Chương 4. NỘI SUY VÀ PHƯƠNG PHÁP BÌNH PHƯƠNG BÉ NHẤT

4.1. GIỚI THIỆU CHUNG

Khi nghiên cứu các vấn đề kỹ thuật, kinh tế, xã hội chúng ta thường gặp phải nhu cầu từ các số liệu rời rạc đã có của các đại lượng đang xét, suy ra mối quan hệ toán học giữa chúng, sau đó sử dụng công cụ toán học nghiên cứu các vấn đề mà ta quan tâm trên các đại lượng đang xét.

Ví dụ. Quan sát hai đại lượng X , Y ta có bảng số liệu:

x	32	32.9	34	34.5	35	36.6
y	32.4	33	33.1	34.7	35.2	33.6

Có rất nhiều câu hỏi liên quan đến mối quan hệ giữa X,Y mà nếu không sử dụng công cụ toán
học thì chúng ta không trả lời được ví dụ như:

- Khi X tăng thì Y có tăng hay không ?
- Khi nào thì Y đạt cực đại?
- Khi X= 36 thì Y là bao nhiêu ?

………………….

Vấn đề xây dựng mối quan hệ toán học giữa các đại lượng có thể phát biểu bằng bài toán tổng
quát sau

Bài toán: Quan sát hai đại lượng x, y ta được bảng số liệu

x	x0	x1	…	xn
y	y0	y1	…	Yn

Tìm mối liên hệ giữa x,y dưới dạng y = f(x) ?.

Khi giải bài toán trên điều đầu tiên chúng ta quan tâm là nên chọn dạng hàm f(x) như thế nào.

Các định lý về xấp xỉ sau đây của Weierstrass sẽ cho chúng ta gợi ý về dạng hàm f(x).

Định lý Weierstrass 1:

Cho f (x) là một hàm thực liên tục xác định trên đoạn [a,b]. Khi đó với mọi ε>0 tồn tại một đa thức

$$p_m(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_mx^m$$

với các hệ số thực sao cho với mọi giá trị x thuộc [a,b] ta có

$$|f(x) - p_m(x)| < \varepsilon.$$

Định lý Weierstrass 2:

Cho f (x) là một hàm thực liên tục xác định trên đoạn [-π,π] và f(-π) = f(π). Khi đó với mọi ε>0 tồn tại một đa thức lượng giác

$$p_m(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{m}\left[a_j \cos(jx) + b_j \sin(jx)\right]$$

với các hệ số thực sao cho với mọi giá trị x thuộc [-π,π] ta có

$$|f(x) - p_m(x)| < \varepsilon.$$

Như vậy việc chọn ***đa thức*** là thích hợp cho dạng hàm f(x). Tiếp theo chúng ta sẽ đi xác định các hệ số ai, bj trong đa thức pm(x). Việc xác định các hệ số thường dựa vào một trong hai dạng yêu cầu:

Dạng 1: Đa thức pm(x) phải ***đi qua*** các điểm (xi ,yi). Tức là pm(xi) = yi với i=0,1,...,n. Người ta gọi đa thức pm (x) xây dựng theo dạng 1 là ***đa thức nội suy*** và được dùng khi biết yi = f(xi).

Dạng 2: Đa thức pm(x) ***đi gần*** các điểm (xi ,yi). Đa thức tìm theo dạng 2 gọi là tìm theo phương pháp ***bình phương bé nhất*** (hay còn gọi là bài toán hồi quy hoặc hàm hồi quy) nó được dùng khi yi ≈ f(xi) .

Chú ý: Khi xây dựng quan hệ giữa y và x theo phương pháp bình phương bé nhất có thể không
phải dạng đa thức.

4.2. ĐA THỨC NỘI SUY

4.2.1 Đa thức nội suy Lagrange

Gọi $l_i(x)$ là đa thức có dạng

$$l_i(x) = \frac{(x - x_0)...(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})...(x - x_n)}{(x_i - x_0)...(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})...(x_i - x_n)} \qquad (4.1)$$

Đa thức $l_i(x)$ là đa thức bậc n và

$$l_i(x_j) = \begin{cases} 1 & khi \quad j = i \\ 0 & khi \quad j \neq i \end{cases} \qquad (4.2)$$

Ta gọi đây là đa thức Lagrange cơ bản.

