

НИЯУ МИФИ

3-ий семестр факультет КиБ, конспект лекций

---

## Математический анализ

---

*Автор:*

Тропин А.Г.

*Соавтор:*

Коверко Е.А.

*Лектор:*

Севастьянов Е.А.

e-mail: [andrewtropin@gmail.com](mailto:andrewtropin@gmail.com)

github: [abcdw/mephi](https://github.com/abcdw/mephi)

14 января 2014 г.

## Предисловие

---

Данный конспект был составлен для упрощения процесса подготовки к экзамену по математическому анализу.

Хочется выразить отдельную благодарность Коверко Егору, который предоставил большую часть материала и помог в написании. Спасибо тем, кто помогал в исправлении ошибок и опечаток, в частности Роману Рагозину, Севумяну Роберту, Илье Дайлиденку.

Данный материал распространяется как есть, авторы и соавторы не предоставляют никаких гарантий.

# Оглавление

<b>I</b>	<b>Функциональные последовательности и ряды</b>	<b>5</b>
<b>1</b>	<b>Числовые ряды</b>	<b>7</b>
1.1	Определение . . . . .	7
1.2	Действия с рядами . . . . .	8
1.3	Ряды с неотрицательными членами . . . . .	8
1.4	Интегральный признак сходимости рядов с неотрицательными членами . . . . .	11
1.5	Признак сходимости для знакочередующихся рядов . . . . .	12
1.6	Преобразование Абеля . . . . .	13
1.7	Признаки Дирихле и Абеля . . . . .	13
1.8	Безусловно и условно сходящиеся ряды . . . . .	14
<b>2</b>	<b>Функциональные последовательности и ряды</b>	<b>15</b>
2.1	Поточечная сходимость . . . . .	15
2.2	Равномерная сходимость . . . . .	16
2.3	Признаки равномерной сходимости рядов Дирихле и Абеля . . . . .	17
2.4	Равномерная сходимость и непрерывность . . . . .	18
2.5	Равномерная сходимость и интегрирование . . . . .	19
2.6	Равномерная сходимость и дифференцирование . . . . .	20
<b>3</b>	<b>Степенные ряды</b>	<b>21</b>
3.1	Радиус сходимости и круг сходимости . . . . .	21
3.2	Степенные ряды в действительной области. Общие свойства. . . . .	22
3.3	Ряд Тейлора. Разложение функции в степенные ряды. . . . .	23
3.4	Разложение основных элементарных в ряд Тейлора. . . . .	24
3.5	Формулы Эйлера . . . . .	27
<b>4</b>	<b>Ряды Фурье</b>	<b>29</b>
4.1	Ортогональные системы . . . . .	29
4.2	Коэффициенты Фурье . . . . .	29
4.3	Ряд Фурье . . . . .	32
4.4	Тригонометрический ряд Фурье . . . . .	33
4.5	Обобщение на неограниченные функции . . . . .	38
4.6	Достаточные условия сходимости тригонометрического ряда Фурье в точке . . . . .	39
4.7	Гладкость функции и скорость убывания коэффициентов Фурье . . . . .	40
<b>II</b>	<b>Интегралы</b>	<b>43</b>
<b>5</b>	<b>Кратные интегралы</b>	<b>45</b>
5.1	Определение интеграла Римана на $n$ -ом промежутке . . . . .	45
5.2	Условие существования кратного интеграла . . . . .	46

5.3	Кратный интеграл по множеству . . . . .	47
5.4	Мера(объем) множества . . . . .	47
5.5	Свойства кратных интегралов . . . . .	48
5.6	Сведение кратного интеграла к повторному . . . . .	49
5.7	Замена переменных в кратных интегралах . . . . .	51
<b>6</b>	<b>Криволинейные интегралы</b>	<b>55</b>
6.1	Криволинейный интеграл первого рода . . . . .	55
6.2	Криволинейный интеграл второго рода . . . . .	56
6.3	Формула Грина . . . . .	58
<b>7</b>	<b>Поверхностные интегралы</b>	<b>61</b>
7.1	Поверхности в $\mathbb{R}^3$ . . . . .	61
7.2	Касательная плоскость и нормаль к поверхности в $\mathbb{R}^3$ . . . . .	62
7.3	Площадь поверхности . . . . .	62
7.4	Ориентация поверхности в $\mathbb{R}^3$ . . . . .	63
7.5	Определение поверхностного интеграла первого рода . . . . .	64
7.6	Поверхностный интеграл второго рода . . . . .	65
<b>8</b>	<b>Элементы векторного анализа и теории поля</b>	<b>67</b>
8.1	Определения . . . . .	67
8.2	Формула Гаусса-Остроградского . . . . .	68
8.3	Формула Стокса . . . . .	69
8.4	Инвариантность понятий дивергенция и ротор . . . . .	70
8.5	Потенциальные векторные поля . . . . .	71
8.6	Соленоидальные векторные поля . . . . .	73
<b>9</b>	<b>Бесконечные произведения и <math>\Gamma</math>-функция Эйлера</b>	<b>75</b>
9.1	Бесконечные произведения . . . . .	75
9.2	Определение $\Gamma$ -функции Эйлера. Некоторые ее свойства . . . . .	76
9.3	Представление синуса в виде бесконечного произведения и формула дополнения для $\Gamma$ -функции . . . . .	77
9.4	Интегральное представление для $\Gamma$ -функции Эйлера . . . . .	78
9.5	Формула Стирлинга . . . . .	80

# Часть I

## Функциональные последовательности и ряды



# Глава 1

## Числовые ряды

### § 1.1. Определение

**Определение 1.1.1.**  $U_0 + U_1 + U_2 + U_3 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} U_k$

**Определение 1.1.2** (Частичная сумма).  $S_n = \sum_{k=0}^n U_k$

**Определение 1.1.3.** Ряд сходится, если  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n U_k = S$

**Теорема 1.1.1** (Критерий Коши). *Ряд сходится, тогда и только тогда, когда он удовлетворяет условию Коши:*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon), \forall n \geq N, \forall p : \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} U_k \right| = |U_{n+1} + \dots + U_{n+p}| = |S_{n+p} - S_n| < \varepsilon$$

*Доказательство.*  $\sum U_k$  - сходится  $\Leftrightarrow \{S_n\}$  - сходится

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N : \forall n \geq N, \forall p : |S_{n+p} - S_n| < \varepsilon$$

□

**Следствие** (Необходимое условие сходимости). *Если  $\sum U_k$  сходится, то  $U_k \rightarrow 0$ , при  $k \rightarrow \infty$*

*Доказательство.* Если  $\sum U_k$  сходится, то выполняется Критерий Коши. При  $p = 1$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n \geq N : |S_{n+1} - S_n| = |U_{n+1}| < \varepsilon$$

□

**Следствие.** *Отбрасывание или добавление любого конечного числа членов ряда на его сходимость не влияет.*

**Пример 1.1.1.**  $\sum_0^{\infty} z^n$ ,  $S_n(z) = \sum_0^n z^n = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}$ . При  $n \rightarrow \infty$ ,  $S_n(z) = \frac{1}{1-z}$ ,  $|z| < 1$ .  
 $S_n(z)$  не имеет предела при  $|z| \geq 1$ .

## § 1.2. Действия с рядами

**Теорема 1.2.1.** Ряды  $\sum U_k$  и  $\sum V_k$  сходятся,  $\alpha$  — комплексное число, тогда

$$\sum \alpha U_k = \alpha \sum U_k \quad (1.2.1)$$

$$\sum (U_k \pm V_k) = \sum U_k \pm \sum V_k \quad (1.2.2)$$

*Доказательство.* Доказательство свойства (1.2.1):

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha U_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \alpha U_k = \alpha \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n U_k = \alpha \sum_{k=0}^{\infty} U_k$$

□

*Доказательство.* Доказательство свойства (1.2.2):

$$\begin{aligned} \sum_0^{\infty} U_k \pm \sum_0^{\infty} V_k &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_0^n U_k \pm \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_0^n V_k = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_0^n U_k \pm \sum_0^n V_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_0^n (U_k \pm V_k) = \sum_0^n (U_k \pm V_k) \end{aligned}$$

□

*Замечание 1.2.1.* Из сходимости  $\sum (U_k \pm V_k) \not\Rightarrow$  сходимости  $\sum U_k$  и  $\sum V_k$

*Замечание 1.2.2.* Если  $\sum U_k$  сходится, то можно группировать, не меняя порядка.

*Пример 1.2.1.*

$$\begin{aligned} &\sum (1 - 1) \\ &(1 - 1) + (1 - 1) + \dots \\ &1 - (1 - 1) - (1 - 1) \dots \end{aligned}$$

*Комментарий.* Нельзя раскрывать скобки и переставлять члены.

## § 1.3. Ряды с неотрицательными членами

$U_k \geq 0$ ,  $S_n = \sum_0^n U_k$  — неубывающая последовательность.

$\sum_0^n U_k$  — сходится  $\Leftrightarrow \{S_n\}$  — ограничена

*Комментарий.* Сходимость ряда эквивалентна ограниченности  $S_n$

**Теорема 1.3.1.**

$$U_k \geq 0, V_k \geq 0, \forall k :$$

1. Если  $0 \leq U_k \leq V_k$ , то если  $\sum V_k$  сходится  $\Rightarrow \sum U_k$  сходится и если  $\sum U_k$  расходится  $\Rightarrow \sum V_k$  расходится.
2. Если  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{U_k}{V_k} = A > 0$ , то ряды сходятся или расходятся одновременно.



*Доказательство.*

$$1. \forall n \text{ верно неравенство } 0 \leq \sum_0^n U_k \leq \sum_0^n V_k$$

$$2. \forall \varepsilon > 0 \quad \varepsilon < A \quad \exists N : \forall n \geq N \Rightarrow 0 < A - \varepsilon < \frac{U_k}{V_k} < A + \varepsilon$$

$$0 < (A - \varepsilon) \cdot V_k < U_k < (A + \varepsilon) \cdot V_k$$

Пусть  $U_k$  сходится, тогда, из доказанного выше 1ого пункта, следует  $(A - \varepsilon) \cdot V_k$  сходится  $\Rightarrow \sum V_k$  сходится  $\Rightarrow \sum (A + \varepsilon) \cdot V_k$  сходится  $\Rightarrow \sum U_k$  сходится.

□

*Замечание 1.3.1.* Вместо существования предела  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{U_k}{V_k}$  достаточно предположить, что существуют такие числа  $p$  и  $q > 0$ , такие что  $0 < q < \frac{U_k}{V_k} < p, \forall k$

**Теорема 1.3.2** (Признак Даламбера).

$$\sum U_k, \quad U_k > 0$$

1. Если  $\exists q$  такое что:  $\forall k \quad \frac{U_{k+1}}{U_k} \leq q < 1$ , то  $U_k$  сходится

2. Если  $\exists \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{U_{k+1}}{U_k} = q$ , то:

- при  $q < 1$  сходится
- при  $q > 1$  расходится
- при  $q = 1$  неизвестно (нужно провести дополнительные исследования)

*Доказательство.* Идея доказательства - сравнение с геометрической прогрессией.

$$1. \quad \bullet \quad k = 0, 1, \dots, n, \quad U_k = U_0 \cdot \frac{U_1}{U_0} \frac{U_2}{U_1} \dots \frac{U_k}{U_{k-1}} < U_0 \cdot q^k$$

*Комментарий.*  $\frac{U_k}{U_{k-1}} < q, \forall k$

$q < 1$ , тогда  $\sum U_0 \cdot q^k$  — сходящаяся геометрическая прогрессия.

$$\bullet \quad U_k = U_0 \cdot \frac{U_1}{U_0} \frac{U_2}{U_1} \dots \frac{U_k}{U_{k-1}} \geq U_0 > 0$$

*Комментарий.*  $\frac{U_k}{U_{k-1}} \geq 1, \forall k$

$U_k \not\rightarrow 0 \Rightarrow$  не выполняется необходимое условие сходимости.

2. Пусть  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{U_{k+1}}{U_k} = q$

$\forall \varepsilon > 0, \exists K : \forall k \geq K$  выполняется неравенство  $q - \varepsilon < \frac{U_{k+1}}{U_k} < q + \varepsilon$

• Если  $q < 1$ , выберем такое  $\varepsilon$ , что  $q + \varepsilon < 1$ , для  $\forall k \geq K(\varepsilon)$ .  
 $\frac{U_{k+1}}{U_k} < q + \varepsilon < 1 \Rightarrow$  сходится по первой части.

• Если  $q > 1$ , то выберем  $\varepsilon$  так, чтобы  $q - \varepsilon > 1$ , для  $\forall k \geq K(\varepsilon)$ .  
 $\frac{U_{k+1}}{U_k} > q - \varepsilon > 1, \Rightarrow$  расходится по первой части.

□

**Теорема 1.3.3** (Признак Коши).

$$\sum U_k, U_k \geq 0$$

1. Если  $\exists q < 1$  и  $\forall k > K$  : выполняется  $\sqrt[k]{U_k} \leq q < 1$ , то ряд сходится, а если  $\forall k \sqrt[k]{U_k} \geq 1$ , то расходится.
2. Если  $\exists \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{U_k} = q, (q \geq 0)$ , то
  - при  $q < 1$  сходится
  - при  $q > 1$  расходится
  - при  $q = 1$  нужны дополнительные исследования

*Замечание 1.3.2.*  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{U_n}$  можно рассматривать вместо  $\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{U_k}$

*Доказательство.* Сравнение с геометрической прогрессией

1. Если  $\forall k \sqrt[k]{U_k} \leq q < 1 \Rightarrow U_k \leq q^k$  — сходящаяся геометрическая прогрессия.  
Если  $\forall k \sqrt[k]{U_k} \geq 1 \Rightarrow U_k \geq 1$  — не выполняется необходимое условие сходимости.
2. Если  $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{U_k} = q$ , то  $\forall \varepsilon > 0 \exists K = K(\varepsilon) : \forall k \geq K, (q - \varepsilon) < \sqrt[k]{U_k} < (q + \varepsilon)$   
 $(q - \varepsilon)^k < U_k < (q + \varepsilon)^k$ 
  - При  $q < 1$  выберем  $\varepsilon$  так, чтобы  $q + \varepsilon < 1$ , тогда  $U_k < (q + \varepsilon)^k < 1$  — сходящаяся геометрическая прогрессия.
  - При  $q > 1$  выберем  $\varepsilon$  так, чтобы  $q - \varepsilon > 1$ , тогда  $U_k > (q - \varepsilon)^k > 1$  — не выполняется необходимое условие сходимости.

□

**Определение 1.3.1.** Дана  $\{a_n\}$  и пусть  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$  — наибольший из частичных пределов, тогда:

$$\forall \{a\} \exists \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = A \text{ or } \infty$$

*Комментарий.*  $A$  — число.

- Если  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty \Rightarrow \{a_n\}$  — неограничена сверху  $\Rightarrow \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{U_k} = +\infty$  — неограничена сверху.  $U_k$  неограничена сверху и не выполняется необходимое условие.
- Если  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ , тогда  $\forall \varepsilon \in (A - \varepsilon, A + \varepsilon)$  бесконечно много членов  $\{a_n\}$ :
  - $\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{U_k} = q < 1$ . Выберем  $\varepsilon$  так, чтобы  $q + \varepsilon < 1 \Rightarrow \exists K : \forall k \geq K, \sqrt[k]{U_k} < q + \varepsilon < 1$  по признаку Коши.
  - $\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{U_k} = q > 1$ . Выберем  $\varepsilon$  так, чтобы  $q - \varepsilon > 1 \Rightarrow \forall K \exists k \geq K : \sqrt[k]{U_k} > q - \varepsilon > 1 \Rightarrow U_k > 1$

## § 1.4. Интегральный признак сходимости рядов с неотрицательными членами

**Теорема 1.4.1.** Если  $f(x)$  неотрицательна и убывает на  $x \geq 1$ , то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) < \infty \quad (1.4.1)$$

сходится тогда и только тогда, когда сходится интеграл:

$$\int_1^{+\infty} f(x) dx \quad (1.4.2)$$

то есть  $\int_1^{+\infty} f(x) dx < \infty$ .

- $\sum a_n < \infty$  — сходится
- $\sum a_n = \infty$  — расходится

*Доказательство.* Если  $k \leq x \leq k+1$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , то, в силу убывания функции получаем неравенство:

$$f(k) \geq f(x) \geq f(k+1)$$

Интегрируя по отрезку  $[k, k+1]$  получим:

$$f(k) \geq \int_k^{k+1} f(x) dx \geq f(k+1), \quad k = 1, 2, \dots$$

$$\sum_{k=1}^n f(k+1) \leq \int_1^{n+1} f(x) dx \leq \sum_{k=1}^n f(k) \quad (1.4.3)$$

Пусть  $S_n = \sum_{k=1}^n f(k)$ , тогда (1.4.3) примет вид:

$$S_{n+1} - f(1) \leq \int_1^{n+1} f(x) dx \leq S_n \quad (1.4.4)$$

Если ряд (1.4.1) сходится и его сумма равна  $S$ , то  $S_n \leq S$ , и  $\int_1^{n+1} f(x) dx \leq S$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

$\forall b > 1, n+1 > b$  имеем:

$$\int_1^b f(x) dx \leq \int_1^{n+1} f(x) dx \leq S$$

В силу неотрицательности функции  $f(x)$  интеграл сходится.

Пусть наоборот, интеграл (1.4.2) сходится, тогда из (1.4.4) следует:

$$S_{n+1} \leq f(1) + \int_1^{n+1} f(x) dx \leq f(1) + \int_1^{\infty} f(x) dx$$

Тем самым, последовательность сумм  $\{S_n\}$  ряда (1.4.1) ограничена сверху, и поэтому этот ряд сходится.  $\square$

Пример 1.4.1.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}, \alpha \in \mathbb{R} \quad (1.4.5)$$

Положим  $f(x) = \frac{1}{x^{\alpha}}$ , тогда  $f(n) = \frac{1}{n^{\alpha}}$

Поскольку  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}}$ :

- При  $\alpha > 1$  сходится
- При  $\alpha \leq 1$  расходится

Тогда ряд (1.4.5) сходится тогда и только тогда, когда  $\alpha > 1$ . При  $\alpha < 0$  дробь  $\frac{1}{n^{\alpha}} \geq 1$ .

## § 1.5. Признак сходимости для знакочередующихся рядов

Рассмотрим ряды с действительными числами, которые то положительные, то отрицательные.

**Теорема 1.5.1** (Лейбница). *Если*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = 0 \quad (1.5.1)$$

$$U_n \geq U_{n+1} > 0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.5.2)$$

*то знакочередующийся ряд*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} U_n \quad (1.5.3)$$

*сходится, при этом если  $S$  — сумма ряда, а  $S_n$  — его  $n$ -ая частичная сумма, то  $\forall n : n = 1, 2, \dots$*

$$|S - S_n| \leq U_{n+1} \quad (1.5.4)$$

*Доказательство.* Заметим, что частичная суммы  $S_n$  с четными номерами возрастают:

$$S_{2k} = (U_1 - U_2) + (U_3 - U_4) + \dots + (U_{2k-1} - U_{2k}), \quad k = 1, 2, \dots$$

Так что выполняется неравенство  $S_{2k+2} \geq S_{2k}$ . Кроме того, они ограничены сверху:

$$S_{2k} = U_1 - (U_2 - U_3) - \dots - (U_{2k-2} - U_{2k-1}) - U_{2k}, \quad S_{2k} < U_1$$

Поэтому последовательность  $\{S_{2k}\}$  сходится

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S_{2k} = S \quad (1.5.5)$$

Поскольку  $S_{2k+1} = S_{2k} + U_{2k+1}$  и  $U_{2k+1} \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ , то

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S_{2k+1} = S \quad (1.5.6)$$

Из (1.5.5) и (1.5.6) следует, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$

При этом, нетрудно увидеть, что

$$S_{2k} \leq S \leq S_{2k+1} \leq S_{2k-1}, \quad \forall k \quad (1.5.7)$$

Из неравенства (1.5.7) следует, что

$$\begin{aligned} S - S_{2k} &\leq S_{2k+1} - S_{2k} = U_{2k+1} \\ S_{2k-1} - S &\leq S_{2k-1} - S_{2k} = U_{2k}, \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Это и означает, что  $\forall n \in \mathbb{N}$  выполняется неравенство (1.5.4). □

## § 1.6. Преобразование Абеля

**Теорема 1.6.1.** Пусть  $a_k \in \mathbb{C}$ ,  $b_k \in \mathbb{C}$ ,  $k = 1, \dots, n$ ;  $B_k = b_1 + \dots + b_k$ , тогда

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k = \sum_{k=1}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) b_k + a_n B_n \quad (1.6.1)$$

*Доказательство.* Очевидно,  $b_1 = B_1$ ,  $b_k = B_k - B_{k-1}$ ,  $k = 2, 3, \dots, n$

Поэтому  $a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n = a_1 B_1 + a_2 (B_2 - B_1) + a_3 (B_3 - B_2) + \dots + a_n (B_n - B_{n-1}) = (a_1 - a_2) B_1 + (a_2 - a_3) B_2 + \dots + (a_{n-1} - a_n) B_{n-1} + a_n B_n$

Называется преобразованием Абеля  $\sum_{k=1}^n a_k b_k$ . □

**Следствие** (лемма Абеля). Если  $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$  или  $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$ ,  $a_k \in \mathbb{R}$ ,  $\forall k = 1, 2, \dots, n$ ,  $|b_1 + \dots + b_k| \leq B$ ,  $(b_k \in \mathbb{C})$ , то

$$\left| \sum_{k=1}^n a_k b_k \right| \leq B(|a_1| + 2|a_n|)$$

*Доказательство.*  $\left| \sum_{k=1}^n a_k b_k \right| \leq \sum_{k=1}^{n-1} |a_k - a_{k+1}| |B_k| + |a_n B_n| \leq B \left( \sum_{k=1}^{n-1} |a_k - a_{k+1}| + |a_n| \right) =$   
 $= B \left( \left| \sum_{k=1}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) \right| + |a_n| \right) = B(|a_1 - a_n| + |a_n|) \leq B(|a_1| + 2|a_n|).$  □

## § 1.7. Признаки Дирихле и Абеля

**Теорема 1.7.1** (признак Дирихле). Пусть дан ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \quad (1.7.1)$$

1.  $a_n \in \mathbb{R}^n$ ,  $b_n \in \mathbb{C}$ ,  $n = 1, 2, \dots$

2.  $\{a_n\}, \{b_n\} \downarrow 0$  ( $\{a_n\} \uparrow 0$ )

3.  $\{B_n\}$  — последовательность частичных сумм ряда  $\sum b_n$  ограничена

Тогда ряд (1.7.1) сходится.

*Доказательство.*  $\exists B > 0$ ,  $|B_n| \leq B \forall n \Rightarrow \forall m \geq n \geq 2 : |b_n + \dots + b_m| = |B_m - B_{n-1}| \leq 2B$

Возьмем  $\varepsilon > 0$ . По скольку  $a_n \rightarrow 0$ , то  $\exists N = N(\varepsilon) : \forall n > N(\varepsilon)$  имеем  $|a_n| < \frac{\varepsilon}{6B}$ .

Поэтому,  $\forall n > N(\varepsilon)$  и  $\forall m \geq n$  получим:

$$|a_n b_n + \dots + a_m b_m| \leq 2B(|a_n| + 2|a_m|) < 2B \left( \frac{\varepsilon}{6B} + 2 \frac{\varepsilon}{6B} \right) = \varepsilon$$

Ряд (1.7.1) удовлетворяет Критерию Коши сходимости рядов. □

*Замечание 1.7.1.* Признак Лейбница — это частный случай признака Дирихле.

**Теорема 1.7.2** (признак Абеля). Если последовательность действительных чисел  $a_n$  монотонна и ограничена, ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ,  $b_n \in \mathbb{C}$  сходится, то ряд (1.7.1) также сходится.

*Доказательство.*  $a_n = a + \alpha_n$ ,  $\{\alpha_n\}$  — монотонно стремящаяся к нулю последовательность. Поэтому

$$\sum a_n b_n = \sum (a + \alpha_n) b_n = a \sum b_n + \sum \alpha_n b_n,$$

где  $a \sum b_n$  сходится по условию, а  $\sum \alpha_n b_n$  сходится по признаку Дирихле.

$\{B_n\}$  — последовательность частичных сумм  $\sum b_n$  ограничена,  $\{\alpha_n\}$  — монотонно стремящаяся к нулю последовательность. □

## § 1.8. Безусловно и условно сходящиеся ряды

**Определение 1.8.1.** Пусть  $\{k_n\}$ ,  $n = 1, 2, \dots$  — последовательность, в которой каждое натуральное число встречается только один раз.  $\{k_n\}$  — однозначное отображение  $a_n$  в  $a_n^* = a_{k_n}$ , ( $n = 1, 2, \dots$ ).

Будем говорить, что ряд  $\sum a_n^*$  является перестановкой ряда  $\sum a_n$ .

**Определение 1.8.2.** Говорят, что  $\sum a_n$  сходится безусловно, если каждая перестановка сходится.

**Теорема 1.8.1.** Ряд  $\sum a_n$ , ( $a_n \in \mathbb{C}$ ) сходится безусловно тогда и только тогда, когда он сходится абсолютно.

*Доказательство.* Достаточность.

Если ряд  $\sum a_n$  сходится абсолютно, то все его перестановки сходятся к одному и тому же числу — сумме исходного ряда.

Пусть  $\sum a_n^*$  — перестановка ряда  $\sum a_n$ .  $S_n^*$  — ее частичная сумма.

