ÔN TẬP

Chương 2: Giải phương trình

1. Phương pháp lặp đơn

a. Mô tả phương pháp

- Giả sử phương trình f(x)=0 có khoảng tách nghiệm là (a, b)
- Biến đổi phương trình về dạng x=φ (x)➔Tìm hàm lặp hội tụ φ
- Chọn xấp xỉ ban đầu x^0
- Tính nghiệm theo công thức lặp $x_n=\varphi(x_{n-1})$ (n=1, 2, 3,…) cho tới khi $|x_n-x_{n-1}|<\varepsilon$ thì dừng.
- Kết quả: nghiệm gần đúng x_n với sai số $|\alpha - x_n| \le \dfrac{q}{1-q}\varepsilon$

trong đó q là số dương < 1 thỏa mãn $|\varphi'(x)| \le q < 1$ hay $q = max|\varphi'(x)| \quad \forall x \in [a,b]$

Trong thực tế người ta dừng quá trình tính khi $|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$ sai số cho phép

b. Điều kiện hội tụ của phương pháp

Định lý 2.2: Nếu hàm φ(x) có đạo hàm φ'(x) và thỏa mãn: $|\varphi'(x)| \le q < 1$ thì phương pháp lặp hội tụ, tức là: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \alpha$

Thực hành trên máy casio: $\varphi(x) = \sqrt[3]{5+3x}$

Bước tính	**Bấm trên máy**	**Màn hình**
x_0 **=2**	**2=**	**2**
$x_1 = \varphi(x_0)$	**(3*ans+5)^(1/3)**	2,223980091
$x_2 = \varphi(x_1)$	**=**	2,268372388
$x_3 = \varphi(x_2)$	**=**	2,276967161
$x_4 = \varphi(x_3)$	**=**	2,278623713

2. Phương pháp Newton

a. Mô tả phương pháp

Giả sử phương trình (2.1) với khoảng tách nghiệm [a,b].

Gọi x* là nghiệm đúng của phương trình trên [a,b]. Giả sử đạo hàm f(x) và f’’(x) không đổi dấu (riêng đạo hàm cấp 1 khác 0) trên khoảng tách nghiệm.

1) Chọn một giá trị $x_0 \in [a;b]$ sao cho f(x_0) cùng dấu $f''(x_0)$ làm giá trị ban đầu (ta gọi x_0 như thế là điểm Fourier).
2) Tính $x_n = x_{n-1} - \dfrac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} \quad n = 1, 2, ...$
3) Sau một số bước lặp n ta tìm được nghiệm gần đúng x_n với sai số

   $|x_n - x^*| \le \dfrac{M}{2m}(x_n - x_{n-1})^2$

   Trong đó m và M đánh giá từ bất đẳng thức sau

   $|f'(x)| \ge m > 0, \quad |f''(x)| \le M, \quad \forall x \in [a,b]$

b. Điều kiện hội tụ của phương pháp

Định lý 2.3: Giả sử phương trình (2.1) với khoảng tách nghiệm [a,b], f(x) có đạo hàm f’(x), f’’(x) liên tục trên [a, b] và không đổi dấu trên [a, b] thì phương pháp lặp hội tụ, tức là: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \alpha$

Thực hành trên máy casio: giải pt $f(x) \equiv x^3 - 3x - 5 = 0 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 3$

Bước tính	**Bấm trên máy**	**Màn hình**
x_0 **=3**	**3=**	**3**
$x_1 = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$	Ans-(ans^3-3*ans-5)/(3*ans^2-3) =	2,458333333
$x_2 = x_1 - \dfrac{f(x_1)}{f'(x_1)}$	=	2,294310576
$x_3 = x_2 - \dfrac{f(x_2)}{f'(x_2)}$	=	2,279144331
$x_4 = x_3 - \dfrac{f(x_3)}{f'(x_3)}$	=	2,279018795

Chương 3: Giải hệ phương trình

Phương pháp lặp đơn

a. Mô tả phương pháp

+) Giả sử hệ phương trình đại số tuyến tính (I) có nghiệm duy nhất

+) Biến đổi đưa hệ phương trình (I) về dạng tương đương: **X=αX+β**

+) Chọn xấp xỉ ban đầu $X^{(0)}$ tùy ý (hay chọn $X^{(0)}=(0; 0; 0)$)

+) Tính nghiệm theo công thức: $X^{(m)} = \alpha X^{(m-1)} + \beta \quad (m = 1, 2, ...)$

Cho tới khi $\left\| X^{(m)} - X^{(m-1)} \right\|_p < \varepsilon$ (ε là sai số cho trước) thì dừng quá trình tính.