Đa thức nội suy Lagrange có dạng: $\mathbf{P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i l_i(x)}$ (4.3),

$l_i(x)$ xác định bởi công thức (4.1)

a.Nội suy bậc nhất: với n=1 ta có bảng

X	X_0	X_1
Y	Y_0	Y_1

Đa thức nội suy bậc nhất có dạng: $P_1(x) = y_0 \dfrac{x - x_1}{x_0 - x_1} + y_1 \dfrac{x - x_0}{x_1 - x_0}$

$P_1(x)$ là đa thức bậc nhất đối với x và có dạng $P_1(x)=Ax+B$

b. Nội suy bậc hai: với n=2 ta có bảng

X	X_0	X_1	X_2
Y	Y_0	Y_1	Y_2

Đa thức nội suy bậc hai có dạng

$$P_2(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + y_2 l_2(x)$$

$$l_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}, \quad l_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}, \quad l_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

$P_2(x)$ là đa thức bậc hai đối với x và có dạng $P_2(x)=Ax^2+Bx+C$.

c. Nội suy bậc ba: với n=3 ta có bảng

X	X_0	X_1	X_2	X_3
Y	Y_0	Y_1	Y_2	Y_3

Đa thức nội suy bậc ba có dạng

$$P_3(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + y_2 l_2(x) + y_3 l_3(x)$$
$$l_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)}, \quad l_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)},$$
$$l_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)}, \quad l_3(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}$$

$P_3(x)$ là đa thức bậc ba đối với x và có dạng $P_3(x)=Ax^3+Bx^2+Cx+D$.

d.Ví dụ:

Ví dụ 1: Cho bảng số liệu sau

X	1	2	3
Y	17	27.5	76

Hãy lập đa thức nội suy Lagrange bậc 2 và tính $P_2(1.5)$.

Giải: Đa thức nội suy Lagrange bậc hai có dạng

$$P_2(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + y_2 l_2(x)$$
$$l_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{(x-2)(x-3)}{(1-2)(1-3)} = \frac{(x-2)(x-3)}{2},$$
$$l_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{(x-1)(x-3)}{(2-1)(2-3)} = \frac{(x-1)(x-3)}{-1},$$
$$l_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{(x-1)(x-2)}{(3-1)(3-2)} = \frac{(x-1)(x-2)}{2}$$
$$\rightarrow P_2(x) = 17 \times \frac{(x-2)(x-3)}{2} + 27.5 \times \frac{(x-1)(x-3)}{-1} + 76 \times \frac{(x-1)(x-2)}{2}$$
$$= 8.5(x^2-5x+6) - 27.5(x^2-4x+3) + 38(x^2-3x+2)$$
$$= 19x^2 - 46.5x + 44.5$$

Tính $P_2(1.5)= 19 \times (1.5)^2 - 46.5 \times 1.5+44.5=17.5$

Ví dụ 2: Cho bảng số liệu sau

X	1	2	3
Y	5	15	31

Hãy lập đa thức nội suy Lagrange bậc 2 và tính $P_2(2.5)$.

Giải:

$$P_2(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + y_2 l_2(x)$$

$$P_2(x) = 5\times\frac{(x-2)(x-3)}{2} + 15\times\frac{(x-1)(x-3)}{-1} + 31\times\frac{(x-1)(x-2)}{2}$$

$$= 2.5(x^2-5x+6) - 15(x^2-4x+3) + 15.5(x^2-3x+2)$$

$$= 3x^2 - x + 1$$

$P_2(2.5)$=17, 25

4.2.2. Đa thức nội suy Newton

a. Các giá trị x_i cách đều h = x_{i+1}-x_i (i=0,1,2,…n). Khi đó h gọi là bước nội suy.

Sai phân tiến cấp 1 tại i: $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$

Sai phân tiến cấp 2 tại i: $\Delta^2 y_i = \Delta(\Delta y_i) = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i = y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i$

Sai phân tiến cấp 3 tại i: $\Delta^3 y_i = \Delta(\Delta^2 y_i) = \Delta^2 y_{i+1} - \Delta^2 y_i = y_{i+3} - 3y_{i+2} + 3y_{i+1} - y_i$

Sai phân tiến cấp n tại i: $\Delta^n y_i = \Delta(\Delta^{n-1} y_i)$

*) **Công thức đa thức nội suy Newton tiến xuất phát từ x_0** trong trường hợp nút cách đều là

$$N_n^T(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x-x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}(x-x_0)(x-x_1) + ... + \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}(x-x_0)....(x-x_{n-1})$$

Nếu n=1 ta có $N_1^T(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x-x_0)$

Nếu n=2 ta có $N_2^T(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x-x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}(x-x_0)(x-x_1)$

Nếu n=3 ta có

$$N_3^T(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x-x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}(x-x_0)(x-x_1) + \frac{\Delta^3 y_0}{3!h^3}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$$

Nếu n=4 ta có

$$N_4^T(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x-x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}(x-x_0)(x-x_1) + \frac{\Delta^3 y_0}{3!h^3}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) + \frac{\Delta^4 y_0}{4!h^4}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$$

*) **Công thức đa thức nội suy Newton lùi xuất phát từ x_n** trong trường hợp nút cách đều là

$$N_n^L(x) = y_n + \frac{\Delta y_n}{h}(x-x_n) + \frac{\Delta^2 y_n}{2!h^2}(x-x_n)(x-x_{n-1}) + ... + \frac{\Delta^n y_n}{n!h^n}(x-x_n)....(x-x_1)$$

Chú ý: Tính y khi biết x=x*

Nếu x* gần x_0 thì $y \approx N_n^T(x^*)$. Nếu x* gần x_n thì $y \approx N_n^L(x^*)$.