По Коши:  $\forall \varepsilon > 0 \exists N : m \geq n > N$

$$|a_n| + \dots + |a_m| < \varepsilon \quad (1.8.1)$$

Выберем  $p$  так, чтобы все натуральные числа  $1, 2, \dots, N$  содержались в множестве  $k_1, k_2, \dots, k_p$  (смотри определение), тогда при  $n > p$   $a_1, \dots, a_N$  в разности  $S_n - S_n^*$  уничтожаются, так что  $|S_n - S_n^*| < \varepsilon$  в силу (1.8.1).

Значит  $\{S_n^*\}$  сходится к тому же пределу, что и  $\{S_n\}$ . □

**Определение 1.8.3.** Сходящийся, но не абсолютно сходящийся ряд называется условно сходящимся.

Из теоремы (1.8.1) (из необходимости условия)  $\Rightarrow$  Теорема (1.8.2)

**Теорема 1.8.2.** Условно сходящийся ряд не может сходиться безусловно, то есть у него всегда существует расходящаяся перестановка.

*Доказательство.* Без Доказательства. □

**Теорема 1.8.3** (Римана). Если ряд с действительными членами условно сходится, то каким бы не было действительное число  $S$ , существует перестановка ряда такая, что ее сумма равна  $S$

*Доказательство.* Без Доказательства. □

## Глава 2

# Функциональные последовательности и ряды

### § 2.1. Поточечная сходимость

Пусть на некотором множестве  $\mathbb{E}$  задана последовательность комплексно значимых функций  $f_n, n = 1, 2, \dots$ , ( $f_n \in \mathbb{C}$ ). Элементы  $x \in \mathbb{E}$  будем называть точками.

**Определение 2.1.1.**  $\{f_n\}$  называется ограниченной на  $\mathbb{E}$ , если  $\exists M > 0 : \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{E}$  выполняется

$$|f_n(x)| \leq M$$

**Определение 2.1.2.**  $\{f_n\}$  называется сходящейся поточечно на множестве  $\mathbb{E}$ , если при любом фиксированном  $x \in \mathbb{E}$ , числовая последовательность  $\{f_n(x)\}$  сходится. Если последовательность сходится на  $\mathbb{E}$ , то  $f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x), x \in \mathbb{E}$  называется пределом последовательности. Пусть  $\{U_n(x)\}_{n=1}^{\infty}, x \in \mathbb{E}, (U_n \in \mathbb{C})$  — последовательность числовых функций.

**Определение 2.1.3.** Множество числовых рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} U_n(x) \tag{2.1.1}$$

в каждой из которых точка  $x$  фиксированная называется рядом на множестве  $\mathbb{E}$ , а функция  $U_n(x)$  — его член.

$S_n(x) = \sum_{k=1}^n U_k(x), x \in \mathbb{E}$  называется  $n$ -ой частичной суммой ряда (2.1.1).

$\sum_{k=n+1}^{\infty} U_k(x)$  — его  $n$ -ым остатком.

**Определение 2.1.4.** Ряд (2.1.1) называется сходящимся поточечно на множестве  $\mathbb{E}$ , если последовательность  $\{S_n(x)\}$  сходится поточечно на  $\mathbb{E}$ . При этом  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = S(x), x \in \mathbb{E}$  называется суммой ряда (2.1.1).

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n(x).$$

**Определение 2.1.5.** Если ряд (2.1.1) при любом  $x \in \mathbb{E}$  сходится абсолютно, то он называется абсолютно сходящимся на множестве  $\mathbb{E}$ .

*Замечание 2.1.1.* Беззаботная перестановка членов ряда может привести к ошибке.

## § 2.2. Равномерная сходимость

**Определение 2.2.1.** Говорят, что функциональная последовательность  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  сходится равномерно на  $\mathbb{E}$ , если  $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N, \forall x \in \mathbb{E}$  имеем

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Ясно, что каждая равномерно сходящаяся последовательность, сходится поточечно.

*Комментарий.* Обозначение равномерной сходимости:  $f_n \xrightarrow{\mathbb{E}} f$

**Теорема 2.2.1** (Критерий Коши равномерной сходимости последовательностей). *Для того, чтобы  $\{f_n\}$  равномерно сходилась на  $\mathbb{E} \iff \forall \varepsilon > 0 \exists N : n, m > N, \forall x \in \mathbb{E} :$*

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \quad (2.2.1)$$

*Доказательство.*

- Необходимость:

$f_n \xrightarrow{\mathbb{E}} f$ , тогда  $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N, \forall x \in \mathbb{E} |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ .  
 $|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, (\forall n, m > N, \forall x \in \mathbb{E}).$

- Достаточность:

Пусть выполняется условие Коши, тогда  $\{f_n(x)\}$ , удовлетворяет критерию Коши сходимости числовых последовательностей и следовательно сходящегося числового предела, который обозначим  $f(x)$ .

Тогда перейдя к пределу при  $m \rightarrow \infty$  получим  $\forall n > N, \forall x \in \mathbb{E} : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ .

□

Иногда полезен критерий, следующий из определения (2.2.1)

**Теорема 2.2.2.** Пусть  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x), \forall x \in \mathbb{E}$ .

Положим  $r_n = \sup |f_n(x) - f(x)|, x \in \mathbb{E}$  — равномерное уклонение.

Тогда  $f_n \xrightarrow{\mathbb{E}} f \iff r_n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ . (Переформулировка определения).

*Доказательство.* Без доказательства.

□

**Пример 2.2.1.**  $f_n(x) = x^n, \mathbb{E} = [0, 1)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0, \forall x \in \mathbb{E}, r_n = \sup_{x \in [0, 1)} |x^n - 0| = 1 \not\rightarrow 0, n \rightarrow \infty.$$

$\{x^n\}$  не является равномерно сходящейся на  $\mathbb{E}$ .

**Пример 2.2.2.**  $f_n(x) = x^n - x^{n+1}, \mathbb{E} = [0, 1]$ .

$$f_n(x) \rightarrow 0, \forall x \in \mathbb{E}, f'_n(x) = nx^{n-1} - (n+1)x^n = 0.$$

$$x_n = \frac{n}{n+1}, f_n(x_n) = x_n^n(1 - x_n) < \frac{1}{n+1}.$$

$$r_n < \frac{1}{n+1}.$$

**Определение 2.2.2.**

$$\sum_{n=1}^{\infty} U_n(x), x \in \mathbb{E} \quad (2.2.2)$$

называется равномерно сходящейся, если на множестве  $\mathbb{E}$  равномерно сходится последовательность частичных сумм.



Пусть  $S_k(x)$  — частичные  $k$ -ые суммы ряда (2.2.2),

$$m \geq n : U_n(x) + \dots + U_m(x) = S_m(x) - S_n(x)$$

тогда из теоремы (2.2.1) (критерий Коши равномерной сходимости последовательности)  $\Rightarrow$  Теорема (2.2.3) (критерий Коши равномерной сходимости ряда).

**Теорема 2.2.3** (Критерий Коши равномерной сходимости ряда). *Для того, чтобы ряд (2.2.2) равномерно сходилась на множестве  $\mathbb{E} \iff \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}, \forall n, m > N, \forall x \in \mathbb{E} :$*

$$|U_n(x) + \dots + U_m(x)| < \varepsilon \quad (2.2.3)$$

*Доказательство.* Без доказательства.  $\square$

**Следствие** (Необходимый признак равномерной сходимости). *У равномерно сходящегося ряда общий член равномерно стремится к нулю.*

**Теорема 2.2.4** (Признак Вейерштрасса). *Пусть  $\{U_n\}$  — последовательность функций, определенных на  $\mathbb{E}$  и пусть  $|U_n(x)| \leq a_n, \forall x \in \mathbb{E}, \forall n \in \mathbb{N}$ . Тогда если  $\sum a_n < \infty$  сходится, то следовательно  $\sum U_n(x)$  сходится равномерно на  $\mathbb{E}$ .*

*Доказательство.* Если  $\sum a_n$  сходится, то  $\forall \varepsilon > 0 \left| \sum_{k=n}^m U_k(x) \right| \leq \sum_{k=n}^m a_k < \varepsilon$ , при любом  $x \in \mathbb{E}$ , если только  $m$  и  $n$  достаточно велики, теорема (1.1.1) (критерий Коши сходимости числового ряда). Равномерная сходимость нашего ряда вытекает из теоремы (2.2.3).  $\square$

*Замечание 2.2.1.*  $\sum a_n$  называется мажорирующим рядом  $\sum U_n(x)$ .

*Замечание 2.2.2.* Условия признака Вейерштрасса не являются необходимыми для равномерной сходимости ряда.

## § 2.3. Признаки равномерной сходимости рядов Дирихле и Абеля

**Теорема 2.3.1.** *Пусть дан ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x), \quad x \in \mathbb{E} \quad (2.3.1)$$

*такой что:*

1.  $a_n(x) \in \mathbb{R}, b_n(x) \in \mathbb{C}, n = 1, 2, \dots$
2.  $a_n(x) \xrightarrow{\mathbb{E}} 0$  (Равномерная сходимость к нулю),  $\{a_n(x)\}$  — монотонна.
3. Последовательность частичных сумм  $\{B_n(x)\}$  ряда  $\sum b_n(x)$  ограничена на множестве  $\mathbb{E}$ .

*Тогда ряд (2.3.1) равномерно сходится на множестве  $\mathbb{E}$ .*

*Доказательство.* В силу условия 3,  $\exists B > 0 : |B_n(x)| \leq B, \forall x \in \mathbb{E}, \forall n \in \mathbb{N}$ .

$\forall x \in \mathbb{E}, m \geq n \geq 2 : |b_n(x) + \dots + b_m(x)| = |B_m(x) - B_{n-1}(x)| \leq 2B$ .

$\forall \varepsilon > 0$  из условия 2  $\Rightarrow \exists N = N(\varepsilon) : n > N(\varepsilon), \forall x \in \mathbb{E}$  выполняется неравенство:

$$0 \leq |a_n(x)| < \frac{\varepsilon}{6B}.$$

Применив лемму Абеля (1.6), получим:

$$|a_n(x)b_n(x) + \dots + a_m(x)b_m(x)| \leq 2B(|a_n(x) + 2a_m(x)|) < \varepsilon$$

$$\forall x \in \mathbb{E}, m \geq n \geq N(\varepsilon)$$

В силу критерия Коши (2.2.3), ряд (2.3.1) сходится равномерно.  $\square$

**Теорема 2.3.2** (Признак Абеля).

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x) \quad (2.3.2)$$

1. Если  $a_n(x) \in \mathbb{R}, b_n(x) \in \mathbb{C}, n = 1, 2, \dots, x \in \mathbb{E}$ .
2.  $\{a_n(x)\}$  ограничена на множестве  $\mathbb{E}$  и монотонна  $\forall x \in \mathbb{E}$ .
3. Ряд  $\sum b_n(x)$  равномерно сходится на  $\mathbb{E}$ .

Тогда ряд (2.3.2) равномерно сходится.

*Доказательство.* Доказательство легко провести так, как была доказана теорема (1.7.1).  $\square$

*Пример 2.3.1.*  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n^x}$  — ряд Дирихле.

Если этот ряд сходится в точке  $x_0$ , то он сходится равномерно  $\forall x \in \mathbb{E}, \mathbb{E} = [x_0, +\infty)$ .

Можно воспользоваться Признаком Абеля:

$$a_n(x) = \frac{1}{n^{x-x_0}}, \quad b_n = \frac{c_n}{n^{x_0}}$$

*Упражнение 1.* Рассмотреть и доказать абсолютную сходимость при  $x > x_0 + 1$

## § 2.4. Равномерная сходимость и непрерывность

**Теорема 2.4.1.** Пусть  $f_n \xrightarrow{\mathbb{E}} f$ ,  $x_0$  — предельная точка множества  $\mathbb{E}$  и пусть  $\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) = A_n$ , ( $n = 1, 2, \dots$ ). Тогда  $\{A_n\}$  сходится и

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n \quad (2.4.1)$$

Иными словами, 2 предельных перехода в данном случае коммутируют.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x)$$

*Доказательство.* Пусть  $\varepsilon > 0$ . В силу равномерной сходимости последовательности  $\{f_n\} \exists N : n > N, m > N, x \in \mathbb{E}$ ,

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \quad (2.4.2)$$

Переходя в неравенстве (2.4.2) к пределу при  $x \rightarrow x_0$  получим

$$|A_n - A_m| < \varepsilon, \quad (n, m > N) \quad (2.4.3)$$

Поэтому  $\{A_n\}$  — последовательность для которой выполняется признак Коши сходимости последовательности  $\Rightarrow$  она сходится.

Обозначим ее предел  $A$

$$|f(x) - A| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - A_n| + |A_n - A| \quad (2.4.4)$$

Выберем  $n$  :

$$|f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall x \in \mathbb{E} \quad (2.4.5)$$

Это возможно в силу равномерной сходимости.

$$|A_n - A| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (2.4.6)$$

Затем, для этого  $n$  подберем такую окрестность  $U(x_0) : x \in U(x_0), x \neq x_0$ , следовательно:

$$|f_n(x) - A_n| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (2.4.7)$$

Из неравенств (2.4.4) — (2.4.7) получим

$$|f(x) - A| < \varepsilon, \quad \forall x \in U(x_0), \quad x \neq x_0$$

Это равносильно равенству (2.4.1) □

**Теорема 2.4.2.** Последовательность функций, непрерывных в точке  $x \in \mathbb{E}$ ,  $f_n \xrightarrow{\mathbb{E}} f$ , то функция  $f$  непрерывна в точке  $x_0$ .

*Доказательство.* Без доказательства. □

*Замечание 2.4.1.* Обратное не верно, то есть последовательность непрерывных функций может неравномерно сходиться.

Из теоремы (2.4.2) и определения (2.2.2)  $\Rightarrow$  теорема (2.4.3)

**Теорема 2.4.3.** Если функции  $U_n(x)$ ,  $(n = 1, 2, \dots)$ ,  $x \in \mathbb{E}$  непрерывны в точке  $x_0 \in \mathbb{E}$  и ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} U_n(x)$  равномерно сходится на  $\mathbb{E}$ , то его сумма  $f(x)$  также непрерывна в точке  $x_0$ .

## § 2.5. Равномерная сходимость и интегрирование

**Теорема 2.5.1.** Пусть  $f_n$  — последовательность действительных, значимых, интегрируемых на отрезке  $[a, b]$  функций. Тогда функция  $f$  также интегрируема на  $[a, b]$  и

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x)dx \quad (2.5.1)$$

*Существование предела заранее не предполагается.*

*Доказательство.*  $\forall \varepsilon > 0, \exists n :$

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad x \in [a, b] \quad (2.5.2)$$

Зафиксируем  $n$  и выберем разбиение  $[a, b]$ ,  $\Delta_1, \dots, \Delta_S$  так, чтобы выполнялось неравенство

$$\sum_i \omega(f_n, \Delta_i) |\Delta_i| < \varepsilon \quad (2.5.3)$$

*Комментарий.*  $\omega(f, E) = \sup - \inf$  — колебание функции.

Функции  $f_n$  интегрируемы на  $[a, b]$ . По скольку  $\omega(f, \Delta_i) \leq \omega(f_n, \Delta_i) + 2\varepsilon$ ,  $(i = 1, \dots, S)$  (смотри (2.5.2)).

$$\sum_i \omega(f, \Delta_i) |\Delta_i| \leq \varepsilon + 2\varepsilon(b - a)$$

Отсюда следует, что  $f \in \mathbb{R}[a, b]$ . Для доказательства (2.5.1) выберем  $n > N :$

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad (a \leq x \leq b), \quad n > N$$

$$\left| \int_a^b f(x)dx - \int_a^b f_n(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x) - f_n(x)|dx < \varepsilon(b - a)$$

Отсюда вытекает (2.5.1). □

**Теорема 2.5.2.**  $U_n \in R[a, b]$  (Интегрируема). Если

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n(x), \quad (a \leq x \leq b) \quad (2.5.4)$$

При чем ряд (2.5.4) сходится на  $[a, b]$ , тогда

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b U_n(x)dx$$

Иными словами ряд (2.5.4) можно интегрировать частями.

*Доказательство.* Без доказательства. □

**Замечание 2.5.1.** При нарушении равномерности ряд, состоящий из интегрируемых функций может иметь интегрируемую сумму.

## § 2.6. Равномерная сходимость и дифференцирование

$f_n(x) = \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}, x \in \mathbb{R}$  показывает, что из равномерной сходимости последовательности функций не следует даже поточечная сходимость последовательностей функций производных.

То есть нужны более сильные предположения, чтобы заключать, что  $f'_n \rightarrow f'$ , при  $f_n \rightarrow f$ .

**Теорема 2.6.1.** Пусть  $f_n(x) \rightarrow f(x)$ ,  $x \in [a, b]$ ,  $n \rightarrow \infty$ ,  $f_n \in C[a, b]$ ,  $(n = 1, 2, \dots)$ .

Если  $\{f'_n(x)\}$  сходится равномерно на  $[a, b]$ , то  $f_n(x)$  дифференцируема и

$$f'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x)$$

*Доказательство.* Обозначим через  $f^*$  предел последовательности  $f'_n$ . Ввиду теоремы (2.4.2)  $f^*$  непрерывна на  $[a, b]$ .

Применим теорему (2.5.1) к последовательности  $\{f_n\}$  на промежутке  $[a, x]$ , где  $x \in [a, b]$

$$\int_a^x f^*(t)dt = \lim \int_a^x f'_n(t)dt = \lim_{n \rightarrow \infty} (f_n(x) - f_n(a)) = f(x) - f(a)$$

Так как интеграл слева ввиду непрерывности функции  $f^*$  имеет производную равную  $f'$ , то ту же производную имеет и  $f(x)$ .

$$f'(x) = f^*(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x), x \in [a, b]$$

□

Перефразируем теорему (2.6.1) с точки зрения рядов:

Пусть сходящийся ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} U_n(x) =: f(x)$ ,  $x \in [a, b]$  и пусть  $U_n(x) \in C^1[a, b]$ ,  $(n = 1, 2, \dots)$ .

Если ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} U'_n(x)$  сходится равномерно на  $[a, b]$ , то сумма  $f(x)$  дифференцируема, и

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} U'_n(x), x \in [a, b].$$

# Глава 3

## Степенные ряды

### § 3.1. Радиус сходимости и круг сходимости

**Определение 3.1.1.** Степенной ряд — ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n, \quad z, z_0 \in \mathbb{C}, n = 0, 1, \dots \quad (3.1.1)$$

$a_n$  — коэффициенты ряда.

$\xi = z - z_0$ , тогда  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \xi^n$ ,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad (3.1.2)$$

**Теорема 3.1.1.** Степенной ряд (3.1.2),  $\alpha = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ ,

$$R = \frac{1}{\alpha} \quad (3.1.3)$$

( $\alpha = 0 \iff R = \infty$ ,  $\alpha = +\infty \iff R = 0$ ), тогда ряд (3.1.2) абсолютно сходится, если  $|z| < R$ , и расходится, если  $|z| > R$ .

*Доказательство.* Положим  $C_n = a_n z^n$ . По критерию Коши заключаем, что сумма  $\sum C_n$  сходится при  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|C_n|} = |z| \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{|z|}{R} < 1$ , то есть  $|z| < R$ ; и расходится, если  $|z| > R$ .  $\square$

**Определение 3.1.2.** Число  $R$  называется радиусом сходимости ряда (3.1.2).

$|z| < R$ ,  $z \in \mathbb{C}$  называется кругом сходимости ряда (3.1.2).

**Следствие** (1-ая т. Абеля). Если степенной ряд сходится при  $z \neq 0$ , то он абсолютно сходится при любом  $|z| < |z^*|$ .

*Замечание 3.1.1.* О сходимости на границе окружности  $|z| = R$  ничего не говорится в теореме (3.1.1), так как возможны все варианты.

**Теорема 3.1.2.** Если  $R$  — радиус сходимости ( $R > 0$ ) ряда (3.1.2), то на любом круге  $|z| < r$ , где  $r$  — фиксированно, и  $r < R$ .

Этот ряд сходится абсолютно и равномерно.

*Доказательство.* При  $z = r$  по теореме (3.1.1) ряд (3.1.2) сходится абсолютно, то есть  $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n$  сходится, а так как для любой точки  $z$  круга  $|z| \leq r$  выполняется неравенство:

$$|a_n z^n| \leq |a_n| r^n, \quad \forall n$$

то по признаку Вейерштрассе на этом круге ряд (3.1.2) сходится равномерно.  $\square$

**Следствие.** Степенной ряд непрерывный в каждой точке своего круга  $|z| < R$  сходится.

**Теорема 3.1.3** (2-ая т. Абеля). Если  $R$  — радиус сходимости,  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  и этот ряд сходится при  $|z| = R$ , то он сходится на отрезке  $[0, R]$  равномерно.

*Доказательство.* Пусть  $0 \leq x \leq R$ , представим ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n \left(\frac{x}{R}\right)^n$ . По скольку члены ряда  $\sum a_n R^n$  не зависят от  $x$ , то его сходимость означает его равномерную сходимость.  $\{(\frac{x}{R})^n\}$  ограничена на отрезке  $[0, R]$  и монотонна в каждой точке. Поэтому в силу признака Абеля равномерной сходимости рядов (2.3.2) ряд (3.1.2) равномерно сходится на отрезке  $[0, R]$ .  $\square$

**Лемма 3.1.1.** Радиусы сходимости  $R, R_1, R_2$  соответственно рядов  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}, \sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^{n-1}$  равны:  $R = R_1 = R_2$ .

*Доказательство.* Действительно, так как  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ , то

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left|\frac{a_n}{n+1}\right|} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|n a_n|}.$$

 $\square$ 

*Пример 3.1.1.*  $\sum a_n (z - z_0)^n$ . Областью сходимости такого ряда является круг  $|z - z_0| < R$ , с точностью до граничных точек.

## § 3.2. Степенные ряды в действительной области. Общие свойства.

В параграфах 3.2 - 3.4 будем рассматривать

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n, \quad (3.2.1)$$

где  $a_n, x, x_0$  — действительные числа.

Если  $R$  — радиус сходимости ряда (3.2.1), то очевидно ряд (3.2.1) сходится, если  $|x| < R$  и расходится, если  $|x| > R$ .

Число  $R$  — по-прежнему называется радиусом сходимости ряда (3.2.1), а интервал  $(x_0 - R, x_0 + R)$  — его интервал сходимости.

**Теорема 3.2.1.** Если  $R$  — радиус сходимости ряда

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n, \quad (3.2.2)$$

где  $R > 0$ , то:

1. функция  $f$  имеет в интервале  $(x_0 - R, x_0 + R)$  производные всех порядков, они называются почленным дифференциалом ряда (3.2.2):

$$f^{(m)}(x) = \sum_{n=m}^{\infty} n(n-1)\dots(n-m+1)a_n(x-x_0)^{n-m}, \quad m = 1, 2, \dots \quad (3.2.3)$$

2.  $\forall x \in (x_0 - R, x_0 + R)$

$$\int_{x_0}^x f(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(x - x_0)^{n+1}}{n+1} \quad (3.2.4)$$

3. (3.2.2) - (3.2.4) имеют одинаковые радиусы сходимости  $R$ .

*Доказательство.* В силу леммы (3.1.1) ряды (3.2.3), (3.2.4) имеют тот же радиус сходимости, что и ряд (3.2.2). Всякий ряд с  $R > 0$  сходится на отрезке  $[x_0 - r, x_0 + r]$ ,  $0 < r < R$  (теорема (3.1.2)).

Поэтому утверждения 1 и 2 непосредственно следуют из общих теорем о сходимости рядов ((1.6) и (1.7.2)).  $\square$

**Теорема 3.2.2.** Если функция  $f$  раскладывается в некоторой окрестности точки  $x_0$  в степенной ряд:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

то

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (3.2.5)$$

и следовательно справедливо:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n. \quad (3.2.6)$$

**Следствие.** Если в некоторой окрестности точки функция раскладывается в степенной ряд, то это разложение единственно.

*Доказательство.* Продифференцировав  $m$  раз равенство (3.2.2), получим (в силу (3.2.3)):

$$f^{(m)}(x) = m(m-1)\dots 2 \cdot 1 \cdot a_m + (m+1)m\dots a_{m-1}(x-x_0) + (m+2)(m+1)\dots 3 \cdot a_{m-2}(x-x_0)^2 \dots$$

Положим  $x = x_0$ , тогда получаем:

$$f^{(m)}(x_0) = m! a_m, \quad m = 0, 1, \dots$$

$\square$

### § 3.3. Ряд Тейлора. Разложение функции в степенные ряды.

**Определение 3.3.1.** Пусть  $f$  определена в некоторой окрестности точки  $x_0$  и имеет в этой точке производные всех порядков, тогда ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \quad (3.3.1)$$

Называется рядом Тейлора функции  $f$  в точке  $x_0$ .

Следующий пример показывает, что функция, бесконечно дифференцируемая в одной точке может быть не равна разложению по Тейлору в окрестности этой точки.

*Пример 3.3.1.*

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

$$f^{(n)}(0) = 0, \quad n = 0, 1, \dots$$

Отсюда следует, что все члены ряда Тейлора (3.2.2) в точке  $x_0 = 0$ , и не совпадают с функцией  $f(x)$  в никакой окрестности точки  $x_0$ .

