Übungen zur Vorlesung Logik für Informatiker

technische universität dortmund

Thomas Schwentick
Gaetano Geck Christopher Spinrath

Lehrstuhl 1
Logik in der Informatik

WS 2018/19 **Übungsblatt 2** **22.10.2018**

Aufgabe 2.1 **7 Punkte**

Der Internetanschluss von Hannahs Mutter funktioniert (mal wieder) nicht. Das Handbuch des Routers und eine kurze Suche im Internet liefern ihr folgende Informationen.

1. Die Internetverbindung kann nur hergestellt werden, wenn alle Kabel richtig eingesteckt sind und die Benutzerdaten korrekt eingegeben wurden.
2. Wenn die DSL-LED leuchtet, dann kann die Internetverbindung hergestellt werden oder der Router ist defekt.
3. Wenn die Benutzerdaten nicht korrekt eingegeben wurden, dann ist der Router nicht defekt.

a) Modellieren Sie diese Situation mit Hilfe der Aussagenlogik. Erläutern Sie dabei die beabsichtigte Bedeutung der verwendeten Variablen. **(3 Punkte)**

b) Beweisen oder widerlegen Sie mit Hilfe der Resolutionsmethode, dass aus den oben genannten Bedingungen folgt: Wenn die DSL-LED leuchtet, dann wurden die Benutzerdaten korrekt eingegeben. **(4 Punkte)**

Lösung:

a) Wir beschreiben zunächst die verwendeten Aussagenvariablen und geben dann der Auflistung von Zusammenhängen entsprechende Formeln φ_1, φ_2 und φ_3 an. Die Situation wird dann von der Formel $\varphi = \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3$ modelliert.

Aussagenvariablen. In den unten angegebenen Formeln werden die Aussagenvariablen B, D, I, K und L mit der jeweils folgenden Bedeutung verwendet.

- B: Die Benutzerdaten wurden korrekt eingegeben.
- D: Der Router ist defekt.
- I: Die Internetverbindung kann hergestellt werden.
- K: Alle Kabel sind richtig eingesteckt.
- L: Die DSL-LED leuchtet.

Modellierung.

1. Die Internetverbindung kann nur hergestellt werden, wenn alle Kabel richtig eingesteckt sind und die Benutzerdaten korrekt eingegeben wurden. $\boldsymbol{\varphi_1 = I \rightarrow (K \wedge B)}$
2. Wenn die DSL-LED leuchtet, dann kann die Internetverbindung hergestellt werden oder der Router ist defekt. $\boldsymbol{\varphi_2 = L \rightarrow (I \vee D)}$
3. Wenn die Benutzerdaten nicht korrekt eingegeben wurden, dann ist der Router nicht defekt. $\boldsymbol{\varphi_3 = \neg B \rightarrow \neg D}$

b) Die Formel $\boldsymbol{\psi = L \to B}$ beschreibt den Zusammenhang: *Wenn die DSL-LED leuchtet, dann wurden die Benutzerdaten korrekt eingegeben.*

Zu zeigen ist, dass $\varphi \models \psi$ gilt. Dies ist genau dann der Fall, wenn die Formel $\chi = \varphi \wedge \neg\psi$ unerfüllbar ist. Die Unerfüllbarkeit der Formel χ kann durch Resolution bewiesen werden. Um die Resolutionsmethode anwenden zu können, müssen wir χ zunächst in KNF umformen. Dazu bringen wir zunächst die Teilformeln $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ und $\neg\psi$ von χ in KNF:

1.
$$\begin{aligned}\varphi_1 &= I \to (K \wedge B) && \\ &\equiv \neg I \vee (K \wedge B) && \text{(Abkürzung auflösen)} \\ &\equiv (\neg I \vee K) \wedge (\neg I \vee B) && \text{(Distributivität)} \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \varphi_1' && \text{(Definiere } \varphi_1'\text{)}\end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned}\varphi_2 &= L \to (D \vee I) && \\ &\equiv \neg L \vee (D \vee I) && \text{(Abkürzung auflösen)} \\ &\equiv \neg L \vee D \vee I && \text{(Assoziativität)} \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \varphi_2' && \text{(Definiere } \varphi_2'\text{)}\end{aligned}$$

