WS 18/19

Teil B: Modallogik

Logik

5: Grundlagen

Version:
5. November 2018 (12:06)

Inhalt

Ein klassisches Beispiel: Muddy Children

Beispiel

- **Grundsituation:**
  - Alfred, Beate und Chris haben bei strömendem Regen draußen gespielt
  - Sie wissen, dass sie jetzt möglicherweise ein schmutziges Gesicht haben
  - Kein Kind kann sehen, ob es selbst ein schmutziges Gesicht hat
  - Jedes Kind sieht, welches der anderen Kinder ein schmutziges Gesicht hat

Beispiel

- **Erste Interaktion:**
  - Die Eltern sagen: „Mindestens einer von euch hat ein schmutziges Gesicht“
- **Zweite Interaktion:**
  - Die Eltern fragen: „Wer weiß, ob er ein schmutziges Gesicht hat?“
  - Kein Kind meldet sich
- **Dritte Interaktion:**
  - Die Eltern fragen: „Wer weiß, ob er ein schmutziges Gesicht hat?“
  - Kein Kind meldet sich
- **Vierte Interaktion:**
  - Die Eltern fragen: „Wer weiß, ob er ein schmutziges Gesicht hat?“
  - Alle Kinder melden sich und sagen „Ich habe ein schmutziges Gesicht“
- **Wie ist dies zu erklären?**

Muddy Children: Modellierung (1/2)

- Wie lässt sich dieses Szenario modellieren?
  - Die Aussage „Alfred hat ein schmutziges Gesicht“ können wir durch eine aussagenlogische Variable A repräsentieren
  - Analog: B und C für Beate und Chris

- In dem Szenario sind *verschiedene* Wahrheitsbelegungen dieser Variablen und ihr Verhältnis zueinander relevant

- Wir repräsentieren jede mögliche Wahrheitsbelegung durch eine mögliche „Welt“
- Die Welt, in der Alfred und Beate schmutzige Gesichter haben, aber Chris nicht, repräsentieren wir so:

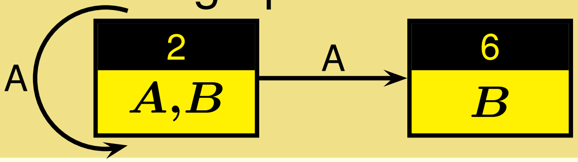
2
A,B

- Da wir es gleich mit mehreren Welten zu tun haben, geben wir den Welten Namen
- Diese hier hat den Namen „2“

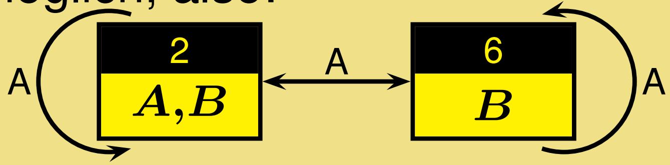
Muddy Children: Modellierung (2/2)

- In der Welt 2 A,B sieht Alfred, dass Beate ein schmutziges Gesicht hat und Chris ein sauberes
- Da Alfred nicht weiß, ob er selbst ein schmutziges Gesicht hat, hält er in dieser Welt zwei Welten für möglich:

- 2 A,B falls er ein schmutziges Gesicht hat
- 6 B falls er kein schmutziges Gesicht hat
- Das stellen wir graphisch so dar:

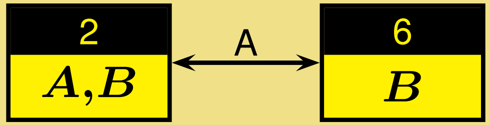


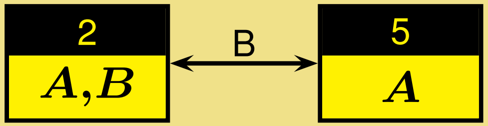
- Umgekehrt hält Alfred in Welt 6 auch Welt 2 für möglich, also:

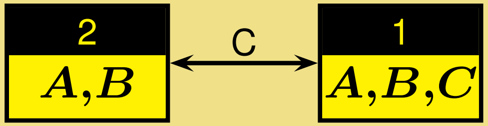


✎ Selbst-Schleifen lassen wir ab sofort der Übersichtlichkeit zuliebe weg

- Also:

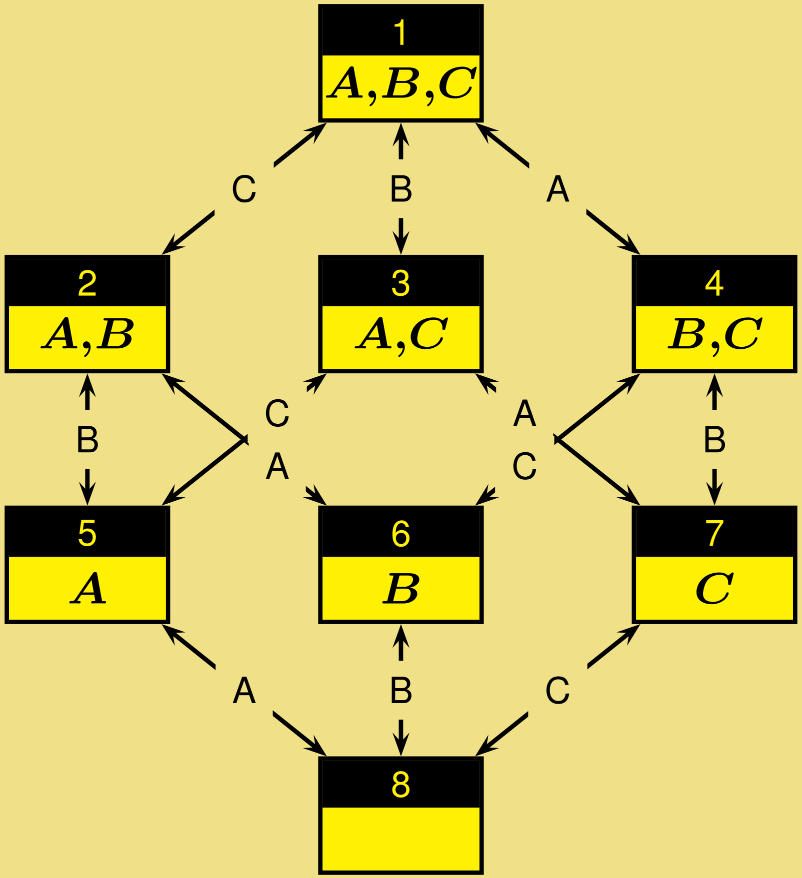


- Entsprechend, aus Sicht von Beate bzw Chris:
  - 

und


Muddy Children: Grundszenario (1/2)

