今天与大家分享一个很高效的精确求解无穷个随机变量之和的 CDF（累积分布函数）的方法。

题意：设$Y=\sum_{i=1}^{\infty}X_i$，其中X_i为互相独立的正随机变量。已知Y有上界U。给定一个正数$a\le U$，希望求出$Pr[Y<a]$。

尝试：由于题目是无穷个随机变量的和，无法一个个枚举所有变量的情况，而且由大数定理，Y的分布类似于高斯分布，重尾效应严重（即有限的部分和无法精确拟合真正的Y的分布），故直接暴力枚举（有限个）X_i并不能精确求解概率。

分析：定义函数

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{if } 0\le x<a\\ 0 & \text{if } a\le x<U\end{cases}$$

可以发现$Pr[Y<a]=E[f(Y)]$。观察到$f(x)$定义域是$[0,U)$，可将$f(x)$周期延拓至整个实数轴，并将$f(x)$展开成**傅里叶级数**，有傅里叶系数$a_n=\frac{2}{U}\int_0^U cos(2\pi x\frac{n}{U})=\frac{sin(2\pi\frac{n}{U}a)}{\pi n}(n\ge 1)$，$a_0=\frac{2a}{U}$，$b_n=\frac{2}{U}\int_0^U sin(2\pi x\frac{n}{U})=\frac{1-cos(2\pi\frac{n}{U}a)}{\pi n}(n\ge 1)$。于是可以得到

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n\ge 1}[a_n cos(\frac{2\pi nx}{U})+b_n sin(\frac{2\pi nx}{U})]$$

$=\frac{a}{U}+\sum_{n\ge 1}[\frac{\sin(2\pi\frac{n}{U}a)}{\pi n}\cdot\cos(2\pi\frac{n}{U}x)+\frac{1-\cos(2\pi\frac{n}{U}a)}{\pi n}\cdot\sin(2\pi\frac{n}{U}x)]$。

令$A_n=\frac{2\pi n}{U}$，上式化简为$f(x)=\frac{a}{U}+\frac{2}{U}\sum_{n\ge 1}[\frac{\sin(aA_n)}{A_n}\cos(A_nx)+\frac{1-\cos(aA_n)}{A_n}\sin(A_nx)]$。由欧拉公式$e^{ix}=\cos x+i\sin x$，可以发现$\cos x=Re(e^{ix})=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$，$\sin x=Im(e^{ix})=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$。继续代入，得到$f(x)=\frac{a}{U}+\frac{2}{U}\sum_{n\ge 1}[\frac{\sin(aA_n)}{A_n}\frac{e^{iA_nx}-e^{-iA_nx}}{2}+\frac{1-\cos(aA_n)}{A_n}\frac{e^{iA_nx}-e^{-iA_nx}}{2i}]$。

代入一下$x=Y$，由于期望的线性累加性，可以发现我们需要求e^{iA_nY}和e^{-iA_nY}的期望。

下面介绍一下概率论中的特征函数。对随机变量X，它的特征函数定义为$\varphi_X(t)=E[e^{itX}]$，其中指数上的i是虚数单位。它与概率分布函数一样，也完全定义了随机变量的所有性质。可以看到$e^{iA_nY}=\varphi_Y(A_n)$，$e^{-iA_nY}=\varphi_Y(-A_n)$。代入一下，得到$Pr[Y<a]=E[f(Y)]=\frac{a}{U}+\frac{2}{U}\sum_{n\ge 1}[\frac{\sin(aA_n)}{A_n}\frac{\varphi_Y(A_n)-\varphi_Y(-A_n)}{2}+\frac{1-\cos(aA_n)}{A_n}\frac{\varphi_Y(A_n)-\varphi_Y(-A_n)}{2i}]$（公式 1）。

好了，接下来我们利用Y的性质去求它的特征函数。$\varphi_Y(t)=E[e^{itY}]=E[e^{it(\sum_{j\ge 1}X_j)}]=E[\prod_{j\ge 1}e^{itX_j}]=\prod_{j\ge 1}E[e^{itX_j}]=\prod_{j\ge 1}\varphi_{X_j}(t)$（倒数第二步用到了$X_j$

之间互相独立的性质）。对于不同的X_j，我们可以单独计算其特征函数，他们的乘积即为Y的特征函数。

（建议自己手推一下加深理解；如果觉得步骤太麻烦，记住最后的结论就可以用啦~）

上面写了那么多理论公式，我们来看看实际怎么应用吧。

例题：

令

$$X_j = \begin{cases} \frac{1}{j^2} & 以\frac{1}{2}概率 \\ 0 & 以\frac{1}{2}概率 \end{cases}$$