+) Kết quả $X^{(m)} \approx X^*$ với sai số $\left\| X^{(m)} - X^* \right\|_p \le \frac{\|\alpha\|_p}{1 - \|\alpha\|_p} \left\| X^{(m)} - X^{(m-1)} \right\|_p$

b. Điều kiện hội tụ của phương pháp

Định lý 3.2: *Nếu ma trận α có chuẩn bé hơn 1 thì phương pháp lặp đơn hội tụ.*

Cách bấm máy casio

-Nhập ma trận ∝ (mat A), β (mat B), $X^{(0)}$(mat C) như bình thường

-Tính bước lặp 1: $X^{(1)}$= matA x matC + matB=mat Ans➔AC

- Tính bước lặp 2: bấm phím lùi (hiện ra công thức trên), mình thay mat C= mat Ans (bấm shift 4 6 với 570 vn), bấm bằng thì ra kq $X^{(2)}$ (mat Ans) ➔AC

- Tính bước lặp 3: bấm phím lùi, bấm = thì ra kết quả➔AC

- Tính bước lặp 4: bấm phím lùi, bấm = thì ra kết quả

Chương 4: Nội suy

1. Đa thức nội suy Lagrange

Nội suy bậc hai: với n=2 ta có bảng

X	X_0	X_1	X_2
Y	Y_0	Y_1	Y_2

Đa thức nội suy bậc hai có dạng

$$P_2(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + y_2 l_2(x)$$
$$l_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}, \quad l_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}, \quad l_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

$P_2(x)$ là đa thức bậc hai đối với x và có dạng $P_2(x)=Ax^2+Bx+C$.

Nội suy bậc ba: với n=3 ta có bảng

X	X_0	X_1	X_2	X_3
Y	Y_0	Y_1	Y_2	Y_3

Đa thức nội suy bậc ba có dạng

$$P_3(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + y_2 l_2(x) + y_3 l_3(x)$$
$$l_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)}, \quad l_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)},$$
$$l_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)}, \quad l_3(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}$$

$P_3(x)$ là đa thức bậc ba đối với x và có dạng $P_3(x)=Ax^3+Bx^2+Cx+D$.

2. Đa thức nội suy Newton

Lập bảng sai phân. Ví dụ có 6 điểm

n	x	y	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$	$\Delta^5 y_i$
0	1	**3.2**					
1	3	3.3	**0.1**				
2	5	1.7	-1.6	**-1.7**			
3	7	2.5	0.8	2.4	**4.1**		
4	9	5.1	2.6	1.8	-0.6	**-4.7**	
5	11	**4.3**	**-0.8**	**-3.4**	**-5.2**	**-4.6**	**0.1**

*) **Công thức đa thức nội suy Newton tiến xuất phát từ x_0** trong trường hợp nút cách đều là

$$N_n^T(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}(x - x_0)(x - x_1) + ... + \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}(x - x_0)....(x - x_{n-1})$$

*) **Công thức đa thức nội suy Newton lùi xuất phát từ x_n** trong trường hợp nút cách đều là

$$N_n^L(x) = y_n + \frac{\Delta y_n}{h}(x - x_n) + \frac{\Delta^2 y_n}{2!h^2}(x - x_n)(x - x_{n-1}) + ... + \frac{\Delta^n y_n}{n!h^n}(x - x_n)....(x - x_1)$$

Chú ý: Tính y khi biết x=x*

Nếu x* gần x_0 thì $y \approx N_n^T(x^*)$. Nếu x* gần x_n thì $y \approx N_n^L(x^*)$.

Chương 5: Tính tích phân

1. Công thức hình thang

Phương án 1: Cho trước số khoảng chia n

+) Xét tích phân xác định $I = \int_a^b f(x)dx$

+) Ấn định số khoảng chia n

+) Tính h=(b-a)/n, x_i=a+i.h, y_i=f(x_i), (i=0,1, 2, 3,…,n)

+) Tính $I_T = h\left[\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + ... + y_{n-1}\right]$

+) Kết quả $I \approx I_T$ với sai số tính bởi công thức

$$|I - I_T| \le \frac{M}{12}h^2(b-a), \quad M = \max|f''(x)|, a \le x \le b.$$

2. Công thức Simpson

Phương án 1: Cho trước số khoảng chia 2n

+) Xét tích phân xác định $I = \int_a^b f(x)dx$

+) Ấn định số khoảng chia 2n

+) Tính $h=(b-a)/2n$, $x_i=a+i.h$, $y_i=f(x_i)$, $(i=0,1, 2, 3,\ldots,2n)$

+) Tính $I_S = \frac{h}{3}\left[(y_0+y_{2n})+4(y_1+...+y_{2n-1})+2(y_2+...+y_{2n-2})\right]$

+) Kết quả $I \approx I_S$ với sai số tính bởi công thức

$$|I - I_S| \le \frac{M}{180}h^4(b-a), \quad M = max\,|f^{(4)}(x)|, a \le x \le b.$$

Sử dụng máy tính bỏ túi: Mode 7 (table) => nhập hàm f(x)=> bấm 2 lần dấu bằng=>start (cận a của tp) bấm = => end (cận b của tp) bấm = =>step (nhập h) bấm = ➔ ra kết quả.

