Datenstrukturen, Algorithmen und Programmierung 2 (DAP2)

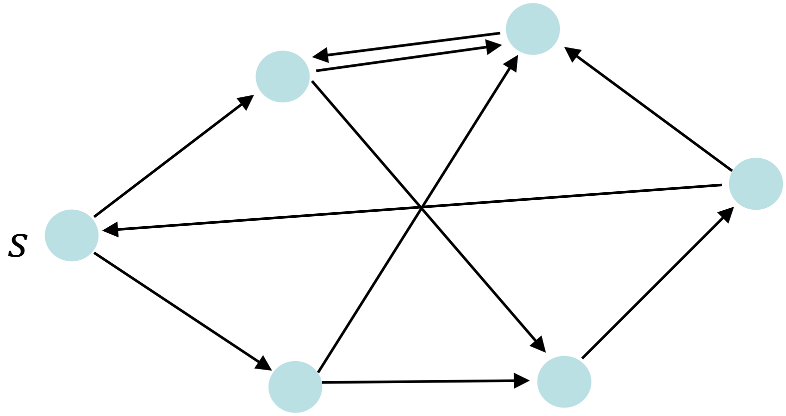
Graphalgorithmen

Breitensuche

- Durchlauf verbundenen Graph von Startknoten s
- Berechne kürzeste Wege (Anzahl Kanten) von s zu anderen Knoten im Graph
- Eingabegraph in Adjazenzlistendarstellung
- Laufzeit $\mathbf{O}(|V| + |E|)$

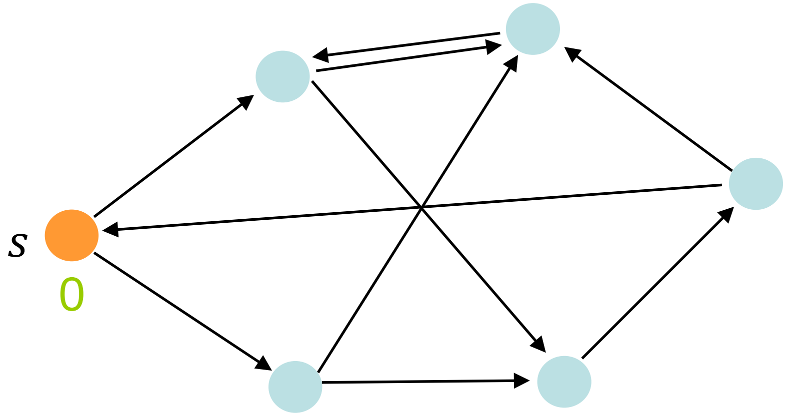
Graphalgorithmen

Breitensuche



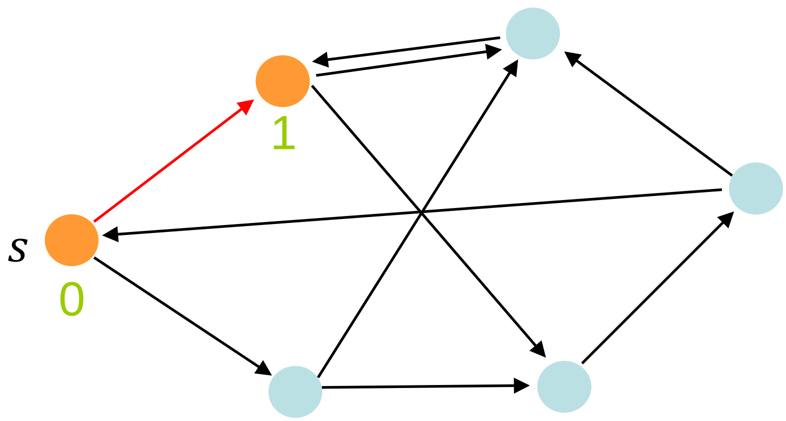
Graphalgorithmen

Breitensuche



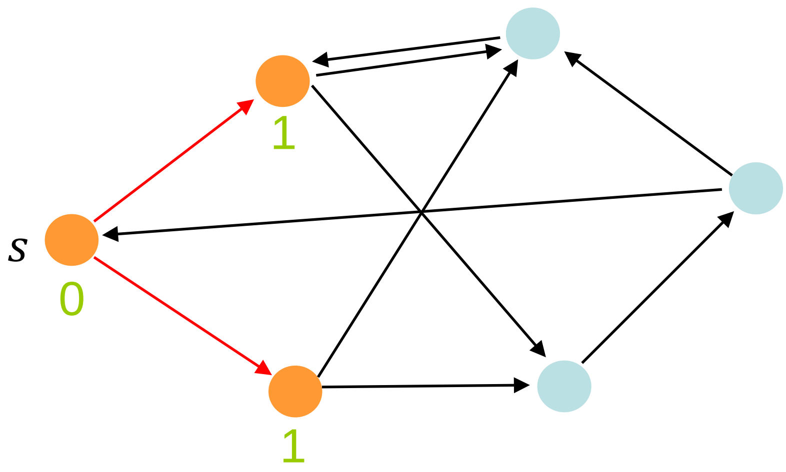
Graphalgorithmen

Breitensuche



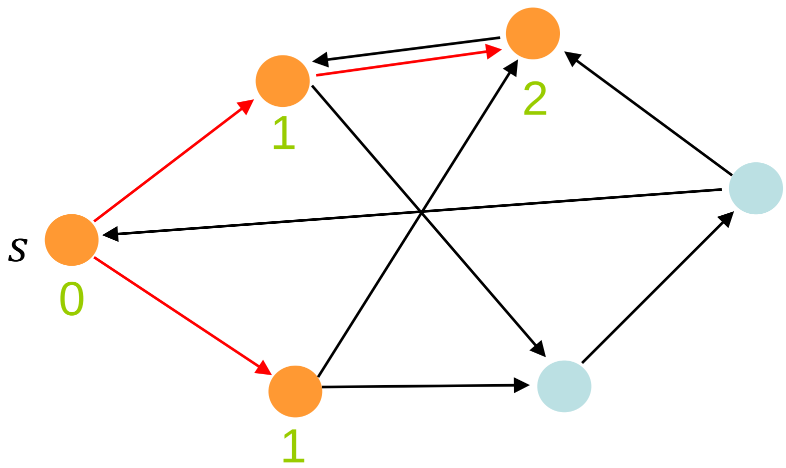
Graphalgorithmen

Breitensuche



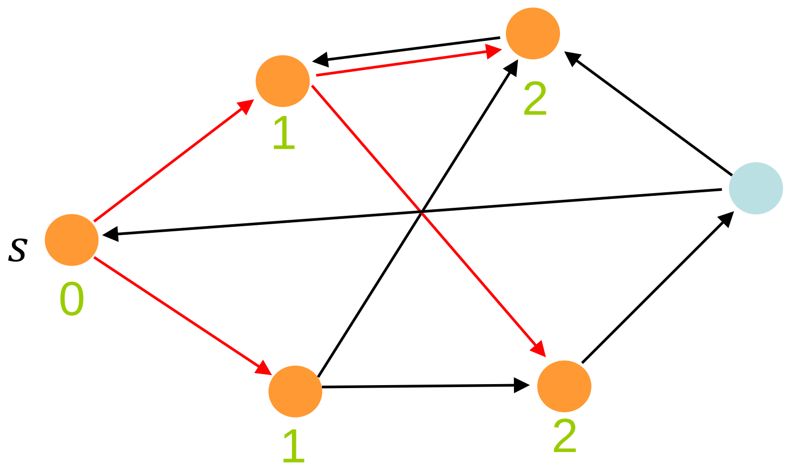
Graphalgorithmen

Breitensuche



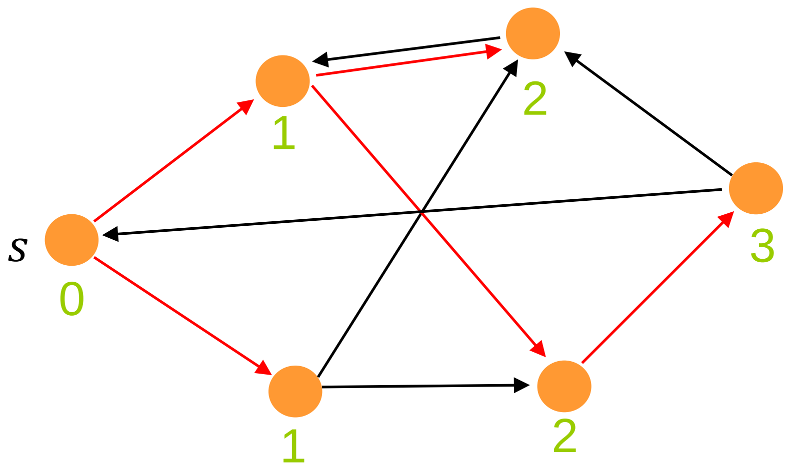
Graphalgorithmen

Breitensuche



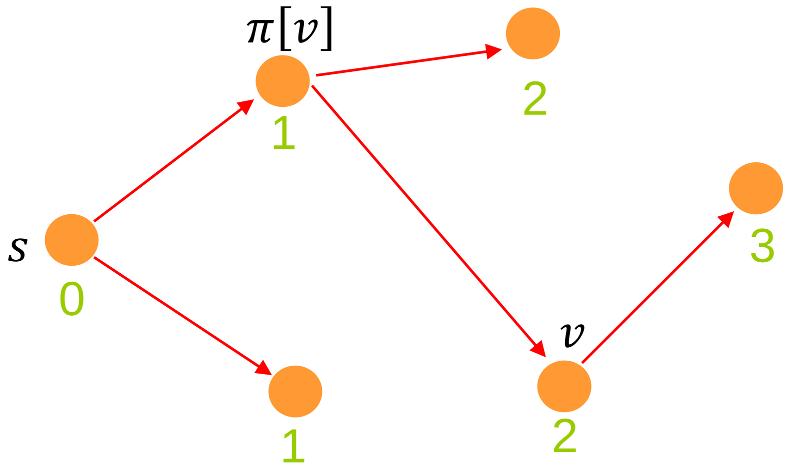
Graphalgorithmen

Breitensuche



Graphalgorithmen

Breitensuche



Vorgängergraph G enthält alle Kanten $(\pi[v], v)$.

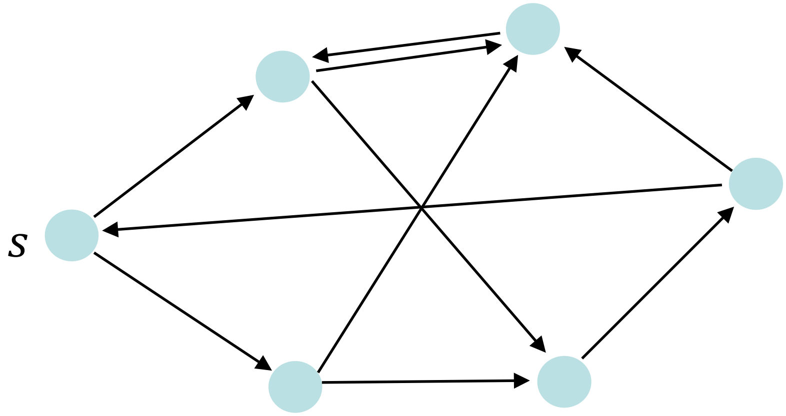
Graphalgorithmen

Tiefensuche

- Suche zunächst „tiefer“ im Graph
- Neue Knoten werden immer vom zuletzt gefundenen Knoten entdeckt
- Sind alle adjazenten Knoten des zuletzt gefundenen Knoten v bereits entdeckt, springe zurück zum Knoten, von dem aus v entdeckt wurde
- Wenn irgendwelche unentdeckten Knoten übrigbleiben, starte Tiefensuche von einem dieser Knoten

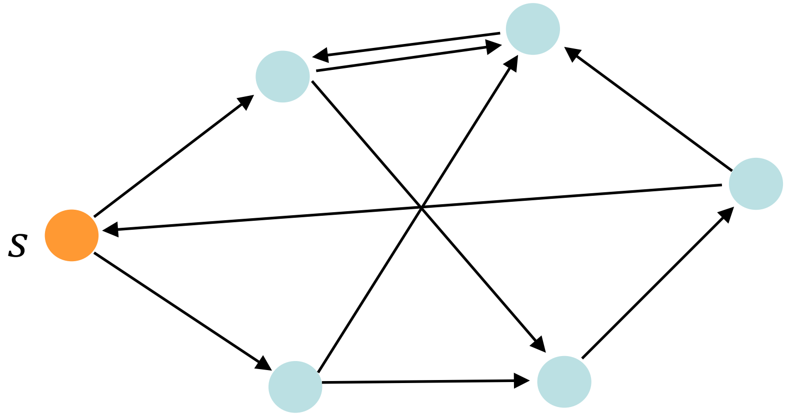
Graphalgorithmen

Tiefensuche



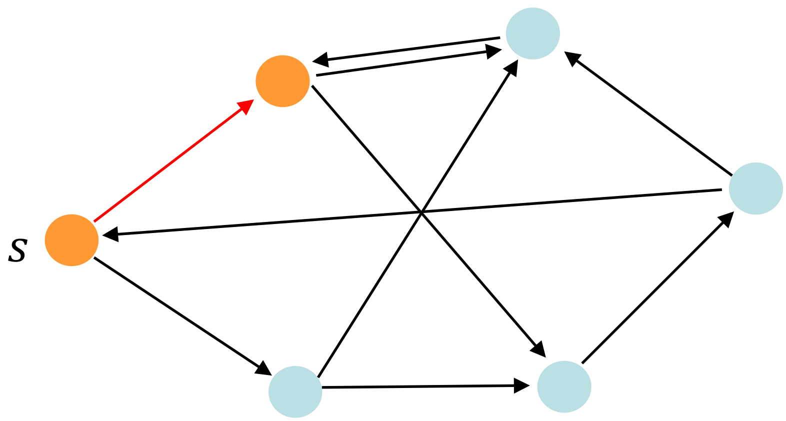
Graphalgorithmen

Tiefensuche



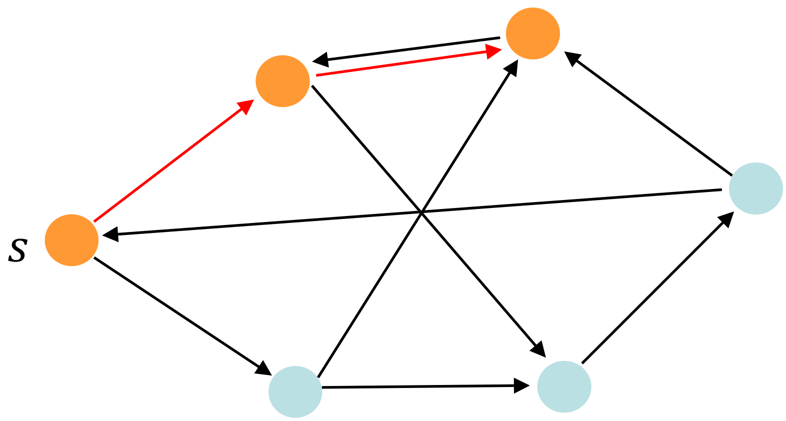
Graphalgorithmen

Tiefensuche



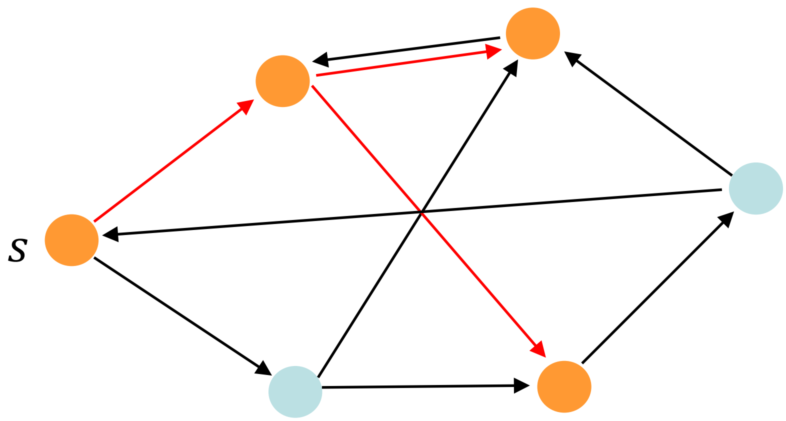
Graphalgorithmen

Tiefensuche



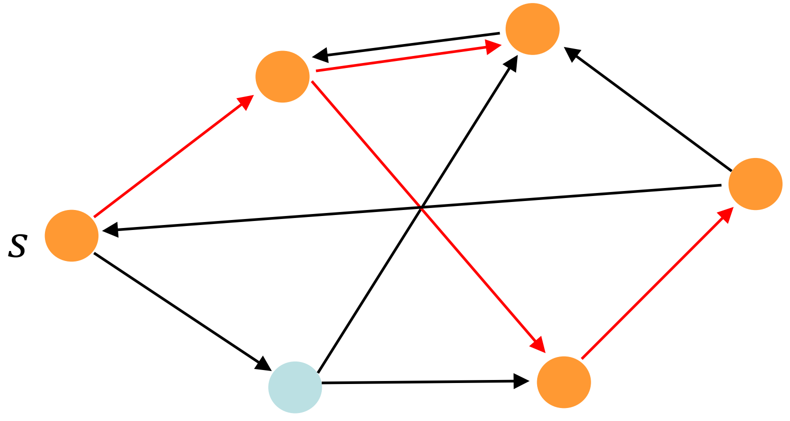
Graphalgorithmen

Tiefensuche



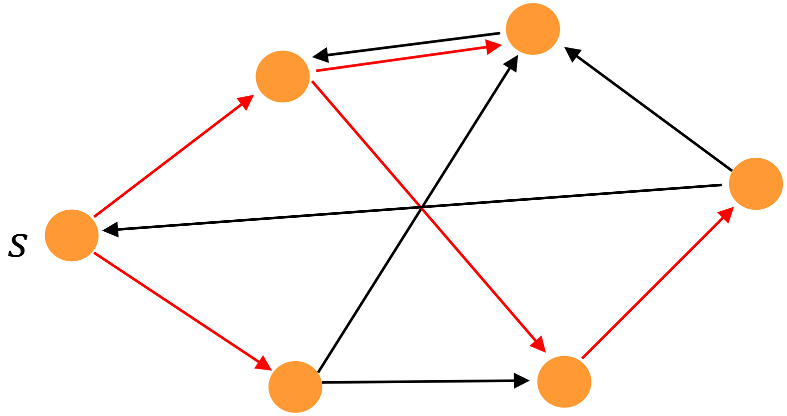
Graphalgorithmen

Tiefensuche



Graphalgorithmen

Tiefensuche



Graphalgorithmen

Invariante Tiefensuche

- Zu Beginn: alle Knoten weiß
- Entdeckte Knoten werden grau
- Abgearbeitete Knoten werden schwarz
- Zwei Zeitstempel: $d[v]$ und $f[v]$ (liegen zwischen 1 und 2 $|V|$)
- $d[v]$: v ist entdeckt
- $f[v]$: v ist abgearbeitet

