Chương 5. TÍNH GẦN ĐÚNG TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH

5.1. GIỚI THIỆU CHUNG

Quá trình tính giá trị các thông số kỹ thuật hoặc giá trị các đại lượng kinh tế đôi khi phải tính tích phân $I = \int_a^b f(x)dx$

Để tính đúng tích phân I ta chỉ có công thức Newton-Leibniz nhưng công thức này sẽ gặp khó
khăn khi hàm f(x) có nguyên hàm phức tạp khó tìm hoặc không có nguyên hàm hoặc cho bởi
bảng giá trị rời rạc (điều này rất dễ gặp trong kỹ thuật, kinh tế…).
Trong thực tế người ta giảm bớt khó khăn khi tính I bằng cách sử dụng các phương pháp tính gần đúng để tìm giá trị xấp xỉ của I rồi dùng nó thay cho giá trị đúng nhưng với điều kiện đánh giá được sai số tuyệt đối. Đa số các phương pháp tính gần đúng đều theo các bước sau

Bước 1: Chia đoạn [a,b] thành n đoạn nhỏ bằng nhau $[x_i, x_{i+1}]$; $i=0,...,n-1$.

Bước 2: Trên từng đoạn nhỏ $[x_i, x_{i+1}]$ xây dựng đa thức nội suy bậc m $p_m^i(x)$ của $f(x)$.

Bước 3: Tính $I^* = \sum_{i=0}^{n-1} I_i$; $I_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} p_m^i(x)dx$. Kết luận $I \approx I^*$.

Bước 4: Đánh giá sai số $\Delta = \left|I - I^*\right|$.

5.2. MỘT SỐ CÔNG THỨC TÍNH GẦN ĐÚNG TÍCH PHÂN

Xét tích phân xác định $I = \int_a^b f(x)dx$

Nếu f(x) liên tục trên [a, b] và có nguyên hàm là F(x) thì công thức Newton-Leibniz là

$$I = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Nhưng nếu không tính được nguyên hàm sơ cấp hay nguyên hàm đó quá phức tạp thì tích phân I phải tính gần đúng. Sau đây ta trình bày hai công thức tính gần đúng tích phân.

5.2.1.Công thức hình thang

a. Sơ đồ tóm tắt công thức hình thang

Phương án 1: Cho trước số khoảng chia n

+) Xét tích phân xác định $I = \int_a^b f(x)dx$

+) Ấn định số khoảng chia n

+) Tính h=(b-a)/n, x_i=a+i.h, y_i=f(x_i), (i=0,1, 2, 3,…,n)

+) Tính $I_T = h\left[\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + ... + y_{n-1}\right]$

+) Kết quả $I \approx I_T$ với sai số tính bởi công thức

$|I - I_T| \le \frac{M}{12}h^2(b-a), \quad M = \max|f''(x)|, a \le x \le b.$

Phương án 2: Cho trước sai số ε

+) Sử dụng công thức $|I - I_T| \le \frac{M}{12}h^2(b-a), \quad M = \max|f''(x)|, a \le x \le b.$ để xác định số khoảng chia n sao cho sai số bé thua sai số cho phép.

+) Tính h=(b-a)/n, x_i=a+i.h, y_i=f(x_i), (i=0,1, 2, 3,…,n)

+) Tính $I_T = h\left[\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + ... + y_{n-1}\right]$

+) Kết quả $I \approx I_T$.

b. Ví dụ: Tính gần đúng tích phân xác định sau bằng công thức hình thang với n=4

$I = \int_0^1 (x^2 + x)dx$. Tính sai số của phương pháp trên. (kết quả giữ lại 5 chữ số thập phân)

Ta có n=4➔ h=(b-a)/n=0.25, f(x)=x^2+x, $I_T = h\left[\frac{y_0+y_4}{2}+y_1+y_2+y_3\right]$

x_0=a=0, y_0 =f(0)=0

x_1=0.25, y_1=f(0.25)=0.3125

x_2=0+2x0.25=0.5, y_2 =0.75

x_3=0+3x0.25=0.75, y_3=1.3125

x_4=0+4x0.25=1, y_4=2

➔ $I_T = h\left[\frac{y_0+y_4}{2}+y_1+y_2+y_3\right] = 0.84375$

Để tính sai số ta sử dụng công thức

$$|I - I_T| \le \frac{M}{12}h^2(b-a), \quad M = \max|f''(x)|, a \le x \le b.$$

$$\rightarrow |I - I_T| \le \frac{2}{12}(0.25)^2 \times 1 = 0.0104$$

Với n=10=>h=0.1, $I_T = h\left[\frac{y_0+y_{10}}{2}+y_1+y_2+y_3+\ldots+y_9\right]$

