Chương 6. TÍNH GẦN ĐÚNG NGHIỆM CỦA BÀI TOÁN CÔSI ĐỐI VỚI PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN THƯỜNG

6.1. GIỚI THIỆU CHUNG

Nhiều bài toán khoa học kỹ thuật dẫn về việc tìm giá trị của hàm y=y(x) khi x=x*. Biết y là nghiệm riêng của phương trình vi phân thường:

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0;\ x \in [a, b] \text{ thỏa điều kiện đầu } \begin{cases} y(a) = y_0 \\ y'(a) = y_1 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(a) = y_{n-1} \end{cases}.$$

Phương trình vi phân cấp 1 có dạng: F(x, y, y')=0

Vi phân của y=y(x) là dy=y'dx=> y'=dy/dx.

Vd: y'= y-2x . Đây là phương trình vi phân cấp 1.

y''+2y=2x . Đây là phương trình vi phân cấp 2.

Các dạng nghiệm của PTVP vi phân cấp 1

- nghiệm tổng quát : f(x,y,C)=0
- nghiệm riêng: ứng với một giá trị C cụ thể => y=y(x)
- nghiệm kì dị

Giải quyết bài toán trên có hai nhóm phương pháp

Phương pháp tìm giá trị thông qua nghiệm chính xác: Bằng cách dựa vào cách tính tích phân trực tiếp, xác định được dạng tổng quát của nghiệm rồi dựa vào điều kiện ban đầu để xác định nghiệm riêng, sau đó thay giá trị x* vào nghiệm riêng để tìm ra giá trị y.

Phương pháp tìm giá trị gần đúng: Sử dụng xấp xỉ hàm bằng công thức khai triển Taylor sau đó dùng phương pháp tính gần đúng tích phân để tính gần đúng giá trị y.

Nhận xét:

- Hướng giải đúng có ưu điểm là tìm ra được giá trị đúng của y. Tuy nhiên lại rất khó
  thực hiện bởi không có phương pháp tìm nghiệm riêng tổng quát cho mọi bài toán.

- Hướng giải gần đúng có khuyết điểm là chỉ tìm ra được giá trị gần đúng của nghiệm
  trong trường hợp hệ có nghiệm duy nhất. Tuy nhiên phương pháp này có thể áp dụng cho một lớp phương trình vi phân rộng hơn rất nhiều so với phương pháp trực tiếp, do đó được dung nhiều trong thực tế.

Trong chương này ta nghiên cứu cách tính gần đúng và đánh giá sai số giá trị hàm y thỏa bài toán đơn giản nhất của phương trình vi phân là ***bài toán Cauchy đối với phương trình vi phân cấp 1.***

Bài toán: Cho hàm số y=f(x) xác định trên khoảng [a, b] và thỏa mãn:

$$(6.1) \qquad \begin{aligned} &y' = f(x,y), \quad a \le x \le b \\ &y(a) = y_0 \end{aligned}$$

Trong đó f(x,y) là một hàm số đã biết của hai biến x, y còn y_0 là một số thực cho trước.

Tìm giá trị gần đúng của y khi $x=x_i$ thỏa mãn: $x_0=a$, $x_n=b$, $x_{i+1}=x_i + h$ (i=0, 1, 2,…,n-1). Đánh giá sai số.

Giải: Khi giải bài toán trên ta cần tuân thủ các bước sau:
♣ *Bước 1*: Kiểm tra (6.1) có nghiệm đúng duy nhất trên [a,b]
♣ *Bước 2:* Dùng các thuật toán để tìm giá trị xấp xỉ y_i của y (x_i) và đánh giá sai số

$\Delta_i = | y_i - y(x_i) |$

Để thực hiện bước 1, 2 người ta thường dùng các định lý dưới đây

Định lý 1: Nếu f(x, y) và $\frac{\partial f}{\partial y}$ liên tục trên miền D chứa (x_0, y_0) thì tồn tại duy nhất hàm y=f(x) thoả mãn (6.1).

