НИЯУ МИФИ

3-ий семестр факультет КиБ, конспект лекций

Математический анализ

Автор:
Тропин А.Г.
Соавтор:
Коверко Е.А.

Лектор:
Севастьянов Е.А.

e-mail: andrewtropin@gmail.com
github: abcdw/mephi

11 января 2014 г.

Предисловие

Данный конспект был составлен для упрощения процесса подготовки к экзамену по математическому анализу. Может быть Евгению Александровичу больше не придется таскать с собой здоровенную стопку перфокарт.

Хочется выразить отдельную благодарность Коверко Егору, который предоставил большую часть материала и помог в написании этого творения. Авторы и соавторы не несут абсолютно никаких гарантий за правильность сего произведения.

Оглавление

Часть I

Функциональные последовательности и ряды

Глава 1

Числовые ряды

1.1 Определение

Определение 1.1.1. $U_0 + U_1 + U_2 + U_3 + \dots = \sum\limits_{k=0}^{\infty} U_k$

Определение 1.1.2 (Частичная сумма). $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} U_k$

Определение 1.1.3. Ряд сходится, если $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} U_k = S$

Теорема 1.1.1 (Критерий Коши). *Ряд сходится, тогда и только тогда, когда он удовлетворяет условию Коши:*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N = N(\varepsilon),\ \forall n \geq N, \forall p :\ |\sum_{k=n+1}^{n+p} U_k| = |U_{n+1} + \dots + U_{n+p}| = |S_{n+p} - S_n| < \varepsilon$$

Доказательство. $\sum U_k$ - сходится $\Leftrightarrow \{S_n\}$ - сходится

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N : \forall n \geq N, \forall p :\ |S_{n+p} - S_n| < \varepsilon$$

□

Следствие (Необходимое условие сходимости). *Если $\sum U_k$ сходится, то $U_k \to 0$, при $k \to \infty$*

Доказательство. Если $\sum U_k$ сходится, то выполняется Критерий Коши. При $p = 1$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n \geq N : |S_{n+1} - S_n| = |U_{n+1}| < \varepsilon$$

□

Следствие. *Отбрасывание или добавление любого конечного числа членов ряда на его сходимость не влияет.*

Пример 1.1.1. $\sum\limits_{0}^{\infty} z^n$, $S_n(z) = \sum\limits_{0}^{n} z^n = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}$. При $n \to \infty$, $S_n(z) = \frac{1}{1-z}$, $|z| < 1$.
$S_n(z)$ не имеет придела при $|z| \geq 1$.

1.2 Действия с рядами

Теорема 1.2.1. *Ряды* $\sum U_k$ *и* $\sum V_k$ *сходятся,* α *— комплексное число, тогда*

$$\sum \alpha U_k = \alpha \sum U_k \tag{1.2.1}$$

$$\sum (U_k \pm V_k) = \sum U_k \pm \sum V_k \tag{1.2.2}$$

Доказательство. Доказательство свойства ((1.2.1)):

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha U_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{0}^{n} \alpha U_k = \alpha \lim_{n\to\infty} \sum_{0}^{n} U_k = \alpha \sum_{k=0}^{\infty} U_k$$

□

Доказательство. Доказательство свойства ((1.2.2)):

$$\sum_{0}^{\infty} U_k \pm \sum_{0}^{\infty} V_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{0}^{n} U_k \pm \lim_{n\to\infty} \sum_{0}^{n} V_k =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{0}^{n} U_k \pm \sum_{0}^{n} V_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{0}^{n} (U_k \pm V_k) = \sum_{0}^{n} (U_k \pm V_k)$$

□

Замечание 1.2.1. Из сходимости $\sum (U_k \pm V_k) \not\Rightarrow$ сходимость $\sum U_k$ и $\sum V_k$

Замечание 1.2.2. Если $\sum U_k$ сходится, то можно группировать, не меняя порядка.

Пример 1.2.1.

$$\sum (1-1)$$

$$(1-1) + (1-1) + \dots$$

$$1 - (1-1) - (1-1) \dots$$

Комментарий. Нельзя раскрывать скобки и переставлять члены.

1.3 Ряды с неотрицательными членами

$U_k \geq 0,\ S_n = \sum\limits_{0}^{n} U_k$ - неубывающая последовательность.

$\sum\limits_{0}^{n} U_k$ - сходится $\Leftrightarrow \{S_n\}$ — ограничена

Комментарий. Сходимость ряда эквивалентна ограниченности S_n

Теорема 1.3.1.

$$U_k \geq 0, V_k \geq 0,\ \forall k:$$

1. *Если* $0 \leq U_k \leq V_k$*, то если* $\sum V_k$ *сходится* $\Rightarrow \sum U_k$ *сходится и если* $\sum U_k$ *расходится* $\Rightarrow \sum V_k$ *расходится.*

2. *Если* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{U_k}{V_k} = A > 0$*, то ряды сходятся или расходятся одновременно.*

Доказательство.

1. $\forall n$ верно неравенство $0 \le \sum\limits_0^n U_k \le \sum\limits_0^n V_k$

2. $\forall \varepsilon > 0\ \varepsilon < A\ \exists N : \forall n \ge N \Rightarrow 0 < A - \varepsilon < \frac{U_k}{V_k} < A + \varepsilon$
   $0 < (A - \varepsilon) \cdot V_k < U_k < (A + \varepsilon) \cdot V_k$
   Пусть U_k сходится, тогда, из доказанного выше 1ого пункта, следует $(A-\varepsilon) \cdot V_k$ сходится $\Rightarrow \sum V_k$ сходится $\Rightarrow \sum (A+\varepsilon) \cdot V_k$ сходится $\Rightarrow \sum U_k$ сходится.

□

Замечание 1.3.1. Вместо существования предела $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{U_k}{V_k}$ достаточно предположить, что существуют такие числа p и q > 0, такие что $0 < q < \frac{U_k}{V_k} < p,\ \forall k$

Теорема 1.3.2 (Признак Даламбера)**.**

$$\sum U_k,\ U_k > 0$$

1. *Если* $\exists q$ *такое что:* $\forall k\ \frac{U_{k+1}}{U_k} \le q < 1$, *то* U_k *сходится*

2. *Если* $\exists \lim\limits_{k\to\infty} \frac{U_{k+1}}{U_k} = q$, *то:*

   - *при* $q < 1$ *сходится*
   - *при* $q > 1$ *расходится*
   - *при* $q = 1$ *неизвестно (нужно провести дополнительные исследования)*

Доказательство. Идея доказательства - сравнение с геометрической прогрессией.

1. - $k = 0, 1, \dots, n$, $U_k = U_0 \cdot \frac{U_1}{U_0}\frac{U_2}{U_1} \cdots \frac{U_k}{U_{k-1}} < U_0 \cdot q^k$
     Комментарий. $\frac{U_k}{U_{k-1}} < q,\ \forall k$
     $q < 1$, тогда $\sum U_0 \cdot q^k$ — сходящаяся геометрическая прогрессия.
   - $U_k = U_0 \cdot \frac{U_1}{U_0}\frac{U_2}{U_1} \cdots \frac{U_k}{U_{k-1}} \ge U_0 > 0$
     Комментарий. $\frac{U_k}{U_{k-1}} \ge 1,\ \forall k$
     $U_k \not\to 0 \Rightarrow$ не выполняется необходимое условие сходимости.

2. Пусть $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{U_{k+1}}{U_k} = q$
   $\forall \varepsilon > 0,\ \exists K :\ \forall k \ge K$ выполняется неравенство $q - \varepsilon < \frac{U_{k+1}}{U_k} < q + \varepsilon$

   - Если $q < 1$,выберем такое ε, что $q + \varepsilon < 1$, для $\forall k \ge K(\varepsilon)$.
     $\frac{U_{k+1}}{U_k} < q + \varepsilon < 1 \Rightarrow$ сходится по первой части.
   - Если $q > 1$, то выберем ε так, чтобы $q - \varepsilon > 1$, для $\forall k \ge K(\varepsilon)$.
     $\frac{U_{k+1}}{U_k} > q - \varepsilon > 1,\ \Rightarrow$ расходится по первой части.

□

Теорема 1.3.3 (Признак Коши).

$$\sum U_k, U_k \geq 0$$

1. *Если* $\exists q < 1$ *и* $\forall k > K$: *выполняется* $\sqrt[k]{U_k} \leq q < 1$, *то ряд сходится, а если* $\forall k$ $\sqrt[k]{U_k} \geq 1$, *то расходится.*

2. *Если* $\exists \lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{U_k} = q, (q \geq 0)$, *то*

   - *при* $q < 1$ *сходится*
   - *при* $q > 1$ *расходится*
   - *при* $q = 1$ *нужны дополнительные исследования*

Замечание 1.3.2. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{U_n}$ можно рассматривать вместо $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{U_k}$

Доказательство. Сравнение с геометрической прогрессией

1. Если $\forall k$ $\sqrt[k]{U_k} \leq q < 1 \Rightarrow U_k \leq q^k$ — сходящаяся геометрическая прогрессия.
   Если $\forall k$ $\sqrt[k]{U_k} \geq 1 \Rightarrow U_k \geq 1$ — не выполняется необходимое условие сходимости.

2. Если $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{U_k} = q$, то $\forall \varepsilon > 0$ $\exists K = K(\varepsilon) : \forall k \geq K,$ $(q - \varepsilon) < \sqrt[k]{U_k} < (q + \varepsilon)$
   $(q - \varepsilon)^k < U_k < (q + \varepsilon)^k$

   - При $q < 1$ выберем ε так, чтобы $q + \varepsilon < 1$, тогда $U_k < (q + \varepsilon)^k < 1$ — сходящаяся геометрическая прогрессия.
   - При $q > 1$ выберем ε так, чтобы $q-\varepsilon > 1$, тогда $U_k > (q-\varepsilon)^k > 1$ — не выполняется необходимое условие сходимости.

$\square$

Определение 1.3.1. Дана $\{a_n\}$ и пусть $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n$ — наибольший из частичных пределов, тогда:

$$\forall \{a\}\ \exists \overline{\lim_{n\to\infty}} a_n = A\ or\ \infty$$

Комментарий. A — число.

- Если $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n = +\infty \Rightarrow \{a_n\}$ — неограничена сверху $\Rightarrow \overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{U_k} = +\infty$ — неограничена сверху. U_k неограничена сверху и не выполняется необходимое условие.

- Если $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n = A$, тогда $\forall \varepsilon \in (A - \varepsilon, A + \varepsilon)$ бесконечно много членов $\{a_n\}$:

  - $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{U_k} = q < 1$. Выберем ε так, чтобы $q+\varepsilon < 1 \Rightarrow \exists K : \forall k \geq K,$ $\sqrt[k]{U_k} < q+\varepsilon < 1$ по признаку Коши.

  - $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{U_k} = q > 1$. Выберем ε так, чтобы $q-\varepsilon > 1 \Rightarrow \forall K\ \exists k \geq K : \sqrt[k]{U_k} > q - \varepsilon > 1$ $\Rightarrow U_k > 1$

1.4 Интегральный признак сходимости рядов с неотрицательными членами

Теорема 1.4.1. *Если $f(x)$ неотрицательна и убывает на $x \geq 1$, то ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) < \infty \tag{1.4.1}$$

сходится тогда и только тогда, когда сходится интеграл:

$$\int\limits_{1}^{+\infty} f(x)dx \tag{1.4.2}$$

то есть $\int\limits_{1}^{+\infty} f(x)dx < \infty$.

- $\sum a_n < \infty$ *— сходится*
- $\sum a_n = \infty$ *— расходится*

Доказательство. Если $k \leq x \leq k+1, \;\; k = 1, 2, \ldots$, то, в силу убывания функции получаем неравенство:

$$f(k) \geq f(x) \geq f(k+1)$$

Интегрируя по отрезку $[k, k+1]$ получим:

$$f(k) \geq \int\limits_{k}^{k+1} f(x)dx \geq f(k+1), \;\; k = 1, 2, \ldots \; .$$

$$\sum_{k=1}^{n} f(k+1) \leq \int\limits_{1}^{n+1} f(x)dx \leq \sum_{k=1}^{n} f(k) \tag{1.4.3}$$

Пусть $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} f(k)$, тогда (1.4.3) примет вид:

$$S_{n+1} - f(1) \leq \int\limits_{1}^{n+1} f(x)dx \leq S_n \tag{1.4.4}$$

Если ряд (1.4.1) сходится и его сумма равна S, то $S_n \leq S$, и $\int\limits_{1}^{n+1} f(x)dx \leq S, \;\; \forall n \in \mathbb{N}$.

$\forall b > 1, n + 1 > b$ имеем:

$$\int\limits_{1}^{b} f(x)dx \leq \int\limits_{1}^{n+1} f(x)dx \leq S$$

В силу неотрицательности функции $f(x)$ интеграл сходится.

Пусть наоборот, интеграл (1.4.2) сходится, тогда из (1.4.4) следует:

$$S_{n+1} \leq f(1) + \int\limits_{1}^{n+1} f(x)dx \leq f(1) + \int\limits_{1}^{\infty} f(x)dx$$

Тем самым, последовательность сумм $\{S_n\}$ ряда (1.4.1) ограничена сверху, и поэтому этот ряд сходится. $\square$

Пример 1.4.1.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}, \alpha \in \mathbb{R} \tag{1.4.5}$$

Положим $f(x) = \frac{1}{x^{\alpha}}$, тогда $f(n) = \frac{1}{n^{\alpha}}$

Поскольку $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}}$:

- При $\alpha > 1$ сходится
- При $\alpha \leq 1$ расходится

Тогда ряд (1.4.5) сходится тогда и только тогда, когда $\alpha > 1$. При $\alpha < 0$ дробь $\frac{1}{n^{\alpha}} \geq 1$.

1.5 Признак сходимости для знакочередующихся рядов

Рассмотрим ряды с действительными числами, которые то положительные, то отрицательные.

Теорема 1.5.1 (Лейбница). *Если*

$$\lim_{n\to\infty} U_n = 0 \tag{1.5.1}$$

$$U_n \geq U_{n+1} > 0, \ n = 1, 2, \dots \tag{1.5.2}$$

то знакочередеющийся ряд

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} U_n \tag{1.5.3}$$

сходится, при этом если S — сумма ряда, а S_n — его n-ая частичная сумма, то $\forall n : n = 1, 2, \dots$

$$|S - S_n| \leq U_{n+1} \tag{1.5.4}$$

Доказательство. Заметим, что частичная суммы S_n с четными номерами возрастают:

$$S_{2k} = (U_1 - U_2) + (U_3 - U_4) + \dots + (U_{2k-1} - U_{2k}), \ k = 1, 2, \dots$$

Так что выполняется неравенство $S_{2k+2} \geq S_{2k}$. Кроме того, они ограничены сверху:

$$S_{2k} = U_1 - (U_2 - U_3) - \dots - (U_{2k-2} - U_{2k-1}) - U_{2k}, \ S_{2k} < U_1$$

Поэтому последовательность $\{S_{2k}\}$ сходится

$$\lim_{k\to\infty} S_{2k} = S \tag{1.5.5}$$

Поскольку $S_{2k+1} = S_{2k} + U_{2k+1}$ и $U_{2k+1} \to 0$ при $k \to \infty$, то

$$\lim_{k\to\infty} S_{2k+1} = S \tag{1.5.6}$$

Из (1.5.5) и (1.5.6) следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$

При этом, нетрудно увидеть, что

$$S_{2k} \leq S \leq S_{2k+1} \leq S_{2k-1}, \ \forall k \tag{1.5.7}$$

Из неравенства (1.5.7) следует, что

$$S - S_{2k} \leq S_{2k+1} - S_{2k} = U_{2k+1}$$
$$S_{2k-1} - S \leq S_{2k-1} - S_{2k} = U_{2k}, \ k = 1, 2, \dots$$

Это и означает, что $\forall n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство (1.5.4). □

1.6 Преобразование Абеля

Теорема 1.6.1. *Пусть* $a_k \in \mathbb{C}$, $b_k \in \mathbb{C}$, $k = 1, \dots, n$; $B_k = b_1 + \dots + b_k$, *тогда*

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) b_k + a_n B_n \tag{1.6.1}$$

Доказательство. Очевидно, $b_1 = B_1, b_k = B_k - B_{k-1},\ k = 2, 3, \dots, n$
Поэтому $a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n = a_1 B_1 + a_2(B_2 - B_1) + a_3(B_3 - B_2) + \dots a_n(B_n - B_{n-1}) = (a_1 - a_2)B_1 + (a_2 - a_3)B_2 + \dots + (a_{n-1} - a_n)B_{n-1} + a_n B_n$
Называется преобразованием Абеля $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k b_k$. □

Следствие (лемма Абеля). *Если* $a_1 \le a_2 \le \dots \le a_n$ *или* $a_1 \ge a_2 \ge \dots \ge a_n$, $a_k \in \mathbb{R}$, $\forall k = 1, 2, \dots, n$, $|b_1 + \dots + b_k| \le B$, $(b_k \in \mathbb{C})$, *то*

$$\left| \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \right| \le B(|a_1| + 2|a_n|)$$

Доказательство. $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} a_k b_k\right| \le \sum\limits_{k=1}^{n-1} |a_k - a_{k+1}||B_k| + |a_n B_n| \le B\left(\sum\limits_{k=1}^{n-1} |a_k - a_{k+1}| + |a_n|\right) =$
$= B\left(\left|\sum\limits_{k=1}^{n-1}(a_k - a_{k+1})\right| + |a_n|\right) = B(|a_1 - a_n| + |a_n|) \le B(|a_1| + 2|a_n|)$. □

1.7 Признаки Дирихле и Абеля

Теорема 1.7.1 (признак Дирихле). *Пусть дан ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \tag{1.7.1}$$

1. $a_n \in \mathbb{R}^n, b_n \in \mathbb{C},\ n = 1, 2, \dots$
2. $\{a_n\}, \{a_n\} \downarrow 0\ (\{a_n\} \uparrow 0)$
3. $\{B_n\}$ — *последовательность частичных сумм ряда* $\sum b_n$ *ограничена*

Тогда ряд (1.7.1) *сходится.*

Доказательство. $\exists B > 0,\ |B_n| \le B\ \forall n \Rightarrow \forall m \ge n \ge 2 : |b_n + \dots + b_m| = |B_m - B_{n-1}| \le 2B$
Возьмем $\varepsilon > 0$. По скольку $a_n \to 0$, то $\exists N = N(\varepsilon) : \forall n > N(\varepsilon)$ имеем $|a_n| < \frac{\varepsilon}{6B}$.
Поэтому, $\forall n > N(\varepsilon)$ и $\forall m \ge n$ получим:

$$|a_n b_n + \dots + a_m b_m| \le 2B(|a_n| + 2|a_m|) < 2B\left(\frac{\varepsilon}{6B} + 2\frac{\varepsilon}{6B}\right) = \varepsilon$$

Ряд (1.7.1) удовлетворяет Критерию Коши сходимости рядов. □

Замечание 1.7.1. Признак Лейбница - это частный случай признака Дирихле.

Теорема 1.7.2 (признак Абеля). *Если последовательность действительных чисел* a_n *монотонна и ограничена, ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n, b_n \in \mathbb{C}$ *сходится, то ряд* (1.7.1) *также сходится.*

Доказательство. $a_n = a + \alpha_n, \{\alpha_n\}$ — монотонно стремящаяся к нулю последовательность. Поэтому

$$\sum a_n b_n = \sum (a + \alpha_n) b_n = a \sum b_n + \sum \alpha_n b_n,$$

где $a \sum b_n$ сходится по условию, а $\sum \alpha_n b_n$ сходится по признаку Дирихле.
$\{B_n\}$ — последовательность частичных сумм $\sum b_n$ ограничена, $\{\alpha_n\}$ — монотонно стремящаяся к нулю последовательность. □

1.8 Безусловно и условно сходящиеся ряды

Определение 1.8.1. Пусть $\{k_n\}$, $n = 1, 2, \dots$ — последовательность, в которой каждое натуральное число встречается только один раз. $\{k_n\}$ — однозначное отображение a_n в $a_n^* = a_{k_n}$, $(n = 1, 2, \dots)$.
Будем говорить, что ряд $\sum a_n^*$ является перестановкой ряда $\sum a_n$.

Определение 1.8.2. Говорят, что $\sum a_n$ сходится безусловно, если каждая перестановка сходится.

Теорема 1.8.1. *Ряд $\sum a_n, (a_n \in \mathbb{C})$ сходится безусловно тогда и только тогда, когда он сходится абсолютно.*

Доказательство. Достаточность.
Если ряд $\sum a_n$ сходится абсолютно, то все его перестановки сходятся к одному и тому же числу — сумме исходного ряда.
Пусть $\sum a_n^*$ — перестановка ряда $\sum a_n$. S_n^* — ее частичная сумма.
По Коши: $\forall \varepsilon > 0\ \exists N : m \geq n > N$

$$|a_n| + \dots + |a_m| < \varepsilon \tag{1.8.1}$$

Выберем p так, чтобы все натуральные числа $1, 2, \dots, N$ содержались в множестве $k_1, k_2, \dots, k_p$ (смотри определение), тогда при $n > p$ $a_1, \dots, a_N$ в разности $S_n - S_n^*$ уничтожаются, так что $|S_n - S_n^*| < \varepsilon$ в силу (1.8.1).
Значит $\{S_n^*\}$ сходится к тому же пределу, что и $\{S_n\}$. □

Определение 1.8.3. Сходящийся, но не абсолютно сходящийся ряд называется условно сходящимся.

Из теоремы (1.8.1) (из необходимости условия) $\Rightarrow$ Теорема (1.8.2)

Теорема 1.8.2. *Условно сходящийся ряд не может сходится безусловно, то есть у него всегда существует расходящаяся перестановка.*

Доказательство. Без Доказательства. □

Теорема 1.8.3 (Римана)**.** *Если ряд с действительными членами условно сходится, то каким бы не было действительное число S, существует перестановка ряда такая, что ее сумма равна S*

Доказательство. Без Доказательства. □

Глава 2

Функциональные последовательности и ряды

2.1 Поточечная сходимость

Пусть на некотором множестве $\mathbb{E}$ задана последовательность комплексно значимых функций $f_n, n = 1, 2, \dots$, $(f_n \in \mathbb{C})$. Элементы $x \in \mathbb{E}$ будем называть точками.