Graphalgorithmen

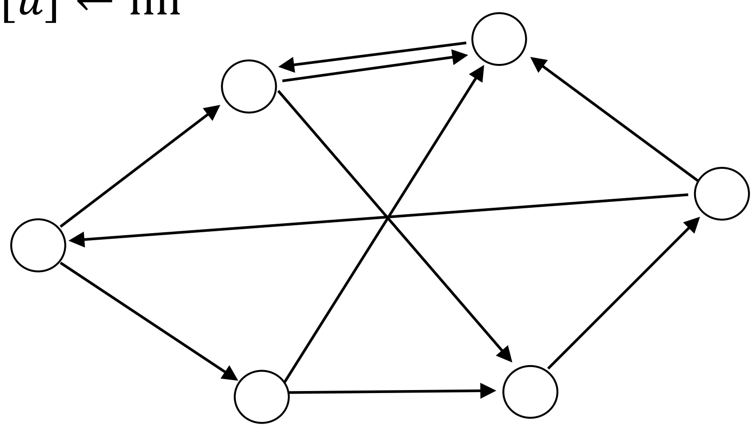
Zeitstempel der Tiefensuche

- $d[v] < f[v]$
- Vor $d[v]$ ist v weiß
- Zwischen $d[v]$ und $f[v]$ ist v grau
- Nach $f[v]$ ist v schwarz

Graphalgorithmen

DFS(G)

1. **for each** vertex $u \in V$ **do** color$[u] \leftarrow$ weiß; $p[u] \leftarrow$ nil
2. time $\leftarrow 0$
3. **for each** vertex $u \in V$ **do**
4.   **if** color$[u]$ = weiß **then** DFS-Visit(u)



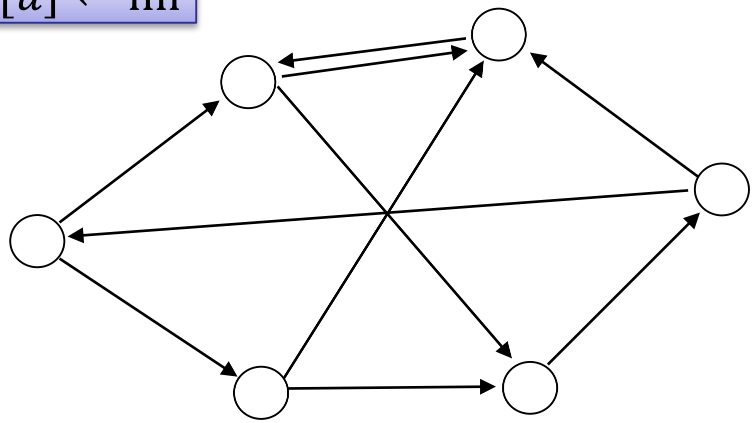
DFS-Visit(u)

1. color$[u] \leftarrow$ grau
2. time $\leftarrow$ time + 1; $d[u] \leftarrow$ time
3. **for each** $v \in$ Adj$[u]$ **do**
4.   **if** color$[v]$ = weiß **then** $p[v] \leftarrow u$; DFS-Visit(v)
5. color$[u] \leftarrow$ schwarz
6. time $\leftarrow$ time + 1; $f[u] \leftarrow$ time

Graphalgorithmen

DFS(G)

1. $\boxed{\textbf{for each } \text{vertex } u \in V \textbf{ do } \text{color}[u] \leftarrow \text{weiß};\ p[u] \leftarrow \text{nil}}$
2. time $\leftarrow 0$
3. **for each** vertex $u \in V$ **do**
4. **if** color$[u]$ = weiß **then** DFS-Visit(u)



DFS-Visit(u)

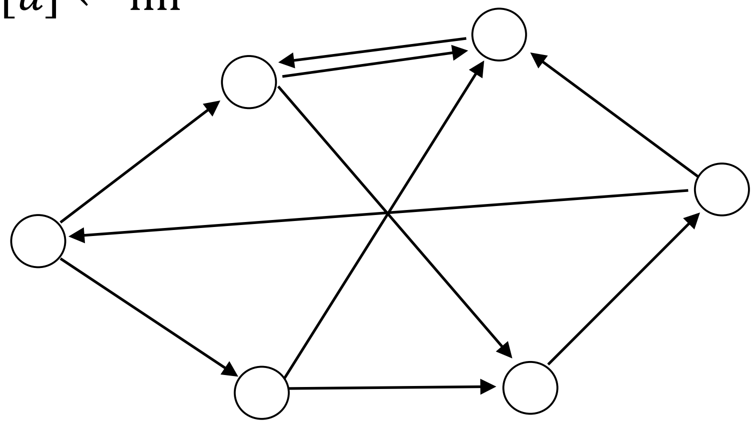
1. color$[u] \leftarrow$ grau
2. time $\leftarrow$ time + 1; $d[u] \leftarrow$ time
3. **for each** $v \in$ Adj$[u]$ **do**
4. **if** color$[v]$ = weiß **then** $p[v] \leftarrow u$; DFS-Visit(v)
5. color$[u] \leftarrow$ schwarz
6. time $\leftarrow$ time + 1; $f[u] \leftarrow$ time

Graphalgorithmen

time $= 0$

DFS(G)

1. **for each** vertex $u \in V$ **do** color$[u] \leftarrow$ weiß; $p[u] \leftarrow$ nil
2. $\boxed{\text{time} \leftarrow 0}$
3. **for each** vertex $u \in V$ **do**
4.   **if** color$[u] =$ weiß **then** DFS-Visit(u)



DFS-Visit(u)

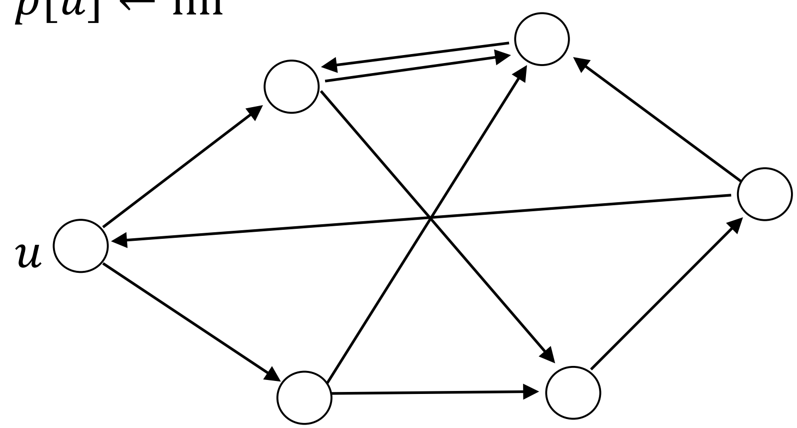
1. color$[u] \leftarrow$ grau
2. time $\leftarrow$ time $+ 1$; $d[u] \leftarrow$ time
3. **for each** $v \in$ Adj$[u]$ **do**
4.   **if** color$[v] =$ weiß **then** $p[v] \leftarrow u$; DFS-Visit(v)
5. color$[u] \leftarrow$ schwarz
6. time $\leftarrow$ time $+ 1$; $f[u] \leftarrow$ time

Graphalgorithmen

time = 0

DFS(G)

1. **for each** vertex $u \in V$ **do** color$[u] \leftarrow$ weiß; $p[u] \leftarrow$ nil
2. time $\leftarrow 0$
3. **for each** vertex $u \in V$ **do**
4.   **if** color$[u]$ = weiß **then** DFS-Visit(u)



DFS-Visit(u)

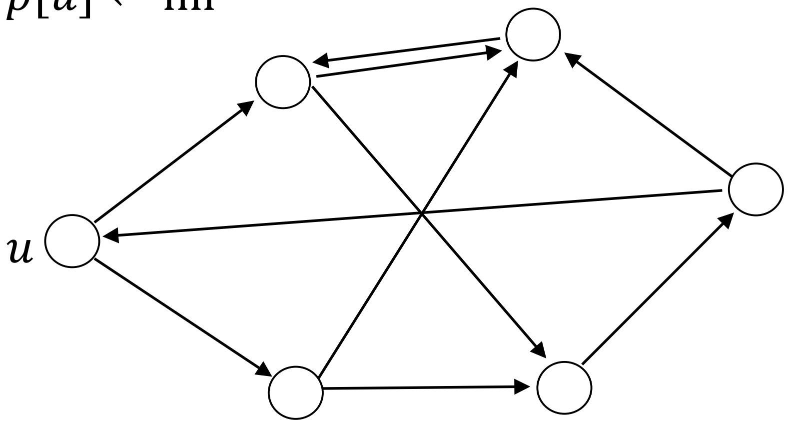
1. color$[u] \leftarrow$ grau
2. time $\leftarrow$ time + 1; $d[u] \leftarrow$ time
3. **for each** $v \in$ Adj$[u]$ **do**
4.   **if** color$[v]$ = weiß **then** $p[v] \leftarrow u$; DFS-Visit(v)
5. color$[u] \leftarrow$ schwarz
6. time $\leftarrow$ time + 1; $f[u] \leftarrow$ time

Graphalgorithmen

$\text{time} = 0$

DFS(G)

1. **for each** vertex $u \in V$ **do** color$[u] \leftarrow$ weiß; $p[u] \leftarrow$ nil
2. time $\leftarrow 0$
3. **for each** vertex $u \in V$ **do**
4. **if** color$[u] =$ weiß **then** DFS-Visit(u)



DFS-Visit(u)

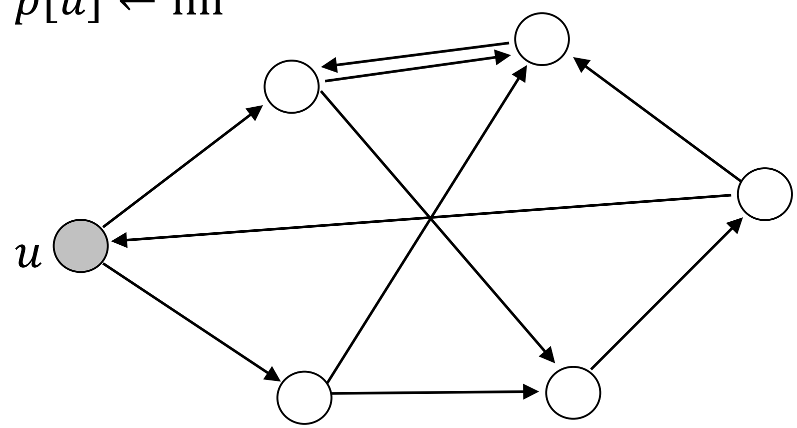
1. color$[u] \leftarrow$ grau
2. time $\leftarrow$ time $+ 1$; $d[u] \leftarrow$ time
3. **for each** $v \in$ Adj$[u]$ **do**
4. **if** color$[v] =$ weiß **then** $p[v] \leftarrow u$; DFS-Visit(v)
5. color$[u] \leftarrow$ schwarz
6. time $\leftarrow$ time $+ 1$; $f[u] \leftarrow$ time

Graphalgorithmen

$\text{time} = 0$

DFS(G)

1. **for each** vertex $u \in V$ **do** color$[u] \leftarrow$ weiß; $p[u] \leftarrow$ nil
2. time $\leftarrow 0$
3. **for each** vertex $u \in V$ **do**
4.   **if** color$[u] =$ weiß **then** DFS-Visit(u)



DFS-Visit(u)

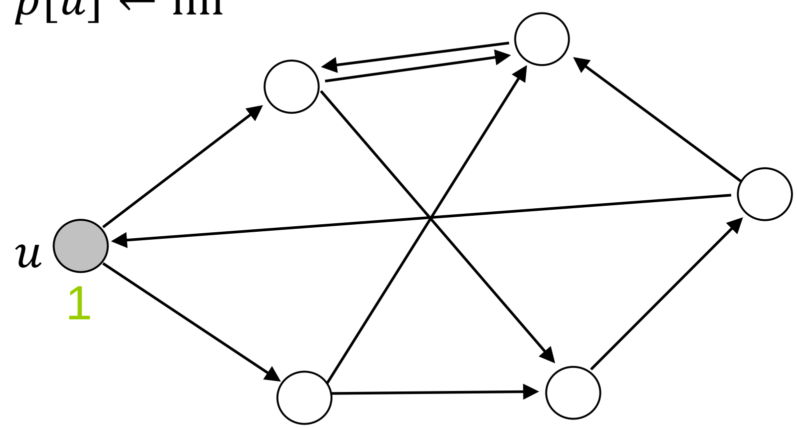
1. $\boxed{\text{color}[u] \leftarrow \text{grau}}$
2. time $\leftarrow$ time $+ 1$; $d[u] \leftarrow$ time
3. **for each** $v \in$ Adj$[u]$ **do**
4.   **if** color$[v] =$ weiß **then** $p[v] \leftarrow u$; DFS-Visit(v)
5. color$[u] \leftarrow$ schwarz
6. time $\leftarrow$ time $+ 1$; $f[u] \leftarrow$ time

Graphalgorithmen

time $= 1$

DFS(G)

1. **for each** vertex $u \in V$ **do** color$[u] \leftarrow$ weiß; $p[u] \leftarrow$ nil
2. time $\leftarrow 0$
3. **for each** vertex $u \in V$ **do**
4. **if** color$[u] =$ weiß **then** DFS-Visit(u)



DFS-Visit(u)

1. color$[u] \leftarrow$ grau
2. time $\leftarrow$ time $+ 1$; $d[u] \leftarrow$ time
3. **for each** $v \in$ Adj$[u]$ **do**
4. **if** color$[v] =$ weiß **then** $p[v] \leftarrow u$; DFS-Visit(v)
5. color$[u] \leftarrow$ schwarz
6. time $\leftarrow$ time $+ 1$; $f[u] \leftarrow$ time

Graphalgorithmen

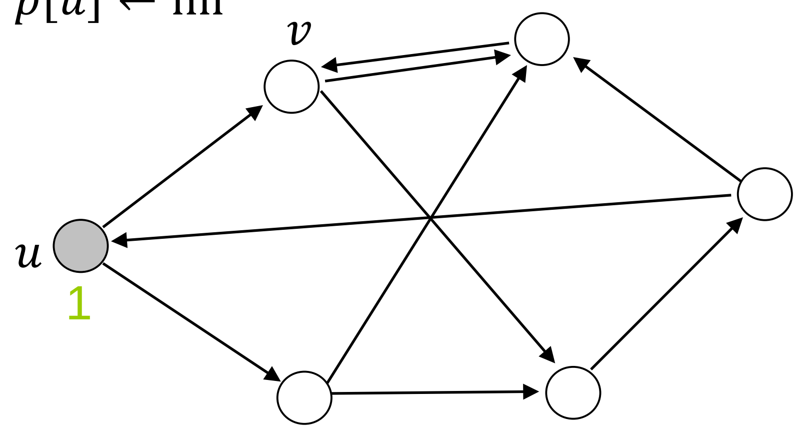
time $= 1$

DFS(G)

1. **for each** vertex $u \in V$ **do** color$[u] \leftarrow$ weiß; $p[u] \leftarrow$ nil
2. time $\leftarrow 0$
3. **for each** vertex $u \in V$ **do**
4.   **if** color$[u] =$ weiß **then** DFS-Visit(u)

DFS-Visit(u)

1. color$[u] \leftarrow$ grau
2. time $\leftarrow$ time $+ 1$; $d[u] \leftarrow$ time
3. **for each** $v \in \mathrm{Adj}[u]$ **do**
4.   **if** color$[v] =$ weiß **then** $p[v] \leftarrow u$; DFS-Visit(v)
5. color$[u] \leftarrow$ schwarz
6. time $\leftarrow$ time $+ 1$; $f[u] \leftarrow$ time

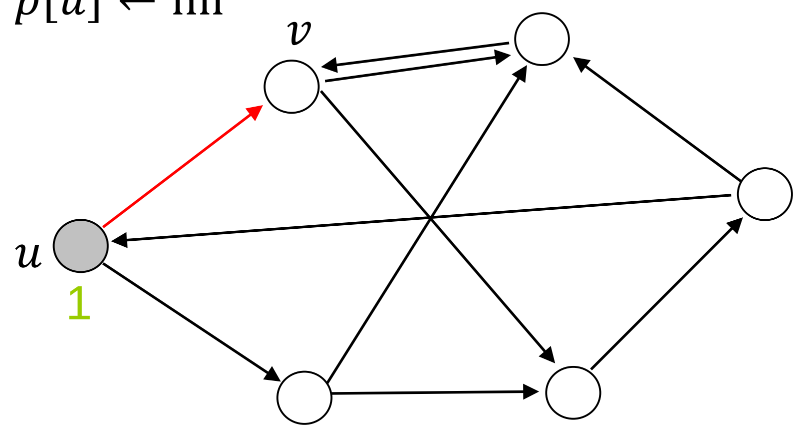


Graphalgorithmen

time = 1

DFS(G)

for each vertex $u \in V$ **do** color$[u]$ ← weiß; $p[u]$ ← nil
time ← 0
for each vertex $u \in V$ **do**
    if color$[u]$ = weiß **then** DFS-Visit(u)



DFS-Visit(u)

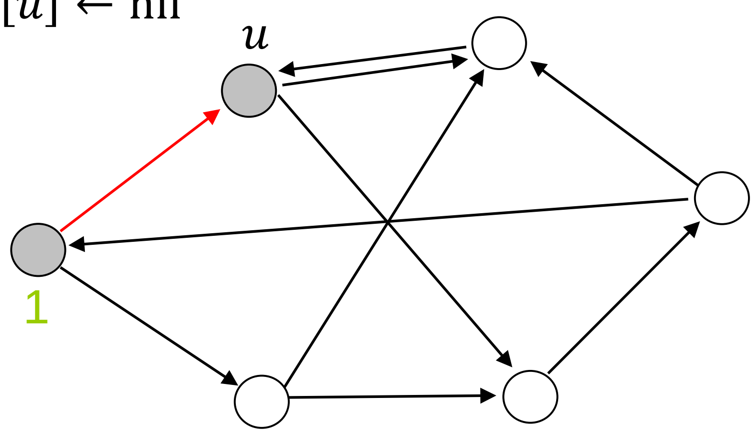
color$[u]$ ← grau
time ← time + 1; $d[u]$ ← time
for each $v \in$ Adj$[u]$ **do**
    if color$[v]$ = weiß **then** $p[v] \leftarrow u$; DFS-Visit(v)
color$[u]$ ← schwarz
time ← time + 1; $f[u]$ ← time

Graphalgorithmen

time = 1

DFS(G)

1. **for each** vertex $u \in V$ **do** color$[u] \leftarrow$ weiß; $p[u] \leftarrow$ nil
2. time $\leftarrow 0$
3. **for each** vertex $u \in V$ **do**
4. **if** color$[u] =$ weiß **then** DFS-Visit(u)



DFS-Visit(u)