**Утверждение 3.3.1.** Пусть функция  $f(x)$  определена в некоторой окрестности  $(x_0 - h, x_0 + h)$ .

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \quad (3.3.2)$$

$$r_n(x) = f(x) - S_n(x) \quad (3.3.3)$$

Тогда, для того, чтобы функция  $f(x)$  на интервале  $(x_0 - h, x_0 + h)$  равна сумме своего ряда (3.1.1), то есть:

$$(S_n(x) \rightarrow f(x), n \rightarrow \infty) \iff \lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = 0, \forall x \in (x_0 - h, x_0 + h) \quad (3.3.4)$$

**Теорема 3.3.1.** Пусть функция  $f$  и все ее производные ограничены в совокупности на интервале  $(x_0 - h, x_0 + h)$ , то есть существует такая  $M = \text{const}, M > 0$ :

$\forall x \in (x_0 - h, x_0 + h), n = 0, 1, \dots$ , выполняется неравенство:

$$|f^{(n)}(x)| \leq M \quad (3.3.5)$$

Тогда на интервале  $(x_0 - h, x_0 + h)$  функция  $f$  раскладывается в ряд Тейлора:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n, \quad (3.3.6)$$

где  $|x - x_0| < h$ .

*Доказательство.*

$$\forall a : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0 \quad (3.3.7)$$

По формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа, для  $x \in (x_0 - h, x_0 + h)$ , для  $\forall M$  имеем:

$$f(x) = S_n(x) + r_n(x),$$

где  $r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$ , где  $\xi = x_0 + \theta(x - x_0)$ , где  $0 < \theta < 1$ .

Используя (3.3.5) получим:

$$|r_n(x)| = \frac{|f^{(n+1)}(\xi)(x - x_0)^{n+1}|}{(n+1)!} \leq \frac{M|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!}, \forall x \in (x_0 - h, x_0 + h).$$

Отсюда из (3.3.7) следует (3.3.4). Согласно утверждению (3.3.1) теорема доказана.  $\square$

### § 3.4. Разложение основных элементарных в ряд Тейлора.

- Разложение в ряд функции  $e^x, \cos x, \sin x$ .

Используя теорему (3.3.1), получаем:

$$f^{(n)}(x) = e^x, \sin(x + \frac{\pi}{2}n), \cos(x + \frac{\pi}{2}n), n = 0, 1, \dots,$$

Так что  $|f^{(n)}(x)| \leq e^h, f(x) = e^x, |x| \leq h$   
 $|f^{(n)}(x)| \leq 1, f(x) = \sin x, \cos x, \forall x \in \mathbb{R}$



Так как коэффициенты Тейлора для этих функций известны, то мы можем записать разложение при любом  $x$ :

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (3.4.1)$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (3.4.2)$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad (3.4.3)$$

- Разложение в ряд функции  $\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x$ .  
Заменив в (3.4.1)  $x$  на  $-x$  получим

$$e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!} \quad (3.4.4)$$

Отсюда из (3.4.1) получаем:

$$\operatorname{sh} x = \frac{1}{2} (e^x - e^{-x}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (3.4.5)$$

$$\operatorname{ch} x = \frac{1}{2} (e^x + e^{-x}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad (3.4.6)$$

В правых частях этих формул разложения степенных функций в ряды единственно в силу теоремы (3.2).

- Разложение в ряд функции  $\ln(1+x)$ .  
Рассмотрим:

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \dots + (-1)^n t^n + \dots, \quad |t| < 1 \quad (3.4.7)$$

Интегрирую его почленно по теореме (3.2.1) от 0 до  $x \in (-1, 1)$  получим:

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{dt}{1+t} &= \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots, \\ \ln(1+x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}, \quad \forall x \in (-1, 1) \end{aligned}$$

Ряд правой части равенства (3.4) сходится по признаку Лейбница  $\Rightarrow$  согласно теореме Абеля (3.1.3), разложение (3.4) имеет место в промежутке  $(-1, 1]$

- Разложение в ряд  $(1+x)^\alpha, \alpha \neq 0, 1, \dots$  Формула Тейлора для этой функции имеет вид:

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-n+1)}{n!} x^n + r_n(x) \quad (3.4.8)$$

Соответствующий степенной ряд называют

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-n+1)}{n!} x^n \quad (3.4.9)$$

биномиальным рядом.

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n+1}{\alpha-n} \right| = 1, \text{ в силу утверждения, } r_n(x) \rightarrow 0.$$

Замечание 3.4.1. Поведение ряда (3.4.9) в точках  $\pm 1$ , характеризуется следующей таблицей:

Таблица 3.1: таблица, характеризующая ряд (3.4.9)

$x = 1$	$\alpha > 0$	абсолютно сходится
	$-1 < \alpha < 0$	условно сходится
	$\alpha \leq -1$	расходится
$x = -1$	$\alpha > 0$	абсолютно сходится
	$\alpha < 0$	расходится

Согласно второй теореме Абеля (3.1.3) всякий раз, когда ряд (3.4.9) сходится при  $x = \pm 1$ , его сумма равна  $(1+x)^\alpha$ .

- Разложение в ряд  $\operatorname{arctg} x$

Рассмотрим ряд:

$$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - t^6 + \dots + (-1)^n t^{2n} + \dots, \quad |t| < 1 \quad (3.4.10)$$

Интегрирую его почленно по теореме (3.2.1) от 0 до  $x \in (-1, 1)$  получим:

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)} + \dots$$

Ряд правой части равенства (3.4) сходится по признаку Лейбница  $\Rightarrow$  согласно теореме Абеля (3.1.3), разложение (3.4) имеет место на отрезке  $(-1, 1)$ .

В частности, при  $x = 1$ , получим:

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \frac{\pi}{4}$$

- Разложение в ряд  $\arcsin x$

Рассмотрим ряд:

$$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} t^{2n}, \quad |t| < 1 \quad (3.4.11)$$

Интегрирую его почленно по теореме (3.2.1) от 0 до  $x \in (-1, 1)$  получим:

$$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin x = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad |x| \leq 1$$

Справедливость этого разложения при  $x = \pm 1$  устанавливается с помощью второй теоремы Абеля (3.1.3).

### § 3.5. Формулы Эйлера

Ряды разложения (3.4.1) - (3.4.3) функций  $e^x$ ,  $\sin x$ ,  $\cos x$  сходятся всюду в комплексной плоскости  $\mathbb{C}$ . По этой причине естественны следующие определения ( $e^z$ ,  $\sin z$ ,  $\cos z$ ,  $z \in \mathbb{C}$ ):

$$e^z = \exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad (3.5.1)$$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (3.5.2)$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} \quad (3.5.3)$$

Заменив  $z$  сначала на  $iz$ , а затем на  $-iz$  получим:

$$e^{iz} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n z^n}{n!} \quad (3.5.4)$$

$$e^{-iz} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n i^n z^n}{n!} \quad (3.5.5)$$

Заметим, что  $i^{2k} = (-1)^k$ ,  $i^{2k+1} = (-1)^k i$ ,  $k = 0, 1, \dots$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} \\ \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} \end{aligned}$$

Сравнив эти формулы с (3.5.2), (3.5.3) заключаем, что

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad (3.5.6)$$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \quad (3.5.7)$$

Из этих формул следует формула:

$$\cos z + i \sin z = e^{iz} \quad (3.5.8)$$

Формулы (3.5.6), (3.5.7) и (3.5.8) называются формулами Эйлера.

Если в формуле (3.5.8)  $z = \varphi$ ,  $\varphi \in \mathbb{R}$ , то

$$\cos \varphi + i \sin \varphi = e^{i\varphi}$$

Поэтому  $z \in \mathbb{C}$ ,  $|z| = r$ ,  $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$

$$z = re^{i\varphi}$$

**Определение 3.5.1.**  $W(x) = U(x) + iV(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,  $V(x) \in \mathbb{R}$

Положим  $\frac{dW}{dx} = U'(x) + iV'(x)$ , тогда

$$\int_a^b W(x)dx = \int_a^b U(x)dx + i \int_a^b V(x)dx$$

$$e^{i\pi} = -1$$



# Глава 4

## Ряды Фурье

### § 4.1. Ортогональные системы

В параграфах (4.1) - (4.3)  $\mathbb{X}$  — линейное бесконечномерное пространство (действительное или комплексное, со скалярным произведением).

$$X(\cdot, \cdot), \|x\| = \sqrt{(x, x)}.$$

$\mathbb{K}$  — некоторое счетное или конечное множество.

**Определение 4.1.1.** Система векторов  $\{x_k : k \in \mathbb{K}\}$ ,  $x \in \mathbb{X}$  — ортогональная система (ОС).  $(x_i, x_j) = 0$ ,  $\forall i, j \in \mathbb{K}, i \neq j$  (и система не нулевая). Если  $(x_i, x_i) = 1$ , то система называется ортонормированной.

**Теорема 4.1.1.** Ортогональная система векторов линейно независима, то есть линейно не зависима каждая ее конечная подсистема.

*Доказательство.* Определение линейной независимости:

$$\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_i x_i + \dots = 0 \iff \alpha_i = 0, \forall i$$

Скалярно умножим все члены на  $x_i$ , тогда получим:

$$\begin{aligned} \alpha_1 (x_1, x_i) + \dots + \alpha_i (x_i, x_i) + \dots &= (0, x_i) \\ \alpha_i (x_i, x_i) &= 0 \\ \alpha_i &= 0 \end{aligned}$$

Равенство (4.1) следует из определения (4.1.1), равенство (4.1) следует из того, что  $(x_i, x_i) \neq 0$  (так как система не нулевая).  $\square$

### § 4.2. Коэффициенты Фурье

**Определение 4.2.1.** Пусть  $\{e_k : k \in \mathbb{K}\}$  — ОНС в  $\mathbb{X}$ ,  $\{(x, e_k)\}, x \in \mathbb{X}$  называется коэффициентами Фурье элемента  $x$  в ОНС  $e_k$ .

**Лемма 4.2.1.** Если система векторов  $e_1, \dots, e_n$  пространства  $\mathbb{X}$  — ОН, то  $\forall x \in \mathbb{X}$  вектор  $h = x - x_e$ , где

$$x_e = \sum_{k=1}^n (x, e_k) e_k \tag{4.2.1}$$

ортogonalен подпространству  $\mathbb{L} = \langle e_1, \dots, e_n \rangle$  (натянутому на векторы  $e_1, \dots, e_n$ )

*Доказательство.* Достаточно проверить, что скалярное произведение  $(h, e_j) = 0, \forall j = 1, \dots, n$

$$(h, e_j) = (x, e_j) - \sum_{k=1}^n (x, e_k)(e_k, e_j) = (x, e_j) - (x, e_j) = 0$$

□

**Лемма 4.2.2** (теорема Пифагора). *Если векторы  $x_1, \dots, x_n$  попарно ортогональны и  $x = x_1 + \dots + x_n$ , то  $\|x\|^2 = \|x_1\|^2 + \dots + \|x_n\|^2$*

*Доказательство.*  $(x, x) = (\sum_{i=1}^n x_i, \sum_{i=1}^n x_i) = \sum_{i,j=1}^n (x_i, x_j) = \sum_{i=1}^n (x_i, x_i)$

□

**Теорема 4.2.1** (экстремальное свойство коэффициентов Фурье). *Если  $e_1, \dots, e_n$  — ОНС пространства  $\mathbb{X}$ , то  $\forall x \in \mathbb{X}$  и  $\forall y = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n$  имеет место неравенство:*

$$\|x - \sum_{k=1}^n (x, e_k) e_k\| \leq \|x - \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k\|,$$

в котором равенство возможно при условии:  $\alpha_k = (x, e_k) \forall k = 1, \dots, n$ .

*Доказательство.* Представим  $x - y$  в виде  $x - y = (x_e - y) + h$ , где  $x_e, h$  определены в лемме (4.2.1).

По лемме (4.2.1)  $h \perp (x_e - y) \in \mathbb{L}$ . По теореме Пифагора (лемма 4.2.2):

$$\|x - y\|^2 = \|x_e - y\|^2 + \|h\|^2 = \|x_e - y\|^2 + \|x - x_e\|^2 \geq \|x - x_e\|^2$$

равенство возможно, когда коэффициенты  $\alpha_k$  совпадают с коэффициентами Фурье. □

*Замечание 4.2.1.* Теорема (4.2.1) показывает, что вектор  $x_e$  является наилучшей в смысле нормы пространства  $\mathbb{X}$ , аппроксимацией вектора  $x$  подпространства  $\mathbb{L} = \langle e_1, \dots, e_n \rangle$ , так что наименьшее уклонением вектора  $x$  от  $\mathbb{L}$  равно  $\|x - x_e\|$ .

**Теорема 4.2.2** (неравенство Бесселя). *Если  $\{e_1, \dots, e_n\}$  — ОНС в  $\mathbb{X}$ , то  $\forall x \in \mathbb{X}$  справедливо неравенство:*

$$\sum_{k=1}^n |(x, e_k)|^2 \leq \|x\|^2 \quad (4.2.2)$$

Если  $\{e_k : k \in \mathbb{K}\}$  — ОНС, то  $\forall x \in \mathbb{X}$

$$\sum |(x, e_k)|^2 \leq \|x\|^2 \quad (4.2.3)$$

*Доказательство.* По лемме (4.2.1)

$$x = \sum_{k=1}^n (x, e_k) e_k + h,$$

при чем система векторов  $e_1, \dots, e_n, h$  — ортогональна в  $\mathbb{X}$  по теореме Пифагора получаем:

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^n |(x, e_k)|^2 + \|h\|^2 \quad (4.2.4)$$

отсюда следует (4.2.2), (так как это имеет место для любой конечной системы векторов), отсюда следует (4.2.3). □

*Замечание 4.2.2.* Из (4.2.4) следует формула наименьшего отклонения:

$$\|x - x_e\|^2 \equiv \|x - \sum_{k=1}^n (x, e_k) e_k\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^n |(x, e_k)|^2 \quad (4.2.5)$$

Переформулируем понятие коэффициентов Фурье для произвольной ОС (не обязательно нормированной)  $\{f_k\}$ .

Для этого по этой системе построим ОНС.

$\{e_k = \frac{f_k}{\|f_k\|}\}$ , используем ортогональное разложение:

$$x = x_e + h, \quad x = \sum_{k=1}^n (x, e_k) e_k + h = \sum_{k=1}^n \frac{(x, f_k)}{\|f_k\|^2} f_k + h$$

**Определение 4.2.2.**  $\{e_k = \frac{(x, f_k)}{\|f_k\|^2}\}$  — называется коэффициентами Фурье вектора  $x$  в ОС  $\{f_k\}$ .

Заменим в неравенстве (4.2.3),  $e_k$  на  $\frac{f_k}{\|f_k\|}$  получим неравенство Бесселя для произвольной ОС.

$$\sum_{k \in \mathbb{K}} \frac{|(x, f_k)|^2}{\|f_k\|^2} \leq \|x\|^2, \quad \{f_k, k \in \mathbb{K}\} \quad (4.2.6)$$

Или, в других обозначениях:

$$\sum_{k \in \mathbb{K}} |C_k|^2 \|f_k\|^2 \leq \|x\|^2$$

*Пример 4.2.1.* В пространстве  $\mathbb{X} = \mathcal{R}_2([- \pi, \pi], \mathbb{C})$ .

Рассмотрим ОС  $\{e^{ikt} : k \in \mathbb{Z}\}$ .

В соответствии с определением (4.2.2) коэффициенты Фурье  $C_k$  функции  $f$  в системе  $\{e_{ik}\}$  выражаются формулами:

$$C_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt \quad (4.2.7)$$

из неравенства Бесселя (4.2.6)  $\forall f \in \mathcal{R}_2([- \pi, \pi], \mathbb{C})$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |C_k|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt \quad (4.2.8)$$

*Пример 4.2.2.* Аналогично находим коэффициенты Фурье.

$\{\frac{1}{2}a_0, a_k, b_k : k \in \mathbb{N}\}$  функции  $f \in \mathcal{R}([- \pi, \pi], \mathbb{C})$  в ОС  $\{1, \cos kx, \sin kx : k \in \mathbb{N}\}$ :

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos ktdt, \quad k = 0, 1, \dots \quad (4.2.9)$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin ktdt, \quad k = 1, 2, \dots \quad (4.2.10)$$

по неравенству Бесселя все принимает вид:

$$\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (|a_k|^2 + |b_k|^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt \quad (4.2.11)$$

*Замечание 4.2.3.* Сравнивая равенства (4.2.9), (4.2.10) и (4.2.7) с учетом формулы Эйлера получаем:

$$C_k = \begin{cases} \frac{1}{2}(a_k - ib_k), & k \geq 0 \\ \frac{1}{2}(a_k + ib_{-k}), & k < 0 \end{cases} \quad (4.2.12)$$

### § 4.3. Ряд Фурье

**Определение 4.3.1.** Если  $\{f_1, \dots, f_k, \dots\}$  — ОС в  $\mathbb{X}$ , а  $x \in \mathbb{X}$ , то можно составить ряд:

$$x \sim \sum_{k=1}^{\infty} C_k f_k,$$

где  $C_k = \frac{(x, f_k)}{\|f_k\|^2}$ .

Этот ряд называется рядом Фурье вектора  $x$  по ОС  $\{f_k\}$ .

Ряд Фурье по ОНС  $\{e_k\}$  имеет вид:

$$x \sim \sum_{k=1}^{\infty} (x, e_k) e_k$$

**Определение 4.3.2.** Говорят, что ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} y_k, y_k \in \mathbb{X}$  сходится в  $\mathbb{X}$  к вектору  $x \in \mathbb{X}$  (сходится по норме  $(\|\cdot\|)$  пространства  $\mathbb{X}$ ), если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x - \sum_{k=1}^n y_k\| = 0$$

При этом пишем  $x \stackrel{\mathbb{X}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} y_k$  по норме пространства  $\mathbb{X}$ .

**Теорема 4.3.1.**  $\{e_k : k \in \mathbb{N}\}$  — ОНС в  $\mathbb{X}, x \in \mathbb{X}$ , где

$$x \stackrel{\mathbb{X}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} (x, e_k) e_k \iff \text{когда } \|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |(x, e_k)|^2.$$

Это равенство называется равенством Парсеваля и представляет собой обобщение теоремы Пифагора на случай бесконечномерного пространства.

**Определение 4.3.3.** Система  $\{x_k : k \in \mathbb{K}\}$  векторов в пространстве  $\mathbb{X}$  называется полной в множестве  $\mathbb{E} \subset \mathbb{X}$ , если любой вектор  $x \in \mathbb{E}$  можно сколь угодно точно в смысле нормы пространства  $\mathbb{X}$  приблизить к конечной линейной комбинации векторов системы.

**Теорема 4.3.2.** Пусть  $\{e_1, \dots, e_n, \dots\}$  — ОНС в  $\mathbb{X}$ , тогда следующее условие эквивалентны:

1.  $\{e_k\}$  полна в множестве  $\mathbb{E} \subset \mathbb{X}$ .
2.  $\forall x \in \mathbb{E} \subset \mathbb{X}$  имеет место разложение (в ряд Фурье)  $x \stackrel{\mathbb{X}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} (x, e_k) e_k$
3.  $\forall x \in \mathbb{E} \subset \mathbb{X}$  имеет место равенство Парсеваля:  $\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |(x, e_k)|^2$ .

*Доказательство.* Из  $1 \Rightarrow 2$  в силу экстремального свойства коэффициентов Фурье.

Из  $2 \Rightarrow 3$  по теореме (4.3.1)

Из  $3 \Rightarrow 1$ , по сколько по формуле уклонений

$$\|x - \sum_{k=1}^n (x, e_k) e_k\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^n |(x, e_k)|^2 \rightarrow 0, \text{ при } n \rightarrow \infty$$

□



## § 4.4. Тригонометрический ряд Фурье

$$\mathbb{X} = \mathbb{R}_2([-\pi, \pi], \mathbb{C}), e_k = \{e^{ikx} : k \in \mathbb{Z}\}, f \in \mathbb{R}([-\pi, \pi], \mathbb{C})$$

$$C_k(f) = C_k = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx \quad (4.4.1)$$

Сопоставим функцию

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k e^{ikx} \quad (4.4.2)$$

**Определение 4.4.1.** Если нам дан тригонометрический ряд Фурье в комплексной записи, то его  $n$ -ая частная сумма равна:

$$S_n(x) = S_n(f, x) = \sum_{k=-n}^n C_k e^{ikx} \quad (4.4.3)$$

**Определение 4.4.2.** Ряд Фурье функции  $f \in \mathbb{R}([-\pi, \pi], \mathbb{C})$  по системе  $\{1, \cos kx, \sin kx : k \in \mathbb{N}\}$  называется тригонометрическим рядом Фурье и записывается следующим образом:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad (4.4.4)$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx, \quad k = 0, 1, \dots \quad (4.4.5)$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx, \quad k = 1, 2, \dots \quad (4.4.6)$$

Если функция  $f$  — действительная, то  $a_k, b_k \in \mathbb{R}$  и  $\underline{C}_k = \overline{C_k}$  ( $k = 0, 1, \dots$ ).

**Определение 4.4.3.** Тригонометрические многочлены  $D_n(x) = \sum_{k=-n}^n e^{ikx}$ ,  $K_n(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{m=0}^n D_m(x)$  называются соответственно ядром Дирихле и ядром Фейера.

$$\begin{aligned} a_1, \dots, a_n &\rightarrow a, \text{ при } n \rightarrow \infty \\ \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} &\rightarrow a, \text{ при } n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

а обратное не верно.

$$D_n(x) = \sum_{k=-n}^n e^{ikx} \quad (4.4.7)$$

$$K_n(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{m=0}^n D_m(x) \quad (4.4.8)$$

**Теорема 4.4.1.** При  $n = 0, 1, \dots$  имеем:

$$D_n(x) = \frac{\sin((n + \frac{1}{2})x)}{\sin \frac{x}{2}} \quad (4.4.9)$$

$$K_n(x) = \frac{1}{n+1} \frac{1 - \cos((n+1)x)}{1 - \cos x} \quad (4.4.10)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(x) dx = 1 \quad (4.4.11)$$

кроме того,

$$K_n(x) \geq 0, K_n(x) \leq \frac{2}{(n+1)(1-\cos \delta)}, \text{ где } 0 < \delta \leq |x| \leq \pi \quad (4.4.12)$$

*Доказательство.* Согласно (4.4.7)

$$D_n(x) = \frac{e^{i(n+1)x} - e^{-inx}}{e^{ix} - 1} \quad (4.4.13)$$

чтобы получить (4.4.9) домножим здесь числитель и знаменатель на  $e^{-ix/2}$ . Подставим (4.4.13), в определение ядра  $K_n(x)$ , получим:

$$\begin{aligned} K_n(x) &= \frac{1}{n+1} \cdot \frac{e^{-ix} - 1}{(e^{-ix} - 1)(e^{ix} - 1)} \sum_{m=0}^n (e^{i(m+1)x} - e^{-imx}) = \\ &= \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{2 - (e^{ix} + e^{-ix})} \sum_{m=0}^n [(e^{imx} + e^{-imx}) - (e^{i(m+1)x} + e^{-i(m+1)x})] = \\ &= \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{2 - 2\cos x} (2 - (e^{i(m+1)x} + e^{-i(m+1)x})) \end{aligned}$$

откуда следует (4.4.10).

Значит  $K_n(x) \geq 0$  и выполняется (4.4.12). А (4.4.11) непосредственно следует из (4.4.7).  $\square$

Далее предполагаем, что функция  $f$ , изначально определенная на  $[-\pi, \pi]$ , продолжена на  $\mathbb{R}$  как  $2\pi$ -периодическая функция.

Если  $f \in C[-\pi, \pi]$ , то ее  $2\pi$ -периодическое продолжение непрерывно на  $\mathbb{R}$

$$(f \in C_{2\pi}) \iff f(-\pi) = f(\pi)$$

**Лемма 4.4.1** (интегральное представление частичной суммы ряда Фурье).

$$\forall x \in \mathbb{R} : S_n(f, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) D_n(t) dt \quad (4.4.14)$$

*Доказательство.* Пусть  $S_n$  — частичная сумма, тогда:

$$\begin{aligned} S_n(f, x) &= \sum_{k=-n}^n C_k e^{ikx} = \sum_{k=-n}^n \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) e^{-iku} du \cdot e^{ikx} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \sum_{k=-n}^n e^{ik(x-u)} du = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) D_n(x-u) du = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{x-\pi}^{x+\pi} f(x-t) D_n(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) D_n(t) dt \end{aligned}$$

*Комментарий.* Использовалась замена:  $x-u=t$ .

Отметим, что последнее равенство выполняется, поскольку в следствии периодичности функции безразлично по какому интервалу интегрировать, лишь бы его длина была равна  $2\pi$ .  $\square$

**Определение 4.4.4.** Средние арифметические частичных сумм:

$$S_n(f, x), \delta_n(f, x) = \delta_n(x) = \frac{S_0(x) + \dots + S_n(x)}{n+1} \quad (4.4.15)$$

Называются полиномами Фейера.

