M. Buchin
A. Krivošija, D. Mezlaf
L. Pfahler, A. Rey

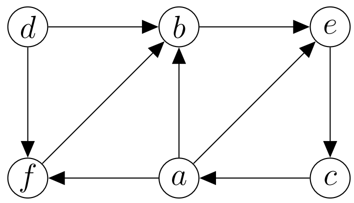
DAP2 – Heimübung 14

Ausgabedatum: 06.07.2018 — Abgabedatum: Mo. 16.06.2018 bis 12 Uhr

Schreiben Sie unbedingt immer Ihren **vollständigen Namen**, **Ihre Matrikelnummer** und **Ihre Gruppennummer** auf Ihre Abgaben!

Aufgabe 14.1 (5 Punkte): (Tiefensuche und topologische Sortierung)

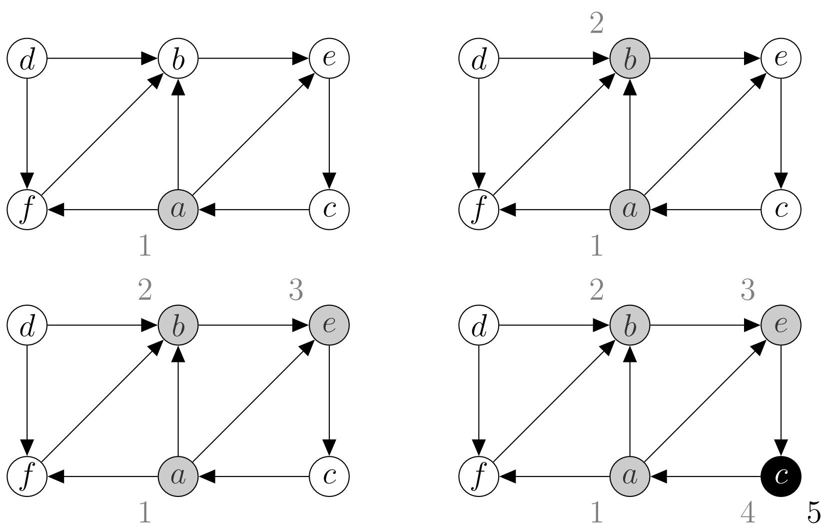
Gegeben sei der gerichtete Graph $G = (V, E)$:

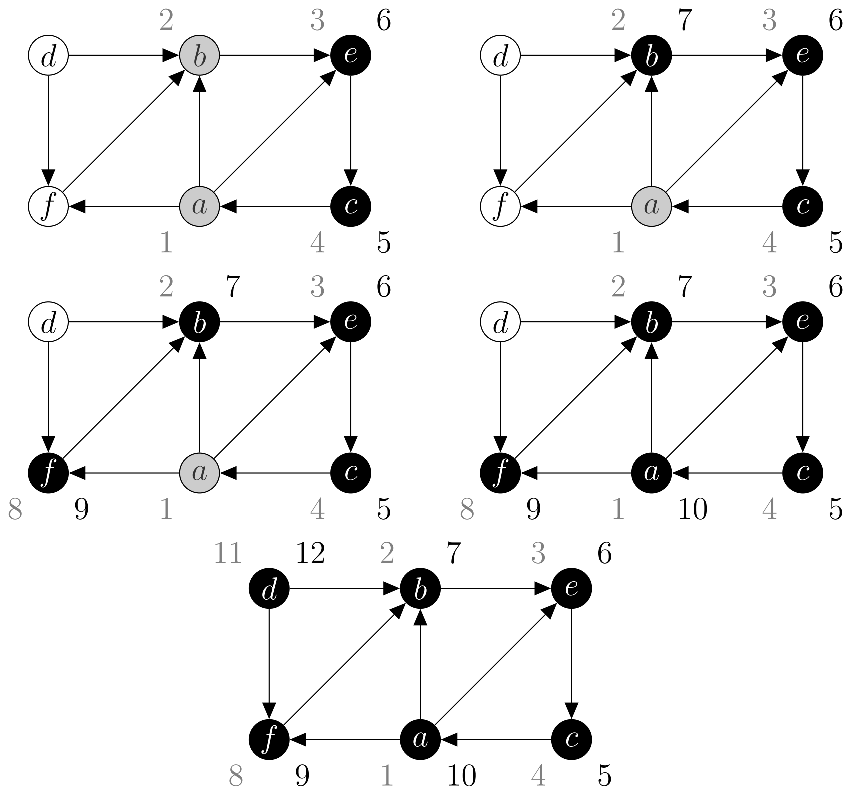


a) Führen Sie eine Tiefensuche auf dem Graphen G durch. Die Startknoten werden dabei in alphabetischer Reihenfolge betrachtet. Die ausgehenden Kanten eines Knotens werden ebenso in alphabetischer Reihenfolge ihrer Zielknoten abgearbeitet.