n	x_i	y_i =f(x_i)=x^2+x
0	0	0
1	0.1	0.11
2	0.2	0.24
3	0.3	0.39
4	0.4	0.56
5	0.5	0.75
6	0.6	0.96
7	0.7	1.19

8	0.8	1.44
9	0.9	1.71
10	1	2

I_T=0.835

Để tính sai số ta sử dụng công thức

$$|I - I_T| \le \frac{M}{12} h^2 (b-a), \quad M = \max |f''(x)|, a \le x \le b.$$

$$\to |I - I_T| \le \frac{2}{12}(0.1)^2 \times 1 = 0.00167$$

5.2.2. Công thức Simpson 1/3

a. Sơ đồ tóm tắt công thức Simpson 1/3

Phương án 1: Cho trước số khoảng chia 2n

+) Xét tích phân xác định $I = \int_a^b f(x)dx$

+) Ấn định số khoảng chia 2n

+) Tính h=(b-a)/2n, x_i=a+i.h, y_i=f(x_i), (i=0,1, 2, 3,…,2n)

+) Tính $I_S = \frac{h}{3}\left[(y_0 + y_{2n}) + 4(y_1 + ... + y_{2n-1}) + 2(y_2 + ... + y_{2n-2})\right]$

+) Kết quả $I \approx I_S$ với sai số tính bởi công thức

$$|I - I_S| \le \frac{M}{180} h^4 (b-a), \quad M = \max |f^{(4)}(x)|, a \le x \le b.$$

Phương án 2: Cho trước sai số ε

+) Sử dụng công thức $|I - I_S| \le \frac{M}{180} h^4 (b-a), \quad M = \max |f^{(4)}(x)|, a \le x \le b.$ để xác định số khoảng chia 2n sao cho sai số bé thua sai số cho phép.

+) Tính h=(b-a)/2n, x_i=a+i.h, y_i=f(x_i), (i=0,1, 2, 3,…,2n)

+) Tính $I_S = \frac{h}{3}\left[(y_0 + y_{2n}) + 4(y_1 + ... + y_{2n-1}) + 2(y_2 + ... + y_{2n-2})\right]$

+) Kết quả $I \approx I_S$

b. Ví dụ: Tính gần đúng tích phân xác định sau bằng công thức Simpson với n=4

$I = \int_0^1 (x^2 + x)dx$. Tính sai số của phương pháp trên. (kết quả giữ lại 5 chữ số thập phân)

Ta có n=4, h = (b-a)/2n = (1-0)/8 = 0.125, f(x) = x^2+x,

$I_S = \frac{h}{3}\left[(y_0 + y_8) + 4(y_1 + y_3 + y_5 + y_7) + 2(y_2 + y_4 + y_6)\right]$

x_0 = a = 0, y_0 = f(0)=0

x_1=0.125, y_1=f(0.125)=0.140625

x_2=0.25, y_2=f(0.25)=0.3125

x_3=0.375, y_3 =f(0.375)= 0.515625

x_4=0.5, y_4 =f(0.5)=0.75

x_5=0.625, y_5=f(0.625)=1.015625

x_6=0.75, y_6=f(0.75)=1.3125

x_7=0.875=1, y_7=f(0.875)=1.640625

x_8=1, y_8=f(1)=2

➔ $I_S = \frac{h}{3}\left[(y_0 + y_8) + 4(y_1 + y_3 + y_5 + y_7) + 2(y_2 + y_4 + y_6)\right] = 0.8333333333$

Để tính sai số ta sử dụng công thức

$|I - I_S| \le \frac{M}{180} h^4 (b-a), \quad M = max\,|f^{(4)}(x)|, a \le x \le b.$

$\rightarrow |I - I_S| = 0$

BÀI TẬP: Sử dụng máy tính bỏ túi: Mode 7 (table) => nhập hàm f(x)=> bấm 2 lần dấu bằng=> start (cận a của tp) bấm = => end (cận b của tp) bấm = =>step (nhập h) bấm = ➔ ra kết quả.

