BÀI GIẢNG MÔN PHƯƠNG PHÁP TÍNH

CHƯƠNG 0. NHẬP MÔN

1. Giới thiệu môn phương pháp tính

Phương pháp tính là bộ môn toán học có nhiệm vụ giải đến kết quả bằng số cho các bài toán, nó cung cấp các phương pháp giải cho những bài toán trong thực tế mà không có lời giải chính xác. Môn học này là cầu nối giữa toán học lý thuyết và các ứng dụng của nó trong thực tế. Trong thời đại tin học hiện nay thì việc áp dụng các phương pháp tính càng trở nên phổ biến nhằm tăng tốc độ tính toán.

2. Nhiệm vụ môn học

- Tìm ra các phương pháp giải cho các bài toán gồm: phương pháp (PP) đúng và phương pháp gần đúng.
    + Phương pháp: chỉ ra kết quả dưới dạng một biểu thức giải tích cụ thể.
    + Phương pháp gần đúng: thường cho kết quả sau một quá trình tính lặp theo một quy luật nào đó, nó được áp dụng trong trường hợp bài toán không có lời giải đúng hoặc nếu có thì quá phức tạp.
- Xác định tính chất nghiệm
- Giải các bài toán về cực trị
- Xấp xỉ hàm: khi khảo sát, tính toán trên một hàm f(x) khá phức tạp, ta có thể thay hàm f(x) bởi hàm g(x) đơn giản hơn sao cho $g(x) \cong f(x)$. Việc lựa chọn g(x) được gọi là phép xấp xỉ hàm.
- Đánh giá sai số : khi giải bài toán bằng phương pháp gần đúng thì sai số xuất hiện do sự sai lệch giữa giá trị nhận được với nghiệm thực của bài toán. Vì vậy ta phải đánh giá sai số để từ đó chọn ra được phương pháp tối ưu nhất

3. Trình tự giải bài toán trong phương pháp tính

- Khảo sát, phân tích bài toán
- Lựa chọn phương pháp dựa vào các tiêu chí sau:
    + Khối lượng tính toán ít
    + Đơn giản khi xây dựng thuật toán
    + Sai số bé
    + Khả thi
- Xây dựng thuật toán: sử dụng ngôn ngữ giả hoặc sơ đồ khối (càng mịn càng tốt)
- Viết chương trình: sử dụng ngôn ngữ lập trình (C, C++, Pascal, Matlab,…)
- Thực hiện chương trình, thử nghiệm, sửa đổi và hoàn chỉnh.

Chương 1. SAI SỐ

1.1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Trong kỹ thuật giá trị các thông số chúng ta tiếp cận nói chung không phải là giá trị đúng (vì nó là kết quả của các phép đo và thí nghiệm). Như vậy chúng ta đã sử dụng giá trị gần đúng thay cho giá trị đúng, việc này nẩy sinh nhiều vấn đề phức tạp vì giá trị đúng chỉ có một nhưng giá trị gần đúng thì rất nhiều. Để có cơ sở khoa học trong việc sử dụng các số gần đúng người ta đưa ra khái niệm sai số để đo độ *chênh lệch* giữa các giá trị đúng và giá trị gần đúng. Chú ý rằng khi sử dụng số gần đúng thay cho một số đúng nào đó người ta luôn phải dùng đồng thời hai đại lượng đó là : ***giá trị gần đúng và sai số***. Hai đại lượng này có vai trò như nhau.

1.2. SAI SỐ TUYỆT ĐỐI VÀ SAI SỐ TƯƠNG ĐỐI

1) Sai số tuyệt đối

Ta cần xấp xỉ A bằng số gần đúng a thì ta viết A $\approx$ a. Khi đó sai số phép tính gần đúng là mức chênh lệch giữa A và a, tức là $A \approx a$. Tuy nhiên, vì không tính đúng A được nên ta cũng không thể tính được mức chênh lệch này. Chúng ta sẽ đánh giá sai số bằng một cận trên của nó $|A-a|\le \Delta_a$. Khi đó Δ_a được gọi là sai số tuyệt đối giới hạn hay sai số tuyệt đối . Sai số tuyệt đối cho phép chúng ta xác định khoảng giá trị của đại lượng đúng A, tức là $A = a \pm \Delta a$. Do đó ta sẽ chọn Δ_a nhỏ nhất theo yêu cầu nào đó.

2) Sai số tương đối

Sai số tuyệt đối cho chúng ta xác định miền giá trị của đại lượng đúng A nhưng không cho biết mức chính xác của phép tính. Để so sánh sai số nhiều phép tính gần đúng khác nhau, chúng ta xét sai số tương đối (giới hạn) $\delta_a = \dfrac{\Delta_a}{|a|}$.

Chú ý: Sai số tuyệt đối không nói lên đầy đủ "chất lượng" của một số xấp xỉ, “chất lượng” ấy còn được phản ánh qua sai số tương đối.

1.3. CÁCH VIẾT SỐ XẤP XỈ

Cho số a một giá trị xấp xỉ a* với sai số tuyệt đối Δa thì ta có hai cách viết xấp xỉ a:

Cách 1: Viết kèm theo sai số a* = a ± Δa hay a* = a(1 ± δa).

Cách 2: Viết theo quy ước: mọi chữ số có nghĩa là đáng tin tức là nó có sai số tuyệt đối không lớn hơn một nửa đơn vị ở hàng cuối cùng. Bảng logarit,... thường viết theo cách này.

1.4. SAI SỐ QUY TRÒN

Hiện tượng quy tròn số: trong tính toán khi gặp một số có quá nhiều chữ số đáng nghi, người ta bỏ đi một chữ số ở cuối gọi là việc quy tròn số. Mỗi khi quy tròn một số người ta tạo ra một sai số mới gọi là sai số quy tròn. Trị tuyệt đối của sai số đó gọi là sai số quy tròn tuyệt đối.