Ví dụ 1: Cho bảng số liệu

x	1	3	5	7	9	11
y	3.2	3.3	1.7	2.5	5.1	4.3

Xây dựng đa thức nội suy Newton tiến, lùi. Tìm y khi x=1.2345 và x=9.5437.

Giải: bước lưới nội suy h=2

Lập bảng sai phân

n	x	y	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$	$\Delta^5 y_i$
0	1	**3.2**					
1	3	3.3	**0.1**				
2	5	1.7	-1.6	**-1.7**			
3	7	2.5	0.8	2.4	**4.1**		
4	9	5.1	2.6	1.8	-0.6	**-4.7**	
5	11	**4.3**	**-0.8**	**-3.4**	**-5.2**	**-4.6**	**0.1**

Đa thức nội suy Newton Tiến

$$N_5^T(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x-x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}(x-x_0)(x-x_1) + \frac{\Delta^3 y_0}{3!h^3}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$$
$$+ \frac{\Delta^4 y_0}{4!h^4}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) + \frac{\Delta^5 y_0}{5!h^5}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)$$

$$N_5^T(x) = 3.2 + \frac{0.1}{2}(x-1) + \frac{1.7}{2!2^2}(x-1)(x-3) + \frac{4.1}{3!2^3}(x-1)(x-3)(x-5)$$
$$- \frac{4.7}{4!2^4}(x-1)(x-3)(x-5)(x-7) + \frac{0.1}{5!2^5}(x-1)(x-3)(x-5)(x-7)(x-9)$$

Đa thức nội suy Newton lùi

$$N_5^L(x) = y_5 + \frac{\Delta y_5}{h}(x-x_5) + \frac{\Delta^2 y_5}{2!h^2}(x-x_5)(x-x_4) + \frac{\Delta^3 y_5}{3!h^3}(x-x_5)(x-x_4)(x-x_3)$$
$$+ \frac{\Delta^4 y_5}{4!h^4}(x-x_5)(x-x_4)(x-x_3)(x-x_2) + \frac{\Delta^5 y_5}{5!h^5}(x-x_5)(x-x_4)(x-x_3)(x-x_2)(x-x_1)$$

$$N_5^L(x) = 4.3 - \frac{0.8}{2}(x-11) - \frac{3.4}{2!2^2}(x-11)(x-9) - \frac{5.2}{3!2^3}(x-11)(x-9)(x-7)$$
$$- \frac{4.6}{4!2^4}(x-11)(x-9)(x-7)(x-5) + \frac{0.1}{5!2^5}(x-11)(x-9)(x-7)(x-5)(x-3)$$

Tính y: x=1.234 ta dùng đa thức newton tiến, x=9.5437 ta dùng đa thức newton lùi.

Ví dụ 2: Hãy tìm đa thức nội suy Newton tiến của hàm f(x) cho dưới dạng bảng sau

x	0	1	2	3
y	1	3	9	27

Hãy tính f (0.5).

Giải: Bước nội suy h=1.

n	x	y	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$
0	0	**1**			
1	1	3	**2**		
2	2	9	6	**4**	

3	3	27	18	12	**8**

$$N_3^T(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x-x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}(x-x_0)(x-x_1) + \frac{\Delta^3 y_0}{3!h^3}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$$

$$= 1 + \frac{2}{1}(x-0) + \frac{4}{2!1^2}(x-0)(x-1) + \frac{8}{3!1^3}(x-0)(x-1)(x-2)$$

$$= 1 + 2x + 2x(x-1) + \frac{4}{3}x(x-1)(x-2)$$

$$= 1 + 2x + 2x^2 - 2x + \frac{4}{3}x^3 - 4x^2 + \frac{8}{3}x$$

$$= 1 + \frac{8}{3}x - 2x^2 + \frac{4}{3}x^3$$

f(0.5)=N_3(0.5)=2

Ví dụ 3: Hãy tìm đa thức nội suy Newton lùi của hàm f(x) cho dưới dạng bảng sau

x	0	0.1	0.2	0.3
y	0	0.1002	0.2013	0.8048

Hãy tính f (0.27).