**Теорема 4.4.2** (теорема Фейера). Если функция  $f \in C_{2\pi}$ , то

$$\delta_n(x) \xrightarrow{\mathbb{R}} f(x) \quad (4.4.16)$$

*Доказательство.* Согласно формулам (4.4.15), (4.4.14) и (4.4.7) имеем:

$$\delta_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) K_n(t) dt \quad (4.4.17)$$

поэтому из (4.4.11) следует, что:

$$f(x) - \delta_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - f(x-t)) K_n(t) dt \quad (4.4.18)$$

$\varepsilon > 0$ ,  $M = \max |f(x)|$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Поскольку функция  $f$  — равномерно непрерывна, то найдется такое  $\delta > 0$ , что:

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (4.4.19)$$

Согласно (4.4.12) можно затем выбрать такое  $N = N(\varepsilon, \delta)$ , что

$$n > N, \delta \leq |t| \leq \pi \Rightarrow K_n(t) \leq \frac{\varepsilon}{4M} \quad (4.4.20)$$

Из (4.4.19) и  $K_n(t) \geq 0$  получаем:

$$\int_{-\delta}^{\delta} |f(x) - f(x-t)| |K_n(t)| dt < \frac{\varepsilon}{2} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(t) dt = \pi\varepsilon, \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.4.21)$$

$$\left\{ \int_{-\pi}^{\delta} + \int_{\delta}^{\pi} \right\} |f(x) - f(x-t)| |K_n(t)| dt \leq \frac{\varepsilon}{4M} \int_{-\pi}^{\pi} 2M dt = \pi\varepsilon, \quad \forall n > N \quad (4.4.22)$$

В силу (4.4.19), (4.4.21) и (4.4.22) получаем:

$$|f(x) - \delta_n(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall n > N \quad (4.4.23)$$

□

**Следствие.** Если две непрерывные  $2\pi$ -периодические функции  $f, g$  имеют один и тот же ряд Фурье, то  $f(x) = g(x)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$

*Доказательство.* Действительно, если  $\delta_n(x)$  — среднее арифметическое этого ряда, то:

$$\delta_n(x) \rightarrow f(x), \quad \delta_n \rightarrow g(x)$$

□

**Следствие.** Если  $f \in C_{2\pi}$  и  $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx \equiv 0$ , то  $\forall n \in \mathbb{Z} : f(x) \equiv 0$ . Таким образом ОС  $\{e^{ikx} : k \in \mathbb{Z}\}$  нельзя дополнить ненулевым элементом.

*Доказательство.* Это вытекает из предыдущего следствия, если положить  $g = 0$ .  $\square$

**Следствие.** Ряд Фурье функции  $f \in C_{2\pi}$  либо сходится в каждой точке  $x$  к функции  $f(x)$ , либо вовсе расходится в этой точке.

*Доказательство.* НАПИСАТЬ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.  $\square$

*Замечание 4.4.1.* Ряд Фурье для выражения функции в самом деле может в некоторых точках расходиться.

**Теорема 4.4.3** (теорема Вейерштрасса). Если  $f \in C_{2\pi}$ , то  $\forall \varepsilon > 0$  существует такой тригонометрический многочлен  $T(x) : \forall x \in \mathbb{R} :$

$$|f(x) - T(x)| < \varepsilon$$

*Доказательство.* Без доказательства.  $\square$

Из теоремы (4.4.3) следует теорема (4.4.4).

**Теорема 4.4.4** (теорема Вейерштрасса). Если  $f \in C[a, b]$ , то  $\forall \varepsilon > 0$  существует такой алгебраический многочлен  $P(x) : \forall x \in [a, b] :$

$$|f(x) - P(x)| < \varepsilon$$

*Доказательство.* Положив  $t = \frac{x-a}{b-a}\pi$ , и  $x = \frac{b-a}{\pi}t + a$ , получим функцию  $\varphi(t) = f(a + \frac{b-a}{\pi}t)$  на отрезке  $[0, \pi]$ . Продолжим ее в начале четным образом  $\varphi(-t) = \varphi(t)$ ,  $t \in [\pi, 0)$ . Найдем по теореме (4.4.3) такой тригонометрический полином  $T(t) : |\varphi(t) - T(t)| < \frac{\varepsilon}{2}$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}$ . Всякий тригонометрический полином раскладывается по Тейлору, сходится равномерно на любом конечном интервале.

Пусть  $P_n$  — частичная сумма ряда Тейлора для  $T(t)$  такая что:  $|T(t) - P_n(t)| < \frac{\varepsilon}{2}$ ,  $0 \leq t \leq \pi$ . Тогда  $|\varphi_n(t) - P_n(t)| < \varepsilon$ , при  $0 \leq t \leq \pi$ . Сделав обратную замену в  $P_n(t) : t = \frac{x-a}{b-a}\pi$ , получим многочлен  $Q_n(x)$ , удовлетворяющий условию:  $|f(x) - Q_n(x)| < \varepsilon$ ,  $a \leq x \leq b$ .  $\square$

Получаем еще одно следствие от теоремы Фейера — полнота тригонометрической системы функций  $C_2[-\pi, \pi]$  и более общо  $\mathcal{R}_2[-\pi, \pi]$ .

**Теорема 4.4.5** (о полноте тригонометрической системы). Любая функция  $f$  из множества  $f \in \mathcal{R}[-\pi, \pi]$  может быть сколь угодно точно приближена в среднем, то есть по норме:

1. Кусочно-постоянной функции  $[-\pi, \pi]$
2. Непрерывными на отрезке  $[-\pi, \pi]$  функциями, принимающие равные значения на концах  $[-\pi, \pi]$
3. Тригонометрическими полиномами

*Доказательство.* Достаточно рассмотреть случай действительно значимых функций.

1. Поскольку  $f$  — интегрируема, то:  $\forall \varepsilon > 0 \exists$  разбиение  $-\pi = x_0 < x_1 < \dots < x_n = \pi$  отрезка  $[-\pi, \pi]$ , что:  $0 \leq \Delta := \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx - \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i < \varepsilon$ , где

$$m_i = \inf\{f(x)\}, \quad x \in [x_{i-1}, x_i), \quad \Delta x_i = x_i - x_{i-1}$$

Полагая  $g(x) = \begin{cases} m_i, & \text{если } x \in [x_{i-1}, x_i) \\ 0, & \text{если } x = \pi \end{cases}$ ,  $M_f = \sup\{|f(x)|, |x| \leq \pi\}$ .

Получим:  $\int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - g(x))^2 dx \leq \int_{-\pi}^{\pi} (|f(x)| + |g(x)|)(|f(x)| - |g(x)|) dx \leq 2M_f \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - g(x)) dx = 2M_f \Delta \leq 2M_f \varepsilon$ .

2. Достаточно уметь приближать к среднему кусочно постоянной функции. Пусть  $g$  — такая функция, с точками разрыва  $x_1, \dots, x_n$ . Удобно присваивать  $-\pi = x_1, x_n = \pi$ . Очевидно, какого бы ни было  $\varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ , что  $\delta$ -окрестности точек  $x_1, \dots, x_n$  не пересекаются и  $2\delta_n M < \varepsilon$ , где  $M = \sup\{|g(x)| : |x| \leq \pi\}$ . Заменим функцию  $g$  на каждом из отрезков  $[-\pi, -\pi + \delta], [x_1 - \delta, x_1 + \delta], (i = 2, \dots, n-1), [\pi - \delta, \pi]$  линейной функцией, принимающей на концах этих отрезков соответственно:  $0, g(-\pi + \delta), g(x_i - \delta), g(x_i + \delta), (i = 2, \dots, n-1), g(\pi - \delta), 0$ . Получим кусочно линейную, непрерывную на кусочном отрезке  $[-\pi, \pi]$  функцию  $h, h(-\pi) = h(\pi) = 0, |h(x)| \leq M, \forall x \in [-\pi, \pi]$ .  
Значит

$$\int_{-\pi}^{\pi} (g - h)^2 dx \leq 2M \int_{-\pi}^{\pi} (|g - h|) dx = \quad (4.4.24)$$

$$2M \sum_{i=1}^n \int_{x_i - \delta}^{x_i + \delta} (|g - h|) dx \leq 2M(2M - 2\delta)n < 4M\varepsilon \quad (4.4.25)$$

3. Осталось показать, что можно приблизить любую функцию класса 2. Но по теореме Фейера для любой функции типа  $h$ , найдется такой тригонометрический многочлен, что:

$$\forall \varepsilon > 0, \quad T : |h(x) - T(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in [-\pi, \pi]$$

$$\left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (h(x) - T(x))^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon$$

Ссылаясь на неравенство треугольника, пространства  $\mathcal{R}_\infty[-\pi, \pi]$  заключаем, что теорема доказана. □

Из полноты тригонометрической системы, из теоремы (4.3.2) (третьего условия полноты ОС) и формулы наименьших уклонений следует теорема (4.4.6).

**Теорема 4.4.6.**  $f \in \mathcal{R}_2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ , имеем:

1.  $f(x) \stackrel{\mathcal{R}_2}{=} \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(f) \cos kx + b_k(f) \sin kx$ , или в комплексной записи:  
 $f(x) \stackrel{\mathcal{R}_2}{=} \sum_{-\infty}^{+\infty} C_k(f) e^{ikx}$ , где сходимость понимается, как сходимость по норме.

$$2. \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \left| \frac{a_0(f)}{2} \right|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} |a_k(f)|^2 + |b_k(f)|^2, \text{ или в комплексной записи:}$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \sum_{-\infty}^{+\infty} |C_k(f)|^2.$$

$$3. \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - S_n(f, x)|^2 dx = \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k(f)|^2 + |b_k(f)|^2 = 4 \sum_{k=n+1}^{\infty} |C_k(f)|^2, f \in \mathcal{R}([-\pi, \pi], \mathbb{R}).$$

## § 4.5. Обобщение на неограниченные функции

**Определение 4.5.1.** Пусть  $0 < p < \infty$ ,  $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ . Будем писать  $f \in \mathcal{R}^p[a, b]$ , если существует конечное число точек  $x_j, j = 0, 1, 2, \dots, n$ , таких что:

1.  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$
2. Функция  $f$  интегрируема по Римману на любом отрезке  $f \in \mathcal{R}[\alpha, \beta]$ ,  $[\alpha, \beta] \subset (x_{j-1}, x_j)$
3. Интеграл  $\int_{x_{j-1}}^{x_j} |f(x)|^p dx$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$  сходится.

*Замечание 4.5.1.* Формулы (4.4.1), (4.4.5) и (4.4.6), определяющие коэффициенты Фурье  $C_k(f), a_k(f), b_k(f)$  имеют смысл для  $\forall f \in \mathcal{R}^1[-\pi, \pi]$ , так как тогда  $f(x)e^{-ikx}, f(x) \cos kx, f(x) \sin kx \in \mathcal{R}^1[-\pi, \pi]$ .

**Определение 4.5.2** (неравенство Гельдера).

$$\int_a^b |f(x)g(x)| dx \leq \left( \int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_a^b |g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}$$

где  $q > 1$ ,  $p > 1$ ,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

$$\int_a^b |f(x)| dx \leq (b-a)^{1-\frac{1}{p}} \left( \int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\left( \frac{1}{b-a} \int_a^b |f(x)|^r dx \right)^{\frac{1}{r}} \leq \left( \frac{1}{b-a} \int_a^b |f(x)|^h dx \right)^{\frac{1}{h}}$$

если  $h > 1$ ,  $0 < r < h < \infty$ .

*Утверждение 4.5.1.* теоремы (4.4.5) и (4.4.6) остаются в силе, если в них пространство  $\mathcal{R}_2[-\pi, \pi]$  расширить до линейного пространства  $\mathcal{R}^2[-\pi, \pi]$ :

$$(f, g) = \int f(x) \overline{g(x)} dx$$

*Доказательство.* Смотри теорему (4.4.5). □

**Лемма 4.5.1.** Если  $f \in \mathcal{R}^p[a, b] (p > 0)$ , то  $\forall \varepsilon > 0 \exists g \in \mathcal{R}[a, b] : \int_a^b |f(x) - g(x)|^p dx < \varepsilon$ .

*Доказательство.* Доказать самостоятельно. □

## § 4.6. Достаточные условия сходимости тригонометрического ряда Фурье в точке

**Лемма 4.6.1** (Римана). Если  $f \in \mathcal{R}^1[a, b]$ , то

$$\int_a^b f(x) e^{i\lambda x} dx \rightarrow 0 \quad (4.6.1)$$

$$\int_a^b f(x) \cos \lambda x dx \rightarrow 0 \quad (4.6.2)$$

$$\int_a^b f(x) \sin \lambda x dx \rightarrow 0, \text{ при } \lambda \rightarrow \infty, \lambda \in \mathbb{R} \quad (4.6.3)$$

*Доказательство.* Будем считать, что функция  $f(x)$  — действительная, так как в случае  $f(x)$  — комплексная легко сводится к этому, согласно лемме (4.5.1) при  $p = 1$ ,  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists g$  (кусочно-постоянная):

$$\int_a^b |f(x) - g(x)| dx < \frac{\varepsilon}{2} \quad (4.6.4)$$

Пусть  $g(x) = m, x \in [x_{j-1}, x_j], j = 1, \dots, n$ . ( $x_0 = a, x_n = b$ ), тогда:

$$\int_a^b g(x) e^{i\lambda x} dx = \sum_{j=1}^n \int_{x_{j-1}}^{x_j} m_j e^{i\lambda x} dx = \frac{1}{i\lambda} \sum_{j=1}^n (m_j e^{i\lambda x}) \Big|_{x_{j-1}}^{x_j} \rightarrow 0, \text{ при } \lambda \rightarrow \infty$$

Отсюда из (4.6.4) получим:

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x) e^{i\lambda x} dx \right| &= \left| \int_a^b (f(x) - g(x)) e^{i\lambda x} dx + \int_a^b g(x) e^{i\lambda x} dx \right| \leq \\ &\int_a^b |f(x) - g(x)| e^{i\lambda x} dx + \left| \int_a^b g(x) e^{i\lambda x} dx \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

Итак, (4.6.1) доказано.

Отделяя действительные и мнимые части, получаем (4.6.2), (4.6.3) □

**Определение 4.6.1.** Говорят, что функция  $f$ , заданная в проколотой окрестности точки  $x$ , удовлетворяет условиям Дини, если при  $x \in \mathbb{R}$  выполняется:

1. В точке  $x$  существуют оба предела:

$$f(x-0) = \lim_{t \rightarrow +0} f(x-t)$$

$$f(x+0) = \lim_{t \rightarrow +0} f(x+t)$$

2.  $\int_0^\delta \frac{f(x-t)-f(x-0)}{t} dt, \int_0^\delta \frac{f(x+t)-f(x+0)}{t} dt$  сходятся абсолютно на  $[0, \delta]$ ,  $\forall \delta > 0$

**Теорема 4.6.1.**  $f$  —  $2\pi$ -периодическая функция  $f \in \mathcal{R}^1[-\pi, \pi]$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

$$\sum_{-\infty}^{\infty} C_k(f) e^{ikx} = \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2} \quad (4.6.5)$$

*Доказательство.*  $S_n(f, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) D_n(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 f(x-t) D_n(t) dt + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} f(x-t) D_n(t) dt =$   
 $\frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} f(x+t) D_n(t) dt + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} f(x-t) D_n(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} (f(x-t) + f(x+t)) D_n(t) dt =$   
 $\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2} D_n(t) dt + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left( \frac{f(x-t) - f(x-0)}{2} + \frac{f(x+t) - f(x+0)}{2} \right) D_n(t) dt =$   
 $\frac{f(x-0) + f(x+0)}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left( \frac{f(x-t) - f(x-0)}{2 \sin \frac{t}{2}} + \frac{f(x+t) - f(x+0)}{2 \sin \frac{t}{2}} \right) \sin((n + \frac{1}{2})t) dt$   
 Поскольку,  $2 \sin \frac{t}{2} \sim t$ ,  $t \rightarrow 0$ , то из условий Дини следует, что  $g_x(t) \in \mathcal{R}^1[0, \pi]$  абсолютно интегрируема. На основании леммы Римана:

$$\int_0^{\pi} g_x(t) \sin((n + \frac{1}{2})t) dt \rightarrow 0, \text{ при } n \rightarrow \infty$$

Отсюда из (4.6) следует (4.6.5) □

**Следствие.** Пусть  $f$  — ограниченная функция с периодом  $2\pi$ , имеющая разрыв первого рода и пусть имеет левые и правые производные. Тогда ряд Фурье сходится всюду, а его сумма в точке разрыва непрерывна и равна:  $f(x) = \frac{1}{2}(f(x+0) + f(x-0))$

## § 4.7. Гладкость функции и скорость убывания коэффициентов Фурье

**Определение 4.7.1.** Функцию  $f$  называют кусочно дифференцируемой, если существует ее разбиение  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ , такое что на каждом интервале  $(x_{j-1}, x_j)$   $f$  — дифференцируема, а в точках  $x_{j-1}, x_j$  существуют конечные значения  $f(x_{j-1} + 0), f(x_j - 0), f'_+(x_{j-1}), f'_-(x_j)$ , при  $\forall j = 1, \dots, n$ ,  $f' \in Q[a, b]$

Через  $C_{2\pi}^{(k)} (k = 0, 1, \dots)$  обозначим класс  $2\pi$ -периодических (комплексно-значимых) функций, имеющих на  $\mathbb{R}$   $k$ -ую непрерывную производную.  $f^{(k)}, (f^{(k)} \in C_{2\pi} = C_{2\pi}^{(0)})$ .

**Лемма 4.7.1** (о дифференцировании ряда Фурье). Если  $f$  — непрерывна,  $f \in C_{2\pi}$  и  $f$  кусочно дифференцируема на  $[-\pi, \pi]$ , то  $f' \sim \sum_{-\infty}^{+\infty} C_k(f') e^{ikx}$  может быть получен формальным дифференцированием ряда Фурье  $f \sim \sum_{-\infty}^{+\infty} C_k(f) e^{ikx}$  самой функции, то есть:

$$C_k(f') = ik C_k(f), \quad k \in \mathbb{Z} \quad (4.7.1)$$

*Доказательство.* Интегрированием по частям находим:

$$C_k(f') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) e^{-ikx} dx = \frac{1}{2\pi} f(x) e^{-ikx} \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{ik}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx = ik C_k(f)$$

□



**Теорема 4.7.1.** Пусть  $f \in C_{2\pi}^{(m-1)}$ ,  $(m \in \mathbb{N})$ ,  $f^{(m-1)}$  — кусочно-дифференцируема на  $[-\pi, \pi]$ . Тогда:

$$C_k(f^{(m)}) = (ik)^m C_k(f), \quad k \in \mathbb{Z} \quad (4.7.2)$$

$$|C_{\pm k}(f)| = \frac{\gamma_k}{k^m} = \bar{o}\left(\frac{1}{k^m}\right), \quad k \rightarrow \infty, k \in \mathbb{N} \quad (4.7.3)$$

Причем  $\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k^2 < \infty$ ,  $\gamma_k \downarrow 0$ ,  $\gamma_k = \bar{o}\left(\frac{1}{k}\right)$ .

*Доказательство.* Соотношение (4.7.2) получается в результате  $m$ -кратного использования (4.7.1).

$$C_k(f^{(m)}) = ikC_k(f^{(m-1)}) = \dots = (ik)^m C_k(f), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Полагая  $\gamma_k = |C_k(f^{(m)})|$ , с учетом неравенства Бесселя:

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} \gamma_k^2 \leq \frac{1}{2\pi}$$

Из (4.7.2) получаем (4.7.3). □

**Теорема 4.7.2.**  $f \in C_{2\pi}^{(m-1)}$ ,  $m \in \mathbb{N}$ ,  $f^{(m-1)}$  — кусочно-дифференцируема на  $[-\pi, \pi]$ , тогда ряд Фурье сходится абсолютно и равномерно на  $\mathbb{R}$ , причем

$$\max_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - S_n(f, x)| = \bar{o}\left(\frac{1}{n^{m-1/2}}\right), \quad n \rightarrow \infty \quad (4.7.4)$$

*Доказательство.* Поскольку  $f \in C_{2\pi}$  и удовлетворяет условиям Дини в любой точке, то

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(f, x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Поэтому, с учетом (4.7.3) имеем:

$$|f(x) - S_n(f, x)| = \left| \sum_{|k| \geq n+1} C_k(f) e^{ikx} \right| \leq \left| \sum_{|k| \geq n+1} |C_k(f) e^{ikx}| \right| = \quad (4.7.5)$$

$$2 \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\gamma_k}{k^m} \leq 2 \left( \sum_{k=n+1}^{\infty} \gamma_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^{2m}} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.7.6)$$

(В силу неравенства Коши-Буняковского).

Так как

$$\left( \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^{2m}} \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left( \int_{n+1}^{\infty} \frac{dx}{x^{2m}} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2m-1}} \cdot \frac{1}{n^{m-1/2}}$$

То из (4.7.6) получаем (4.7.4) □

*Замечание 4.7.1.* Поскольку  $a_k(f) = C_k(f) + C_{-k}(f)$ ,  $b_k(f) = i(C_k(f) - C_{-k}(f))$ , то из (4.7.3) следует, что

$$|a_k(f)| = \frac{\alpha_k}{k^m}, \quad |b_k(f)| = \frac{\beta_k}{k^m}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad \sum \alpha_k^2 < \infty, \quad \sum \beta_k^2 < \infty$$



# Часть II

## Интегралы



# Глава 5

## Кратные интегралы

### § 5.1. Определение интеграла Римана на $n$ -ом промежутке

Пусть  $\mathbb{R}^n$  —  $n$ -мерное арифметическое евклидово пространство (ЕП).  
( $\mathbb{R}^2$  отождествляется  $oxy$ ,  $\mathbb{R}^3$  с  $oxyz$ ).  
( $x_1, \dots, x_n$ )  $\in \mathbb{R}^n$  далее обозначается через  $x$ .

**Определение 5.1.1.** Множество  $I = \{x \in \mathbb{R}^n : a_i \leq x \leq b_i, i = 1, \dots, n\}$  называется промежутком или координатным параллелепипедом. По аналогии с одномерным случаем записывают:

$$a = (a_1, \dots, a_n), \quad b = (b_1, \dots, b_n)$$

**Определение 5.1.2.** Число  $|I| := \prod_{i=1}^n (b_i - a_i)$  называют объемом, либо мерой промежутка. Объем (меру) обозначают символами:  $v(I), \mu(I)$ .

При  $n = 1, \mu(I)$  — длина отрезка

При  $n = 2, \mu(I)$  — площадь прямоугольника

При  $n = 3, \mu(I)$  — объем прямоугольного параллелепипеда

Разобьем каждый из координатных отрезков  $[a_i, b_i]$ ,  $i = 1, \dots, n$  на конечное число более мелких отрезков. Эти разбиения индуцируют разбиение промежутка  $I$  на более мелкие промежутки, получающиеся прямым произведением промежутков  $a_i, b_i$ .

**Определение 5.1.3** (Декартово произведение).  $X \times Y := \{(x, y) : x \in X, y \in Y\}$

**Определение 5.1.4.** Описанное представление промежутка  $I$  в виде объединения промежутков  $i, j$  из более мелких промежутков  $i, j$  назовем разбиением и обозначим  $T (k = k_T)$ .

**Определение 5.1.5.**  $\lambda(T) = \max\{d(I_1), \dots, d(I_k)\}$ .  $d(I_j)$  называется диаметром разбиения  $T$ . Пусть  $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$  — функция, определенная на промежутке  $I$ ,  $T = \{I_1, \dots, I_k\}$  — разбиение промежутка  $I$ .  $\xi = (\xi^1, \dots, \xi^k)$  — некоторый набор точек  $\xi^j$ , таких что  $\xi^j \in I_j$ .

**Определение 5.1.6.** Сумма  $\sigma(f, T, \xi) := \sum_{j=1}^k f(\xi^j) |I_j|$  называется интегральной суммой Римана.

**Определение 5.1.7.** Если существует конечный предел  $\mathcal{J}, \sigma(f, T, \xi), \lambda(T) \rightarrow 0$ , то его называют интегралом Римана от функции  $f$  на промежутке  $I$ :

$$\mathcal{J} = \int_I f(x) dx := \lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} \sigma(f, T, \xi) \quad (5.1.1)$$

Функцию  $f$  называют интегрируемой на промежутке  $I$ . Множество таких функций обозначим  $\mathcal{R}(I)$ . Уточним, что равенство (5.1.1) означает:  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall T = \{I_1, \dots, I_k\}, \lambda(T) < \delta$  и при любом выборе точек  $\xi^j \in I_j, j = 1, \dots, k$  выполняется неравенство:

$$\left| \mathcal{J} - \sum_{j=1}^k f(\xi^j) |I_j| \right| < \varepsilon$$

Равносильные отображения интеграла таковы:

$$\int_I f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n, \underbrace{\int \dots \int}_n f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n, n \in \mathbb{N}$$

Мы видим, что данное определение повторяет определение интеграла Римана, и при  $m = 1$  совпадает. Схожесть определений позволяет найти сходные методы о решении вопроса условий существования.

## § 5.2. Условие существования кратного интеграла

**Теорема 5.2.1.** Если  $f \in \mathcal{R}(I)$ , то  $f$  ограничена на  $I$ . Пусть функция  $f$  определена на  $I, I \in \mathbb{R}^n. T = \{I_j\}$  — разбиение промежутка  $I$ .

$$m_j = \inf_{x \in I_j} f(x), M_j = \sup_{x \in I_j} f(x)$$

**Определение 5.2.1.** Величины  $s(f, T) = \sum_j m_j |I_j|, S(f, T) = \sum_j M_j |I_j|$  называются соответственно нижней и верхней суммой Дарбу на промежутке отвечающему разбиению  $T$  этого промежутка.

*Комментарий.* Совершенно аналогично доказывается при  $m = 1$  теорема (5.2.2).