设$Y = \sum_{j=1}^{\infty} X_j$，其中$X_j$互相独立。给定一个正数$a$，希望求出$Pr[Y < a]$。

解：

可以发现Y的上界是$\sum_{i\geq 1} \frac{1}{i^2} = \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$。$X_j$的特征函数为$\varphi_{X_j}(t) = E[e^{itX_j}] = \frac{e^{\frac{it}{j^2}}+1}{2}$。所以$Y$的特征函数为$\varphi_Y(t) = \prod_{j\geq 1} \varphi_{X_j}(t) = \prod_{j\geq 1} \frac{e^{\frac{it}{j^2}}+1}{2}$

$= \prod_{j\geq 1} e^{\frac{it}{2j^2}} \frac{e^{\frac{it}{2j^2}}+e^{-\frac{it}{2j^2}}}{2} = e^{\frac{it}{2}\sum_{j\geq 1}\frac{1}{j^2}} \prod_{j\geq 1} \cos\left(\frac{t}{2j^2}\right) = e^{it\frac{\pi^2}{12}} \prod_{j\geq 1} \cos\left(\frac{t}{2j^2}\right)$。代入上面公式1中，对每个固定的$n$，我们估算$\varphi_Y(t) \approx \prod_{1\leq j\leq 1000} \varphi_{X_j}(t) = e^{it\frac{\pi^2}{12}} \prod_{1\leq j\leq 1000} \cos\left(\frac{t}{2j^2}\right)$（即取前一千项乘积作近似）；我们算前10000个$n$值，即可达10位收敛精度。

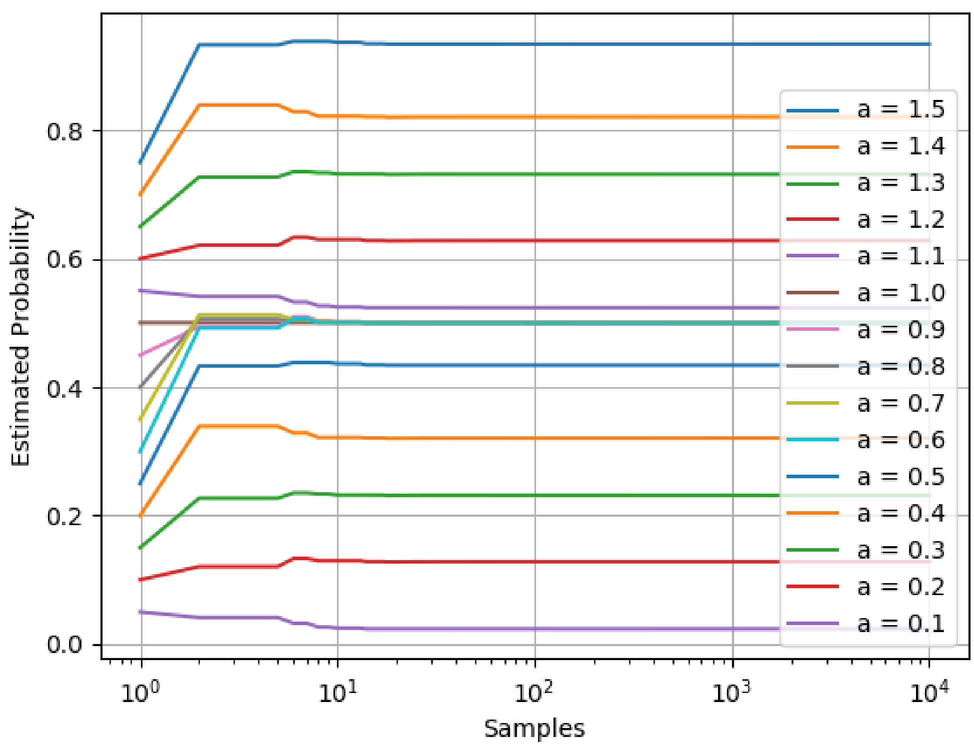
附上代码（这里我用了更宽松的上界2）：

```
#include <cstdio>
#include <cmath>
const double a=0.5,U=2;
int main()
{
    double ans=0;
    for (int n=1;n<=10000;++n)
    {
        const double A=2*M_PI*n/U;
        double temp=1;
        for (int i=1;i<=1000;++i)
            temp*=cos(A/2/i/i);
        ans+=(sin(A*a)*(cos(A*M_PI*M_PI/12))+(1-cos(A*a))*(sin(A*M_PI*M
```

```
_PI/12)))*temp/A;
    }
    printf("%.12f\n",(ans*2+a)/U);
    return 0;
}
```