Определение 2.1.1. $\{f_n\}$ называется ограниченной на $\mathbb{E}$, если $\exists M > 0 : \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{E}$ выполняется

$$|f_n(x)| \leq M$$

Определение 2.1.2. $\{f_n\}$ называется сходящейся поточечно на множестве $\mathbb{E}$, если при любом фиксированном $x \in \mathbb{E}$, числовая последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится. Если последовательность сходится на $\mathbb{E}$, то $f(x) := \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x), x \in \mathbb{E}$ называется пределом последовательности. Пусть $\{U_n(x)\}_{n=1}^{\infty}, x \in \mathbb{E}$, $(U_n \in \mathbb{C})$ — последовательность числовых функций.

Определение 2.1.3. Множество числовых рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} U_n(x) \tag{2.1.1}$$

в каждой из которых точка x фиксированная называется рядом на множестве $\mathbb{E}$, а функция $U_n(x)$ — его член.
$S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} U_k(x), x \in \mathbb{E}$ называется n-ой частичной суммой ряда (2.1.1).
$\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} U_k(x)$ - его n-ым остатком.

Определение 2.1.4. Ряд (2.1.1) называется сходящимся поточечно на множестве $\mathbb{E}$, если последовательность $\{S_n(x)\}$ сходится поточечно на $\mathbb{E}$. При этом $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = S(x), x \in \mathbb{E}$ называется суммой ряда (2.1.1).

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n(x).$$

Определение 2.1.5. Если ряд (2.1.1) при любом $x \in \mathbb{E}$ сходится абсолютно, то он называется абсолютно сходящимся на множестве $\mathbb{E}$.

Замечание 2.1.1. Беззаботная перестановка членов ряда может привести к ошибке.

2.2 Равномерная сходимость

Определение 2.2.1. Говорят, что функциональная последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится равномерно на $\mathbb{E}$, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N, \forall x \in \mathbb{E}$ имеем

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Ясно, что каждая равномерно сходящаяся последовательность, сходится поточечно.

Комментарий. Обозначение равномерной сходимости: $f_n \overset{\mathbb{E}}{\rightrightarrows} f$

Теорема 2.2.1 (Критерий Коши равномерной сходимости последовательностей)**.** *Для того, чтобы* $\{f_n\}$ *равномерно сходилась на* $\mathbb{E} \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists N : n, m > N, \forall x \in \mathbb{E}$:

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \tag{2.2.1}$$

Доказательство.

- Необходимость:
  $f_n \overset{\mathbb{E}}{\rightrightarrows} f$, тогда $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N, \forall x \in \mathbb{E}\ |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$.
  $|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, $(\forall n, m > N, \forall x \in \mathbb{E})$.

- Достаточность:
  Пусть выполняется условие Коши, тогда $\{f_n(x)\}$, удовлетворяет критерию Коши сходимости числовых последовательностей и следовательно сходящегося числового предела, который обозначим $f(x)$.
  Тогда перейдя к пределу при $m \to \infty$ получим $\forall n > N, \forall x \in \mathbb{E} : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

□

Иногда полезен критерий, следующий из определения (2.2.1)

Теорема 2.2.2. *Пусть* $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \forall x \in \mathbb{E}$.
Положим $r_n = \sup |f_n(x) - f(x)|, x \in \mathbb{E}$ *— равномерное уклонение.*
Тогда $f_n \overset{\mathbb{E}}{\rightrightarrows} f \iff r_n \to 0,\ n \to \infty$. *(Переформулировка определения).*

Доказательство. Без доказательства.

□

Пример 2.2.1. $f_n(x) = x^n, \mathbb{E} = [0, 1)$
$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0, \forall \in \mathbb{E}, r_n = \sup\limits_{x\in[0,1)} |x^n - 0| = 1 \not\to 0, n \to \infty$.
$\{x^n\}$ не является равномерно сходящейся на $\mathbb{E}$.

Пример 2.2.2. $f_n(x) = x^n - x^{n+1}, \mathbb{E} = [0, 1]$.
$f_n(x) \to 0, \forall x \in \mathbb{E},\ f_n'(x) = nx^{n-1} - (n+1)x^n = 0$.
$x_n = \frac{n}{n+1},\ f_n(x_n) = x_n^n(1 - x_n) < \frac{1}{n+1}$.
$r_n < \frac{1}{n+1}$.

Определение 2.2.2.

$$\sum_{n=1}^{\infty} U_n(x),\ x \in \mathbb{E} \tag{2.2.2}$$

называется равномерно сходящейся, если на множестве $\mathbb{E}$ равномерно сходится последовательность частичных сумм.

Пусть $S_k(x)$ — частичные k-ые суммы ряда (2.2.2),

$$m \geq n : U_n(x) + \cdots + U_m(x) = S_m(x) - S_n(x)$$

тогда из теоремы (2.2.1) (критерий Коши равномерной сходимости последовательности) $\Rightarrow$ Теорема (2.2.3) (критерий Коши равномерной сходимости ряда).

Теорема 2.2.3 (Критерий Коши равномерной сходимости ряда)**.** *Для того, чтобы ряд* (2.2.2) *равномерно сходился на множестве* $\mathbb{E} \Longleftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}, \forall n, m > N, \forall x \in \mathbb{E} :$

$$|U_n(x) + \cdots + U_m(x)| < \varepsilon \tag{2.2.3}$$

Доказательство. Без доказательства. □

Следствие (Необходимый признак равномерной сходимости)**.** *У равномерно сходящегося ряда общий член равномерно стремится к нулю.*

Теорема 2.2.4 (Признак Вейерштрасса)**.** *Пусть* $\{U_n\}$ *— последовательнсоть функций, определенных на* $\mathbb{E}$ *и пусть* $|U_n(x)| \leq a_n, \forall x \in \mathbb{E}, \forall n \in \mathbb{N}$. *Тогда если* $\sum a_n < \infty$ *сходится, то следовательно* $\sum U_n(x)$ *сходится равномерно на* $\mathbb{E}$.

Доказательство. Если $\sum a_n$ сходится, то $\forall\varepsilon > 0 |\sum\limits_{k=n}^{m} U_k(x)| \leq \sum\limits_{k=n}^{m} a_k < \varepsilon$, при любом $x \in \mathbb{E}$, если только m и n достаточно велики, теорема (1.1.1) (критерий Коши сходимости числового ряда). Равномерная сходимость нашего ряда вытекает из теоремы (2.2.3). □

Замечание 2.2.1. $\sum a_n$ называется мажорирующим рядом $\sum U_n(x)$.

Замечание 2.2.2. ПРОВЕРИТЬ!!!
Условие признака Вейерштрасса не являются необходимыми для равномерной сходимости ряда.

2.3 Признаки равномерной сходимости рядов Дирихле и Абеля

Теорема 2.3.1. *Пусть дан ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x),\ \ x \in \mathbb{E} \tag{2.3.1}$$

такой что:

1. $a_n(x) \in \mathbb{R},\ b_n(x) \in \mathbb{C},\ n = 1, 2, \ldots$
2. $a_n(x) \overset{\mathbb{E}}{\rightrightarrows} 0$ *(Равномерная сходимость к нулю),* $\{a_n(x)\}$ *- монотонна.*
3. *Последовательность частичных сумм* $\{B_n(x)\}$ *ряда* $\sum b_n(x)$ *ограничена на множестве* $\mathbb{E}$.

Тогда ряд (2.3.1) *равномерно сходится на множестве* $\mathbb{E}$.

Доказательство. В силу условия 3, $\exists B > 0 : |B_n(x)| \le B,\ \forall x \in \mathbb{E},\ \forall n \in \mathbb{N}$.
$\forall x \in \mathbb{E}, m \ge n \ge 2 : |b_n(x) + \cdots + b_m(x)| = |B_m(x) - B_{n-1}(x)| \le 2B$.
$\forall \varepsilon > 0$ из условия 2 $\Rightarrow \exists N = N(\varepsilon) : n > N(\varepsilon), \forall x \in \mathbb{E}$ выполняется неравенство:

$$0 \le |a_n(x)| < \frac{\varepsilon}{6B}.$$

Примениев лемму Абеля (1.6), получим:

$$|a_n(x)b_n(x) + \cdots + a_m(x)b_m(x)| \le 2B(|a_n(x) + 2a_m(x)|) < \varepsilon$$
$$\forall x \in \mathbb{E}, m \ge n \ge N(\varepsilon)$$

В силу критерия Коши (2.2.3), ряд (2.3.1) сходится равномерно. □

Теорема 2.3.2 (Признак Абеля)**.**

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x) \tag{2.3.2}$$

1. *Если $a_n(x) \in \mathbb{R}, b_n(x) \in \mathbb{C}, n = 1, 2, \dots, x \in \mathbb{E}$.*
2. *$\{a_n(x)\}$ ограничена на множестве $\mathbb{E}$ и монотонна $\forall x \in \mathbb{E}$.*
3. *Ряд $\sum b_n(x)$ равномерно сходится на $\mathbb{E}$.*

Тогда ряд (2.3.2) равномерно сходится.

Доказательство. Доказательство легко провести так, как была доказана теорема (1.7.1). □

Пример 2.3.1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n^x}$ — ряд Дирихле.
Если этот ряд сходится в точке x_0, то он сходится равномерно $\forall x \in \mathbb{E},\ \mathbb{E} = [x_0, +\infty)$.
Можно воспользоваться Признаком Абеля:

$$a_n(x) = \frac{1}{n^{x-x_0}},\ b_n = \frac{c_n}{n^{x_0}}$$

Упражнение 1. Рассмотреть и доказать абсолютную сходимость при $x > x_0 + 1$

2.4 Равномерная сходимость и непрерывность

Теорема 2.4.1. *Пусть $f_n \overset{\mathbb{E}}{\rightrightarrows} f,\ x_0$ — предельная точка множества $\mathbb{E}$ и пусть $\lim\limits_{x \to x_0} f_n(x) = A_n,\ (n = 1, 2, \dots)$. Тогда $\{A_n\}$ сходится и*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{n \to \infty} A_n \tag{2.4.1}$$

Иными словами, 2 предельных перехода в данном случае коммутируют.

$$\lim_{x \to x_0} \lim_{n \to \infty} f_n(x) = \lim_{n \to \infty} \lim_{x \to x_0} f_n(x)$$

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$. В силу равномерной сходимости последовательности $\{f_n\}$ $\exists N : n > N, m > N, x \in \mathbb{E}$,

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \tag{2.4.2}$$

Переходя в неравенстве (2.4.2) к приделу при $x \to x_0$ получим

$$|A_n - A_m| < \varepsilon, \ (n, m > N) \tag{2.4.3}$$

Поэтому $\{A_n\}$ — последовательность для которой выполняется признак Коши сходимости последовательности $\Rightarrow$ она сходится.
Обазначим ее предел A

$$|f(x) - A| \le |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - A_n| + |A_n - A| \tag{2.4.4}$$

Выберем n :

$$|f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}, \ \forall x \in \mathbb{E} \tag{2.4.5}$$

Это возможно в силу равномерной сходимости.

$$|A_n - A| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{2.4.6}$$

Затем, для этого n подберем такую окрестность $U(x_0) : x \in U(x_0), x \neq x_0$, следовательно:

$$|f_n(x) - A_n| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{2.4.7}$$

Из неравенств (2.4.4) — (2.4.7) получим

$$|f(x) - A| < \varepsilon, \ \forall x \in U(x_0), \ x \neq x_0$$

Это равносильно равенству (2.4.1) □

Теорема 2.4.2. *Последовательность функций, непрерывных в точке* $x \in \mathbb{E} f_n \overset{\mathbb{E}}{\rightrightarrows} f$, *то функция* f *непрерывна в точке* x_0.

Доказательство. Без доказательства. □

Замечание 2.4.1. Обратное не верно, то есть последовательность непрерывных функций может неравномерно сходиться.

Из теоремы (2.4.2) и определения (2.2.2) $\Rightarrow$ теорема (2.4.3)

Теорема 2.4.3. *Если функции* $U_n(x)$, $(n = 1, 2, \dots)$, $x \in \mathbb{E}$ *непрерывны в точке* $x_0 \in \mathbb{E}$ *и ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} U_n(x)$ *равномерно сходится на* $\mathbb{E}$, *то его сумма* $f(x)$ *также непрерывна в точкке* x_0.

2.5 Равномерная сходимость и интегрирование

Теорема 2.5.1. *Пусть* f_n *— последовательность действительных, значимых, интегрируемых на отрезке* $[a, b]$ *функций. Тогда функция* f *также интегрируема на* $[a, b]$ *и*

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int\limits_a^b f_n(x)dx \tag{2.5.1}$$

Существование предела заранее не предполагается.

Доказательство. $\forall \varepsilon > 0,\ \exists n :$

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,\ x \in [a, b] \tag{2.5.2}$$

Зафиксируем n и выберем разбиение $[a, b],\ \triangle_1, \dots, \triangle_S$ так, чтобы выполнялось неравенство

$$\sum_i \omega(f_n, \triangle_i)|\triangle_i| < \varepsilon \tag{2.5.3}$$

Комментарий. $\omega(f, E) = \sup - \inf$ — колебание функции.

Функции f_n интегрируемы на $[a, b]$. По скольку $\omega(f, \triangle_i) \leq \omega(f_n, \triangle_i) + 2\varepsilon,\ (i = 1, \dots, S)$ (смотри (2.5.2)).

$$\sum_i \omega(f, \triangle_i)|\triangle_i| \leq \varepsilon + 2\varepsilon(b - a)$$

Отсюда следует, что $f \in \mathbb{R}[a, b]$. Для доказательства (2.5.1) выберем $n > N :$

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,\ (a \leq x \leq b),\ n > N$$

$$\left| \int_a^b f(x)dx - \int_a^b f_n(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x) - f_n(x)|dx < \varepsilon(b - a)$$

Отсюда вытекает (2.5.1).

□

Теорема 2.5.2. $U_n \in R[a, b]$ *(Интегрируема). Если*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n(x),\ (a \leq x \leq b) \tag{2.5.4}$$

При чем ряд (2.5.4) *сходится на* $[a, b]$*, тогда*

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f(x)dx$$

Иными словами ряд (2.5.4) *можно интегрировать частями.*

Доказательство. Без доказательства. □

Замечание 2.5.1. При нарушении равномерности ряд, состоящий из интегрируемых функций может иметь интегрируемую сумму.

2.6 Равномерная сходимость и дифференцирование

$f_n(x) = \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}, x \in \mathbb{R}$ показывает, что из равномерной сходимости последовательности функций не следует даже поточечная сходимость последовательностей функций производных.

То есть нужны более сильные предположения, чтобы заключать, что $f_n' \to f_n$, при $f_n \to f$.

Теорема 2.6.1. *Пусть* $f_n(x) \to f(x),\ x \in [a, b],\ n \to \infty,\ f_n \in C[a, b],\ (n = 1, 2, \dots)$.
Если $\{f_n'(x)\}$ *сходится равномерно на* $[a, b]$*, то* $f_n(x)$ *дифференцируема и*

$$f'(x) = \lim_{n \to \infty} f_n'(x)$$

Доказательство. Обозначим через f^* предел последовательности f'_n. Ввиду теоремы (2.4.2) f^* непрерывна на $[a, b]$.
Применим теорему (2.5.1) к последовательости $\{f_n\}$ на промежутке $[a, x]$, где $x \in [a, b]$

$$\int\limits_a^x f^*(t)dt = \lim \int\limits_a^x f'(t)dt = \lim_{n\to\infty}(f_n(x) - f_n(a)) = f(x) - f(a)$$

Так как интеграл слева ввиду непрерывности функции f^* имеет производную равную f', то ту же производную имеет и $f(x)$.

$$f'(x) = f^*(x) = \lim_{n\to\infty} f'(x), x \in [a, b]$$

□

Перефразируем теорему (2.6.1) с точки зрения рядов:
Пусть сходящийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} U_n(x) =: f(x), x \in [a, b]$ и пусть $U_n(x) \in C^1[a, b],\ (n = 1, 2, \dots)$.
Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} U'_n(x)$ сходится равномерно на $[a, b]$, то сумма $f(x)$ дифференцируема, и $f'(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} U'_n(x), x \in [a, b]$.

Глава 3

Степенные ряды

3.1 Радиус сходимости и круг сходимости

Определение 3.1.1. Степенной ряд — ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n,\ \ z, z_0 \in \mathbb{C}, n = 0, 1, \dots \tag{3.1.1}$$

a_n — коэффициенты ряда.
$\xi = z - z_0$, тогда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\xi^n$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \tag{3.1.2}$$

Теорема 3.1.1. *Степенной ряд* (3.1.2), $\alpha = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$,

$$R = \frac{1}{\alpha} \tag{3.1.3}$$

($\alpha = 0 \iff R = \infty$, $\alpha = +\infty \iff, R = 0$), тогда ряд (3.1.2) *абсолютно сходится, если $|z| < R$, и рассходится, если $|z| > R$.*

Доказательство. Положим $C_n = a_n z^n$. По критерию Коши заключаем, что сумма $\sum C_n$ сходится при $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|C_n|} = |z| \cdot \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{|z|}{R} < 1$, то есть $|z| < R$; и рассходится, если $|z| > R$. □

Определение 3.1.2. Число R называется радиусом сходимости ряда (3.1.2).
$|z| < R, z \in \mathbb{C}$ называется кругом сходимости ряда (3.1.2).

Следствие (1-ая т. Абеля)**.** *Если степенной ряд сходится при $z \neq 0$, то он абсолютно сходится при любом $|z| < |z*|$.*

Замечание 3.1.1. О сходимости на границе окружности $|z| = R$ ничего не говорится в теореме (3.1.1), так как возможны все варианты.

Теорема 3.1.2. *Если R — радиус сходимости ($R > 0$) ряда* (3.1.2)*, то на любом круге $|z| < r$, где r — фиксированно, и $r < R$.*
Этот ряд сходится абсолютно и равномерно.

Доказательство. При $z = r$ по теореме (3.1.1) ряд (3.1.2) сходится абсолютно, то есть $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n$ сходится, а так как для любой точки z круга $|z| \le r$ выполняется неравенство:

$$|a_n z^n| \le |a_n| r^n, \ \forall n$$

то по признаку Вейерштрассе на этом круге ряд (3.1.2) сходится равномерно. □

Следствие. *Степеной ряд непрерывный в каждой точке своего круга $|z| < R$ сходится.*

Теорема 3.1.3 (2-ая т. Абеля)**.** *Если R — радиус сходимости, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ и этот ряд сходится при $|z| = R$, то он сходится на отрезке $[0, R]$ равномерно.*

Доказательство. Пусть $0 \le x \le R$, представим ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n R^n \left(\frac{x}{R}\right)^n$. По скольку члены ряда $\sum a_n R^n$ не зависит от x, то его сходимость означает его равномерную сходимость. $\{(\frac{x}{R})^n\}$ ограничена на отрезке $[0, R]$ и монотонна в каждой точке.
Поэтому в силу признака Абеля равномерной сходимости рядов (2.3.2) ряд (3.1.2) равномерно сходится на отрезке $[0, R]$. □

Лемма 3.1.1. *Радиусы сходимости R, R_1, R_2 соответственно рядов $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ равны: $R = R_1 = R_2$.*

Доказательство. Действительно, так как $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n+1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, то
$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\left|\frac{a_n}{n+1}\right|} = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|n a_n|}$. □

Пример 3.1.1. $\sum a_n (z - z_0)^n$. Областью сходимости такого ряда является круг $|z - z_0| < R$, с точностью до граничных точек.

3.2 Степенные ряды в действительной области. Общие свойства.

В параграфах 3.2 - 3.4 будем рассматривать

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n, \tag{3.2.1}$$

где a_n, x, x_0 — действительные числа.
Если R — радиус сходимости ряда ряда (3.2.1), то очевидно ряд (3.2.1) сходится, если $|x| < R$ и расходится, если $|x| > R$.
Число R — по-прежнему называется радиусом сходимости ряда (3.2.1), а интервал $(x_0 - R, x_0 + R)$ — его интервал сходимости.

Теорема 3.2.1. *Если R — радиус сходимости ряда*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n, \tag{3.2.2}$$

где $R > 0$, то:

1. *функция f имеет в интервале $(x_0 - R, x_0 + R)$ производные всех порядков, они называются почленным дифферинциалом ряда (3.2.2):*

$$f^{(m)}(x) = \sum_{n=m}^{\infty} n(n-1)\dots(n-m+1)a_n(x-x_0)^{n-m}, \ m = 1, 2, \dots \tag{3.2.3}$$

2. *$\forall x \in (x_0 - R, x_0 + R)$*

$$\int\limits_{x_0}^{x} f(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1} \tag{3.2.4}$$

3. *(3.2.2) - (3.2.4) имеют одинаковые радиусы сходимости R.*

Доказательство. В силу леммы (3.1.1) ряды (3.2.3), (3.2.4) имеют тот же радиус сходимости, что и ряд (3.2.2). Всякий ряд с $R > 0$ сходится на отрезке $[x_0 - r, x_0 + r]$,
$0 < r < R$ (теорема (3.1.2)).
Поэтому утверждения 1 и 2 непосредственно следуют из общих теорем о сходимости рядов ((1.6) и (1.7.2)). □

Теорема 3.2.2. *Если функция f раскладывается в некоторой окрестности точки x_0 в степенной ряд:*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$$

то

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}, \ n = 0, 1, \dots \tag{3.2.5}$$

и следовательно справедливо:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n. \tag{3.2.6}$$

Следствие. *Если в некоторой окрестности точки функция раскладывается в степенной ряд, то это разложение единственно.*

Доказательство. Продифференцировав m раз равенство (3.2.2), получим (в силу (3.2.3)):

$$f^{(m)}(x) = m(m-1)\dots 2\cdot 1\cdot a_m + (m+1)m\dots a_{m-1}(x-x_0) + (m+2)(m+1)\dots 3\cdot a_{m-2}(x-x_0)^2\dots$$

Положим $x = x_0$, тогда получаем:

$$f^{(m)}(x_0) = m!\, a_m, \ m = 0, 1, \dots$$

□

3.3 Ряд Тейлора. Разложение функции в степенные ряды.