**Теорема 5.2.2.** Для того, чтобы ограниченная на промежутке функция  $f$  была интегрируема на  $I \iff$

$$\lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} (S(f, T) - s(f, T)) = 0 \quad (5.2.1)$$

*Замечание 5.2.1* (критерий интегрируемости Римана). Если обозначить колебания  $M_j - m_j, I_j$  через  $\Omega(f, I_j)$ , то (5.2.1) можно записать в виде:

$$\lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} \sum_j \Omega(f, I_j) |I_j| = 0$$

**Определение 5.2.2.** Говорят, что множество  $\mathbb{E}$   $n$ -мерного пространства имеет меру 0 в смысле Жордана или имеет нулевой  $n$ -мерный объем, если для  $\forall \varepsilon > 0$  существует покрытие множества  $\mathbb{E}$  конечной системой  $\{I_j\}$   $n$ -мерных промежутков.  $\sum_j |I_j|$  объемов которых меньше  $\varepsilon$ . В этом случае пишем:  $\mu(\mathbb{E}) = 0$

**Теорема 5.2.3.** Пусть функция  $f$  ограничена на  $n$ -мерном промежутке  $I \subset \mathbb{R}^n$  и  $\mathbb{E}_f$  — множество ее точек разрыва. Тогда, если  $\mu(\mathbb{E}_f) = 0$ , то  $f \in \mathcal{R}(I)$  (интегрируема).

*Комментарий.* Эта теорема при  $n = 1$  обычно устанавливается в разделе “определенный интеграл”. В общем случае доказывается аналогично.

### § 5.3. Кратный интеграл по множеству

Пусть функция  $f$  определена на  $\mathbb{E} \subset \mathbb{R}^n$ , условимся символом  $f_{\mathbb{E}}(x)$  обозначать функцию  $= 0$  вне  $\mathbb{E}$ .

**Определение 5.3.1.** Интеграл функции по множеству  $\mathbb{E}$  определяется соотношением:

$$\int_{\mathbb{E}} f(x) dx := \int_I f_{\mathbb{E}}(x) dx \quad (5.3.1)$$

где  $I$  — наименьший промежуток, содержащий  $\mathbb{E}$ .

Если стоящий справа интеграл существует, то он называется интегрируемым по Риману на  $\mathbb{E}$ . Совокупность всех интегрируемых на множестве  $\mathbb{E}$  функций обозначим  $\mathcal{R}(\mathbb{E})$ .

**Определение 5.3.2.** Множество  $\mathbb{E} \subset \mathbb{R}^n$  назовем допустимым, если оно ограничено в  $\mathbb{R}^n$  и его граница  $\partial\mathbb{E}$  есть множество меры нуль (в смысле Жордана).

*Пример 5.3.1.* Куб, тетраэдер, шар и т. д. являются допустимыми множествами.

*Комментарий.* Граница  $\partial\mathbb{E}$  множества  $\mathbb{E}$  состоит из точек, в любой окрестности которых имеются как точки из  $\mathbb{E}$ , так и точки из дополнения  $\mathbb{E}$  до  $\mathbb{R}^n$ .

**Теорема 5.3.1.** Пусть  $\mathbb{E}$  — допустимое множество в  $\mathbb{R}^n$ .  $f$  — функция, определенная на  $\mathbb{E}$  и пусть множество точек разрыва  $\mathbb{E}_f$  множества  $\mathbb{E}$  имеют нулевую меру, тогда функция  $f \in \mathcal{R}(\mathbb{E})$  (интегрируема).

*Доказательство.* Функция  $f_{\mathbb{E}}$  по сравнению с функцией  $f$  может иметь дополнительные разрывы на  $\partial\mathbb{E}$ , которые, по условию, имеют меру нуль. Поэтому множество точек разрыва функции  $f_{\mathbb{E}}$  так же имеет нулевую меру.

Отсюда из определения (5.3.1) и теоремы (5.2.3) следует, что функция интегрируема.  $\square$

### § 5.4. Мера(объем) множества

**Определение 5.4.1.** Мерой Жордана(или объемом) ограниченного множества  $\mathbb{E}$  назовем величину  $\mu(\mathbb{E}) := \int_{\mathbb{E}} dx$ , если указанный интеграл(Римана) существует. В последнем случае множество  $\mathbb{E}$  называют измеримым в смысле Жордана.

**Теорема 5.4.1.** Допустимое множество измеримо в смысле Жордана.

*Доказательство.* Рассмотрим характеристическую функцию:

$$\aleph_{\mathbb{E}}(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{E} \\ 0, & x \notin \mathbb{E} \end{cases}$$

*Комментарий.*  $\aleph$  — Алеф.

Очевидно, функция  $\aleph_{\mathbb{E}}(x)$  имеет разрывы в граничных и только в граничных точках множества  $\mathbb{E}$ .

По определению (5.3.1):

$$\int_{\mathbb{E}} 1 \cdot dx = \int_I \aleph_{\mathbb{E}}(x) dx \quad (5.4.1)$$

где  $I$  — наименьший промежуток, содержащий множество  $\mathbb{E}$ .

А так как множество точек разрыва  $\aleph_{\mathbb{E}}(x)$  совпадает с границей  $\partial\mathbb{E}$  и  $\mu(\partial\mathbb{E}) = 0$ , то по

теореме (5.2.3) интеграл (5.4.1) существует.

$\mu(\mathbb{E})$  носит комплексный смысл, если  $\mathbb{E}$  — измеримое множество, и

$$\int_I \aleph_{\mathbb{E}}(x) dx = \lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} s(\aleph_{\mathbb{E}}, T) = \lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} S(\aleph_{\mathbb{E}}, T), \quad (I \supset \mathbb{E})$$

то

$$s(\aleph_{\mathbb{E}}, T) = \sum_j m_j |I_j|, \quad S(\aleph_{\mathbb{E}}, T) = \sum_j M_j |I_j|$$

где  $s, S$  — нижняя и верхняя суммы Дарбу. Но в силу определения функции  $\aleph_{\mathbb{E}} : s(\aleph_{\mathbb{E}}, T)$  равна сумме объемов промежутков  $I_j$ , лежащих в множестве  $\mathbb{E}$  (это объем вписанного в  $\mathbb{E}$  многогранника), а  $S(\aleph_{\mathbb{E}}, T)$  равна сумме объемов тех промежутков  $I_j$ , которые имеют общие точки с множеством  $\mathbb{E}$  (Объем описанного многогранника).  $\square$

**Утверждение 5.4.1.** Мера  $\mu(\mathbb{E})$  есть общий предел, при  $\lambda(T) \rightarrow 0$  объемов, вписанных в  $\mathbb{E}$  и описанных около  $\mathbb{E}$  многогранников.

**Замечание 5.4.1.** Можно показать, что измеримы по Жордану только измеримые множества  $\iff$  множество  $\mathbb{E}$  является измеримым по Жордану  $\iff$  его границы имеют меру нуль в смысле Жордана.

**Замечание 5.4.2.** При  $n = 2$  понятие измеримого по Жордану множества совпадает с понятием квадрируемой плоской фигуры и меры Жордана с ее площадью.

## § 5.5. Свойства кратных интегралов

На кратные интегралы по ограниченной функции переносятся все свойства интегралов по отрезку.

Доказательства аналогичны одномерному случаю:

1. Линейность интеграла по множеству.

$f_1, \dots, f_n$  интегрируема на множестве  $\mathbb{E}$ ,  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$

$\lambda_1 f_1, \dots, \lambda_n f_n$  так же интегрируема на  $\mathbb{E}$  и

$$\int_{\mathbb{E}} (\lambda_1 f_1(x) + \dots + \lambda_n f_n(x)) dx = \lambda_1 \int_{\mathbb{E}} f_1(x) dx + \dots + \lambda_n \int_{\mathbb{E}} f_n(x) dx$$

2. Аддитивность интеграла по множеству.

Если  $\mathbb{E}_1, \mathbb{E}_2$  — допустимые множества в  $\mathbb{R}^n$  и  $\mu(\mathbb{E}_1 \cap \mathbb{E}_2) = 0$  ( $\mathbb{E}_1 \cap \mathbb{E}_2 = 0$  в частности), а  $f$  — функция, определенная на  $\mathbb{E}_1 \cup \mathbb{E}_2$ , то при условии существования интегралов имеет место равенство:

$$\int_{\mathbb{E}_1 \cup \mathbb{E}_2} f(x) dx = \int_{\mathbb{E}_1} f(x) dx + \int_{\mathbb{E}_2} f(x) dx$$

3. Общая оценка.

Если  $f \in \mathcal{R}(\mathbb{E})$ , то  $|f| \in \mathcal{R}(\mathbb{E})$  и имеет место неравенство:

$$\left| \int_{\mathbb{E}} f(x) dx \right| \leq \int_{\mathbb{E}} |f(x)| dx$$



4. Интегрирование неравенств. Если функции  $f, g \in \mathcal{R}(\mathbb{E})$  и  $f(x) \leq g(x)$ ,  $x \in \mathbb{E}$ , то:

$$\int_{\mathbb{E}} f(x) dx \leq \int_{\mathbb{E}} g(x) dx$$

5. Следствие из 4.

Если  $f$  интегрируема и  $m \leq f(x) \leq M$ ,  $x \in \mathbb{E}$

$$m\mu(\mathbb{E}) \leq \int_{\mathbb{E}} f(x) dx \leq M\mu(\mathbb{E})$$

6. Теорема о среднем.

Если в дополнении условия 5. множество  $\mathbb{E}$  линейно связано, а  $f$  — непрерывна на  $\mathbb{E}$ , то существует  $\xi \in \mathbb{E}$ , такое что:

$$\int f(x) dx = f(\xi)\mu(\mathbb{E})$$

## § 5.6. Сведение кратного интеграла к повторному

**Теорема 5.6.1.**  $X \times Y \subset \mathbb{R}^{m+n}$  является прямым произведением промежутков:  $X \subset \mathbb{R}^m$  и  $Y \subset \mathbb{R}^n$ .

Если для  $f(x, y)$  определенной на  $X \times Y$ , ( $x \in X, y \in Y$ ) существует интеграл:

$$\int_{X \times Y} f(x, y) dx dy \quad (5.6.1)$$

и для любого  $x \in X$  существует:

$$\mathcal{J}(x) = \int_Y f(x, y) dy \quad (5.6.2)$$

то существует так же и повторный интеграл:

$$\int_X dx \int_Y f(x, y) dy \quad (5.6.3)$$

и выполняется равенство:

$$\int_{X \times Y} f(x, y) dx dy = \int_X dx \int_Y f(x, y) dy \quad (5.6.4)$$

*Доказательство.* Любое разбиение  $T$  промежутка  $X \times Y$  индуцируется собственными разбиениями  $T_x, T_y$ . При этом, каждый промежуток разбиения  $T$  есть прямое произведение  $X_i \times Y_j$ ,  $X_i, Y_j$  — разбиения  $T_x, T_y$ .

Очевидно,  $|X_i \times Y_j| = |X_i| \cdot |Y_j|$ .

Положим  $m_{ij} = \inf_{x \in X_i, y \in Y_j} f(x, y)$ ,  $M_{ij} = \sup_{x \in X_i, y \in Y_j} f(x, y)$ , так что выполняется следующее неравенство:

$$m_{ij} \leq f(x, y) \leq M_{ij}, \quad \forall (x, y) \in X_i \times Y_j \quad (5.6.5)$$

Фиксируем  $\forall x \in X_i : x = \xi_i$ .

Учитывая (5.6.5) получим:

$$m_{ij}|Y_j| \leq \int_{Y_j} f(\xi_i, y) dy \leq M_{ij}|Y_j|$$

Просуммировав все по  $j$  получим:

$$\sum_j m_{ij}|Y_j| \leq \mathcal{J}(\xi_i) = \int_Y f(\xi_i, y) dy \leq \sum_j M_{ij}|Y_j|$$

Отсюда имеем:

$$\sum_i |X_i| \sum_j m_{ij}|Y_j| \leq \sum_i \mathcal{J}(\xi_i)|X_i| \leq \sum_i |X_i| \sum_j M_{ij}|Y_j| \quad (5.6.6)$$

По середине мы получили интегральную сумму для функции  $\mathcal{J}(x)$ . Крайние члены — это суммы Дарбу  $s(f, T)$ ,  $S(f, T)$  для кратного интеграла (5.6.1).

Например  $\sum_{i,j} m_{ij}|X_i \times Y_j|$ . Таким образом неравенство (5.6.6) переписывается в виде:

$$s(f, T) \leq \sum_i \mathcal{J}(\xi_i)|X_i| \leq S(f, T) \quad (5.6.7)$$

Так как кратный интеграл (5.6.1) существует по условию, то при  $\lambda(T) \rightarrow 0$  обе суммы Дарбу неравенства (5.6.7) стремятся к этому интегралу, откуда

$$\left| \lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} \sum_i \mathcal{J}(\xi_i)|X_i| \right| = \int_{X \times Y} f(x, y) dx dy$$

Левая часть этого равенства есть повторный интеграл:

$$\int_X \mathcal{J}(x) dx = \int_X dx \int_Y f(x, y) dy$$

□

**Замечание 5.6.1.** Применяя эту теорему несколько раз, можно свести вычисление по  $k$ -мерному промежутку к вычислению  $k$  одномерных интегралов.

**Следствие.** Пусть  $\mathbb{D} \subset Oxy$  — область, ограниченная двумя кривыми  $\mathcal{J} = \varphi(x)$ ,  $\mathcal{J} = \psi(x)$ ,  $(\varphi(x) \leq \psi(x))$  и двумя прямыми  $x = a$  и  $x = b$ .

Тогда, если для  $f(x, y)$  существует  $\iint_{\mathbb{D}} f(x, y) dx dy$ ,  $x \in [a, b]$ .

$\mathcal{J}(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy$ , то существует так же повторный интеграл:  $\int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy$  и выполняется равенство

$$\iint_{\mathbb{D}} f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy.$$

## § 5.7. Замена переменных в кратных интегралах

Напомним, что отображение:

$$x = \varphi(t) = \begin{cases} x_1 = \varphi_1(t_1, \dots, t_n) \\ \dots \\ x_n = \varphi_n(t_1, \dots, t_n) \end{cases}$$

называется регулярным в области  $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^n$ , если:

1.  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  имеют в  $\mathbb{D}$  непрерывные частные производные по всем аргументам.
2. Матрица Якоби:

$$\varphi'(t) := \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial t_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial t_n} \end{pmatrix} \quad (5.7.1)$$

Определитель(якобиан):

$$\det \varphi'(t) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial t_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial t_n} \end{vmatrix} =: \frac{\mathbb{D}(\varphi_1, \dots, \varphi_n)}{\mathbb{D}(t_1, \dots, t_n)}$$

Отличен от нуля в  $\mathbb{D}$ . Матрица Якоби (5.7.1) называется производной отображения  $\varphi$ , а линейный оператор в  $\mathbb{R}^n$  называется дифференциалом  $\varphi$  в точке  $t$ , в области  $\mathbb{D}$ ,  $(\mathbb{D}_\varphi(t))$ . Регулярное отображение является локально обратимым.

**Лемма 5.7.1.** Пусть  $\varphi$  — регулярное отображение области  $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}_t^n$ ,  $I$  — замкнутый промежуток, лежащий в  $\mathbb{D}$ , ( $I \subset \mathbb{D}$ ).  $\varphi(I)$  — образ промежутка  $I$ , ( $\varphi(I) \subset \mathbb{R}_x^n$ ). Тогда, существует такая точка  $\tau \in I$ , что:

$$\mu(\varphi(I)) = |\det \varphi'(\tau)| \cdot |I|$$

*Комментарий.*  $|I| = \mu(I)$

*Пояснение.* Лемма при  $n = 1$  следует из формулы Лагранжа:  $\varphi(b) - \varphi(a) = \varphi'(\tau)(b - a)$ , где  $\tau \in [a, b] = I$ , поскольку при  $\varphi'(\tau) \neq 0$  функция  $\varphi$  монотонна и

$$|\varphi(b) - \varphi(a)| = \mu(\varphi(I))$$

Если  $n \geq 2$  и отображение  $\varphi$  является линейным преобразованием

$$x = \varphi(t) = \begin{cases} x_1 = a_{11}t_1 + \dots + a_{1n}t_n \\ \dots \\ x_n = a_{n1}t_1 + \dots + a_{nn}t_n \end{cases}$$

с матрицей  $A = (a_{ij}) = \varphi'(t)$ ,  $x = At$ , то образ промежутка  $\varphi(I)$  является параллелепипедом  $\varphi(I) \subset \mathbb{R}_x^n$ , объем которого равен:

$$|\det A| \cdot |I| = |\det \varphi'| \cdot |I|$$

При  $n = 3$ ,  $I$  — прямоугольный параллелепипед, построенный на векторах:  $h^1 = (h_1, 0, 0)$ ,  $h^2 = (0, h_2, 0)$ ,  $h^3 = (0, 0, h_3)$ , тогда  $\varphi(h^i) = (a_{1i}h_i, a_{2i}h_i, a_{3i}h_i)$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Отсюда объем параллелепипеда, построенного на векторах  $\varphi(h^1), \varphi(h^2), \varphi(h^3)$  как на ребрах, равен

$$| \langle \varphi(h^1), \varphi(h^2), \varphi(h^3) \rangle | = | \det A | \cdot |h_1 h_2 h_3|$$

Рассматривая уже общий, нелинейный случай, следует принять во внимание, что в малой окрестности точки  $t \in \mathbb{D}$  является почти линейным отображением:

$$\varphi(t + h) = \varphi(t) + \mathbb{D}_\varphi(t) \cdot \bar{o}(h), \text{ при } h \rightarrow 0$$

Поэтому, если размеры промежутка  $I$  малы, то с малой относительной погрешностью можно сказать:

$$\mu(\varphi(I)) \approx | \det \varphi'(t) | \cdot |I|, \quad t \in I$$

В такой ситуации и используется лемма ( $I$  — малый промежуток).

**Теорема 5.7.1.** Пусть  $\varphi : \mathbb{E}_t \rightarrow \mathbb{E}_x$  — отображение измеримого (по Жордану) множества  $\mathbb{E}_t \subset \mathbb{R}_t^n$ ,  $\mathbb{E}_x \subset \mathbb{R}_x^n$ , при чем отображение  $\varphi$  регулярно в некоторой области  $\mathbb{D}$ , содержащей замыкание  $\overline{\mathbb{E}_t}, \mathbb{E}_t, (\mathbb{E}_t \subset \mathbb{D})$ . Тогда, если  $f(x) \in \mathcal{R}(\mathbb{E}_x)$ , то  $f(\varphi(t)) | \det \varphi'(t) | \in \mathcal{R}(\mathbb{E}_t)$  и имеет место равенство:

$$\int_{\mathbb{E}_x} f(x) dx = \int_{\mathbb{E}_t} f(\varphi(t)) | \det \varphi'(t) | dt \quad (5.7.2)$$

*Доказательство.* Случай, когда  $\mathbb{E}_t$  — промежуток, а  $f(x)$  ограничена и непрерывна на  $\mathbb{E}_x$ . В этом случае функция  $g(t) = f(\varphi(t)) | \det \varphi'(t) |$  так же ограничена и непрерывна на  $\mathbb{E}_t$ , а следовательно и интегрируема на  $\mathbb{E}_t$ . Любому разбиению  $T$  промежутка  $\mathbb{E}_t$  на промежутке  $I_1, \dots, I_k$  соответствует разложение множества  $\varphi(\mathbb{E}_t) = \mathbb{E}_x$  на множество  $\varphi(I_j)$ ,  $j = 1, \dots, k$ . Все эти множества измеримы, связаны и пересекаются попарно лишь по множествам меры нуль. Поэтому, в силу аддитивности интеграла:

$$\int_{\mathbb{E}_x} f(x) dx = \sum_{j=1}^k \int_{\varphi(I_j)} f(x) dx \quad (5.7.3)$$

По теореме о среднем:

$$\int_{\varphi(I_j)} f(x) dx = f(\xi^j) \mu(\varphi(I_j)), \quad \xi^j \in \varphi(I_j) \quad (5.7.4)$$

Пусть  $\eta^j = \varphi^{-1}(\xi^j) \in I_j$ , так что  $\xi^j = \varphi(\eta^j)$ .

Поскольку по лемме  $\mu(\varphi(I_j)) = | \det \varphi'(\tau^j) | \cdot |I_j|$ , где  $\tau^j \in I_j$ , то из (5.7.3) и (5.7.4) получаем:

$$\int_{\mathbb{E}_x} f(x) dx = \sum_{j=1}^k f(\varphi(\eta^j)) | \det \varphi'(\tau^j) | \cdot |I_j| =: \sigma_1 \quad (5.7.5)$$

Составим сумму:  $\sigma_2 := \sum_{j=1}^k f(\varphi(\eta^j)) | \det \varphi'(\eta^j) | \cdot |I_j|$ , которая является интегрируемой суммой для функции  $g(t)$ ,  $t \in \mathbb{E}_t$ . Поскольку  $g(t) \in \mathcal{R}$ , то:

$$\lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} \sigma_2 = \int_{\mathbb{E}_t} g(t) dt \quad (5.7.6)$$

Положим  $\psi(t) = |\det \varphi'(t)|$  и оценим разность  $\sigma_1 - \sigma_2$ :

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \sum_{j=1}^k f(\xi^j)(\psi(\tau^j) - \psi(\eta^j))|I_j|$$

Функция  $\psi(t)$  непрерывна на замкнутом множестве  $\mathbb{E}_t$  и по теореме Кантора равномерно непрерывна на  $\mathbb{E}_t$ , так что  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0, \lambda(T) < \delta$ :

$$\begin{aligned} |\psi(\tau^j) - \psi(\eta^j)| &< \varepsilon, \quad \forall j \\ \rho(\tau^j, \eta^j) &< \delta \end{aligned}$$

Отсюда, при  $\lambda(T) < \delta$ :

$$|\sigma_1 - \sigma_2| \leq \max_{x \in \mathbb{E}_x} |f(x)| \cdot \varepsilon \sum_{j=1}^k |I_j| = C\varepsilon$$

где  $C$  не зависит от  $\varepsilon$ ,  $C = \text{const}$ .

$$\lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} (\sigma_1 - \sigma_2) = 0 \quad (5.7.7)$$

Равенство (5.7.2) теперь следует из (5.7.5), (5.7.6) и (5.7.7).

Доказательство теоремы в общем случае можно провести, придерживаясь рассмотренной схемы.  $\square$

**Следствие.** Величина интеграла от  $f$  по множеству  $\mathbb{E} \subset \mathbb{R}^n$  не зависит от выбора декартовых координат в  $\mathbb{R}^n$ .

*Доказательство.* Пусть  $\mathbb{E}_x, \mathbb{E}_t$  — запись множества  $\mathbb{E}$ .  $p$  — точка множества  $\mathbb{E}$ ,  $x = (x_1, \dots, x_n)$  — ее координаты в первой системе,  $t = (t_1, \dots, t_n)$  — во второй системе. Тогда  $f(p) = f_x(x_1, \dots, x_n) = f_t(t_1, \dots, t_n)$ , где  $f_t = f_x \circ \varphi$  (суперпозиция). Поскольку переход от одной системы декартовых координат к другой имеет якобиан по модулю равный единице, то есть:

$$\int_{\mathbb{E}_x} f_x(x) dx = \int_{\mathbb{E}_t} f_x(\varphi(t)) |\det \varphi'(t)| dt = \int_{\mathbb{E}_t} f_t(t) dt$$

$\square$



# Глава 6

## Криволинейные интегралы

### § 6.1. Криволинейный интеграл первого рода

Пусть  $\Gamma = \{M(S) : 0 \leq S \leq S_0\}$  определенная кривая в  $\mathbb{R}^3$ , в частности  $\mathbb{R}^2$ .  
 $M(S) = (x(S), y(S), z(S))$  — ее параметрическое представление, где в качестве переменной взята длина дуги  $S$ .

Кривая, у которой переменная длина дуги отсчитывается от точки  $A$  обозначим:  $\Gamma = \widehat{AB}$ .  
Противоположно ориентированную прямую, у которой переменная длина дуги отсчитывается от точки  $B$  обозначим  $\Gamma = \widehat{BA}$ .

**Определение 6.1.1.** Пусть на токах  $M(S)$ , кривой  $\Gamma = \widehat{AB}$  задана некоторая функция  $F$ .  
Выражение  $\int_{\Gamma} F(x, y, z) dS$  определенное по формуле:

$$\int_{\Gamma} F(x, y, z) dS = \int_0^{S_0} F(x(S), y(S), z(S)) dS \quad (6.1.1)$$

называется криволинейным интегралом первого рода (КИПР) от функции  $F$  по кривой  $\Gamma$ .  
Этот интеграл обозначается символами:

$$\int_{\Gamma} F(M(S)) dS, \quad \int_{\Gamma} F dS, \quad \int_{\widehat{AB}} F dS$$

Отметим свойства интеграла (6.1.1):

1.  $\int_{\Gamma} dS = S_0$  — длина кривой  $\Gamma$ .
2. Если  $F$  непрерывна на  $\Gamma$  (то есть  $F(x(S), y(S), z(S))$  непрерывная на отрезке  $S \in [0, S_0]$ ), то  $\int_{\Gamma} F dS$  существует.
3. КИПР не зависит от ориентации кривой:

$$\int_{\widehat{BA}} F dS = \int_{\widehat{AB}} F dS$$

**Определение 6.1.2.** Кривую  $\Gamma$  называют гладкой, если в ее параметрическом представлении:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t), \quad a \leq t \leq b \quad (6.1.2)$$

все функции непрерывно дифференцируемы на отрезке  $[a, b]$  и  $\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2 + \chi'(t)^2 > 0, \forall t \in [a, b]$ .