Giải: Bước nội suy h=0.1

Bảng sai phân

n	x	y	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$
0	0	**0**			
1	0.1	0.1002	**0.1002**		
2	0.2	0.2013	0.1011	**0.0009**	
3	0.3	**0.8048**	**0.6035**	**0.5024**	**0.5015**

$$N_3^L(x) = y_3 + \frac{\Delta y_3}{h}(x-x_3) + \frac{\Delta^2 y_3}{2!h^2}(x-x_3)(x-x_2) + \frac{\Delta^3 y_3}{3!h^3}(x-x_3)(x-x_2)(x-x_1)$$

$$= 0.8048 + \frac{0.6035}{0.1}(x-0.3) + \frac{0.5024}{2(0.1)^2}(x-0.3)(x-0.2) + \frac{0.5015}{6(0.1)^3}(x-0.3)(x-0.2)(x-0.1)$$

$$f(0.27) = N_3^L(0.27) = 0.5380875$$

b.Các giá trị x_i không cách đều

Tính các tỷ sai phân $f[x_i,\ldots,x_{i+n}]$ theo công thức

$$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}$$

$$f[x_i,\ldots,x_{i+k}] = \frac{f[x_{i+1},\ldots,x_{i+k}] - f[x_i,\ldots,x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i} \qquad i = 0, 1\ldots; k = 1, 2,\ldots$$

Đa thức nội suy Newton tiến

$N_n^T(x) = y_0 + f[x_0, x_1](x-x_0)+\ldots+f[x_0,\ldots,x_n](x-x_0)\ldots(x-x_{n-1})$

Đa thức nội suy Newton lùi

$N_n^L(x) = y_n + f[x_{n-1}, x_n](x-x_n)+\ldots+f[x_0,\ldots,x_n](x-x_n)\ldots(x-x_1)$

Chú ý: Tính y khi biết $x=x^*$

Nếu x^* gần x_0 thì $y \approx N_n^T(x^*)$. Nếu x^* gần x_n thì $y \approx N_n^L(x^*)$.

4.3. PHƯƠNG PHÁP BÌNH PHƯƠNG BÉ NHẤT

Trong khoa học kĩ thuật, ta thường gặp bài toán: tìm mối liên hệ giữa hai đại lượng biến thiên x và y. Mối quan hệ đó được biểu diễn dưới dạng hàm số thông qua một loạt các thí nghiệm đo đạc. Hàm số đó gọi là ***hàm thực nghiệm***.

Ví dụ: mối liên hệ giữa chiều cao h và tuổi của cây, thể tích của cây với đường kính thân cây ở độ cao 1,3 mét.

Có nhiều phương pháp xây dựng hàm thực nghiệm và một trong các phương pháp đó là ***phương pháp bình phương bé nhất***.

4.3.1 Nội dung phương pháp:

Bài toán: Hai đại lượng x, y qua thực nghiệm có mối quan hệ số theo bảng:

X	x_1 x_2 x_3 ……………x_n
Y	y_1 y_2 y_3 …………. y_n

Giả sử về mặt lí thuyết, x và y có mối quan hệ dạng y = f(x), trong đó f(x) có chứa một số tham số chưa biết. Ta cần xác định các tham số này sao cho mối quan hệ y = f(x) gần đúng với mối quan hệ trong bảng trên.

Đặt $\varepsilon_i = f(x_i) - y_i$: gọi là độ lệch giữa điểm lí thuyết $M_i(x_i, f(x_i))$ và điểm thực tiễn $M_i(x_i, y_i)$.

Thiết lập: U = $\left(f(x_1)-y_1\right)^2+\left(f(x_2)-y_2\right)^2+....+\left(f(x_n)-y_n\right)^2=\sum_{i=1}^{n}\left(f(x_i)-y_i\right)^2$, U gọi là tổng bình phương các độ lệch.

Vậy yêu cầu bài toán tương đương với việc xác định các tham số trong y = f(x) sao cho tổng bình phương các độ lệch U là nhỏ nhất.

Phương pháp tìm hàm thực nghiệm như trên gọi là phương pháp bình phương bé nhất.

Sau đây ta sẽ thiết lập phương pháp bình phương bé nhất cho quan hệ bậc nhất y = ax + b.

4.3.2. Phương pháp bình phương bé nhất cho quan hệ dạng y = ax + b.

Giả sử x và y có mối quan hệ bậc nhất y = ax + b và có mối quan hệ số theo bảng

X	x_1 x_2 x_3 ……………x_n
Y	y_1 y_2 y_3 …………. y_n

Đặt $\varepsilon_i = f(x_i) - y_i = \mathrm{ax_i} + b - y_i, i = \overline{1,n}$. Vậy tổng bình phương các độ lệch là:

$$U(a,b) = (\mathrm{ax_1}+b-y_1)^2 + (\mathrm{ax_2}+b-y_2)^2 + ... + (\mathrm{ax_n}+b-y_n)^2.$$

Ta cần xác định a, b sao cho U(a, b) đạt giá trị nhỏ nhất. Chú ý rằng U(a, b) là hàm số hai biến a và b.