Quy tắc quy tròn: Quy tròn sao cho sai số quy tròn tuyệt đối không lớn hơn một nửa đơn vị ở hàng được giữ lại cuối cùng tức là:

- Nếu chữ số bỏ đi đầu tiên ≥5 thì thêm vào chữ số giữ lại một đơn vị 1,2345678=>1,23457
- Nếu chữ số bỏ đi đầu tiên <5 thì để nguyên chữ số giữ lại cuối cùng.
- 1,123423=>1,12342

1.5. CÁC LOẠI SAI SỐ KHI XỬ LÝ BÀI TOÁN KỸ THUẬT

Khi giải một bài toán phức tạp người ta thường thay bài toán đó bằng bài toán đơn giản hơn để có thể giải được bằng tay hoặc bằng máy. Phương pháp thay bài toán phức tạp bằng một phương pháp đơn giản tính được như vậy gọi là ***phương pháp gần đúng***. Sai số do phương

pháp gần đúng tạo ra gọi là sai số phương pháp. Mặc dầu bài toán đã ở dạng đơn giản, nhưng trong quá trình giải ta thường xuyên phải làm tròn các kết quả hoặc xử dụng các số xấp xỉ , sai số tạo ra trong quá trình này gọi là ***sai số tính toán***. Trong thực tế việc đánh giá các loại sai số, nhất là sai số tính toán nhiều khi là bài toán rất khó thực hiện.

Tóm lại khi thực hiện một bài toán bằng ***phương pháp gần đúng*** ta thường gặp những loại sai số sau đây:

• *Sai số trong việc mô hình hóa* bài toán : xuất hiện do việc giả thiết bài toán đạt được một số điều kiện lý tưởng nhằm làm giảm độ phức tạp của bài toán.

• *Sai số phương pháp* : xuất hiện do việc giải bài toán bằng phương pháp gần đúng.

• *Sai số của số liệu* : xuất hiện do việc đo đạc và cung cấp giá trị đầu vào không chính xác.

• *Sai số tính toán* : xuất hiện do làm tròn số hoặc xử dụng các số xấp xỉ trong quá trình tính toán, quá trình tính càng nhiều thì sai số tích luỹ càng lớn.

Những sai số trên đây tổng hợp lại nhiều khi dẫn đến những lời giải quá cách xa so với lời giải đúng và vì vậy không thể dùng được. Chính vì vậy việc tìm ra những thuật toán hữu hiệu để giải các bài toán thực tế là điều rất cần thiết.

Chương 2. TÍNH GẦN ĐÚNG NGHIỆM THỰC CỦA MỘT PHƯƠNG TRÌNH

2.1. GIỚI THIỆU CHUNG

2.1.1. Đặt vấn đề

Khi giải quyết bài toán kỹ thuật chúng ta thường gặp loại yêu cầu : *Xác định thông số đầu vào, để đầu ra của một hệ thống nào đó đạt một mức cho trước.*
yêu cầu này có thể phát biểu bằng ngôn ngữ toán học như sau:

Xác định giá trị $x \in (a, b)$ *sao cho* $f(x) = 0$, (2.1)
Như chúng ta đã biết việc giải phương trình (2.1) không đơn giản (vì không có phương pháp chung) ngay cả khi $f(x)$ là đa thức có bậc lớn hơn 3. Trong kỹ thuật người ta có thể chấp nhận giá trị $x*$ (sao cho $f(x^*) \approx 0$) thay cho nghiệm đúng α của phương trình nhưng với điều kiện đánh giá được sai số tuyệt đối giữa $x*$ và α (Điều này cũng hoàn toàn hợp lý bởi thực tế ngay cả khi chúng ta xác định được chính xác giá trị thông số đầu vào thì khi qua hệ thống kết quả đầu ra cũng chỉ gần bằng với yêu cầu).
Giá trị $x*$ nói ở trên gọi là nghiệm gần đúng của phương trình (2.1). Việc đi tìm giá trị $x*$ và đánh giá sai số gọi là giải gần đúng phương trình.

2.1.2. Các bước giải gần đúng phương trình phi tuyến

Khi giải gần đúng nghiệm của phương trình (2.1) ta cần tuân theo các bước sau:
♣ *Bước 1*: Kiểm tra (2.1) có nghiệm đúng duy nhất trên (a,b) (hay (a,b) là khoảng phân ly nghiệm)
♣ *Bước 2:* Dùng các thuật toán để tìm giá trị $x*$ và đánh giá sai số.

2.2. NGHIỆM VÀ KHOẢNG PHÂN LY NGHIỆM

2.2.1. Nghiệm

Một phương trình đại số có dạng tổng quát f(x) = 0 (2.1).

Nghiệm phương trình là giá trị α thỏa mãn phương trình, tức là f(α) = 0.

Việc giải phương trình (2.1) được chia thành 2 bước:

- Bước sơ bộ: Tìm các khoảng tách nghiệm là những khoảng mà trên đó phương trình có nghiệm duy nhất.
- Bước kiện toàn: Tìm nghiệm gần đúng trên từng khoảng tách nghiệm.

2.2.2. Khoảng tách nghiệm (Khoảng phân ly nghiệm)

Việc tìm các khoảng tách nghiệm có nhiều cách. Ví dụ, chúng ta vẽ đồ thị y = f(x) và dựa vào đó tìm khoảng tách nghiệm. Trong phần này chúng ta nêu lại một kết quả giúp tìm khoảng tách nghiệm.

Định lý 2.1: Giả sử phương trình (2.1) thỏa mãn điều kiện f(x) có đạo hàm và f'(x) không đổi dấu trên [a, b]. Khi đó:

+ Nếu f(a) cùng dấu f(b) thì phương trình không có nghiệm trên [a,b]
+ Nếu f(a) trái dấu f(b) (tức là f(a).f(b)<0) thì [a,b] là khoảng tách nghiệm phương trình. Khi đó phương trình (2.1) có một nghiệm trong khoảng [a, b].
Chú ý: Để tìm khoảng tách nghiệm ta thực hiện các bước sau:
+ chỉ ra f(x) có đạo hàm và f'(x) không đổi dấu trên [a, b]→lập bảng biến thiên
+ f(a).f(b)<0
=>[a,b] là khoảng tách nghiệm phương trình.
Ví dụ:

a. Chứng minh rằng phương trình x^3-3x+5=0 có 1 nghiệm trong khoảng [-3; -1]

Đặt f(x)= x^3-3x+5, f'(x)=3x^2-3≥0 $\forall x \in [-3;-1]$ => f'(x) không đổi dấu trên [-3, -1] (1)

+ - +

-∞ -3 -1 1 +∞

f(-3)=$(-3)^3$-3.(-3)+5=-13

f(-1)=-1-3(-1)+5=7

=>f(-3).f(-1)<0 (2)

Vậy từ (1) và (2) => phương trình x^3-3x+5=0 có 1 nghiệm trong khoảng [-3; -1]

b. Chứng minh phương trình: x+e^x=0 có nghiệm trong khoảng [-1;1]