- Insgesamt lässt sich das Muddy-Children-Beispiel durch folgendes Diagramm $\mathcal{K}_1$ modellieren:



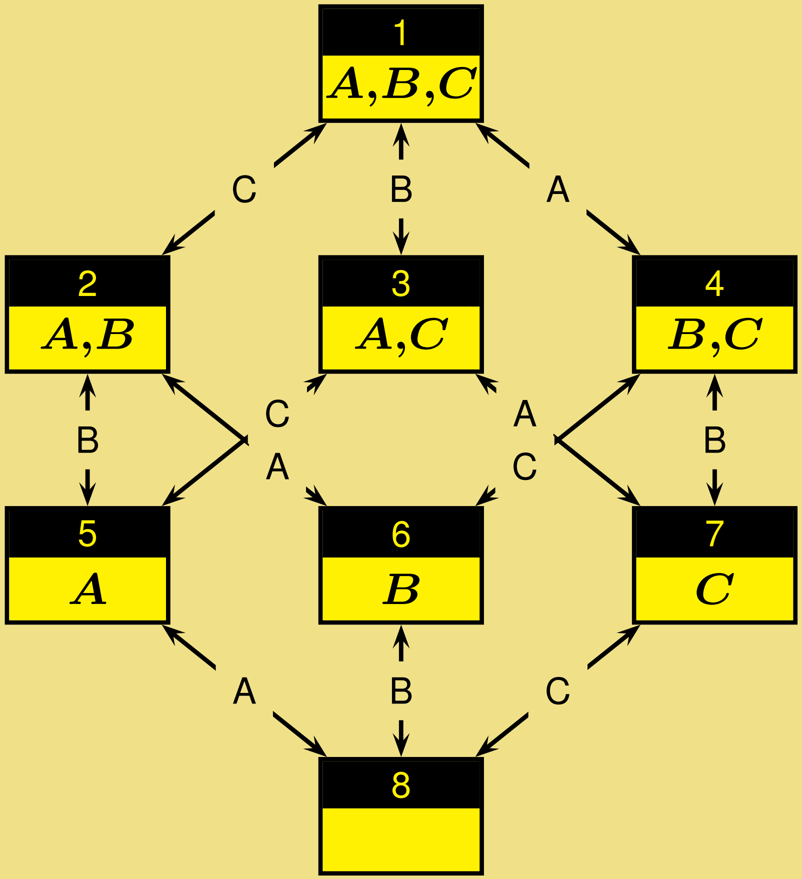
- In der Geschichte von Folie 2 befinden wir uns in Welt 1, in der alle Kinder schmutzig sind

- Alfred hält in dieser Situation die Welten 1 und 4 für möglich
- Insbesondere:
  (a) Alfred hält es für möglich, dass $\neg A$ gilt
  (b) Alfred weiß, dass B gilt (er hält $\neg B$ nicht für möglich)

- Wir verwenden die folgende Notation, um solche Aussagen kompakt aufschreiben zu können:
  - $\underline{\mathcal{K}_1, i \models \Diamond_A \varphi}$: „In Welt i hält Alfred für möglich, dass φ gilt" ☞ Sprechweise: „Diamond"
  - $\underline{\mathcal{K}_1, i \models \Box_A \varphi}$: „In Welt i weiß Alfred, dass φ gilt" ☞ Sprechweise: „Box"

- Die beiden Feststellungen über Alfreds Wissen lassen sich dann also wie folgt formalisieren:
  (a) $\mathcal{K}_1, 1 \models \Diamond_A \neg A$
  (b) $\mathcal{K}_1, 1 \models \Box_A B$

Muddy Children: Grundszenario (2/2)



- Was weiß Alfred in Welt 1 über das Wissen von Beate?

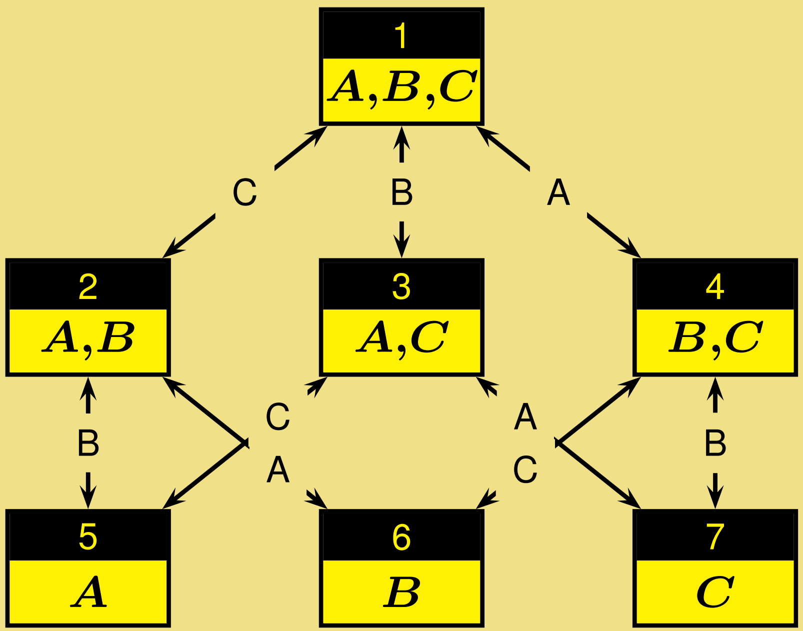
- Da er Welt 4 für möglich hält, hält er es für möglich, dass Beate die Welt 7 für möglich hält
  - Also gilt zum Beispiel:
    $$\mathcal{K}_1, 1 \models \Diamond_A \Diamond_B (\neg A \wedge \neg B)$$
- Alfred weiß, dass Beate keine andere als die Welten $1,3,4,7$ für möglich hält
- Da in all diesen Welten C gilt, weiß er, dass Beate weiß, dass C gilt:
  $$\mathcal{K}_1, 1 \models \Box_A \Box_B C$$