**Теорема 6.1.1.** Пусть  $\Gamma$  — гладкая кривая с параметрическим представлением (6.1.2),  $F$  — непрерывная на  $\Gamma$  функция. Тогда:

$$\int_{\Gamma} F(x, y, z) dS = \int_a^b F(\varphi(t), \psi(t), \chi(t)) \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2 + \chi'(t)^2} dt \quad (6.1.3)$$

*Доказательство.* Кривая  $\Gamma$  спрямляема. Переменную дуги  $S = S(t)$  можно принять в качестве параметра, и тогда  $\int_{\Gamma} F dS$  существует. Учитывая, что  $S'(t) = \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2 + \chi'(t)^2}$  получим (6.1.3).  $\square$

*Замечание 6.1.1.* Если плоская кривая  $\Gamma$  является графиком функции  $y = f(x)$ ,  $a \leq x \leq b$ , то ее представлением является функция  $x = x, y = f(x)$ . И тогда формула (6.1.3) примет вид:

$$\int_{\Gamma} F(x, y) dS = \int_a^b F(x, f(x)) \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

## § 6.2. Криволинейный интеграл второго рода

Пусть  $\Gamma$  — гладкая ориентированная кривая,  $\vec{r} = \vec{r}(S) = \{x(S), y(S), z(S)\}$ ,  $0 \leq S \leq S_0$  — ее векторное представление, в котором за параметр  $S$  взята переменная длина ее дуги.  $\vec{\tau} = \frac{d\vec{r}}{dS} = \left\{ \frac{dx}{dS}, \frac{dy}{dS}, \frac{dz}{dS} \right\}$  — единичный касательный вектор к кривой  $\Gamma$ , его направление соответствует выбранному направлению отсчета длины дуг. Если  $\alpha, \beta, \gamma$  — углы, которые  $\vec{\tau}$  образует с координатными осями, то  $\vec{\tau} = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$ . Получаем  $\cos \alpha = \frac{dx}{dS}$ ,  $\cos \beta = \frac{dy}{dS}$ ,  $\cos \gamma = \frac{dz}{dS}$ .

Пусть на  $\Gamma$  задана вектор-функция  $\vec{a} = \vec{a}(x, y, z) = \vec{a}(x(S), y(S), z(S))$ ,  $0 \leq S \leq S_0$ . Пусть  $P, Q, R$  — координаты вектора  $\vec{a}$ :  $\vec{a} = \{P, Q, R\}$ . Функции  $P, Q, R$  являются функциями точки кривой  $\Gamma$ .

**Определение 6.2.1.**  $\int_{\Gamma} \vec{a} d\vec{r}$  определенное по формуле:

$$\int_{\Gamma} (\vec{a}, \vec{\tau}) dS \quad (6.2.1)$$

называется криволинейным интегралом второго рода (КИВР) по кривой  $\Gamma = \widehat{AB}$ .

Для интеграла  $\int_{\Gamma} \vec{a} d\vec{r}$  используется так же обозначение:

$$\int_{\Gamma} P dx + Q dy + R dz$$

где  $P dx + Q dy + R dz$  — записанное в координатной форме скалярное произведение векторов  $\vec{a} = \{P, Q, R\}$  и  $d\vec{r} = \{dx, dy, dz\}$ . Учитывая, что  $(\vec{a}, \vec{\tau}) = P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma$ , то определение (6.2.1) можно записать в виде:

$$\int_{\Gamma} \vec{a} d\vec{r} \equiv \int_{\Gamma} P dx + Q dy + R dz := \int_{\Gamma} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS \quad (6.2.2)$$

Следующие свойства КИВР под силу доказать каждому:



1.  $\vec{a} = \vec{a}(x, y, z)$ ,  $\Gamma = \widehat{AB}$ , то  $\int_{\Gamma} \vec{a} d\vec{r}$  существует.

2. КИВР меняет знак при изменении ориентации кривой  $\Gamma$ :

$$\int_{\widehat{BA}} \vec{a} d\vec{r} = - \int_{\widehat{AB}} \vec{a} d\vec{r}$$

**Теорема 6.2.1.** Если  $\Gamma = \widehat{AB}$  — гладкая ориентированная кривая.  
 $\vec{r} = \vec{r}(t) = \{\varphi(t), \psi(t), \chi(t)\}$ ,  $a \leq t \leq b$  — ее векторное представление ( $\vec{r}(a) = A$ ,  $\vec{r}(b) = B$ ),  
 то получим:

$$\int_{\Gamma} \vec{a} d\vec{r} = \int_a^b (\vec{a}, \vec{r}') dt \quad (6.2.3)$$

*Доказательство.* Поскольку

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{r}}{dS} = \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \frac{dt}{dS} = \frac{\vec{r}'}{S'} \quad (6.2.4)$$

(здесь штрихом обозначены производные по  $t$ ), то

$$\int_{\Gamma} \vec{a} d\vec{r} \stackrel{(6.2.1)}{=} \int_{\Gamma} (\vec{a}, \vec{\tau}) dS \stackrel{(6.1.3)}{=} \int_a^b (\vec{a}, \vec{\tau}) S' dt \stackrel{(6.2.4)}{=} \int_a^b (\vec{a}, \vec{r}') dt$$

□

*Замечание 6.2.1.* В координатной форме формула (6.2.3) примет вид:

$$\int_{\Gamma} Pdx + Qdy + Rdz = \int_a^b (Px' + Qy' + Rz') dt \quad (6.2.5)$$

**Следствие.** Если плоская кривая  $\Gamma = \widehat{AB}$  является графиком функции  $y = f(x)$ ,  $a \leq x \leq b$ ,  
 $A = (a, f(a))$ ,  $B = (b, f(b))$ , то формула (6.2.3) (при  $x = t$ ,  $R \equiv 0$ ) принимает вид:

$$\int_{\Gamma} Pdx + Qdy + Rdz = \int_a^b (P(x, f(x)) + Q(x, f(x))) f'(x) dx \quad (6.2.6)$$

*Замечание 6.2.2.* Если  $\vec{a} = \{P, 0, 0\}$ ,  $Q \equiv R \equiv 0$ , то  $\int_{\Gamma} \vec{a} d\vec{r}$  обозначается  $\int_{\Gamma} dx$ , таким образом интеграл:

$$\int_{\Gamma} P(x, y, z) dx = \int_{\Gamma} P \cos \alpha dS \quad (6.2.7)$$

аналогично

$$\int_{\Gamma} Q dy := \int_{\Gamma} Q \cos \beta dS, \quad \int_{\Gamma} R dz := \int_{\Gamma} R \cos \gamma dS \quad (6.2.8)$$

Отсюда, воспользовавшись адитивностью обычного интеграла, получим:

$$\int_{\Gamma} Pdx + Qdy + Rdz = \int_{\Gamma} Pdx + \int_{\Gamma} Qdy + \int_{\Gamma} Rdz$$

**Следствие.** В условиях предыдущего следствия:

$$\int_{\Gamma} P dx = \int_a^b P(x, f(x)) dx \quad (6.2.9)$$

**Определение 6.2.2.** Если кривая  $\Gamma$  — кусочно-гладкая, то есть представима в виде объединения конечного числа гладких ориентированных кривых  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_k$ ,  $F$ ,  $\vec{a} = \{P, Q, R\}$ , определенный на точках кривой  $\Gamma$ , то полагают:

$$\int_{\Gamma} F dS := \sum_{i=1}^k \int_{\Gamma_i} F dS, \quad \int_{\Gamma} \vec{a} d\vec{r} := \sum_{i=1}^k \int_{\Gamma_i} \vec{a} d\vec{r}$$

### § 6.3. Формула Грина

Пусть на плоскости  $\mathbb{R}^2$  задана система координат по  $Oxy$ .

**Определение 6.3.1.** Ориентация простого замкнутого контура  $\Gamma$ , лежащего на этой плоскости называется положительной, если она соответствует движению **против** часовой стрелки. Противоположная ориентация называется отрицательной.

Напомним, что простым замкнутым контуром в  $\mathbb{R}^n$  называют  $x = \varphi(t) = (\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))$ ,  $a \leq t \leq b$ , у которой нет других кратных точек.

**Определение 6.3.2.** Пусть граница  $\partial\mathbb{G}$ , ограниченной плоской области  $\mathbb{G}$ , состоит из конечного числа простых замкнутых контуров. Совокупность этих контуров, ориентированных так, что при обходе каждого из них, область  $\mathbb{G}$  остается слева(справа), называется положительной(отрицательной) ориентацией:  $\partial\mathbb{G}^+(\partial\mathbb{G}^-)$ .

**Определение 6.3.3.** Граница  $\partial\mathbb{G}$  области  $\mathbb{G}$  называется кусочно-гладкой, если она состоит из конечного числа простых кусочно-гладких контуров.

*Замечание 6.3.1.* Если граница  $\partial\mathbb{G}$  области  $\mathbb{G}$  является кусочно гладкой, то ее площадь равна нулю, а само множество  $\mathbb{G}$  квадратируемо.

**Теорема 6.3.1.** Если граница плоской, ограниченной области  $\mathbb{G}$  является кусочно-гладкой, а функции  $P, Q, \frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x}$  — непрерывны на замыкании  $\overline{\mathbb{G}}$  области  $\mathbb{G}$ , то:

$$\iint_{\mathbb{G}} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\partial\mathbb{G}^+} P dx + Q dy \quad (6.3.1)$$

эта формула называется **формулой Грина**.

*Доказательство.* Проведем его для произвольных областей. □

**Определение 6.3.4.** Назовем область  $\mathbb{G}$  областью  $\mathbb{G}_y$ , если  $\mathbb{G}$  имеет вид:

$$\mathbb{G} = \{(x, y) : a < x < b, \varphi(x) < y < \psi(x)\} \quad (6.3.2)$$

где  $\varphi(x), \psi(x)$  — кусочно-гладкие функции на  $[a, b]$ . Поменяв здесь  $x$  и  $y$  ролями получим определение области  $\mathbb{G}_x$ . Области, которые можно разрезать на куски вида  $\mathbb{G}_x$  либо  $\mathbb{G}_y$  назовем простыми областями.

**Лемма 6.3.1.** Пусть в теореме (6.3.1)  $\mathbb{G}$  — область по  $\mathbb{G}_y$ , тогда:

$$\iint_{\mathbb{G}} \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = - \int_{\partial \mathbb{G}^+} P dx \quad (6.3.3)$$

*Доказательство.* Сводя двойной интеграл к повторному, применяя формулу Ньютона-Лейбница и формулу (6.2.9) получим:

$$\iint_{\mathbb{G}} \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy = \int_a^b [P(x, \psi(x)) - P(x, \varphi(x))] dx = \quad (6.3.4)$$

$$- \int_a^b P(x, \varphi(x)) dx - \int_b^a P(x, \psi(x)) dx = - \int_{\widehat{AB}} P(x, y) dx - \int_{\widehat{CD}} P(x, y) dx \quad (6.3.5)$$

заметим, что  $\int_{\widehat{BC}} P dx = \int_{\widehat{DA}} P dx = 0$ , и что сумма:  $\int_{\widehat{AB}} P dx + \int_{\widehat{BC}} P dx + \int_{\widehat{CD}} P dx + \int_{\widehat{DA}} P dx = \int_{\partial \mathbb{G}^+} P dx$ .

Поэтому из (6.3.5) получаем (6.3.3).

Аналогично, если  $\mathbb{G}$  — область типа  $\mathbb{G}_x$ , то:

$$\iint_{\mathbb{G}} \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy = \int_{\partial \mathbb{G}^+} Q dy \quad (6.3.6)$$

□

**Лемма 6.3.2.** Если в теореме (6.3.1) область  $\mathbb{G}$  допускает разбиение на области  $\mathbb{G}_x, \mathbb{G}_y$ , то выполняется (6.3.3).

*Доказательство.* Двойной интеграл в области  $\mathbb{G}$  в силу адитивности есть сумма по кускам  $\mathbb{G}_x, \mathbb{G}_y$ , на которые разрезана  $\mathbb{G}$ . Для каждого справедливо (6.3.3). Но соседние куски на общей части границ индуцируют противоположные ориентации. Поэтому, при сложении интегралов по границам всех кусков в результате взаимных уничтожений, останется  $\int_{\mathbb{G}} \partial \mathbb{G}$ .

Аналогично, если разрезается на  $\mathbb{G}_x$ , то справедливо (6.3.6). Запишем для произвольной области выражения (6.3.3) и (6.3.6), умножив (6.3.3) на  $-1$ . После сложения полученных соотношений, пользуясь свойством адитивности интеграла, получим формулу Грина. □

**Следствие.**

$$\mu(\mathbb{G}) = \iint_{\mathbb{G}} dx dy \stackrel{(I)}{=} \int_{\partial \mathbb{G}^+} x dy \stackrel{(II)}{=} - \int_{\partial \mathbb{G}^+} y dx \stackrel{(III)}{=} \frac{1}{2} \int_{\partial \mathbb{G}^+} x dy - y dx$$

$$(I) - P = 0, Q = x$$

$$(II) - P = -y, Q = 0$$

$$(III) - \text{если возьмем полусумму}$$



# Глава 7

## Поверхностные интегралы

### § 7.1. Поверхности в $\mathbb{R}^3$

Пусть  $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^2$ ,  $\bar{\mathbb{D}}$  — ее замыкание.

**Определение 7.1.1.**  $S$  — образ непрерывного отображения  $x = x(u, v)$ ,  $y = y(u, v)$ ,  $z = z(u, v)$  замкнутой области  $\bar{\mathbb{D}} \subset \mathbb{R}_{uv}^2$  в пространство  $\mathbb{R}_{xyz}^3$  называется непрерывной поверхностью.

Само отображение называется параметрическим представлением поверхности. Переменные  $u, v$  — параметры поверхности  $S$ .

$$S = \{\vec{r}(u, v) : (u, v) \in \bar{\mathbb{D}}\} \quad (7.1.1)$$

Вектор  $\vec{r}(u, v)$  — где  $\vec{r}$  — радиус вектор в  $\mathbb{R}^3$  с начала в начале координат и концом в точке  $(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ . Представление (7.1.1) назовем векторным представлением поверхности  $S$ . Отметим, что одна и та же поверхность  $S$  может иметь различные параметрические представления.

**Определение 7.1.2.** Поверхность  $S$  назовем простой, если на ней нет кратных точек, то есть для любой точки  $M \in S$  отображается лишь одна точка  $(u, v) \in \bar{\mathbb{D}}$ .

**Определение 7.1.3.** Если за параметры в одной из представленных поверхностей  $S$  можно взять какие-либо две координаты пространства  $\mathbb{R}^3$ , то такое представление называется явным. Например, таковым является представление:

$$S : x = x, y = y, z = \varphi(x, y) : (x, y) \in \bar{\mathbb{D}}$$

значит  $S$  — график  $z = \varphi(x, y) : (x, y) \in \bar{\mathbb{D}}$ . Очевидно, что поверхность, допускающая явное представление, не имеет кратных точек.

**Определение 7.1.4.** Если в определении (7.1.1) отображение является непрерывно дифференцируемым, то  $S$  называется непрерывно дифференцируемой поверхностью.

*Пример 7.1.1.*  $x = R \cos \varphi \cos \psi$ ,  $y = R \sin \varphi \cos \psi$ ,  $z = R \sin \psi$ , где  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ,  $-\frac{\pi}{2} \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}$  является сферой с центром в начале координат и радиусом  $R$  у которой весь меридиан  $\varphi = 0$  состоит из кратных точек.

## § 7.2. Касательная плоскость и нормаль к поверхности в $\mathbb{R}^3$

Пусть  $S = \{\vec{r}(u, v) : (u, v) \in \mathbb{D}\}$  — непрерывно дифференцируемая поверхность,  $(u_0, v_0) \in \mathbb{D}$ ,  $\vec{r}'_u$  — производная вектор-функции  $\vec{r} = \vec{r}(u, v_0)$ , то есть  $\vec{r}'_u$  — касательный вектор к кривой  $\vec{r} = \vec{r}(u, v_0)$ , называемой координатной линией,  $\vec{r}'_v$  — касательный вектор к координатной линии  $\vec{r} = \vec{r}(u_0, v)$ .

**Определение 7.2.1.** Точка  $M_0 = \vec{r}(u_0, v_0)$  поверхности  $S$  называется неособой, если в ней векторы  $\vec{r}'_u, \vec{r}'_v$  не коллинеарны:  $[\vec{r}'_u, \vec{r}'_v] \neq 0$  в противном случае точка  $M_0$  называется особой.

**Определение 7.2.2.** Плоскость, проходящая через неособую точку  $M_0 = \vec{r}(u_0, v_0)$  поверхности  $S$ , параллельно векторам  $\vec{r}'_u, \vec{r}'_v$  называется касательной плоскостью к поверхности  $S$  в этой точке. Если  $\vec{r}_0 = \vec{r}(u_0, v_0)$ ,  $\vec{r}$  — радиус вектор произвольной точки на касательной плоскости, то ее уравнение в векторной записи имеет вид:

$$\langle \vec{r} - \vec{r}_0, \vec{r}'_u, \vec{r}'_v \rangle = 0 \quad (7.2.1)$$

**Определение 7.2.3.** Если  $M_0 = \vec{r}(u_0, v_0)$  — неособая точка, то вектор

$$\vec{\nu} = \frac{[\vec{r}'_u, \vec{r}'_v]}{|[\vec{r}'_u, \vec{r}'_v]|} \quad (7.2.2)$$

а так же ему противоположный назовем единичной нормалью к поверхности в точке  $M_0$ .

**Определение 7.2.4.** Непрерывно дифференцируемая поверхность без особых точек называется гладкой поверхностью. Объединение конечного числа гладких поверхностей назовем кусочно гладкой поверхностью, она может состоять из парочки кусков.

## § 7.3. Площадь поверхности

Пусть

$$S = \{\vec{r}(u, v) : (u, v) \in \mathbb{D}\} \quad (7.3.1)$$

непрерывно дифференцируемая поверхность, где  $\mathbb{D}$  — квадратируемая замкнутая область. Пусть  $I$  — промежуток, содержащий множество  $\mathbb{D}$ .  $T$  — некоторое разбиение промежутка  $I$ . Прономеруем каким-либо образом те промежутки разбиения, которые содержатся в  $\mathbb{D}$  и обозначим их  $I_j$ ,  $j = 1, \dots, k$ .

Возьмем какой-либо промежуток  $I_j$ . Пусть  $I_j = [u, u+h] \times [v, v+t]$ ,  $t > 0$ ,  $h > 0$  и где для краткости записи пропущен индекс  $j$  у переменных:  $u, v, h, t$ . Тогда

$$\begin{aligned} \vec{r}(u+h, v) - \vec{r}(u, v) &= \vec{r}'_u \cdot h + \bar{o}(h), \quad h \rightarrow 0 \\ \vec{r}(u, v+t) - \vec{r}(u, v) &= \vec{r}'_v \cdot t + \bar{o}(t), \quad t \rightarrow 0 \end{aligned}$$

При определении площади поверхности образы промежутков  $I_j$  будем заменять прямолинейными параллелограммами, построенными на векторах  $\vec{r}'_u \cdot h$ ,  $\vec{r}'_v \cdot t$ . Обозначим площадь этого параллелограмма  $\Delta\delta_i$ , получаем:

$$\Delta\delta_i = |[\vec{r}'_u \cdot h, \vec{r}'_v \cdot t]| = |[\vec{r}'_u, \vec{r}'_v]|ht = |[\vec{r}'_u, \vec{r}'_v]|_{\mu_j}|I_j|, \quad \mu_j = (u_j, v_j)$$

Наряду с поверхностью  $S$  рассмотрим чешуйчатую поверхность, составленную из всех параллелограммов, построенных для каждого прямоугольника  $I_j$ , ( $j = 1, \dots, k$ ) на соответствующих ему векторах  $\vec{r}'_u, \vec{r}'_v$ . Ее площадь равна:

$$\sum_{j=1}^k |[\vec{r}'_u, \vec{r}'_v]|_{\mu_j}|I_j|$$

которую можно считать приближенным значением поверхности  $S$ , при чем все более точным при  $\lambda(T) \rightarrow 0$ . Таким образом мы принимаем определение (7.3.1).

**Определение 7.3.1.** Площадью  $\mu_2(S)$  поверхности  $S$  называется величина:

$$\mu_2(S) := \iint_{\mathbb{D}} |[\vec{r}'_u, \vec{r}'_v]| dudv \quad (7.3.2)$$

**Лемма 7.3.1** (тождество Лагранжа). Для любых двух векторов:

$$|[\vec{a}, \vec{b}]|^2 = \det \begin{pmatrix} (\vec{a}, \vec{a}) & (\vec{a}, \vec{b}) \\ (\vec{b}, \vec{a}) & (\vec{b}, \vec{b}) \end{pmatrix} = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a}, \vec{b})^2$$

называется тождеством Лагранжа.

*Доказательство.* Для доказательства достаточно:  $|[\vec{a}, \vec{b}]| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \widehat{\vec{a}\vec{b}}$   $(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \widehat{\vec{a}\vec{b}}$   
Детерминант в лемме называется детерминантом Грама векторов  $\vec{a}, \vec{b}$ .  $\square$

Введем обозначение:

$$\begin{aligned} E &= g_{11} = |(\vec{r}'_u, \vec{r}'_u)| \\ F &= g_{12} = g_{21} = |(\vec{r}'_u, \vec{r}'_v)| \\ G &= g_{22} = |(\vec{r}'_v, \vec{r}'_v)| \end{aligned} \quad (7.3.3)$$

Из леммы  $\vec{a} = \vec{r}'_u$ ,  $\vec{b} = \vec{r}'_v$ . Из леммы  $|[\vec{r}'_u, \vec{r}'_v]| = EGF^2 = \det(g_{ij})$ , поэтому формула (7.3.2) примет вид:

$$\mu_2(S) = \iint_{\mathbb{D}} \sqrt{EG - F^2} dudv \equiv \iint \sqrt{\det(g_{ij})} dudv \quad (7.3.4)$$

в частности, если  $S$  — график функции  $z = f(x, y)$ ,  $(x, y) \in \mathbb{D}$ , то  $u = x$ ,  $v = y$ ,  $\vec{r} = \{x, y, f(x, y)\}$  и следовательно  $\vec{r}'_u = \{1, 0, f'_x\}$ ,  $\vec{r}'_v = \{-1, 1, f'_y\}$ . Тогда получим:

$$\begin{aligned} \det(g_{ij}) &= \det \begin{pmatrix} 1 + f'^2_x & f'_x \cdot f'_y \\ f'_x \cdot f'_y & 1 + f'^2_y \end{pmatrix} = 1 + f'^2_x + f'^2_y \\ \mu_2(S) &= \iint_{\mathbb{D}} \sqrt{1 + f'^2_x + f'^2_y} dxdy \end{aligned}$$

*Замечание 7.3.1.* Используя формулу замены переменного в двойном интеграле не трудно доказать, что определение (7.3.1) площади поверхности не зависит от выбора ее представления.

## § 7.4. Ориентация поверхности в $\mathbb{R}^3$

Рассмотрим  $\mathbb{R}^3$ , то есть  $Oxyz$ . Пусть  $S$  — гладкая поверхность

$$\vec{r} = \vec{r}(u, v) : (u, v) \in \mathbb{D} \quad (7.4.1)$$

ее векторное представление.

$$\vec{\nu} = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}, \vec{n} = [\vec{r}'_u, \vec{r}'_v] \quad (7.4.2)$$

$\vec{\nu}$  — ее единичная нормаль. Поскольку представление  $(u, v)$  непрерывно дифференцируемо, то вектор  $\vec{\nu}$  (так же как и вектор  $-\vec{\nu}$ ) является непрерывной функцией на  $\mathbb{D}$ .

**Определение 7.4.1.** Всякая непрерывная на  $\bar{\mathbb{D}}$  единичная нормаль  $\vec{\nu} = \vec{\nu}(u, v)$  гладкой поверхности  $S$  называется ориентацией поверхности  $S$ , если  $\vec{\nu}$  является так же однозначной непрерывной функцией переменных точки  $\mu(x, y, z) = \vec{r}(u, v)$  на самой поверхности  $S$ . В этом случае поверхность  $S$  называется ориентированной (или двусторонней), в противном случае неориентированной (односторонней). Поверхность у которой фиксированна одна из ориентаций, называется ориентированной стороной поверхности.

Очевидно, что поверхность может иметь только две ориентации, который называют противоположными, одна положительная, другая отрицательная.  $\mu(x, y, z) = \vec{r}(u, v)$ . Примером ориентации поверхности является всякая простая гладкая поверхность. Ориентированной является и сфера (хотя сфера и не является простой поверхностью). Примером неориентированной поверхности является лента Мебиуса, непрерывная поверхность в определении нарушается.

Пусть гладкая ориентированная поверхность  $S$  с представлением  $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$ ,  $(u, v) \in \bar{\mathbb{D}}$ , ориентирована нормалью  $\vec{\nu} = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$ , где  $\vec{n} = [\vec{r}'_u, \vec{r}'_v]$ . И пусть граница  $\partial\mathbb{D}$  в области  $\mathbb{D}$  является непрерывной кривой, ориентированной положительно:

$$\partial\mathbb{D} = \{u(t), v(t) : a \leq t \leq b\}$$

Очевидно, что эта ориентация порождает определенную ориентацию края  $\partial S = \{\vec{r} = \vec{r}(u(t), v(t)) : a \leq t \leq b\}$ .

