Übungen zur Vorlesung Logik für Informatiker

technische universität dortmund

Thomas Schwentick
Gaetano Geck Christopher Spinrath

Lehrstuhl 1
Logik in der Informatik

WS 2018/19 **Übungsblatt 2** **22.10.2018**

Abgabe bis spätestens am Montag, 05.11.2018,

- **(vor der Vorlesung) im HG II, HS 3, oder**
- **in die Briefkästen im Durchgangsflur, der die 1. Etage der OH 12 mit dem Erdgeschoss der OH 14 verbindet.**

Beachten Sie die Schließzeiten der Gebäude!

Ansonsten gelten die Hinweise von Blatt 1.

Hinweis zur Zusatzaufgabe: **Dieses Übungsblatt enthält, wie möglicherweise andere auch, eine Zusatzaufgabe. Solche Zusatzaufgaben sind oftmals etwas anspruchsvoller als die regulären Aufgaben und führen über die dort behandelten Fragen hinaus.**
Die untere Punktegrenze für die Studienleistung ist unabhängig von den Zusatzaufgaben, erreichte Punkte werden jedoch angerechnet.

Aufgabe 2.1 — 7 Punkte

Der Internetanschluss von Hannahs Mutter funktioniert (mal wieder) nicht. Das Handbuch des Routers und eine kurze Suche im Internet liefern ihr folgende Informationen.

1. Die Internetverbindung kann nur hergestellt werden, wenn alle Kabel richtig eingesteckt sind und die Benutzerdaten korrekt eingegeben wurden.
2. Wenn die DSL-LED leuchtet, dann kann die Internetverbindung hergestellt werden oder der Router ist defekt.
3. Wenn die Benutzerdaten nicht korrekt eingegeben wurden, dann ist der Router nicht defekt.

a) Modellieren Sie diese Situation mit Hilfe der Aussagenlogik. Erläutern Sie dabei die beabsichtigte Bedeutung der verwendeten Variablen. **(3 Punkte)**

b) Beweisen oder widerlegen Sie mit Hilfe der Resolutionsmethode, dass aus den oben genannten Bedingungen folgt: Wenn die DSL-LED leuchtet, dann wurden die Benutzerdaten korrekt eingegeben. **(4 Punkte)**

Aufgabe 2.2 [Markierungsalgorithmus] — 3 Punkte

Gegeben sei die Formel

$$\varphi = (\neg A \to \neg B) \land \neg(A \lor \neg D) \land \big((C \land D \land E) \to B\big) \land \big(D \to (C \land F)\big) \land (\neg F \lor E).$$

a) Formen Sie φ schrittweise in eine äquivalente Horn-Formel ψ um. **(1 Punkt)**

b) Testen Sie ψ auf Erfüllbarkeit. Wenden Sie dazu den Markierungsalgorithmus an. Geben Sie alle Zwischenschritte an! **(2 Punkte)**

Aufgabe 2.3 [Funktionale Vollständigkeit] **5 Punkte**

Wir betrachten die Menge $\mathrm{AL}^{\mathtt{imp}}$ von aussagenlogischen Formeln, welche die kleinste Menge ist, die die folgenden Eigenschaften hat.

1. Jede Variable aus AV ist in $\mathrm{AL}^{\mathtt{imp}}$.
2. Sind φ_1 und φ_2 in $\mathrm{AL}^{\mathtt{imp}}$, so auch
   - $\neg\varphi_1$, und
   - $(\varphi_1 \rightarrow \varphi_2)$.

a) Zeigen Sie, dass es zu den Formeln $\varphi_1 = \top$, $\varphi_2 = \bot$, $\varphi_3 = A \vee B$ und $\varphi_4 = A \wedge B$ äquivalente Formeln ψ_1, ψ_2, ψ_3 und ψ_4 gibt, die in $\mathrm{AL}^{\mathtt{imp}}$ enthalten sind. **(1,5 Punkte)**

b) Beweisen Sie, dass es zu jeder Formel $\varphi \in \mathrm{AL}$ eine äquivalente Formel $\psi \in \mathrm{AL}^{\mathtt{imp}}$ gibt. Gehen Sie dabei wie folgt vor. **(3,5 Punkte)**

(i) Definieren Sie induktiv eine Abbildung f, die jede beliebige Formel $\varphi \in \mathrm{AL}$ auf eine äquivalente Formel $f(\varphi) \in \mathrm{AL}^{\mathtt{imp}}$ abbildet. **[1,5 Punkte]**

(ii) Zeigen Sie mit struktureller Induktion, dass $\varphi \equiv f(\varphi)$ für jede Formel $\varphi \in \mathrm{AL}$ gilt. **[2 Punkte]**

Anmerkung

Es ist wohlbekannt, dass es zu jeder Wahrheitstabelle eine Formel in AL gibt, deren Semantik gerade von der Wahrheitstabelle repräsentiert wird. Aus Aufgabenteil b) folgt, dass dies auch für $\mathrm{AL}^{\mathtt{imp}}$ gilt.
Weitere Informationen zu diesem Sachverhalt lassen sich in der Literatur unter dem Begriff „funktional vollständig“ finden.