Đặt f(x)= x+e^x, f'(x)=1+e^x >0 $\forall x \in R$=>f'(x) không đổi dấu trên [-1;1] (1)

f(-1)=-1+e^{-1} =-0,63

f(1)=1+e=3,71

=> f(-1).f(1)<0 (2)

Từ (1) và (2)=> phương trình: x+e^x=0 có nghiệm trong khoảng [-1;1]

2.3. PHƯƠNG PHÁP LẶP ĐƠN

a. Mô tả phương pháp

- Giả sử phương trình (2.1) có khoảng tách nghiệm là (a, b)
- Biến đổi phương trình về dạng x=φ (x)➔Tìm hàm lặp hội tụ φ
- Chọn xấp xỉ ban đầu x^0
- Tính nghiệm theo công thức lặp $x_n=\varphi(x_{n-1})$ (n=1, 2, 3,…) cho tới khi $|x_n-x_{n-1}| < \varepsilon$ thì dừng.
- Kết quả: nghiệm gần đúng x_n với sai số $|\alpha - x_n| \le \dfrac{q}{1-q}\varepsilon$

trong đó q là số dương < 1 thỏa mãn $|\varphi'(x)| \le q < 1$ hay $q = max|\varphi'(x)| \quad \forall x \in [a,b]$

Trong thực tế người ta dừng quá trình tính khi $|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$ sai số cho phép

b. Điều kiện hội tụ của phương pháp

Định lý 2.2: Nếu hàm φ(x) có đạo hàm φ'(x) và thỏa mãn: $|\varphi'(x)| \le q < 1$ thì phương pháp lặp hội tụ, tức là: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \alpha$

c. Các ví dụ:

Ví dụ 1: Cho phương trình $x^3 - x - 1 = 0$

+ Chứng tỏ phương trình có nghiệm trong khoảng [1; 2]

+ Dùng phương pháp lặp đơn hãy tìm nghiệm gần đúng x_4 và tính sai số. Kết quả tính lấy 5 chữ số thập phân sau dấu phẩy.

Lời giải:

+ Ta có f (1) = -1, f(2)= 5 ➔ f(1).f(2) <0

Và $f'(x) = 3x^2-1 > 0$ với mọi x trong khoảng [1; 2]

nên phương trình có nghiệm trong khoảng [1; 2].

+ Từ phương trình $x^3 - x - 1 = 0$ ta có 2 cách biểu diễn là $x = x^3 - 1$ và $x = \sqrt[3]{1+x}$

Nếu chọn $\varphi(x) = x^3 - 1 \to \varphi'(x) = 3x^2 \ge 3 \quad \forall x \in [1,2]$ thì phép lặp không hội tụ.

Nếu chọn $\varphi(x) = \sqrt[3]{1+x} \to \varphi'(x) = \dfrac{1}{3}\dfrac{1}{\sqrt[3]{(1+x)^2}} \le \dfrac{1}{3\sqrt[3]{4}} = q < 1 \quad \forall x \in [1,2]$ thì phép lặp hội tụ.

Sử dụng công thức lặp $x_n = \varphi(x_{n-1})$ và chọn $x_0 = 1$ ta tính được

$$x_1 = \varphi(x_0) = \varphi(1) = \sqrt[3]{2} = 1.25992 \to |x_1 - x_0| = 0.25992$$
$$x_2 = \varphi(x_1) = \sqrt[3]{1+1.25992} = 1.31229 \to |x_2 - x_1| = 0.05237$$
$$x_3 = \varphi(x_2) = \sqrt[3]{1+1.31229} = 1.32235 \to |x_3 - x_2| = 0.01006$$
$$x_4 = \varphi(x_3) = \sqrt[3]{1+1.32235} = 1.32427 \to |x_4 - x_3| = 0.00192$$

Sai số $|\alpha - x_4| \le \dfrac{q}{1-q}|x_4 - x_3| = \dfrac{\frac{1}{3\sqrt[3]{4}}}{1-\frac{1}{3\sqrt[3]{4}}}0.00192 = 5.103\times 10^{-4}$

Ví dụ 2: Cho phương trình x^3 - 3x - 5=0

+ Chứng tỏ phương trình có nghiệm trong khoảng [2; 3]

+ Dùng phương pháp lặp hãy tìm nghiệm gần đúng x_4 và tính sai số. Kết quả tính lấy 5 chữ số thập phân sau dấu phẩy.

Lời giải:

+ Đặt f(x)=x^3 - 3x – 5. Ta có f (2) = -3, f(3)= 13 ➔ f(2).f(3) <0

Và f'(x) = $3x^2$-3> 0 với mọi x trong khoảng [2; 3]

nên phương trình có nghiệm trong khoảng [2; 3].

+ Từ phương trình $x^3 - 3x - 5 = 0$ ta có 2 cách biểu diễn là x = (x^3 – 5)/3 và $x = \sqrt[3]{5+3x}$

Nếu chọn $\varphi(x) = \dfrac{x^3-5}{3} \to \varphi'(x) = x^2 \ge 4 \quad \forall x \in [2,3]$ thì phép lặp không hội tụ.

Nếu chọn $\varphi(x) = \sqrt[3]{5+3x} \to \varphi'(x) = \dfrac{1}{3}\dfrac{3}{\sqrt[3]{(5+3x)^2}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{(5+3x)^2}} \le \dfrac{1}{\sqrt[3]{121}} = q < 1 \quad \forall x \in [2,3]$ thì phép lặp hội tụ. x=2 0.2021 x=3 0.17

Sử dụng công thức lặp $x_n = \varphi(x_{n-1})$ và chọn $x_0 = 2$ ta tính được

$x_1 = \varphi(x_0) = \varphi(2) = \sqrt[3]{5+3\times 2} = 2.22398 \to |x_1 - x_0| = 0.22398$

$x_2 = \varphi(x_1) = \sqrt[3]{5+3\times 2.22398} = 2.26837 \to |x_2 - x_1| = 0.04439$

$x_3 = \varphi(x_2) = \sqrt[3]{5+3\times 2.26837} = 2.27696 \to |x_3 - x_2| = 0.00859$

$x_4 = \varphi(x_3) = \sqrt[3]{5+3\times 2.27696} = 2.27862 \to |x_4 - x_3| = 0.00166$

Sai số $|\alpha - x_4| \le \dfrac{q}{1-q}|x_4 - x_3| = \dfrac{\dfrac{1}{\sqrt[3]{121}}}{1-\dfrac{1}{\sqrt[3]{121}}} 0.00166 = 4.206\times 10^{-4}$

Thực hành trên máy casio: $\varphi(x) = \sqrt[3]{5+3x}$

Bước tính	Bấm trên máy	Màn hình
x_0 **=2**	**2=**	**2**
$x_1 = \varphi(x_0)$	**(3*ans+5)^(1/3)**	2,223980091
$x_2 = \varphi(x_1)$	=	2,268372388
$x_3 = \varphi(x_2)$	=	2,276967161
$x_4 = \varphi(x_3)$	=	2,278623713

2.4. PHƯƠNG PHÁP NEWTON

a. Mô tả phương pháp

Giả sử phương trình (2.1) với khoảng tách nghiệm [a,b].