3.
$$\begin{aligned}\varphi_3 &= \neg B \to \neg D && \\ &\equiv \neg\neg B \vee \neg D && \text{(Abkürzung auflösen)} \\ &\equiv B \vee \neg D && \text{(Doppelnegation)} \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \varphi_3' && \text{(Definiere } \varphi_3'\text{)}\end{aligned}$$

4.
$$\begin{aligned}\neg\psi &= \neg(L \to B) && \\ &\equiv \neg(\neg L \vee B) && \text{(Abkürzung auflösen)} \\ &\equiv \neg\neg L \wedge \neg B && \text{(De Morgan)} \\ &\equiv L \wedge \neg B && \text{(Doppelnegation)} \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \psi' && \text{(Definiere } \psi'\text{)}\end{aligned}$$

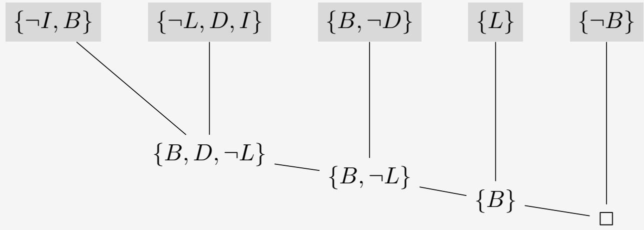
Für die Formel

$$\chi' = \varphi_1' \wedge \varphi_2' \wedge \varphi_3' \wedge \psi' = (\neg I \vee K) \wedge (\neg I \vee B) \wedge (\neg L \vee D \vee I) \wedge (B \vee \neg D) \wedge L \wedge \neg B$$

gilt dann $\chi' \equiv \chi$, denn $\chi' = \varphi_1' \wedge \varphi_2' \wedge \varphi_3' \wedge \psi' \equiv \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3 \wedge \neg\psi = \chi$. Die Formel χ', welche in KNF ist, hat die Klauselmenge

$$\mathcal{K} = \big\{\{\neg I, K\}, \{\neg I, B\}, \{\neg L, D, I\}, \{B, \neg D\}, \{L\}, \{\neg B\}\big\}.$$

In dem folgenden Resolutionsbeweis sind die Klauseln der Ausgangsmenge $\mathcal{K}$ grau hinterlegt.



Da die leere Klausel $\square$ aus der Klauselmenge abgeleitet werden kann, ist die Klauselmenge nach dem Resolutionssatz unerfüllbar und mithin ist auch die Formel χ unerfüllbar. Folglich impliziert φ die Formel ψ ($\varphi \models \psi$).

Aufgabe 2.2 [Markierungsalgorithmus] **3 Punkte**

Gegeben sei die Formel

$$\varphi = (\neg A \to \neg B) \wedge \neg(A \vee \neg D) \wedge \big((C \wedge D \wedge E) \to B\big) \wedge \big(D \to (C \wedge F)\big) \wedge (\neg F \vee E).$$

a) Formen Sie φ schrittweise in eine äquivalente Horn-Formel ψ um. **(1 Punkt)**

b) Testen Sie ψ auf Erfüllbarkeit. Wenden Sie dazu den Markierungsalgorithmus an. Geben Sie alle Zwischenschritte an! **(2 Punkte)**

Lösung:

a) Wir formen zunächst die einzelnen Konjunkte von φ schrittweise in äquivalente Horn-Formeln ψ_i für $1 \leq i \leq 5$ um.