- Außerdem:
  $$\mathcal{K}_1, 1 \models \Diamond_A \Diamond_B \Diamond_C (\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C)$$

- Jetzt können wir die Geschichte genauer analysieren

Muddy Children: Nach der ersten Interaktion

- Nachdem die Eltern verkündet haben, dass mindestens ein Kind schmutzig ist, wissen alle Kinder, dass Welt 8 unmöglich ist
- Welt 8 muss im Modell also nicht mehr berücksichtigt werden und wir erhalten das veränderte Diagramm $\mathcal{K}_2$:



- Das wirkt sich zum Beispiel auf das Wissen von Alfred in Welt 1 aus:
  $\mathcal{K}_2, 1 \not\models \Diamond_A \Diamond_B \Diamond_C (\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C)$

- Außerdem gilt beispielsweise: $\mathcal{K}_2, 7 \models \Box_C C$
  - Chris weiß in Welt 7, dass er ein schmutziges Gesicht hat ☞ da Welt 8 nicht möglich ist

- In Welt 4 weiß Chris aber nicht, ob er ein schmutziges Gesicht hat
  ☞ da er dann auch Welt 6 für möglich halten würde
  - $\mathcal{K}_2, 4 \models \neg \Box_C C$

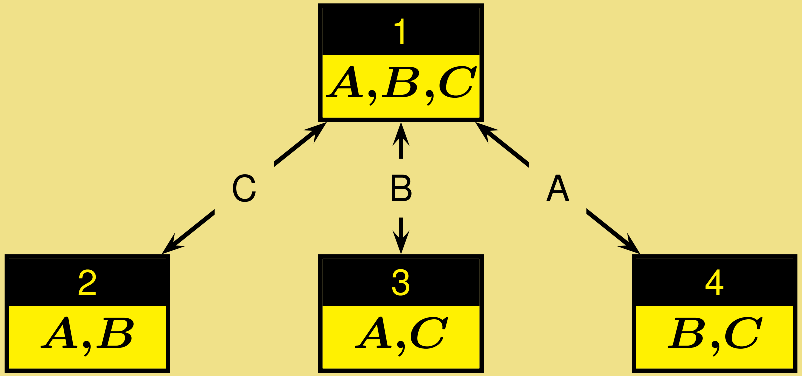
- Zusammen gilt also:
  $\mathcal{K}_2, 4 \models$
  $$\Box_B((B \wedge \neg \Box_C C) \vee (\neg B \wedge \Box_C C))$$
  $$\equiv \Box_B(B \leftrightarrow \neg \Box_C C)$$

- In Welt 4 kann Beate also schließen, ob sie schmutzig ist, wenn sie weiß, ob Chris weiß, dass er schmutzig ist

Muddy Children: Nach der zweiten Interaktion

- Da in der zweiten Runde kein Kind geantwortet hat, wusste also nach der ersten Runde noch kein Kind, ob es schmutzig ist
- Deswegen wissen nach der zweiten Runde alle Kinder, dass mindestens zwei Kinder schmutzig sind, denn:
  - da Chris nicht wusste, ob er schmutzig ist, hält in Welt 4 Beate Welt 7 nicht mehr für möglich
    - analog hält in Welt 4 Chris Welt 6 nicht mehr für möglich
  - Entsprechendes gilt für die Welten 2 und 3

- Das relevante Wissen wird also durch das folgende Diagramm $\mathcal{K}_3$ beschrieben:



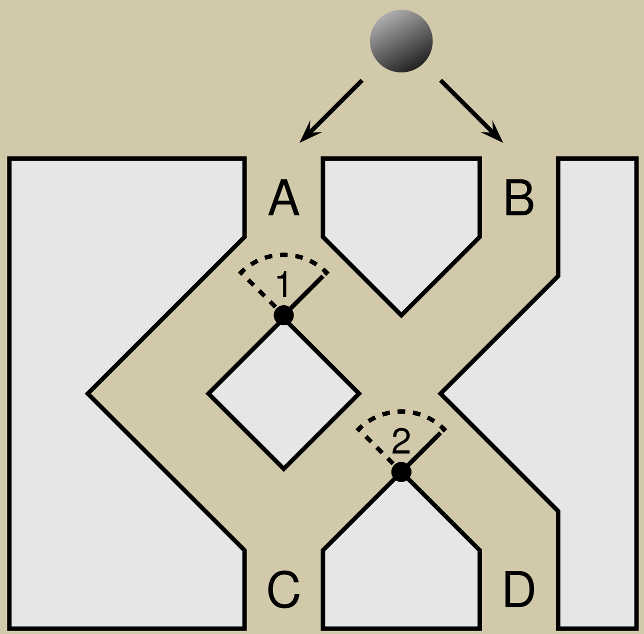
- Es gilt:
$$\mathcal{K}_3, 1 \models \Box_A((A \wedge \neg\Box_B B) \vee (\neg A \wedge \Box_B B)) \equiv \Box_A(A \leftrightarrow \neg\Box_B B)$$
- Aus der Antwort von Beate auf die zweite Frage (in der dritten Interaktion) kann Alfred also schließen, ob er schmutzig ist

- Nachdem die Eltern zum zweiten Mal ohne Antwort gefragt haben, ist in Welt 1 deshalb keines der drei Kinder mehr unsicher: sie wissen alle, dass sie schmutzig sind

Ein zweites Beispiel: Ein Murmelspiel

Beispiel

- Wir betrachten ein **Murmelspiel**:



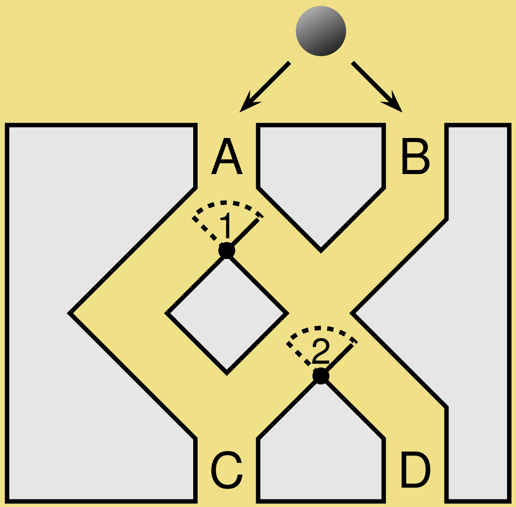
Beispiel

- Eine Murmel kann in A oder B eingeworfen werden
- Zwei (Kipp-) Schalter (1 und 2) beeinflussen die Bahn der Kugel
- **Grundstellung:** beide Schalter leiten die nächste Kugel nach links

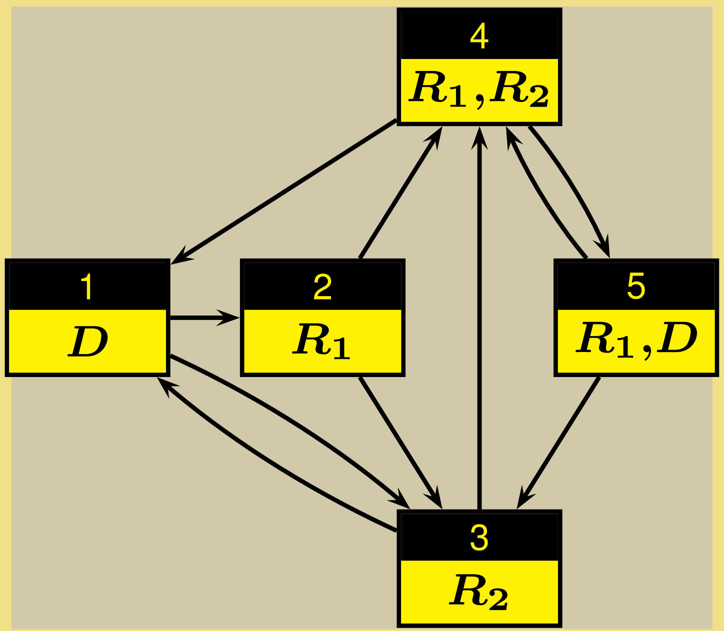
- Nachdem die Murmel einen Schalter passiert hat, wird dieser gekippt
  - Wird z.B. in der Grundstellung eine Murmel in B eingeworfen, so passiert sie Schalter 2 und wird bei C ausgegeben
  - Anschließend schaltet Schalter 2 um
  - Wird nun noch eine Murmel in B eingeworfen, so wird sie bei D ausgegeben und Schalter 2 kehrt in die Ausgangsposition zurück

- **Frage:** Ist es möglich, ausgehend von der Grundstellung, zwei Murmeln so einzuwerfen, dass die dritte Murmel auf jeden Fall den Ausgang D nimmt?

Murmelspiel: Modellierung (1/2)



- Das Murmelspiel können wir durch das folgende Diagramm $\mathcal{K}_M$ modellieren repräsentieren:

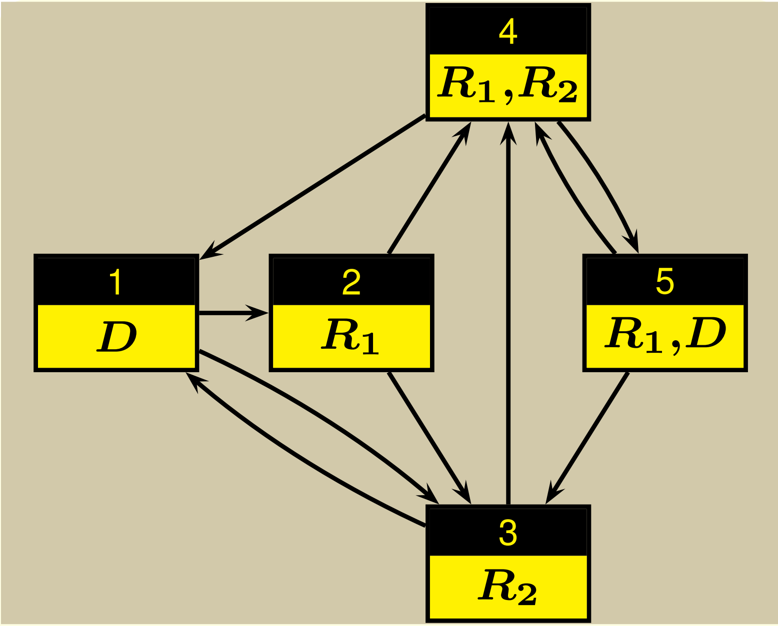


- Dafür verwenden wir die Variablen R_1, R_2, D mit der Bedeutung:
  – R_1: Schalter $\mathbf{1}$ führt nach rechts
  – R_2: Schalter $\mathbf{2}$ führt nach rechts
  – D: die letzte Kugel rollte in Ausgang D

- Die Kanten entsprechen Übergängen zwischen den Welten durch Einwurf einer Murmel
- Die Grundstellung wird durch Welt 1 repräsentiert

- Zu beachten: es kommen nicht alle Variablenbelegungen als Welten vor
  – Zum Beispiel ist es nicht möglich, dass Schalter 2 nach rechts zeigt und die letzte Kugel Ausgang D genommen hat

Murmelspiel: Modellierung (2/2)



- Unsere Frage war:
  - Ist es in der Grundstellung möglich zwei Murmeln so einzuwerfen, dass die dritte Murmel auf jeden Fall den Ausgang D nimmt?
- Dass die nächste Murmel auf jeden Fall Ausgang D nimmt, lässt sich ausdrücken durch: $\Box D$

- Dabei soll bedeuten:
  - $\mathcal{K}_M, s \models \Diamond\varphi$: In einem Schritt kann das System von Welt s aus in eine Welt kommen, in der φ gilt
  - $\mathcal{K}_M, s \models \Box\varphi$: In einem Schritt kommt das System von Welt s aus zwangsläufig in eine Welt, in der φ gilt
- Unsere Frage lautet also: Gilt $\mathcal{K}_M, 1 \models \Diamond\Diamond\Box D$?