Bài 1. Tính gần đúng tích phân xác định sau bằng công thức hình thang với n=8

a. $I = \int_1^2 \frac{\ln(2x+3)}{1+x}dx$ b. $I = \int_0^1 (5x^2+2)e^x dx$ c. $I = \int_1^2 \ln(1+e^x)dx$ d. $I = \int_2^3 \frac{x}{\ln(2+x)}dx$

Lời giải

a. $I = \int_1^2 \frac{\ln(2x+3)}{1+x}dx$

n=8➔ h=1/8=0.125, $f(x) = \frac{\ln(2x+3)}{1+x}$, a=1, b=2

n	y_i
0	0.80472
1	0.78034
2	0.75767
3	0.73651
4	0.71670
5	0.69812
6	0.68066
7	0.66419
8	0.64863

➔ $I_T = h\left[\frac{y_0 + y_8}{2} + y_1 + y_2 + ... + y_7\right] = 0.72011$

b. $I = \int_0^1 (5x^2+2)e^x dx$ n=8, h=1/8, a=0, b=1, $f(x) = (5x^2+2)e^x$

n	y_i
0	2
1	2.35482
2	2.96931
3	3.93302

4	5.35834
5	7.38541
6	10.18806
7	13.98095
8	19.02797

$$I_T = h\left[\frac{y_0 + y_8}{2} + y_1 + y_2 + ... + y_7\right] = 7.08548$$

c. $I = \int_1^2 \ln(1+e^x)dx$ n=8, a=1, b=2, h=1/8, $f(x) = \ln(1+e^x)$

n	y_i
0	1.31326
1	1.40615
2	1.50193
3	1.60041
4	1.70141
5	1.80474
6	1.91022
7	2.01766
8	2.12693

$$I_T = h\left[\frac{y_0 + y_8}{2} + y_1 + y_2 + ... + y_7\right] = 1.70783$$

d. $I = \int_2^3 \frac{x}{\ln(2+x)}dx$

i	y_i

0	1.44270
1	1.49958
2	1.55503
3	1.60918
4	1.66215
5	1.71403
6	1.76492
7	1.81489
8	1.86400

$$I_T = h\left[\frac{y_0 + y_8}{2} + y_1 + y_2 + ... + y_7\right] = 1.65914$$

Bài 2. Tính gần đúng tích phân xác định sau bằng công thức Simpson 1/3 với n=4.

a. $I = \int_1^2 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx$ b. $I = \int_0^1 x\sqrt{x+1}dx$ c. $I = \int_2^3 (x^5 + xe^x + 1)dx$ d. $I = \int_0^1 e^{x^2}dx$

Lời giải

a. $I = \int_1^2 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx$ a=1, b=2, h=1/8, $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}$

$$I_S = \frac{h}{3}\left[(y_0 + y_8) + 4(y_1 + y_3 + y_5 + y_7) + 2(y_2 + y_4 + y_6)\right] = 0.282695$$

i	y_i
0	0.34657
1	0.33270
2	0.31646
3	0.29924

4	0.28194
5	0.26508
6	0.24901
7	0.23387
8	0.21972

b. $I = \int_0^1 x\sqrt{x+1}dx$ a=0, b=1, h=1/8, $f(x) = x\sqrt{x+1}$

$$I_S = \frac{h}{3}\left[(y_0 + y_8) + 4(y_1 + y_3 + y_5 + y_7) + 2(y_2 + y_4 + y_6)\right] = 0.64379$$

i	y_i
0	0
1	0.13258
2	0.27951
3	0.43972
4	0.61237
5	0.79672
6	0.99216
7	1.19814
8	1.41421

c. $I = \int_2^3 (x^5 + xe^x + 1)dx$ a=2, b=3, h=1/8, $f(x) = x^5 + xe^x + 1$

$$I_S = \frac{h}{3}\left[(y_0 + y_8) + 4(y_1 + y_3 + y_5 + y_7) + 2(y_2 + y_4 + y_6)\right] = 144.61587$$

i	y_i

0	47.77811
1	62.12300
2	80.01244
3	102.09820
4	129.11248
5	161.87388
6	201.29360
7	248.38219
8	304.25661