1.
$$\begin{aligned} \neg A \to \neg B &\equiv \neg\neg A \vee \neg B && \text{(Abkürzung auflösen)} \\ &\equiv A \vee \neg B && \text{(Doppelnegation)} \\ &\equiv \neg B \vee A && \text{(Kommutativität)} \\ &\equiv B \to A && \text{(Abkürzung)} \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \psi_1 && \text{(Definiere } \psi_1\text{)} \end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned} \neg(A \vee \neg D) &\equiv \neg A \wedge \neg\neg D && \text{(De Morgan)} \\ &\equiv (A \to \bot) \wedge D && \text{(Abkürzung)} \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \psi_2 && \text{(Definiere } \psi_2\text{)} \end{aligned}$$

3. $(C \wedge D \wedge E) \to B$ ist bereits eine Horn-Formel.

Wir setzen $\psi_3 = (C \wedge D \wedge E) \to B$.

4.
$$\begin{aligned} D \to (C \wedge F) &\equiv \neg D \vee (C \wedge F) && \text{(Abkürzung auflösen)} \\ &\equiv (\neg D \vee C) \wedge (\neg D \vee F) && \text{(Distributivität)} \\ &\equiv (D \to C) \wedge (D \to F) && \text{(Abkürzungen)} \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \psi_4 && \text{(Definiere } \psi_4\text{)} \end{aligned}$$

5. $(\neg F \vee E) \equiv F \to E$ (Abkürzung)

$\stackrel{\texttt{def}}{=} \psi_5$ (Definiere ψ_5)

Insgesamt erhalten wir

$$\psi = (B \to A) \wedge (A \to \bot) \wedge D \wedge \big((C \wedge D \wedge E) \to B\big) \wedge (D \to C) \wedge (D \to F) \wedge (F \to E),$$

wobei gilt $\psi = \psi_1 \wedge \psi_2 \wedge \psi_3 \wedge \psi_4 \wedge \psi_5 \equiv \varphi$. Die Horn-Formel ψ ist also, wie gefordert, äquivalent zu φ.

b) Der Markierungsalgorithmus könnte die Markierungen beispielsweise in der folgenden Reihenfolge bestimmen:

Reihenfolge	1	2	3	4	5	6
markierte Variable	D	C	F	E	B	A
relevante Klausel	D	$(D \to C)$	$(D \to F)$	$(F \to E)$	$\big((C \wedge D \wedge E) \to B\big)$	$B \to A$

In der 7. Iteration bricht der Algorithmus ab und gibt „unerfüllbar“ aus, da alle Variablen der Prämisse der Horn-Klausel $A \to \bot$ markiert sind und somit die Formel ψ unerfüllbar ist.

Aufgabe 2.3 [Funktionale Vollständigkeit] 5 Punkte

Wir betrachten die Menge $\mathrm{AL}^{\texttt{imp}}$ von aussagenlogischen Formeln, welche die kleinste Menge ist, die die folgenden Eigenschaften hat.

1. Jede Variable aus AV ist in $\mathrm{AL}^{\texttt{imp}}$.
2. Sind φ_1 und φ_2 in $\mathrm{AL}^{\texttt{imp}}$, so auch
   - $\neg\varphi_1$, und
   - $(\varphi_1 \to \varphi_2)$.

a) Zeigen Sie, dass es zu den Formeln $\varphi_1 = \top$, $\varphi_2 = \bot$, $\varphi_3 = A \vee B$ und $\varphi_4 = A \wedge B$ äquivalente Formeln ψ_1, ψ_2, ψ_3 und ψ_4 gibt, die in $\mathrm{AL}^{\texttt{imp}}$ enthalten sind. **(1,5 Punkte)**

b) Beweisen Sie, dass es zu jeder Formel $\varphi \in \mathrm{AL}$ eine äquivalente Formel $\psi \in \mathrm{AL}^{\texttt{imp}}$ gibt. Gehen Sie dabei wie folgt vor. **(3,5 Punkte)**