**Определение 7.4.2.** Указанная выше ориентация края  $\partial S$  поверхности  $S$  называется согласованной с ориентацией  $\vec{\nu}$  поверхности  $S$ . Для простой поверхности, в частности для графика  $z = f(x, y)$  вектор нормали  $\vec{\nu}(-\vec{\nu})$  согласован с положительной (отрицательной) ориентацией кривой  $\partial S$  по правилу штопора.

Ориентация контура  $\partial S$  соответствует направлению вращения ручки штопора, а направлению нормали соответствует движение штопора.

**Определение 7.4.3.** Кусочно-гладкая поверхность  $S = S_1 \cap S_2 \cap \dots \cap S_k$  называется ориентированной, если ее можно представить как результат такой склейки гладких поверхностей  $S_i, i = 1, \dots, k$ , при которой общие части краев  $\partial S_i$  поверхности  $S_i$  принадлежат не более, чем двум этим поверхностям и проходят в противоположных направлениях, при ориентации краев  $\partial S_i$ , согласованных по правилу штопора с ориентациями указанных двух поверхностей. Объединение краев  $\partial S_i$ , принадлежащих одному такому краю, называется краем поверхности  $S$ .

Примерами кусочно-гладких ориентированных (двусторонних) поверхностей являются поверхности параллелепипедов, цилиндров.

Можно показать, что определение (7.4.3) в важном частном случае совпадает со следующим определением.

**Определение 7.4.4.** Если кусочно-гладкая поверхность  $S$  является границей области  $\mathbb{G} \subset \mathbb{R}^3$ , то единичная нормаль  $\vec{\nu}$  к этой поверхности (там где она существует), направленная внутрь области называется внутренней нормалью (относительно области  $\mathbb{G}$ ), а противоположная нормаль  $-\vec{\nu}$  — внешней нормалью. Эти нормали называются ориентациями границы  $\partial\mathbb{G}$  области  $\mathbb{G}$ .

## § 7.5. Определение поверхностного интеграла первого рода

Пусть  $S = \{\vec{r}(u, v) : (u, v) \in \bar{\mathbb{D}}\}$  — гладкая поверхность,  $\mathbb{D}$  — квадратируемая область.  $F$  — функция, заданная на поверхности  $S$ , то есть  $F = F(\vec{r}(u, v)) = F(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ ,  $(u, v) \in \bar{\mathbb{D}}$ .



**Определение 7.5.1.** Интеграл первого рода  $\iint_S \mathcal{F} dS$  по поверхности  $S$  называется интеграл:

$$\iint_S \mathcal{F}(x, y, z) dS := \iint_D \mathcal{F}(\vec{r}(u, v)) \sqrt{EG - F^2} du dv \quad (7.5.1)$$

Если функция  $\mathcal{F}$  — непрерывная на поверхности  $S$ , то интеграл (7.5.1) безусловно существует.

*Пример 7.5.1.* Функция  $\mathcal{F} \equiv 1$  на поверхности  $S$ , тогда получаем:

$$\iint_S dS = \iint_{\mathbb{D}} \sqrt{EG - F^2} du dv = \mu_2(S)$$

*Пример 7.5.2.* Если поверхность  $S$  задана явно,  $z = f(x, y)$ ,  $(x, y) \in \bar{\mathbb{D}}$ , то:

$$\iint_S \mathcal{F}(x, y, z) dS = \iint_{\mathbb{D}} \mathcal{F}(x, y, f(x, y)) \sqrt{1 + f_x'^2 + f_y'^2} dx dy$$

**Определение 7.5.2.** Поверхностный интеграл первого рода по кусочно-гладкой поверхности определяется как сумма интегралов по ее гладким частям.

## § 7.6. Поверхностный интеграл второго рода

Пусть  $\vec{\nu} = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$  — непрерывная еденичная нормаль на ориентированной гладкой поверхности  $S$ , представление которой задано в квадратируемой области. Ориентированную с помощью этой нормали поверхность обозначим через  $S^+$ . Пусть  $\vec{a} = \vec{a}(x, y, z) = \{P, Q, R\}$  — векторная функция заданная на поверхности  $S$  (так что  $(P, Q, R)$  — числовые функции на поверхности  $S$ ).

**Определение 7.6.1.** Поверхностным интегралом второго рода по ориентированной поверхности  $S^+$  называется интеграл:  $\iint_{S^+} \vec{a} d\vec{S} := \iint_S (\vec{a}, \vec{\nu}) dS$ . Для интегралов  $\iint_S \vec{a} d\vec{S}$  используется также обозначение:

$$\iint_{S^+} P dy dz + Q dx dz + R dx dy \quad (7.6.1)$$

таким образом получим:

$$\iint_{S^+} P dy dz + Q dx dz + R dx dy = \iint_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS \quad (7.6.2)$$

Для случая, когда поочередно две функции из  $P, Q, R$  тождественно равны нулю, очевидны интегралы:

$$\begin{aligned} \iint_{S^+} P dy dz &:= \iint_S P \cos \alpha dS \\ \iint_{S^+} Q dx dz &:= \iint_S Q \cos \beta dS \\ \iint_{S^+} R dx dy &:= \iint_S R \cos \gamma dS \end{aligned} \quad (7.6.3)$$

Выражение (7.6.1) теперь можно рассматривать как сумму трех только что определенных интегралов.

Следующие утверждения очевидны:

1.  $\vec{a}$  непрерывен на поверхности  $S$ , то  $\iint_{S^+} \vec{a} d\vec{S}$  существует.
2. Если ориентированную с помощью вектора  $-\vec{\nu}$  поверхность  $S$  обозначить через  $S^-$ , то:

$$\iint_{S^-} \vec{a} d\vec{S} = - \iint_{S^+} \vec{a} d\vec{S}$$

**Теорема 7.6.1.** Пусть  $S = \{\vec{r}(u, v), (u, v) \in \mathbb{D}\}$  — гладкая поверхность,  $S^+$  — поверхность  $S$ , ориентированная с помощью вектора  $\vec{\nu} = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$ , где  $\vec{n} = [\vec{r}'_u, \vec{r}'_v]$ , тогда поверхностный интеграл второго рода:

$$\iint_{S^+} \vec{a} d\vec{S} = \iint_{\mathbb{D}} \langle \vec{a}, \vec{r}'_u, \vec{r}'_v \rangle dudv = \iint_{\mathbb{D}} \begin{vmatrix} P & Q & R \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix} dudv \quad (7.6.4)$$

где  $P = P(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ ,  $Q = Q(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ ,  $R = R(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ ,  $\vec{r}'_u = \{x'_u, y'_u, z'_u\}$ ,  $\vec{r}'_v = \{x'_v, y'_v, z'_v\}$ . В частности, полагая поочередно равенство двух функций и  $P, Q, R$  нулю, найдем интегралы (7.6.3).

*Доказательство.*

$$\iint_{S^+} \vec{a} d\vec{S} := \iint_S (\vec{a}, \vec{\nu}) dS = \iint_{\mathbb{D}} \left( \vec{a}, \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} \right) |\vec{n}| dudv = \iint_{\mathbb{D}} \langle \vec{a}, \vec{r}'_u, \vec{r}'_v \rangle dudv$$

□

**Пример 7.6.1.** Поверхность  $S$  имеет явное представление:  $z = f(x, y)$ ,  $(x, y) \in \mathbb{D}$ . Тогда  $x = u, y = v, z = f(u, v)$ ,  $(u, v) \in \mathbb{D}$  — ее параметрическое представление:

$$\begin{vmatrix} P & Q & R \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & f'_u \\ 0 & 1 & f'_v \end{vmatrix} = \{-f'_u, -f'_v, 1\} \quad (7.6.5)$$

Поэтому, если  $\vec{a} = \{0, 0, R\}$ , то  $\langle \vec{a}, \vec{r}'_u, \vec{r}'_v \rangle = (\vec{a}, \vec{n}) = R$ . Отсюда из формулы (7.6.4) получаем:

$$\iint_{S^+} R dx dy := \iint_{S^+} \vec{a} d\vec{S} = \iint_{\mathbb{D}} R(x, y, f(x, y)) dx dy \quad (7.6.6)$$

**Замечание 7.6.1.** Поскольку в примере (7.6.1) проекция вектора  $\vec{n}$  на вектор  $\vec{k}$  равна единице, то  $\cos \gamma = \text{Pr}_{\vec{k}} \vec{\nu} > 0$ .  $\vec{\nu}$  образует угол с осью  $Oz$ , то есть направлен вверх от поверхности  $S$ , поэтому поверхность  $S^+$  называют верхней стороной  $S$ , а противоположно ориентированную поверхность  $S^-$  — нижней стороной.

**Пример 7.6.2.** Пусть  $S_0$  — цилиндрическая поверхность, направляющей которой является некоторая гладкая кривая, лежащая в плоскости  $Oxy$ , а образующая параллельная оси  $Oz$ .  $S_0^+$  — поверхность  $S_0$ , ориентированная непрерывной нормалью  $\vec{\nu}$ , тогда  $\cos \gamma = \text{Pr}_{Oz} \vec{\nu} = 0$  и

$$\iint_{S_0} R dx dy = \iint_{S_0} R \cos \gamma dS = 0 \quad (7.6.7)$$

**Определение 7.6.2.** Поверхностный интеграл второго рода по кусочно-гладкой ориентированной поверхности  $S$  определим как сумму интегралов второго рода по гладким частям, составим эту поверхность, при условии, что ориентация каждой из этих частей совпадает с выбранной ориентацией поверхности.

# Глава 8

## Элементы векторного анализа и теории поля

### § 8.1. Определения

Вместо терминов числовая функция в точке и вектор-функции точки будем употреблять такие равнозначные к ним понятия: скалярное поле и векторное поле (тем самым подчеркивается, что значение функции не зависит от выбора системы координат).

**Определение 8.1.1.** Пусть в области  $\mathbb{G}$  задана  $\vec{a} = \vec{a}(M)$  и существует  $u = u(M)$ ,  $M \in \mathbb{G}$ , такая что

$$\vec{a}(M) = \text{grad } u(M) \quad (8.1.1)$$

Тогда функция  $u(M)$  называется потенциалом поля  $\vec{a}$ . Поле обладающее потенциалом называется потенциальным полем.

Введем  $\nabla = \{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\}$  (оператор Набла). Тогда  $\nabla U = \{\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}\}$  и равенство (8.1.1) можно записать в виде  $\vec{a}(M) = \nabla U$ .

**Определение 8.1.2.** Пусть поле  $\vec{a} = \{P, Q, R\}$  дифференцируемо в области  $\mathbb{G}$ , числовая функция

$$\text{div } \vec{a} = (\nabla, \vec{a}) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

называется дивергенцией поля  $\vec{a}$  в области  $\mathbb{G}$ . Векторная функция

$$\text{rot } \vec{a} = [\vec{\nabla}, \vec{a}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left\{ \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right\}$$

называется ротором или вихрем поля  $\vec{a}$ .

**Определение 8.1.3.** Если векторное поле  $\vec{a}$  задано на кусочно-гладкой замкнутой кривой  $\Gamma$ , то

$$\oint_{\Gamma} \vec{a} d\vec{r}$$

называется циркуляцией векторного поля  $\vec{a}$  по кривой  $\Gamma$ .

**Определение 8.1.4.** Если кусочно-гладкая поверхность  $S$  ориентирована с помощью единичной нормали  $\vec{\nu}$ , то для векторного поля  $\vec{a}$ , заданного на поверхности  $S$ :

$$\iint_S (\vec{a}, \vec{\nu}) dS$$

называется потоком векторного поля, через поверхность  $S$ .

## § 8.2. Формула Гаусса-Остроградского

**Теорема 8.2.1.** Пусть  $\mathbb{G}$  — ограниченная область  $\subset \mathbb{R}_{xyz}^3$  с кусочно-гладкой границей  $\partial\mathbb{G}$ ,  $P, Q, R$  — функции, непрерывные вместе со своими частными производными:  $\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial z}$ ,  $(x, y, z) \in \overline{\mathbb{G}}$ .  $\vec{a} = \{P, Q, R\}$ , тогда

$$\iiint_{\mathbb{G}} \operatorname{div} \vec{a} dx dy dz = \iint_{\partial\mathbb{G}} (\vec{a}, \vec{\nu}) dS \quad (8.2.1)$$

где  $\vec{\nu}$  — единичная нормаль к  $\partial\mathbb{G}$ , внешняя относительно области  $\mathbb{G}$ . То есть поток векторного поля через границу области равен интегралу от дивергенции поля по самой области. (8.2.1) называется формулой Остроградского-Гаусса.

$$\iiint_{\mathbb{G}} \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz = \iint_{\partial\mathbb{G}^+} P dy dz + Q dx dz + R dx dy \quad (8.2.2)$$

где  $\partial\mathbb{G}^+$  ориентирована внешней нормалью  $\vec{\nu}$ .

*Доказательство.*  $\mathbb{R}^3$

**Определение 8.2.1.**  $\mathbb{G} \subset \mathbb{R}^3$ ,  $\mathbb{G}_z, S_0$  с образующими параллельными оси  $Oz$ ,  $S_1, S_2, \varphi, \psi$ ,  $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^2$  с кусочно-гладкой границей  $\partial\mathbb{D}$ .  $\mathbb{G}_z = \{(x, y, z) : (x, y) \in \mathbb{D}, \varphi(x, y) < z < \psi(x, y)\}$ . Аналогично определяются области  $\mathbb{G}_y$  и  $\mathbb{G}_x$ , цилиндрической поверхности, образующие которой параллельны  $Oy$  и  $Ox$ . Простой областью называется область, допускающая разбиение на области каждого из типов:  $\mathbb{G}_x, \mathbb{G}_y, \mathbb{G}_z$ .

□

**Лемма 8.2.1.** Пусть в теореме (8.2.1)  $\mathbb{G}$  — область типа  $\mathbb{G}_z$ , тогда

$$\iiint_{\mathbb{G}} \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz = \iint_{\partial\mathbb{G}^+} R dx dy \quad (8.2.3)$$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} \iiint_{\mathbb{G}} \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz &= \iint_{\mathbb{D}} dx dy \int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz = \iint_{\mathbb{D}} (R(x, y, \psi(x, y)) - R(x, y, \varphi(x, y))) dx dy = \\ &= \iint_{\mathbb{D}} R(x, y, \psi(x, y)) dx dy - \iint_{\mathbb{D}} R(x, y, \varphi(x, y)) dx dy \stackrel{(7.6.6)}{=} \iint_{S_2^+} R dx dy + \iint_{S_1^-} R dx dy \end{aligned} \quad (8.2.4)$$

где  $S_2^+$  — верхняя сторона поверхности  $S_2$ , а  $S_1^-$  — нижняя сторона поверхности  $S_1$ .

Поскольку двойной  $\iint_{S_0^+} R dx dy = 0$  (см. (7.6.7)),  $\partial\mathbb{G} = S_1 \cup S_2 \cup S_0$ , то согласно (7.6.2) из (8.2.4)

получаем (8.2.3). □

**Лемма 8.2.2.** Если область  $\mathbb{G}$  можно разбить на конечное число областей типа  $\mathbb{G}_z$ , то выполняется (8.2.3).

*Доказательство.* Очевидно, что на поверхности, по которой прилигают две такие области, индуцируются противоположные ориентации, поэтому при положительном интегрировании по границе, произойдут взаимные уничтожения, в результате которых останется лишь интеграл  $\partial\mathbb{G}^+$  исходной области  $\mathbb{G}$ .  $\square$

Если область  $\mathbb{G}$  можно разложить на области типа  $\mathbb{G}_y, \mathbb{G}_x$ , то соответственно имеют место соотношения:

$$\iiint_{\mathbb{G}} \frac{\partial Q}{\partial y} dx dy dz = \iint_{\mathbb{G}^+} Q dx dz \quad (8.2.5)$$

$$\iiint_{\mathbb{G}} \frac{\partial Q}{\partial x} dy dz dx = \iint_{\mathbb{G}^+} Q dy dz \quad (8.2.6)$$

если область  $\mathbb{G}$  простая, то складывая (8.2.3), (8.2.5) и (8.2.6). Получим для области  $\mathbb{G}$  равенство (8.2.2).

### § 8.3. Формула Стокса

**Теорема 8.3.1.**  $\vec{a}$  непрерывно дифференцируемая вектор-функция в области  $\mathbb{G}$ , содержащей ориентированную кусочно-гладкую поверхность  $S = S_1 \cup \dots \cup S_k$ ,  $S_1, \dots, S_k$  — гладкие куски поверхности и пусть  $\partial S$  — ее край с ориентацией, согласованной с заданной ориентацией поверхности  $S$ , тогда:

$$\int_{\partial S} \vec{a} d\vec{r} = \iint_S \text{rot } \vec{a} d\vec{S} \quad (8.3.1)$$

таким образом циркуляция векторного поля на границе поверхности равна потоку поля через поверхность. Наглядное согласование ориентации  $\partial S$  с ориентацией поверхности означает следующие: наблюдатель, двигающийся по краю  $\partial S$  (этот край может состоять из нескольких контуров), и, смотрящий из конца нормали  $\vec{\nu}$ , видит непосредственно прилегающую к нему часть поверхности слева от себя ( $\vec{\nu}$  — определяет ориентацию того куска  $S_i$ , на котором в данный момент находится наблюдатель). Формула (8.3.1) называется формулой Стокса. Если  $S \subset \mathbb{R}^2$ , то получаем формулу Грина.

*Доказательство.* Очевидно, достаточно провести доказательство для гладкой поверхности, так как написав формулу Стокса для каждой поверхности  $S_i$  ( $i = 1, \dots, k$ ), и положив получившиеся равенства получим формулу (8.3.1).

Чтобы доказательство упростить проведем его с дополнительными условиями на гладкой поверхности  $S : S = \{\vec{r}(u, v) : (u, v) \in \mathbb{D}\}$  — дважды непрерывно дифференцируемая ориентированная поверхность, без особых точек в пространстве  $\mathbb{R}_{xyz}^3$ ,  $\mathbb{D}$  — плоская ограниченная область у которой область  $\partial\mathbb{D}$  — есть простой кусочно-гладкий контур. Пусть  $u = u(t), v = v(t)$ ,  $t \in [a, b]$  — параметрическое представление контуров  $\partial\mathbb{D}^+, \partial S$  — край поверхности  $S$  с представлением:  $\vec{r} = \vec{r}(u(t), v(t))$ ,  $a \leq t \leq b$ ,  $S^+$  — поверхность  $S$ , ориентированная нормалью  $\vec{\nu} = \frac{(\vec{r}'_u, \vec{r}'_v)}{|\vec{r}'_u, \vec{r}'_v|} = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$ .

Поскольку  $(\text{rot } \vec{a}, \vec{\nu}) = (\vec{\nu}, [\nabla, \vec{a}]) = \begin{vmatrix} \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$ , то в координатной записи формула

(8.3.1) примет вид:

$$\int_{\partial S} Pdx + Qdy + Rdz = \iint_{S^+} \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dydz + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dx dz + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \quad (8.3.2)$$

поэтому достаточно проверить, что:

$$\begin{aligned} \int_{\partial S} Pdx &= \iint_{S^+} \frac{\partial P}{\partial z} dx dz - \frac{\partial P}{\partial y} dx dy \\ \int_{\partial S} Qdy &= \iint_{S^+} \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy - \frac{\partial Q}{\partial z} dy dz \\ \int_{\partial S} Rdz &= \iint_{S^+} \frac{\partial R}{\partial y} dy dz - \frac{\partial R}{\partial x} dx dz \end{aligned}$$

сложив эти формулы, получим формулу (8.3.2). Проверим пример формулы:

$$\begin{aligned} \int_{\partial S} P(x, y, z) dx &= \int_a^b P(\vec{r}(u(t), v(t)) \cdot x'_t(u(t), v(t)) dt = \int_a^b P(\vec{r}(u(t), v(t))) \left( \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial t} \right) dt = \\ &= \int_{\partial \mathbb{D}^+} P(\vec{r}(u, v)) \frac{\partial x}{\partial u} du + P(\vec{r}(u, v)) \frac{\partial x}{\partial v} dv = \iint_{\mathbb{D}} \left[ \frac{\partial}{\partial u} \left( P \frac{\partial x}{\partial v} \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left( P \frac{\partial x}{\partial u} \right) \right] dudv = \\ &= \iint_{\mathbb{D}} \left[ \left( \frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial u} \right) \frac{\partial x}{\partial v} + P \frac{\partial^2 x}{\partial v \partial u} - \left( \frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial v} \right) \frac{\partial x}{\partial u} - P \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} \right] dudv = \\ &= \iint_{\mathbb{D}} \left[ \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\mathbb{D}(z, x)}{\mathbb{D}(u, v)} - \frac{\partial P}{\partial y} \frac{\mathbb{D}(x, y)}{\mathbb{D}(u, v)} \right] dudv = \iint_{S^+} \frac{\partial P}{\partial z} dx dz - \iint_{S^+} \frac{\partial P}{\partial y} dx dy \end{aligned}$$

□

## § 8.4. Инвариантность понятий дивергенция и ротор

Далее  $\vec{a} = \vec{a}(M)$ ,  $M \in \mathbb{G}$  — непрерывно дифференцируемое векторное поле в трехмерной области  $\mathbb{G}$ .

**Теорема 8.4.1.** Пусть  $\mathbb{V} \subset \mathbb{G}$  — окрестность (например шаровая).  $|\mathbb{V}|$  — ее объем.  $d$  — диаметр, тогда:

$$\operatorname{div} \vec{a}(M_0) = \lim_{d \rightarrow 0} \frac{\int_{\partial \mathbb{V}} (\vec{a}, \vec{\nu}) dS}{|\mathbb{V}|} \quad (8.4.1)$$

$\vec{\nu}$  — внешняя нормаль к границе  $\partial \mathbb{V}$  области  $\mathbb{V}$ .

*Доказательство.* Используя формулу Остроградского-Гаусса и теорему о среднем получим:

$$|\mathbb{V}| \cdot \operatorname{div} \vec{a}(M') = \iint_{\partial \mathbb{V}} (\vec{a}, \vec{\nu}) dS \quad (8.4.2)$$

где  $M' \in \mathbb{V}$ . При  $d \rightarrow 0$ :  $M' \rightarrow M_0$ ,  $\operatorname{div} M' \rightarrow \operatorname{div} M_0$ . Отсюда из (8.4.2) следует (8.4.1). □

Правая часть формулы (8.4.1) не зависит от выбора координат. Поэтому  $\operatorname{div} \vec{a}$  инвариантна.

Если считать  $\vec{a}$  полем скоростей течения жидкости или газа, то дивергенцию можно интерпретировать как плотность распределения источников в плотности течения.

**Теорема 8.4.2.** Пусть  $M_0 \in \mathbb{G}$ ,  $\vec{\nu}$  — произвольный фиксированный единичный вектор  $\Pi$  — плоскость, проходящая через точку  $M_0$  перпендикулярно  $\vec{\nu}$ .  $S$  — окрестность (например круговая) точки  $M_0$  плоскости  $\Pi$  ( $S \subset \Pi \cap \mathbb{G}$ ),  $|S|$  — ее площадь,  $d$  — ее диаметр. И пусть контур  $\vec{S}$  согласованно ориентирован с нормалью  $\vec{\nu}$ . Тогда:

$$(\operatorname{rot} \vec{a}(M_0), \vec{\nu}) = \lim_{d \rightarrow 0} \frac{\int_{\vec{S}} \vec{a} d\vec{r}}{|S|} \quad (8.4.3)$$

*Доказательство.* Из формулы Стокса и теоремы о среднем получим:

$$|S| \cdot (\operatorname{rot} \vec{a}(M'), \vec{\nu}) = \int_{\vec{S}} \vec{a} d\vec{r}, \quad M' \in S \quad (8.4.4)$$

если  $d \rightarrow 0$ , то  $M' \rightarrow M_0$ ,  $(\operatorname{rot} \vec{a}(M'), \vec{\nu}) \rightarrow (\operatorname{rot} \vec{a}(M_0), \vec{\nu})$ . Отсюда из (8.4.4) получаем (8.4.3).  $\square$

Правая часть равенства (8.4.3) не зависит от выбора системы координат. Выбрав в качестве  $\vec{\nu}$  три линейно независимых вектора получим по формуле (8.4.3) три проекции  $\operatorname{rot} \vec{a}$  на эти векторы. Этими своими проекциями ротор однозначно определяется. Поскольку они не зависят от выбора системы координат, следовательно  $\operatorname{rot} \vec{a}$  не зависит от системы координат.

## § 8.5. Потенциальные векторные поля

Поверхность  $S$ , для которой

**Определение 8.5.1.** Множество  $\mathbb{E} \subset \mathbb{R}^3$  называется односвязанным, если для любого кусочно-гладкого замкнутого контура, принадлежащего  $\mathbb{E}$ , существует допустимая поверхность, краем которой он являлся и которая так же лежит в  $\mathbb{E}$ .

Если  $\mathbb{E}$  — плоская область  $\mathbb{G} \subset \mathbb{R}^2$ , то определение (8.5.1) равносильно условию: для любого кусочно-гладкого контура, ограниченная им область  $\mathbb{D}$  содержится в  $\mathbb{G}$  (то есть односвязная плоская область не имеет дыр).

В пространстве примером односвязных областей являются выпуклые области, множество точек лежащих между двумя коцентрическими сферами.