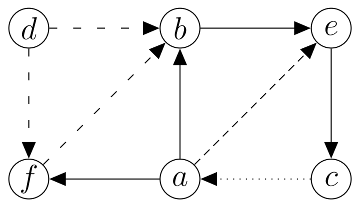
Geben Sie dabei zu jedem Knoten $v \in V$ seine Werte $d[v]$ und $f[v]$, seinen Vorgänger $\pi[v]$ und seine Farbe $color[v]$ an. Kennzeichnen Sie die klassifizierten Kantenmengen T, B, F und C (für Baum-, Rückwärts-, Vorwärts-, und Kreuzungskanten).

Lösung: Die folgenden Graphen stellen die einzelnen Schritte der Tiefensuche dar. Die d-Werte sind links der Knoten in grau und die f-Werte rechts der Knoten in schwarz dargestellt. Zu Beginn sind alle Knoten weiß. Die Tiefensuche startet in Knoten a. Erfolgt in einem Knoten kein weiterer Aufruf der Tiefensuche, wird hier ein Zwischenschritt übersprungen und der Knoten direkt schwarz gefärbt.





Die Baumkanten sind in der folgenden Grafik durchgehend, Rückwärtskanten gepunktet, Vorwärtskanten dicht gestrichelt und Kreuzungskanten lose gestrichelt eingezeichnet.



Die Vorgänger der Knoten ergeben sich wie folgt:

$$\pi(a) = \text{nil}, \pi(b) = a, \pi(c) = e, \pi(d) = \text{nil}, \pi(e) = b, \pi(f) = a.$$

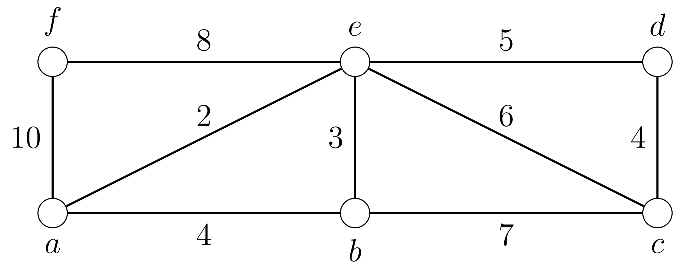
b) Führen Sie die topologische Sortierung auf $G' = (V, E')$ mit $E' = E \setminus \{(c, a)\}$ durch. Sie dürfen dabei Ihre Ergebnisse aus Aufgabenteil a) verwenden. Erläutern Sie Ihre Lösung.

Lösung: Eine topologische Sortierung des gleichen Graphen (ohne die einzige Rückwärtskante) ergibt sich durch sortieren der Knoten absteigend nach ihren f-Werten:

$$d, a, f, b, e, c.$$

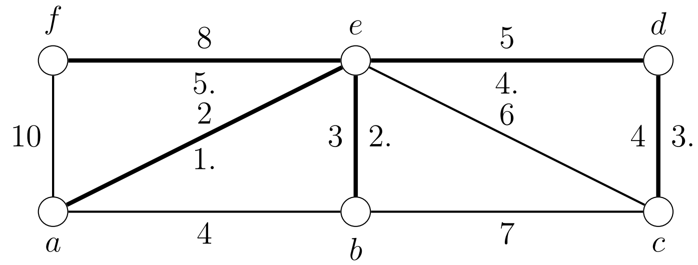
Aufgabe 14.2 (5 Punkte + 5 Bonuspunkte): (Minimale Spannbäume)

a) (2 Punkte) Betrachten Sie folgenden Graphen G.