- Wir beobachten:
  - $\mathcal{K}_M, 4 \models \Box D$
  - ➡ $\mathcal{K}_M, 2 \models \Diamond\Box D$
  - ➡ $\mathcal{K}_M, 1 \models \Diamond\Diamond\Box D$
- Also ist die Antwort auf unsere Frage: „ja“

Gemeinsamkeiten der beiden Beispiele

- Beide Beispiele haben einiges gemeinsam:
  - Wir modellieren verschiedene mögliche Situationen durch verschiedene Welten mit Wahrheitsbelegungen
  - Wir modellieren Zusammenhänge der Situationen durch Übergänge (Kanten) zwischen den Welten
- Allerdings haben die Kanten in den beiden Beispielen unterschiedliche Bedeutungen:
  - Muddy Children: eine mit K markierte Kante von Welt x nach Welt y bedeutet, dass Kind K in Welt x die Welt y für möglich hält
  - Murmelspiel: eine Kante von Welt von Welt x nach Welt y bedeutet, dass das System durch Einwurf einer Murmel von Zustand x in Zustand y übergehen kann
- Entsprechend können die modallogischen Operatoren $\Diamond$ und $\Box$ unterschiedliche Bedeutung haben

☞ Kapitel 7

Inhalt

Modallogik: Syntax

Vereinbarung

- Zukünftig betrachten wir nur noch Modallogik über Strukturen, in denen die Kanten nicht markiert sind
  - Entsprechend verwenden wir nur $\Diamond$ und $\Box$, aber nicht $\Diamond_A, \Diamond_B, \ldots$

Definition (Syntax der Modallogik)

- Die Menge ML der Formeln der Modallogik ist induktiv wie folgt definiert:
  (1) $\top$ und $\bot$ und jede Variable aus AV sind in ML
  (2) Sind φ und ψ in ML, so auch $\neg\varphi$, $(\varphi \wedge \psi)$ und $(\varphi \vee \psi)$
  (3) Ist φ in ML, so auch $\Diamond\varphi$ und $\Box\varphi$

✎ Die Bedeutung des Zeichens $\Box$ in der Modallogik hat nichts mit der Bedeutung in Resolutionsbeweisen der Aussagenlogik (und der Prädikatenlogik) zu tun

Beispiel

- Beispielformeln aus ML:
  - $\Diamond\Diamond\Box D$
  - $((\Diamond A \vee \Box B) \wedge (\Diamond\Box(C \vee \Diamond A)))$

- **Konvention:**
  - $\Box, \Diamond$ binden stärker als $\vee, \wedge$
    * Also: $\Box A \wedge C \equiv (\Box A) \wedge C$
  - ➞ die Operatoren $\Box$ und $\Diamond$ benötigen keine Klammern

- Wir verwenden weiterhin die definierten Junktoren $\rightarrow$ und $\leftrightarrow$ mit der gleichen Bedeutung wie in der Aussagenlogik

✎ Wenn wir von „modallogischen Formeln“ sprechen, sind abkürzende Schreibweisen (auch das Weglassen unnötiger Klammern) erlaubt, ML bezeichnet aber die in der formalen Definition definierte Formelmenge

Modallogik: Semantik (1/2)

- Modallogische Formeln werden in **Kripke-strukturen** interpretiert:

Definition (Kripkestruktur)

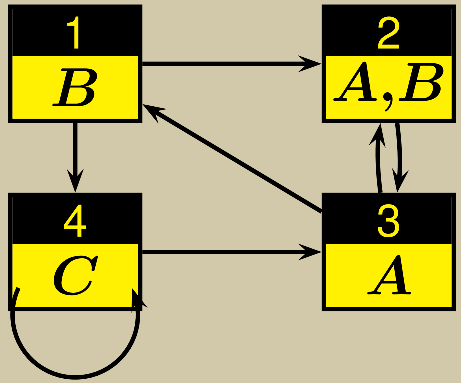
- Eine **Kripkestruktur $\mathcal{K} = (V,E,P)$** besteht aus
  - einer Grundmenge V von **Welten**
  - einer 2-stelligen **Erreichbarkeits-Relation $E \subseteq V \times V$**, sowie
  - einer Funktion P, die jeder Welt s eine endliche Menge $P(s)$ aussagenlogi-scher Variablen zuordnet

- **Bemerkung**: Die Menge $P(s)$ repräsen-tiert die Wahrheitsbelegung in s:
  - $P(s)$ enthält alle Variablen, die in s wahr sind
  - Formal entspricht $P(s)$ der Wahrheits-belegung α_s via:

$$\alpha_s(X) = 1 \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} X \in P(s)$$

Beispiel

- $\mathcal{K}_1 = (V_1,E_1,P_1)$



- $V_1 = \{1,2,3,4\}$
- $E_1 = \{(1,2),(1,4),(2,3),(3,1),(3,2),(4,3),(4,4)\}$
- $P_1(1) = \{B\}$, $P_1(2) = \{A,B\}$, $P_1(3) = \{A\}$, $P_1(4) = \{C\}$

Modallogik: Semantik (2/2)

Definition (Semantik der Modallogik)

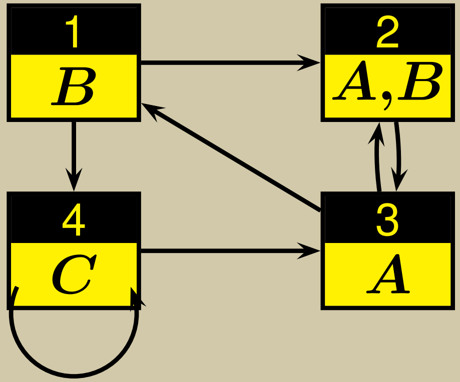
- Sei $\mathcal{K} = (V,E,P)$ eine Kripkestruktur und $s \in V$ eine Welt