Определение 3.3.1. Пусть f определена в некоторой окрестности точки x_0 и имеет в этой точке производные всех порядков, тогда ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \tag{3.3.1}$$

Называется рядом Тейлора функции f в точке x_0.

Следующий пример показывает, что функция, бесконечно дифференцируемая в одной точке может быть не равна разложению по Тейлору в окрестности этой точки.

Пример 3.3.1.

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, \ x \neq 0 \\ 0, \ x = 0 \end{cases}$$

$f^{(n)}(0) = 0, \ n = 0, 1, \ldots$

Отсюда следует, что все члены ряда Тейлора (3.2.2) в точке $x_0 = 0$, и не совпадают с функцией $f(x)$ в никакой окрестности точки x_0.

Утверждение 3.3.1. Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности $(x_0 - h, x_0 + h)$.

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \tag{3.3.2}$$

$$r_n(x) = f(x) - S_n(x) \tag{3.3.3}$$

Тогда, для того, чтобы функция $f(x)$ на интервале $(x_0 - h, x_0 + h)$ равна сумме своего ряда (3.1.1), то есть:

$$(S_n(x) \to f(x), \ n \to \infty) \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} r_n(x) = 0, \ \forall x \in (x_0 - h, x_0 + h) \tag{3.3.4}$$

Теорема 3.3.1. *Пусть функция f и все ее производные ограничены в совокупности на интервале $(x_0 - h, x_0 + h)$, то есть существует такая $M = const, M > 0$:*
$\forall x \in (x_0 - h, x_0 + h), \ n = 0, 1, \ldots,$ выполняется неравенство:

$$|f^{(n)}(x)| \leq M \tag{3.3.5}$$

Тогда на интервале $(x_0 - h, x_0 + h)$ функция f раскладывается в ряд Тейлора:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n, \tag{3.3.6}$$

где $|x - x_0| < h$.

Доказательство.

$$\forall a : \lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0 \tag{3.3.7}$$

По формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа, для $x \in (x_0 - h, x_0 + h)$, для $\forall M$ имеем:

$$f(x) = S_n(x) + r_n(x),$$

где $r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$, где $\xi = x_0 + \theta(x - x_0)$, где $0 < \theta < 1$.

Используя (3.3.5) получим:

$$|r_n(x)| = \frac{|f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}|}{(n+1)!} \leq \frac{M|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}, \ \forall x \in (x_0 - h, x_0 + h).$$

Остюда из (3.3.7) следует (3.3.4). Согласно утверждению (3.3.1) теорема доказана. □

3.4 Разложение основных элементарных в ряд Тейлора.

- Разложение в ряд функции $e^x, \cos x, \sin x$.
  Использую теорему (3.3.1), получаем:

$$f^{(n)}(x) = e^x,\ \sin(x + \frac{\pi}{2}n),\ \cos(x + \frac{\pi}{2}n),\ n = 0, 1, \dots,$$

  Так что $|f^{(n)}(x)| \le e^h,\ f(x) = e^x, |x| \le h$
  $|f^{(n)}(x)| \le 1,\ f(x) = \sin x, \cos x, \forall x \in \mathbb{R}$
  Так как коэффициенты Тейлора для этих функций известны, то мы можем записать разложение при любом x:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \tag{3.4.1}$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \tag{3.4.2}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \tag{3.4.3}$$

- Разложение в ряд функции $\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x$.
  Заменив в (3.4.1) x на $-x$ получим

$$e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!} \tag{3.4.4}$$

  Отсюда из (3.4.1) получаем:

$$\operatorname{sh} x = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \tag{3.4.5}$$

$$\operatorname{ch} x = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \tag{3.4.6}$$

  В правых частях этих формул разложения степенных функций в ряды единственно в силу теоремы (3.2).

- Разложение в ряд функции $\ln(1 + x)$.
  Рассмотрим:

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \dots + (-1)^n t^n + \dots,\ |t| < 1 \tag{3.4.7}$$

  Интегрирую его почленно по теореме (3.2.1) от 0 до $x \in (-1, 1)$ получим:

$$\int\limits_0^x \frac{dt}{1+t} = \ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots,$$

$$\ln(1 + x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n},\ \forall x \in (-1, 1)$$

  Ряд правой части равенства (3.4) сходится по признаку Лейбница $\Rightarrow$ согласно теореме Абеля (3.1.3), разложение (3.4) имеет место в промежутке $(-1, 1]$

- Разложение в ряд $(1+x)^\alpha, \alpha \neq 0, 1, \dots$ Формула Тейлора для этой функции имеет вид:

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + r_n(x) \tag{3.4.8}$$

Соответствующий степенной ряд называют

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n \tag{3.4.9}$$

биномиальным рядом.
$R = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{\alpha-n}\right| = 1$, в силу утверждения, $r_n(x) \to 0$.
Замечание 3.4.1. Поведение ряда (3.4.9) в точках ±1, характерезуется следующей таблицой:

Таблица 3.1: таблица, характеризующая ряд (3.4.9)

$x = 1$	$\alpha > 0$	абсолютно сходится
	$-1 < \alpha < 0$	условно сходится
	$\alpha \leq -1$	расходится
$x = -1$	$\alpha > 0$	абсолютно сходится
	$\alpha < 0$	рассходится

Согласно второй теореме Абеля (3.1.3) всякий раз, когда ряд (3.4.9) сходится при $x = \pm1$, его сумма равна $(1+x)^\alpha$.

- Разложение в ряд $\operatorname{arctg} x$
Рассмотрим ряд:

$$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - t^6 + \dots + (-1)^n t^{2n} + \dots, \ |t| < 1 \tag{3.4.10}$$

Интегрирую его почленно по теореме (3.2.1) от 0 до $x \in (-1, 1)$ получим:

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)} + \dots$$

Ряд правой части равенства (3.4) сходится по признаку Лейбница $\Rightarrow$ согласно теореме Абеля (3.1.3), разложение (3.4) имеет место на отрезке $(-1, 1)$.
В частности, при $x = 1$, получим:

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \frac{\pi}{4}$$

- Разложение в ряд $\arcsin x$
Рассмотрим ряд:

$$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} t^{2n}, \ |t| < 1 \tag{3.4.11}$$

Интегрирую его почленно по теореме (3.2.1) от 0 до $x \in (-1, 1)$ получим:

$$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin x = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \ |x| \leq 1$$

Справедливость этого разложения при $x = \pm1$ устанавливается с помощью второй теоремы Абеля (3.1.3).

3.5 Формулы Эйлера

Ряды разложения (3.4.1) - (3.4.3) функций $e^x, \sin x, \cos x$ сходятся всюду в комплексной плоскости $\mathbb{C}$. По этой причине естественны следующие определения($e^z, \sin z, \cos z, z \in \mathbb{C}$):

$$e^z = \exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \tag{3.5.1}$$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} \tag{3.5.2}$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} \tag{3.5.3}$$

Заменив z сначала на iz, а затем на $-iz$ получим:

$$e^{iz} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n z^n}{n!} \tag{3.5.4}$$

$$e^{-iz} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n i^n z^n}{n!} \tag{3.5.5}$$

Заметим, что $i^{2k} = (-1)^k, i^{2k+1} = (-1)^k i, k = 0, 1, \ldots$.

$$\frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$$

$$\frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Сравнив эти формулы с (3.5.2), (3.5.3) заключаем, что

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \tag{3.5.6}$$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \tag{3.5.7}$$

Из этих формул следует формула:

$$\cos z + i \sin z = e^{iz} \tag{3.5.8}$$

Формулы (3.5.6), (3.5.7) и (3.5.8) называются формулами Эйлера.
Если в формуле (3.5.8) $z = \varphi,\ \varphi \in \mathbb{R}$, то

$$\cos\varphi + i\sin\varphi = e^{i\varphi}$$

Поэтому $z \in \mathbb{C}, |z| = r,\ z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

$$z = re^{i\varphi}$$

Определение 3.5.1. $W(x) = U(x) + iV(x),\ x \in \mathbb{R}, V(x) \in \mathbb{R}$
Положим $\frac{dW}{dx} = U'(x) + iV'(x)$, тогда

$$\int_a^b W(x)dx = \int_a^b U(x)dx + i\int_a^b V(x)dx$$

$e^{i\pi} = -1$

Глава 4

Ряды Фурье

4.1 Ортогональные системы

В параграфах (4.1) - (4.3) $\mathbb{X}$ — линейное бесконечномерное пространство(действительное или комплексное, со скалярным произведением).

$$X(\cdot\ ,\ \cdot),\ \|x\| = \sqrt{(x,x)}.$$

$\mathbb{K}$ — некоторое счетное или конечное множество.

Определение 4.1.1. Система векторов $\{x_k : k \in \mathbb{K}\},\ x \in \mathbb{X}$ — ортогональная система(ОС). $(x_i, x_j) = 0,\ \forall i, j \in \mathbb{K}, i \neq j$ (и система не нулевая). Если $(x_i, x_i) = 1$, то система называется ортонормированной.

Теорема 4.1.1. *Ортогональная система векторов линейно независима, то есть линейно не зависима каждая ее конечная подсистема.*

Доказательство. Определение линейной независимости:

$$\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_i x_i + \cdots = 0 \Longleftrightarrow \alpha_i = 0,\ \forall i$$

Скалярно умножим все члены на x_i, тогда получим:

$$\alpha_1(x_1, x_i) + \cdots + \alpha_i(x_i, x_i) + \cdots = (0, x_i)$$
$$\alpha_i(x_i, x_i) = 0$$
$$\alpha_i = 0$$

Равенство (4.1) следует из определения (4.1.1), равенство (4.1) следует из того, что $(x_i, x_i) \neq 0$ (так как система не нулевая). □

4.2 Коэффициенты Фурье

Определение 4.2.1. Пусть $\{e_k :\ k \in \mathbb{K}\}$ — ОНС в $\mathbb{X}$, $\{(x, e_k)\}, x \in \mathbb{X}$ называется коэффициентами Фурье элемента x в ОНС e_k.

Лемма 4.2.1. *Если система векторов $e_1, \ldots, e_n$ пространства $\mathbb{X}$ — ОН, то $\forall x \in \mathbb{X}$ вектор $h = x - x_e$, где*

$$x_e = \sum_{k=1}^{n} (x, e_k) e_k \tag{4.2.1}$$

ортоганален подпространству $\mathbb{L} = \langle e_1, \ldots, e_n\rangle$ (натянотому на векторы $e_1, \ldots, e_n$)

Доказательство. Достаточно проверить, что скалярное произведение
$(h, e_j) = 0, \ \forall j = 1, \dots, n$

$$(h, e_j) = (x, e_j) - \sum_{k=1}^{n}(x, e_k)(e_k, e_j) = (x, e_j) - (x, e_j) = 0$$

□

Лемма 4.2.2 (теорема Пифагора). *Если векторы $x_1, \dots, x_n$ попарно ортогональны и $x = x_1 + \dots + x_n$, то $\|x\|^2 = \|x_1\|^2 + \dots + \|x_n\|^2$*

Доказательство. $(x, x) = (\sum\limits_{i=1}^{n} x_i, \sum\limits_{i=1}^{n} x_i) = \sum\limits_{i,j=1}^{n}(x_i, x_j) = \sum\limits_{i=1}^{n}(x_i, x_i)$ □

Теорема 4.2.1 (экстремальное свойство коэффициентов Фурье). *Если $e_1, \dots, e_n$ — ОНС пространства $\mathbb{X}$, то $\forall x \in \mathbb{X}$ и $\forall y = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n$ имеет место неравенство:*

$$\|x - \sum_{k=1}^{n}(x, e_k)e_k\| \le \|x - \sum_{k=1}^{n}\alpha_k e_k\|,$$

в котором равенство возможно при условии: $\alpha_k = (x, e_k)$ $\forall k = 1, \dots, n$.

Доказательство. Представим $x - y$ в виде $x - y = (x_e - y) + h$, где x_e, h определены в лемме (4.2.1).
По лемме (4.2.1) $h \perp (x_e - y) \in \mathbb{L}$. По теореме Пифагора (лемма 4.2.2):

$$\|x - y\|^2 = \|x_e - y\|^2 + \|h\|^2 = \|x_e - y\|^2 + \|x - x_e\|^2 \ge \|x - x_e\|^2$$

равенство возможно, когда коэффициенты α_k совпадают с коэффициентами Фурье. □

Замечание 4.2.1. Теорема (4.2.1) показывает, что вектор x_e является наилучшей в смысле нормы пространства $\mathbb{X}$, аппроксимацией вектора x подпространства $\mathbb{L} = \langle e_1, \dots, e_n \rangle$, так что наименьшее уклонением вектора x от $\mathbb{L}$ равно $\|x - x_e\|$.

Теорема 4.2.2 (неравенство Бесселя). *Если $\{e_1, \dots, e_n\}$ — ОНС в $\mathbb{X}$, то $\forall x \in \mathbb{X}$ справедливо неравенство:*

$$\sum_{k=1}^{n} |(x, e_k)|^2 \le \|x\|^2 \tag{4.2.2}$$

Если $\{e_k : k \in \mathbb{K}\}$ — ОНС, то $\forall x \in \mathbb{X}$

$$\sum |(x, e_k)|^2 \le \|x\|^2 \tag{4.2.3}$$

Доказательство. По лемме (4.2.1)

$$x = \sum_{k=1}^{n}(x, e_k)e_k + h,$$

при чем система векторов $e_1, \dots, e_n, h$ — ортогональна в $\mathbb{X}$
по теореме Пифагора получаем:

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |(x, e_k)|^2 + \|h\|^2 \tag{4.2.4}$$

остюда следует (4.2.2), (так как это имеет место для любой конечной системы векторов), отсюда следует (4.2.3). □

Замечание 4.2.2. Из (4.2.4) следует формула наименьшего отклонения:

$$\|x - x_e\|^2 \equiv \|x - \sum_{k=1}^{n}(x, e_k)e_k\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n}|(x, e_k)|^2 \tag{4.2.5}$$

Переформулируем понятие коэффициентов Фурье для произвольной ОС(не обязательно нормированной) $\{f_k\}$.
Для этого по этой системе построим ОНС.
$\{e_k = \frac{f_k}{\|f_k\|}\}$, используем ортгональное разложение:

$$x = x_e + h, \;\; x = \sum_{k=1}^{n}(x, e_k)e_k + h = \sum_{k=1}^{n}\frac{(x, f_k)}{\|f_k\|^2}f_k + h$$

Определение 4.2.2. $\{e_k = \frac{(x,f_k)}{\|f_k\|^2}\}$ — называется коэффициентами Фурье вектора x в ОС $\{f_k\}$.
Заменим в неравенстве (4.2.3), e_k на $\frac{f_k}{\|f_k\|}$ получим неравенство Бесселя для произвольной ОС.

$$\sum_{k\in\mathbb{K}}\frac{|(x, f_k)|^2}{\|f_k\|^2} \leq \|x\|^2, \;\; \{f_k, k \in \mathbb{K}\} \tag{4.2.6}$$

Или, в других обозначения:

$$\sum_{k\in\mathbb{K}}|C_k|^2\|f_k\|^2 \leq \|x\|^2$$

Пример 4.2.1. В пространстве $\mathbb{X} = \mathcal{R}_2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$.
Рассмотрим ОС $\{e^{ikt} : k \in \mathbb{Z}\}$.
В соответствии с определением (4.2.2) коэффициенты Фурье C_k функции f в системе $\{e_{ik}\}$ выражаются формулами:

$$C_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}dt \tag{4.2.7}$$

из неравенства Бесселя (4.2.6) $\forall f \in \mathcal{R}_2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}|C_k|^2 \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|^2dt \tag{4.2.8}$$

Пример 4.2.2. Аналогично находим коэффициенты Фурье.
$\{\frac{1}{2}a_0, a_k, b_k : k \in \mathbb{N}\}$ функции $f \in \mathcal{R}([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ в ОС $\{1, \cos kx, \sin kx : k \in \mathbb{N}\}$:

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos kt dt, \;\; k = 0, 1, \ldots \tag{4.2.9}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin kt dt, \;\; k = 1, 2, \ldots \tag{4.2.10}$$

по неравенству Бесселя все принимает вид:

$$\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(|a_k|^2 + |b_k|^2) \leq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|^2dt \tag{4.2.11}$$

Замечание 4.2.3. Сравнивая равенства (4.2.9), (4.2.10) и (4.2.7) с учетом формулы Эйлера получаем:

$$C_k = \begin{cases} \frac{1}{2}(a_k - ib_k), \;\; k \geq 0 \\ \frac{1}{2}(a_k + ib_{-k}), \;\; k < 0 \end{cases} \tag{4.2.12}$$

4.3 Ряд Фурье

Определение 4.3.1. Если $\{f_1, \dots, f_k, \dots\}$ — ОС в $\mathbb{X}$, а $x \in \mathbb{X}$, то можно составить ряд:

$$x \sim \sum_{k=1}^{\infty} C_k f_k,$$

где $C_k = \frac{(x, f_k)}{\|f_k\|^2}$.
Этот ряд называется рядом Фурье вектора x по ОС $\{f_k\}$.
Ряд Фурье по ОНС $\{e_k\}$ имеет вид:

$$x \sim \sum_{k=1}^{\infty} (x, e_k) e_k$$

Определение 4.3.2. Говорят, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} y_k, y_k \in \mathbb{X}$ сходится в $\mathbb{X}$ к вектору $x \in \mathbb{X}$ (сходится по норме($\|\cdot\|$) пространства $\mathbb{X}$), если

$$\lim_{n\to\infty} \|x - \sum_{k=1}^{n} y_k\| = 0$$

При этом пишем $x \overset{\mathbb{X}}{=} \sum\limits_{k=1}^{\infty} y_k$ по норме пространства $\mathbb{X}$.

Теорема 4.3.1. $\{e_k : k \in \mathbb{N}\}$ *— ОНС в* $\mathbb{X}, x \in \mathbb{X}$, *где*
$x \overset{\mathbb{X}}{=} \sum\limits_{k=1}^{\infty} (x, e_k) e_k \iff$ *когда* $\|x\|^2 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} |(x, e_k|^2$.
Это равенство называется равенством Парсеваля и представляет собой обобщение теоремы Пифагора на случай бесконечномерного пространства.

Определение 4.3.3. Система $\{x_k : k \in \mathbb{K}\}$ векторов в пространстве $\mathbb{X}$ называется полной в множестве $\mathbb{E} \subset \mathbb{X}$, если любой вектор $x \in E$ можно сколь угодно точно в смысле нормы пространства $\mathbb{X}$ приблизить к конечной линейной комбинации векторов системы.

Теорема 4.3.2. *Пусть* $\{e_1, \dots, e_n, \dots\}$ *— ОНС в* $\mathbb{X}$, *тогда следующее условие эквивалентны:*

1. $\{e_k\}$ *полна в множестве* $\mathbb{E} \subset \mathbb{X}$.
2. $\forall x \in \mathbb{E} \subset \mathbb{X}$ *имеет место разложение (в ряд Фурье)* $x \overset{\mathbb{X}}{=} \sum\limits_{k=1}^{\infty} (x, e_k) e_k$
3. $\forall x \in \mathbb{E} \subset \mathbb{X}$ *имеет место равенство Парсеваля:* $\|x\|^2 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} |(x, e_k)|^2$.

Доказательство. Из $1 \Rightarrow 2$ в силу экстремального свойства коэффициентов Фурье.
Из $2 \Rightarrow 3$ по теореме (4.3.1)
Из $3 \Rightarrow 1$, по скольку по формуле уклонений

$$\|x - \sum_{k=1}^{n} (x, e_k)\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |(x, e_k)|^2 \to 0, \text{при } n \to \infty$$

$\square$

4.4 Тригонометрический ряд Фурье

$\mathbb{X} = \mathbb{R}_2([-\pi, \pi], \mathbb{C}), e_k = \{e^{ikx} : k \in \mathbb{Z}\}, f \in \mathbb{R}([-\pi, \pi], \mathbb{C})$

$$C_k(f) = C_k = \frac{1}{2} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}dx \tag{4.4.1}$$

Сопоставим функцию

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k e^{ikx} \tag{4.4.2}$$

Определение 4.4.1. Если нам дан тригонометрический ряд Фурье в комплексной записи, то его n-ая частная сумма равна:

$$S_n(x) = S_n(f, x) = \sum_{k=-n}^{n} C_k e^{ikx} \tag{4.4.3}$$

Определение 4.4.2. Ряд Фурье функции $f \in \mathbb{R}([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ по системе $\{1, \cos kx, \sin kx : k \in \mathbb{N}\}$ называется тригонометрическим рядом Фурье и записывается следующим образом:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) \tag{4.4.4}$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx,\ \ k = 0, 1, \dots \tag{4.4.5}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx,\ \ k = 1, 2, \dots \tag{4.4.6}$$

Если функция f — действительная, то $a_k, b_k \in \mathbb{R}$ и $\underline{C_k} = \overline{C_k}$ $(k = 0, 1, \dots)$.