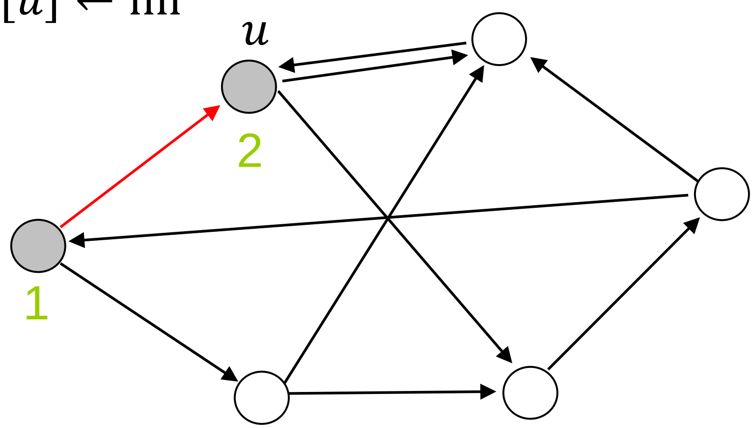
1. color$[u] \leftarrow$ grau
2. time $\leftarrow$ time $+ 1$; $d[u] \leftarrow$ time
3. **for each** $v \in$ Adj$[u]$ **do**
4. **if** color$[v] =$ weiß **then** $p[v] \leftarrow u$; DFS-Visit(v)
5. color$[u] \leftarrow$ schwarz
6. time $\leftarrow$ time $+ 1$; $f[u] \leftarrow$ time

Graphalgorithmen

$\text{time} = 2$

DFS(G)

for each vertex $u \in V$ **do** color[u] ← weiß; $p[u]$ ← nil
time ← 0
for each vertex $u \in V$ **do**
    if color[u] = weiß **then** DFS-Visit(u)



DFS-Visit(u)

color[u] ← grau
$\boxed{\text{time} \leftarrow \text{time} + 1;\ d[u] \leftarrow \text{time}}$
for each $v \in \text{Adj}[u]$ **do**
    if color[v] = weiß **then** $p[v] \leftarrow u$; DFS-Visit(v)
color[u] ← schwarz
time ← time + 1; $f[u]$ ← time

Graphalgorithmen

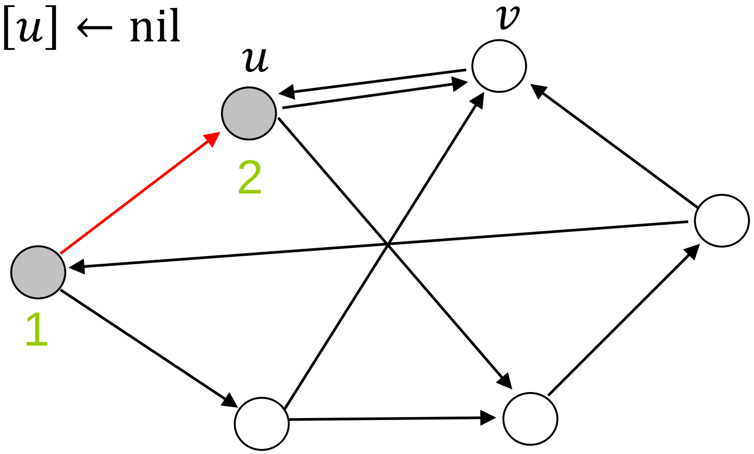
time = 2

DFS(G)

1. **for each** vertex $u \in V$ **do** color$[u] \leftarrow$ weiß; $p[u] \leftarrow$ nil
2. time $\leftarrow 0$
3. **for each** vertex $u \in V$ **do**
4. **if** color$[u]$ = weiß **then** DFS-Visit(u)

DFS-Visit(u)

1. color$[u] \leftarrow$ grau
2. time $\leftarrow$ time + 1; $d[u] \leftarrow$ time
3. **for each** $v \in$ Adj$[u]$ **do**
4. **if** color$[v]$ = weiß **then** $p[v] \leftarrow u$; DFS-Visit(v)
5. color$[u] \leftarrow$ schwarz
6. time $\leftarrow$ time + 1; $f[u] \leftarrow$ time

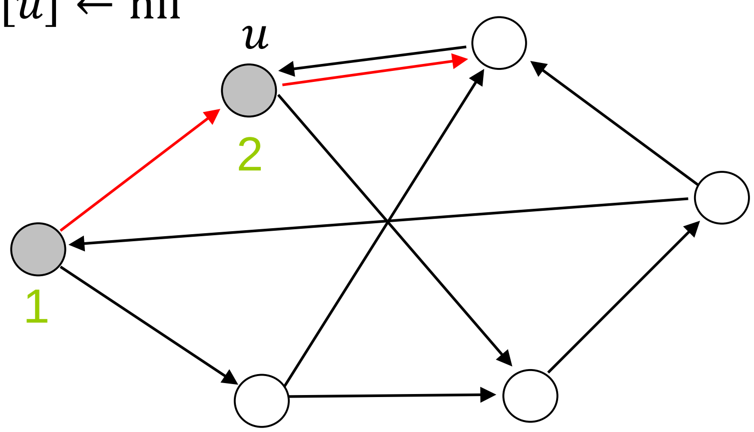


Graphalgorithmen

time $= 2$

DFS(G)

1. **for each** vertex $u \in V$ **do** color$[u] \leftarrow$ weiß; $p[u] \leftarrow$ nil
2. time $\leftarrow 0$
3. **for each** vertex $u \in V$ **do**
4.   **if** color$[u]$ = weiß **then** DFS-Visit(u)



DFS-Visit(u)

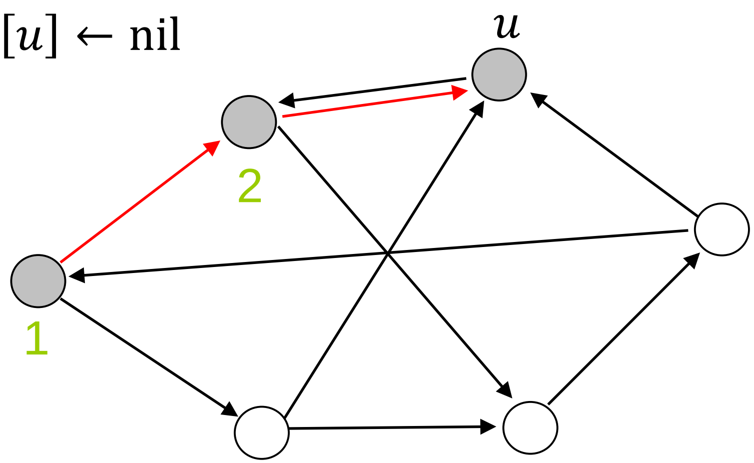
1. color$[u] \leftarrow$ grau
2. time $\leftarrow$ time + 1; $d[u] \leftarrow$ time
3. **for each** $v \in$ Adj$[u]$ **do**
4.   **if** color$[v]$ = weiß **then** $p[v] \leftarrow u$; DFS-Visit(v)
5. color$[u] \leftarrow$ schwarz
6. time $\leftarrow$ time + 1; $f[u] \leftarrow$ time

Graphalgorithmen

time $= 2$

DFS(G)

1. **for each** vertex $u \in V$ **do** color$[u] \leftarrow$ weiß; $p[u] \leftarrow$ nil
2. time $\leftarrow 0$
3. **for each** vertex $u \in V$ **do**
4.   **if** color$[u] =$ weiß **then** DFS-Visit(u)



DFS-Visit(u)

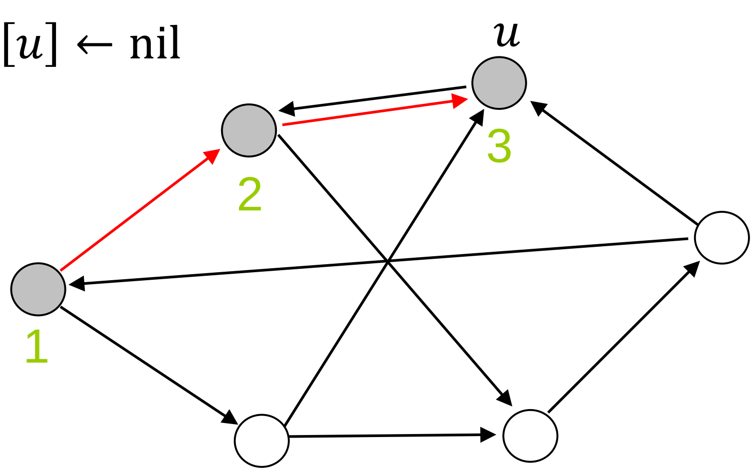
1. color$[u] \leftarrow$ grau
2. time $\leftarrow$ time $+ 1$; $d[u] \leftarrow$ time
3. **for each** $v \in$ Adj$[u]$ **do**
4.   **if** color$[v] =$ weiß **then** $p[v] \leftarrow u$; DFS-Visit(v)
5. color$[u] \leftarrow$ schwarz
6. time $\leftarrow$ time $+ 1$; $f[u] \leftarrow$ time

Graphalgorithmen

time $= 3$

DFS(G)

1. **for each** vertex $u \in V$ **do** color$[u] \leftarrow$ weiß; $p[u] \leftarrow$ nil
2. time $\leftarrow 0$
3. **for each** vertex $u \in V$ **do**
4. **if** color$[u] =$ weiß **then** DFS-Visit(u)



DFS-Visit(u)

1. color$[u] \leftarrow$ grau
2. time $\leftarrow$ time $+ 1$; $d[u] \leftarrow$ time
3. **for each** $v \in$ Adj$[u]$ **do**
4. **if** color$[v] =$ weiß **then** $p[v] \leftarrow u$; DFS-Visit(v)
5. color$[u] \leftarrow$ schwarz
6. time $\leftarrow$ time $+ 1$; $f[u] \leftarrow$ time

Graphalgorithmen

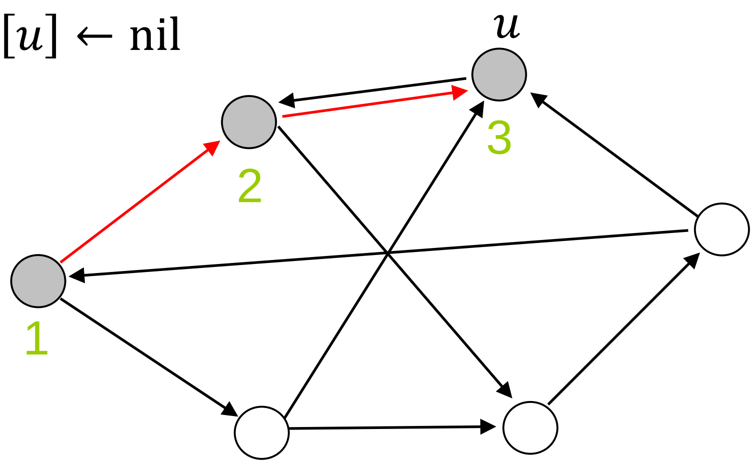
time = 3

DFS(G)

1. **for each** vertex $u \in V$ **do** color$[u] \leftarrow$ weiß; $p[u] \leftarrow$ nil
2. time $\leftarrow 0$
3. **for each** vertex $u \in V$ **do**
4. **if** color$[u]$ = weiß **then** DFS-Visit(u)

DFS-Visit(u)

1. color$[u] \leftarrow$ grau
2. time $\leftarrow$ time + 1; $d[u] \leftarrow$ time
3. **for each** $v \in$ Adj$[u]$ **do**
4. **if** color$[v]$ = weiß **then** $p[v] \leftarrow u$; DFS-Visit(v)
5. color$[u] \leftarrow$ schwarz
6. time $\leftarrow$ time + 1; $f[u] \leftarrow$ time

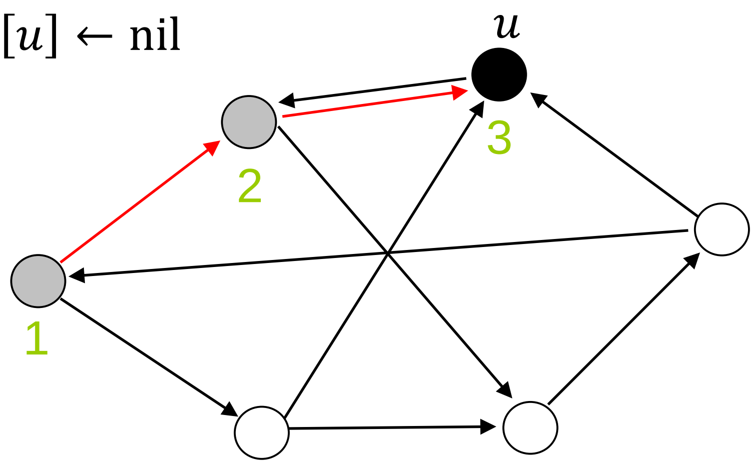


Graphalgorithmen

time $= 3$

DFS(G)

1. **for each** vertex $u \in V$ **do** color$[u] \leftarrow$ weiß; $p[u] \leftarrow$ nil
2. time $\leftarrow 0$
3. **for each** vertex $u \in V$ **do**
4. **if** color$[u] =$ weiß **then** DFS-Visit(u)



DFS-Visit(u)

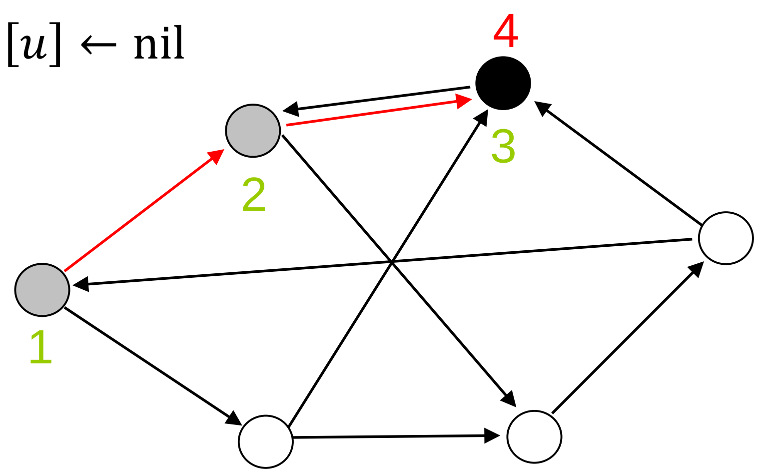
1. color$[u] \leftarrow$ grau
2. time $\leftarrow$ time $+ 1$; $d[u] \leftarrow$ time
3. **for each** $v \in$ Adj$[u]$ **do**
4. **if** color$[v] =$ weiß **then** $p[v] \leftarrow u$; DFS-Visit(v)
5. color$[u] \leftarrow$ schwarz
6. time $\leftarrow$ time $+ 1$; $f[u] \leftarrow$ time

Graphalgorithmen

$\text{time} = 4$

DFS(G)

1. **for each** vertex $u \in V$ **do** color$[u] \leftarrow$ weiß; $p[u] \leftarrow$ nil
2. time $\leftarrow 0$
3. **for each** vertex $u \in V$ **do**
4. **if** color$[u]$ = weiß **then** DFS-Visit(u)



DFS-Visit(u)

1. color$[u] \leftarrow$ grau
2. time $\leftarrow$ time + 1; $d[u] \leftarrow$ time
3. **for each** $v \in \text{Adj}[u]$ **do**
4. **if** color$[v]$ = weiß **then** $p[v] \leftarrow u$; DFS-Visit(v)
5. color$[u] \leftarrow$ schwarz
6. $\boxed{\text{time} \leftarrow \text{time} + 1;\ f[u] \leftarrow \text{time}}$

Graphalgorithmen

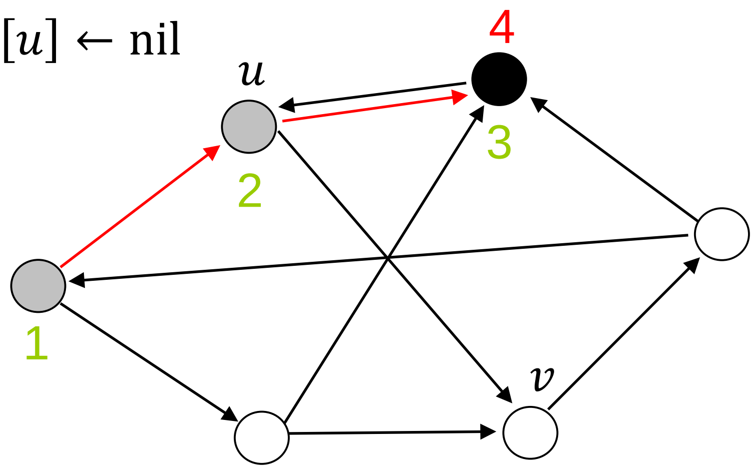
time $= 4$

DFS(G)

1. **for each** vertex $u \in V$ **do** color[u] $\leftarrow$ weiß; $p[u] \leftarrow$ nil
2. time $\leftarrow 0$
3. **for each** vertex $u \in V$ **do**
4. **if** color[u] = weiß **then** DFS-Visit(u)

DFS-Visit(u)

1. color[u] $\leftarrow$ grau
2. time $\leftarrow$ time $+ 1$; $d[u] \leftarrow$ time
3. **for each** $v \in$ Adj[u] **do**
4. **if** color[v] = weiß **then** $p[v] \leftarrow u$; DFS-Visit(v)
5. color[u] $\leftarrow$ schwarz
6. time $\leftarrow$ time $+ 1$; $f[u] \leftarrow$ time

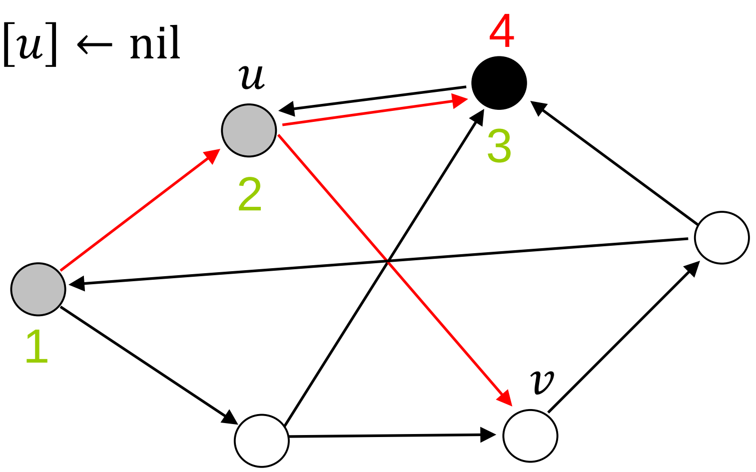


Graphalgorithmen

time $= 4$

DFS(G)

1. **for each** vertex $u \in V$ **do** color$[u] \leftarrow$ weiß; $p[u] \leftarrow$ nil
2. time $\leftarrow 0$
3. **for each** vertex $u \in V$ **do**
4. **if** color$[u] =$ weiß **then** DFS-Visit(u)



DFS-Visit(u)

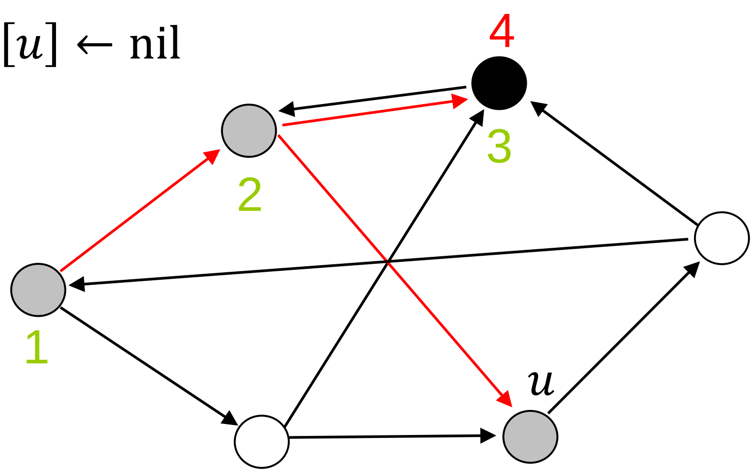
1. color$[u] \leftarrow$ grau
2. time $\leftarrow$ time $+ 1$; $d[u] \leftarrow$ time
3. **for each** $v \in$ Adj$[u]$ **do**
4. **if** color$[v] =$ weiß **then** $p[v] \leftarrow u$; DFS-Visit(v)
5. color$[u] \leftarrow$ schwarz
6. time $\leftarrow$ time $+ 1$; $f[u] \leftarrow$ time