Xét hệ phương trình

$$\begin{cases} U'_a = 0 \\ U'_b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} U'_a = 2x_1\left(\mathrm{ax_1}+b-y_1\right)+2x_2\left(\mathrm{ax_2}+b-y_2\right)+...+2x_n\left(\mathrm{ax_n}+b-y_n\right)=0 \\ U'_b = 2\left(\mathrm{ax_1}+b-y_1\right)+2\left(\mathrm{ax_2}+b-y_2\right)+...+2\left(\mathrm{ax_n}+b-y_n\right)=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a\left(x_1^{\ 2}+x_2^{\ 2}+...+x_n^{\ 2}\right)+b\left(x_1+x_2+...+x_n\right)=x_1y_1+x_2y_2+...+x_ny_n \\ a\left(x_1+x_2+...+x_n\right)+nb=y_1+y_2+...+y_n \end{cases} \quad (1)$$

Người ta chứng minh được kết quả sau:

Nếu a và b là nghiệm của hệ phương trình trên thì tại đó U(a, b) đạt giá trị nhỏ nhất.

Vậy yêu cầu bài toán tương đương với việc giải hệ phương trình (1). **Khi đó đường thẳng y = ax + b tìm được là đường thẳng tốt nhất theo nghĩa sai số bình phương.**

Ví dụ 1: Giả sử y = ax + b. Hãy xác định a và b theo phương pháp bình phương bé nhất biết kết quả thực nghiệm được cho trong bảng sau:

X	-2	0	1	2	4
Y	0,5	1	1,5	2	3

Giải: n = 5.

Yêu cầu bài toán tương đương với xác định a, b sao cho
$U(a,b)=(\mathrm{ax}_1+b-y_1)^2+(\mathrm{ax}_2+b-y_2)^2+...+(\mathrm{ax}_\mathrm{n}+b-y_n)^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Vậy tương đương với giải hệ phương trình:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a\left(x_1^{\ 2}+x_2^{\ 2}+...+x_n^{\ 2}\right)+b\left(x_1+x_2+...+x_n\right)=x_1y_1+x_2y_2+...+x_ny_n \\ a\left(x_1+x_2+...+x_n\right)+nb=y_1+y_2+...+y_n \end{cases}$$

Để xác định hệ trên, ta lập bảng sau:

i	x_i	y_i	x_i^2	x_iy_i
1	-2	0,5	4	-1
2	0	1	0	0
3	1	1,5	1	1,5
4	2	2	4	4
5	4	3	16	12
Tổng	5	8	25	16,5

Vậy ta có hệ $\begin{cases} 25a + 5b = 16,5 \\ 5a + 5b = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0,425 \\ b = 1,175 \end{cases}$

Vậy hàm thực nghiệm cần tìm là y ≈ 0,425x + 1,175.

Ví dụ 2: Câu hỏi tương tự với bảng số sau:

x	-1	0	1	2	3	4
y	1	1	2	1	2	3

HD: $\begin{cases} 31a + 9b = 21 \\ 9a + 6b = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{12}{35} \\ b = \dfrac{121}{105} \end{cases}$. Vậy $y \approx \dfrac{12}{35}x + \dfrac{121}{105}$.

4.3.3. Mở rộng phương pháp bình phương bé nhất.

<u>Mở rộng 1</u>: Người ta chứng minh được: Phương pháp bình phương bé nhất chỉ được áp dụng khi đại lượng y có biểu diễn tuyến tính qua đại lượng x dạng:

$$y = \sum_{i=1}^{k} a_i \varphi_i(x), \text{ với } \varphi_i(x) \text{ là các hàm số đã cho.}$$

Chẳng hạn: $y = \mathrm{ax}^2 + bx, \quad y = \mathrm{ax}^2 + b, \quad y = \mathrm{ax}^2 + bx + c, \quad y = \mathrm{asinx+bcosx+c...}$

Khi đó việc tìm các hệ số a_i theo phương pháp bình phương bé nhất sẽ luôn dẫn về một hệ phương trình đại số tuyến tính với các ẩn a_i. Hệ này là một hệ Cramer nên luôn có duy nhất nghiệm.

<u>Mở rộng 2:</u> Một số quan hệ sau có thể đưa về dạng tuyến tính và như vậy có thể áp dụng phương pháp bình phương bé nhất.

+ $y = \mathrm{ax}^{\alpha} \Rightarrow \ln y = \alpha \ln x + \ln a$. Đặt Y = lny, X= lnx, B = lna ta đưa về dạng $Y = \alpha X + B$

+ $y = ae^{-bx}$ đưa về dạng $Y = AX + B$ trong đó Y = lny, X = x, A = -b, B = lna…

+ $y = ae^{-bx^2}$ đưa về dạng $Y = AX + B$ trong đó Y = lny, X = x^2, A = -b, B = lna…

Ví dụ 3: Giả sử y = ax^2 + b. Hãy lập hệ phương trình xác định a và b theo phương pháp bình phương bé nhất và xác định a, b biết kết quả thực nghiệm được cho trong bảng sau:

x	1	2	3	4	5
y	1.3	9.8	25.1	45.5	73.2

Giải:

- Thiết lập hệ phương trình xác định a và b.