Định lý 2: Cho hàm số f(x) xác định và có đạo hàm đến cấp n+1 tại x0 và lân cận của x0. Giả sử h là một giá trị sao cho x0 + h cũng thuộc lân cận này. Ta có:

$$f(x_0+h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}h^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}h^{n+1}.$$

Trong đó c là hằng số thuộc (x0 , x0+h)

6.2. PHƯƠNG PHÁP EULER

a. Sơ đồ tóm tắt phương pháp

Cho bài toán

$$y' = f(x,y), \quad a \le x \le b$$
$$y(a) = y_0$$

Phương án 1: không tính sai số

1. Ấn định khoảng chia N
2. Tính h= (b - a) / N, x_0=a, x_n =b
3. Tính x_i =x_0+ih
4. **Tính y_i=y_{i-1}+h.f(x_{i-1}, y_{i-1})** với i=1, 2, 3,…,N
5. Kết quả $y_i \approx y(x_i)$

b. Ví dụ: Giải phương trình vi phân thường bằng phương pháp Euler

$y' = 2x - y$, với $0 \le x \le 1$, $y(0) = 0.5$ bưới lưới $h = 0.2$ (kết quả giữ lại 5 chữ số thập phân)

Bước 1: Kiểm tra tính duy nhất nghiệm

Ta có $f(x,y) = 2x - y \rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = -1$ liên tục trên R^2. Phương trình có duy nhất nghiệm.

Bước 2: Giải

Ta có a=0, b=1, y_0=0.5, **f(x,y)=2x-y**, h=0.2 ➔N=1/0.2=5

Suy ra h.f(x_0, y_0)=0.2 x (0-0.5)= - 0.1 nên

y_1=y_0+ h.f(x_0, y_0)=0.4, x_1=0.2

y_2=y_1+ h.f(x_1, y_1)=0.4+0.2 (2 x 0.2-0.4)=0.4

y_3=y_2+ h.f(x_2, y_2)=0.4+0.2(2 x 0.4-0.4)=0.48

y_4=y_3+ h.f(x_3, y_3)=0.48+0.2(2 x 0.6-0.48)=0.624

y_5=y_4+ h.f(x_4, y_4)=0.624+0.2(2 x 0.8-0.624)=0.36992

i	x_i	hf(x_{i-1}, y_{i-1})	y_i=y_{i-1}+hf(x_{i-1}, y_{i-1})
0	0	-0.1	0.5

1	0.2	0	0.4
2	0.4	0.08	0.4
3	0.6	0.144	0.48
4	0.8	0.1952	0.624
5	1		0.8192

6.3. PHƯƠNG PHÁP EULER CẢI TIẾN

a. Sơ đồ tóm tắt phương pháp

Phương án 1: không tính sai số

1. Ấn định khoảng chia N
2. Tính h= (b-a)/N
3. Tính $x_i = x_0 + ih$
4. Công thức với 1 vòng lặp

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y_i^{(0)} = y_{i-1} + hf(x_{i-1}, y_{i-1}) \\ y_i^{(1)} = y_{i-1} + 0.5h[f(x_{i-1}, y_{i-1}) + f(x_i, y_i^{(0)})], i = 1 \to N \\ y(x_i) \approx y_i = y_i^{(1)} \end{cases}$$

5. Công thức với 2 vòng lặp

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y_i^{(0)} = y_{i-1} + hf(x_{i-1}, y_{i-1}) \quad (1) \\ y_i^{(1)} = y_{i-1} + 0.5h[f(x_{i-1}, y_{i-1}) + f(x_i, y_i^{(0)})] \quad (2) \\ y_i^{(2)} = y_{i-1} + 0.5h[f(x_{i-1}, y_{i-1}) + f(x_i, y_i^{(1)})], \quad (3) \quad i = 1 \to N \\ y(x_i) \approx y_i = y_i^{(2)} \end{cases}$$

b.Ví dụ:

VD1: Giải phương trình vi phân thường bằng phương pháp Euler cải tiến với công thức 1 vòng lặp: $y' = 2xe^y + 1$, với $0 \le x \le 0.2$, $y(0) = 0.5$ bước lưới $h = 0.05$.