Graphalgorithmen

time $= 4$

DFS(G)

1. **for each** vertex $u \in V$ **do** color$[u] \leftarrow$ weiß; $p[u] \leftarrow$ nil
2. time $\leftarrow 0$
3. **for each** vertex $u \in V$ **do**
4. **if** color$[u] =$ weiß **then** DFS-Visit(u)



DFS-Visit(u)

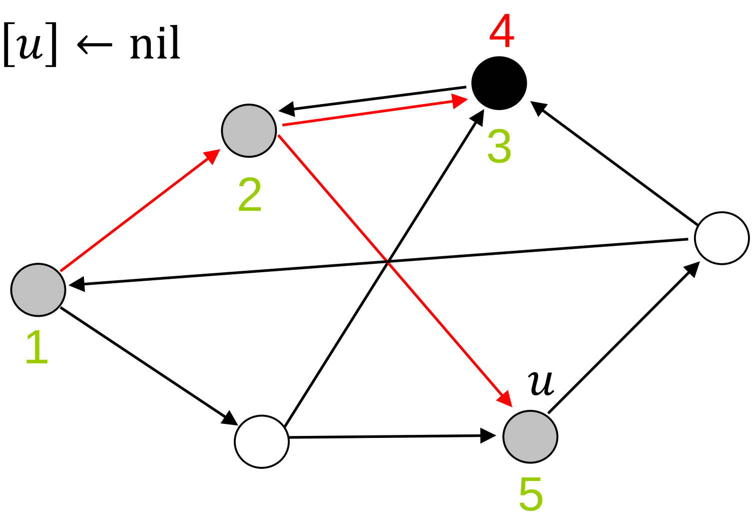
1. color$[u] \leftarrow$ grau
2. time $\leftarrow$ time $+ 1$; $d[u] \leftarrow$ time
3. **for each** $v \in$ Adj$[u]$ **do**
4. **if** color$[v] =$ weiß **then** $p[v] \leftarrow u$; DFS-Visit(v)
5. color$[u] \leftarrow$ schwarz
6. time $\leftarrow$ time $+ 1$; $f[u] \leftarrow$ time

Graphalgorithmen

time = 5

DFS(G)

1. **for each** vertex $u \in V$ **do** color$[u]$ ← weiß; $p[u]$ ← nil
2. time ← 0
3. **for each** vertex $u \in V$ **do**
4. **if** color$[u]$ = weiß **then** DFS-Visit(u)



DFS-Visit(u)

1. color$[u]$ ← grau
2. time ← time + 1; $d[u]$ ← time
3. **for each** $v \in$ Adj$[u]$ **do**
4. **if** color$[v]$ = weiß **then** $p[v] \leftarrow u$; DFS-Visit(v)
5. color$[u]$ ← schwarz
6. time ← time + 1; $f[u]$ ← time

Graphalgorithmen

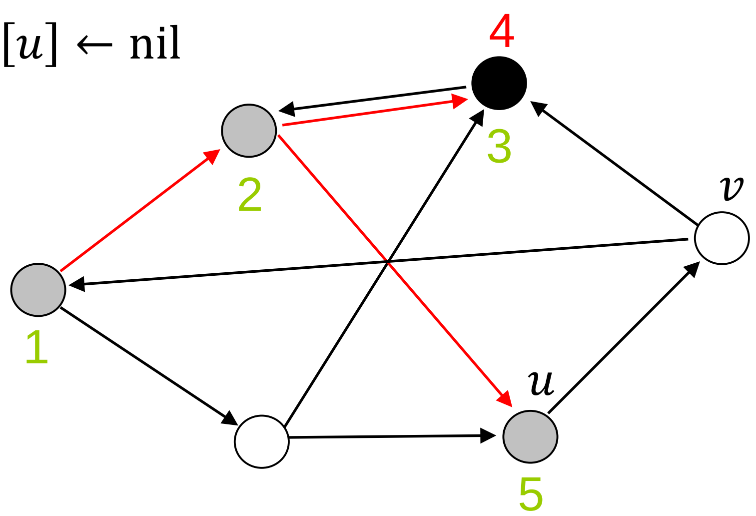
time = 5

DFS(G)

1. **for each** vertex $u \in V$ **do** color$[u] \leftarrow$ weiß; $p[u] \leftarrow$ nil
2. time $\leftarrow 0$
3. **for each** vertex $u \in V$ **do**
4. **if** color$[u]$ = weiß **then** DFS-Visit(u)

DFS-Visit(u)

1. color$[u] \leftarrow$ grau
2. time $\leftarrow$ time + 1; $d[u] \leftarrow$ time
3. **for each** $v \in$ Adj$[u]$ **do**
4. **if** color$[v]$ = weiß **then** $p[v] \leftarrow u$; DFS-Visit(v)
5. color$[u] \leftarrow$ schwarz
6. time $\leftarrow$ time + 1; $f[u] \leftarrow$ time



Graphalgorithmen

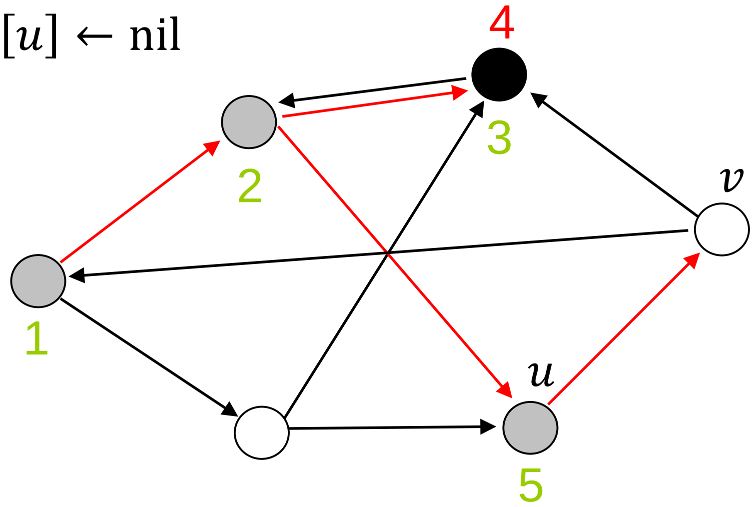
time = 5

DFS(G)

1. **for each** vertex $u \in V$ **do** color$[u] \leftarrow$ weiß; $p[u] \leftarrow$ nil
2. time $\leftarrow 0$
3. **for each** vertex $u \in V$ **do**
4. **if** color$[u] =$ weiß **then** DFS-Visit(u)

DFS-Visit(u)

1. color$[u] \leftarrow$ grau
2. time $\leftarrow$ time $+ 1$; $d[u] \leftarrow$ time
3. **for each** $v \in$ Adj$[u]$ **do**
4. **if** color$[v] =$ weiß **then** $p[v] \leftarrow u$; DFS-Visit(v)
5. color$[u] \leftarrow$ schwarz
6. time $\leftarrow$ time $+ 1$; $f[u] \leftarrow$ time

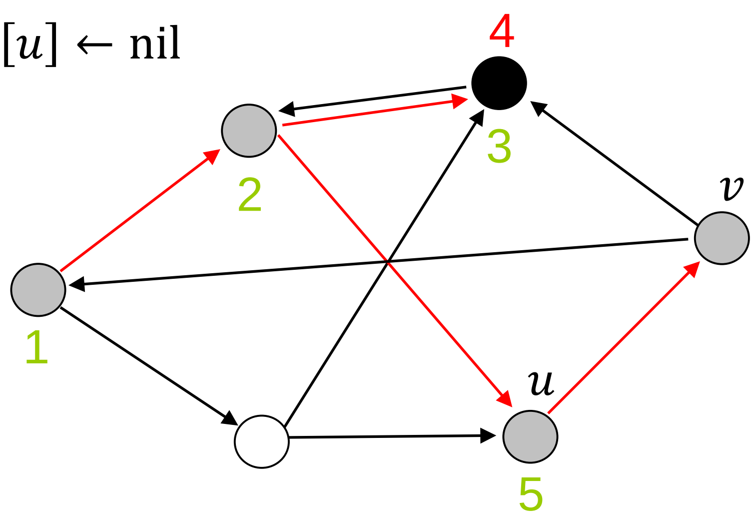


Graphalgorithmen

time = 5

DFS(G)

1. **for each** vertex $u \in V$ **do** color$[u]$ ← weiß; $p[u]$ ← nil
2. time ← 0
3. **for each** vertex $u \in V$ **do**
4. **if** color$[u]$ = weiß **then** DFS-Visit(u)



DFS-Visit(u)

1. color$[u]$ ← grau
2. time ← time + 1; $d[u]$ ← time
3. **for each** $v \in$ Adj$[u]$ **do**
4. **if** color$[v]$ = weiß **then** $p[v] \leftarrow u$; DFS-Visit(v)
5. color$[u]$ ← schwarz
6. time ← time + 1; $f[u]$ ← time

Graphalgorithmen

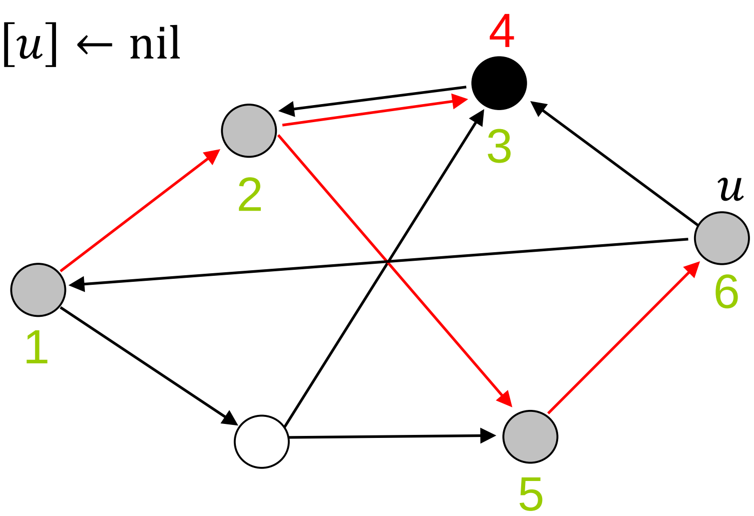
time = 6

DFS(G)

1. **for each** vertex $u \in V$ **do** color$[u] \leftarrow$ weiß; $p[u] \leftarrow$ nil
2. time $\leftarrow 0$
3. **for each** vertex $u \in V$ **do**
4. **if** color$[u]$ = weiß **then** DFS-Visit(u)

DFS-Visit(u)

1. color$[u] \leftarrow$ grau
2. time $\leftarrow$ time + 1; $d[u] \leftarrow$ time
3. **for each** $v \in$ Adj$[u]$ **do**
4. **if** color$[v]$ = weiß **then** $p[v] \leftarrow u$; DFS-Visit(v)
5. color$[u] \leftarrow$ schwarz
6. time $\leftarrow$ time + 1; $f[u] \leftarrow$ time

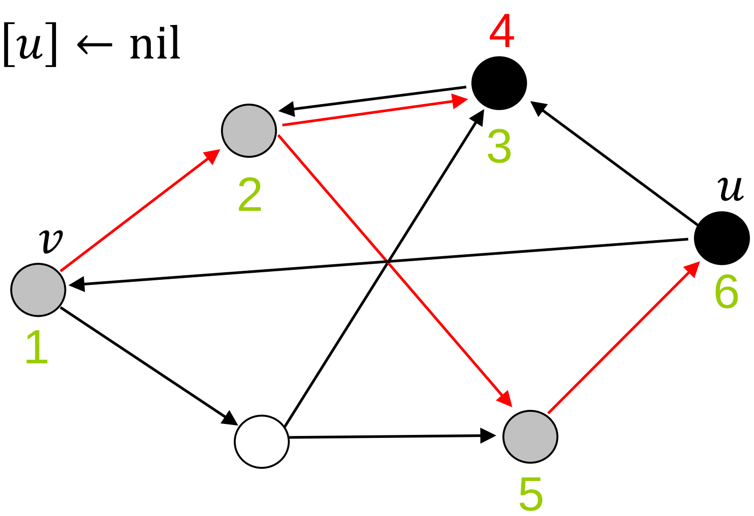


Graphalgorithmen

time = 6

DFS(G)

1. **for each** vertex $u \in V$ **do** color[u] ← weiß; $p[u]$ ← nil
2. time ← 0
3. **for each** vertex $u \in V$ **do**
4. **if** color[u] = weiß **then** DFS-Visit(u)



DFS-Visit(u)

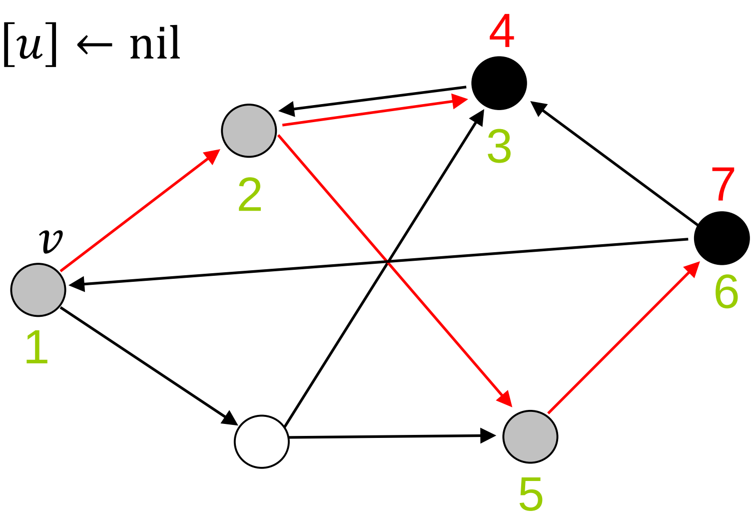
1. color[u] ← grau
2. time ← time + 1; $d[u]$ ← time
3. **for each** $v \in$ Adj[u] **do**
4. **if** color[v] = weiß **then** $p[v] \leftarrow u$; DFS-Visit(v)
5. color[u] ← schwarz
6. time ← time + 1; $f[u]$ ← time

Graphalgorithmen

time = 7

DFS(G)

1. **for each** vertex $u \in V$ **do** color$[u] \leftarrow$ weiß; $p[u] \leftarrow$ nil
2. time $\leftarrow 0$
3. **for each** vertex $u \in V$ **do**
4.   **if** color$[u]$ = weiß **then** DFS-Visit(u)



DFS-Visit(u)

1. color$[u] \leftarrow$ grau
2. time $\leftarrow$ time + 1; $d[u] \leftarrow$ time
3. **for each** $v \in$ Adj$[u]$ **do**
4.   **if** color$[v]$ = weiß **then** $p[v] \leftarrow u$; DFS-Visit(v)
5. color$[u] \leftarrow$ schwarz
6. time $\leftarrow$ time + 1; $f[u] \leftarrow$ time

Graphalgorithmen

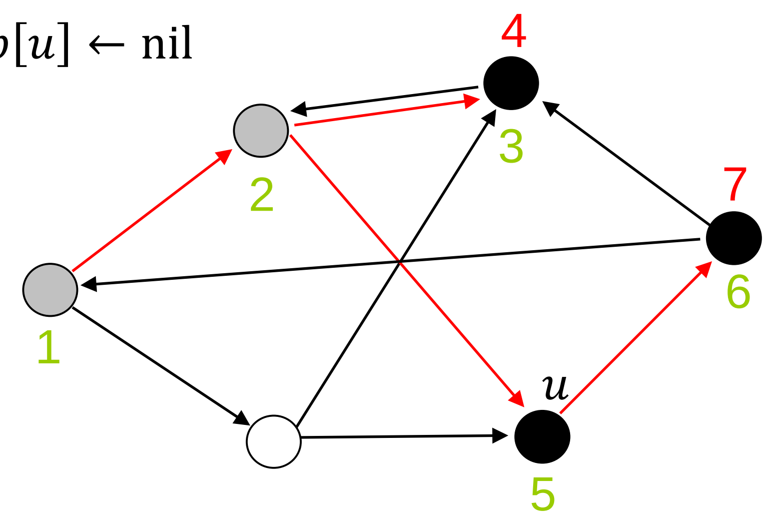
time $= 7$

DFS(G)

for each vertex $u \in V$ **do** color$[u] \leftarrow$ weiß; $p[u] \leftarrow$ nil
time $\leftarrow 0$
for each vertex $u \in V$ **do**
  if color$[u] =$ weiß **then** DFS-Visit(u)

DFS-Visit(u)

color$[u] \leftarrow$ grau
time $\leftarrow$ time $+ 1$; $d[u] \leftarrow$ time
for each $v \in$ Adj$[u]$ **do**
  if color$[v] =$ weiß **then** $p[v] \leftarrow u$; DFS-Visit(v)
$\boxed{\text{color}[u] \leftarrow \text{schwarz}}$
time $\leftarrow$ time $+ 1$; $f[u] \leftarrow$ time

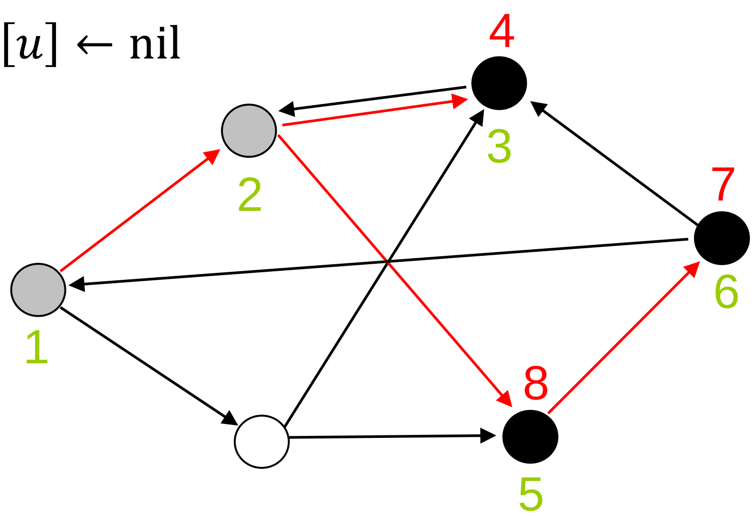


Graphalgorithmen

time = 8

DFS(G)

1. **for each** vertex $u \in V$ **do** color$[u] \leftarrow$ weiß; $p[u] \leftarrow$ nil
2. time $\leftarrow 0$
3. **for each** vertex $u \in V$ **do**
4. **if** color$[u]$ = weiß **then** DFS-Visit(u)



DFS-Visit(u)