- n = 5.

- Tổng bình phương các độ lệch:

$$U(a,b) = (\mathrm{ax}_1^2 + b - y_1)^2 + (\mathrm{ax}_2^2 + b - y_2)^2 + ... + (\mathrm{ax}_n^2 + b - y_n)^2$$

- Xét hệ:

$$\begin{cases} U'_a = 0 \\ U'_b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} U'_a = 2x_1^2\left(\mathrm{a}x_1^2 + b - y_1\right) + 2x_2^2\left(\mathrm{a}x_2^2 + b - y_2\right) + ... + 2x_n^2\left(\mathrm{a}x_n^2 + b - y_n\right) = 0 \\ U'_b = 2\left(\mathrm{a}x_1^2 + b - y_1\right) + 2\left(\mathrm{a}x_2^2 + b - y_2\right) + ... + 2\left(\mathrm{a}x_n^2 + b - y_n\right) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a\left(x_1^{\ 4} + x_2^{\ 4} + ... + x_n^{\ 4}\right) + b\left(x_1^{\ 2} + x_2^{\ 2} + ... + x_n^{\ 2}\right) = x_1^{\ 2}y_1 + x_2^{\ 2}y_2 + ... + x_n^{\ 2}y_n \\ a\left(x_1^{\ 2} + x_2^{\ 2} + ... + x_n^{\ 2}\right) + nb = y_1 + y_2 + ... + y_n \end{cases} \quad (2)$$

Vậy yêu cầu bài toán tương đương với việc xác định a, b thỏa mãn hệ phương trình (2).

Vậy (2) là hệ phương trình cần tìm.

- Xác định a, b từ bảng thực nghiệm.

Lập bảng xác định các hệ số của hệ (2).

i	x_i	y_i	x_i^2	x_i^4	$x_i^2 y_i$
1	1	1.3	1	1	1.3
2	2	9.8	4	16	39.2
3	3	25.1	9	81	225.9
4	4	45.5	16	256	728
5	5	73.2	25	625	1830
Tổng		154.9	55	979	2824.4

ta có hệ: $\begin{cases} 979a + 55b = 2824.4 \\ 55a + 5b = 154.9 \end{cases}$ Giải hệ: $\begin{cases} a \approx 2.99 \\ b \approx 1.97 \end{cases}$

Vậy hàm thực nghiệm cần tìm là: $y \approx 2.99x^2 - 1.97$

4.4. BÀI TẬP

Bài 1. Cho hàm số $y = 3^x$

- **a.** Tìm đa thức nội suy Lagrange $L_2(x)$ đi qua các điểm $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2$
- **b.** Tính $L_2(1.5)$?

Bài 2. Cho hàm số $y = x + \frac{2}{x}$

- **a.** Tìm đa thức nội suy Lagrange $L_2(x)$ đi qua các điểm $x_0 = 1, x_1 = 2, x_2 = 3$
- **b.** Tính $L_2(1.5)$?

Bài 3. Cho hàm số y=f(x) xác định trên khoảng [0; 7] và được cho bởi bảng giá trị sau

X	1	3	5	7
Y	2	6	9	15

- **a.** Tìm đa thức nội suy Newton tiến, lùi
- **b.** Tính f(1.5), f(6.4)

Bài 4. Cho hàm số $y = 4^x$

- **a.** Tìm đa thức nội suy Newton tiến, lùi đi qua các điểm $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$
- **b.** Tính y(0.25), y(2.5)

Bài 5. Cho hàm số y=f(x) xác định bởi bảng giá trị sau

x	-1	0	1	2
y	1	-3	6	9

a. Tìm đa thức nội suy Newton tiến của f(x) và tính f(-0.25)
b. Tìm đa thức nội suy Newton lùi của f(x) và tính f(1.75)

Bài 6. Cho hàm số y=f(x) xác định bởi bảng giá trị sau

x	1	2	3	4
y	2	-1	1	3

a. Tìm đa thức nội suy Newton tiến của f(x) và tính f(1.25)
b. Tìm đa thức nội suy Newton lùi của f(x) và tính f(3.75)

Bài 7. Hãy xác định a và b theo phương pháp bình phương bé nhất biết kết quả thực nghiệm được cho trong bảng sau và giả sử hàm số có dạng

a. y = ax + b

x	-1	1	2	3	4	5
y	-7.7	2.3	6.8	12.5	17.1	21.9

b. $y = ax^2 + b$

x	-1	0	1	2	-2	3
y	5.1	2.5	4.5	13.8	14.2	29.5

CHỮA BÀI TẬP CHƯƠNG 4

Bài 1. Cho hàm số $y = 3^x$

c. Tìm đa thức nội suy Lagrange $P_2(x)$ đi qua các điểm $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2$

d. Tính $P_2(1.5)$?