(i) Definieren Sie induktiv eine Abbildung f, die jede beliebige Formel $\varphi \in \mathrm{AL}$ auf eine äquivalente Formel $f(\varphi) \in \mathrm{AL}^{\texttt{imp}}$ abbildet. **[1,5 Punkte]**

(ii) Zeigen Sie mit struktureller Induktion, dass $\varphi \equiv f(\varphi)$ für jede Formel $\varphi \in \mathrm{AL}$ gilt. **[2 Punkte]**

Anmerkung

Es ist wohlbekannt, dass es zu jeder Wahrheitstabelle eine Formel in AL gibt, deren Semantik gerade von der Wahrheitstabelle repräsentiert wird. Aus Aufgabenteil b) folgt, dass dies auch für $\mathrm{AL}^{\texttt{imp}}$ gilt.
Weitere Informationen zu diesem Sachverhalt lassen sich in der Literatur unter dem Begriff „funktional vollständig“ finden.

Lösung:

a) Wir zeigen die Aussage mit Hilfe von Äquivalenzumformungen (nach Satz 2.1). Für ψ_1 und ψ_2 verwenden wir eine beliebige aber feste Aussagenvariable C.

1. Wir setzen $\psi_1 = C \to C$. Es gilt $\varphi_1 \equiv \psi_1$, denn
$$\varphi_1 = \top \equiv C \vee \neg C \equiv \neg C \vee C \equiv C \to C = \psi_1.$$
2. Wir setzen $\psi_2 = \neg(C \to C)$. Es gilt $\varphi_2 \equiv \psi_2$, denn
$$\varphi_2 = \bot \equiv C \wedge \neg C \equiv \neg\neg(C \wedge \neg C) \equiv \neg(\neg C \vee \neg\neg C) \equiv \neg(\neg C \vee C) \equiv \neg(C \to C) = \psi_2.$$
3. Wir setzen $\psi_3 = \neg A \to B$. Es gilt $\varphi_3 \equiv \psi_3$, denn
$$\varphi_3 = A \vee B \equiv \neg\neg A \vee B \equiv \neg A \to B = \psi_3.$$
(Im ersten Schritt verwenden wir das Ersetzungslemma und die Äquivalenz $A \equiv \neg\neg A$.)
4. Wir setzen $\psi_4 = \neg(A \to \neg B)$. Es gilt $\varphi_4 = \psi_4$, denn
$$\varphi_4 = A \wedge B \equiv \neg\neg(A \wedge B) \equiv \neg(\neg A \vee \neg B) \equiv \neg(A \to \neg B) = \psi_4.$$

Die Formeln ψ_i sind offensichtlich in $\mathrm{AL}^{\texttt{imp}}$ enthalten.

b) **(i)** Um die Funktion $f : \mathrm{AL} \to \mathrm{AL}^{\texttt{imp}}$ zu definieren orientieren wir uns an den Formeln aus Teilaufgabe a), wobei wir statt aussagenlogischen Variablen A und B Teilformeln nutzen. Wir werden danach mittels struktureller Induktion und unter Ausnutzung des Substitutions- und Ersetzungslemmas zeigen, dass dies tatsächlich korrekt ist.

Basisfälle. Sei $A \in \mathrm{AV}$ eine beliebige aussagenlogische Formel. Für atomare Formeln setzen wir

- $f(\top) = A \to A$,
- $f(\bot) = \neg(A \to A)$, und
- $f(B) = B$ für alle $B \in \mathrm{AV}$.

Baukastenschritt. Seien φ_1 und φ_2 Formeln aus AL. Wir setzen

- $f(\neg\varphi_1) = \neg f(\varphi_1)$,
- $f(\varphi_1 \vee \varphi_2) = \neg f(\varphi_1) \to f(\varphi_2)$, und
- $f(\varphi_1 \wedge \varphi_2) = \neg(f(\varphi_1) \to \neg f(\varphi_2))$.