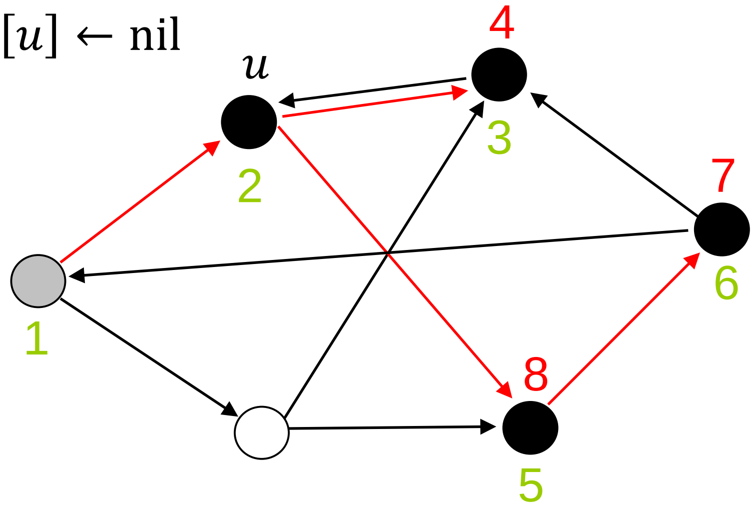
1. color$[u] \leftarrow$ grau
2. time $\leftarrow$ time $+ 1$; $d[u] \leftarrow$ time
3. **for each** $v \in$ Adj$[u]$ **do**
4. **if** color$[v]$ = weiß **then** $p[v] \leftarrow u$; DFS-Visit(v)
5. color$[u] \leftarrow$ schwarz
6. time $\leftarrow$ time $+ 1$; $f[u] \leftarrow$ time

Graphalgorithmen

time = 8

DFS(G)

1. **for each** vertex $u \in V$ **do** color$[u] \leftarrow$ weiß; $p[u] \leftarrow$ nil
2. time $\leftarrow 0$
3. **for each** vertex $u \in V$ **do**
4.   **if** color$[u] =$ weiß **then** DFS-Visit(u)



DFS-Visit(u)

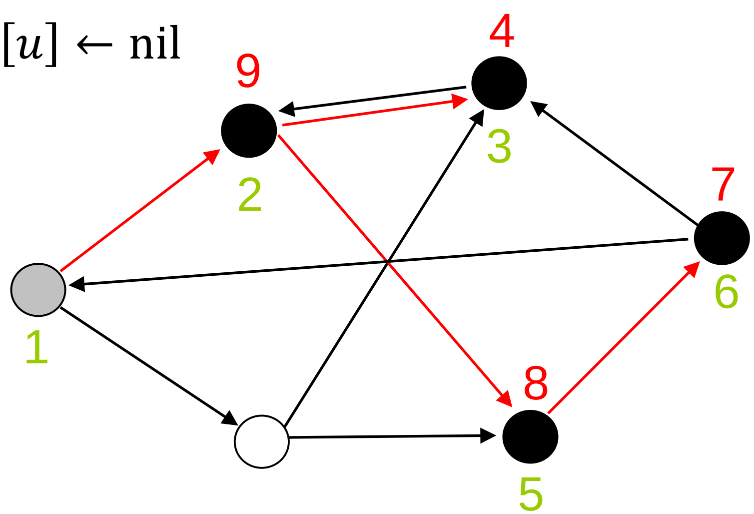
1. color$[u] \leftarrow$ grau
2. time $\leftarrow$ time $+ 1$; $d[u] \leftarrow$ time
3. **for each** $v \in$ Adj$[u]$ **do**
4.   **if** color$[v] =$ weiß **then** $p[v] \leftarrow u$; DFS-Visit(v)
5. color$[u] \leftarrow$ schwarz
6. time $\leftarrow$ time $+ 1$; $f[u] \leftarrow$ time

Graphalgorithmen

$\text{time} = 9$

DFS(G)

1. **for each** vertex $u \in V$ **do** color$[u] \leftarrow$ weiß; $p[u] \leftarrow$ nil
2. time $\leftarrow 0$
3. **for each** vertex $u \in V$ **do**
4. **if** color$[u] =$ weiß **then** DFS-Visit(u)



DFS-Visit(u)

1. color$[u] \leftarrow$ grau
2. time $\leftarrow$ time $+ 1$; $d[u] \leftarrow$ time
3. **for each** $v \in$ Adj$[u]$ **do**
4. **if** color$[v] =$ weiß **then** $p[v] \leftarrow u$; DFS-Visit(v)
5. color$[u] \leftarrow$ schwarz
6. time $\leftarrow$ time $+ 1$; $f[u] \leftarrow$ time

Graphalgorithmen

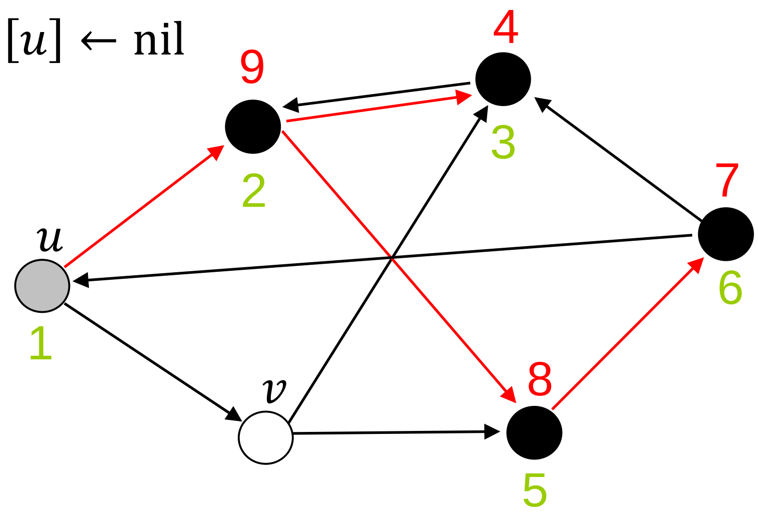
time = 9

DFS(G)

1. **for each** vertex $u \in V$ **do** color$[u] \leftarrow$ weiß; $p[u] \leftarrow$ nil
2. time $\leftarrow 0$
3. **for each** vertex $u \in V$ **do**
4.   **if** color$[u]$ = weiß **then** DFS-Visit(u)

DFS-Visit(u)

1. color$[u] \leftarrow$ grau
2. time $\leftarrow$ time + 1; $d[u] \leftarrow$ time
3. **for each** $v \in$ Adj$[u]$ **do**
4.   **if** color$[v]$ = weiß **then** $p[v] \leftarrow u$; DFS-Visit(v)
5. color$[u] \leftarrow$ schwarz
6. time $\leftarrow$ time + 1; $f[u] \leftarrow$ time

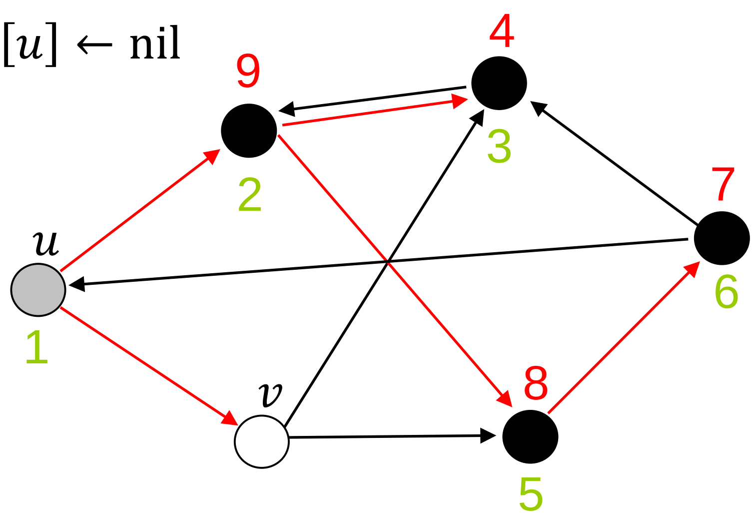


Graphalgorithmen

$\text{time} = 9$

DFS(G)

1. **for each** vertex $u \in V$ **do** color$[u] \leftarrow$ weiß; $p[u] \leftarrow$ nil
2. time $\leftarrow 0$
3. **for each** vertex $u \in V$ **do**
4. **if** color$[u]$ = weiß **then** DFS-Visit(u)



DFS-Visit(u)

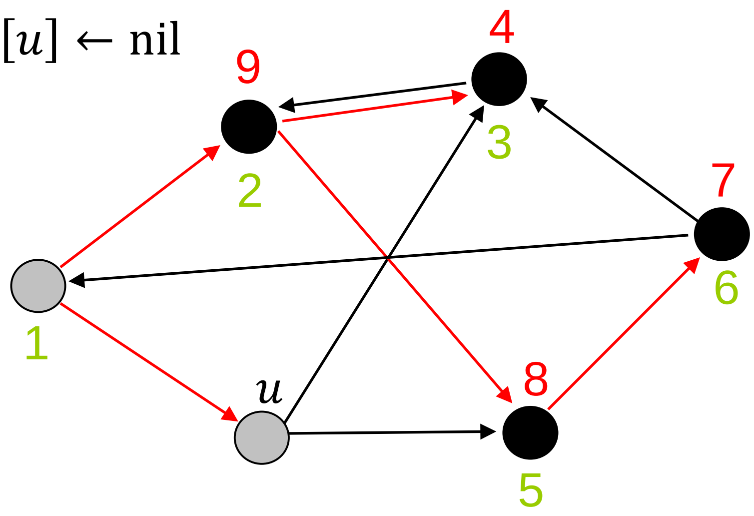
1. color$[u] \leftarrow$ grau
2. time $\leftarrow$ time + 1; $d[u] \leftarrow$ time
3. **for each** $v \in$ Adj$[u]$ **do**
4. **if** color$[v]$ = weiß **then** $p[v] \leftarrow u$; DFS-Visit(v)
5. color$[u] \leftarrow$ schwarz
6. time $\leftarrow$ time + 1; $f[u] \leftarrow$ time

Graphalgorithmen

time = 9

DFS(G)

1. **for each** vertex $u \in V$ **do** color$[u] \leftarrow$ weiß; $p[u] \leftarrow$ nil
2. time $\leftarrow 0$
3. **for each** vertex $u \in V$ **do**
4. **if** color$[u] =$ weiß **then** DFS-Visit(u)



DFS-Visit(u)

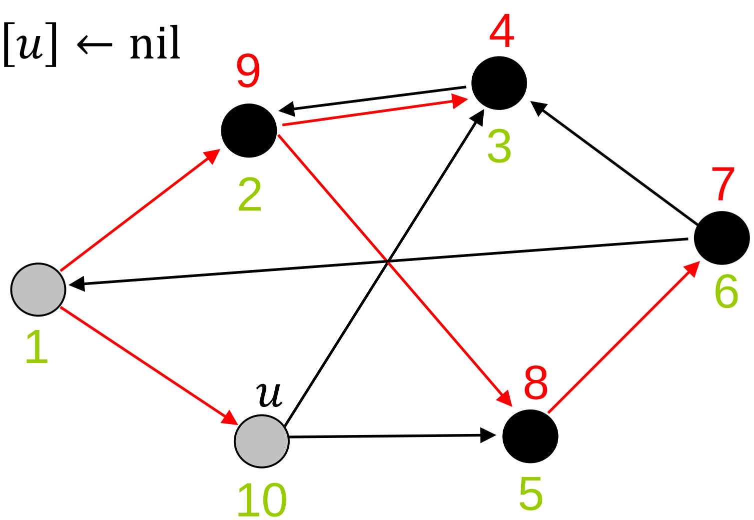
1. color$[u] \leftarrow$ grau
2. time $\leftarrow$ time $+ 1$; $d[u] \leftarrow$ time
3. **for each** $v \in$ Adj$[u]$ **do**
4. **if** color$[v] =$ weiß **then** $p[v] \leftarrow u$; DFS-Visit(v)
5. color$[u] \leftarrow$ schwarz
6. time $\leftarrow$ time $+ 1$; $f[u] \leftarrow$ time

Graphalgorithmen

$\text{time} = 10$

DFS(G)

1. **for each** vertex $u \in V$ **do** color$[u] \leftarrow$ weiß; $p[u] \leftarrow$ nil
2. time $\leftarrow 0$
3. **for each** vertex $u \in V$ **do**
4. **if** color$[u]$ = weiß **then** DFS-Visit(u)



DFS-Visit(u)

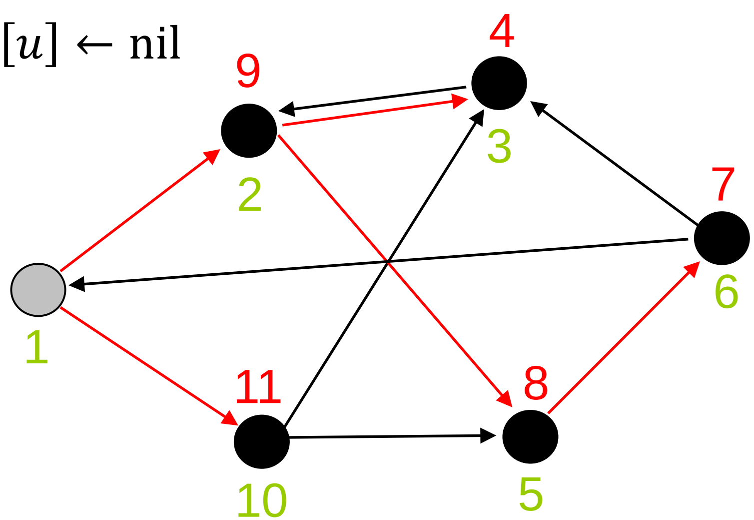
1. color$[u] \leftarrow$ grau
2. $\boxed{\text{time} \leftarrow \text{time} + 1;\ d[u] \leftarrow \text{time}}$
3. **for each** $v \in$ Adj$[u]$ **do**
4. **if** color$[v]$ = weiß **then** $p[v] \leftarrow u$; DFS-Visit(v)
5. color$[u] \leftarrow$ schwarz
6. time $\leftarrow$ time + 1; $f[u] \leftarrow$ time

Graphalgorithmen

time = 11

DFS(G)

1. **for each** vertex $u \in V$ **do** color$[u]$ ← weiß; $p[u]$ ← nil
2. time ← 0
3. **for each** vertex $u \in V$ **do**
4. **if** color$[u]$ = weiß **then** DFS-Visit(u)



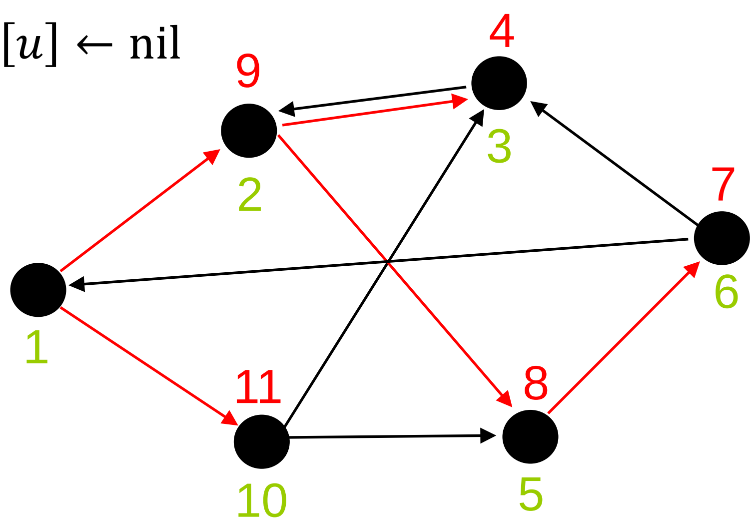
DFS-Visit(u)

1. color$[u]$ ← grau
2. time ← time + 1; $d[u]$ ← time
3. **for each** $v \in$ Adj$[u]$ **do**
4. **if** color$[v]$ = weiß **then** $p[v]$ ← u ; DFS-Visit(v)
5. color$[u]$ ← schwarz
6. $\boxed{\text{time} \leftarrow \text{time} + 1;\ f[u] \leftarrow \text{time}}$

Graphalgorithmen

time = 11

DFS(G)
1. **for each** vertex $u \in V$ **do** color[u] ← weiß; $p[u]$ ← nil
2. time ← 0
3. **for each** vertex $u \in V$ **do**
4. **if** color[u] = weiß **then** DFS-Visit(u)



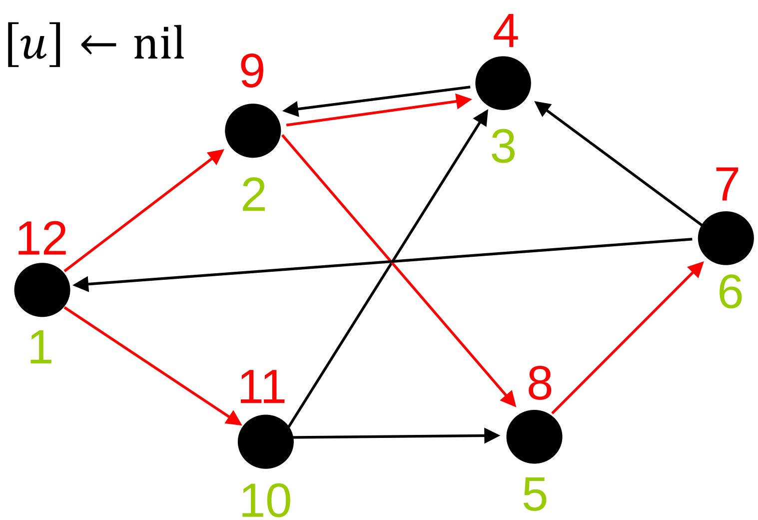
DFS-Visit(u)
1. color[u] ← grau
2. time ← time + 1; $d[u]$ ← time
3. **for each** $v \in$ Adj[u] **do**
4. **if** color[v] = weiß **then** $p[v] \leftarrow u$; DFS-Visit(v)
5. color[u] ← schwarz
6. time ← time + 1; $f[u]$ ← time

Graphalgorithmen

$\text{time} = 12$

DFS(G)

1. **for each** vertex $u \in V$ **do** color$[u] \leftarrow$ weiß; $p[u] \leftarrow$ nil
2. time $\leftarrow 0$
3. **for each** vertex $u \in V$ **do**
4.   **if** color$[u] =$ weiß **then** DFS-Visit(u)



DFS-Visit(u)

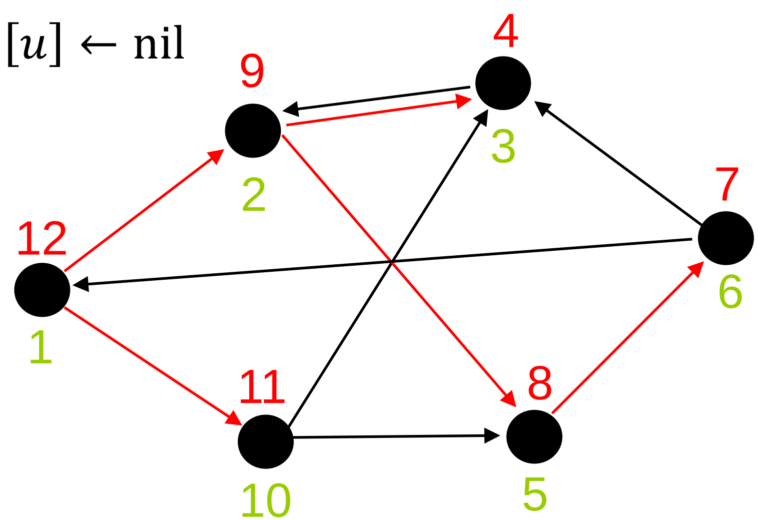
1. color$[u] \leftarrow$ grau
2. time $\leftarrow$ time $+ 1$; $d[u] \leftarrow$ time
3. **for each** $v \in \text{Adj}[u]$ **do**
4.   **if** color$[v] =$ weiß **then** $p[v] \leftarrow u$; DFS-Visit(v)
5. color$[u] \leftarrow$ schwarz
6. time $\leftarrow$ time $+ 1$; $f[u] \leftarrow$ time