**Теорема 8.5.1.** Пусть в односвязной области  $\mathbb{G} \subset \mathbb{R}^3$  задано непрерывно дифференцируемое векторное поле  $\vec{a} = \{P, Q, R\}$ , тогда эквивалентны следующие пять свойств:

1.  $\vec{a} = \vec{a}(M)$  — потенциальна в  $\mathbb{G}$
2.  $Pdx + Qdy + Rdz$  является в  $\mathbb{G}$  полным дифференциалом некоторой функции  $u = u(M)$ , которая и является потенциалом поля  $\vec{a}$
3. Для любой точки  $A \in \mathbb{G}$  и  $B \in \mathbb{G}$   $\int_{\widehat{AB}} \vec{a} d\vec{r}$  не зависит от кривой  $\widehat{AB}$ , соединяющей эти точки в области  $\mathbb{G}$  (предполагается, что  $\widehat{AB}$  — простая кусочно-гладкая кривая)

4.  $\int \vec{a} d\vec{r} = 0$  для любого кусочно-гладкого контура  $\Gamma \subset \mathbb{G}$

5.  $\text{rot } \vec{a} = 0$  в области  $\mathbb{G}$

Доказательство. 1. Из 2 следует 1.

Пусть в  $\mathbb{G}$  существует функция  $U(M) = U(x, y, z) : dU = Pdx + Qdy + Rdz$ . Тогда  $P = \frac{\partial U}{\partial x}, Q = \frac{\partial U}{\partial y}, R = \frac{\partial U}{\partial z}$ , так что  $\vec{a} = \text{grad } U$ .

2. Из 1 следует 5.

Пусть  $\vec{a} = \text{grad } U = \nabla U$ , тогда  $\text{rot } \vec{a} = [\nabla, \vec{a}] = [\nabla, \nabla U] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial U}{\partial x} & \frac{\partial U}{\partial y} & \frac{\partial U}{\partial z} \end{vmatrix} = 0$ . Равенство смешанных производных обеспечено непрерывной дифференцируемостью функции  $P, Q, R$ .

3. Из 5 следует 4.

Пусть  $\text{rot } \vec{a} = 0$  в области  $\mathbb{G}$ . В силу односвязности области  $\mathbb{G}$  существует допустимая поверхность  $S \subset \mathbb{G}$  для которой  $\Gamma$  является краем. Тогда по теореме Стокса:

$$\int_{\Gamma} \vec{a} d\vec{r} = \iint_S \text{rot } \vec{a} d\vec{S} = 0$$

4. Из 4 следует 3.

Пусть  $\int_{\Gamma} \vec{a} d\vec{r} = 0, \forall \Gamma \in \mathbb{G}$  (кусочно-гладкой).  $A \in \mathbb{G}, B \in \mathbb{G}, (\widehat{AB})_1, (\widehat{AB})_2$  — кусочно-гладкие простые кривые, соединяющие в  $\mathbb{G}$  точки  $A, B$ . Если эти кривые не имеют общих точек, то кривая  $\Gamma := (\widehat{AB})_1 \cup (\widehat{AB})_2$  является простым кусочно-гладким контуром, лежащим в  $\mathbb{G}$ , тогда:

$$\oint_{\Gamma} = \int_{(\widehat{AB})_1} - \int_{(\widehat{AB})_2} = 0 \implies \int_{(\widehat{AB})_1} = \int_{(\widehat{AB})_2}$$

если же  $(\widehat{AB})_1 \cap (\widehat{AB})_2 \neq \emptyset$ , то в области  $\mathbb{G}$  нужна третья кривая  $(\widehat{AB})_3$ , которая не пересекается ни с одной из прежних. Тогда по доказанному:  $\int_{(\widehat{AB})_1} = \int_{(\widehat{AB})_2} = \int_{(\widehat{AB})_3}$

5. из 3 следует 2.

Зафиксируем какую-либо точку  $M_0 \in \mathbb{G}$  и определим функцию  $U(M)$  по формуле:

$$U(M) = \int_{\widehat{M_0 M}} \vec{a} d\vec{r} = \int_{\widehat{M_0 M}} Pdx + Qdy + Rdz, \quad M \in \mathbb{G} \quad (8.5.1)$$

где  $\widehat{M_0 M}$  — какая-либо простая кусочно-гладкая кривая, соединяющая в  $\mathbb{G}$  точки  $M_0$  и  $M$ . Формула (8.5.1) в силу свойства 3 определяет функцию  $U(M)$  однозначно. Покажем что:

$$dU = Pdx + Qdy + Rdz \quad (8.5.2)$$



в любой точке  $M(x, y, z) \in \mathbb{G}$ . Пусть  $M'(x+h, y, z) \in \mathbb{G}$ ,  $\widehat{MM'}$  — отрезок с концами  $M$  и  $M'$ . Тогда:

$$U(M') - U(M) = \int_{\widehat{MM'}} Pdx + Qdy + Rdz = \int_x^{x+h} P(t, y, z)dt$$

откуда получаем:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{U(x+h, y, z) - U(x, y, z)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} P(t, y, z)dt = P(x, y, z)$$

Аналогично получим  $\frac{\partial U}{\partial y} = Q$ ,  $\frac{\partial U}{\partial z} = R$ . Поскольку функции  $P, Q, R$  непрерывны, то функция  $U(M)$  дифференцируема и равенство (8.5.2) доказано.  $\square$

*Замечание 8.5.1.* Потенциал  $U(M)$  поля  $\vec{a}$  определен с точностью до аддитивной постоянной. Из формулы (8.5.1) следует, что потенциальное поле  $\vec{a} : \int \vec{a} d\vec{r} = U(B) - U(A)$ .

*Замечание 8.5.2.* Линиями потенциала называют  $U, \vec{F} = -\text{grad } U$ .

## § 8.6. Соленоидальные векторные поля

**Определение 8.6.1.** Непрерывная в области  $\mathbb{G} \subset \mathbb{R}^3$  векторное поле  $\vec{a}$  называется соленоидальным, если для любой ограниченной области  $\mathbb{V} \subset \mathbb{G}$  с кусочно-гладкой границей  $\partial\mathbb{V} \subset \mathbb{G}$  его поток через эту границу равен 0. Очевидно, что понятия соленоидальности не зависит от выбора ориентации на границе  $\partial\mathbb{V}$  области  $\mathbb{V}$ .

**Теорема 8.6.1.** Для того, чтобы непрерывно дифференцируемое векторное поле  $\vec{a}$  было соленоидальным в области  $\mathbb{G}$  необходимо и достаточно, чтобы на всех точках области выполнялось равенство:

$$\text{div } \vec{a} = 0 \quad (8.6.1)$$

*Доказательство. Необходимость.* Пусть  $\vec{a}$  соленоидально в  $\mathbb{G}$ ,  $M \in \mathbb{G}$ ,  $r_0 \in \mathbb{G}$ . Тогда  $r_0 > 0$ ,  $\forall r : r < r_0$  и с центром в точке  $M$  содержится в  $\mathbb{G}$ . Для этих шаров:

$$\begin{aligned} \iint_{\partial\mathbb{V}_r} \vec{a} d\vec{S} &= 0 \\ \text{div } \vec{a}(M) &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\iint_{\partial\mathbb{V}_r} \vec{a} d\vec{S}}{|\mathbb{V}_r|} = 0 \end{aligned}$$

*Достаточность.* Если выполнено (8.6.1), то в силу формулы Остроградского-Гаусса: для любого  $\mathbb{V} \subset \mathbb{G}$  с кусочно-гладкой границей  $\partial\mathbb{V}$  имеем:

$$\iint_{\partial\mathbb{V}_r} \vec{a} d\vec{S} = \iiint_{\mathbb{V}} \text{div } \vec{a} dx dy dz = 0$$

$\square$

*Пример 8.6.1.* Если  $\vec{b}$  — дважды непрерывно дифференцируемое в области  $\mathbb{G}$  поле, то  $\text{rot } \vec{b}$  является соленоидальным в области  $\mathbb{G}$  полем.

$$\text{div rot } \vec{b} = (\nabla, [\nabla, \vec{b}]) = 0$$



## Глава 9

# Бесконечные произведения и $\Gamma$ -функция Эйлера

### § 9.1. Бесконечные произведения

**Определение 9.1.1.** Пусть  $\{b_n\}$  — последовательность положительных чисел. Формально бесконечное произведение ее членов  $b_1 b_2 \dots b_n \dots$  называется бесконечным произведением. Обозначается так:

$$b_1 b_2 \dots = \prod_{n=1}^{\infty} b_n = \prod b_n$$

**Определение 9.1.2.** Конечное произведение  $\prod_n = b_1 \dots b_n$  называется  $n$ -ым частичным произведением.

**Определение 9.1.3.** Если последовательность произведений  $\prod_n$  сходится к числу  $\prod \neq 0$  ( $\prod > 0$ ), то бесконечное произведение называется сходящимся к  $\prod$ . Если  $\prod = 0$ , то бесконечное произведение расходится к нулю, а если  $\prod_n \rightarrow \infty$ , то оно называется расходящимся к бесконечности. Если предела нет, то оно называется расходящимся.

*Утверждение 9.1.1* (необходимый признак сходимости). Если  $\prod b_n$  сходится, то  $b_n \rightarrow 1$  при  $n \rightarrow \infty$ .

*Доказательство.* Если  $\prod_n \rightarrow \prod \neq 0$ , то

$$b_n = \frac{\prod_n}{\prod_{n-1}} \rightarrow \frac{\prod}{\prod} = 1, \quad n \rightarrow \infty$$

□

*Утверждение 9.1.2.* Сходимость бесконечного произведения  $\prod b_n$  влечет за собой сходимость ряда  $\sum \ln b_n$  и наоборот. Причем

$$\ln \prod_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \ln b_n$$

*Доказательство.* Имеем

$$\ln \prod_n = \sum_{k=1}^n \ln b_k =: S_n, \quad \prod_n = e^{S_n} \quad (9.1.1)$$

из непрерывности логарифмической и показательной функции следует, что если  $\prod_n \rightarrow \prod$ , то  $S_n \rightarrow \ln \prod$  и обратно, если  $S_n \rightarrow S$ , то  $\prod_n \rightarrow e^S$ . □

**Определение 9.1.4.** Бесконечное произведение называется абсолютно сходящимся, если абсолютно сходится ряд  $\sum \ln b_n$ . Сходящееся произведение, не являющееся абсолютно сходящимся, называется условно сходящимся. Очевидно, что абсолютно сходящееся произведение сходится в обычном смысле. Поскольку мы считаем  $b_n > 0$ , то  $b_n = 1 + a_n$ , где  $a_n > -1$ . Тогда имеем:

$$\prod_{n=1}^{\infty} b_n = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$$

**Теорема 9.1.1.** Бесконечное произведение  $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$  абсолютно сходится тогда и только тогда, когда  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  сходится.

*Доказательство.* Действительно,  $1 + a_n \rightarrow 1 \iff a_n \rightarrow 0$ , так что  $|\ln(1 + a_n)| \sim |a_n|, n \rightarrow \infty$ . Ряды  $\sum |\ln(1 + a_n)|$  и  $\sum |a_n|$  сходятся и расходятся одновременно.  $\square$

## § 9.2. Определение $\Gamma$ -функции Эйлера. Некоторые ее свойства

По определению  $\Gamma(x)$

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1 + \frac{1}{n})^x}{1 + \frac{x}{n}}, \quad x \neq 0, -1, -2, \dots \quad (9.2.1)$$

Представим общий член произведения так:

$$\frac{(1 + \frac{1}{n})^x}{1 + \frac{x}{n}} = 1 + \frac{x(x-1)}{2} \cdot \frac{1}{n^2} + \bar{o}\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad n \rightarrow \infty$$

Отсюда в силу теоремы (9.1.1) вытекает, что наше параметрическое представление абсолютно сходится.

Отметим некоторые свойства  $\Gamma$ -функции Эйлера:

1.

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x), \quad P_n(x) = (n+1)^x \frac{n!}{x(x+1) \dots (x+n)} \quad (9.2.2)$$

Из того, что  $n$ -ое частичное произведение имеет вид:

$$\frac{\prod_{k=1}^n \left(\frac{k+1}{k}\right)^x}{x(1+x)(1+\frac{x}{2}) \dots (1+\frac{x}{n})} = \frac{(n+1)^x n!}{x(x+1) \dots (x+n)} = P_n(x)$$

2. Функциональные уравнения для  $\Gamma$ -функции:

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \quad \Gamma(1) = 1 \quad (9.2.3)$$

действительно,  $\frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n(x+1)}{P_n(x)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{x+1}}{(n+1)^x (x+1+n)} = x$ .

В качестве следствия получаем:  $\Gamma(m+1) = m!$ .

### § 9.3. Представление синуса в виде бесконечного произведения и формула дополнения для $\Gamma$ -функции

**Теорема 9.3.1** (разложение функции  $\operatorname{ctg}$  на простейшие дроби). *Имеет место формула:*

$$\pi \operatorname{ctg} \alpha\pi = \frac{1}{\alpha} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\alpha}{\alpha^2 - k^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n \frac{1}{\alpha - k}, \quad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \quad (9.3.1)$$

*Доказательство.* Формулу (9.3.1) достаточно установить для  $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$ . Справедливость ее для остальных  $\alpha \notin \mathbb{Z}$  следует из нечетности выражений слева и справа в формуле (9.3.1) и их 1-периодичности.

На отрезке  $[-\pi, \pi]$  рассмотрим функцию  $g(x) = \cos \alpha x$ , где  $\alpha \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ . Продолжим ее на  $\mathbb{R}$  как периодическую с периодом  $2\pi$ . Тогда  $g(x)$  будет четной и непрерывной на  $\mathbb{R}$ . Так как  $g(x)$  — непрерывная и кусочно-гладкая функция, то ее ряд Фурье равномерно сходится на  $I = [0, 2\pi]$  к функции  $g(x)$ . Поэтому при всех  $x \in I$  имеем разложение:

$$g(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

где  $b_k = 0$  в силу четности  $g(x)$ .

$$\begin{aligned} \frac{a_0}{2} &= \frac{\sin \alpha\pi}{\alpha\pi} \\ a_k &= (-1)^k \frac{2\alpha}{\alpha^2 - k^2} \cdot \frac{\sin \alpha\pi}{\pi} \end{aligned}$$

таким образом:

$$g(x) = \cos \alpha x = \frac{\sin \alpha\pi}{\pi} \left( \frac{1}{\alpha} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2\alpha}{\alpha^2 - k^2} \cos kx \right), \quad x = \pi$$

□

**Теорема 9.3.2** (Эйлера).  $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ ,

$$\sin \pi\alpha = \pi\alpha \prod_{k=1}^{\infty} \left( 1 - \frac{\alpha^2}{k^2} \right) \quad (9.3.2)$$

*Доказательство.* Равенство (9.3.2) эквивалентно при  $\alpha \in (0, 1)$  равенству:

$$\ln \left( \frac{\sin \pi\alpha}{\pi\alpha} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \ln \left( 1 - \frac{\alpha^2}{k^2} \right) =: S(\alpha) \quad (9.3.3)$$

Ряд справа сходится равномерно при  $\alpha \in [-\alpha_0, \alpha_0]$ , где  $0 < \alpha_0 < 1$ .

Пусть  $S(\alpha)$  — сумма этого ряда. Так как:

$$\ln \left( 1 - \frac{\alpha^2}{k^2} \right) = \frac{2\alpha}{\alpha^2 - k^2}$$

и  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\alpha}{\alpha^2 - k^2}$  равномерно сходится на  $[-\alpha_0, \alpha_0]$ , то существует производная  $S'(\alpha)$  и выполняется равенство:

$$S'(\alpha) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\alpha}{\alpha^2 - k^2}, \quad \alpha \in (-1, 1)$$

отсюда и из (9.3.1) получим:

$$S'(\alpha) = \pi \operatorname{ctg} \alpha\pi - \frac{1}{\alpha}, \quad \alpha \in (-1, 1)$$

$$S(\alpha) = \ln \frac{\sin \pi\alpha}{\alpha} + C, \quad C = \text{const}$$

так как  $\lim_{\alpha \rightarrow 0} S(\alpha) = 0$  (ряд (9.3.3) сходится равномерно), то

$$C = -\lim \ln \frac{\sin \pi\alpha}{\alpha} = -\ln \pi$$

так что

$$S(\alpha) = \ln \frac{\sin \pi\alpha}{\pi\alpha}$$

и равенство (9.3.3), а также (9.3.2) доказаны.  $\square$

**Следствие.** При  $\alpha = \frac{1}{2}$  получим формулу Валлиса:

$$\frac{2}{\pi} = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{4n^2}\right) \quad (9.3.4)$$

**Теорема 9.3.3** (формула дополнения Эйлера). При  $x \notin \mathbb{Z}$ :

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x} \quad (9.3.5)$$

*Доказательство.* Используя определение  $\Gamma$ -функции и следующие равенство:

$$\Gamma(1-x) = -x\Gamma(-x) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-x}}{1 - \frac{x}{n}}$$

докажем эту теорему. Перемножая  $\Gamma(x)$  и  $\Gamma(1-x)$ , получим:

$$\Gamma(x) \cdot \Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}$$

$\square$

**Следствие.** При  $x = \frac{1}{2}$  находим:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \quad (9.3.6)$$

## § 9.4. Интегральное представление для $\Gamma$ -функции Эйлера

**Лемма 9.4.1** (формула Гаусса). Пусть  $P_n(x) = (n+1)^x \frac{n!}{x(x+1)\dots(x+n)}$ . При  $x > 0$ :

$$P_n(x) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^x \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt$$

*Доказательство.* С помощью замены переменной и интегрирования по частям, получаем:

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^x \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt &= (n+1)^x \int_0^1 (1-y)^n y^{x-1} dy = (n+1)^x \frac{1}{x} \int_0^1 (1-y)^n dy^x = \\ &= (n+1)^x \frac{n}{x} \int_0^1 (1-y)^{n-1} y^x dy = \dots = \\ &= (n+1)^x \frac{n!}{x(x+1)\dots(x+n-1)} \int_0^1 y^{x+n-1} dy = (n+1)^x \frac{n!}{x(x+1)\dots(x+n)} = P_n(x) \end{aligned}$$

□

**Теорема 9.4.1** (Интегральное представление  $\Gamma$ -функции).  $x > 0$

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt \quad (9.4.1)$$

При  $0 < x < 1$ : Интеграл имеет особую точку  $t = 0$  и сходится в ее окрестности. В окрестности  $\infty$  подынтегральное выражение ограничено функцией  $e^{-t/2}$  и сходится в этой окрестности.

*Доказательство.* Рассмотрим разность

$$R_n(x) = \int_0^n t^{x-1} e^{-t} dt - P_n(x) \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-x} = \int_0^n t^{x-1} \left(e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n\right) dt \quad (9.4.2)$$

покажем, что при  $t \in [0, n]$ :

$$0 \leq e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq \frac{1}{n} e^{-t} t^2 \quad (9.4.3)$$

действительно, любое неравенство является следствием неравенства  $1+y \leq e^y \left(1 - \frac{t}{n}\right) \leq e^{-t/n}$ . Правое неравенство получено ссылкой на это же неравенство, а так же на неравенство Бернулли:  $(1+y)^n \geq 1+ny$ , ( $y > -1$ ). Учитывая все это, получаем:

$$\begin{aligned} e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n &= e^{-t} \left(1 - e^t \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n\right) \leq e^{-t} \left(1 - \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n\right) = \\ &= e^{-t} \left(1 - \left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)^n\right) \leq e^{-t} n \frac{t^2}{n^2} = \frac{1}{n} e^{-t} t^2 \end{aligned}$$

учитывая (9.4.2) и (9.4.3) получаем:

$$0 \leq R_n(x) < \int_0^n \frac{t^{x-1} e^{-t}}{n} dt < \frac{1}{n} \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt = \frac{\Gamma(x)}{n} \Rightarrow R_n(x) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$$

отсюда  $\int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n t^{x-1} e^{-t} dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(R_n(x) + P_n(x) \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-x}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x) = \Gamma(x)$ .

□

*Замечание 9.4.1.* С помощью интегрирования по частям и теоремы (9.4.1) вводится следующая формула Коши, справедливая при значениях  $x \in (-(n+1), n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ :

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} (e^{-t} - \varphi_n(t)) dt, \quad \varphi_n(t) = \sum_{k=0}^n (-t)^k \frac{1}{k!}$$

**Следствие** (интеграл Эйлера-Пуассона).

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt = 2 \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx, \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

Дальнейшее изучение свойств  $\Gamma$ -функций будем проводить, исходя из ее интегрального представления и основываясь на теории интегралов, зависящих от параметров.

## § 9.5. Формула Стирлинга

$$\Gamma(x+1) = \sqrt{2\pi x} \left(\frac{x}{e}\right)^x \left(1 + \frac{1}{12x} + \frac{1}{288x^2} + \bar{o}\left(\frac{1}{x^3}\right)\right), \quad x \rightarrow \infty$$

**Теорема 9.5.1.**

$$\Gamma(n+1) = n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n, \quad n \rightarrow \infty, \quad n \in \mathbb{N} \quad (9.5.1)$$

$$(\sqrt[n]{n!} \sim \frac{n}{e}, \quad n \rightarrow \infty).$$

**Лемма 9.5.1.** При  $\forall n = 1, 2, \dots$  имеем:

$$e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} < e^{1+\frac{1}{12n(n+1)}} \quad (9.5.2)$$

*Доказательство.*  $|x| < 1$ ,  $\ln \frac{1+x}{1-x} = \ln(1+x) - \ln(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{x^n}{n}\right) = 2x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{2k+1} = 2x(1 + \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{5}x^4 + \dots)$ , отсюда при  $0 < x < 1$  получим:

$$\begin{aligned} 2x < \ln \frac{1+x}{1-x} < 2x \left(1 + \frac{1}{3} \frac{x^2}{1-x^2}\right) \\ 1 < \frac{1}{2x} \ln \frac{1+x}{1-x} < 1 + \frac{1}{3} \frac{x^2}{1-x^2} \end{aligned}$$

или, что тоже самое,

$$\begin{aligned} 1 < \frac{t}{2} \ln \frac{t+1}{t-1} < 1 + \frac{1}{3} \frac{1}{t^2-1}, \quad t > 1, \quad t = 2n+1, \quad n \in \mathbb{N} \\ 1 < \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) < 1 + \frac{1}{12} \frac{1}{n(n+1)} \end{aligned}$$

потенцируя, получаем (9.5.2). □

**Лемма 9.5.2** (формула Валлиса).

$$\pi = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(2^{2n} \frac{(n!)^2}{(2n)!}\right)^2 \quad (9.5.3)$$

*Доказательство.* Действительно, согласно формуле (9.3.4):

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{4k^2}\right)^{-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \frac{(2k)^2}{(2k-1)(2k+1)} \quad (9.5.4)$$

запишем  $\prod_n$  в виде:

$$\prod_n = \frac{1}{2n+1} \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2 = \frac{1}{2n+1} \left(\frac{((2n)!!)^2}{(2n)!}\right)^2 = \frac{1}{2n+1} \left(\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!}\right)^2$$

отсюда и из (9.5.4) получаем (9.5.3). □



*Доказательство.* (теоремы (9.5.1)). Положим:

$$x_n = \frac{n!e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}} \quad (9.5.5)$$

требуется доказать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt{2\pi} \quad (9.5.6)$$

поскольку  $\frac{x_n}{x_{n+1}} = \frac{1}{e} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}$ , то в силу (9.5.2) получаем:

$$1 < \frac{x_n}{x_{n+1}} < \frac{e^{\frac{1}{12n}}}{e^{\frac{1}{12(n+1)}}} = e^{\frac{1}{12n(n+1)}} \quad (9.5.7)$$

из левого неравенства следует, что последовательность  $x_n$  убывает и следовательно имеет конечный предел  $a$ , ( $a \geq 0$ ):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \quad (9.5.8)$$

положим  $y_n = x_n e^{-\frac{1}{12n}}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Очевидно,  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a$ . В силу правого из неравенств (9.5.7)  $y_n < y_{n+1}$ , так что  $a > 0$ . Получаем, что  $x_n = a(1 + \varepsilon_n)$ , где  $\varepsilon_n \rightarrow 0$ ,  $n \rightarrow \infty$ . Отсюда из (9.5.5) получим:

$$\begin{aligned} n! &= a \frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{e^n} (1 + \varepsilon_n) \\ (2n)! &= a \frac{2^{2n+\frac{1}{2}} n^{2n+\frac{1}{2}}}{e^{2n}} (1 + \varepsilon_{2n}) \end{aligned}$$

Подставив эти выражения в формулу Валлиса (9.5.3) получаем:

$$\begin{aligned} \pi &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left( a \sqrt{\frac{n}{2}} \cdot \frac{(1 + \varepsilon_n)^2}{1 + \varepsilon_{2n}} \right)^2 \\ \pi &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left( 2^{2n} \left( \frac{a n^{n+\frac{1}{2}} (1 + \varepsilon_n)}{e^n} \right)^2 \cdot \frac{1}{a} \cdot \frac{e^{2n}}{2^{2n+\frac{1}{2}} n^{2n+\frac{1}{2}} (1 + \varepsilon_{2n})} \right)^2 = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left( \frac{a(1 + \varepsilon_n)^2}{1 + \varepsilon_{2n}} \cdot \sqrt{\frac{n}{2}} \right)^2 = \frac{a^2}{2} \implies a = \sqrt{2\pi} \end{aligned}$$

что и требовалось доказать (смотри (9.5.6) и (9.5.8)).

□