Gọi x* là nghiệm đúng của phương trình trên [a,b]. Giả sử đạo hàm f(x) và f’’(x) không đổi dấu (riêng đạo hàm cấp 1 khác 0) trên khoảng tách nghiệm.

1) Chọn một giá trị $x_0 \in [a;b]$ sao cho f(x_0) cùng dấu $f''(x_0)$ làm giá trị ban đầu (ta gọi x_0 như thế là điểm Fourier).

2) Tính $x_n = x_{n-1} - \dfrac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} \quad n = 1, 2, ...$

3) Sau một số bước lặp n ta tìm được nghiệm gần đúng x_n với sai số

$$|x_n - x^*| \le \frac{M}{2m}(x_n - x_{n-1})^2$$

Trong đó m và M đánh giá từ bất đẳng thức sau

$$|f'(x)| \ge m > 0, \quad |f''(x)| \le M, \quad \forall x \in [a,b]$$

b. Điều kiện hội tụ của phương pháp

Định lý 2.3: Giả sử phương trình (2.1) với khoảng tách nghiệm [a,b], f(x) có đạo hàm f'(x), f''(x) liên tục trên [a, b] và không đổi dấu trên [a, b] thì phương pháp lặp hội tụ, tức là: $\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$

c. Các ví dụ:

Ví dụ 1: Cho phương trình $f(x) = x^3 - x - 1 = 0$.

Dùng phương pháp Newton tìm ngiệm gần đúng của phương trình trên khoảng tách nghiệm [1; 2] với 3 bước lặp và đánh giá sai số.

Lời giải:

Ta có f'(x) = $3x^2$-1 ≥ 2, với mọi x trong khoảng [1; 2]→m=min(f'(x))=2

f''(x) = 6≤6x ≤12. → M=max(f''(x))=12

Ta tính f(2)=5>0 , f''(2)=12>0, cùng dấu dương nên chọn x_0=2. Ta sử dụng công thức

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}, \quad n = 1,2,3$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 2 - \frac{2^3 - 2 - 1}{3.2^2 - 1} = 1.54545$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 1.54545 - \frac{1.54545^3 - 1.54545 - 1}{3 \times 1.54545^2 - 1} = 1.35961$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 1.35961 - \frac{1.35961^3 - 1.35961 - 1}{3 \times 1.35961^2 - 1} = 1.32580$$

$$x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)} = 1.32580 - \frac{1.32580^3 - 1.32580 - 1}{3 \times 1.32580^2 - 1} = 1.32472$$

Sai số

$$|x_n-\alpha|\le\frac{M}{2m}(x_n-x_{n-1})^2\to|x_3-\alpha|\le\frac{12}{2.2}(x_3-x_2)^2=0.00686$$

$$\to|x_4-\alpha|\le\frac{12}{2.2}(x_4-x_3)^2=3.4992\times10^{-6}$$

Ví dụ 2: Cho phương trình $f(x) = x^5 + x - 5 = 0$

Dùng phương pháp Newton giải phương trình trên khoảng tách nghiệm [1; 2] với 4 bước lặp và đánh giá sai số.

Lời giải:

Ta có f'(x) = $5x^4+1 \ge 6$, với mọi x trong khoảng [1; 2]→m=min(f'(x))=6

f''(x) = $20 \le 20x^3 \le 160$ → M=max(f''(x))=160

Ta tính f(1)=6>0 , f''(1)=20>0, cùng dấu dương nên chọn x_0=1. Ta sử dụng công thức

$$x_n=x_{n-1}-\frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})},\quad n=1,2,3,4$$

$$x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}=1-\frac{1^5+1-5}{5.1^4+1}=1.5$$

$$x_2=x_1-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}=1.5-\frac{1.5^5+1.5-5}{5\times1.5^4+1}=1.34441$$

$$x_3=x_2-\frac{f(x_2)}{f'(x_2)}=1.34441-\frac{1.34441^5+1.34441-5}{5\times1.34441^4+1}=1.30192$$

$$x_4=x_3-\frac{f(x_3)}{f'(x_3)}=1.30192-\frac{1.30192^5+1.30192-5}{5\times1.30192^4+1}=1.29916$$

Sai số

$$|x_n-\alpha|\le\frac{M}{2m}(x_n-x_{n-1})^2\to|x_4-\alpha|\le\frac{160}{2.6}(x_4-x_3)^2=1.01568\times10^{-4}$$

Thực hành trên máy casio: giải pt $f(x)\equiv x^3-3x-5=0\Rightarrow f'(x)=3x^2-3$

Bước tính	**Bấm trên máy**	**Màn hình**
x_0 **=3**	**3=**	**3**
$x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$	Ans-(ans^3-3*ans-5)/(3*ans^2-3) =	2,458333333

$x_2 = x_1 - \dfrac{f(x_1)}{f'(x_1)}$	=	2,294310576
$x_3 = x_2 - \dfrac{f(x_2)}{f'(x_2)}$	=	2,279144331
$x_4 = x_3 - \dfrac{f(x_3)}{f'(x_3)}$	=	2,279018795

2.5. BÀI TẬP

Mỗi bài toán sau hãy dùng phương pháp lặp đơn và phương pháp Newton giải gần đúng với yêu cầu

a. Ba bước lặp có đánh giá sai số. b. Sai số không quá 10^{-4}.