Bước 1: Kiểm tra tính duy nhất nghiệm

Ta có $f(x, y) = 2xe^y + 1 \to \dfrac{\partial f}{\partial y} = 2xe^y$ liên tục trên R^2. Phương trình có duy nhất nghiệm.

Bước 2: Giải:

Giải: a=0, b=0.2, y_0=y(0)=0.5, h=0.05➔N=4, $f(x,y)=2xe^y+1$

i=1=> $\begin{cases} y(x_0)=y(0)=y_0=0.5, \quad x_1=0.05, \quad f(x,y)=2xe^y+1 \\ y_1^{(0)}=y_0+hf(x_0,y_0)=0.5+0.05(2\times 0\times e^{0.5}+1)=0.55 \\ y_1^{(1)}=y_0+0.5h[f(x_0,y_0)+f(x_1,y_1^{(0)})]=0.5+0.5\times 0.05\left[2\times 0\times e^{0.5}+1+2\times 0.05\times e^{0.55}+1\right] \\ y(x_1)\approx y_1=y_1^{(1)}=0.59 \end{cases}$

i=2=>

$$\begin{cases} y(x_1)=y_1=0.59, \quad x_1=0.05, \quad x_2=0.1, \quad f(x,y)=2xe^y+1 \\ y_2^{(0)}=y_1+hf(x_1,y_1)=0.59+0.05(2\times 0.5\times e^{0.59}+1)=0.7302 \\ y_2^{(1)}=y_1+0.5h[f(x_1,y_1)+f(x_2,y_2^{(0)})]=0.59+0.5\times 0.05\left[2\times 0.05\times e^{0.59}+1+2\times 0.1\times e^{0.7302}+1\right] \\ y(x_2)\approx y_2=y_2^{(1)}=0.6549 \end{cases}$$

i=3=>

$$\begin{cases} y(x_2)=y_2=0.6549, \quad x_2=0.1, \quad x_3=0.15, \quad f(x,y)=2xe^y+1 \\ y_3^{(0)}=y_2+hf(x_2,y_2)=0.6549+0.05(2\times 0.1\times e^{0.6549}+1)=0.72414 \\ y_3^{(1)}=y_2+0.5h[f(x_2,y_2)+f(x_3,y_3^{(0)})]=0.6549+0.5\times 0.05\left[2\times 0.1\times e^{0.6549}+1+2\times 0.15\times e^{0.72414}+1\right] \\ y(x_3)\approx y_3=y_3^{(1)}=0.73 \end{cases}$$

i=4=>

$$\begin{cases} y(x_3)=y_3=0.73, \quad x_3=0.15, \quad x_4=0.2, \quad f(x,y)=2xe^y+1 \\ y_4^{(0)}=y_3+hf(x_3,y_3)=0.73+0.05(2\times 0.1\times e^{0.73}+1)=0.8008 \\ y_4^{(1)}=y_3+0.5h[f(x_3,y_3)+f(x_4,y_4^{(0)})]=0.73+0.5\times 0.05\left[2\times 0.15\times e^{0.73}+1+2\times 0.2\times e^{0.8008}+1\right] \\ y(x_3)\approx y_3=y_3^{(1)}=0.8178 \end{cases}$$

VD2: Giải phương trình vi phân thường bằng phương pháp Euler cải tiến với công thức 2 vòng lặp: $y'=2xe^y+1$, với $0\le x\le 0.2$, $y(0)=1$ bưới lưới $h=0.05$.

Bước 1: Kiểm tra tính duy nhất nghiệm

Ta có $f(x,y)=2xe^y+1\rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial y}=2xe^y$ liên tục trên R^2. Phương trình có duy nhất nghiệm.

