1 \quad \text{se } s \cdot x_4 < 0 \end{cases}$$

Da cui scegliendo dei valori opportuni si ottiene un controllore SMC

# Simulazione Numerica

Risolvendo le equazioni con un ODE, e imponendo come condizioni di partenza $x = 0.01$, $\dot{x} = 0.01$, $\theta = 0.01$, $\dot{\theta} = 0.01$ si ottiene il seguente andamento:

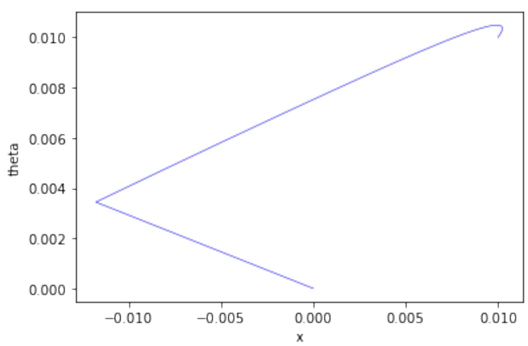


Figure 2: Traiettoria nel piano $(x, \theta)$

E' interessante notare come siano ben distinguibili le due fasi, di rincorsa e aggancio della traiettoria di sliding.

# Simulazione Fisica - Valutazione Robustezza

Nel setuppare la simulazione fisica sono stati implementati diversi cambiamenti alla dinamica del sistema, che vediamo in figura qui sotto:

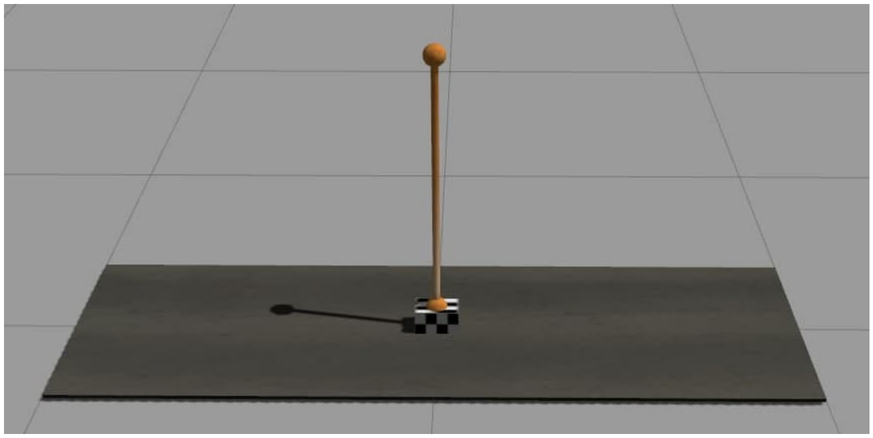

Figure 3: Simulazione all'istante iniziale

In particolare, ci soffermiamo sulle seguenti criticità rispetto al sistema iniziale:

- L'asta qui non ha massa nulla, ma pesa $0.1Kg$
- L'asta qui non è lunga $1m$, ma $70cm$
- Il giunto rotoidale a forma di sfera qui non ha massa nulla, ma pesa $0.1Kg$
- Il giunto rotoidale qui è smorzato
- E' presente un disturbo gaussiano applicato sulla sfera superiore

Complessivamente ciò porta a una dinamica del sistema sostanzialmente diversa da quella iniziale, nonostante ciò il controllore funziona comunque bene ed è robusto ai disturbi, come è possibile osservare dal video al seguente link.

E' interessante notare come se aggiungiamo un attrito al giunto con un coefficiente di 0.1 il sistema non sia più stabile ma abbia delle oscillazioni costanti.

# Conclusioni

Il controllore SMC ottenuto è senza dubbio molto robusto: anche un radicale cambio di parametri nel sistema e un disturbo esterno restano nei limiti di utilizzabilità.
Non deve sorprende come un cambio della dinamica così forte come l'introduzione di un fattore di attrito tenda a destabilizzare il sistema. Un fattore tale andrebbe introdotto direttamente nella descrizione del sistema.
Per concludere, il codice scritto per questo progetto è disponibile interamente alla mia pagina github https://github.com/abcamiletto/SMC_invPendulum