1. Phương trình $x^3 + x + 1 = 0$ trên khoảng tách nghiệm [-0,8;0]

2. Phương trình $e^x + 2x = 0$ trên khoảng tách nghiệm [-1;0]

3. Phương trình x = ln(x+2) trên khoảng tách nghiệm [1;2]

4. Phương trình x = cosx trên khoảng tách nghiệm [0,6;0,8]

Chương 3. TÍNH GẦN ĐÚNG NGHIỆM CỦA MỘT HỆ ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

3.1. GIỚI THIỆU CHUNG

Khi xác định giá trị các thông số trong kỹ thuật đôi khi chúng ta phải giải hệ thống các phương trình tuyến tính

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad \text{(I)}$$

Đặt $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$, ma trận A được gọi là *ma trận hệ số* của hệ (I).

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ được gọi là *ma trận ẩn* ; $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ được gọi là *ma trận vế phải*

Bằng phép nhân ma trận, hệ phương trình (I) được viết ở dạng ma trận như sau:

$$AX = B \qquad \text{(II)}$$

Để giải hệ trên người ta đi theo hai hướng sau:

Hướng giải đúng: Sử dụng các phương pháp giải đúng để tìm ra giá trị chính xác của các nghiệm xj. Một số phương pháp tiêu biểu như : Cramer, Gauss…đã được khảo sát trong môn toán cao cấp.

Hướng giải gần đúng: Sử dụng các phương pháp giải gần đúng để tìm ra giá trị xấp xỉ của các nghiệm xj. Một số phương pháp tiêu biểu như : Lặp đơn, Seidel,…

Nhận xét:

- Hướng giải đúng có ưu điểm là tìm ra được giá trị đúng của nghiệm trong trường hợp hệ có nghiệm duy nhất và chỉ ra được khi nào hệ vô nghiệm hoặc có vô số nghiệm. Tuy nhiên lại rất khó thực hiện trong trường hợp các hệ số aij , bi là các số thập phân.

- Hướng giải gần đúng có khuyết điểm là chỉ tìm ra được giá trị gần đúng của nghiệm trong trường hợp hệ có nghiệm duy nhất và không chỉ ra được khi nào hệ vô nghiệm hoặc có vô số nghiệm. Tuy nhiên lại tỏ ra hiệu quả trong trường hợp các hệ số aij ,bi là các số thập phân. Khi mô hình hóa bài toán kỹ thuật bằng hệ phương trình, thường hệ có các hệ số rất lẻ và chỉ có duy nhất nghiệm nên hướng giải gần đúng chiếm hầu hết khi giải bài toán kỹ thuật.

Lưu ý. Các phương pháp giải gần đúng dưới đây chỉ giải được một số hệ có dạng đặc biệt (sẽ được chỉ rõ trong từng thuật toán). Nếu không phải là dạng này thì chúng ta phải dùng hướng giải đúng để xử lý.

Các bước giải gần đúng hệ phương trình tuyến tính

Khi giải gần đúng nghiệm của hệ phương trình (I) ta cần tuân thủ các bước sau:

♣ *Bước 1*: Kiểm tra (I) có nghiệm đúng duy nhất

♣ *Bước 2:* Dùng các thuật toán để tìm giá trị gần đúng của nghiệm và đánh giá sai số

Một số khái niệm toán học cần thiết trong việc thực hiện giải gần đúng

Để thực hiện bước 1, 2 ta cần nhắc lại và xây dựng một số khái niệm sau

Cho ma trận chữ nhật A cấp m x n:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n}$$

Định nghĩa 1. Ta nói chuẩn của ma trận A là một trong các số sau:

$$\|A\|_\infty (\|A\|_0) = max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \qquad\qquad \|A\|_1 = max_j \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$

Ghi chú: Người ta thường dùng kí hiệu $\|A\|$ chung cho các chuẩn trên.

Trong không gian véc tơ R^n người ta xây dựng khái niệm chuẩn của véc tơ như sau:

Định nghĩa 2. Trong không gian véc tơ R^n cho vecto $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Ta nói chuẩn của vecto x là một trong các số sau.

$\|x\|_{0(\infty)} = max(x_j)$,

$\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + ... + |x_n|$

$\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2}$

Định lý 3.1 (Sự duy nhất nghiệm của hệ I): Xét hệ (I) khi m=n, và nếu det(A) khác 0 thì hệ (I) có 1 nghiệm duy nhất.

3.2. PHƯƠNG PHÁP LẶP ĐƠN

a. Mô tả phương pháp

+) Giả sử hệ phương trình đại số tuyến tính (I) có nghiệm duy nhất

+) Biến đổi đưa hệ phương trình (I) về dạng tương đương: **X=αX+β**

+) Chọn xấp xỉ ban đầu $X^{(0)}$ tùy ý (hay chọn $X^{(0)}$=(0; 0; 0))

+) Tính nghiệm theo công thức: $X^{(m)} = \alpha X^{(m-1)} + \beta \quad (m = 1, 2, ...)$

Cho tới khi $\left\| X^{(m)} - X^{(m-1)} \right\|_p < \varepsilon$ (ε là sai số cho trước) thì dừng quá trình tính.

+) Kết quả $X^{(m)} \approx X^*$ với sai số $\left\| X^{(m)} - X^* \right\|_p \leq \dfrac{\|\alpha\|_p}{1 - \|\alpha\|_p} \left\| X^{(m)} - X^{(m-1)} \right\|_p$

b. Điều kiện hội tụ của phương pháp

Định lý 3.2: *Nếu ma trận α có chuẩn bé hơn 1 thì phương pháp lặp đơn hội tụ.*

c. Các ví dụ:

Ví dụ 1: Giải hệ phương trình sau bằng phương pháp lặp đơn với 4 bước lặp và đánh giá sai số.

$$\begin{cases} 4x_1 + 0.24x_2 - 0.08x_3 = 8 \\ 0.09x_1 + 3x_2 - 0.15x_3 = 9 \\ 0.04x_1 - 0.08x_2 + 4x_3 = 20 \end{cases}$$

Giải:

Bước 1: *Kiểm tra hệ có nghiệm duy nhất*

Ta thấy det(A)=47,874336 khác 0 nên hệ có một nghiệm duy nhất.