Bước 2: Giải:

Ta có a=0, b=0.2, y_0=1, f(x,y)=2xe^y+1, h=0.05 ➔N=4

Xét tại i=1 ta sử dụng công thức 1 tính được $y_1^{(0)} = y_0 + h(2x_0e^{y_0} + 1) = 1.05$. Thay kết quả đó vào (2) ta được $y_1^{(1)} = y_0 + h(2x_0e^{y_0} + 1 + 2x_1e^{y_1^{(0)}} + 1)/2 = 1.057144$

Tiếp tục thay vào (3) ta được $y_1^{(2)} = y_0 + h(2x_0e^{y_0} + 1 + 2x_1e^{y_1^{(1)}} + 1)/2 = 1.057195$

$y(x_1) \approx y_1 = y_1^{(2)} = 1.057195$

Tương tự tại các nút khác ta có kết quả

x	0	0.05	0.1	0.15	0.2
y	1	1.057195	1.129865	1.220758	1.334131

VD 3: Cho hàm y=y(x) thỏa mãn

$$\begin{cases} y' = x^2 - y \\ y(0) = 1 \end{cases} ; \ x \in [0,1]$$

Tìm giá trị xấp xỉ của y(0.1), y(0.2) thỏa yêu cầu sai số 10^{-3}

Giải:

Bước 1: Kiểm tra phương trình có nghiệm duy nhất

Ta có $\begin{cases} f(x,y) = x^2 - y \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -1 \end{cases}$ liên tục trên R^2. Vậy phương trình có nghiệm riêng duy nhất.

Bước 2: Tính các giá trị y_1 = y(0.1) và y_2 = y(0.2)=>h=0.1

Tính y_1

$$\begin{cases} y_1^{(0)} = y_0 + hf(x_0, y_0) = y_0 + h(x_0{}^2 - y_0) = 1 + 0.1(0-1) = 0.9 \\ y_1^{(1)} = y_0 + \dfrac{h}{2}\left[f(x_0, y_0) + f(x_1, y_1^{(0)})\right] = y_0 + \dfrac{h}{2}\left[x_0{}^2 - y_0 + x_1{}^2 - y_1^{(0)}\right] = 0.9055 \\ \qquad \Rightarrow \left|y_1^{(1)} - y_1^{(0)}\right| = 5.5\times10^{-3} > 10^{-3} \\ y_1^{(2)} = y_0 + \dfrac{h}{2}\left[f(x_0, y_0) + f(x_1, y_1^{(1)})\right] = y_0 + \dfrac{h}{2}\left[x_0{}^2 - y_0 + x_1{}^2 - y_1^{(1)}\right] = 0.905225 \\ \qquad \Rightarrow \left|y_1^{(2)} - y_1^{(1)}\right| = 2.75\times10^{-4} < 10^{-3} \end{cases}$$

Vậy $y_1 = 0.905225$.

Tính y_2

$$\begin{cases} y_2^{(0)} = y_1 + hf(x_1, y_1) = y_1 + h(x_1{}^2 - y_1) = 0.905225 + 0.1(0.1^2 - 0.905225) = 0.815703 \\ y_2^{(1)} = y_1 + \dfrac{h}{2}\left[f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2^{(0)})\right] = 0.821679 \\ \qquad \Rightarrow \left|y_2^{(1)} - y_2^{(0)}\right| = 5.98\times10^{-3} > 10^{-3} \\ y_2^{(2)} = y_1 + \dfrac{h}{2}\left[f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2^{(1)})\right] = 0.82138 \\ \qquad \Rightarrow \left|y_2^{(2)} - y_2^{(1)}\right| = 2.99\times10^{-4} < 10^{-3} \end{cases}$$

Vậy $y_2 = 0.82138$.