- Wir definieren $\mathcal{K},s \models \varphi$ induktiv wie folgt:
  - $\mathcal{K},s \models \top$,
  - $\mathcal{K},s \not\models \bot$,
  - $\mathcal{K},s \models X$, falls $X \in P(s)$,
  - $\mathcal{K},s \models \neg\varphi$, falls $\mathcal{K},s \not\models \varphi$,
  - $\mathcal{K},s \models (\chi \wedge \psi)$, falls $\mathcal{K},s \models \chi$ und $\mathcal{K},s \models \psi$,
  - $\mathcal{K},s \models (\chi \vee \psi)$, falls $\mathcal{K},s \models \chi$ oder $\mathcal{K},s \models \psi$,
  - $\mathcal{K},s \models \Diamond\psi$, falls es eine Welt s' gibt mit: $(s,s') \in E$ und $\mathcal{K},s' \models \psi$,
  - $\mathcal{K},s \models \Box\psi$, falls für jede Welt s' gilt: falls $(s,s') \in E$ so $\mathcal{K},s' \models \psi$

- Gilt $\mathcal{K},s \models \varphi$, so heißt $(\mathcal{K},s)$ **Modell** von φ
- Die Begriffe **erfüllbar**, **allgemein gültig** etc. sind analog zur Aussagenlogik definiert

Beispiel

$\mathcal{K}_1 =$



- Es gilt: $K_1,1 \models \Diamond\Box A \wedge \Box\Diamond(A \wedge \neg B)$

- Die Operatoren $\Box$ und $\Diamond$ sind dual zueinander:

- Für alle $\mathcal{K}$ und s sind äquivalent:
  - $\mathcal{K},s \models \Box\varphi$
  - $\mathcal{K},s \models \neg\Diamond\neg\varphi$

Modallogik: Model Checking

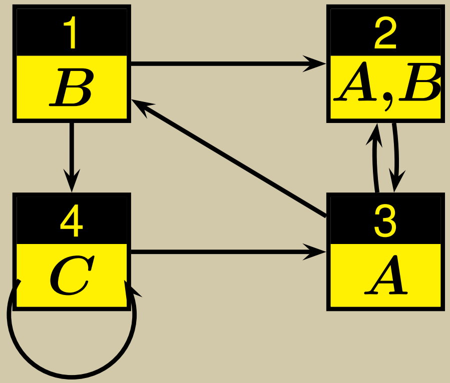
- Die Berechnung aller Welten s einer Kripkestruktur $\mathcal{K}$, für die eine gegebene Formel φ der Modallogik gilt, erfolgt am einfachsten „bottom-up“ gemäß der Definition der Semantik

Satz 5.1

- Gegeben eine ML-Formel φ und eine Kripkestruktur $\mathcal{K}$ lässt sich in $\mathcal{O}(|\varphi||\mathcal{K}|)$ Schritten die Menge M aller Welten s von $\mathcal{K}$ berechnen, für die $\mathcal{K},s \models \varphi$ gilt

Beispiel

$\mathcal{K} =$



- Wir berechnen die Welten s von $\mathcal{K}$ mit $\mathcal{K},s \models \varphi$ für die Formel $\varphi = \Diamond\Box A \wedge \Box\Diamond(A \wedge \neg B)$

	1	2	3	4
A	X	✓	✓	X
B	✓	✓	X	X
$\neg B$	X	X	✓	✓
$A \wedge \neg B$	X	X	✓	X
$\Diamond(A \wedge \neg B)$	X	✓	X	✓
$\Box\Diamond(A \wedge \neg B)$	✓	X	X	X
$\Box A$	X	✓	X	X
$\Diamond\Box A$	✓	X	✓	X
φ	✓	X	X	X

Inhalt

Äquivalenz und Folgerung

- Wir verwenden die gleiche Notation wie in der Aussagenlogik um auszudrücken, dass eine Formel aus einer anderen folgt bzw. dass zwei Formeln äquivalent sind

- Seien φ, ψ ML-Formeln
- $\underline{\varphi \equiv \psi} \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ für alle Kripkestrukturen $\mathcal{K}$ und alle Welten s gilt: $\mathcal{K}, s \models \varphi \iff \mathcal{K}, s \models \psi$

  ☞ φ und ψ sind *äquivalent*
- $\underline{\varphi \models \psi} \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ für alle Kripkestrukturen $\mathcal{K}$ und alle Welten s mit $\mathcal{K}, s \models \varphi$ gilt $\mathcal{K}, s \models \psi$

  ☞ ψ *folgt aus* φ

- Sowohl das Substitutionslemma als auch das Ersetzungslemma der Aussagenlogik gelten in gleicher Form auch für die Modallogik

Substitutionslemma

Lemma 5.2 (Substitutionslemma der Modallogik)

- Seien φ_1 und φ_2 modallogische Formeln, für die $\varphi_1 \equiv \varphi_2$ gilt
- Sei S eine Substitution AV $\rightharpoonup$ ML
- Dann gilt auch $S(\varphi_1) \equiv S(\varphi_2)$

Beispiel

- $\varphi_1 = A \wedge B$
- $\varphi_2 = \neg(\neg A \vee \neg B)$
- $\varphi_1 = A \wedge B \equiv \neg(\neg A \vee \neg B) = \varphi_2$

- S :
  - $A \mapsto \Diamond C$
  - $B \mapsto \Box D$

- $\Diamond C \wedge \Box D \equiv \neg(\neg \Diamond C \vee \neg \Box D)$

Ersetzungslemma

Lemma 5.3 (Ersetzungslemma der Modallogik)

- Sei φ_1 eine modallogische Formel, in der eine Teilformel ψ_1 vorkommt
- Sei $\psi_1 \equiv \psi_2$
- Sei φ_2 die Formel, die aus φ_1 entsteht, indem ein Vorkommen von ψ_1 durch ψ_2 ersetzt wird
- Dann gilt: $\varphi_1 \equiv \varphi_2$

Beispiel

- $\varphi_1 = \Box\Diamond A$
- $\psi_1 = \Diamond A$
- $\psi_2 = \neg\Box\neg A$
- $\psi_1 = \Diamond A \equiv \neg\Box\neg A = \psi_2$

- Dann gilt: $\varphi_1 = \Box\Diamond A \equiv \Box\neg\Box\neg A = \varphi_2$

Modallogik: Äquivalenzen (1/2)

Satz 5.4

- Für ML-Formeln gelten alle Äquivalenzen aus Satz 2.1
- Außerdem gilt für ML-Formeln φ,ψ:

Dualität

- $\neg\Box\varphi \equiv \Diamond\neg\varphi$
- $\neg\Diamond\varphi \equiv \Box\neg\varphi$

Distributivität

- $\Box(\varphi \wedge \psi) \equiv \Box\varphi \wedge \Box\psi$
- $\Diamond(\varphi \vee \psi) \equiv \Diamond\varphi \vee \Diamond\psi$

Distribution

- $\Box(\varphi \to \psi) \models \Box\varphi \to \Box\psi$
- $\Box(\varphi \to \psi) \models \Diamond\varphi \to \Diamond\psi$
- $\Diamond(\varphi \to \psi) \equiv \Box\varphi \to \Diamond\psi$

Notwendigkeit

Ist φ allgemein gültig, so auch $\Box\varphi$

Folgerung 5.5

- Zu jeder ML-Formel φ gibt es eine äquivalente Formel φ' in **Negationsnormalform (NNF)**, in der die Negation $\neg$ nur unmittelbar vor Variablen vorkommt

Modallogik: Äquivalenzen (2/2)

Beweisskizze

- Als Beispiel für den Beweis der Aussagen aus Satz 5.4 zeigen wir:
  - $\Box(\varphi \to \psi) \models \Box\varphi \to \Box\psi$

- Dank Substitutionslemma genügt es zu zeigen: $\Box(A \to B) \models \Box A \to \Box B$
- Sei also $\mathcal{K} = (V,E,P)$ eine Kripkestruktur und $s \in V$
- Angenommen $\mathcal{K},s \models \Box(A \to B)$

- Zu zeigen: $\mathcal{K},s \models \Box A \to \Box B$

Beweisskizze (Forts.)

- Wir unterscheiden zwei Fälle:

- **1. Fall:** $\mathcal{K},s \models \Box B$
  - Dann folgt direkt $\mathcal{K},s \models \Box A \to \Box B$ nach Definition von $\to$

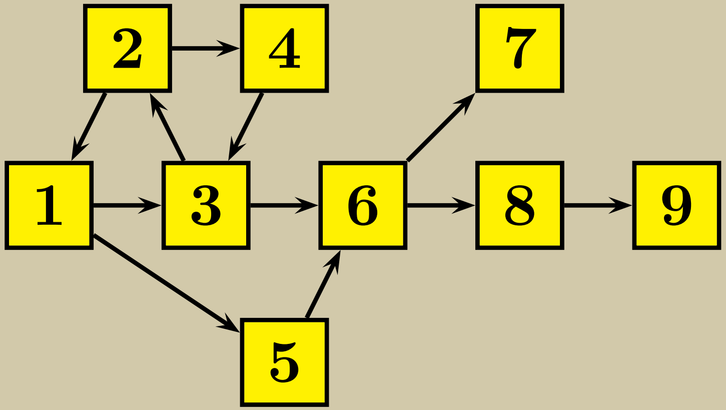
- **2. Fall:** $\mathcal{K},s \not\models \Box B$
  - Dann gibt es eine Welt $s' \in V$ mit $(s,s') \in E$ und $\mathcal{K},s' \not\models B$
  - Wegen $\mathcal{K},s \models \Box(A \to B)$ gilt für alle Welten $s'' \in V$ mit $(s,s'') \in E$: $\quad \mathcal{K},s'' \models A \to B$

  ➨ $\mathcal{K},s' \not\models A$
  - $\mathcal{K},s \not\models \Box A$
  - $\mathcal{K},s \models \Box A \to \Box B$

Inhalt

Modallogische Modellierung: Ein Spiel

Ein Spiel



- Zwei Spieler ziehen abwechselnd eine Spielfigur von einem Knoten über eine gerichtete Kante zu einem anderen Knoten
- Wer nicht ziehen kann, verliert
- Wir fassen die Knoten des Graphen als Welten einer Kripkestruktur auf

☞ Alle Mengen $P(s)$ sind leer

- Aussagen über das Spiel können dann durch modallogische Formeln ausgedrückt werden

Ein Spiel (Forts.)

- „Der Spieler, der am Zug ist, kann nicht ziehen“: $\Box\bot$
  - Erläuterung:
    * In jeder Welt gilt die Formel $\top$
    * Wenn es von einer Welt s einen Übergang in eine andere Welt gibt, so gilt $\mathcal{K}, s \models \Diamond\top$

    ➡ $\Box\bot \equiv \neg\Diamond\top$ drückt also aus, dass es keinen Übergang in eine andere Welt gibt
  - Insbesondere drückt $\Box\bot$ also aus, dass der Spieler, der **nicht** am Zug ist, gewinnt

- „Der Spieler am Zug kann in einem Zug gewinnen“: $\Diamond\Box\bot$

- „Der Spieler am Zug kann in zwei Zügen gewinnen“: $\Diamond\Box\Diamond\Box\bot$

- „Egal was der Spieler, der am Zug ist, als erstes macht, er kann auf jeden Fall im nächsten Zug gewinnen“: $\Box\Box\Diamond\Box\bot$

Modallogische Modellierung: Noch ein Beispiel (1/3)

Eine ehemalige Übungsaufgabe

- Dr. Akula, Mediziner in einer Privatklinik, bekommt einen wichtigen Patienten, den Sohn eines Aufsichtsratsmitglieds. Dieser wird am Montag mit Kopf- und Bauchschmerzen eingeliefert und soll am Freitag wieder von seinem Vater abgeholt werden. Er muss nun also vier Nächte in der Klinik bleiben. Am Freitag muss er natürlich unbedingt vollständig gesund sein.

- Dr. Akula hat drei Medikamente zur Auswahl, von denen er jeweils ein Medikament in einer Nacht wirken lässt. Die Medikamente wirken folgendermaßen:
  - Medikament 1 vertauscht die Symptome. Es gilt also, dass der Patient nach der Anwendung Bauchschmerzen hat, genau dann wenn er vorher Kopfschmerzen hatte, und dass er nach der Anwendung Kopfschmerzen hat, wenn er vorher Bauchschmerzen hatte.
  - Medikament 2 verursacht auf jeden Fall Kopfschmerzen, heilt aber Bauchschmerzen. Wenn der Patient allerdings keine Bauchschmerzen hatte, bekommt er davon welche.
  - Medikament 3 macht den Patienten völlig gesund, wenn er nur ein Symptom hat. Sind beide Symptome vorhanden oder ist der Patient gesund, hat er nach der Anwendung sowohl Kopf-, als auch Bauchschmerzen.

