technische universität
dortmund

SoSe 2018

M. Buchin
A. Krivošija, D. Mezlaf
L. Pfahler, A. Rey

DAP2 – Präsenzübung 2

Besprechung: 25.04.2018 — 27.04.2018

Abgabe:

Präsenzübungen müssen nicht zu Hause bearbeitet werden, sondern werden unter Anleitung während der Übung erarbeitet.

Präsenzaufgabe 2.1: (Induktionsbeweise: Fibonacci-Zahlen)

Die Fibonacci-Zahlen sind definiert durch

$$F_n := \begin{cases} 0 & \text{falls } n = 0 \\ 1 & \text{falls } n = 1 \\ F_{n-1} + F_{n-2} & \text{falls } n > 1 \end{cases} .$$

a) Zeigen Sie für $n \geq 1$ mittels vollständiger Induktion

$$\begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n .$$

b) Zeigen Sie für $n \geq 1$ mittels vollständiger Induktion, dass die Summe der ersten n Fibonacci-Zahlen gleich der $(n+2)$-ten Fibonacci-Zahl minus 1 ist, d. h.

$$\sum_{k=0}^{n-1} F_k = F_{n+1} - 1 .$$

c) Der sogenannte goldene Schnitt ϕ is definiert durch $\phi := \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,61803$. Zeigen Sie für $n \geq 0$ mittels vollständiger Induktion

$$F_n = \frac{\phi^n - (1-\phi)^n}{\sqrt{5}} .$$

Präsenzaufgabe 2.2: (Schleifeninvariante und Korrektheitsbeweis)

Betrachten Sie die folgenden beiden Programme, die als Eingabe eine natürliche Zahl $n \geq 1$ erhalten.

```
Fakultät_V1(n):
j ← 1
f ← 1
while j < n do
    j ← j + 1
    f ← f · j
return f
```

```
Fakultät_V2(n):
j ← n
f ← n
while j > 1 do
    j ← j − 1
    f ← f · j
return f
```

Beweisen Sie, dass beide Programme die Fakultät von n berechnen. (Zur Erinnerung: Die Fakultät $n!$ von einer natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$ ist definiert als $n! = n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1$)
Gehen Sie folgendermaßen vor:

a) Formulieren Sie eine Schleifeninvariante, die zu Beginn jeder Iteration der obigen Schleife im Programm *Fakultät_ V1* gilt, und beweisen Sie sie mittels vollständiger Induktion.

b) Formulieren Sie eine Schleifeninvariante, die zu Beginn jeder Iteration der obigen Schleife im Programm *Fakultät_ V2* gilt, und beweisen Sie sie mittels vollständiger Induktion.

c) Verwenden Sie dann die Schleifeninvarianten, um zu zeigen, dass beide Programme bei Eingabe einer natürlichen Zahl n den Wert $n!$ zurückgeben.