Da wir dem induktiven Aufbau von AL gefolgt sind und auf den rechten Seiten nur die Verknüpfungen $\neg$ und $\to$ vorkommen, ist f total und wohldefiniert.

(ii) Wir zeigen mittels struktureller Induktion, dass $\varphi \equiv f(\varphi)$ für alle Formeln $\varphi \in \mathrm{AL}$ gilt.

Basisfälle. Die Äquivalenzen $f(\top) \equiv \top$ und $f(\bot) \equiv \bot$ haben wir bereits in Teilaufgabe a) gezeigt. Für aussagenlogische Variablen B gilt $B \equiv f(B)$ trivialerweise.

Induktionsschritt. Sei $\varphi \in \mathrm{AL}$ beliebig. Nach Definition von AL gibt es drei Fälle.

1. Fall $\varphi = \neg\varphi_1$ für $\varphi_1 \in \mathrm{AL}$. Nach Induktionshypothese gilt $\varphi_1 \equiv f(\varphi_1)$. Durch Anwendung des Ersetzungslemmas erhalten wir $\neg\varphi_1 \equiv \neg f(\varphi_1)$ (wir ersetzen φ_1 in φ durch die äquivalente Formel $f(\varphi_1)$). Nach Definition ist aber gerade $\neg f(\varphi_1) = f(\varphi)$, die Äquivalenz $\varphi \equiv f(\varphi)$ gilt also.
2. Fall $\varphi = \varphi_1 \vee \varphi_2$ für $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathrm{AL}$. Wiederrum gilt nach Induktionshypothese, dass $\varphi_1 \equiv f(\varphi_1)$ und $\varphi_2 \equiv f(\varphi_2)$.

   Nach Aufgabenteil a) gilt $A \vee B \equiv \neg A \to B$. Wir definieren die Substitution S durch $A \mapsto \varphi_1$ und $B \mapsto \varphi_2$. Wir erhalten $S(A \vee B) = \varphi$ und $S(\neg A \to B) = \neg\varphi_1 \to \varphi_2$. Dann folgt mit dem Substitutionslemma, dass $\varphi \equiv \neg\varphi_1 \to \varphi_2$ gilt. Durch zweifache Anwendung des Ersetzungslemmas (und der Induktionshypothese) erhalten wir außerdem, dass $\neg\varphi_1 \to \varphi_2 \equiv \neg f(\varphi_1) \to f(\varphi_2)$.

   Insgesamt gilt damit $\varphi \equiv \neg f(\varphi_1) \to f(\varphi_2) = f(\varphi)$.
3. Fall $\varphi = \varphi_1 \wedge \varphi_2$ für $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathrm{AL}$. Dieser Fall ist analog zum zweiten Fall. Lediglich die Äquivalenz $A \vee B \equiv \neg A \to B$ muss durch $A \wedge B \equiv \neg(A \to \neg B)$ ausgetauscht werden.

Zusatzaufgabe [Sequenzenkalkül] **2 Punkte**

Der im Folgenden vorgestellte Sequenzenkalkül stellt eine Möglichkeit bereit, semantische Folgerungen durch syntaktische Manipulationen abzuleiten. Es handelt sich um einen korrekten und vollständigen Kalkül, was bedeutet, dass für endliche Formelmengen $\Gamma = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_m\}$ und $\Delta = \{\delta_1, \ldots, \delta_n\}$ die Beziehung $\gamma_1 \wedge \cdots \wedge \gamma_m \models \delta_1 \vee \cdots \vee \delta_n$ genau dann gilt, wenn $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_m\} \Rightarrow \{\delta_1, \ldots, \delta_n\}$ abgeleitet werden kann.
Beispielsweise kann $\neg\neg A \wedge (\neg A \vee B) \models B$ aufgrund der Korrektheit des Sequenzenkalküls bewiesen werden, indem gezeigt wird, dass $\neg\neg A \wedge (\neg A \vee B) \Rightarrow B$ abgeleitet werden kann.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg A \Rightarrow \neg A, B \qquad B \Rightarrow \neg A, B}{\neg A \vee B \Rightarrow \neg A, B}\,(\vee \Rightarrow)}{\neg\neg A, \neg A \vee B \Rightarrow B}\,(\neg \Rightarrow)}{\neg\neg A \wedge (\neg A \vee B) \Rightarrow B}\,(\wedge \Rightarrow)$$