Bước 2: *Tính gần đúng và đánh giá sai số*

Hệ phương trình trên tương đương với

$$\begin{cases} 4x_1 + 0.24x_2 - 0.08x_3 = 8 \\ 0.09x_1 + 3x_2 - 0.15x_3 = 9 \\ 0.04x_1 - 0.08x_2 + 4x_3 = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x_1 = -0.24x_2 + 0.08x_3 + 8 \\ 3x_2 = -0.09x_1 + 0.15x_3 + 9 \\ 4x_3 = -0.04x_1 + 0.08x_2 + 20 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = -0.06x_2 + 0.02x_3 + 2 \\ x_2 = -0.03x_1 + 0.05x_3 + 3 \Rightarrow X = \alpha X + \beta \\ x_3 = -0.01x_1 + 0.02x_2 + 5 \end{cases}$$

Với $\alpha = \begin{bmatrix} 0 & -0.06 & 0.02 \\ -0.03 & 0 & 0.05 \\ -0.01 & 0.02 & 0 \end{bmatrix}, \beta = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$

$$\sum_{j=1}^{3} |\alpha_{1j}| = 0 + 0.06 + 0.02 = 0.08, \sum_{j=1}^{3} |\alpha_{2j}| = 0.03 + 0 + 0.05 = 0.08$$

$$\sum_{j=1}^{3} |\alpha_{3j}| = 0.01 + 0.02 + 0 = 0.03 \Rightarrow \|\alpha\|_0 = max\{0.08,\ 0.08,\ 0.03\} = 0.08 < 1$$

Do đó phép lặp đơn hội tụ với mọi $X^{(0)}$ cho trước. Ta chọn $X^{(0)}=(0,\ 0,\ 0)^T$. Ta sử dụng công thức $X^{(m)} = \alpha X^{(m-1)} + \beta$

Với m=1 ta có $X^{(1)} = \alpha X^{(0)} + \beta = \begin{bmatrix} 0 & -0.06 & 0.02 \\ -0.03 & 0 & 0.05 \\ -0.01 & 0.02 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$

Với m=2 ta có $X^{(2)} = \alpha X^{(1)} + \beta = \begin{bmatrix} 0 & -0.06 & 0.02 \\ -0.03 & 0 & 0.05 \\ -0.01 & 0.02 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.08 \\ 0.19 \\ 0.04 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.92 \\ 3.19 \\ 5.04 \end{bmatrix}$

Với m=3 ta có $X^{(3)} = \alpha X^{(2)} + \beta = \begin{bmatrix} 0 & -0.06 & 0.02 \\ -0.03 & 0 & 0.05 \\ -0.01 & 0.02 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.92 \\ 3.19 \\ 5.04 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.096 \\ 0.1944 \\ 0.0446 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.904 \\ 3.1944 \\ 5.0446 \end{bmatrix}$

Với m=4 ta có

$$X^{(4)} = \alpha X^{(3)} + \beta = \begin{bmatrix} 0 & -0.06 & 0.02 \\ -0.03 & 0 & 0.05 \\ -0.01 & 0.02 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.904 \\ 3.1944 \\ 5.0446 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.090772 \\ 0.19511 \\ 0.044848 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.909228 \\ 3.19511 \\ 5.044848 \end{bmatrix}$$

Kết quả tính ghi thành bảng

m	0	1	2	3	4
$X_1^{(m)}$	0	2	1.92	1.9094	1.90923
$X_2^{(m)}$	0	3	3.19	3.1944	3.19511
$X_3^{(m)}$	0	5	5.04	5.0446	5.044848

Để đánh giá sai số ta tính

$\left\| X^{(4)} - X^{(3)} \right\|_0 = max\{| X_i^{(4)} - X_i^{(3)}|\}$,i=1,2,3.

$=\max\{0.00017; 0.00071; 0.000248\} = 0.00071$

Áp dụng công thức tính sai số trên ta có

$$\left\| X^{(4)} - X^* \right\| \le \frac{0.08}{1-0.08} 0.00071 = 6.17\times 10^{-5}$$

Khi đó $X^*_i = X_i^{(4)} \pm 0.0000617$.

Ví dụ 2: Giải hệ phương trình sau bằng phương pháp lặp đơn với 4 bước lặp và đánh giá sai số.

$$\begin{cases} 10x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 20 \\ -2x_1 + 20x_2 - 5x_3 = 40 \\ x_1 - 3x_2 + 10x_3 = 8 \end{cases}$$

***Bước 1:** Kiểm tra hệ có nghiệm duy nhất*

Ta thấy det(A)= 1862 khác 0 nên hệ có một nghiệm duy nhất.

***Bước 2:** Tính gần đúng và đánh giá sai số*

Hệ phương trình trên tương đương với

$$\begin{cases} 10x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 20 \\ -2x_1 + 20x_2 - 5x_3 = 40 \\ x_1 - 3x_2 + 10x_3 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10x_1 = 2x_2 + 3x_3 + 20 \\ 20x_2 = 2x_1 + 5x_3 + 40 \\ 10x_3 = -x_1 + 3x_2 + 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0.2x_2 + 0.3x_3 + 2 \\ x_2 = 0.1x_1 + 0.25x_3 + 2 \\ x_3 = -0.1x_1 + 0.3x_2 + 0.8 \end{cases}$$

$\Rightarrow X = \alpha X + \beta$

$$\alpha = \begin{bmatrix} 0 & 0.2 & 0.3 \\ 0.1 & 0 & 0.25 \\ -0.1 & 0.3 & 0 \end{bmatrix}, \quad \beta = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0.8 \end{bmatrix}$$

$$\sum_{j=1}^{3}|\alpha_{1j}| = 0+0.2+0.3 = 0.5,\quad \sum_{j=1}^{3}|\alpha_{2j}| = 0.1+0+0.25 = 0.35$$

$$\sum_{j=1}^{3}|\alpha_{3j}| = 0.1+0.3+0 = 0.4 \Rightarrow \|\alpha\|_0 = max\{0.5,\ 0.35,\ 0.4\} = 0.5 < 1$$

Do đó phép lặp đơn hội tụ với mọi $X^{(0)}$ cho trước. Ta chọn $X^{(0)}=(0,\ 0,\ 0)^T$. Ta sử dụng công thức $X^{(m)} = \alpha X^{(m-1)} + \beta$

Với m=1 ta có $X^{(1)} = \alpha X^{(0)} + \beta = \begin{bmatrix} 0 & 0.2 & 0.3 \\ 0.1 & 0 & 0.25 \\ -0.1 & 0.3 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0.8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0.8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0.8 \end{bmatrix}$