Graphalgorithmen

time = 12

DFS(G)

1. **for each** vertex $u \in V$ **do** color$[u] \leftarrow$ weiß; $p[u] \leftarrow$ nil
2. time $\leftarrow 0$
3. **for each** vertex $u \in V$ **do**
4. **if** color$[u]$ = weiß **then** DFS-Visit(u)



DFS-Visit(u)

1. color$[u] \leftarrow$ grau
2. time $\leftarrow$ time + 1; $d[u] \leftarrow$ time
3. **for each** $v \in$ Adj$[u]$ **do**
4. **if** color$[v]$ = weiß **then** $p[v] \leftarrow u$; DFS-Visit(v)
5. color$[u] \leftarrow$ schwarz
6. time $\leftarrow$ time + 1; $f[u] \leftarrow$ time

Laufzeit:
$\mathbf{O}(|V| + |E|)$

Graphalgorithmen

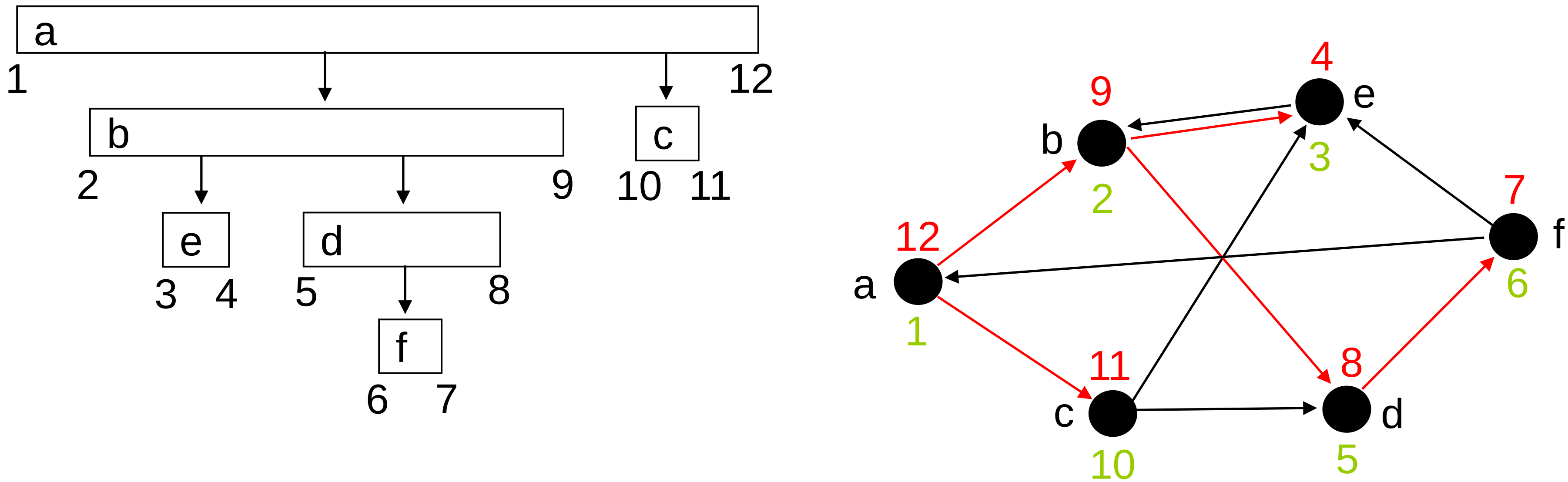
Satz 64 (Klammersatz zur Tiefensuche):

In jeder Tiefensuche eines gerichteten oder ungerichteten Graphen gilt für jeden Knoten u und v genau eine der folgenden drei Bedingungen:

- Die Intervalle $\left[d[u], f[u]\right]$ und $\left[d[v], f[v]\right]$ sind vollständig disjunkt
- Intervall $\left[d[u], f[u]\right]$ ist vollständig im Intervall $\left[d[v], f[v]\right]$ enthalten und u ist Nachfolger von v im DFS-Wald
- Intervall $\left[d[v], f[v]\right]$ ist vollständig im Intervall $\left[d[u], f[u]\right]$ enthalten und v ist Nachfolger von u im DFS-Wald

Graphalgorithmen

Beispiel



Graphalgorithmen

Beweis

- Fall 1: $d[u] < d[v]$.

Graphalgorithmen

Beweis

- Fall 1: $d[u] < d[v]$.
- (a) $d[v] < f[u]$:
- v wurde entdeckt als u noch grau war.

Graphalgorithmen

Beweis

- Fall 1: $d[u] < d[v]$.
- (a) $d[v] < f[u]$:
- v wurde entdeckt als u noch grau war.
- $\Rightarrow v$ Nachfolger von u

Graphalgorithmen

Beweis

- Fall 1: $d[u] < d[v]$.
- (a) $d[v] < f[u]$:
- v wurde entdeckt als u noch grau war.
- $\Rightarrow v$ Nachfolger von u
- Da v nach u entdeckt wurde, werden alle seine ausgehenden Kanten entdeckt und wird v abgearbeitet bevor die Suche zu u zurückkehrt und u abarbeitet

Graphalgorithmen

Beweis

- Fall 1: $d[u] < d[v]$.
- (a) $d[v] < f[u]$:
- v wurde entdeckt als u noch grau war.
- $\Rightarrow v$ Nachfolger von u
- Da v nach u entdeckt wurde, werden alle seine ausgehenden Kanten entdeckt und wird v abgearbeitet bevor die Suche zu u zurückkehrt und u abarbeitet
- Daher ist $\left[d[v], f[v]\right]$ in $\left[d[u], f[u]\right]$ enthalten

Graphalgorithmen

Beweis

- Fall 1: $d[u] < d[v]$.
- (a) $d[v] < f[u]$:
- v wurde entdeckt als u noch grau war.
- $\Rightarrow v$ Nachfolger von u
- Da v nach u entdeckt wurde, werden alle seine ausgehenden Kanten entdeckt und wird v abgearbeitet bevor die Suche zu u zurückkehrt und u abarbeitet
- Daher ist $\left[d[v], f[v]\right]$ in $\left[d[u], f[u]\right]$ enthalten
- (b) $f[u] < d[v]$: Dann sind die Intervalle disjunkt

Graphalgorithmen

Beweis

- Fall 1: $d[u] < d[v]$.
- (a) $d[v] < f[u]$:
- v wurde entdeckt als u noch grau war.
- $\Rightarrow v$ Nachfolger von u
- Da v nach u entdeckt wurde, werden alle seine ausgehenden Kanten entdeckt und wird v abgearbeitet bevor die Suche zu u zurückkehrt und u abarbeitet
- Daher ist $\left[d[v], f[v]\right]$ in $\left[d[u], f[u]\right]$ enthalten
- (b) $f[u] < d[v]$: Dann sind die Intervalle disjunkt

- Fall 2: analog

Graphalgorithmen

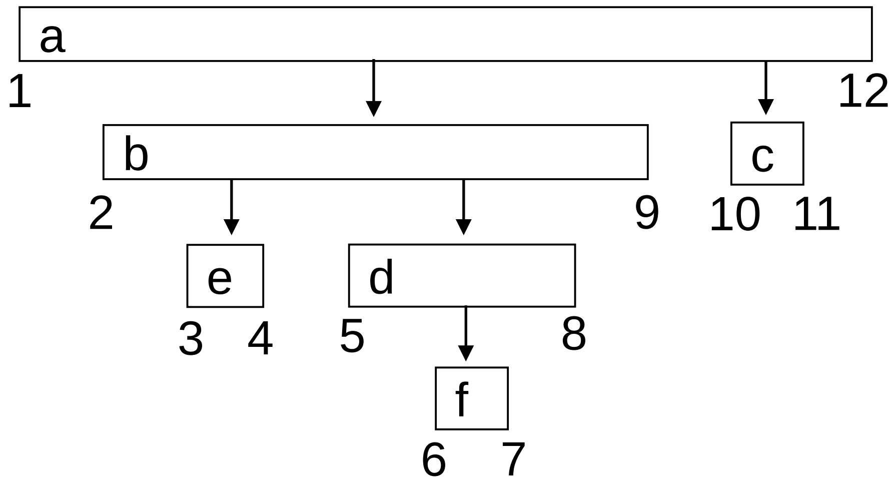
Beweis

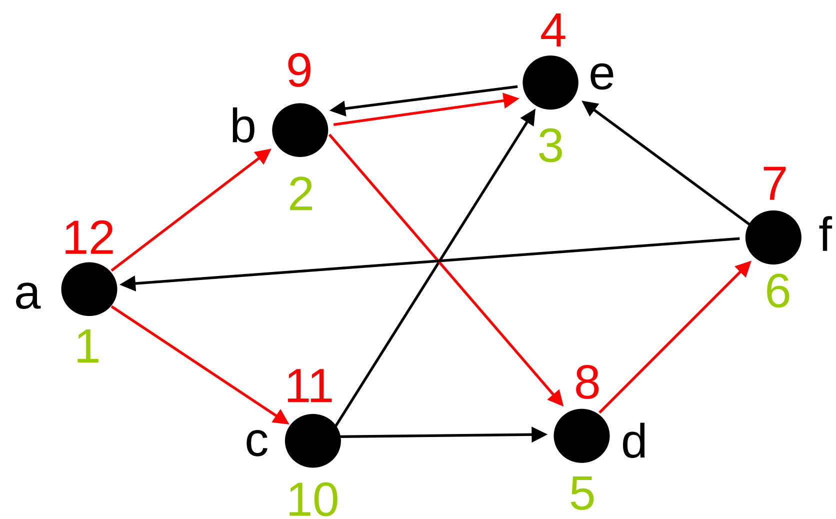
- Fall 1: $d[u] < d[v]$.
- (a) $d[v] < f[u]$:
- v wurde entdeckt als u noch grau war.
- $\Rightarrow v$ Nachfolger von u
- Da v nach u entdeckt wurde, werden alle seine ausgehenden Kanten entdeckt und wird v abgearbeitet bevor die Suche zu u zurückkehrt und u abarbeitet
- Daher ist $\left[d[v], f[v]\right]$ in $\left[d[u], f[u]\right]$ enthalten
- (b) $f[u] < d[v]$: Dann sind die Intervalle disjunkt

- Fall 2: analog

Graphalgorithmen

Beispiel





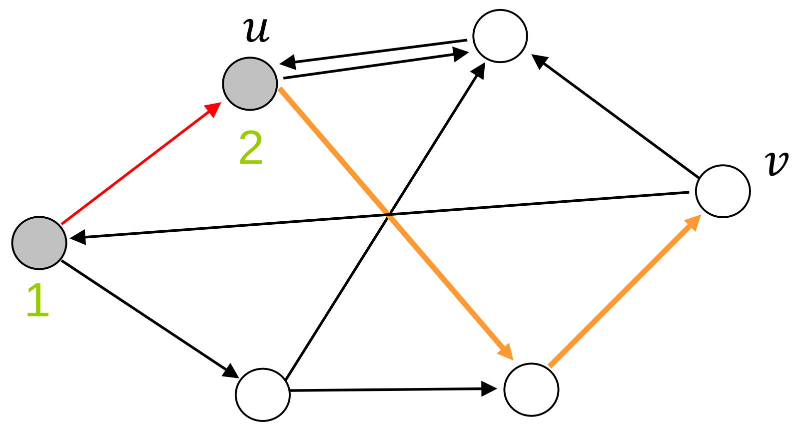
Korollar 65

Knoten v ist echter ($u \neq v$) Nachfolger von Knoten u im DFS-Wald von G,
gdw. $d[u] < d[v] < f[v] < f[u]$.

Graphalgorithmen

Satz 66 (Satz vom weißen Weg)

In einem DFS-Wald eines gerichteten oder ungerichteten Graph G ist Knoten v ein Nachfolger von Knoten u, gdw. zum Zeitpunkt $d[u]$ v über einen Pfad weißer Knoten erreicht werden kann.



Graphalgorithmen

Satz 66 (Satz vom weißen Weg)

In einem DFS-Wald eines gerichteten oder ungerichteten Graph G ist Knoten v ein Nachfolger von Knoten u, gdw. zum Zeitpunkt $d[u]$ v über einen Pfad weißer Knoten erreicht werden kann.

Beweis

„⇒“ Annahme: v Nachfolger von u im DFS Wald

- Sei w beliebiger Knoten auf Pfad im DFS Wald von u nach v
- Damit ist w Nachfolger von u
- Nach Korollar 65: $d[u] < d[w]$. Somit ist w weiß zum Zeitpunkt $d[u]$

Graphalgorithmen

Satz 66 (Satz vom weißen Weg)

In einem DFS-Wald eines gerichteten oder ungerichteten Graph G ist Knoten v ein Nachfolger von Knoten u, gdw. zum Zeitpunkt $d[u]$ v über einen Pfad weißer Knoten erreicht werden kann.

Beweis

„⇐“ Annahme: v ist erreichbar von u über Pfad aus weißen Knoten zum Zeitpunkt $d[u]$, aber v wird nicht Nachfolger von u im DFS Wald

Graphalgorithmen

Satz 66 (Satz vom weißen Weg)

In einem DFS-Wald eines gerichteten oder ungerichteten Graph G ist Knoten v ein Nachfolger von Knoten u, gdw. zum Zeitpunkt $d[u]$ v über einen Pfad weißer Knoten erreicht werden kann.

Beweis

„⇐“ Annahme: v ist erreichbar von u über Pfad aus weißen Knoten zum Zeitpunkt $d[u]$, aber v wird nicht Nachfolger von u im DFS Wald

- OBdA. sei v der einzige Knoten auf Pfad, der nicht Nachfolger wird

Graphalgorithmen

Satz 66 (Satz vom weißen Weg)

In einem DFS-Wald eines gerichteten oder ungerichteten Graph G ist Knoten v ein Nachfolger von Knoten u, gdw. zum Zeitpunkt $d[u]$ v über einen Pfad weißer Knoten erreicht werden kann.

Beweis

„⇐“ Annahme: v ist erreichbar von u über Pfad aus weißen Knoten zum Zeitpunkt $d[u]$, aber v wird nicht Nachfolger von u im DFS Wald

- OBdA. sei v der einzige Knoten auf Pfad, der nicht Nachfolger wird
- Sei w der direkte Vorgänger von v auf dem Pfad und sei w Nachfolger von u

Graphalgorithmen

Satz 66 (Satz vom weißen Weg)

In einem DFS-Wald eines gerichteten oder ungerichteten Graph G ist Knoten v ein Nachfolger von Knoten u, gdw. zum Zeitpunkt $d[u]$ v über einen Pfad weißer Knoten erreicht werden kann.

Beweis

„⇐“ Annahme: v ist erreichbar von u über Pfad aus weißen Knoten zum Zeitpunkt $d[u]$, aber v wird nicht Nachfolger von u im DFS Wald

- OBdA. sei v der einzige Knoten auf Pfad, der nicht Nachfolger wird
- Sei w der direkte Vorgänger von v auf dem Pfad und sei w Nachfolger von u
- Korollar 65: $f[w] \leq f[u]$

Graphalgorithmen

Satz 66 (Satz vom weißen Weg)

In einem DFS-Wald eines gerichteten oder ungerichteten Graph G ist Knoten v ein Nachfolger von Knoten u, gdw. zum Zeitpunkt $d[u]$ v über einen Pfad weißer Knoten erreicht werden kann.

Beweis

„⇐“ Annahme: v ist erreichbar von u über Pfad aus weißen Knoten zum Zeitpunkt $d[u]$, aber v wird nicht Nachfolger von u im DFS Wald

- OBdA. sei v der einzige Knoten auf Pfad, der nicht Nachfolger wird
- Sei w der direkte Vorgänger von v auf dem Pfad und sei w Nachfolger von u
- Korollar 65: $f[w] \leq f[u]$
- v muss entdeckt werden, nachdem u entdeckt wurde und bevor w abgearbeitet ist, d.h. $d[u] < d[v] < f[w] \leq f[u]$

Graphalgorithmen

Satz 66 (Satz vom weißen Weg)

In einem DFS-Wald eines gerichteten oder ungerichteten Graph G ist Knoten v ein Nachfolger von Knoten u, gdw. zum Zeitpunkt $d[u]$ v über einen Pfad weißer Knoten erreicht werden kann.

Beweis

„⇐" Annahme: v ist erreichbar von u über Pfad aus weißen Knoten zum Zeitpunkt $d[u]$, aber v wird nicht Nachfolger von u im DFS Wald

- OBdA. sei v der einzige Knoten auf Pfad, der nicht Nachfolger wird
- Sei w der direkte Vorgänger von v auf dem Pfad und sei w Nachfolger von u
- Korollar 65: $f[w] \leq f[u]$
- v muss entdeckt werden, nachdem u entdeckt wurde und bevor w abgearbeitet ist, d.h. $d[u] < d[v] < f[w] \leq f[u]$
- Somit ist $[d[v], f[v]]$ in $[d[u], f[u]]$ enthalten (Satz 64) und nach Korollar 65 ist v Nachfolger von u

Graphalgorithmen

Satz 66 (Satz vom weißen Weg)

In einem DFS-Wald eines gerichteten oder ungerichteten Graph G ist Knoten v ein Nachfolger von Knoten u, gdw. zum Zeitpunkt $d[u]$ v über einen Pfad weißer Knoten erreicht werden kann.