Определение 4.4.3. Тригонометрические многочлены $D_n(x) = \sum\limits_{k=-n}^{n} e^{ikx}, K_n(x) = \frac{1}{n+1} \sum\limits_{m=0}^{n} D_m(x)$ называются соответственно ядром Дирихле и ядром Фейера.

$$a_1, \dots, a_n \to a,\ \text{ при } n \to \infty$$
$$\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \to a,\ \text{ при } n \to \infty$$

а обратное не верно.

$$D_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx} \tag{4.4.7}$$

$$K_n(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{m=0}^{n} D_m(x) \tag{4.4.8}$$

Теорема 4.4.1. *При $n = 0, 1, \dots$ имеем:*

$$D_n(x) = \frac{\sin((n + \frac{1}{2})x)}{\sin \frac{x}{2}} \tag{4.4.9}$$

$$K_n(x) = \frac{1}{n+1} \frac{1 - \cos((n+1)x)}{1 - \cos x} \tag{4.4.10}$$

$$\frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} D_n(x)dx = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} K_n(x)dx = 1 \tag{4.4.11}$$

кроме того,

$$K_n(x) \geq 0, K_n(x) \leq \frac{2}{(n+1)(1-\cos\delta)}, \textit{ где } 0 < \delta \leq |x| \leq \pi \tag{4.4.12}$$

Доказательство. Согласно (4.4.7)

$$D_n(x) = \frac{e^{i(n+1)x} - e^{-inx}}{e^{ix} - 1} \tag{4.4.13}$$

чтобы получить (4.4.9) домножим здесь числитель и знаменатель на $e^{-ix/2}$.
Подставим (4.4.13), в определение ядра $K_n(x)$, получим:

$$K_n(x) = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{e^{-ix} - 1}{(e^{-ix}-1)(e^{ix}-1)} \sum_{m=0}^{n} (e^{i(m+1)x} - e^{-imx}) =$$
$$\frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{2 - (e^{ix} + e^{-ix})} \sum_{m=0}^{n} [(e^{imx} + e^{-imx}) - (e^{i(m+1)x} + e^{-i(m+1)x})] =$$
$$\frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{2 - 2\cos x} (2 - (e^{i(m+1)x} + e^{-i(m+1)x}))$$

откуда следует (4.4.10).
Значит $K_n(x) \geq 0$ и выполняется (4.4.12). А (4.4.11) непосредственно следует из (4.4.7). □

Далее предпологаем, что функция f, изначально определенная на $[-\pi, \pi]$, продолжена на $\mathbb{R}$ как 2π-периодическая функция.
Если $f \in C[-\pi, \pi]$, то ее 2π-периодическое продолжение непрерывно на $\mathbb{R}$

$$(f \in C_{2\pi}) \Longleftrightarrow f(-\pi) = f(\pi)$$

Лемма 4.4.1 (интегральное представление частичной суммы ряда Фурье)**.**

$$\forall x \in \mathbb{R}: \; S_n(f, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) D_n(t) dt \tag{4.4.14}$$

Доказательство. Пусть S_n — частичная сумма, тогда:

$$S_n(f,x) = \sum_{k=-n}^{n} C_k e^{ikx} = \sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) e^{-iku} du \cdot e^{ikx} =$$
$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \sum_{k=-n}^{n} e^{ik(x-u)} du = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) D_n(x-u) du =$$
$$\frac{1}{2\pi} \int_{x-\pi}^{x+\pi} f(x-t) D_n(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) D_n(t) dt$$

Комментарий. Использовалась замена: $x - u = t$.

Отметим, что последнее равенство выполняется, поскольку в следствии периодичности функции безразлично по какому инетрвалу интегрировать, лишь бы его длина была равна 2π.
□

Определение 4.4.4. Средние арифмитические частичных сумм:

$$S_n(f,x), \delta_n(f,x) = \delta_n(x) = \frac{S_0(x) + \cdots + S_n(x)}{n+1} \tag{4.4.15}$$

Называются полиномами Фейера.

Теорема 4.4.2 (теорема Фейера)**.** *Если функция $f \in C_{2\pi}$, то*

$$\delta_n(x) \overset{\mathbb{R}}{\rightrightarrows} f(x) \tag{4.4.16}$$

Доказательство. Согласно формулам (4.4.15), (4.4.14) и (4.4.7) имеем:

$$\delta_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x-t) K_n(t) dt \tag{4.4.17}$$

поэтому из (4.4.11) следует, что:

$$f(x) - \delta_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} (f(x) - f(x-t)) K_n(t) dt \tag{4.4.18}$$

$\varepsilon > 0,\ M = \max|f(x)|,\ x \in \mathbb{R}$. Поскольку функция f — равномерно непрерывна, то найдется такое $\delta > 0$, что:

$$|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{4.4.19}$$

Согласно (4.4.12) можно затем выбрать такое $N = N(\varepsilon, \delta)$, что

$$n > N, \delta \leq |t| \leq \pi \Rightarrow K_n(t) \leq \frac{\varepsilon}{4M} \tag{4.4.20}$$

Из (4.4.19) и $K_n(t) \geq 0$ получаем:

$$\int\limits_{-\delta}^{\delta} |f(x) - f(x-t)||K_n(t)| dt < \frac{\varepsilon}{2} \int\limits_{-\pi}^{\pi} K_n(t) dt = \pi\varepsilon,\ n = 1, 2, \ldots \tag{4.4.21}$$

$$\left\{ \int\limits_{-\pi}^{\delta} + \int\limits_{\delta}^{\pi} \right\} = |f(x) - f(x-t)||K_n(t)| dt \leq \frac{\varepsilon}{4M} \int\limits_{-\pi}^{\pi} 2M dt = \pi\varepsilon,\ \forall n > N \tag{4.4.22}$$

В силу (4.4.19), (4.4.21) и (4.4.22) получаем:

$$|f(x) - \delta_n(x)| < \varepsilon,\ \forall x \in \mathbb{R},\ \forall n > N \tag{4.4.23}$$

$\square$

Следствие. *Если две непрерывные 2π-периодические функции f, g имеют один и тот же ряд Фурье, то $f(x) = g(x),\ \forall x \in \mathbb{R}$*

Доказательство. Действительно, если $\delta_n(x)$ — среднее арифметическое этого ряда, то:

$$\delta_n(x) \to f(x),\ \delta_n \to g(x)$$

$\square$

Следствие. *Если* $f \in C_{2\pi}$ *и* $\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx \equiv 0$, *то* $\forall n \in \mathbb{Z}: \ f(x) \equiv 0$. *Таким образом ОС* $\{e^{ikx}: \ k \in \mathbb{Z}\}$ *нельзя дополнить ненулевым элементом.*

Доказательство. Это вытекает из предыдущего следствия, если положить $g = 0$. □

Следствие. *Ряд Фурье функции* $f \in C_{2\pi}$ *либо сходится в каждой точке* x *к функции* $f(x)$, *либо вовсе расходится в этой точке.*

Доказательство. НАПИСАТЬ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. □

Замечание 4.4.1. Ряд Фурье для выражения функции в самом деле может в некоторых точках расходится.

Теорема 4.4.3 (теорема Вейерштрасса)**.** *Если* $f \in C_{2\pi}$, *то* $\forall \varepsilon > 0$ *существует такой тригонометрический многочлен* $T(x): \ \forall x \in \mathbb{R}$*:*

$$|f(x) - T(x)| < \varepsilon$$

Доказательство. Без доказательства. □

Из теоремы (4.4.3) следует теорема (4.4.4).

Теорема 4.4.4 (теорема Вейерштрасса)**.** *Если* $f \in C[a,b]$, *то* $\forall \varepsilon > 0$ *существует такой алгеброический многочлен* $P(x): \ \forall x \in [a,b]$*:*

$$|f(x) - P(x)| < \varepsilon$$

Доказательство. Положив $t = \frac{x-a}{b-a}\pi$, и $x = \frac{b-a}{\pi}t + a$, получим функцию $\varphi(t) = f(a + \frac{b-a}{\pi}t)$ на отрезке $[0,\pi]$. Продолжим ее в начале четным образом $\varphi(-t) = \varphi(t), \ t \in [\pi, 0)$. Найдем по теореме (4.4.3) такой тригонометрический полином $T(x): |\varphi(t) - T(t)| < \frac{\varepsilon}{2}, \ \forall t \in \mathbb{R}$. Всякий тригонометрический полином раскладывается по Тейлору, сходится равномерно на любом конечном интервале.
Пусть P_n — частичная сумма ряда Тейлора для $T(t)$ такая что: $|T(t) - P_n(t)| < \frac{\varepsilon}{2}, \ 0 \leq t \leq \pi$. Тогда $|\varphi_n(t) - P_n(t)| < \varepsilon$, при $0 \leq t \leq \pi$. Сделав обратную замену в $P_n(t): t = \frac{x-a}{b-a}\pi$, получим многочлен $Q_n(x)$, удовлетворяющий условию: $|f(x) - Q_n(x)| < \varepsilon, \ a \leq x \leq b$. □

Получаем еще одно следствие от теоремы Фейера — полнота тригонометрической системы функций $C_2[-\pi,\pi]$ и более общо $\mathcal{R}_2[-\pi,\pi]$.

Теорема 4.4.5 (о полноте тригонометрической системы)**.** *Любая функция* f *из множества* $f \in \mathcal{R}[-\pi,\pi]$ *может быть сколь угодно точно приближена в среднем, то есть по норме:*

1. *Кусочно-постоянной функции* $[-\pi,\pi]$
2. *Непрерывными на отрезке* $[-\pi,\pi]$ *функциями, принимающие равные значения на концах* $[-\pi,\pi]$
3. *Тригонометрическими полиномами*

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай действительно значимых функций.

1. Поскольку f — интегрируема, то: $\forall\varepsilon > 0$ $\exists$ разбиение $-\pi = x_0 < x_1 < \dots < x_n = \pi$ отрезка $[-\pi, \pi]$, что: $0 \le \triangle := \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)dx - \sum\limits_{i=1}^{n} m_i \triangle x_i < \varepsilon$, где
$$m_i = \inf\{f(x)\},\ x \in [x_{i-1}, x_i),\ \triangle x_i = x_i - x_{i-1}$$
Полагая $g(x) = \begin{cases} m_i, \text{если } x \in [x_{i-1}, x_i) \\ 0, \text{если } x = \pi \end{cases}$, $M_f = \sup\{|f(x)|\}, |x| \le \pi$.
Получим: $\int\limits_{-\pi}^{\pi} (f(x) - g(x))^2 dx \le \int\limits_{-\pi}^{\pi} (|f(x)| + |g(x)|)(|f(x)| - |g(x)|)dx \le$
$2M_f \int\limits_{-\pi}^{\pi} (f(x) - g(x))dx = 2M_f\triangle \le 2M_f\varepsilon$.

2. Достаточно уметь приблежать к среднему кусочно постоянной функции. Пусть g — такая функция, с точками разрыва $x_1, \dots, x_n$. Удобно присваивать $-\pi = x_1, x_n = \pi$. Очевидно, какого бы ни было $\varepsilon > 0$ $\exists\delta > 0$, что δ-окрестности точек $x_1, \dots, x_n$ не пересекаются и $2\delta_n M < \varepsilon$, где $M = \sup\{|g(x)| : |x| \le \pi\}$ Заменим функцию g на каждом из отрезков $[-\pi, -\pi + \delta], [x_1 - \delta, x_1 + \delta], (i = 2, \dots, n-1), [\pi - \delta, \pi]$ линейной функцией, принимающей на концах этих отрезков соответственно:
$0, g(-\pi + \delta), g(x_i - \delta), g(x_i + \delta), (i = 2, \dots, n-1), g(\pi - \delta), 0$. Получим кусоно линейную, непрерывную на кусочном отрезке $[-\pi, \pi]$ функцию $h, h(-\pi) = h(\pi) = 0$,
$|h(x)| \le M,\ \forall x \in [-\pi, \pi]$.
Значит
$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} (g - h)^2 dx \le 2M \int\limits_{-\pi}^{\pi} (|g - h|)dx = \tag{4.4.24}$$
$$2M \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{x_i - \delta}^{x_i + \delta} (|g - h|)dx \le 2M(2M - 2\delta)n < 4M\varepsilon \tag{4.4.25}$$

3. Осталось показа, что можно приблизить любую функцию класса 2. Но по теореме Фейера для любой функции типа h, найдется такой тригонометрический многочлено, что:
$$\forall\varepsilon > 0,\ T : |h(x) - T(x)| < \varepsilon,\ \forall x \in [-\pi, \pi]$$
$$\left(\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} (h(x) - T(x))^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon$$
Ссылаясь на неравенство треугольника, пространства $\mathcal{R}_{\in}[-\pi, \pi]$ заключаем, что теорема доказана.

□

Из полноты тригонометрической системы, из теоремы (4.3.2) (третьего условия полноты ОС) и форумлы наименьших уклонений следует теорема (4.4.6).

Теорема 4.4.6. $f \in \mathcal{R}_2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$, *имеем:*

1. $f(x) \overset{\mathcal{R}_2}{=} \frac{a_0(f)}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k(f) \cos kx + b_k(f) \sin kx$, *или в комплексной записи:*
$f(x) \overset{\mathcal{R}_2}{=} \sum\limits_{-\infty}^{+\infty} C_k(f) e^{ikx}$, *где сходимость понимается, как сходимость по норме.*

2. $\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2dx = |\frac{a_0(f)}{2}|^2 + \sum\limits_{k=1}^{\infty}|a_k(f)|^2 + |b_k(f)|^2$, *или в комплексной записи:*
   $\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2dx = \sum\limits_{-\infty}^{+\infty}|C_k(f)|^2$.

3. $\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|f(x) - S_n(f,x)|^2dx = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty}|a_k(f)|^2 + |b_k(f)|^2 = 4\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}|C_k(f)|^2, f \in \mathcal{R}([-\pi,\pi],\mathbb{R})$.

4.5 Обобщение на неограниченные функции

Определение 4.5.1. Пусть $0 < p < \infty, -\infty \le a < b \le +\infty$. Будем писать $f \in \mathcal{R}^p[a,b]$, если существует конечное число точек $x_j, j = 0,1,2,\dots,n$, таких что:

1. $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$
2. Функция f интегрируема по Римману на любом отрезке $f \in \mathcal{R}[\alpha,\beta],\ [\alpha,\beta] \subset (x_{j-1},x_j)$
3. Интеграл $\int\limits_{x_{j-1}}^{x_j}|f(x)|^pdx,\ j = 1,2,\dots,n$ сходится.

Замечание 4.5.1. Формулы (4.4.1), (4.4.5) и (4.4.6), определяющие коэффициенты Фурье $C_k(f), a_k(f), b_k(f)$ имеют смысл для $\forall f \in \mathcal{R}^1[-\pi,\pi]$, так как тогда $f(x)e^{-ikx}, f(x)\cos kx, f(x)\sin kx \in \mathcal{R}^1[-\pi,\pi]$.

Определение 4.5.2 (неравенство Гельдера)**.**

$$\int\limits_a^b|f(x)g(x)|dx \le \left(\int\limits_a^b|f(x)|^pdx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int\limits_a^b|g(x)|^qdx\right)^{\frac{1}{q}}$$

где $q > 1,\ p > 1,\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

$$\int\limits_a^b|f(x)|dx \le (b-a)^{1-\frac{1}{p}}\left(\int\limits_a^b|f(x)|^pdx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\left(\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b|f(x)|^rdx\right)^{\frac{1}{r}} \le \left(\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b|f(x)|^hdx\right)^{\frac{1}{h}}$$

если $h > 1,\ 0 < r < h < \infty$.

Утверждение 4.5.1. теоремы (4.4.5) и (4.4.6) остаются в силе, если в них пространство $\mathcal{R}_2[-\pi,\pi]$ расширить до линейного пространства $\mathcal{R}^2[-\pi,\pi]$:

$$(f,g) = \int f(x)\overline{g(x)}dx$$

Доказательство. Смотри теорему (4.4.5). □

Лемма 4.5.1. *Если $f \in \mathcal{R}^p[a,b](p > 0)$, то $\forall\varepsilon > 0\exists g \in \mathcal{R}[a,b] : \int\limits_a^b|f(x) - g(x)|^pdx < \varepsilon$.*

Доказательство. Доказать самостоятельно. □

4.6 Достаточные условия сходимости тригонометрического ряда Фурье в точке

Лемма 4.6.1 (Римана)**.** *Если* $f \in \mathcal{R}^1[a,b]$, *то*

$$\int\limits_a^b f(x)e^{i\lambda x}dx \to 0 \tag{4.6.1}$$

$$\int\limits_a^b f(x)\cos\lambda x dx \to 0 \tag{4.6.2}$$

$$\int\limits_a^b f(x)\sin\lambda x dx \to 0, \textit{при } \lambda \to \infty,\ \ \lambda \in \mathbb{R} \tag{4.6.3}$$

Доказательство. Будем считать, что функция $f(x)$ — действительная, так как в случае $f(x)$ — комплексная легко сводится к этому, согласно лемме (4.5.1) при $p = 1$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists g$ (кусочно-постоянная):

$$\int\limits_a^b |f(x) - g(x)|dx < \frac{\varepsilon}{2} \tag{4.6.4}$$

Пусть $g(x) = m, x \in [x_{j-1}, x_j], j = 1, \ldots, n.$ $(x_0 = a, x_n = b)$, тогда:

$$\int\limits_a^b g(x)e^{i\lambda x}dx = \sum_{j=1}^n \int\limits_{x_{j-1}}^{x_j} m_j e^{i\lambda x}dx = \frac{1}{ix}\sum_{j=1}^n (m_j e^{i\lambda x})\Bigg|_{x_{j-1}}^{x_j} \to 0, \text{ при } \lambda \to \infty$$

Отсюда из (4.6.4) получим:

$$\left|\int\limits_a^b f(x)e^{i\lambda x}dx\right| = \left|\int\limits_a^b (f(x) - g(x))e^{i\lambda x}dx + \int\limits_a^b g(x)e^{i\lambda x}dx\right| \le$$
$$\int\limits_a^b |f(x) - g(x)|e^{i\lambda x}dx + \left|\int\limits_a^b g(x)e^{i\lambda x}dx\right| \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Итак, (4.6.1) доказано.
Отделяя действительные и мнимые части, получаем (4.6.2), (4.6.3) □

Определение 4.6.1. Говорят, что функция f, заданная в проколотой окрестности точки x, удовлетворяет условиям Дини, если при $x \in \mathbb{R}$ выполняется:

1. В точке x существуют оба предела:

$$f(x-0) = \lim_{t\to+0} f(x-t)$$
$$f(x+0) = \lim_{t\to+0} f(x+t)$$

2. $\int\limits_0^\delta \frac{f(x-t)-f(x-0)}{t}dt$, $\int\limits_0^\delta \frac{f(x+t)-f(x+0)}{t}dt$ сходятся абсолютно на $[0,\delta]$, $\forall\delta > 0$

Теорема 4.6.1. *f — 2π-периодическая функция $f \in \mathcal{R}^1[-\pi,\pi]$, $x \in \mathbb{R}$.*

$$\sum_{\infty} C_k(f)e^{ikx} = \frac{f(x-0)+f(x+0)}{2} \tag{4.6.5}$$

Доказательство. $S_n(f,x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x-t)D_n(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{0} f(x-t)D_n(t)dt + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{\pi} f(x-t)D_n(t)dt =$
$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{\pi} f(x+t)D_n(t)dt + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{\pi} f(x-t)D_n(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{\pi}(f(x-t)+f(x+t))D_n(t)dt =$
$\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} \frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}D_n(t)dt + \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}\left(\frac{f(x-t)-f(x-0)}{2} + \frac{f(x+t)-f(x+0)}{2}\right)D_n(t)dt =$
$\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2} + \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}\left(\frac{f(x-t)-f(x-0)}{2\sin\frac{t}{2}} + \frac{f(x+t)-f(x+0)}{2\sin\frac{t}{2}}\right)\sin((n+\frac{1}{2})t)\ dt$
Поскольку, $2\sin\frac{t}{2} \sim t$, $t \to 0$, то из условий Дини следует, что $g_x(t) \in \mathcal{R}^1[0,\pi]$ абсолютно интегрируема. На основании леммы Римана:

$$\int\limits_{0}^{\pi} g_x(t)\sin((n+\frac{1}{2})t)dt \to 0, \text{при } n \to \infty$$

Отсюда из (4.6) следует (4.6.5) □

Следствие. *Пусть f — ограниченная функция с периодом 2π, имеющая разрыв первого рода и пусть имеет левые и правые производные. Тогда ряд Фурье сходится всюду, а его сумма в точке разрыва непрерывна и равна: $f(x) = \frac{1}{2}(f(x+0)+f(x-0))$*

4.7 Гладкость функции и скорость убывания коэффициентов Фурье

Определение 4.7.1. Функцию f называют кусочно дифференцируемой, если существует ее разбиение $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, такое что на каждом интервале $(x_{j-1},x_j)f$ — дифференцируема, а в точках x_{j-1},x_j существуют конечные значения $f(x_{j-1}+0), f(x_j-0), f'_+(x_{j-1}), f'_-(x_j)$, при $\forall j = 1,\dots,n$, $f' \in Q[a,b]$
Через $C^{(k)}_{2\pi}(k = 0,1,\dots)$ обозначим класс 2π-периодических (комплексно-значимых) функций, имеющих на $\mathbb{R}$ k-ую непрерывную производную. $f^{(k)}$, $(f^{(k)} \in C_{2\pi} = C^{(0)}_{2\pi})$.

Лемма 4.7.1 (о дифференцировании ряда Фурье)**.** *Если f — непрерывна, $f \in C_{2\pi}$ и f кусочно дифференцируема на $[-\pi,\pi]$, то $f' \sim \sum\limits_{-\infty}^{+\infty} C_k(f')e^{ikx}$ может быть получен формальным дифференцированием ряда Фурье $f \sim \sum\limits_{-\infty}^{+\infty} C_k(f)e^{ikx}$ самой функции, то есть:*

$$C_k(f') = ikC_k(f),\ k \in \mathbb{Z} \tag{4.7.1}$$

Доказательство. Интегрированием по частям находим:

$$C_k(f') = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f'(x)e^{-ikx}dx = \frac{1}{2\pi}f(x)e^{-ikx}\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{ik}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}dx = ikC_k(f)$$

□

Теорема 4.7.1. *Пусть* $f \in C_{2\pi}^{(m-1)}$, $(m \in \mathbb{N})$, $f^{(m-1)}$ *— кусочно-дифференцируема на* $[-\pi, \pi]$. *Тогда:*

$$C_k(f^{(m)}) = (ik)^m C_k(f), \;\; k \in \mathbb{Z} \tag{4.7.2}$$

$$|C_{\pm k}(f)| = \frac{\gamma_k}{k^m} = \bar{\bar{o}}\left(\frac{1}{k^m}\right), \;\; k \to \infty, k \in \mathbb{N} \tag{4.7.3}$$

Причем $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \gamma_k^2 < \infty$, $\gamma_k \downarrow 0$, $\gamma_k = \bar{\bar{o}}\left(\frac{1}{k}\right)$.