Với m=2 ta có $X^{(2)} = \alpha X^{(1)} + \beta = \begin{bmatrix} 0 & 0.2 & 0.3 \\ 0.1 & 0 & 0.25 \\ -0.1 & 0.3 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0.8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0.8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.64 \\ 0.4 \\ 0.4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0.8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.64 \\ 2.4 \\ 1.2 \end{bmatrix}$

Với m=3 ta có $X^{(3)} = \alpha X^{(2)} + \beta = \begin{bmatrix} 0 & 0.2 & 0.3 \\ 0.1 & 0 & 0.25 \\ -0.1 & 0.3 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2.64 \\ 2.4 \\ 1.2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0.8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.84 \\ 0.564 \\ 0.456 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0.8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.84 \\ 2.564 \\ 1.256 \end{bmatrix}$

Với m=4 ta có $X^{(4)} = \alpha X^{(3)} + \beta = \begin{bmatrix} 0 & 0.2 & 0.3 \\ 0.1 & 0 & 0.25 \\ -0.1 & 0.3 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2.84 \\ 2.564 \\ 1.256 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0.8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8896 \\ 0.598 \\ 0.4852 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0.8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.8896 \\ 2.598 \\ 1.2852 \end{bmatrix}$

Kết quả tính ghi thành bảng

m	$X^{(0)}$	$X^{(1)}$	$X^{(2)}$	$X^{(3)}$	$X^{(4)}$
$X_1^{(m)}$	0	2	2.64	2.84	2.8896
$X_2^{(m)}$	0	2	2.4	2.564	2.598
$X_3^{(m)}$	0	0.8	1.2	1.256	1.2852

Để đánh giá sai số ta tính

$\left\|X^{(4)} - X^{(3)}\right\|_0 = max\{|X_i^{(4)} - X_i^{(3)}|\}$,i=1,2,3.

=$\max\{0.0496; 0.034; 0.0292\} = 0.0496$

Áp dụng công thức tính sai số trên ta có

$$\left\|X^{(4)} - X^*\right\| \le \frac{0.5}{1-0.5} \times 0.0496 = 4.96\times 10^{-2}.$$

3.3. PHƯƠNG PHÁP SEIDEL

a. Mô tả phương pháp

+) Giả sử hệ phương trình đại số tuyến tính (I) có nghiệm duy nhất.

+) Biến đổi đưa hệ phương trình (I) về dạng tương đương: **X=αX+β**

Nếu **α =L+U (L** là ma trận tam giác dưới**, U** là ma trận tam giác trên**)**

+) Chọn xấp xỉ ban đầu $X^{(0)}$ tùy ý (hay chọn $X^{(0)}$=(0; 0; 0))

+) Tính nghiệm theo công thức: $X^{(m)} = (I-L)^{-1}(UX^{(m-1)} + \beta) \quad (m = 1,2,...)$

Cho tới khi $\left\| X^{(m)} - X^{(m-1)} \right\|_p < \varepsilon$ (ε là sai số cho trước) thì dừng quá trình tính.

+) Kết quả $X^{(m)} \approx X^*$ với sai số $\left\| X^{(m)} - X^* \right\|_p \le \dfrac{\|L\|_p}{1 - \|\alpha\|_p} \left\| X^{(m)} - X^{(m-1)} \right\|_p$

b. Điều kiện hội tụ của phương pháp

Định lý *Nếu ma trận α có chuẩn bé hơn 1 thì phương pháp lặp Seidel hội tụ.*

c. Các ví dụ:

Ví dụ 1: Giải hệ phương trình sau bằng phương pháp lặp Seidel với sai số 10^{-2}.

$$\begin{cases} 10x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 20 \\ -2x_1 + 20x_2 - 5x_3 = 40 \\ x_1 - 3x_2 + 10x_3 = 8 \end{cases}$$

Giải

Bước 1: *Kiểm tra hệ có nghiệm duy nhất*

Det(A)=1862 khác 0 nên hệ có nghiệm duy nhất.

Bước 2: *Tính gần đúng và đánh giá sai số*

Biến đổi đưa hệ phương trình về dạng tương đương: **X=αX+β**

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 0.2 & 0.3 \\ 0.1 & 0 & 0.25 \\ -0.1 & 0.3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0 & 0 \\ -0.1 & 0.3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0.2 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0.25 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \beta = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0.8 \end{pmatrix}$$

$$= \qquad L \qquad + \qquad U$$

$$\begin{cases} \|\alpha\|_\infty = 0.5 < 1, \quad \|L\|_\infty = 0.4 \\ I_3 - L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0 & 0 \\ -0.1 & 0.3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0.1 & 1 & 0 \\ 0.1 & -0.3 & 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Chọn $X^{(0)}=\beta$. Ta tính

$$\begin{cases} x^{(1)} = (I-L)^{-1}\left[Ux^{(0)}+\beta\right] = \begin{pmatrix} 2.64 \\ 2.464 \\ 1.2752 \end{pmatrix} \\ \Delta_1 \le \dfrac{\|L\|_\infty}{1-\|\alpha\|_\infty}\left\|x^{(1)} - x^{(0)}\right\|_\infty = \dfrac{0.4}{1-0.5}\times 0.64 = 0.512 > 10^{-2} \end{cases};$$

$$\begin{cases} x^{(2)} = (I-L)^{-1}\left[Ux^{(1)}+\beta\right] = \begin{pmatrix} 2.87536 \\ 2.606336 \\ 1.294365 \end{pmatrix} \\ \Delta_2 \le \dfrac{\|L\|_\infty}{1-\|\alpha\|_\infty}\left\|x^{(2)} - x^{(1)}\right\|_\infty \approx \dfrac{0.4}{1-0.5}\times 0.24 \approx 0.192 > 10^{-2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^{(3)} = (I-L)^{-1}\left[Ux^{(2)}+\beta\right] = \begin{pmatrix} 2.909577 \\ 2.614549 \\ 1.293407 \end{pmatrix} \\ \Delta_3 \le \dfrac{\|L\|_\infty}{1-\|\alpha\|_\infty}\left\|x^{(3)} - x^{(2)}\right\|_\infty \approx \dfrac{0.4}{1-0.5}\times 0.034 \approx 2.72\times 10^{-2} > 10^{-2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^{(4)} = (I-L)^{-1}\left[Ux^{(3)}+\beta\right] = \begin{pmatrix} 2.910932 \\ 2.614445 \\ 1.29324 \end{pmatrix} \\ \Delta_4 \le \dfrac{\|L\|_\infty}{1-\|\alpha\|_\infty}\left\|x^{(4)} - x^{(3)}\right\|_\infty \approx \dfrac{0.4}{1-0.5}\times 1.4\times 10^{-3} \approx 1.12\times 10^{-3} < 10^{-2} \end{cases}$$

Vậy nghiệm gần đúng thỏa mãn bài toán là $x^{(4)}$.