... Übungsaufgabe (Forts.)

(a) Konstruieren Sie eine Kripkestruktur $\mathcal{K}$, die die beschriebene Situation modelliert. Geben Sie auch an, welche Welt s die Situation am Montag repräsentiert.

Modallogische Modellierung: Noch ein Beispiel (2/3)

Eine ehemalige Übungsaufgabe

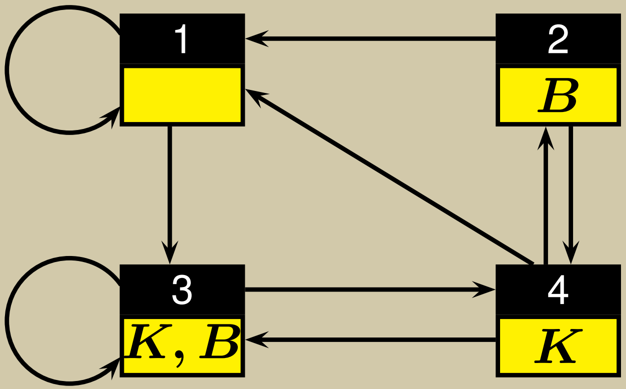
- Medikament 1 vertauscht die Symptome. Es gilt also, dass der Patient nach der Anwendung Bauchschmerzen hat genau dann wenn er vorher Kopfschmerzen hatte und dass er nach der Anwendung Kopfschmerzen hat, wenn er vorher Bauchschmerzen hatte.
- Medikament 2 verursacht auf jeden Fall Kopfschmerzen, heilt aber Bauchschmerzen. Wenn der Patient allerdings keine Bauchschmerzen hatte, bekommt er davon welche.
- Medikament 3 macht den Patienten völlig gesund, wenn er nur ein Symptom hat. Sind beide Symptome vorhanden oder ist der Patient gesund, hat er nach der Anwendung sowohl Kopf-, als auch Bauchschmerzen.

Lösung zu (a)

(a) Konstruieren Sie eine Kripkestruktur $\mathcal{K}$, die die beschriebene Situation modelliert. Geben Sie auch an, welche Welt s die Situation am Montag repräsentiert.

- Um dieses Problem zu modellieren, führen wir zwei aussagenlogische Variablen ein:
  - K: der Patient hat Kopfschmerzen
  - B : der Patient hat Bauchschmerzen

- Eine Kripkestruktur, die die Situation modelliert, besteht aus vier Welten, in jeder der Welten gilt eine Kombination der beiden Variablen. Anwendung eines Medikamentes führt zu einem Übergang in eine Welt. Damit entsteht folgende Kripkestruktur:



- Die Situation am Montag wird durch Welt 3 repräsentiert, der Patient hat beide Symptome.

Modallogische Modellierung: Noch ein Beispiel (3/3)

Eine ehemalige Übungsaufgabe

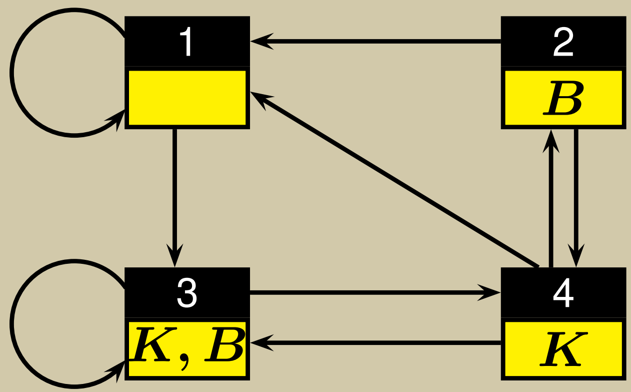
- Medikament 1 vertauscht die Symptome. Es gilt also, dass der Patient nach der Anwendung Bauchschmerzen hat genau dann wenn er vorher Kopfschmerzen hatte und dass er nach der Anwendung Kopfschmerzen hat, wenn er vorher Bauchschmerzen hatte.
- Medikament 2 verursacht auf jeden Fall Kopfschmerzen, heilt aber Bauchschmerzen. Wenn der Patient allerdings keine Bauchschmerzen hatte, bekommt er davon welche.
- Medikament 3 macht den Patienten völlig gesund, wenn er nur ein Symptom hat. Sind beide Symptome vorhanden oder ist der Patient gesund, hat er nach der Anwendung sowohl Kopf-, als auch Bauchschmerzen.

Aufgabenteil (b) und Lösung

- Nun hat Dr. Akula das Problem, dass er am Mittwoch eine wichtige Konferenz besuchen muss, so dass sein Kollege Dr. Hyde die Medizin für die dritte Nacht (von Mittwoch auf Donnerstag) verabreicht. Dieser ist jedoch reichlich inkompetent und wird zufällig eines der drei Medikamente verabreichen.

(b) Geben Sie eine Formel an, die aussagt, dass Dr. Akula den Patienten bis Freitag heilen kann, egal, was Dr. Hyde macht. Gilt die Formel in $(\mathcal{K},s)$?

- Zur Erinnerung:



- Lösung:
  - Die Formel ist $\Diamond\Diamond\Box\Diamond(\neg K \wedge \neg B)$
  - Sie ist in Welt $s = 3$ erfüllt. Dr. Akula kann die Medizin 2 in der ersten Nacht geben (führt in Welt 4), dann Medizin 1 in der zweiten Nacht (führt in Welt 2), dann hat Dr. Hyde nur die Möglichkeit, in die Welten 1 oder 4 zu kommen. Und dann kann der Patient mit Medizin 1 oder Medizin 3 geheilt werden.

Literatur

- Das Muddy-Children-Beispiel ist, in ähnlicher Form, dem Skript von Rintanen und Wölfl, *Modal logics: theory and applications*, Uni Freiburg, 2004, entnommen