Chương 6: Giải phương trình vi phân

1. Công thức Euler

Kiểm tra bài toán có nghiệm duy nhất

Phương án 1: không tính sai số

1. Ấn định khoảng chia N
2. Tính $h= (b - a) / N$, $x_0=a$, $x_n =b$
3. Tính $x_i =x_0+ih$
4. **Tính $y_i=y_{i-1}+h.f(x_{i-1}, y_{i-1})$** với $i=1, 2, 3,\ldots,N$
5. Kết quả $y_i \approx y(x_i)$

2. Công thức Euler cải tiến

Kiểm tra bài toán có nghiệm duy nhất

Phương án 1: không tính sai số

1. Ấn định khoảng chia N
2. Tính $h= (b-a)/N$
3. Tính $x_i =x_0+ih$
4. Công thức với 1 vòng lặp

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y_i^{(0)} = y_{i-1} + hf(x_{i-1}, y_{i-1}) \\ y_i^{(1)} = y_{i-1} + 0.5h[f(x_{i-1}, y_{i-1}) + f(x_i, y_i^{(0)})], i = 1 \to N \\ y(x_i) \approx y_i = y_i^{(1)} \end{cases}$$

5. Công thức với 2 vòng lặp

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y_i^{(0)} = y_{i-1} + hf(x_{i-1}, y_{i-1}) \quad (1) \\ y_i^{(1)} = y_{i-1} + 0.5h[f(x_{i-1}, y_{i-1}) + f(x_i, y_i^{(0)})] \quad (2) \\ y_i^{(2)} = y_{i-1} + 0.5h[f(x_{i-1}, y_{i-1}) + f(x_i, y_i^{(1)})], \quad (3) \quad i = 1 \to N \\ y(x_i) \approx y_i = y_i^{(2)} \end{cases}$$

3. Công thức Rungekutta 4

Kiểm tra bài toán có nghiệm duy nhất

Đặt $x_0 = a$, $y_0=y(x_0)$. Tính y_{i+1} theo công thức sau:

$$y_i = y_{i-1} + \frac{1}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right) \quad i = 1, 2, ..., n-1$$
$$k_1 = hf(x_{i-1}, y_{i-1})$$
$$k_2 = hf(x_{i-1} + 0,5h, y_{i-1} + 0.5k_1)$$
$$k_3 = hf(x_{i-1} + 0.5h, y_{i-1} + 0.5k_2)$$
$$k_4 = hf(x_{i-1} + h, y_{i-1} + k_3)$$

Cấu trúc của bài kiểm tra giữa kì

Câu 1: Cho phương trình f(x)=0

a. Chứng minh phương trình có nghiệm trong khoảng [a, b]

b. Giải phương trình bằng phương pháp Newton và tính sai số với số lần lặp n=….

Câu 2: Giải hệ phương trình bằng phương pháp lặp đơn với số lần lặp n=…, và xấp xỉ ban đầu cho trước $X^{(0)}$.

Câu 3: Cho bảng số liệu

a. Tìm đa thức nội suy Newton tiến, lùi.

b. Tính y(xi)=?

Câu 4: Tính gần đúng tích phân bằng phương pháp Simpson 1/3 với n cho trước.

Câu 5: Cho phương trình vi phân…..

a. Giải phương trình vi phân bằng phương pháp Euler

b. Tính y(xi)=? Bằng phương pháp Euler cải tiến hoặc Rungekutta 4

Cấu trúc của bài tiểu luận

Câu 1: Cho phương trình f(x)=0

a. Chứng minh phương trình có nghiệm trong khoảng [a, b]

b. Giải phương trình bằng phương pháp Newton và tính sai số với số lần lặp n=….

Câu 2: Cho phương trình f(x)=0

a. Chứng minh phương trình có nghiệm trong khoảng [a, b]

b. Giải phương trình bằng phương pháp lặp đơn và tính sai số với sai số cho trước.

Câu 3: Giải hệ phương trình bằng phương pháp lặp đơn với số lần lặp n=…, và xấp xỉ ban đầu cho trước $X^{(0)}$.

Câu 4: Giải hệ phương trình bằng phương pháp lặp đơn với sai số cho trước, và xấp xỉ ban đầu cho trước $X^{(0)}$.

Câu 5: Cho bảng số liệu

a. Tìm đa thức nội suy Newton tiến, lùi.

b. Tính y(xi)=?

Câu 6: Cho bảng số liệu

a. Tìm đa thức nội suy Lagrange

b. Tính y(xi)=?

Câu 7: Tính gần đúng tích phân bằng phương pháp Simpson 1/3 với n cho trước.

Câu 8: Tính gần đúng tích phân bằng phương pháp hình thang với n cho trước.

Câu 9: Cho phương trình vi phân…..

a. Giải phương trình vi phân bằng phương pháp Euler

b. Tính y(xi)=? Bằng phương pháp Euler cải tiến hoặc Rungekutta 4.

Câu 10. Liên hệ thực tế (1đ)