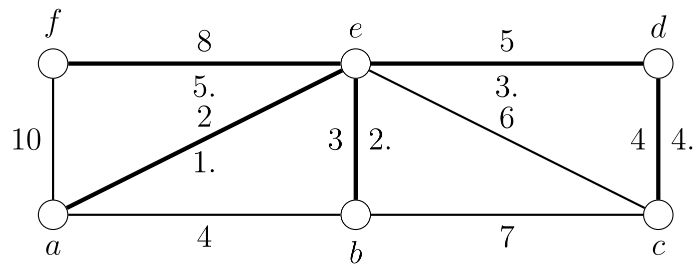


Führen Sie den Algorithmus von Kruskal sowie den Algorithmus von Prim jeweils auf G aus, um einen minimalen Spannbaum zu bestimmen. Markieren Sie dabei jeweils die Kanten, die in den minimalen Spannbaum aufgenommen werden, und kennzeichnen Sie die Reihenfolge, in der dies geschieht. Der Algorithmus von Prim soll mit Knoten a beginnen.

Lösung: Algorithmus von Kruskal: Die Kanten des minimalen Spannbaums sind dick gezeichnet und nummeriert.



Der Algorithmus von Prim berechnet den selben Spannbaum, fügt die Kanten aber in einer anderen Reihenfolge hinzu.



b) (1 Punkt) Spielt es in Aufgabenteil a) für den ausgegebenen minimalen Spannbaum eine eine Rolle, mit welchem Knoten der Algorithmus von Prim beginnt? Begründen Sie.

Lösung: Für diesen Graphen spielt es keine Rolle, da bis auf das Kantengewicht 4 (zu sehen an den Kanten (a, b) und (c, d)) kein Kantengewicht doppelt vorkommt. Da für die Kante (a, b) jeweils an Knoten a wie an Knoten b eine günstigere Kante existiert, ist die Kante (a, b) für keinen Schnitt in G sicher und wird damit unter keinen Umständen vom

Algorithmus von Prim gewählt. Da wie bereits erwähnt alle weiteren Kanten unterschiedliche Kantengewichte haben, folgt die Eindeutigkeit des minimalen Spannbaums in G, sodass jeder Algorithmus, der einen minimalen Spannbaum berechnet, genau den obigen Spannbaum berechnet.

c) (2 Punkte) Nennen Sie eine Eigenschaft, die ein gewichteter, ungerichteter Graph haben muss, damit er keinen eindeutigen minimalen Spannbaum besitzt. Beweisen Sie Ihre Aussage.

Lösung: Hier reicht es, eine notwendige Bedingung dafür anzugeben, dass der minimale Spannbaum nicht eindeutig ist, d. h., die Negation einer hinreichenden Bedingung, damit der minimale Spannbaum eine eindeutige Lösung hat.

Beispielsweise ist eine Lösungsmöglichkeit: Damit ein Graph keinen eindeutigen minimalen Spannbaum besitzt, muss es mindestens zwei Kanten geben, die das gleiche Gewicht haben. (Achtung: Diese Bedingung ist noch nicht hinreichend, da die Kanten beide als sichere Kanten gefunden werden können müssen)

Beweis:

Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit Gewichtsfunktion $w : E \to \mathbb{R}$, der zwei unterschiedliche minimale Spannbäume besitzt. Seien diese mit $A_1 = (V, E_1)$ und $A_2 = (V, E_2)$, $E_1 \neq E_2$ bezeichnet. Sei $n = |V|$.

Widerspruchsannahme: Jedes Gewicht kommt nur einmal im Graphen vor.

Dann können wir die Kanten in E_1 und E_2 jeweils aufsteigend nach ihrem Gewicht sortieren. Bezeichne also $E_1 = \{e_1, \dots, e_{n-1}\}$ und $E_2 = \{f_1, \dots, f_{n-1}\}$ mit $e_i < e_j$ und $f_i < f_j$ für alle i, j mit $1 \leq i < j \leq n-1$. Da $E_1 \neq E_2$, muss es einen Index geben, an dem sich die beiden Kantenmengen unterscheiden. Sei i der kleinste solche Index. Nach Widerspruchsannahme gilt also $w(e_i) \neq w(f_i)$. O.B.d.A. können wir voraussetzen, dass $w(e_i) < w(f_i)$ ist (sonst E_1 und E_2 tauschen). Wegen der Sortierung kann e_i nicht in E_2 vorkommen (sonst wäre $e_i = f_j$ für ein $j < i$, sodass i nicht mehr der kleinste Index wäre, an dem sich die E_1 und E_2 unterscheiden).

Betrachten wir den Graphen $(V, E_2 \cup \{e_i\})$, also den Spannbaum A_2 erweitert um die Kante e_i, erhalten wir einen Kreis $C \subseteq E_2 \cup \{e_i\}$ mit $e_i \in C$. Sobald eine weitere Kante e aus C entfernt wird, erhalten wir einen neuen Spannbaum mit Kantenmenge $E_2 \cup \{e_i\}) \setminus \{e\}$.