3.4. BÀI TẬP

Giải hệ đại số tuyến tính sau bằng phương pháp lặp đơn và phương pháp Seidel

a. $\begin{cases} x_1 - 0.05x_2 - 0.10x_3 = 0.795 \\ -0.11x_1 + x_2 - 0.05x_3 = 0.849 \\ -0.11x_1 - 0.12x_2 + x_3 = 1.398 \end{cases}$ với 4 lần lặp

Bước 1: *Kiểm tra hệ có nghiệm duy nhất*

Ta thấy det(A)= -0,001595 khác 0 nên hệ có một nghiệm duy nhất.

Bước 2: *Tính gần đúng và đánh giá sai số*

Hệ phương trình trên tương đương với

$$\begin{cases} x_1 - 0.05x_2 - 0.10x_3 = 0.795 \\ -0.11x_1 + x_2 - 0.05x_3 = 0.849 \\ -0.11x_1 - 0.12x_2 + x_3 = 1.398 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0.05x_2 + 0.10x_3 + 0.795 \\ x_2 = 0.11x_1 + 0.05x_3 + 0.849 \\ x_3 = 0.11x_1 + 0.12x_2 + 1.398 \end{cases}$$

$$\Rightarrow X = \alpha X + \beta$$

$$\alpha = \begin{bmatrix} 0 & 0.05 & 0.1 \\ 0.11 & 0 & 0.05 \\ 0.11 & 0.12 & 0 \end{bmatrix}, \quad \beta = \begin{bmatrix} 0.795 \\ 0.849 \\ 1.398 \end{bmatrix}$$

$$\sum_{j=1}^{3} |\alpha_{1j}| = 0 + 0.05 + 0.1 = 0.15, \quad \sum_{j=1}^{3} |\alpha_{2j}| = 0.11 + 0 + 0.05 = 0.16$$

$$\sum_{j=1}^{3} |\alpha_{3j}| = 0.11 + 0.12 + 0 = 0.23 \Rightarrow \|\alpha\|_0 = max\{0.15, 0.16, 0.23\} = 0.23 < 1$$

Do đó phép lặp đơn hội tụ với mọi $X^{(0)}$ cho trước. Ta chọn $X^{(0)}=(0, 0, 0)^T$. Ta sử dụng công thức $X^{(m)} = \alpha X^{(m-1)} + \beta$

Với m=1 ta có $X^{(1)} = \alpha X^{(0)} + \beta = \begin{bmatrix} 0 & 0.05 & 0.1 \\ 0.11 & 0 & 0.05 \\ 0.11 & 0.12 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.795 \\ 0.849 \\ 1.398 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.795 \\ 0.849 \\ 1.398 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.795 \\ 0.849 \\ 1.398 \end{bmatrix}$

Với m=2 ta có

$$X^{(2)} = \alpha X^{(1)} + \beta = \begin{bmatrix} 0 & 0.05 & 0.1 \\ 0.11 & 0 & 0.05 \\ 0.11 & 0.12 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.795 \\ 0.849 \\ 1.398 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.795 \\ 0.849 \\ 1.398 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.18225 \\ 0.15735 \\ 0.18933 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.795 \\ 0.849 \\ 1.398 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.97725 \\ 1.00635 \\ 1.58733 \end{bmatrix}$$

Với m=3 ta có

$$X^{(3)} = \alpha X^{(2)} + \beta = \begin{bmatrix} 0 & 0.05 & 0.1 \\ 0.11 & 0 & 0.05 \\ 0.11 & 0.12 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.97725 \\ 1.00635 \\ 1.58733 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.795 \\ 0.849 \\ 1.398 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.20905 \\ 0.18686 \\ 0.22825 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.795 \\ 0.849 \\ 1.398 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.00405 \\ 1.03586 \\ 1.62625 \end{bmatrix}$$

Với m=4 ta có

$$X^{(4)} = \alpha X^{(3)} + \beta = \begin{bmatrix} 0 & 0.05 & 0.1 \\ 0.11 & 0 & 0.05 \\ 0.11 & 0.12 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.00405 \\ 1.03586 \\ 1.62625 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.795 \\ 0.849 \\ 1.398 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.21441 \\ 0.19175 \\ 0.23474 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.795 \\ 0.849 \\ 1.398 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.00941 \\ 1.04075 \\ 1.63274 \end{bmatrix}$$

Kết quả tính ghi thành bảng

m	$X^{(0)}$	$X^{(1)}$	$X^{(2)}$	$X^{(3)}$	$X^{(4)}$
$X_1^{(m)}$	0	0.795	0.97725	1.00405	1.00941
$X_2^{(m)}$	0	0.849	1.00635	1.03586	1.004075
$X_3^{(m)}$	0	1.398	1.58733	1.62625	1.63274

Để đánh giá sai số ta tính

$$\left\| X^{(4)} - X^{(3)} \right\|_0 = max\{| X_i^{(4)} - X_i^{(3)}|\}, i=1,2,3.$$

$$=\max\{0.00536; 0.00489; 0.00649\} = 0.00649$$

Áp dụng công thức tính sai số trên ta có

$$\left\| X^{(4)} - X^* \right\| \le \frac{0.23}{1-0.23} \times 0.00649 = 1.93 \times 10^{-3}.$$

b. $\begin{cases} 10x_1 - x_2 + x_3 = 7 \\ 2x_1 + 10x_2 - x_3 = 9 \\ x_1 + x_2 + 10x_3 = 12 \end{cases}$ với 4 lần lặp và đánh giá sai số

c. $\begin{cases} 10x_1 + 2x_2 + x_3 = 10 \\ x_1 + 10x_2 + 2x_3 = 12 \\ x_1 + x_2 + 10x_3 = 8 \end{cases}$ với 4 lần lặp, xấp xỉ $x^{(0)}$=(0,1,0) và đánh giá sai số

d. $\begin{cases} 40x_1 + 2x_2 + x_3 = 90 \\ x_1 + 50x_2 + 4x_3 = 120 \\ 2x_1 + 3x_2 + 40x_3 = 180 \end{cases}$ thỏa mãn yêu cầu sai số 10^{-3}