ÜBUNGEN ZUR VORLESUNG LOGIK FÜR INFORMATIKER

technische universität dortmund

THOMAS SCHWENTICK
GAETANO GECK CHRISTOPHER SPINRATH

Lehrstuhl 1
Logik in der Informatik

WS 2018/19 — **ÜBUNGSBLATT 1** — **08.10.2018**

Abgabe bis spätestens am Montag, 22.10.2018.

- **(vor der Vorlesung) im HG II, HS 3, oder**
- **in die Briefkästen im Durchgangsflur, der die 1. Etage der OH 12 mit dem Erdgeschoss der OH 14 verbindet.**

Beachten Sie die Schließzeiten der Gebäude!

Die Abgabe erfolgt für alle Übungszettel *einzeln*. Lösungen sind nur dann vollständig, wenn sie *begründet* und *erklärt* werden. Falls Beweise erwartet werden, wird dies in der Aufgabenstellung ausdrücklich gesagt.

Bezüglich der Form der Abgabe beachten Sie bitte: Abzugeben sind Lösungen auf DINA4-Blättern, die Sie unbedingt zusammenheften. Auf der ersten Seite der Abgabe oben links müssen folgende Informationen zu finden sein: Ihr Name, *die Nummer Ihrer Übungsgruppe* und die Nummer des bearbeiteten Übungsblattes. Also zum Beispiel: *Jane Doe, XY1, Blatt 1*

Aufgabe 1.1 [Modellierung] — 4 Punkte

An einem der nächsten Wochenenden wollen Jonny und Jenny mit ihrem Auto ans Meer fahren. Nach zahlreichen früheren Fahrten wissen sie:

1. Wenn das Auto vor Kurzem in der Inspektion war, ist genügend Öl vorhanden und die Elektronik funktioniert.
2. Nur wenn die Batterie geladen ist, funktioniert auch die Elektronik.
3. Es ist genau dann genügend Kühlmittel vorhanden, wenn genügend Öl vorhanden ist.
4. Der Motor läuft problemlos, wenn genügend Kühlmittel, genügend Öl und genügend Treibstoff vorhanden sind.

Modellieren Sie die Zusammenhänge durch aussagenlogische Formeln $\varphi_1, \dots, \varphi_4$. Erläutern Sie insbesondere die beabsichtigte Bedeutung Ihrer Aussagenvariablen.

Aufgabe 1.2 [Modellierung algorithmischer Probleme] — 6 Punkte

In einem Programmierpraktikum soll eine Anwendung zur automatischen Lösung von Sudoku-Rätseln entwickelt werden. Hannah schlägt vor, die Frage der Lösbarkeit eines solchen Rätsels auf die Frage nach der Erfüllbarkeit einer aussagenlogischen Formel zurückzuführen.

Formalisierung des Spiels. Formal besteht ein Sudoku aus 81 Feldern, die jeweils eindeutig durch eine Zeilennummer z und eine Spaltennummer s aus $P = \{1, \dots, 9\}$ bezeichnet werden. Das Spiel ist zudem in 9 Blöcke mit 3×3 Feldern aufgeteilt: Für alle $i, j \in \{1, 2, 3\}$ sei Block $B_{i,j} = P_i \times P_j$ mit $P_1 = \{1, 2, 3\}$, $P_2 = \{4, 5, 6\}$ und $P_3 = \{7, 8, 9\}$. Block $B_{2,3}$ ist in folgender Abbildung beispielhaft hervorgehoben.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1		2		5		1		9	
2	8			2		3			6
3		3			6			7	
4			1				6		
5	5	4						1	9
6			2				7		
7		9			3			8	
8	2			8		4			7
9		1		9		7		6	

$$B_{2,3} = \left\{ \begin{array}{l} (4,7),(4,8),(4,9), \\ (5,7),(5,8),(5,9), \\ (6,7),(6,8),(6,9) \end{array} \right\}$$

Helfen Sie Hannahs Gruppe, indem sie die folgenden Teilprobleme lösen. Nutzen Sie dazu ausschließlich die Aussagenvariablen, auf die sich die Gruppe geeinigt hat: die Variablen $X_{z,s,w}$ mit Indizes $z, s, w \in P$ mit der Intention *$X_{z,s,w}$ ist genau dann wahr, wenn Feld (z, s) der Wert w zugeordnet ist.*

a) Modellieren Sie die Regeln durch eine Formel $\varphi = \varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_4$. Die Teilformeln $\varphi_1, \ldots, \varphi_4$ sollen dabei die folgenden Spielregeln modellieren. **(4 Punkte)**

1. Jedem Feld (z, s) muss mindestens ein Wert $p \in P$ zugeordnet werden.
2. Jeder Wert darf in jeder Zeile nur einmal vorkommen.
3. Jeder Wert darf in jeder Spalte nur einmal vorkommen.
4. Jeder Wert darf in jedem Block nur einmal vorkommen.

Bei einem Sudoku-Rätsel sind einige Werte bereits durch das Rätsel vorgegeben. Es gibt also eine Menge V von Vorgaben der Art (z, s, w), die fordern, dass in Feld (z, s) der Wert w steht.

b) Wie kann Formel φ zu einer Formel φ' erweitert werden, sodass nur solche Lösungen berücksichtigt werden, die die Vorgaben aus V respektieren? **(1 Punkt)**

c) Beschreiben Sie den Zusammenhang zwischen Belegungen der Formel φ und Lösungen des Sudoku-Rätsels. **(1 Punkt)**

Hinweis

Sie können in dieser Aufgabe für endliche Mengen $I = \{i_1, \ldots, i_n\}$ die verallgemeinerten Operatoren $\bigwedge_{i \in I}$ und $\bigvee_{i \in I}$ verwenden. Für $I = \{1, 2, 3\}$ gilt beispielsweise

$$\bigwedge_{i \in I} \bigwedge_{\substack{j \in I \\ i<j}} A_{i,j} \equiv A_{1,2} \wedge A_{1,3} \wedge A_{2,3}.$$

Aufgabe 1.3 [Äquivalenzen und Normalformen] 5 Punkte

a) Gegeben sei die Formel $\varphi = \neg\Big((\neg A \rightarrow C) \wedge \big(C \rightarrow (B \wedge D)\big)\Big)$. **(3 Punkte)**

(i) Formen Sie φ schrittweise in eine äquivalente Formel φ' in DNF um. **[2 Punkte]**

(ii) Gilt $\varphi \equiv \top$ oder $\varphi \equiv \bot$? **[1 Punkt]**

b) Zeigen Sie, dass $(\varphi_1 \wedge \varphi_2) \rightarrow (\psi_1 \wedge \psi_2) \equiv \big(\varphi_1 \rightarrow (\varphi_2 \rightarrow \psi_1)\big) \wedge \big(\varphi_1 \rightarrow (\varphi_2 \rightarrow \psi_2)\big)$ für beliebige Formeln φ_1, φ_2 und ψ_1, ψ_2 gilt. **(2 Punkte)**