6.4. PHƯƠNG PHÁP RUNGE-KUTTA 4

Kiểm tra bài toán có nghiệm duy nhất

Đặt $x_0 = a$, $y_0=y(x_0)$. Tính y_{i+1} theo công thức sau:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right) \quad i = 0,1,2,...,n-1$$
$$k_1 = hf(x_i, y_i)$$
$$k_2 = hf(x_i + 0.5h, y_i + 0.5k_1)$$
$$k_3 = hf(x_i + 0.5h, y_i + 0.5k_2)$$
$$k_4 = hf(x_i + h, y_i + k_3)$$

Ví dụ: Cho hàm y=y(x) thỏa mãn hệ

$$\begin{cases} y' = x^2 y \\ y(1) = 1, \quad x \in [1;2] \end{cases}$$

Tính giá trị xấp xỉ của y(1.1).

Bước 1: Kiểm tra phương trình có nghiệm duy nhất

Ta có $\begin{cases} f(x,y) = x^2 y \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2 \end{cases}$ liên tục trên R^2. Vậy phương trình có nghiệm riêng duy nhất.

Tính y_1 (với h=0.1)

$$\begin{cases} k_1^{(0)} = hf(x_0, y_0) = h(x_0{}^2 y_0) = 0.1 \\ k_2^{(0)} = hf\left(x_0 + \dfrac{h}{2}, y_0 + \dfrac{k_1^{(0)}}{2}\right) = h\left(x_0 + \dfrac{h}{2}\right)^2\left(y_0 + \dfrac{k_1^{(0)}}{2}\right) = 0.115763 \\ k_3^{(0)} = hf\left(x_0 + \dfrac{h}{2}, y_0 + \dfrac{k_2^{(0)}}{2}\right) = h\left(x_0 + \dfrac{h}{2}\right)^2\left(y_0 + \dfrac{k_2^{(0)}}{2}\right) = 0.116631 \\ k_4^{(0)} = hf\left(x_0 + h, y_0 + k_3^{(0)}\right) = h(x_0 + h)^2\left(y_0 + k_3^{(0)}\right) = 0.135112 \end{cases}$$

Vậy $y_1 = y_0 + \dfrac{k_1^{(0)} + 2k_2^{(0)} + 2k_3^{(0)} + k_4^{(0)}}{6} = 1.11665$.

6.5. BÀI TẬP

Bài 1. Giải phương trình vi phân thường bằng phương pháp Euler

a. $y' = 3x + 2y$, với $0 \le x \le 1$, $y(0) = 1$ bưới lưới $h = 0.1$

b. $y' = x^2 + y^2$, với $0 \le x \le 1$, $y(0) = 2$ bưới lưới $h = 0.2$

c. $y' = x^2 - y$, với $0 \le x \le 0.5$, $y(0) = 1$ bưới lưới $h = 0.125$

Lời giải:

a. $y' = 3x + 2y$, với $0 \le x \le 1$, $y(0) = 1$ bưới lưới $h = 0.1$

Bước 1: Kiểm tra tính duy nhất nghiệm

Ta có $f(x,y)=3x+2y \rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial y}=2$ liên tục trên R^2. Phương trình có duy nhất nghiệm.

Bước 2: Giải

Ta có a=0, b=1, $y_0=y(0)=1$, **f(x,y)=3x+2y**, h=0,1 ➔N=1/0,1=10

+) $x_1=0{,}1$; $y_1=y_0+h.f(x_0, y_0)=1+0{,}1.(3 . 0 + 2 . 1)=1{,}2$

+) $x_2=0{,}2$; $y_2=y_1+h.f(x_1, y_1)=1{,}2+0{,}1 .(3 . 0{,}1 + 2 . 1{,}2)= 1{,}47$

+) $x_3=0{,}3$; $y_3=y_2+h.f(x_2, y_2)=1{,}47+ 0{,}1.(3. 0{,}2+ 2.1{,}47)= 1{,}824$

+) $x_4=0{,}4$; $y_4=y_3+h.f(x_3, y_3)= 1{,}824+ 0{,}1.(3. 0{,}3+ 2.1{,}824)=2{,}2788$