Falls für alle solche $e \in C$, $e \neq e_i$, $w(e) < w(e_i)$ gilt, folgt nach der Definition von i, dass $C \subseteq E_1$; ein Widerspruch dazu, dass A_1 ein Spannbaum ist.

Sobald es aber ein $e \in C$ mit $w(e) > w(e_i)$ gibt, hat der entstandene Spannbaum ein kleineres Gewicht als A_2, ein Widerspruch zur Minimalität von A_2.

Also war die Annahme falsch, und es muss ein Gewicht doppelt vorkommen.

d) (2.5 Bonuspunkte) Zeigen Sie, dass in einem gewichteten, ungerichteten, zusammenhängenden Graphen eine Kante, die nicht in jedem minimalen Spannbaum enthalten ist, auf einem Kreis liegt.

Lösung: Beweis durch Widerspruch: Angenommen, es gäbe einen minimalen Spannbaum $S = (V, E')$ von $G = (V, E)$, der eine Kante $\{u, v\} \in E$, die nicht auf einem

Kreis liegt, nicht enthält. Fügen wir $\{u,v\}$ zu S hinzu, erhalten wir den Graphen $G' = (V, E' \cup \{\{u,v\}\})$. Da $E' \subseteq E$ und $\{u,v\} \in E$, gilt $E' \cup \{\{u,v\}\} \subseteq E$. Da S ein Spannbaum ist, der u und v verbindet, gibt es einen Kreis in G', der $\{u,v\}$ enthält. Die Kanten dieses Kreises sind jedoch alle in $E' \cup \{\{u,v\}\}$ enthalten, also auch in E. Dies ist ein Widerspruch zur Annahme, dass $\{u,v\}$ auf keinem Kreis liegt.

e) (2.5 Bonuspunkte) Zeigen Sie, dass in einem gewichteten, ungerichteten, zusammenhängenden Graphen mit n Knoten, in dem jede Kante das gleiche Gewicht w besitzt, die Summe der Kantengewichte in einem minimalen Spannbaum immer $wn - w$ beträgt.

Lösung: Wir zeigen, dass in jedem Spannbaum in einem zusammenhängenden Graphen mit n Knoten genau $n-1$ Kanten enthalten sind. Wenn jede Kante Gewicht w hat, bedeutet das, dass jeder Spannbaum eine Gewichtsumme von $w(n-1)$ hat. Diese ist demnach minimal.

Wir zeigen die Aussage mit Induktion über die Anzahl n der Knoten.

I.A.: Wenn ein Graph nur einen Knoten besitzt, ist er zusammenhängend, hat keine Kanten und wird von $1-1=0$ Kanten aufgespannt.

I.V.: Für eine beliebige natürliche Zahl n_0 gilt: Jeder Spannbaum eines zusammenhanghängenden Graphen mit $n \leq n_0$ Knoten hat $n-1$ Kanten.

I.S.: Zu zeigen: Jeder Spannbaum eines zusammenhängenden Graphen G mit $n = n_0 + 1$ Knoten hat $n-1$ Kanten. Wir betrachten einen beliebigen Spannbaum T von G und darin eine Kante e. Wenn wir diese Kante aus T entfernen, erhalten wir zwei Teilbäume, die jeweils einen induzierten Teilgraphen von G aufspannen. Wir bezeichen diese zusammenhängenden, induzierten Teilgraphen mit G_1 und G_2 mit Knotenmengen V_1 bzw. V_2. Die nicht-leeren Knotenmengen V_1 und V_2 bilden eine Partitionierung der Knotenmenge $V(G)$ (d. h., $V_1, V_2 \subseteq V$, $V_1 \cup V_2 = V(G)$ und $V_1 \cap V_2 = \emptyset$). Die Knotenanzahlen n_1 und n_2 dieser induzierten Teilgraphen G_1 bzw. G_2 sind kleiner als n, da V_1 und V_2 beide nicht leer sind. Also greift die Induktionsvoraussetzung, d. h., G_1 wird von genau $n_1 - 1$ Kanten und G_2 von genau $n_2 - 1$ Kanten aufgespannt. Insgesamt besteht T zusammen mit der Kante e aus $n_1 - 1 + n_2 - 1 + 1 = n - 1$ Kanten.