Zusatzaufgabe [Sequenzenkalkül] **2 Punkte**

Der im Folgenden vorgestellte Sequenzenkalkül stellt eine Möglichkeit bereit, semantische Folgerungen durch syntaktische Manipulationen abzuleiten. Es handelt sich um einen korrekten und vollständigen Kalkül, was bedeutet, dass für endliche Formelmengen $\Gamma = \{\gamma_1, \dots, \gamma_m\}$ und $\Delta = \{\delta_1, \dots, \delta_n\}$ die Beziehung $\gamma_1 \wedge \dots \wedge \gamma_m \models \delta_1 \vee \dots \vee \delta_n$ genau dann gilt, wenn $\{\gamma_1, \dots, \gamma_m\} \Rightarrow \{\delta_1, \dots, \delta_n\}$ abgeleitet werden kann.
Beispielsweise kann $\neg\neg A \wedge (\neg A \vee B) \models B$ aufgrund der Korrektheit des Sequenzenkalküls bewiesen werden, indem gezeigt wird, dass $\neg\neg A \wedge (\neg A \vee B) \Rightarrow B$ abgeleitet werden kann.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg A \Rightarrow \neg A, B \qquad B \Rightarrow \neg A, B}{\neg A \vee B \Rightarrow \neg A, B}\,(\vee \Rightarrow)}{\neg\neg A, \neg A \vee B \Rightarrow B}\,(\neg \Rightarrow)}{\neg\neg A \wedge (\neg A \vee B) \Rightarrow B}\,(\wedge \Rightarrow)$$

Definition

Eine **Sequenz** ist von der Form $\Gamma \Rightarrow \Delta$ für Formelmengen Γ und Δ. Sie heißt **gültig**, wenn jedes Modell von Γ auch Modell von mindestens einer Formel aus Δ ist.

Beispielsweise ist die Sequenz[1] $A \wedge C, \neg B \Rightarrow B, C$ eine gültige Sequenz, da jedes Modell α von $\Gamma = \{A \wedge C, \neg B\}$ beide Formeln $A \wedge C$ und $\neg B$ erfüllt, insbesondere also $\alpha \models C$ gilt und somit eine Formel aus $\Delta = \{B, C\}$ erfüllt ist.

Definition

Ein **Beweis** einer Sequenz $\Gamma \Rightarrow \Delta$ im Sequenzenkalkül ist ein gerichter Graph mit folgenden Eigenschaften: Jeder Knoten ist mit einer Sequenz beschrieben, sodass

- *wenn der Knoten keine eingehenden Kanten besitzt*,
  seine Beschreibung von der Form eines Axioms ist; und
- *wenn der Knoten eine eingehende Kante besitzt*,
  seine Beschreibung von der Form $\Gamma^* \Rightarrow \Delta^*$ ist und die seines Vorgängers von der Form $\Gamma \Rightarrow \Delta$, für eine Schlussregel der Form $\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma^* \Rightarrow \Delta^*}$; und
- *wenn der Knoten zwei eingehende Kanten besitzt*, seine Beschreibung von der Form $\Gamma^* \Rightarrow \Delta^*$ ist und die seiner Vorgänger von der Form $\Gamma \Rightarrow \Delta$ bzw. $\Gamma' \Rightarrow \Delta'$, für eine Schlussregel der Form $\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta \text{ und } \Gamma' \Rightarrow \Delta'}{\Gamma^* \Rightarrow \Delta^*}$.

Axiome und Schlussregeln

Für alle Formeln φ, ψ sowie alle Formelmengen Γ, Δ gelten folgende Axiome und Schlussregeln. Um die Beschreibung der Beweise zu vereinfachen, versehen wir die Schlussregeln mit Bezeichnern.

Axiome: $\Gamma, \varphi \Rightarrow \Delta, \varphi$

Negation: $(\neg \Rightarrow)\ \dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi}{\Gamma, \neg\varphi \Rightarrow \Delta}$ und $(\Rightarrow \neg)\ \dfrac{\Gamma, \varphi \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg\varphi}$

Disjunktion: $(\vee \Rightarrow)\ \dfrac{\Gamma, \varphi \Rightarrow \Delta \text{ und } \Gamma, \psi \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \varphi \vee \psi \Rightarrow \Delta}$ und $(\Rightarrow \vee)\ \dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \vee \psi}$

Konjunktion: $(\Rightarrow \wedge)\ \dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \text{ und } \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \wedge \psi}$ und $(\wedge \Rightarrow)\ \dfrac{\Gamma, \varphi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \varphi \wedge \psi \Rightarrow \Delta}$

Zeigen Sie, dass folgende Aussagen abgeleitet werden können.

1. $B \Rightarrow \neg\neg B$
2. $(A \wedge B) \vee A \Rightarrow A$
3. $\neg(A \wedge B) \Rightarrow \neg A \vee \neg B$
4. $(\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee C) \Rightarrow \neg A \vee C$

[1] Der Übersichtlichkeit halber verzichten wir auf Mengenklammern.