+) $x_5=0{,}5$; $y_5=y_4+h.f(x_4, y_4)=2{,}2788+ 0{,}1. (3. 0{,}4+2. 2{,}2788)=2{,}85456$

+) $x_6=0{,}6$; $y_6=y_5+h.f(x_5, y_5)=3{,}57547$

+) $x_7=0{,}7$; $y_7=y_6+h.f(x_6, y_6)=4{,}47056$

+) $x_8=0{,}8$; $y_8=y_7+h.f(x_7, y_7)=5{,}57467$

+) $x_9=0{,}9$; $y_9=y_8+h.f(x_8, y_8)=6{,}9296$

+) $x_{10}=1$; $y_{10}=y_9+h.f(x_9, y_9)=8{,}58552$

b. $y'=x^2+y^2$, với $0\le x\le 1$, $y(0)=2$ bưới lưới $h=0.2$

Bước 1: Kiểm tra tính duy nhất nghiệm

Ta có $f(x,y)=x^2+y^2 \rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial y}=2y$ liên tục trên R^2. Phương trình có duy nhất nghiệm.

Bước 2: Giải

Ta có a=0, b=1, $y_0=y(0)=2$, $f(x,y)=x^2+y^2$, h=0,2 ➔N=1/0,2=5

+) $x_1=0{,}2$; $y_1=y_0+h.f(x_0, y_0)=2+0{,}2.(0 + 4)=2{,}8$

+) $x_2=0{,}4$; $y_2=y_1+h.f(x_1, y_1)=2{,}8+0{,}2 .(0{,}2^2 + 2{,}8^2)= 4{,}376$

+) $x_3=0{,}6$; $y_3=y_2+h.f(x_2, y_2)=4{,}376+ 0{,}2.(0{,}4^2+ 4{,}376^2)= 8{,}23788$

+) $x_4=0{,}8$; $y_4=y_3+h.f(x_3, y_3)= 8{,}23788+ 0{,}2.(0{,}6^2+ 8{,}23788^2)=21{,}88241$

+) $x_5=1$; $y_5=y_4+ h.f(x_4, y_4)=21,88241+ 0,2. (0,8^2+21,88241^2)=117,77838$

c. $y' = x^2 - y$, với $0 \le x \le 0.5$, $y(0) = 1$ bưới lưới $h = 0.125$

Bước 1: Kiểm tra tính duy nhất nghiệm

Ta có $f(x, y) = x^2 - y \to \dfrac{\partial f}{\partial y} = -1$ liên tục trên R^2. Phương trình có duy nhất nghiệm.

Bước 2: Giải

Ta có a=0, b=0.5, $y_0=y(0)=1$, $f(x, y) = x^2 - y$, h=0,125 ➔N=1/0,125=4

+) $x_1=0,125$; $y_1=y_0+ h.f(x_0, y_0)=1+0,125.(0 -1)=0,875$

+) $x_2=0,25$; $y_2=y_1+ h.f(x_1, y_1)=0,875+0,125 .(0,125^2 – 0.875)= 0,76758$

+) $x_3=0,375$; $y_3=y_2+ h.f(x_2, y_2)=0,76758+ 0,125.(0,25^2- 0,76758)= 0,67945$

+) $x_4=0,5$; $y_4=y_3+ h.f(x_3, y_3)= 0,67945+ 0,125.(0,375^2 -0,67945)=0,61209$

Bài 2.

a. Giải phương trình vi phân thường bằng phương pháp Euler cải tiến

$y' = 2x - y^2$, với $0 \le x \le 1$, $y(0) = 1$ bưới lưới $h = 0.25$ với 1 vòng lặp

b. Cho hàm số y=y(x) thỏa mãn $y' = x - 5y$, với $0 \le x \le 0.5$, $y(0) = 0.5$. Tính y(0.1) bằng cách sử dụng phương pháp Euler cải tiến với 2 vòng lặp.