Доказательство. Соотношение (4.7.2) получается в результате m-кратного использования (4.7.1).
$C_k(f^{(m)}) = ikC_k(f^{(m-1)}) = \cdots = (ik)^m C_k(f), \; k \in \mathbb{Z}$.
Полагаю $\gamma_k = |C_k(f^{(m)})|$, с учетом неравенства Бесселя:

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} \gamma_k^2 \leq \frac{1}{2\pi}$$

Из (4.7.2) получаем (4.7.3). □

Теорема 4.7.2. $f \in C_{2\pi}^{(m-1)}$, $m \in \mathbb{N}$, $f^{(m-1)}$ *— кусочно-дифференцируема на* $[-\pi, \pi]$, *тогда ряд Фурье сходится абсолютно и равномерно на* $\mathbb{R}$, *причем*

$$\max_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - S_n(f, x)| = \bar{\bar{o}}\left(\frac{1}{n^{m-1/2}}\right), \;\; n \to \infty \tag{4.7.4}$$

Доказательство. Поскольку $f \in C_{2\pi}$ и удовлетворяет условиям Дини в любой точке, то

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} S_n(f, x), \;\; \forall x \in \mathbb{R}$$

Поэтому, с учетом (4.7.3) имеем:

$$|f(x) - S_n(f, x)| = \left| \sum_{|k| \geq n+1} C_k(f) e^{ikx} \right| \leq \left| \sum_{|k| \geq n+1} |C_k(f) e^{ikx}| \right| = \tag{4.7.5}$$

$$2 \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\gamma_k}{k^m} \leq 2 \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \gamma_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^{2m}} \right)^{\frac{1}{2}} \tag{4.7.6}$$

(В силу неравенства Коши-Буняковского).
Так как

$$\left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^{2m}} \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_{n+1}^{\infty} \frac{dx}{x^{2m}} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2m-1}} \cdot \frac{1}{n^{m-1/2}}$$

То из (4.7.6) получаем (4.7.4) □

Замечание 4.7.1. Поскольку $a_k(f) = C_k(f) + C_{-k}(f)$, $b_k(f) = i(C_k(f) - C_{-k}(f))$, то из (4.7.3) следует, что

$$|a_k(f)| = \frac{\alpha_k}{k^m}, \;\; |b_k(f)| = \frac{\beta_k}{k^m}, \;\; k \in \mathbb{N}, \; \sum \alpha_k^2 < \infty, \; \sum \beta_k^2 < \infty$$

Часть II

Интегралы

Глава 5

Кратные интегралы

5.1 Определение интеграла Римана на n-ом промежутке

Пусть $\mathbb{R}^n$ — n-мерное арифметическое евклидово пространство(ЕП).
($\mathbb{R}^2$ отождествляется oxy, $\mathbb{R}^3$ с $oxyz$).
$(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ далее обозначается через x.

Определение 5.1.1. Множество $I = \{x \in \mathbb{R}^n : a_i \leq x \leq b_i, \ i = 1, \ldots, n\}$ называется промежутком или координатным параллелепипедом. По аналогии с одномерным случаем записывают:

$$a = (a_1, \ldots, a_n), \ b = (b_1, \ldots, b_n)$$

Определение 5.1.2. Число $|I| := \prod\limits_{i=1}^{n}(b_i - a_i)$ называют объемом, либо мерой промежутка. Объем(меру) обозначают символами: $v(I), \mu(I)$.

При $n = 1, \mu(I)$ — длина отрезка
При $n = 2, \mu(I)$ — площадь прямоугольника
При $n = 3, \mu(I)$ — объем прямоугольного параллелепипеда

Разобьем каждый из координатных отрезков $[a_i, b_i], \ i = 1, \ldots, n$ на конечное число более мелких отрезков. Эти разбиения индуцируют разбиение промежутка I на более мелкие промежутки, получающиеся прямым произведением промежутков a_i, b_i.

Определение 5.1.3 (Декартово произведение)**.** $X \times Y := \{(x, y) : x \in X, y \in Y\}$

Определение 5.1.4. Описанное представление промежутка I в виде объеденения промежутков i, j из более мелких промежутков i, j назовем разбиением и обозначим $T(k = k_T)$.

Определение 5.1.5. $\lambda(T) = \max\{d(I_1), \ldots, d(I_k)\}$. $d(I_j)$ называется диаметром разбиения T.
Пусть $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$ — функция, определенная на промежутке I,
$T = \{I_1, \ldots, I_k\}$ — разбиение промежутка I.
$\xi = (\xi^1, \ldots, \xi^k)$ — некоторый набор точек ξ^j, таких что $\xi^j \in I_j$.

Определение 5.1.6. Сумма $\sigma(f, T, \xi) := \sum\limits_{j=1}^{k} f(\xi^j)|I_j|$ называется интегральной суммой Римана.

Определение 5.1.7. Если существует конечный предел $\mathcal{J}$, $\sigma(f, T, \xi)$, $\lambda(T) \to 0$, то его называют интегралом Римана от функции f на промежутке I:

$$\mathcal{J} = \int\limits_I f(x)dx := \lim_{\lambda(T)\to 0} \sigma(f, T, \xi) \tag{5.1.1}$$

Функцию f называют интегрируемой на промежутке I. Множество таких функций обозначим $\mathcal{R}(I)$. Уточним, что равенство (5.1.1) означает: $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 : \forall T = \{I_1, \dots, I_k\}, \lambda(T) < \delta$ и при любом выборе точек $\xi^j \in I_j, j = 1, \dots, k$ выполняется неравенство:

$$\left|\mathcal{J} - \sum_{j=1}^{k} f(\xi^j)|I_j|\right| < \varepsilon$$

Равносильные отображения интеграла таковы:

$$\int_I f(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 \dots dx_n,\ \underbrace{\int \dots \int}_{n} f(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 \dots dx_n,\ n \in \mathbb{N}$$

Мы видим, что данное определение повторяет определение интеграла Римана, и при $m = 1$ совпадает. Схожесть опеределений позволяет найти сходные методы о решении вопроса условий существования.

5.2 Условие существования кратного интеграла

Теорема 5.2.1. *Если $f \in \mathcal{R}(I)$, то f ограниченна на I. Пусть функция f определена на I, $I \in \mathbb{R}^n$. $T = \{I_j\}$ — разбиение промежутка I.*

$$m_j = \inf_{x \in I_j} f(x),\ M_j = \sup_{x \in I_j} f(x)$$

Определение 5.2.1. Величины $s(f, T) = \sum\limits_j m_j|I_j|,\ S(f, T) = \sum\limits_j M_j|I_j|$ называются соответтественно нижней и верхней суммой Дарбу на промежутке отвечающему разбиению T этого промежутка.

Комментарий. Совершенно аналогично доказывается при $m = 1$ теорема (5.2.2).

Теорема 5.2.2. *Для того, чтобы ограниченная на промежутке функция f была интегрируема на $I \iff$*

$$\lim_{\lambda(T) \to 0} (S(f, T) - s(f, T)) = 0 \tag{5.2.1}$$

Замечание 5.2.1 (критерий интегрируемости Римана). Если обозначить колебания $M_j - m_j$, I_j через $\Omega(f, I_j)$, то (5.2.1) можно записать в виде:

$$\lim_{\lambda(T) \to 0} \sum_j \Omega(f, I_j)|I_j| = 0$$

Определение 5.2.2. Говорят, что множество $\mathbb{E}$ n-мерного пространства имеет меру 0 в смысле Жордана или имеет нулевой n-мерный объем, если для $\forall\varepsilon > 0$ существует покрытие множества $\mathbb{E}$ конечной системой $\{I_j\}$ n-мерных промежутков. $\sum\limits_j |I_j|$ объемов которых меньше ε. В этом случае пишем: $\mu(\mathbb{E}) = 0$

Теорема 5.2.3. *Пусть функция f ограничена на n-мерном промежутке $I \subset \mathbb{R}^n$ и $\mathbb{E}_f$ — множество ее точек разрыва. Тогда, если $\mu(\mathbb{E}_f) = 0$, то $f \in \mathcal{R}(I)$ (интегрируема).*

Комментарий. Эта теорема при $n = 1$ обычно устанавливается в разделе “определенный интеграл”. В общем случае доказывается аналогично.

5.3 Кратный интеграл по множеству

Пусть функция f определена на $\mathbb{E} \subset \mathbb{R}^n$, условимся символом $f_{\mathbb{E}}(x)$ обозначать функцию $= 0$ вне $\mathbb{E}$.

Определение 5.3.1. Интеграл функции по множеству $\mathbb{E}$ определяется соотношением:

$$\int\limits_{\mathbb{E}} f(x)dx := \int\limits_{I} f_{\mathbb{E}}(x)dx \tag{5.3.1}$$

где I — наименьший промежуток, содержащий $\mathbb{E}$.
Если стоящий справа интеграл существует, то он называется интегрируемым по Риману на $\mathbb{E}$.
Совокупность всех интегрируемых на множестве $\mathbb{E}$ функций обозначим $\mathcal{R}(\mathbb{E})$.

Определение 5.3.2. Множество $\mathbb{E} \subset \mathbb{R}^n$ назовем допустимым, если оно ограничено в $\mathbb{R}^n$ и его граница $\partial\mathbb{E}$ есть множество меры нуль (в смысле Жордана).

Пример 5.3.1. Куб, тетраэдер, шар и т. д. являются допустимыми множествами.

Комментарий. Граница $\partial\mathbb{E}$ множества $\mathbb{E}$ состоит из точек, в любой окрестности которых имеются как точки из $\mathbb{E}$, так и точки из дополнения $\mathbb{E}$ до $\mathbb{R}^n$.

Теорема 5.3.1. *Пусть $\mathbb{E}$ — допустимое множество в $\mathbb{R}^n$. f — функция, определенная на $\mathbb{E}$ и пусть множество точек разрыва $\mathbb{E}_f$ множества $\mathbb{E}$ имеют нулевую меру, тогда функция $f \in \mathcal{R}(\mathbb{E})$ (интегрируема).*

Доказательство. Функция $f_{\mathbb{E}}$ по сравнению с функцией f может иметь дополнительные разрывы на $\partial\mathbb{E}$, которые, по условию, имеет меру нуль. Поэтому множество точек разрыва функции $f_{\mathbb{E}}$ так же имеет нулевую меру.
Отсюда из определения (5.3.1) и теоремы (5.2.3) следует, что функция интегрируема. □

5.4 Мера(объем) множества

Определение 5.4.1. Мерой Жордана(или объемом) ограниченного множества $\mathbb{E}$ назовем величину $\mu(\mathbb{E}) := \int\limits_{\mathbb{E}} dx$, если указанный интеграл(Римана) существует. В последнем случае множество $\mathbb{E}$ называют измеримым в смысле Жордана.

Теорема 5.4.1. *Допустимое множество измеримо в смысле Жордана.*

Доказательство. Рассмотрим характеристическую функцию:

$$\aleph_{\mathbb{E}}(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{E} \\ 0, & x \notin \mathbb{E} \end{cases}$$

Комментарий. $\aleph$ — Алеф.

Очевидно, функция $\aleph_{\mathbb{E}}(x)$ имеют разрывы в граничных и только в граничных точках множества $\mathbb{E}$.
По определению (5.3.1):

$$\int\limits_{\mathbb{E}} 1 \cdot dx = \int\limits_{I} \aleph_{\mathbb{E}}(x)dx \tag{5.4.1}$$

где I — наименьший промежуток, содержащий множество $\mathbb{E}$.
А так как множество точек разрыва $\aleph_{\mathbb{E}}(x)$ совпадает с границей $\partial\mathbb{E}$ и $\mu(\partial\mathbb{E}) = 0$, то по

теореме (5.2.3) интеграл (5.4.1) существует.
$\mu(\mathbb{E})$ носит комплексный смысл, если $\mathbb{E}$ — измеримое множество, и

$$\int\limits_I \aleph_{\mathbb{E}}(x)dx = \lim_{\lambda(T)\to 0} s(\aleph_{\mathbb{E}},T) = \lim_{\lambda(T)\to 0} S(\aleph_{\mathbb{E}},T),\ (I \supset \mathbb{E})$$

то

$$s(\aleph_{\mathbb{E}},T) = \sum_j m_j|I_j|,\ S(\aleph_{\mathbb{E}},T) = \sum_j M_j|I_j|$$

где s, S — нижняя и верхняя суммы Дарбу. Но в силу определения функции $\aleph_{\mathbb{E}} : s(\aleph_{\mathbb{E}},T)$ равна сумме объемов промежутков I_j, лежащих в множестве $\mathbb{E}$ (это объем вписанного в $\mathbb{E}$ многогранника), а $S(\aleph_{\mathbb{E}},T)$ равна сумме объемов тех промежутков I_j, которые имеют общие точки с множеством $\mathbb{E}$ (Объем описанного многогранника). $\square$

Утверждение 5.4.1. Мера $\mu(\mathbb{E})$ есть общий предел, при $\lambda(T)\to 0$ объемов, вписанных в $\mathbb{E}$ и описанных около $\mathbb{E}$ многогранников.

Замечание 5.4.1. Можно показать, что измеримы по Жордану только измеримые множества $\Longleftrightarrow$ множество $\mathbb{E}$ является измеримым по Жордану $\Longleftrightarrow$ его границы имеют меру нуль в смысле Жордана.

Замечание 5.4.2. При $n = 2$ понятие измеримого по Жордану множества совпадает с понятием квадрируемой плоской фигуры и меры Жордана с ее площадью.

5.5 Свойства кратных интегралов

На кратные интегралы по ограниченной функции переносятся все свойства интегралов по отрезку.
Доказатаельства аналогичны одномерному случаю:

1. Линейность интеграла по множеству.
   $f_1, \dots, f_n$ интегрируема на множестве $\mathbb{E}$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n$
   $\lambda_1 f_1, \dots, \lambda_n f_n$ так же интегрируема на $\mathbb{E}$ и

$$\int\limits_{\mathbb{E}} \left(\lambda_1 f_1(x) + \dots + \lambda_n f_n(x)\right) dx = \lambda_1 \int\limits_{\mathbb{E}} f_1(x)dx + \dots \lambda_n \int\limits_{\mathbb{E}} f_n(x)dx$$

2. Аддитивность интеграла по множеству.
   Если $\mathbb{E}_1, \mathbb{E}_2$ — допустимые множества в $\mathbb{R}^n$ и $\mu(\mathbb{E}_1\cap\mathbb{E}_2) = 0$ ($\mathbb{E}_1\cap\mathbb{E}_2 = 0$ в частности), а f — функция, определенная на $\mathbb{E}_1\cup\mathbb{E}_2$, то при условии существования интегралов имеет место равенство:

$$\int\limits_{\mathbb{E}_1\cup\mathbb{E}_2} f(x)dx = \int\limits_{\mathbb{E}_1} f(x)dx + \int\limits_{\mathbb{E}_2} f(x)dx$$

3. Общая оценка.
   Если $f \in \mathcal{R}(\mathbb{E})$, то $|f| \in \mathcal{R}(\mathbb{E})$ и имеет место неравенство:

$$\left|\int\limits_{\mathbb{E}} f(x)dx\right| \le \int\limits_{\mathbb{E}} |f(x)|dx$$

4. Интегрирование неравенств. Если функции $f, g \in \mathcal{R}(\mathbb{E})$ и $f(x) \leq g(x),\ x \in \mathbb{E}$, то:

$$\int\limits_{\mathbb{E}} f(x)dx \leq \int\limits_{\mathbb{E}} g(x)dx$$

5. Следствие из 4.
   Если f интегрируема и $m \leq f(x) \leq M, x \in \mathbb{E}$

$$m\mu(\mathbb{E}) \leq \int\limits_{\mathbb{E}} f(x)dx \leq M\mu(\mathbb{E})$$

6. Теорема о среднем.
   Если в дополнении условия 5. множество $\mathbb{E}$ линейно связано, а f — непрерывна на $\mathbb{E}$, то существует $\xi \in \mathbb{E}$, такое что:

$$\int f(x)dx = f(\xi)\mu(\mathbb{E})$$

5.6 Сведение кратного инетграла к повторному

Теорема 5.6.1. *$X \times Y \subset \mathbb{R}^{m+n}$ является прямым произведением промежутков: $X \subset \mathbb{R}^m$ и $Y \subset \mathbb{R}^n$.*
Если для $f(x, y)$ определенной на $X \times Y, (x \in X, y \in Y)$ существует интеграл:

$$\int\limits_{X \times Y} f(x, y)dxdy \tag{5.6.1}$$

и для любого $x \in X$ существует:

$$\mathcal{J}(x) = \int\limits_{Y} f(x, y)dy \tag{5.6.2}$$

то существует так же и повторный интеграл:

$$\int\limits_{X} dx \int\limits_{Y} f(x, y)dy \tag{5.6.3}$$

и выполняется равенство:

$$\int\limits_{X \times Y} f(x, y)dxdy = \int\limits_{X} dx \int\limits_{Y} f(x, y)dy \tag{5.6.4}$$

Доказательство. Любое разбиение T промежутка $X \times Y$ индуцируется собственными разбиениями T_x, T_y. При этом, каждый промежуток разбиения T есть прямое произведения $X_i \times Y_j,\ X_i, Y_j$ — разбиения T_x, T_y.
Очевидно, $|X_i \times Y_j| = |X_i| \cdot |Y_j|$.
Положим $m_{ij} = \inf\limits_{x \in X_i,\ y \in Y_j} f(x, y),\ M_{ij} = \sup\limits_{x \in X_i,\ y \in Y_j} f(x, y)$, так что выполняется следующее неравенство:

$$m_{ij} \leq f(x, y) \leq M_{ij},\ \forall (x, y) \in X_i \times Y_j \tag{5.6.5}$$

Фиксируем $\forall x \in X_i : x = \xi_i$.
Учитывая (5.6.5) получим:

$$m_{ij}|Y_j| \leq \int\limits_{Y_j} f(\xi_i, y)dy \leq M_{ij}|Y_j|$$

Просуммировав все по j получим:

$$\sum_j m_{ij}|Y_j| \leq \mathcal{J}(\xi_i) = \int\limits_Y f(\xi_i, y)dy \leq \sum_j M_{ij}|Y_j|$$

Отсюда имеем:

$$\sum_i |X_i| \sum_j m_{ij}|Y_j| \leq \sum_i \mathcal{J}(\xi_i)|X_i| \leq \sum_i |X_i| \sum_j M_{ij}|Y_j| \tag{5.6.6}$$

По середине мы получили интегральную сумму для функции $\mathcal{J}(x)$. Крайние челны — это суммы Дарбу $s(f,T), S(f,T)$ для кратного интеграла (5.6.1).
Например $\sum\limits_{i,j} m_{ij}|X_i \times Y_j|$. Таким образом неравенство (5.6.6) перепишется в виде:

$$s(f,T) \leq \sum_i \mathcal{J}(\xi_i)|X_i| \leq S(f,T) \tag{5.6.7}$$

Так как кратный интеграл (5.6.1) существует по условию, то при $\lambda(T) \to 0$ обе суммы Дарбу неравенства (5.6.7) стремятся к этому интегралу, откуда

$$\left| \lim_{\lambda(T) \to 0} \sum_i \mathcal{J}(\xi_i)|X_i| \right| = \int\limits_{X \times Y} f(x,y)dxdy$$

Левая часть этого равенства есть повторный интеграл:

$$\int\limits_X \mathcal{J}(x)dx = \int\limits_X dx \int\limits_Y f(x,y)dy$$

$\square$

Замечание 5.6.1. Применяя эту теорему несколько раз, можно свести вычисление по k-мерному промежутку к вычислению k одномерных интегралов.

Следствие. *Пусть $\mathbb{D} \subset Oxy$ — область, ограниченная двумя кривыми $\mathcal{J} = \varphi(x), \mathcal{J} = \psi(x), (\varphi(x) \leq \psi(x))$ и двумя прямыми $x = a$ и $x = b$.*
Тогда, если для $f(x,y)$ существует $\iint\limits_{\mathbb{D}} f(x,y)dxdy,\ x \in [a,b]$.

$\mathcal{J}(x) = \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy$, то существует так же повторный интеграл: $\int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy$ и выполняется равенство

$$\iint\limits_{\mathbb{D}} f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy.$$

5.7 Замена переменных в кратных интегралах

Напомним, что обтображение:

$$x = \varphi(t) = \begin{cases} x_1 = \varphi_1(t_1, \ldots, t_n) \\ \ldots \\ x_n = \varphi_n(t_1, \ldots, t_n) \end{cases}$$

называется регулярным в области $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^n$, если:

1. $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ имеют в $\mathbb{D}$ непрерывные частные производные по всем аргументам.
2. Матрица Якоби:

$$\varphi'(t) := \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial t_n} \end{pmatrix} \tag{5.7.1}$$

Определитель(якобиан):

$$\det \varphi'(t) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial t_n} \end{vmatrix} =: \frac{\mathbb{D}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)}{\mathbb{D}(t_1, \ldots, t_n)}$$

Отличен от нуля в $\mathbb{D}$. Матрица Якоби (5.7.1) называется производной отображения φ, а линейный оператор в $\mathbb{R}^n$ называется дифференциалом φ в точке t, в области $\mathbb{D}$, $(\mathbb{D}_\varphi(t))$. Регулярное отображение является локально обратимым.