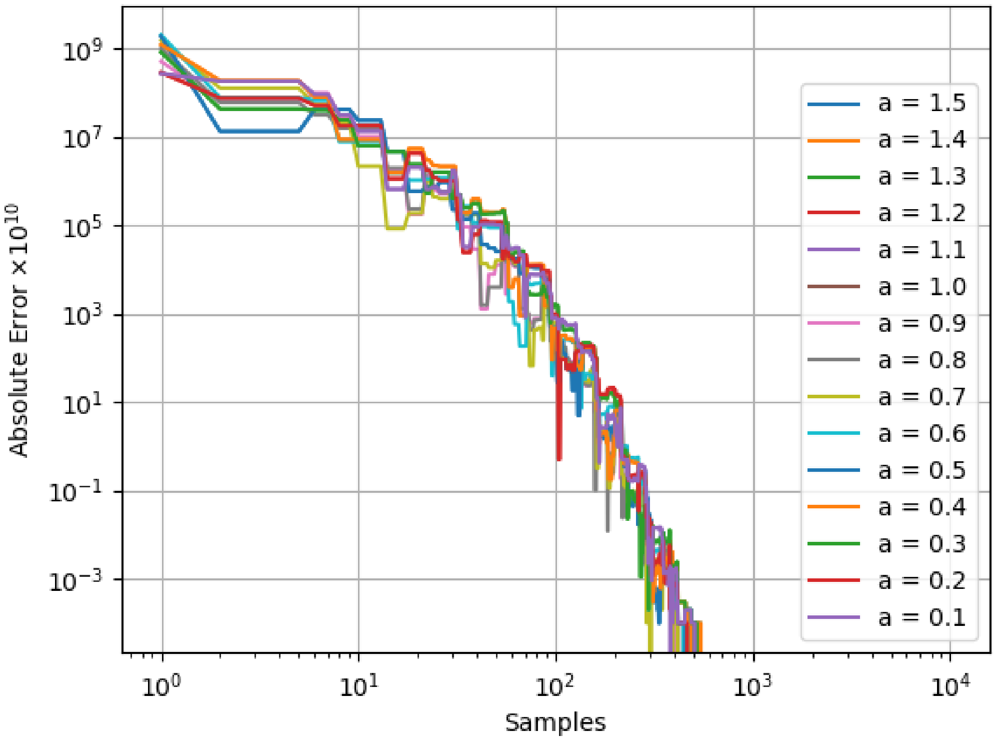
更进一步，不同n的计算直接没有依赖，可进一步结合并行技巧进行加速。

收敛性分析：这里取了若干a进行分析，横轴表示n的样本数量，纵轴表示计算的概率值。（注意到a在0.6到1.0之间的概率都一样，这是因为若不取第一项 1，后面所有项的和是$\frac{\pi^2}{6} - 1 \approx 0.64493407 > 0.6$，所以无论怎么取都不会超过0.6，即对$\forall 0.6 \leq a \leq 1, Pr[Y < a] = Pr[Y < 0.6]$。）



convergence

把绝对误差放大10^{10}倍，再详细观察算法的收敛性：



convergence2

可以看到在500个样本之后所有情况的收敛效果已经非常好了（误差均达到了10^{-13}）级别以下。

关于此方法的收敛性分析：傅里叶系数以$O(\frac{1}{n})$速度收敛，特征函数最坏情况下以常数速度收敛，但一般常用函数情况下以$O(e^{-n})$速度指数级收敛，一般使用几万个样本即可收敛至10位小数，非常高效。

关于上界U的分析：U不一定使用Y的上确界。实测下来发现即使U比上确界大几十倍，收敛效果依然很好。此方法在难以估算Y上确界的情况下也可使用，扩展性高。

关于随机变量X_i的正负：以上方法可扩展至任意有界的随机变量，过程从略，有兴趣的同学可以自行练手。

关于是否是无穷个随机变量的求和：以上方法可直接应用于有限个随机变量的求和，简单粗暴。

关于随机变量X_i是连续变量 or 离散变量：以上方法也可直接应用，简单粗暴*2。