Definition

Eine **Sequenz** ist von der Form $\Gamma \Rightarrow \Delta$ für Formelmengen Γ und Δ. Sie heißt **gültig**, wenn jedes Modell von Γ auch Modell von mindestens einer Formel aus Δ ist.

Beispielsweise ist die Sequenz[1] $A \wedge C, \neg B \Rightarrow B, C$ eine gültige Sequenz, da jedes Modell α von $\Gamma = \{A \wedge C, \neg B\}$ beide Formeln $A \wedge C$ und $\neg B$ erfüllt, insbesondere also $\alpha \models C$ gilt und somit eine Formel aus $\Delta = \{B, C\}$ erfüllt ist.

[1] Der Übersichtlichkeit halber verzichten wir auf Mengenklammern.

Definition

Ein **Beweis** einer Sequenz $\Gamma \Rightarrow \Delta$ im Sequenzenkalkül ist ein gerichter Graph mit folgenden Eigenschaften: Jeder Knoten ist mit einer Sequenz beschrieben, sodass

- *wenn der Knoten keine eingehenden Kanten besitzt*, seine Beschreibung von der Form eines Axioms ist; und
- *wenn der Knoten eine eingehende Kante besitzt*, seine Beschreibung von der Form $\Gamma^* \Rightarrow \Delta^*$ ist und die seines Vorgängers von der Form $\Gamma \Rightarrow \Delta$, für eine Schlussregel der Form $\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma^* \Rightarrow \Delta^*}$; und
- *wenn der Knoten zwei eingehende Kanten besitzt*, seine Beschreibung von der Form $\Gamma^* \Rightarrow \Delta^*$ ist und die seiner Vorgänger von der Form $\Gamma \Rightarrow \Delta$ bzw. $\Gamma' \Rightarrow \Delta'$, für eine Schlussregel der Form $\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta \text{ und } \Gamma' \Rightarrow \Delta'}{\Gamma^* \Rightarrow \Delta^*}$.

Axiome und Schlussregeln

Für alle Formeln φ, ψ sowie alle Formelmengen Γ, Δ gelten folgende Axiome und Schlussregeln. Um die Beschreibung der Beweise zu vereinfachen, versehen wir die Schlussregeln mit Bezeichnern.

Axiome: $\Gamma, \varphi \Rightarrow \Delta, \varphi$

Negation: $(\neg \Rightarrow)\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi}{\Gamma, \neg\varphi \Rightarrow \Delta}$ und $(\Rightarrow \neg)\ \frac{\Gamma, \varphi \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg\varphi}$

Disjunktion: $(\vee \Rightarrow)\ \frac{\Gamma, \varphi \Rightarrow \Delta \text{ und } \Gamma, \psi \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \varphi \vee \psi \Rightarrow \Delta}$ und $(\Rightarrow \vee)\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \vee \psi}$

Konjunktion: $(\Rightarrow \wedge)\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \text{ und } \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \wedge \psi}$ und $(\wedge \Rightarrow)\ \frac{\Gamma, \varphi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \varphi \wedge \psi \Rightarrow \Delta}$

Zeigen Sie, dass folgende Aussagen abgeleitet werden können.

1. $B \Rightarrow \neg\neg B$
2. $(A \wedge B) \vee A \Rightarrow A$
3. $\neg(A \wedge B) \Rightarrow \neg A \vee \neg B$
4. $(\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee C) \Rightarrow \neg A \vee C$