Лемма 5.7.1. *Пусть φ — регулярное отображение области $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^n_t$, I — замкнутый промежуток, лежащий в $\mathbb{D}$, $(I \subset \mathbb{D})$. $\varphi(I)$ — образ промежутка I, $(\varphi(I) \subset R^n_x)$. Тогда, существует такая точка $\tau \in I$, что:*

$$\mu(\varphi(I)) = |\det \varphi'(\tau)| \cdot |I|$$

Комментарий. $|I| = \mu(I)$

Пояснение. Лемма при $n = 1$ следует из формулы Лагранжа: $\varphi(b) - \varphi(a) = \varphi(\tau)(b - a)$, где $\tau \in [a, b] = I$, поскольку при $\varphi'(\tau) \neq 0$ функция φ монотонна и

$$|\varphi(b) - \varphi(a)| = \mu(\varphi(I))$$

Если $n \geq 2$ и отображение φ является линейным преобразованием

$$x = \varphi(t) = \begin{cases} x_1 = a_{11}t_1 + \cdots + a_{1n}t_n \\ \ldots \\ x_n = a_{n1}t_1 + \cdots + a_{nn}t_n \end{cases}$$

с матрицей $A = (a_{ij}) = \varphi'(t)$, $x = At$, то образ промежутка $\varphi(I)$ является параллелепипедом $\varphi(I) \subset \mathbb{R}^n_x$, объем которого равен:

$$|\det A| \cdot |I| = |\det \varphi'| \cdot |I|$$

При $n = 3, I$ — прямоугольный параллелепипед, построенный на векторах: $h^1 = (h_1, 0, 0), h^2 = (0, h_2, 0), h^3 = (0, 0, h_3)$, тогда $\varphi(h^i) = (a_{1i}h_i, a_{2i}h_i, a_{3i}h_i),\ i = 1, 2, 3$. Отсюда объем параллелепипеда, построенного на векторах $\varphi(h^1), \varphi(h^2), \varphi(h^3)$ как на ребрах, равен

$$|<\varphi(h^1), \varphi(h^2), \varphi(h^3)>| = |\det A| \cdot |h_1 h_2 h_3|$$

Рассматривая уже общий, нелинейный случай, следует принять во внимание, что в малой окрестности точки $t \in \mathbb{D}$ является почти линейным отображением:

$$\varphi(t + h) = \varphi(t) + \mathbb{D}_\varphi(t) + \bar{\bar{o}}\,(h)\,,\ \text{при } h \to 0$$

Поэтому, если размеры промежутка I малы, то с малой относительной погрешностью можно сказать:

$$\mu(\varphi(I)) \approx |\det \varphi'(t)| \cdot |I|,\ t \in I$$

В такой ситуации и используется лемма (I — малый промежуток).

Теорема 5.7.1. *Пусть $\varphi : \mathbb{E}_t \to \mathbb{E}_x$ — отображение измеримого (по Жордану) множества $\mathbb{E}_t \subset \mathbb{R}^n_t,\ \mathbb{E}_x \subset \mathbb{R}^n_x$, при чем отображение φ регулярно в некоторой области $\mathbb{D}$, содержащей замыкание $\overline{\mathbb{E}}_t, \mathbb{E}_t, (\overline{\mathbb{E}}_t \subset \mathbb{D})$. Тогда, если $f(x) \in \mathcal{R}(\mathbb{E}_x)$, то $f(\varphi(t))|\det \varphi'(t)| \in \mathcal{R}(\mathbb{E}_t)$ и имеет место равенство:*

$$\int\limits_{\mathbb{E}_x} f(x)dx = \int\limits_{\mathbb{E}_t} f(\varphi(t))|\det \varphi'(t)|dt \tag{5.7.2}$$

Доказательство. Случай, когда $\mathbb{E}_t$ — промежуток, а $f(x)$ ограничена и непрерывна на $\mathbb{E}_x$. В этом случае функция $g(t) = f(\varphi(t))|\det \varphi'(t)|$ так же ограничена и непрерывна на $\mathbb{E}_t$, а следовательно и интегрируема на $\mathbb{E}_t$. Любому разбиению T промежутка $\mathbb{E}_t$ на промежутке $I_1, \ldots, I_k$ соответствует разложение множества $\varphi(\mathbb{E}_t) = \mathbb{E}_x$ на множество $\varphi(I_j),\ j = 1, \ldots, k$. Все эти множества измеримы, связаны и пересекаются попарно лишь по множествам меры нуль. Поэтому, в силу аддитивности интеграла:

$$\int\limits_{\mathbb{E}_x} f(x)dx = \sum_{j=1}^{k} \int\limits_{\varphi(I)} f(x)dx \tag{5.7.3}$$

По теореме о среднем:

$$\int\limits_{\varphi(I_j)} f(x)dx = f(\xi^j)\mu(\varphi(I_j)),\ \xi^j \in \varphi(I_j) \tag{5.7.4}$$

Пусть $\eta^j = \varphi^{-1}(\xi^j) \in I_j$, так что $\xi^j = \varphi(\eta^j)$.
Поскольку по лемме $\mu(\varphi(I_j)) = |\det \varphi'(\tau^j)| \cdot |I_j|$, где $\tau^j \in I_j$, то из (5.7.3) и (5.7.4) получаем:

$$\int\limits_{\mathbb{E}_x} f(x)dx = \sum_{j=1}^{k} f(\varphi(\eta^j)) \left|\det \varphi'(\tau^j)\right| \cdot |I_j| =: \sigma_1 \tag{5.7.5}$$

Составим сумму: $\sigma_2 := \sum\limits_{j=1}^{k} f(\varphi(\eta^j))\,|\det \varphi'(\eta^j)| \cdot |I_j|$, которая является интегрируемой суммой для функции $g(t),\ t \in \mathbb{E}_t$. Поскольку $g(t) \in \mathcal{R}$, то:

$$\lim_{\lambda(T) \to 0} \sigma_2 = \int\limits_{\mathbb{E}_t} g(t)dt \tag{5.7.6}$$

Положим $\psi(t) = |\det\varphi'(t)|$ и оценим разность $\sigma_1 - \sigma_2$:

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \sum_{j=1}^{k} f(\xi^j)(\psi(\tau^j) - \psi(\eta^j))|I_j|$$

Функция $\psi(t)$ непрерывна на замкнутом множестве $\mathbb{E}_t$ и по теореме Кантора равномерно непрерывна на $\mathbb{E}_t$, так что $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0,\ \lambda(T) < \delta$:

$$|\psi(\tau^j) - \psi(\eta^j)| < \varepsilon,\ \forall j$$
$$\rho(\tau^j, \eta^j) < \delta$$

Отсюда, при $\lambda(T) < \delta$:

$$|\sigma_1 - \sigma_2| \leq \max_{x\in\mathbb{E}_x} |f(x)| \cdot \varepsilon \sum_{j=1}^{k} |I_j| = C\varepsilon$$

где C не зависит от ε, $C = const$.

$$\lim_{\lambda(T)\to 0}(\sigma_1 - \sigma_2) = 0 \tag{5.7.7}$$

Равенство (5.7.2) теперь следует из (5.7.5), (5.7.6) и (5.7.7).
Доказательство теоремы в общем случае можно провести, придерживаясь рассмотренной схемы. □

Следствие. *Величина интеграла от f по множеству $\mathbb{E} \subset \mathbb{R}^n$ не зависит от выбора декартовых координат в $\mathbb{R}^n$.*

Доказательство. Пусть $\mathbb{E}_x, \mathbb{E}_t$ — запись множества $\mathbb{E}$. p — точка множества $\mathbb{E}$, $x = (x_1, \dots, x_n)$ — ее координаты в первой системе, $t = (t_1, \dots, t_n)$ — во второй системе. Тогда $f(p) = f_x(x_1, \dots, x_n) = f_t(t_1, \dots, t_n)$, где $f_t = f_x \circ \varphi$ (суперпозиция). Поскольку переход от одной системы декартовых координат к другой имеет якобиан по модулю равный единице, то есть:

$$\int\limits_{\mathbb{E}_x} f_x(x)dx = \int\limits_{\mathbb{E}_t} f_x(\varphi(t))\,|\det\varphi'(t)|\,dt = \int\limits_{\mathbb{E}_t} f_t(t)dt$$

□

Глава 6

Криволинейные интегралы

6.1 Криволинейный интеграл первого рода

Пусть $\Gamma = \{M(S) : 0 \leq S \leq S_0\}$ определенная кривая в $\mathbb{R}^3$, в частности $\mathbb{R}^2$.
$M(S) = (x(S), y(S), z(S))$ — ее параметрическое представление, где в качестве переменной взята длина дуги S.
Кривая, у которой переменная длина дуги отсчитывается от точки A обозначим: $\Gamma = \widehat{AB}$.
Противоположно ориентированную прямую, у которой переменная длина дуги отсчитывается от точки B обозначим $\Gamma = \widehat{BA}$.

Определение 6.1.1. Пусть на токах $M(S)$, кривой $\Gamma = \widehat{AB}$ задана некотороая функция F. Выражение $\int\limits_{\Gamma} F(x, y, z)dS$ опеределенное по формуле:

$$\int\limits_{\Gamma} F(x, y, z)dS = \int\limits_{0}^{S_0} F(x(S), y(S), z(S))dS \tag{6.1.1}$$

называется криволинейным интегралом первого рода (КИПР) от функции F по кривой Γ. Этот интеграл обозначается символами:

$$\int\limits_{\Gamma} F(M(S))dS,\ \int\limits_{\Gamma} FdS,\ \int\limits_{\widehat{AB}} FdS$$

Отметим свойства интеграла (6.1.1):

1. $\int\limits_{\Gamma} dS = S_0$ — длина кривой Γ.
2. Если F непрерывна на Γ (то есть $F(x(S), y(S), z(S))$ непрерывная на отрезке $S \in [0, S_0]$), то $\int\limits_{\Gamma} FdS$ существует.
3. КИПР не зависит от ориентации кривой:
$$\int\limits_{\widehat{BA}} FdS = \int\limits_{\widehat{AB}} FdS$$

Определение 6.1.2. Кривую Γ называют гладкой, если в ее параметрическом представлении:

$$x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ z = \chi(t),\ a \leq t \leq b \tag{6.1.2}$$

все функции непрерывно дифференцируемы на отрезке $[a, b]$ и $\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2 + \chi'(t)^2 > 0,\ \forall t \in [a, b]$.

Теорема 6.1.1. *Пусть* Γ *— гладкая кривая с параметрическим представлением* (6.1.2), F *— непрерывная на* Γ *функция. Тогда:*

$$\int\limits_{\Gamma} F(x,y,z)dS = \int\limits_{a}^{b} F(\varphi(t),\psi(t),\chi(t))\sqrt{\varphi'(t)^2+\psi'(t)^2+\chi'(t)^2}dt \qquad (6.1.3)$$

Доказательство. Кривая Γ спрямляема. Переменную дуги $S = S(t)$ можно принять в качестве параметра, и тогда $\int\limits_{\Gamma} FdS$ существует. Учитывая, что $S'(t) = \sqrt{\varphi'(t)^2+\psi'(t)^2+\chi'(t)^2}$ получим (6.1.3). □

Замечание 6.1.1. Если плоская кривая Γ является графиком функци $y = f(x), a \le x \le b$, то ее представлением является функция $x = x, y = f(x)$. И тогда формула (6.1.3) примет вид:

$$\int\limits_{\Gamma} F(x,y)dS = \int\limits_{a}^{b} F(x,f(x))\sqrt{1+f'(x)^2}dx$$

6.2 Криволинейный интеграл второго рода

Пусть Γ — гладкая ориентированная кривая,
$\vec{r} = \vec{r}(S) = \{x(S), y(S), z(S)\},\ 0 \le S \le S_0$ — ее векторное представление, в котором за параметр S взята переменная длина ее дуги. $\vec{\tau} = \frac{d\vec{r}}{dS} = \{\frac{dx}{dS}, \frac{dy}{dS}, \frac{dz}{dS}\}$ — единичный касательный вектор к кривой Γ, его направление соответствует выбранному направлению отсчета длины дуг. Если α, β, γ — углы, которые $\vec{\tau}$ образует с координатными осями, то $\vec{\tau} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$. Получаем $\cos\alpha = \frac{dx}{dS}, \cos\beta = \frac{dy}{dS}, \cos\gamma = \frac{dz}{dS}$.

Пусть на Γ задана вектор-функция $\vec{a} = \vec{a}(x,y,z) = \vec{a}(x(S), y(S), z(S)),\ 0 \le S \le S_0$. Пусть P, Q, R — координаты вектора $\vec{a} : \vec{a} = \{P, Q, R\}$. Функции P, Q, R являются функциями точки кривой Γ.

Определение 6.2.1. $\int\limits_{\Gamma} \vec{a}d\vec{r}$ определенное по формуле:

$$\int\limits_{\Gamma} (\vec{a}, \vec{\tau})dS \qquad (6.2.1)$$

называется криволинейным интегралом второго рода (КИВР) по кривой $\Gamma = \overset{\frown}{AB}$.

Для интеграла $\int\limits_{\Gamma} \vec{a}d\vec{r}$ используется так же обозначение:

$$\int\limits_{\Gamma} Pdx + Qdy + Rdz$$

где $Pdx + Qdy + Rdz$ — записанное в координатной форме скалярное произведение векторов $\vec{a} = \{P, Q, R\}$ и $d\vec{r} = \{dx, dy, dz\}$. Учитывая, что $(\vec{a}, \vec{\tau}) = P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma$, то определение (6.2.1) можно записать в виде:

$$\int\limits_{\Gamma} \vec{a}d\vec{r} \equiv \int\limits_{\Gamma} Pdx + Qdy + Rdz := \int\limits_{\Gamma} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)dS \qquad (6.2.2)$$

Следующие свойства КИВР под силу доказать каждому:

1. $\vec{a} = \vec{a}(x,y,z),\ \Gamma = \overset{\frown}{AB}$, то $\int\limits_{\Gamma} \vec{a}d\vec{r}$ существует.

2. КИВР меняет знак при изменении ориентации кривой Γ:

$$\int\limits_{\overset{\frown}{BA}} \vec{a} d\vec{r} = - \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} \vec{a} d\vec{r}$$

Теорема 6.2.1. *Если* $\Gamma = \overset{\frown}{AB}$ *— гладкая ориентированная кривая.* $\vec{r} = \vec{r}(t) = \{\varphi(t), \psi(t), \chi(t)\},\ a \le t \le b$ *— ее векторное представление* ($\vec{r}(a) = A,\ \vec{r}(b) = B$), *то получим:*

$$\int\limits_{\Gamma} \vec{a} d\vec{r} = \int\limits_{a}^{b} (\vec{a}, \vec{r}')dt \tag{6.2.3}$$

Доказательство. Поскольку

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{r}}{dS} = \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \frac{dt}{dS} = \frac{\vec{r}'}{S'} \tag{6.2.4}$$

(здесь штрихом обозначены производные по t), то

$$\int\limits_{\Gamma} \vec{a} d\vec{r} \overset{(6.2.1)}{=} \int\limits_{\Gamma} (\vec{a}, \vec{\tau})dS \overset{(6.1.3)}{=} \int\limits_{a}^{b} (\vec{a}, \vec{\tau})S'dt \overset{(6.2.4)}{=} \int\limits_{a}^{b} (\vec{a}, \vec{r}')dt$$

$\square$

Замечание 6.2.1. В координатной форме формула (6.2.3) примет вид:

$$\int\limits_{\Gamma} Pdx + Qdy + Rdz = \int\limits_{a}^{b} (Px' + Qy' + Rz')dt \tag{6.2.5}$$

Следствие. *Если плоская кривая* $\Gamma = \overset{\frown}{AB}$ *является графиком функции* $y = f(x),\ a \le x \le b$, $A = (a, f(a)),\ B = (b, f(b))$, *то формула* (6.2.3) *(при* $x = t,\ R \equiv 0$*) принимает вид:*

$$\int\limits_{\Gamma} Pdx + Qdy + Rdz = \int\limits_{a}^{b} (P(x, f(x)) + Q(x, f(x)))f'(x)dx \tag{6.2.6}$$

Замечание 6.2.2. Если $\vec{a} = \{P, 0, 0\},\ Q \equiv R \equiv 0$, то $\int\limits_{\Gamma} \vec{a} d\vec{r}$ обозначается $\int\limits_{\Gamma} dx$, таким образом интеграл:

$$\int\limits_{\Gamma} P(x, y, z)dx = \int\limits_{\Gamma} P\cos\alpha\ dS \tag{6.2.7}$$

аналогично

$$\int\limits_{\Gamma} Qdy := \int\limits_{\Gamma} Q\cos\beta\ dS,\ \int\limits_{\Gamma} Rdz := \int\limits_{\Gamma} R\cos\gamma\ dS \tag{6.2.8}$$

Отсюда, воспользовавшись адитивностью обычного интеграла, получим:

$$\int\limits_{\Gamma} Pdx + Qdy + Rdz = \int\limits_{\Gamma} Pdx + \int\limits_{\Gamma} Qdy + \int\limits_{\Gamma} Rdz$$

Следствие. *В условиях предыдущего следствия:*

$$\int\limits_{\Gamma} Pdx = \int\limits_{a}^{b} P(x, f(x))dx \tag{6.2.9}$$

Определение 6.2.2. Если кривая Γ — кусочно-гладкая, то есть представима в виде объединения конечного числа гладких ориентированных кривых $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_k$, F, $\vec{a} = \{P, Q, R\}$, определенный на точках кривой Γ, то пологают:

$$\int\limits_{\Gamma} FdS := \sum_{i=1}^{k} \int\limits_{\Gamma_i} FdS, \int\limits_{\Gamma} \vec{a}d\vec{r} := \sum_{i=1}^{k} \int\limits_{\Gamma_i} \vec{a}d\vec{r}$$

6.3 Формула Грина

Пусть на плоскости $\mathbb{R}^2$ задана система координат по Oxy.

Определение 6.3.1. Ориентация простого замкнутого контура Γ, лежащего на этой плоскости называется положительной, если она соответствует движению **против** часовой стрелки. Противоположная ориентация называется отрицательной.

Напомним, что простым замкнутым контуром в $\mathbb{R}^n$ называют $x = \varphi(t) = (\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t))$, $a \leq t \leq b$, у которой нет других кратных точек.

Определение 6.3.2. Пусть граница $\partial\mathbb{G}$, ограниченной плоской области $\mathbb{G}$, состоит из конечного числа простых замкнутых контуров. Совокупность этих контуров, ориентированных так, что при обходе каждого из них, область $\mathbb{G}$ остается слева(справа), называется положительной(отрицательной) ориентацией: $\partial\mathbb{G}^+(\partial\mathbb{G}^-)$.

Определение 6.3.3. Грацница $\partial\mathbb{G}$ области $\mathbb{G}$ называется кусочно-гладкой, если она состоит из конечного числа простых кусочно-гладких контуров.

Замечание 6.3.1. Если граница $\partial\mathbb{G}$ области $\mathbb{G}$ является кусочно гладкой, то ее площадь равна нулю, а само множество $\mathbb{G}$ квадрируемо.

Теорема 6.3.1. *Если граница плоской, ограниченной области $\mathbb{G}$ является кусочно-гладкой, а функции $P, Q, \frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x}$ — непрерывны на замыкании $\overline{\mathbb{G}}$ области $\mathbb{G}$, то:*

$$\iint\limits_{\mathbb{G}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \int\limits_{\partial\mathbb{G}^+} Pdx + Qdy \tag{6.3.1}$$

эта формула называется ***формулой Грина****.*

Доказательство. Проведем его для произвольных областей. □

Определение 6.3.4. Назовем область $\mathbb{G}$ областью $\mathbb{G}_y$, если $\mathbb{G}$ имеет вид:

$$\mathbb{G} = \{(x, y) : a < x < b,\ \varphi(x) < y < \psi(x)\} \tag{6.3.2}$$

где $\varphi(x), \psi(x)$ — кусочно-гладкие функции на $[a, b]$. Поменяв здесь x и y ролями получим определение области $\mathbb{G}_x$. Области, которые можно разрезать на куски вида $\mathbb{G}_x$ либо $\mathbb{G}_y$ назовем простыми областями.

Лемма 6.3.1. *Пусть в теореме* (6.3.1) $\mathbb{G}$ *— область по* $\mathbb{G}_y$, *тогда:*

$$\iint\limits_{\mathbb{G}} \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = -\int\limits_{\partial\mathbb{G}^+} Pdx \tag{6.3.3}$$

Доказательство. Сводя двойной интеграл к повторному, применяя формулу Ньютона-Лейбница и формулу (6.2.9) получим:

$$\iint\limits_{\mathbb{G}} \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy = \int\limits_a^b \left[P(x,\psi(x)) - P(x,\varphi(x))\right] dx = \tag{6.3.4}$$

$$-\int\limits_a^b P(x,\varphi(x))dx - \int\limits_b^a P(x,\psi(x))dx = -\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y)dx - \int\limits_{\overset{\frown}{CD}} P(x,y)dx \tag{6.3.5}$$

заметим, что $\int\limits_{\overset{\frown}{BC}} Pdx = \int\limits_{\overset{\frown}{DA}} Pdx = 0$, и что сумма: $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} Pdx + \int\limits_{\overset{\frown}{BC}} Pdx + \int\limits_{\overset{\frown}{CD}} Pdx + \int\limits_{\overset{\frown}{DA}} Pdx = \int\limits_{\partial\mathbb{G}^+} Pdx$.
Поэтому из (6.3.5) получаем (6.3.3).
Аналогично, если $\mathbb{G}$ — область типа $\mathbb{G}_x$, то:

$$\iint\limits_{\mathbb{G}} \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy = \int\limits_{\partial\mathbb{G}^+} Qdy \tag{6.3.6}$$

□

Лемма 6.3.2. *Если в теореме* (6.3.1) *область* $\mathbb{G}$ *допускает разбиение на области* $\mathbb{G}_x, \mathbb{G}_y$, *то выполняется* (6.3.3).

Доказательство. Двойной интеграл в области $\mathbb{G}$ в силу адитивности есть сумма по кускам $\mathbb{G}_x, \mathbb{G}_y$, на которые разрезана $\mathbb{G}$. Для каждого справедливо (6.3.3). Но соседние куски на общей части границ индуцируют противоположные ориентации. Поэтому, при сложении интегралов по границам всех кусков в результате взаимных уничтожений, останется $\int\limits_{\mathbb{G}} \partial\mathbb{G}$.
Аналогично, если разрезается на $\mathbb{G}_x$, то справедливо (6.3.6). Запищем для произвольной области выражения (6.3.3) и (6.3.6), умножив (6.3.3) на -1. После сложения полученных соотношений, пользуясь свойством адитивности интеграла, получим формулу Грина. □

Следствие.

$$\mu(\mathbb{G}) = \iint\limits_{\mathbb{G}} dxdy \overset{(I)}{=} \int\limits_{\partial\mathbb{G}^+} xdy \overset{(II)}{=} -\int\limits_{\partial\mathbb{G}^+} ydx \overset{(III)}{=} \frac{1}{2}\int\limits_{\partial\mathbb{G}^+} xdy - ydx$$

$$\begin{aligned} (I) &\text{ — } P = 0, Q = x \\ (II) &\text{ — } P = -y, Q = 0 \\ (III) &\text{ — } \textit{если возьмем полусумму} \end{aligned}$$

Глава 7

Поверхностные интегралы

7.1 Поверхности в $\mathbb{R}^3$

Пусть $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^2$, $\overline{\mathbb{D}}$ — ее замыкание.