Giải:

x	x_0=0	x_1=1	x_2=2
y	1	3	9

Đa thức nội suy Lagrange bậc hai có dạng

$$P_2(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + y_2 l_2(x)$$

$$l_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{(x-1)(x-2)}{(0-1)(0-2)} = \frac{(x-1)(x-2)}{2} = 0.5(x^2-3x+2),$$

$$l_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{(x-0)(x-2)}{(1-0)(1-2)} = \frac{x(x-2)}{-1} = -x^2+2x,$$

$$l_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{(x-0)(x-1)}{(2-0)(2-1)} = \frac{x(x-1)}{2} = 0.5(x^2-x)$$

$$\rightarrow P_2(x) = 1\times 0.5(x^2-3x+2) + 3\times(-x^2+2x) + 9\times 0.5(x^2-x) = 2x^2+1$$

$$P_2(1.5) = 2\times(1.5)^2 + 1 = 5.5$$

Bài 2. Cho hàm số $y = x + \dfrac{2}{x}$

c. Tìm đa thức nội suy Lagrange $P_2(x)$ đi qua các điểm $x_0 = 1$, $x_1 = 2$, $x_2 = 3$

d. Tính $P_2(2.5)$?

Giải

x	$x_0=1$	$x_1=2$	$x_2=3$
y	3	3	11/3

Đa thức nội suy Lagrange bậc hai có dạng

$$P_2(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + y_2 l_2(x)$$

$$l_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{(x-2)(x-3)}{(1-2)(1-3)} = \frac{(x-2)(x-3)}{2},$$

$$l_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{(x-1)(x-3)}{(2-1)(2-3)} = \frac{(x-1)(x-3)}{-1},$$

$$l_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{(x-1)(x-2)}{(3-1)(3-2)} = \frac{(x-1)(x-2)}{2}$$

$$\rightarrow P_2(x) = 3\times\frac{(x-2)(x-3)}{2} + 3\times\frac{(x-1)(x-3)}{-1} + \frac{11}{3}\times\frac{(x-1)(x-2)}{2}$$

$$= 1.5(x^2-5x+6) - 3(x^2-4x+3) + \frac{11}{6}(x^2-3x+2)$$

$$= \frac{1}{3}x^2 - x + \frac{11}{3}$$

$$P_2(2.5) = 3.25$$

Bài 3. Cho hàm số y=f(x) xác định trên khoảng [0; 7] và được cho bởi bảng giá trị sau

X	1	3	5	7
Y	2	6	9	15

c. Tìm đa thức nội suy Newton tiến, lùi.

d. Tính f(1.5), f(6.4)

Giải: Bước nội suy h=2. Bảng sai phân

n	x	y	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$
0	1	**2**			
1	3	6	**4**		
2	5	9	3	**-1**	
3	7	**15**	**6**	**3**	**4**

$$N_3^T(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x-x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}(x-x_0)(x-x_1) + \frac{\Delta^3 y_0}{3!h^3}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$$

$$= 2 + \frac{4}{2}(x-1) + \frac{-1}{2!2^2}(x-1)(x-3) + \frac{4}{3!2^3}(x-1)(x-3)(x-5)$$

$$= 2 + 2x - 2 - \frac{1}{8}(x^2 - 4x + 3) + \frac{1}{12}(x^3 - 9x^2 + 23x - 15)$$

$$= \frac{-13}{8} + \frac{53}{12}x - \frac{7}{8}x^2 + \frac{1}{12}x^3$$

$$\Rightarrow f(1.5) = N_3^T(1.5) = 53/16 = 3.3125$$

$$N_3^L(x) = y_3 + \frac{\Delta y_3}{h}(x-x_3) + \frac{\Delta^2 y_3}{2!h^2}(x-x_3)(x-x_2) + \frac{\Delta^3 y_3}{3!h^3}(x-x_3)(x-x_2)(x-x_1)$$

$$= 15 + \frac{6}{2}(x-7) + \frac{3}{2(2)^2}(x-7)(x-5) + \frac{4}{6(2)^3}(x-7)(x-5)(x-3)$$

$$f(6.4) = N_3^L(6.4) = 12.647$$

Bài 4. Cho hàm số $y = 4^x$

c. Tìm đa thức nội suy Newton tiến, lùi đi qua các điểm $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$

d. Tính y(0.25), y(2.5)