Lời giải

a. $y' = 2x - y^2$, với $0 \le x \le 1$, $y(0) = 1$ bưới lưới $h = 0.25$ với 1 vòng lặp

Bước 1: Kiểm tra tính duy nhất nghiệm

Ta có $f(x, y) = 2x - y^2 \to \dfrac{\partial f}{\partial y} = -2y$ liên tục trên R^2. Phương trình có duy nhất nghiệm.

Bước 2: Giải: a=0, b=1, $y_0=y(0)=1$, h=0.25➔N=4, $f(x, y) = 2x - y^2$

i=1=> $\begin{cases} y(x_0)=y(0)=y_0=1; \quad x_1=0,25; \quad f(x,y)=2x-y^2 \\ y_1^{(0)}=y_0+hf(x_0,y_0)=1+0,25(2\times 0-1^2)=0.75 \\ y_1^{(1)}=y_0+0,5.h[f(x_0,y_0)+f(x_1,y_1^{(0)})]=1+0,5\times 0,25\left[2\times 0-1+2\times 0,25-0.75^2\right] \\ y(x_1)\approx y_1=y_1^{(1)}=0,86719 \end{cases}$

i=2=>

$$\begin{cases} y_1=0,86719; \quad x_1=0,25; \quad x_2=0,5; \quad f(x,y)=2x-y^2 \\ y_2^{(0)}=y_1+hf(x_1,y_1)=0,86719+0,25(2\times 0,25-0,86719^2)=0,80419 \\ y_2^{(1)}=y_1+0,5.h[f(x_1,y_1)+f(x_2,y_2^{(0)})]=0,86719+0,5\times 0,25\left[2\times 0,25-0,86719^2+2\times 0,5-0,80419^2\right] \\ y(x_2)\approx y_2=y_2^{(1)}=0,87985 \end{cases}$$

i=3=>

$$\begin{cases} y_2=0,87985; \quad x_2=0,5; \quad x_3=0,75; \quad f(x,y)=2x-y^2 \\ y_3^{(0)}=y_2+hf(x_2,y_2)=0,87985+0,25(2\times 0,5-0,87985^2)=0,93632 \\ y_3^{(1)}=y_2+0,5.h[f(x_2,y_2)+f(x_3,y_3^{(0)})]=0,87985+0,5\times 0,25\left[2\times 0,5-0,87985^2+2\times 0,75-0,93632^2\right] \\ y(x_3)\approx y_3=y_3^{(1)}=0,986 \end{cases}$$

i=4=>

$$\begin{cases} y_3=0,986; \quad x_3=0,75; \quad x_4=1; \quad f(x,y)=2x-y^2 \\ y_4^{(0)}=y_3+hf(x_3,y_3)=0,986+0,25(2\times 0,75-0,986^2)=1,11795 \\ y_4^{(1)}=y_4+0,5.h[f(x_3,y_3)+f(x_4,y_4^{(0)})]=0,986+0,5\times 0,25\left[2\times 0,75-0,986^2+2\times 1-1,11795^2\right] \\ y(x_4)\approx y_4=y_4^{(1)}=1,14574 \end{cases}$$

b. Cho hàm số y=y(x) thỏa mãn $y'=x-5y$, với $0\le x\le 0.5$, $y(0)=0.5$. Tính y(0.1) bằng cách sử dụng phương pháp Euler cải tiến với 2 vòng lặp.

Bài 3.

a. Cho hàm số y=y(x) thỏa mãn $y'=1+3xy$, với $0\le x\le 1$, $y(0)=1$.

Tính y(0.1) bằng cách sử dụng phương pháp Runge Kutta 4.

b. Cho hàm số y=y(x) thỏa mãn $y'=x+2y$, với $0\le x\le 0.6$, $y(0)=0.5$.

Tính y(0.1), y(0.2)bằng cách sử dụng phương pháp Runge Kutta 4.