Определение 7.1.1. S — образ непрерывного отображения $x = x(u, v), y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$ замкнутой области $\overline{\mathbb{D}} \subset \mathbb{R}^2_{uv}$ в пространство $\mathbb{R}^3_{xyz}$ называется непрерывной поверхностью.

Само отображение называется параметрическим представлением поверхности. Переменные u, v — параметры поверхности S.

$$S = \{\vec{r}(u, v) : (u, v) \in \overline{\mathbb{D}}\} \tag{7.1.1}$$

Вектор $\vec{r}(u, v)$ — где $\vec{r}$ — радиус вектор в $\mathbb{R}^3$ с начала в начале координат и концом в точке$(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$. Представление (7.1.1) назовем векторным представлением поверхности S. Отметим, что одна и та же поверхность S может иметь различные параметрические представления.

Определение 7.1.2. Поверхность S назовем простой, если на ней нет кратных точек, то есть для любой точки $M \in S$ отображается лишь одна точка $(u, v) \in \overline{\mathbb{D}}$.

Определение 7.1.3. Если за параметры в одной из представленных поверхностей S можно взять какие-либо две координаты пространства $\mathbb{R}^3$, то такое представление называется явным. Например, таковым является представление:

$$S : x = x, y = y, z = \varphi(x, y) : (x, y) \in \overline{\mathbb{D}}$$

значит S — график $z = \varphi(x, y) : (x, y) \in \overline{\mathbb{D}}$. Очевидно, что поверхность, допускающая явное представление, не имеет кратных точек.

Определение 7.1.4. Если в определении (7.1.1) отображение является непрерывно дифференцируемым, то S называется непрерывно дифференцируемой поверхностью.

Пример 7.1.1. $x = R\cos\varphi\cos\psi, y = R\sin\varphi\cos\psi, z = R\sin\psi$, где $0 \le \varphi \le 2\pi, -\frac{\pi}{2} \le \psi \le \frac{\pi}{2}$ является сферой с центром в начале координат и радиусом R у которой весь меридиан $\varphi = 0$ состоит из кратных точек.

7.2 Касательная плоскость и нормаль к поверхности в $\mathbb{R}^3$

Пусть $S = \{\vec{r}(u,v) : (u,v) \in \overline{\mathbb{D}}\}$ — непрерывно дифференцируемая поверхность, $(u_0,v_0) \in \mathbb{D}, \vec{r}\,'_u$ — производная вектор-функции $\vec{r} = \vec{r}(u,v_0)$, то есть $\vec{r}\,'_u$ — касательный вектор к кривой $\vec{r} = \vec{r}(u,v_0)$, называемой координатной линией, $\vec{r}\,'_v$ — касательный вектор к координатной линии $\vec{r} = \vec{r}(u_0,v)$.

Определение 7.2.1. Точка $M_0 = \vec{r}(u_0,v_0)$ поверхности S называется неособой, если в ней векторы $\vec{r}\,'_u, \vec{r}\,'_v$ не колинеарны: $[\vec{r}\,'_u, \vec{r}\,'_v] \neq 0$ в противном случае точка M_0 называется особой.

Определение 7.2.2. Плоскость, проходящая через неособую точку $M_0 = \vec{r}(u_0,v_0)$ поверхности S, параллельно векторам $\vec{r}\,'_u, \vec{r}\,'_v$ называется касательной плоскостью к поверхности S в этой точке. Если $\vec{r}_0 = \vec{r}(u_0,v_0), \vec{r}$ — радиус вектор произвольной точки на касательной плоскости, то ее уравнение в векторной записи имеет вид:

$$< \vec{r} - \vec{r}_0, \vec{r}\,'_u, \vec{r}\,'_v >= 0 \tag{7.2.1}$$

Определение 7.2.3. Если $M_0 = \vec{r}(u_0,v_0)$ — неособая точка, то вектор

$$\vec{\nu} = \frac{[\vec{r}\,'_u, \vec{r}\,'_v]}{|[\vec{r}\,'_u, \vec{r}\,'_v]|} \tag{7.2.2}$$

а так же ему противоположный назовем единичной нормалью к поверности в точке M_0.

Определение 7.2.4. Непрерывно дифиренцируемая поверхность без особых точек называется гладкой поверхностью. Объединение конечного числа гладких поверхностей назовем кусочно гладкой поверхностью, она может состоять из парочки кусков.

7.3 Площадь поверхности

Пусть

$$S = \{\vec{r}(u,v) : (u,v) \in \overline{\mathbb{D}}\} \tag{7.3.1}$$

непрерывно дифференцируемая поверхность, где $\overline{\mathbb{D}}$ — квадрируемая замкнутая область. Пусть I — промежуток, содержащий множество $\overline{\mathbb{D}}$. T — некоторое разбиение промежутка I. Прономеруем каким-либо образом те промежутки разбиения, которые содержатся в $\overline{\mathbb{D}}$ и обозначим их $I_j,\ j = 1,\dots,k$.
Возьмем какой-либо промежуток I_j. Пусть $I_j = [u, u+h] \times [v, v+t], t > 0, h > 0$ и где для краткости записи пропущен индекс $_j$ у переменных: u, v, h, t. Тогда

$$\vec{r}(u+h,v) - \vec{r}(u,v) = \vec{r}\,'_u \cdot h + \bar{\bar{o}}\,(h)\,,\ h \to 0$$
$$\vec{r}(u,v+t) - \vec{r}(u,v) = \vec{r}\,'_v \cdot t + \bar{\bar{o}}\,(t)\,,\ t \to 0$$

При определении площади поверхности образы промежутков I_j будем заменять прямолинейными параллелограмами, построенными на векторах $\vec{r}\,'_u \cdot h,\ \vec{r}\,'_v \cdot t$. Обозначим площадь этого параллелограма $\triangle\delta_i$, получаем:

$$\triangle\delta_i = |[\vec{r}\,'_u \cdot h, \vec{r}\,'_v \cdot t]| = |[\vec{r}\,'_u, \vec{r}\,'_v]|ht = |[\vec{r}\,'_u, \vec{r}\,'_v]|_{\mu_j}|I_j|,\ \mu_j = (u_j, v_j)$$

Наряду с поверхностью S рассмотрим чешуйчатую поверхность, составленную из всех параллелограмов, построенных для каждого прямоугольника $I_j,\ (j = 1,\dots,k)$ на соответствующих ему векторах $\vec{r}\,'_u, \vec{r}\,'_v$. Ее площадь равна:

$$\sum_{j=1}^{k} |[\vec{r}\,'_u, \vec{r}\,'_v]|_{\mu_j}|I_j|$$

которую можно считать приближенным значением поверхности S, при чем все более точным при $\lambda(T) \to 0$. Таким образом мы принимаем определение (7.3.1).

Определение 7.3.1. Площадью $\mu_2(S)$ поверхности S называется величина:

$$\mu_2(S) := \iint\limits_{\mathbb{D}} |[\vec{r}'_u, \vec{r}'_v]| dudv \tag{7.3.2}$$

Лемма 7.3.1 (тождество Лагранжа)**.** *Для любых двух векторов:*

$$|[\vec{a}, \vec{b}]|^2 = \det \begin{pmatrix} (\vec{a}, \vec{a}) & (\vec{a}, \vec{b}) \\ (\vec{b}, \vec{a}) & (\vec{b}, \vec{b}) \end{pmatrix} = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a}, \vec{b})^2$$

называется тождеством Лагранжа.

Доказательство. Для доказательства достаточно: $|[\vec{a}, \vec{b}]| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin \widehat{\vec{a}\vec{b}}$ $(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \widehat{\vec{a}\vec{b}}$ Детерминант в лемме называется детерминантом Грамма векторов $\vec{a}, \vec{b}$. □

Введем обозначение:

$$\begin{aligned} E &= g_{11} = |(\vec{r}'_u, \vec{r}'_u)| \\ F &= g_{12} = g_{21} = |(\vec{r}'_u, \vec{r}'_v)| \\ G &= g_{22} = |(\vec{r}'_v, \vec{r}'_v)| \end{aligned} \tag{7.3.3}$$

Из леммы $\vec{a} = \vec{r}'_u$, $\vec{b} = \vec{r}'_v$. Из леммы $|[\vec{r}'_u, \vec{r}'_v]| = EGF^2 = \det(g_{ij})$, поэтому формула (7.3.2) примет вид:

$$\mu_2(S) = \iint\limits_{\mathbb{D}} \sqrt{EG - F^2} dudv \equiv \iint \sqrt{\det(g_{ij})} dudv \tag{7.3.4}$$

в частности, если S — график функции $z = f(x, y), (x, y) \in \overline{\mathbb{D}}$, то $u = x$, $v = y$, $\vec{r} = \{x, y, f(x, y)\}$ и следовательно $\vec{r}'_u = \{1, 0, f'_x\}$, $\vec{r}'_v = \{-1, 1, f'_y\}$. Тогда получим:

$$\det(g_{ij}) = \det \begin{pmatrix} 1 + f'^2_x & f'_x \cdot f'_y \\ f'_x \cdot f'_y & 1 + f'^2_y \end{pmatrix} = 1 + f'^2_x + f'^2_y$$

$$\mu_2(S) = \iint\limits_{\mathbb{D}} \sqrt{1 + f'^2_x + f'^2_y} dxdy$$

Замечание 7.3.1. Использую формулу замены переменного в двойном интеграле не трудно доказать, что определение (7.3.1) площади поверхности не зависит от выбора ее представления.

7.4 Ориентация поверхности в $\mathbb{R}^3$

Рассмотрим $\mathbb{R}^3$, то есть $Oxyz$. Пусть S — гладкая поверхность

$$\vec{r} = \vec{r}(u, v) : (u, v) \in \overline{\mathbb{D}} \tag{7.4.1}$$

ее векторное представление.

$$\vec{\nu} = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}, \vec{n} = [\vec{r}'_u, \vec{r}'_v] \tag{7.4.2}$$

$\vec{\nu}$ — ее единичная нормаль. Поскольку представление (u, v) непрерывно дифференцируемо, то вектор $\vec{\nu}$ (так же как и вектор $-\vec{\nu}$) является непрерывной функцией на $\overline{\mathbb{D}}$.

Определение 7.4.1. Всякая непрерывная на $\overline{\mathbb{D}}$ единичная нормаль $\vec{\nu} = \vec{\nu}(u,v)$ гладкой поверхности S называется ориентацией поверхности S, если $\vec{\nu}$ является так же однозначной непрерывной функцией переменной точки $\mu(x,y,z) = \vec{r}(u,v)$ на самой поверхности S. В этом случае поверхность S называется ориентированной (или двусторонней), в противном случае неориентированной (односторонней). Поверхность у которой фиксированна одна из ориентаций, называется ориентированной стороной поверхности.

Очевидно, что поверхность может иметь только две ориентации, который называют противоположными, одна положительная, другая отрицательная. $\mu(x,y,z) = \vec{r}(u,v)$. Примером ориентации поверхности является всякая простая гладкая поверхность. Ориентированной является и сфера(хотя сфера и не является простой поверхностью). Примером неориентированной поверхности является лента Мебиуса, непрерывная поверхность в определении нарушается.

Пусть гладкая ориентированная поверхность S с представлением $\vec{r} = \vec{r}(u,v),\ (u,v) \in \overline{\mathbb{D}}$, ориентирована нормалью $\vec{\nu} = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$, где $\vec{n} = [\vec{r}'_u, \vec{r}'_v]$. И пусть граница $\partial\mathbb{D}$ в области $\mathbb{D}$ является непрерывной кривой, ориентированной положительно:

$$\partial\mathbb{D} = \{u(t), v(t) : a \leq t \leq b\}$$

Очевидно, что эта ориентация порождает определенную ориентацию края $\partial S = \{\vec{r} = \vec{r}(u(t), v(t)) : a \leq t \leq b\}$.

Определение 7.4.2. Указанная выше ориентация края ∂S поверхности S называется согласованной с ориентацией $\vec{\nu}$ поверхности S. Для простой поверхности, в частности для графика $z = f(x,y)$ вектор нормали $\vec{\nu}(-\vec{\nu})$ согласован с положительной (отрицательной) ориентацие кривой ∂S по правилу штопора.

Ориентация контура ∂S соответствует направлению вращения ручки штопора, а направлению нормали соответствует движение штопора.

Определение 7.4.3. Кусочно-гладкая поверхность $S = S_1 \cap S_2 \cap \cdots \cap S_k$ называется ориентированной, если ее можно представить как результат такой склейки гладких поверхностей $S_i, i = 1, \ldots, k$, при которой общие части краев ∂S_i поверхности S_i принадлежат не более, чем двум этим поверхностям и проходят в противоположных направлениях, при ориентации краев ∂S_i, согласованных по правилу штопора с ориентациями указанных двух поверхностей. Объединение краев ∂S_i, принадлежащих одному такому краю, называется краем поверхности S.

Примерами кусочно-гладких ориентированных(двусторонних) поверхностей являются поверхности параллелепипедов, цилиндров.
Можно показать, что определение (7.4.3) в важном частном случае совпадает со следующим определением.

Определение 7.4.4. Если кусочно-гладкая поверхность S является границей области $\mathbb{G} \subset \mathbb{R}^3$, то еденичная нормаль $\vec{\nu}$ к этой поверхности (там где она существует), направленная внутрь области называется внутренней нормалью (относительно области $\mathbb{G}$), а противоположная нормаль $-\vec{\nu}$ — внешней нормалью. Эти нормали называются ориентациями границы $\partial\mathbb{G}$ области $\mathbb{G}$.

7.5 Определение поверхностного интеграла первого рода

Пусть $S = \{\vec{r}(u,v) : (u,v) \in \overline{\mathbb{D}}\}$ — гладкая поверхность, $\mathbb{D}$ — квадрируемая область. F — функция, заданная на поверхности S, то есть $F = F(\vec{r}(u,v)) = F(x(u,v), y(u,v), z(u,v)), (u,v) \in \overline{\mathbb{D}}$.

Определение 7.5.1. Интеграл первого рода $\iint\limits_S \mathcal{F}dS$ по поверхности S называется интеграл:

$$\iint\limits_S \mathcal{F}(x,y,z)dS := \iint\limits_D \mathcal{F}(\vec{r}(u,v))\sqrt{EG-F^2}dudv \tag{7.5.1}$$

Если функция $\mathcal{F}$ — непрерывная на поверхности S, то интеграл (7.5.1) безусловно существует.

Пример 7.5.1. Функция $\mathcal{F} \equiv 1$ на поверхности S, тогда получаем:

$$\iint\limits_S dS = \iint\limits_{\mathbb{D}} \sqrt{EG-F^2}dudv = \mu_2(S)$$

Пример 7.5.2. Если поверхность S задана явно, $z = f(x,y),\ (x,y) \in \overline{\mathbb{D}}$, то:

$$\iint\limits_S \mathcal{F}(x,y,z)dS = \iint\limits_{\mathbb{D}} \mathcal{F}(x,y,f(x,y))\sqrt{1+f_x'^2+f_y'^2}dxdy$$

Определение 7.5.2. Поверхностный интеграл первого рода по кусочно-гладкой поверхности определяется как сумма интегралов по ее гладким частям.

7.6 Поверхностный интеграл второго рода

Пусть $\vec{\nu} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$ — непрерывная еденичная нормаль на ориентированной гладкой поверхности S, представление которой задано в квадрируемой области. Ориентированную с помощью этой нормали поверхность обозначим через S^+. Пусть $\vec{a} = \vec{a}(x,y,z) = \{P,Q,R\}$ — векторная функция заданная на поверхности S (так что (P,Q,R) — числовые функции на поверхности S).

Определение 7.6.1. Поверхностным интегралом второго рода по ориентированной поверхности S^+ называется интеграл: $\iint\limits_{S^+} \vec{a}\,d\vec{S} := \iint\limits_S (\vec{a},\vec{\nu})dS$. Для интегралов $\iint\limits_S \vec{a}\,d\vec{S}$ используется также обозначение:

$$\iint\limits_{S^+} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy \tag{7.6.1}$$

таким образом получим:

$$\iint\limits_{S^+} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy = \iint\limits_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)dS \tag{7.6.2}$$

Для случая, когда поочередно две функции из P, Q, R тождественно равны нулю, очевидны интегралы:

$$\begin{gathered}\iint\limits_{S^+} Pdydz := \iint\limits_S P\cos\alpha dS\\ \iint\limits_{S^+} Qdxdz := \iint\limits_S Q\cos\beta dS\\ \iint\limits_{S^+} Rdxdy := \iint\limits_S R\cos\gamma dS\end{gathered} \tag{7.6.3}$$

Выражение (7.6.1) теперь можно рассматривать как сумму трех только что определенных интегралов.

Следующие утверждения очевидны:

1. $\vec{a}$ непрерывен на поверхности S, то $\iint\limits_{S^+} \vec{a}\,d\vec{S}$ существует.

2. Если ориентированную с помощью вектора $-\vec{\nu}$ поверхность S обозначить через S^-, то:

$$\iint\limits_{S^-} \vec{a}\,d\vec{S} = -\iint\limits_{S^+} \vec{a}\,d\vec{S}$$

Теорема 7.6.1. *Пусть $S = \{\vec{r}(u,v),\ (u,v) \in \overline{\mathbb{D}}\}$ — гладкая поверхность, S^+ — поверхность S, ориентированная с помощью вектора $\vec{\nu} = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$, где $\vec{n} = [\vec{r}'_u, \vec{r}'_v]$, тогда поверхностный интеграл второго рода:*

$$\iint\limits_{S^+} \vec{a}\,d\vec{S} = \iint\limits_{\mathbb{D}} < \vec{a}\,, \vec{r}'_u, \vec{r}'_v > dudv = \iint\limits_{\mathbb{D}} \begin{vmatrix} P & Q & R \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix} dudv \tag{7.6.4}$$

где $P = P(x(u,v), y(u,v), z(u,v)),\ Q = Q(x(u,v), y(u,v), z(u,v)),\ R = R(x(u,v), y(u,v), z(u,v))$, $\vec{r}'_u = \{x'_u, y'_u, z'_u\},\ \vec{r}'_v = \{x'_v, y'_v, z'_v\}$. В частности, полагая поочередное равенство двух функций и P, Q, R нулю, найдем интегралы (7.6.3).

Доказательство.

$$\iint\limits_{S^+} \vec{a}\,d\vec{S} := \iint\limits_{S} (\vec{a}\,, \vec{\nu})dS = \iint\limits_{\mathbb{D}} \left(\vec{a}\,, \frac{\vec{n}}{|\vec{n}\,|}\right) |\vec{n}\,|dudv = \iint\limits_{\mathbb{D}} < \vec{a}\,, \vec{r}'_u, \vec{r}'_v > dudv$$

□

Пример 7.6.1. Поверхность S имеет явное представление: $z = f(x,y),\ (x,y) \in \overline{\mathbb{D}}$. Тогда $x = u, y = v, z = f(u,v),\ (u,v) \in \overline{\mathbb{D}}$ — ее параметрическое представление:

$$\begin{vmatrix} P & Q & R \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & f'_u \\ 0 & 1 & f'_v \end{vmatrix} = \{-f'_u, -f'_v, 1\} \tag{7.6.5}$$

Поэтому, если $\vec{a} = \{0, 0, R\}$, то $< \vec{a}, \vec{r}'_u, \vec{r}'_v >= (\vec{a}, \vec{n}\,) = R$. Отсюда из формулы (7.6.4) получаем:

$$\iint\limits_{S^+} Rdxdy := \iint\limits_{S^+} \vec{a}\,d\vec{S} = \iint\limits_{\mathbb{D}} R(x, y, f(x,y))dxdy \tag{7.6.6}$$

Замечание 7.6.1. Поскольу в примере (7.6.1) проекция вектора $\vec{n}$ на вектор $\vec{k}$ равна еденице, то $\cos\gamma = \text{Пр}_{\vec{k}}\vec{\nu} > 0$. $\vec{\nu}$ образует угол с осью Oz, то есть направленно вверх от поверхности S, поэтому поверхность S^+ называют верхней стороной S, а противположно ориентированную поверхность S^- — нижней стороной.

Пример 7.6.2. Пусть S_0 — цилиндрическая поверхность, направляющей которой является некоторая гладкая кривая, лежащая в плоскости Oxy, а образующая параллельная оси Oz. S_0^+ — поверхность S_0, ориентированная непрерывной нормалью $\vec{\nu}$, тогда $\cos\gamma = \text{Пр}_{Oz}\vec{\nu} = 0$ и

$$\iint\limits_{S_0} Rdxdy = \iint\limits_{S_0} R\cos\gamma dS = 0 \tag{7.6.7}$$

Определение 7.6.2. Поверхностный интеграл второго рода по кусочно-гладкой ориентированной поверхности S определим как сумму интегралов второго рода по гладким частям, составим эту поверхность, при условии, что ориентация каждой из этих частей совпадает с выбранной ориентацие поверхности.

Глава 8

Элементы векторного анализа и теории поля

8.1 Определения

Вместо терминов числовая функция в точке и вектор-функции точки будем употреблять такие равнозначные к ним понятия: скалярное поле и векторное поле(тем самым подчеркивается, что значение функции не зависит от выбора системы координат).

Определение 8.1.1. Пусть в области $\mathbb{G}$ задана $\vec{a} = \vec{a}(M)$ и существует $u = u(M),\ M \in \mathbb{G}$, такая что

$$\vec{a}(M) = \text{grad } u(M) \tag{8.1.1}$$

Тогда функция $u(M)$ называется потенциалом поля $\vec{a}$. Поле обладающее потенциалом называется потенциальным полем.

Введем $\nabla = \{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\}$ (оператор Набла). Тогда $\nabla U = \{\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}\}$ и равенство (8.1.1) можно записать в виде $\vec{a}(M) = \nabla U$.