Beweis

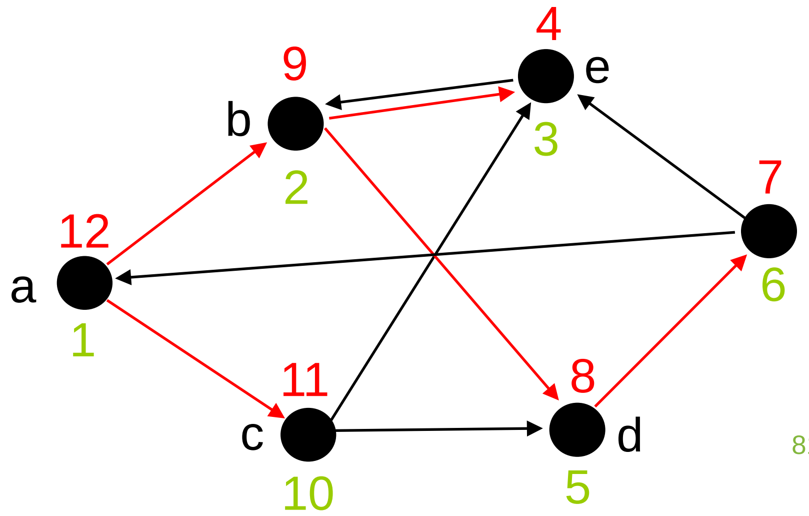
„⇐" Annahme: v ist erreichbar von u über Pfad aus weißen Knoten zum Zeitpunkt $d[u]$, aber v wird nicht Nachfolger von u im DFS Wald

- OBdA. sei v der einzige Knoten auf Pfad, der nicht Nachfolger wird
- Sei w der direkte Vorgänger von v auf dem Pfad und sei w Nachfolger von u
- Korollar 65: $f[w] \leq f[u]$
- v muss entdeckt werden, nachdem u entdeckt wurde und bevor w abgearbeitet ist, d.h. $d[u] < d[v] < f[w] \leq f[u]$
- Somit ist $[d[v], f[v]]$ in $[d[u], f[u]]$ enthalten (Satz 64) und nach Korollar 65 ist v Nachfolger von u

Graphalgorithmen

Klassifikation von Kanten

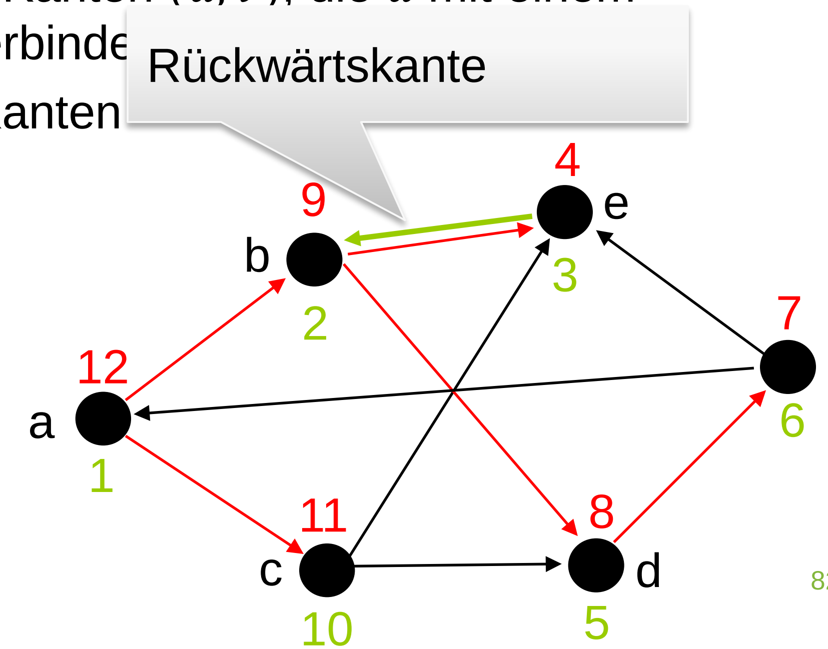
- Baumkanten sind Kanten des DFS-Walds G
- Rückwartskanten sind Kanten (u, v), die Knoten u mit Vorgängern von u im DFS-Baum verbinden
- Vorwärtskanten sind die nicht-Baum Kanten (u, v), die u mit einem Nachfolger v in einem DFS-Baum verbinden
- Kreuzungskanten sind alle übrigen Kanten



Graphalgorithmen

Klassifikation von Kanten

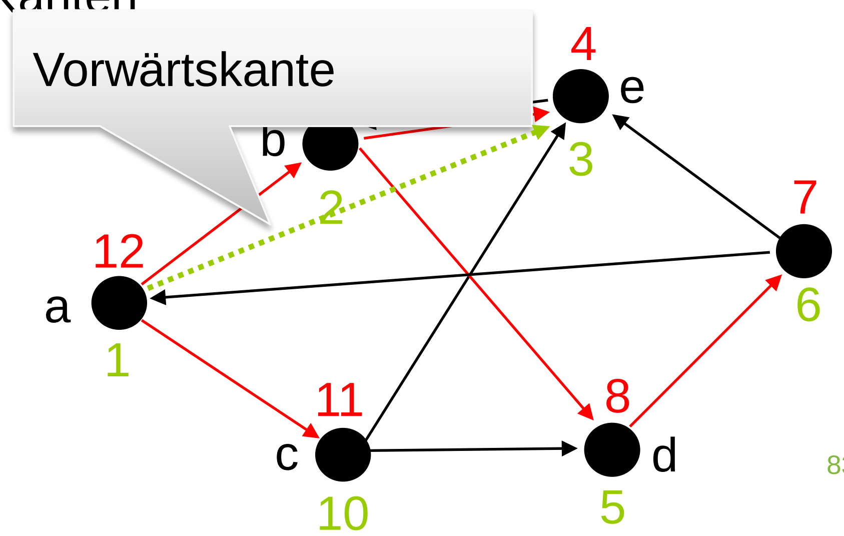
- Baumkanten sind Kanten des DFS-Walds G
- Rückwartskanten sind Kanten (u, v), die Knoten u mit Vorgängern von u im DFS-Baum verbinden
- Vorwärtskanten sind die nicht-Baum Kanten (u, v), die u mit einem Nachfolger v in einem DFS-Baum verbinden
- Kreuzungskanten sind alle übrigen Kanten



Graphalgorithmen

Klassifikation von Kanten

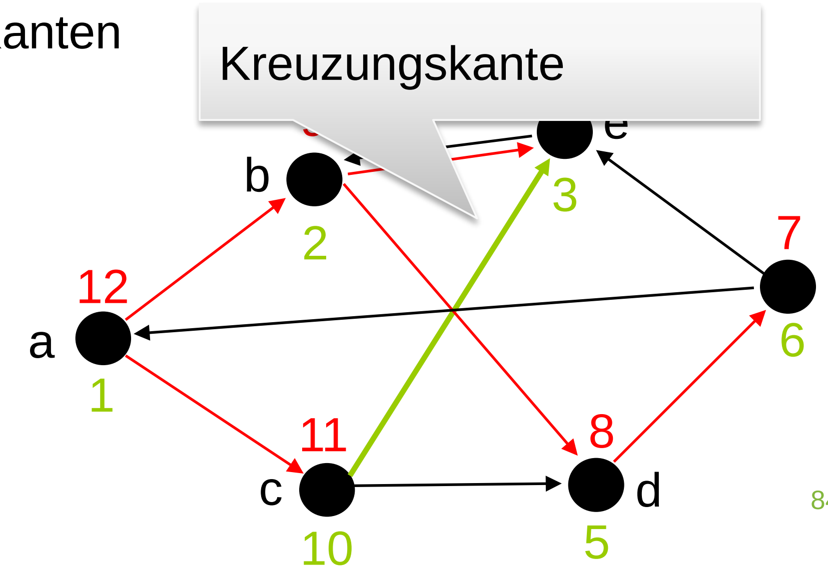
- Baumkanten sind Kanten des DFS-Walds G
- Rückwartskanten sind Kanten (u, v), die Knoten u mit Vorgängern von u im DFS-Baum verbinden
- Vorwärtskanten sind die nicht-Baum Kanten (u, v), die u mit einem Nachfolger v in einem DFS-Baum verbinden
- Kreuzungskanten sind alle übrigen Kanten



Graphalgorithmen

Klassifikation von Kanten

- Baumkanten sind Kanten des DFS-Walds G
- Rückwartskanten sind Kanten (u, v), die Knoten u mit Vorgängern von u im DFS-Baum verbinden
- Vorwärtskanten sind die nicht-Baum Kanten (u, v), die u mit einem Nachfolger v in einem DFS-Baum verbinden
- Kreuzungskanten sind alle übrigen Kanten



Graphalgorithmen

Problem

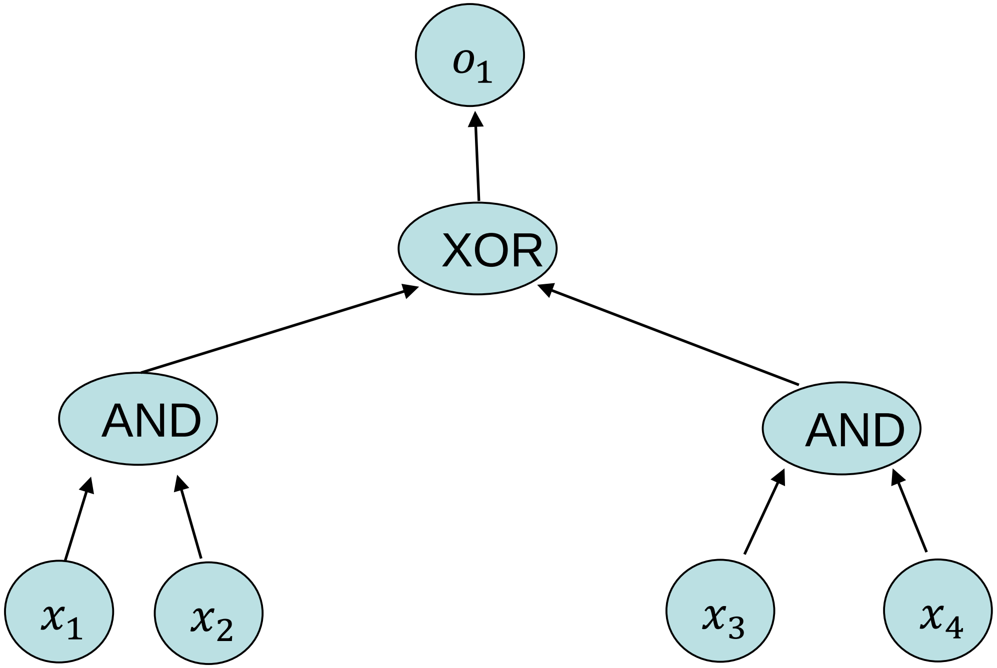
- Eingabe: Schaltkreis (ohne Zyklen) mit NOT, AND, OR, XOR Gattern, n Eingänge und m Ausgänge sowie eine Belegung der Eingänge durch boolesche Werte
- Ausgabe: Die Ausgabewerte des Schaltkreises bei dieser Belegung

Bemerkung

Wir nehmen an, dass der Schaltkreis als gerichteter Graph gegeben ist. Jeder innere Knoten entspricht einem Gatter.

Graphalgorithmen

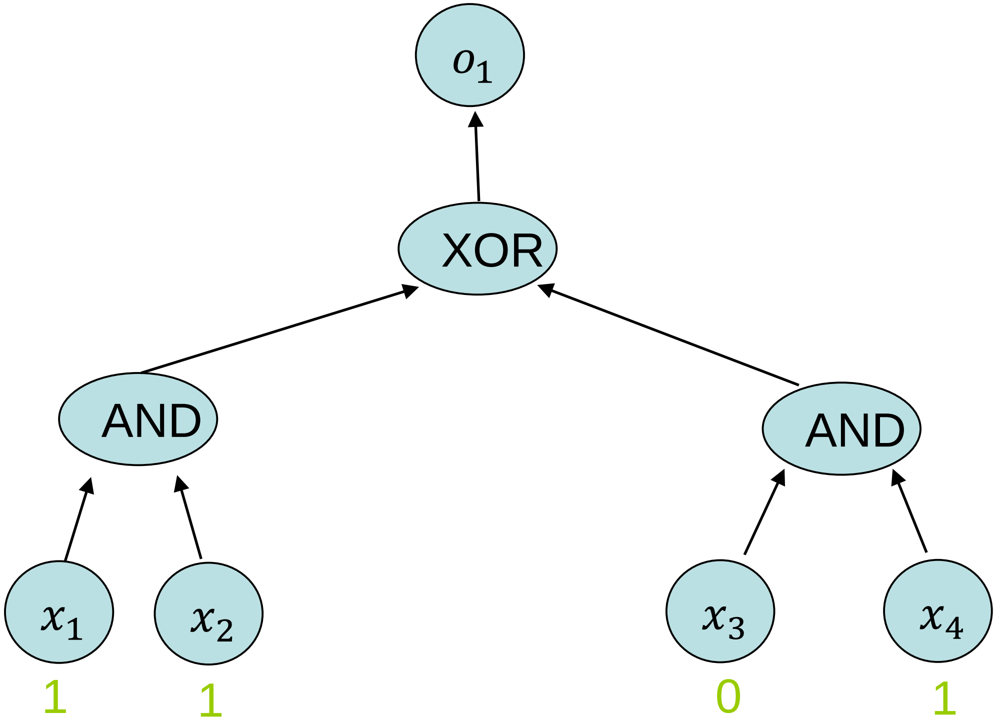
Beispiel:



Graphalgorithmen

Beispiel:

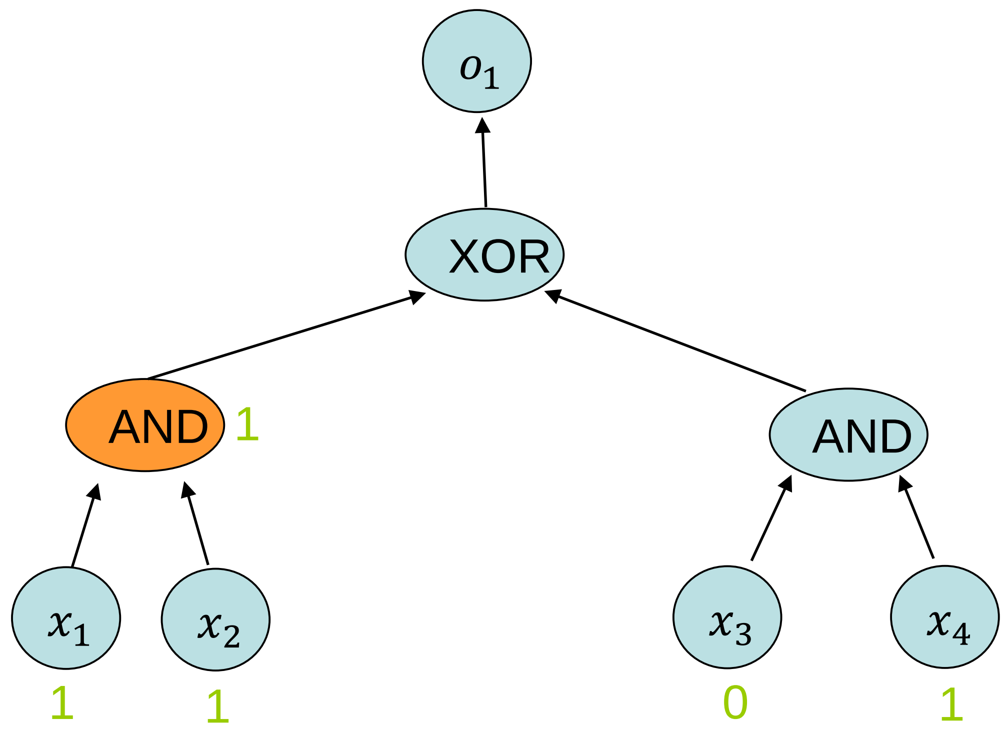
- Eingabe: 1,1,0,1



Graphalgorithmen

Beispiel:

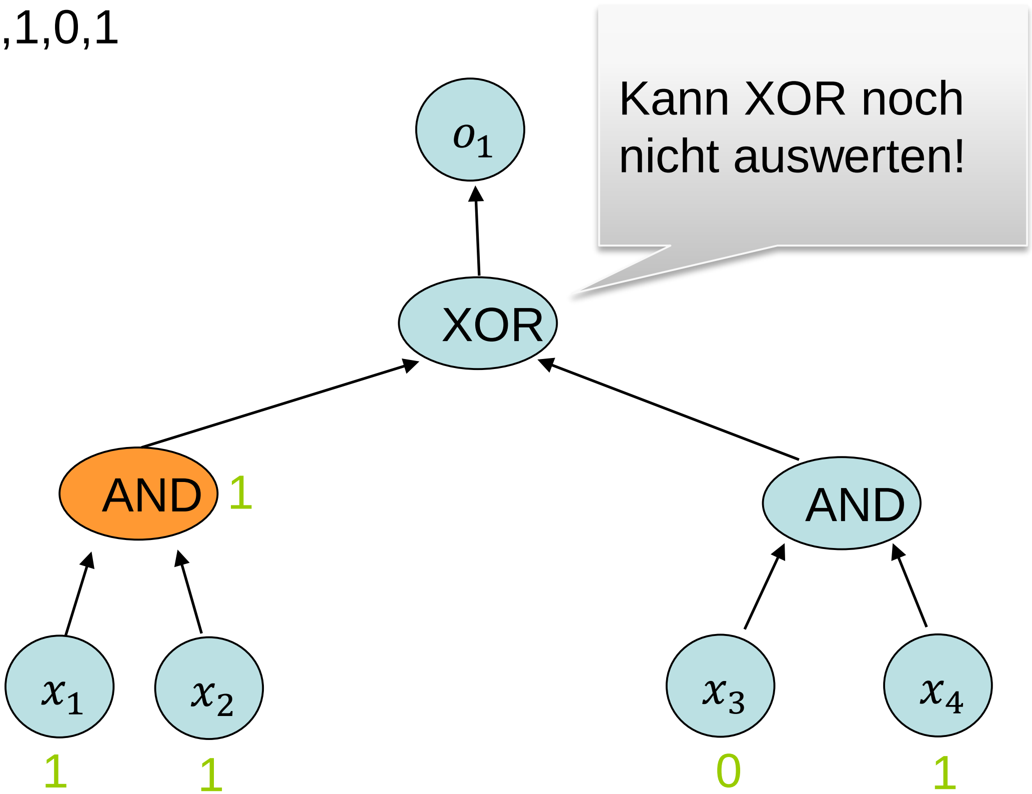
- Eingabe: 1,1,0,1



Graphalgorithmen

Beispiel:

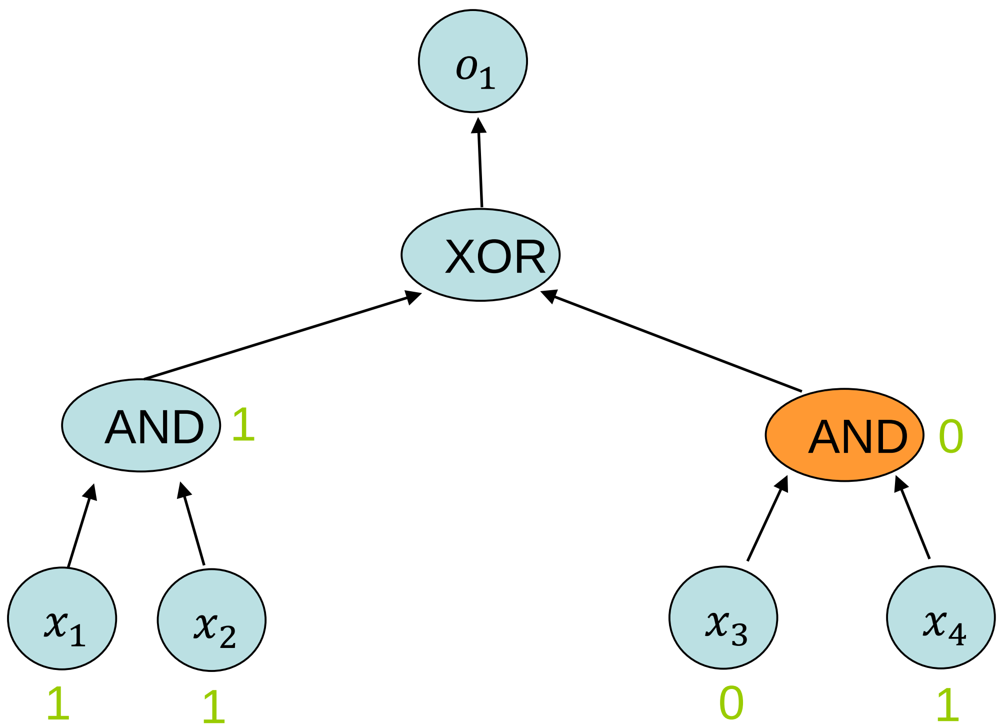
- Eingabe: 1,1,0,1



Graphalgorithmen

Beispiel:

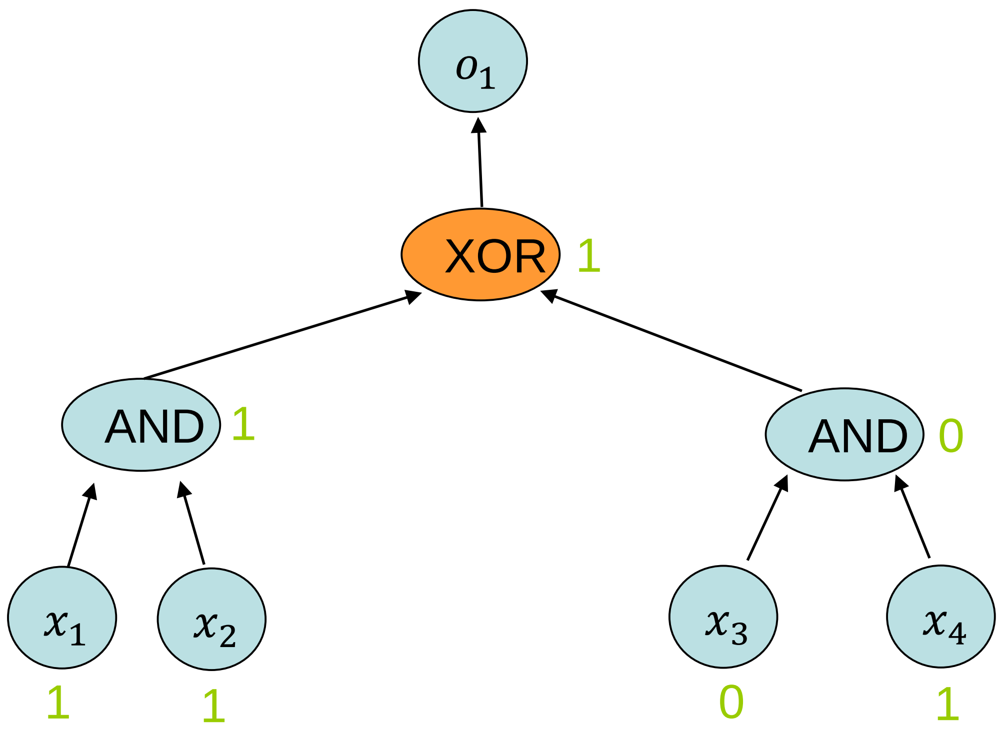
- Eingabe: 1,1,0,1



Graphalgorithmen

Beispiel:

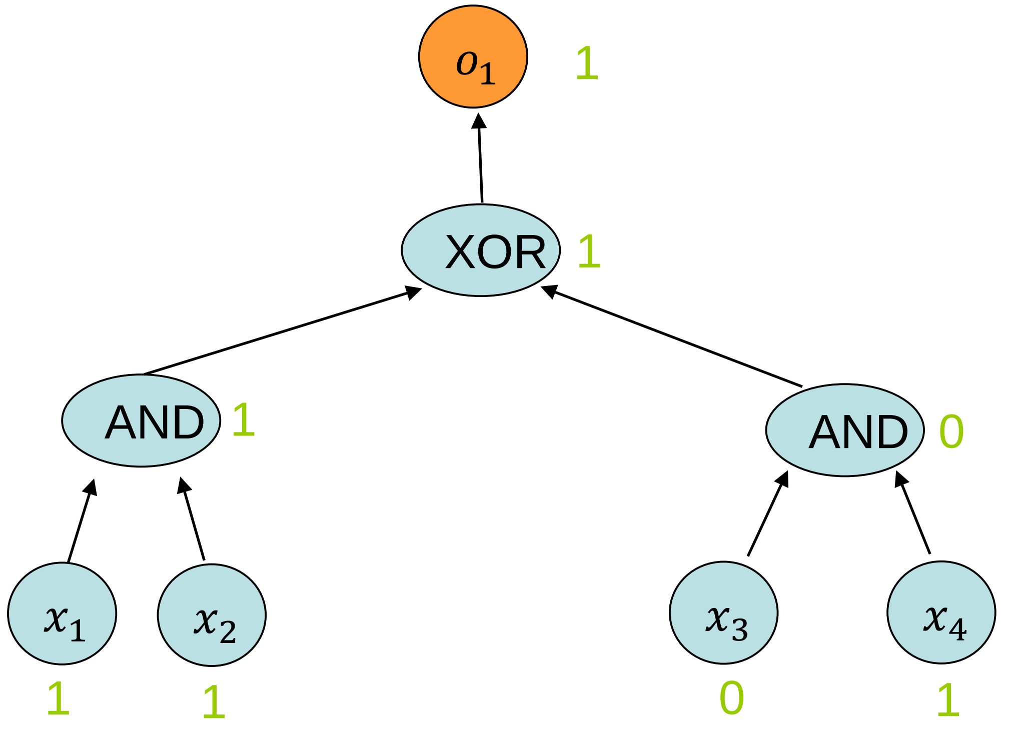
- Eingabe: 1,1,0,1



Graphalgorithmen

Beispiel:

- Eingabe: 1,1,0,1



Graphalgorithmen

Frage

Wie kann man eine Reihenfolge der Knoten berechnen, so dass man an jedem Knoten sofort den Wert des Gatters ausrechnen kann?

Eine Möglichkeit

Topologisches Sortieren:

- Sortierung der Knoten eines gerichteten, azyklischen Graphen, so dass für jede Kante (u, v) u in der Sortierung vor v steht („u wird vor v ausgewertet“)

e

Graphalgorithmen

Frage

Wie kann man eine Reihenfolge der Knoten berechnen, so dass man an jedem Knoten sofort den Wert des Gatters ausrechnen kann?

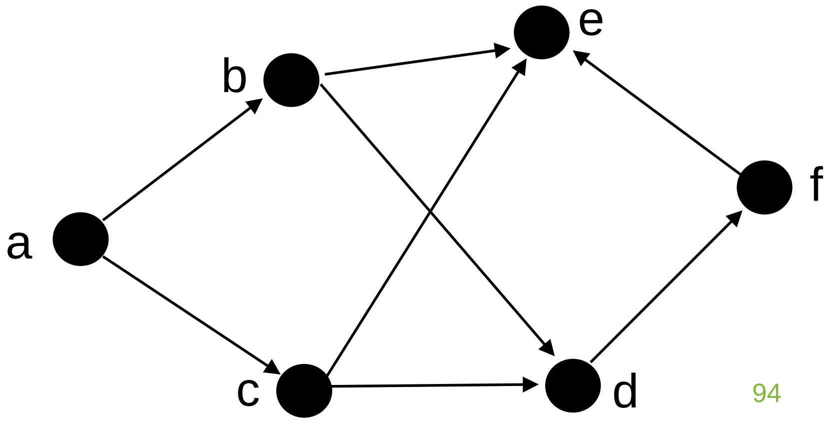
Eine Möglichkeit

Topologisches Sortieren:

- Sortierung der Knoten eines gerichteten, azyklischen Graphen, so dass für jede Kante (u, v) u in der Sortierung vor v steht („u wird vor v ausgewertet")

Frage: Was ist eine topologische Sortierung dieses Graphen?

- a, b, c, d, e, f
- a, b, c, d, f, e
- a, c, b, d, f, e



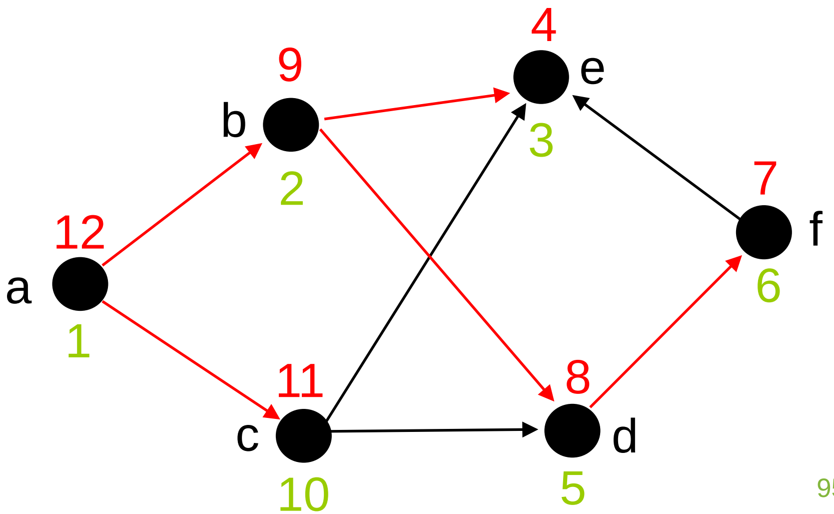
Graphalgorithmen

Topsort(G)

1. Rufe DFS(G) auf, um Zeitstempel $f[v]$ für jeden Knoten v zu berechnen
2. Sobald ein Knoten abgearbeitet ist, füge ihn zu Beginn einer Liste L ein (absteigende Sortierung nach $f[v]$-Werten)
3. **return** L

Sortierung im Beispiel

- a, c, b, d, f, e



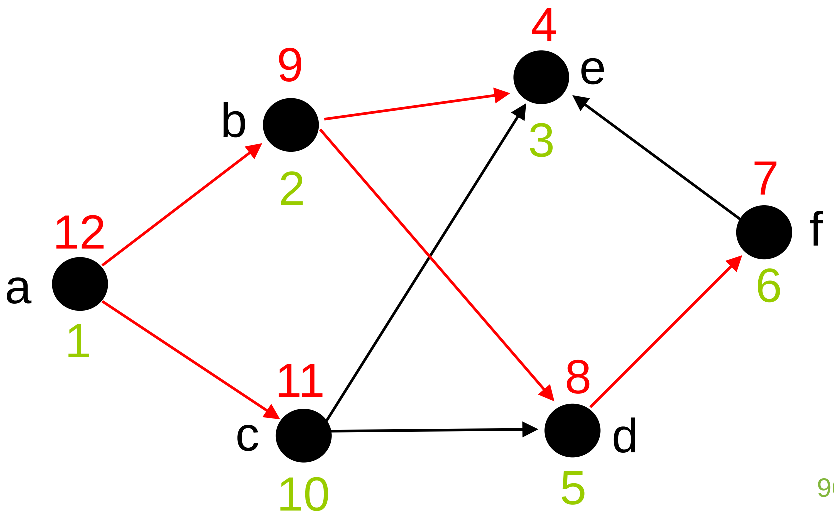
Graphalgorithmen

Topsort(G)

1. Rufe DFS(G) auf, um Zeitstempel $f[v]$ für jeden Knoten v zu berechnen
2. Sobald ein Knoten abgearbeitet ist, füge ihn zu Beginn einer Liste L ein (absteigende Sortierung nach $f[v]$-Werten)
3. **return** L

Sortierung im Beispiel

- a, c, b, d, f, e



Laufzeit

- $\mathbf{O}(|V| + |E|)$

Graphalgorithmen

Lemma 67

Ein gerichteter Graph G ist azyklisch, gdw. eine Tiefensuche in G keine Rückwärtskanten hat.

Beweis

„⇒“: Annahme: G azyklisch und es gibt Rückwärtskante (u,v). Dann ist v Vorgänger von u im DFS Wald. Es gibt also einen Weg von v nach u und die Rückwärtskante schließt den Zyklus. (Widerspruch zur Azyklizität)

Graphalgorithmen

Lemma 67

Ein gerichteter Graph G ist azyklisch, gdw. eine Tiefensuche in G keine Rückwärtskanten hat.

Beweis

„⇒“: Annahme: G azyklisch und es gibt Rückwärtskante (u, v). Dann ist v Vorgänger von u im DFS Wald. Es gibt also einen Weg von v nach u und die Rückwärtskante schließt den Zyklus. (Widerspruch zur Azyklizität)

„⇐“: Annahme: Tiefensuche hat keine Rückwärtskanten und G enthält Zyklus C. Sei v der erste Knoten aus C, der entdeckt wurde und sei (u, v) die vorhergehende Kante im Zyklus C. Zum Zeitpunkt $d[v]$ gibt es einen weißen Pfad von v nach u. Nach Satz 64 wird u Nachfolger von v und (u, v) somit Rückwärtskante. (Widerspruch!)

Graphalgorithmen

Lemma 67

Ein gerichteter Graph G ist azyklisch, gdw. eine Tiefensuche in G keine Rückwärtskanten hat.

Beweis

„⇒“: <u>Annahme:</u> G azyklisch und es gibt Rückwärtskante (u, v). Dann ist v Vorgänger von u im DFS Wald. Es gibt also einen Weg von v nach u und die Rückwärtskante schließt den Zyklus. (Widerspruch zur Azyklizität)

„⇐“: <u>Annahme:</u> Tiefensuche hat keine Rückwärtskanten und G enthält Zyklus C. Sei v der erste Knoten aus C, der entdeckt wurde und sei (u, v) die vorhergehende Kante im Zyklus C. Zum Zeitpunkt $d[v]$ gibt es einen weißen Pfad von v nach u. Nach Satz 64 wird u Nachfolger von v und (u, v) somit Rückwärtskante. (Widerspruch!)

Graphalgorithmen

Satz 68

$\mathrm{TopSort}(G)$ berechnet eine topologische Sortierung eines gerichteten azyklischen Graphen.

Graphalgorithmen

Satz 68

$\mathrm{TopSort}(G)$ berechnet eine topologische Sortierung eines gerichteten azyklischen Graphen.

Beweis

- Annahme: Wir führen DFS auf gerichtetem Graph aus, um die Abarbeitungszeitpunkte zu bestimmen.

Graphalgorithmen

Satz 68

$\mathrm{TopSort}(G)$ berechnet eine topologische Sortierung eines gerichteten azyklischen Graphen.

Beweis

- Annahme: Wir führen DFS auf gerichtetem Graph aus, um die Abarbeitungszeitpunkte zu bestimmen.
- Z.Z.: Für jedes Paar von Knoten $u, v \in V$ mit $u \neq v$ gilt: Gibt es Kante von u nach v, so ist $f[v] < f[u]$.

Graphalgorithmen

Satz 68

$\mathrm{TopSort}(G)$ berechnet eine topologische Sortierung eines gerichteten azyklischen Graphen.

Beweis

- Annahme: Wir führen DFS auf gerichtetem Graph aus, um die Abarbeitungszeitpunkte zu bestimmen.
- Z.Z.: Für jedes Paar von Knoten $u, v \in V$ mit $u \neq v$ gilt: Gibt es Kante von u nach v, so ist $f[v] < f[u]$.
- Betrachte Zeitpunkt, wenn eine beliebige Kante (u, v) durch Tiefensuche entdeckt wird. Dann kann v nicht grau sein, denn dann wäre (u, v) Rückwärtskante und G nach Lemma 67 nicht azyklisch.

Graphalgorithmen

Satz 68

$\mathrm{TopSort}(G)$ berechnet eine topologische Sortierung eines gerichteten azyklischen Graphen.

Beweis

- Annahme: Wir führen DFS auf gerichtetem Graph aus, um die Abarbeitungszeitpunkte zu bestimmen.
- Z.Z.: Für jedes Paar von Knoten $u, v \in V$ mit $u \neq v$ gilt: Gibt es Kante von u nach v, so ist $f[v] < f[u]$.
- Betrachte Zeitpunkt, wenn eine beliebige Kante (u, v) durch Tiefensuche entdeckt wird. Dann kann v nicht grau sein, denn dann wäre (u, v) Rückwärtskante und G nach Lemma 67 nicht azyklisch.
- Daher ist v entweder weiß oder schwarz.

Graphalgorithmen

Satz 68

$\mathrm{TopSort}(G)$ berechnet eine topologische Sortierung eines gerichteten azyklischen Graphen.

Beweis

- Annahme: Wir führen DFS auf gerichtetem Graph aus, um die Abarbeitungszeitpunkte zu bestimmen.
- Z.Z.: Für jedes Paar von Knoten $u, v \in V$ mit $u \neq v$ gilt: Gibt es Kante von u nach v, so ist $f[v] < f[u]$.
- Betrachte Zeitpunkt, wenn eine beliebige Kante (u, v) durch Tiefensuche entdeckt wird. Dann kann v nicht grau sein, denn dann wäre (u, v) Rückwärtskante und G nach Lemma 67 nicht azyklisch.
- Daher ist v entweder weiß oder schwarz.
- Ist v weiß, so wird v Nachfolger von u und es gilt $f[v] < f[u]$

Graphalgorithmen

Satz 68

$\mathrm{TopSort}(G)$ berechnet eine topologische Sortierung eines gerichteten azyklischen Graphen.

Beweis

- Annahme: Wir führen DFS auf gerichtetem Graph aus, um die Abarbeitungszeitpunkte zu bestimmen.
- Z.Z.: Für jedes Paar von Knoten $u, v \in V$ mit $u \neq v$ gilt: Gibt es Kante von u nach v, so ist $f[v] < f[u]$.
- Betrachte Zeitpunkt, wenn eine beliebige Kante (u, v) durch Tiefensuche entdeckt wird. Dann kann v nicht grau sein, denn dann wäre (u, v) Rückwärtskante und G nach Lemma 67 nicht azyklisch.
- Daher ist v entweder weiß oder schwarz.
- Ist v weiß, so wird v Nachfolger von u und es gilt $f[v] < f[u]$
- Ist v schwarz, dann gilt erst recht $f[v] < f[u]$. Damit folgt der Satz.

Graphalgorithmen

Satz 68

$\text{TopSort}(G)$ berechnet eine topologische Sortierung eines gerichteten azyklischen Graphen.

Beweis

- Annahme: Wir führen DFS auf gerichtetem Graph aus, um die Abarbeitungszeitpunkte zu bestimmen.
- Z.Z.: Für jedes Paar von Knoten $u, v \in V$ mit $u \neq v$ gilt: Gibt es Kante von u nach v, so ist $f[v] < f[u]$.
- Betrachte Zeitpunkt, wenn eine beliebige Kante (u, v) durch Tiefensuche entdeckt wird. Dann kann v nicht grau sein, denn dann wäre (u, v) Rückwärtskante und G nach Lemma 67 nicht azyklisch.
- Daher ist v entweder weiß oder schwarz.
- Ist v weiß, so wird v Nachfolger von u und es gilt $f[v] < f[u]$
- Ist v schwarz, dann gilt erst recht $f[v] < f[u]$. Damit folgt der Satz.

Graphalgorithmen

Zusammenfassung

- Tiefensuche bietet andere Möglichkeit (neben Breitensuche) zur Graphtraversierung in Laufzeit $\mathbf{O}(|V| + |E|)$
- Die Sortierung der Tiefensuche kann zum topologischen Sortieren benutzt werden