Giải

x	0	1	2	3
y	1	4	16	64

Bước nội suy h=1. Bảng sai phân

n	x	y	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$
0	0	**1**			
1	1	4	**3**		
2	2	16	12	**9**	
3	3	**64**	**48**	**36**	**27**

$$N_3^T(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}(x - x_0)(x - x_1) + \frac{\Delta^3 y_0}{3!h^3}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

$$= 1 + \frac{3}{1}(x-0) + \frac{9}{2!1^2}(x-0)(x-1) + \frac{27}{3!1^3}(x-0)(x-1)(x-2)$$

$$= 1 + 3x + \frac{9}{2}(x^2 - x) + \frac{9}{2}(x^3 - 3x^2 + 2x)$$

$$= 1 + \frac{15}{2}x - 9x^2 + \frac{9}{2}x^3$$

$$\Rightarrow y(0.25) = N_3^T(0.25) = 2.3828125$$

$$N_3^L(x) = y_3 + \frac{\Delta y_3}{h}(x - x_3) + \frac{\Delta^2 y_3}{2!h^2}(x - x_3)(x - x_2) + \frac{\Delta^3 y_3}{3!h^3}(x - x_3)(x - x_2)(x - x_1)$$

$$= 64 + \frac{48}{1}(x-3) + \frac{36}{2(1)^2}(x-3)(x-2) + \frac{27}{6(1)^3}(x-3)(x-2)(x-1)$$

$$y(2.5) = N_3^L(2.5) = 33.8125$$

Bài 5. Cho hàm số y=f(x) xác định bởi bảng giá trị sau

x	-1	0	1	2

y	1	-3	6	9

c. Tìm đa thức nội suy Newton tiến của f(x) và tính f(-0.25)

d. Tìm đa thức nội suy Newton lùi của f(x) và tính f(1.75)

Bước nội suy h=1. Bảng sai phân

n	x	y	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$
0	-1	**1**			
1	0	-3	**-4**		
2	1	6	9	**13**	
3	2	**9**	**3**	**-6**	**-19**

$$N_3^T(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x-x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}(x-x_0)(x-x_1) + \frac{\Delta^3 y_0}{3!h^3}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$$

$$= 1 + \frac{-4}{1}(x+1) + \frac{13}{2!1^2}(x+1)(x-0) + \frac{-19}{3!1^3}(x+1)(x-0)(x-1)$$

$$= 1 - 4(x+1) + \frac{13}{2}(x^2+x) - \frac{19}{6}(x^3 - x^2)$$

$$\Rightarrow f(-0.25) = N_3^T(-0.25) = -3.9609375$$

$$N_3^L(x) = y_3 + \frac{\Delta y_3}{h}(x-x_3) + \frac{\Delta^2 y_3}{2!h^2}(x-x_3)(x-x_2) + \frac{\Delta^3 y_3}{3!h^3}(x-x_3)(x-x_2)(x-x_1)$$

$$= 9 + \frac{3}{1}(x-2) + \frac{-6}{2(1)^2}(x-2)(x-1) + \frac{-19}{6(1)^3}(x-2)(x-1)(x-0)$$

$$= 9 + 3(x-2) - 3(x-2)(x-1) - \frac{19}{6}(x-2)(x-1)x$$

$$f(1.75) = N_3^L(1.75) = 9.8515625$$

Bài 6. Cho hàm số y=f(x) xác định bởi bảng giá trị sau

x	1	2	3	4
y	2	-1	1	3

c. Tìm đa thức nội suy Newton tiến của f(x) và tính f(1.25)

d. Tìm đa thức nội suy Newton lùi của f(x) và tính f(3.75)

Bước nội suy h=1. Bảng sai phân

n	x	y	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$
0	1	**2**			
1	2	-1	**-3**		
2	3	1	2	**5**	
3	4	**3**	**2**	**0**	**-5**

$$N_3^T(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}(x - x_0)(x - x_1) + \frac{\Delta^3 y_0}{3!h^3}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

$$= 2 + \frac{-3}{1}(x-1) + \frac{5}{2!1^2}(x-1)(x-2) + \frac{-5}{3!1^3}(x-1)(x-2)(x-3)$$

$$= 2 - 3(x-1) + \frac{5}{2}(x^2 - 3x + 2) - \frac{5}{6}(x-1)(x-2)(x-3)$$

$$\Rightarrow f(1.25) = N_3^T(1.25) = 0.5078125$$

$$N_3^L(x) = y_3 + \frac{\Delta y_3}{h}(x - x_3) + \frac{\Delta^2 y_3}{2!h^2}(x - x_3)(x - x_2) + \frac{\Delta^3 y_3}{3!h^3}(x - x_3)(x - x_2)(x - x_1)$$

$$= 3 + \frac{2}{1}(x-4) + 0 + \frac{-5}{6(1)^3}(x-4)(x-3)(x-2)$$

$$= 3 + 2(x-4) - \frac{5}{6}(x-4)(x-3)(x-2)$$

$$f(3.75) = N_3^L(3.75) = 2.7734375$$