Определение 8.1.2. Пусть поле $\vec{a} = \{P, Q, R\}$ дифференцируемо в области $\mathbb{G}$, числовая функция

$$\text{div } \vec{a} = (\nabla, \vec{a}) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

называется дивиргенцией поля $\vec{a}$ в области $\mathbb{G}$. Векторная функция

$$\text{rot } \vec{a} = [\vec{\nabla}, \vec{a}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left\{ \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right\}$$

называется ротором или вихрем поля A.

Определение 8.1.3. Если векторное поле $\vec{a}$ задано на кусочно-гладкой замкнутой кривой Γ, то

$$\oint\limits_{\Gamma} \vec{a}\, d\vec{r}$$

называется циркуляцией векторного поля $\vec{a}$ по кривой Γ.

Определение 8.1.4. Если кусочно-гладкая поверхность S ориентирована с помощью единичной нормали $\vec{\nu}$, то для векторного поля $\vec{a}$, заданного на поверхности S:

$$\iint\limits_S (\vec{a}, \vec{\nu}) dS$$

называется потоком векторного поля, через поверхность S.

8.2 Формула Гаусса-Остроградского

Теорема 8.2.1. *Пусть $\mathbb{G}$ — ограниченная область $\subset \mathbb{R}^3_{xyz}$ с кусочно-гладкой границей ∂G, P, Q, R — функции, непрерывные вместе со своими частными производными:* $\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial z}$, $(x, y, z) \in \overline{\mathbb{G}}$. $\vec{a} = \{P, Q, R\}$, *тогда*

$$\iiint\limits_{\mathbb{G}} div\, \vec{a}\, dxdydz = \iint\limits_{\partial\mathbb{G}} (\vec{a}, \vec{\nu}) dS \tag{8.2.1}$$

где $\vec{\nu}$ — единичная нормаль к $\partial\mathbb{G}$, внешняя относительно области $\mathbb{G}$. То есть поток векторного поля через границу области равен интегралу от дивиргенции поля по самой области. (8.2.1) *называется формулой Остроградского-Гаусса.*

$$\iiint \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz = \iint\limits_{\partial\mathbb{G}^+} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy \tag{8.2.2}$$

где $\partial\mathbb{G}^+$ ориентирована внешней нормалью $\vec{\nu}$.

Доказательство. $\mathbb{R}^3$

Определение 8.2.1. $\mathbb{G} \subset \mathbb{R}^3, \mathbb{G}_z, S_0$ с образующими параллельными оси Oz, S_1, S_2, φ, ψ, $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^2$ с кусочно-гладкой границей $\partial\mathbb{D}$. $\mathbb{G}_z = \{(x, y, z) : (x, y) \in \mathbb{D}, \varphi(x, y) < z < \psi(x, y)\}$. Аналогично определяются области $\mathbb{G}_y$ и $\mathbb{G}_x$, цилиндрической поверхности, образующие которой параллельны Oy и Ox. Простой областью называется область, допускающая разбиение на области каждого из типов: $\mathbb{G}_x, \mathbb{G}_y, \mathbb{G}_z$.

□

Лемма 8.2.1. *Пусть в теореме* (8.2.1) $\mathbb{G}$ *— область типа $\mathbb{G}_z$, тогда*

$$\iiint\limits_{\mathbb{G}} \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz = \iint\limits_{\partial\mathbb{G}^+} Rdxdy \tag{8.2.3}$$

Доказательство.

$$\iiint\limits_{\mathbb{G}} \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz = \iint\limits_{\mathbb{D}} dxdy \int\limits_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz = \iint\limits_{\mathbb{D}} \left(R(x, y, \psi(x, y)) - R(x, y, \varphi(x, y))\right) dxdy =$$

$$\iint\limits_{\mathbb{D}} R(x, y, \psi(x, y))dxdy - \iint\limits_{\mathbb{D}} R(x, y, \varphi(x, y))dxdy \overset{(7.6.6)}{=} \iint\limits_{S_2^+} Rdxdy + \iint\limits_{S_1^-} Rdxdy \tag{8.2.4}$$

где S_2^+ — верхняя сторона поверхности S_2, а S_1^- — нижняя сторона поверхности S_1. Поскольку двойной $\iint\limits_{S_0^+} Rdxdy = 0$ (см. (7.6.7)), $\partial\mathbb{G} = S_1 \cup S_2 \cup S_0$, то согласно (7.6.2) из (8.2.4) получаем (8.2.3). □

Лемма 8.2.2. *Если область $\mathbb{G}$ можно разбить на конечное число областей типа $\mathbb{G}_z$, то выполняется* (8.2.3).

Доказательство. Очевидно, что на поверхности, по которой прилигают две такие области, индуцируются противоположные ориентации, поэтому при положительном интегрировании по границе, произойдут взаимные уничтожения, в результате которых останется лишь интеграл $\partial\mathbb{G}^+$ исходной области $\mathbb{G}$. $\square$

Если область $\mathbb{G}$ можно разложить на области типа $\mathbb{G}_y, \mathbb{G}_x$, то соответственно имеют место соотношения:

$$\iiint\limits_{\mathbb{G}} \frac{\partial Q}{\partial y} dxdydz = \iint\limits_{\mathbb{G}^+} Qdxdz \tag{8.2.5}$$

$$\iiint\limits_{\mathbb{G}} \frac{\partial Q}{\partial x} dydzdx = \iint\limits_{\mathbb{G}^+} Qdydz \tag{8.2.6}$$

если область $\mathbb{G}$ простая, то складывая (8.2.3), (8.2.5) и (8.2.6). Получим для области $\mathbb{G}$ равенство (8.2.2).

8.3 Формула Стокса

Теорема 8.3.1. *$\vec{a}$ непрерывно дифференцируемая вектор-функция в области $\mathbb{G}$, содержащей ориентированную кусочно-гладкую поверхность $S = S_1 \cup \dots \cup S_k$, $S_1, \dots, S_k$ — гладкие куски поверхности и пусть ∂S — ее край с ориентацией, согласованной с заданной ориентацией поверхности S, тогда:*

$$\int\limits_{\partial S} \vec{a}\, d\vec{r} = \iint\limits_{S} rot\ \vec{a}\, d\vec{S} \tag{8.3.1}$$

таким образом циркуляция векторного поля на границе поверхности равна потоку поля через поверхность. Наглядное согласование ориентации ∂S с ориентацией поверхности означает следующие: наблюдатель, двигающийся по краю ∂S (этот край может состоять из нескольких контуров), и, смотрящий из конца нормали $\vec{\nu}$, видит непосредственно прилегающую к нему часть поверхности слева от себя ($\vec{\nu}$ — определяет ориентацию того куска S_i, на котором в данный момент находится наблюдатель). Формула (8.3.1) *называется формулой Стокса. Если $S \subset \mathbb{R}^2$, то получаем формулу Грина.*

Доказательство. Очевидно, достаточно провести доказательство для гладкой поверхности, так как написав формулу Стокса для каждой поверхности S_i $(i = 1, \dots, k)$, и положив получившиеся равенства получим формулу (8.3.1).

Чтобы доказательство упростить проведем его с дополнительными условиями на гладкой поверхности $S : S = \{\vec{r}(u,v) : (u,v) \in \overline{\mathbb{D}}\}$ — давжды непрерывно дифференцируемая ориентированная поверхность, без особых точек в пространстве $\mathbb{R}^3_{xyz}, \mathbb{D}$ — плоская ограниченная область у которой область $\partial\mathbb{D}$ — есть простой кусочно-гладкий контур. Пусть $u = u(t), v = v(t),\ t \in [a,b]$ — параметрическое представление контуров $\partial\mathbb{D}^+, \partial S$ — край поверхности S с представлением: $\vec{r} = \vec{r}(u(t), v(t)),\ a \le t \le b,\ S^+$ — поверхность S, оиентированная нормалью $\vec{\nu} = \frac{(\vec{r}'_u, \vec{r}'_v)}{|(\vec{r}'_u, \vec{r}'_v)|} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$.

Поскольку $(\text{rot}\ \vec{a}, \vec{\nu}) = (\vec{\nu}, [\nabla, \vec{a}]) = \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$, то в координатной записи формула

(8.3.1) примет вид:

$$\int\limits_{\partial S} Pdx + Qdy + Rdz = \iint\limits_{S^+} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dxdz + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy \quad (8.3.2)$$

поэтому достаточно проверить, что:

$$\int\limits_{\partial S} Pdx = \iint\limits_{S^+} \frac{\partial P}{\partial z}dxdz - \frac{\partial P}{\partial y}dxdy$$

$$\int\limits_{\partial S} Qdy = \iint\limits_{S^+} \frac{\partial Q}{\partial x}dxdy - \frac{\partial Q}{\partial z}dydz$$

$$\int\limits_{\partial S} Rdz = \iint\limits_{S^+} \frac{\partial R}{\partial y}dydz - \frac{\partial R}{\partial x}dxdz$$

сложив эти формулы, получим формулу (8.3.2). Проверим пример формулы:

$$\int\limits_{\partial S} P(x,y,z)dx = \int\limits_a^b P(\vec{r}(u(t),v(t)) \cdot x'_t(u(t),v(t))dt = \int\limits_a^b P(\vec{r}(u(t),v(t))) \left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t}\right) dt =$$

$$\int\limits_{\partial \mathbb{D}^+} P(\vec{r}(u,v))\frac{\partial x}{\partial u}du + P(\vec{r}(u,v))\frac{\partial x}{\partial v}dv = \iint\limits_{\mathbb{D}} \left[\frac{\partial}{\partial u}\left(P\frac{\partial x}{\partial v}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(P\frac{\partial x}{\partial u}\right)\right] dudv =$$

$$\iint\limits_{\mathbb{D}} \left[\left(\frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}\right)\frac{\partial x}{\partial v} + P\frac{\partial^2 x}{\partial v \partial u} - \left(\frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}\right)\frac{\partial x}{\partial u} - P\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}\right] dudv =$$

$$\iint\limits_{\mathbb{D}} \left[\frac{\partial P}{\partial z}\frac{\mathbb{D}(z,x)}{\mathbb{D}(u,v)} - \frac{\partial P}{\partial y}\frac{\mathbb{D}(x,y)}{\mathbb{D}(u,v)}\right] dudv = \iint\limits_{S^+} \frac{\partial P}{\partial z}dxdz - \iint\limits_{S^+} \frac{\partial P}{\partial y}dxdy$$

□

8.4 Инвариантность понятий дивергенция и ротор

Далее $\vec{a} = \vec{a}(M),\ M \in \mathbb{G}$ — непрерывно дифференцируемое векторное поле в трехмерной области $\mathbb{G}$.

Теорема 8.4.1. *Пусть $\mathbb{V} \subset \mathbb{G}$ — окрестность (например шаровая). $|\mathbb{V}|$ — ее объем. d — диаметр, тогда:*

$$div\ \vec{a}(M_0) = \lim_{d \to 0} \frac{\int\limits_{\partial \mathbb{V}} (\vec{a}, \vec{\nu})dS}{|\mathbb{V}|} \quad (8.4.1)$$

$\vec{\nu}$ — внешняя нормаль к границе $\partial\mathbb{V}$ области $\mathbb{V}$.

Доказательство. Используя формулу Остроградского-Гаусса и теорему о среднем получим:

$$|\mathbb{V}| \cdot \mathrm{div}\ \vec{a}(M') = \iint\limits_{\partial \mathbb{V}} (\vec{a}, \vec{\nu})dS \quad (8.4.2)$$

где $M' \in \mathbb{V}$. При $d \to 0 : M' \to M_0,\ \mathrm{div}\ M' \to \mathrm{div}\ M_0$. Отсюда из (8.4.2) следует (8.4.1). □

Правая часть формулы (8.4.1) не зависит от выбора координат. Поэтому div $\vec{a}$ инвариантна.

Если считать $\vec{a}$ полем скоростей течения жидкости или газа, то дивиргенцию можно интерпретировать как плотность распределения источников в плотности течения.

Теорема 8.4.2. *Пусть $M_0 \in \mathbb{G}, \vec{\nu}$ — произвольный фиксированный единичный вектор Π — плоскость, проходящая через точку M_0 перпендикуляроно $\vec{\nu}$. S — окрестность (например круговая) точки M_0 плоскости Π ($S \subset \Pi \cap \mathbb{G}$), $|S|$ — ее площадь, d — ее диаметр. И пусть контур $\vec{S}$ согласованно ориентирован с нормалью $\vec{\nu}$. Тогда:*

$$(rot\ \vec{a}(M_0), \vec{\nu}) = \lim_{d \to 0} \frac{\int\limits_{\partial S} \vec{a}\, d\vec{r}}{|S|} \tag{8.4.3}$$

Доказательство. Из формулы Стокса и теоремы о среднем получим:

$$|S| \cdot (\mathrm{rot}\ \vec{a}(M'), \vec{\nu}) = \int\limits_{\partial S} \vec{a}\, d\vec{r},\ \ M' \in S \tag{8.4.4}$$

если $d \to 0$, то $M' \to M_0, (\mathrm{rot}\ \vec{a}(M'), \vec{\nu}) \to (\mathrm{rot}\ \vec{a}(M_0), \vec{\nu})$. Отсюда из (8.4.4) получаем (8.4.3). □

Правая часть равенства (8.4.3) не зависит от выбор системы координат. Выбрав в качестве $\vec{\nu}$ три линейно независимых вектора получим по формуле (8.4.3) три проекции rot $\vec{a}$ на эти векторы. Этими своими проекциями ротор однозначно определяется. Поскольку они не зависят от выбора системы координат, следовательно rot $\vec{a}$ не зависит от системы координат.

8.5 Потенциальные векторные поля

Поверхность S, для которой

Определение 8.5.1. Множество $\mathbb{E} \subset \mathbb{R}^3$ называется односвязанным, если для любого кусочно-гладкого замкнутого контура, принадлежащего $\mathbb{E}$, существует допустимая поверхность, краем которой он являлся и которая так же лежит в $\mathbb{E}$.

Если $\mathbb{E}$ — плоская область $\mathbb{G} \subset \mathbb{R}^2$, то определение (8.5.1) равносильно условию: для любого кусочно-гладкого контура, ограниченная им облать $\mathbb{D}$ содержится в $\mathbb{G}$ (то есть односвязная плоская область не имеет дыр).

В пространстве примером односвязных областей являются выпуклые области, множество точек лежащих между двумя коцентрическими сферами.

Теорема 8.5.1. *Пусть в односвязной области $\mathbb{G} \subset \mathbb{R}^3$ задано непрерывно дифференцируемое векторное поле $\vec{a} = \{P, Q, R\}$, тогда эквивалентны следующие пять свойств:*

1. *$\vec{a} = \vec{a}(M)$ — потенциальна в $\mathbb{G}$*

2. *$Pdx+Qdy+Rdz$ является в $\mathbb{G}$ полным дифференциалом некоторой функции $u = u(M)$, которая и является потенциалом поля $\vec{a}$*

3. *Для любой точки $A \in \mathbb{G}$ и $B \in \mathbb{G}$ $\int\limits_{\widehat{AB}} \vec{a}\, d\vec{r}$ не зависит от кривой $\widehat{AB}$, соединяющей эти точки в области $\mathbb{G}$ (предполагается, что $\widehat{AB}$ — простая кусочно-гладкая кривая)*

4. *$\int \vec{a}\,d\vec{r} = 0$ для любого кусочно-гладкого контура $\Gamma \subset \mathbb{G}$*

5. *rot $\vec{a} = 0$ в области $\mathbb{G}$*

Доказательство. 1. Из 2 следует 1.

Пусть в $\mathbb{G}$ существует функция $U(M) = U(x,y,z) : dU = Pdx + Qdy + Rdz$. Тогда $P = \frac{\partial U}{\partial x}, Q = \frac{\partial U}{\partial y}, R = \frac{\partial U}{\partial z}$, так что $\vec{a} = \operatorname{grad} U$.

2. Из 1 следует 5.

Пусть $\vec{a} = \operatorname{grad} U = \nabla U$, тогда $\operatorname{rot} \vec{a} = [\nabla, \vec{a}] = [\nabla, \nabla U] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial U}{\partial x} & \frac{\partial U}{\partial y} & \frac{\partial U}{\partial z} \end{vmatrix} = 0$. Равенство смешанных производных обеспечено непрерывной дифференцируемостью функции P, Q, R.

3. Из 5 следует 4.

Пусть rot $\vec{a} = 0$ в области $\mathbb{G}$. В силу односвязности области $\mathbb{G}$ существует допустимая поверхность $S \subset \mathbb{G}$ для которой Γ является краем. Тогда по теореме Стокса:

$$\int\limits_{\Gamma} \vec{a}\,d\vec{r} = \iint\limits_{S} \operatorname{rot} \vec{a}\,d\vec{S} = 0$$

4. Из 4 следует 3.

Пусть $\int\limits_{\Gamma} \vec{a}\,d\vec{r} = 0,\ \forall \Gamma \in \mathbb{G}$ (кусочно-гладкой). $A \in \mathbb{G}, B \in \mathbb{G},\ (\overset{\frown}{AB})_1, (\overset{\frown}{AB})_2$ — кусочно гладкие простые кривые, соединяющие в $\mathbb{G}$ точки A, B. Если эти кривые не имеют общих точек, то кривая $\Gamma := (\overset{\frown}{AB})_1 \cup (\overset{\frown}{AB})_2$ является простым кусочно-гладким контуром, лежащим в $\mathbb{G}$, тогда:

$$\oint\limits_{\Gamma} = \int\limits_{(\overset{\frown}{AB})_1} - \int\limits_{(\overset{\frown}{AB})_2} = 0 \implies \int\limits_{(\overset{\frown}{AB})_1} = \int\limits_{(\overset{\frown}{AB})_2}$$

если же $(\overset{\frown}{AB})_1 \cap (\overset{\frown}{AB})_2 \neq 0$, то в области $\mathbb{G}$ нужна третья кривая $(\overset{\frown}{AB})_3$, которая не пересекается ни с одной из прежних. Тогда по доказанному: $\int\limits_{(\overset{\frown}{AB})_1} = \int\limits_{(\overset{\frown}{AB})_2} = \int\limits_{(\overset{\frown}{AB})_3}$

5. из 3 следует 2.

Зафиксируем какую-либо точку $M_0 \in \mathbb{G}$ и определим функцию $U(M)$ по формуле:

$$U(M) = \int\limits_{\overset{\frown}{M_0M}} \vec{a}\,d\vec{r} = \int\limits_{\overset{\frown}{M_0M}} Pdx + Qdy + Rdz,\ M \in \mathbb{G} \tag{8.5.1}$$

где $\overset{\frown}{M_0M}$ — какая-либо простая кусочно-гладкая кривая, соединяющая в $\mathbb{G}$ точки M_0 и M. Формула (8.5.1) в силу свойства 3 определяет функцию $U(M)$ однозначно. Покажем что:

$$dU = Pdx + Qdy + Rdz \tag{8.5.2}$$

в любой точке $M(x,y,z) \in \mathbb{G}$. Пусть $M'(x+h,y,z) \in \mathbb{G}, \widehat{MM'}$ — отрезок с концами M и M'. Тогда:

$$U(M') - U(M) = \int\limits_{\widehat{MM'}} Pdx + Qdy + Rdz = \int\limits_{x}^{x+h} P(t,y,z)dt$$

откуда получаем:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \lim_{h\to 0} \frac{U(x+h,y,z) - U(x,y,z)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int\limits_{x}^{x+h} P(t,y,z)dt = P(x,y,z)$$

Аналогично получим $\frac{\partial U}{\partial y} = Q$, $\frac{\partial U}{\partial z} = R$. Поскольку функции P, Q, R непрерывны, то функция $U(M)$ дифференцируема и равенство (8.5.2) доказано.

□

Замечание 8.5.1. Потенциал $U(M)$ поля $\vec{a}$ определен с точностью до аддитивной постоянной. Из формулы (8.5.1) следует, что потенциальное поле $\vec{a} : \int \vec{a}\, d\vec{r} = U(B) - U(A)$.

Замечание 8.5.2. Линиями потенциала называют $U, \vec{F} = -\text{grad}\ U$.

8.6 Соленоидальные векторные поля

Определение 8.6.1. Непрерывная в области $\mathbb{G} \subset \mathbb{R}^3$ векторное поле $\vec{a}$ называется соленоидальным, если для любой ограниченной области $\mathbb{V} \subset \mathbb{G}$ с кусочно-гладкой границей $\partial\mathbb{V} \subset \mathbb{G}$ его поток через эту границу равен 0. Очевидно, что понятия соленоидальности не зависит от выбора ориентации на границе $\partial\mathbb{V}$ обалсти $\mathbb{V}$.

Теорема 8.6.1. *Для того, чтобы непрерывно дифференцируемое векторное поле $\vec{a}$ было соленоидальным в области $\mathbb{G}$ необходимо и достаточно, чтобы на всех точках области выполнялось равенство:*

$$div\ \vec{a} = 0 \tag{8.6.1}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $\vec{a}$ соленоидально в $\mathbb{G}, M \in \mathbb{G}, r_0 \in \mathbb{G}$. Тогда $r_0 > 0, \forall r : r < r_0$ и с центром в точке M содержится в $\mathbb{G}$. Для этих шаров:

$$\iint\limits_{\partial\mathbb{V}_r} \vec{a}\, d\vec{S} = 0$$

$$\text{div}\ \vec{a}(M) = \lim_{r\to 0} \frac{\iint\limits_{\partial\mathbb{V}_r} \vec{a}\, d\vec{S}}{|\mathbb{V}_R|} = 0$$

Достаточность. Если выполнено (8.6.1), то в силу формулы Остроградского-Гаусса: для любого $\mathbb{V} \subset \mathbb{G}$ с кусочно-гладкой границей $\partial\mathbb{V}$ имеем:

$$\iint\limits_{\partial\mathbb{V}_r} \vec{a}\, d\vec{S} = \iiint\limits_{\mathbb{V}} \text{div}\ \vec{a}\, dxdydz = 0$$

□

Пример 8.6.1. Если $\vec{b}$ — дважды непрерывно дифференцируемое в области $\mathbb{G}$ поле, то rot $\vec{b}$ является соленоидальным в области $\mathbb{G}$ полем.

$$\text{div rot}\ \vec{b} = (\nabla, [\nabla, \vec{b}]) = 0$$