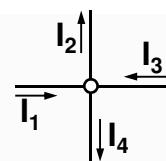


Kapazität und Kondensator

5

Knotenregel (1. Kirchhoff'sches Gesetz)



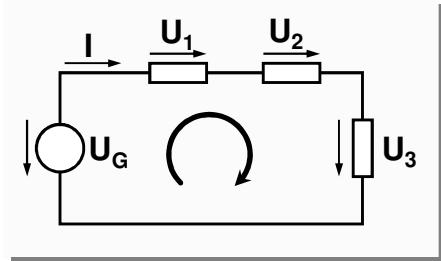
An jedem Knoten einer elektrischen Schaltung ist die Summe der zufließenden Ströme gleich der Summe der abfließenden Ströme.

$$\sum I_{zu} = \sum I_{ab}$$

Oder (abfließende Ströme negativ):

$$\sum I = 0$$

Maschenregel (2. Kirchhoff'sches Gesetz)

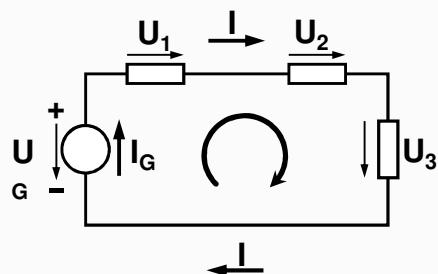


In einer Masche ist die Summe aller Spannungen gleich Null.

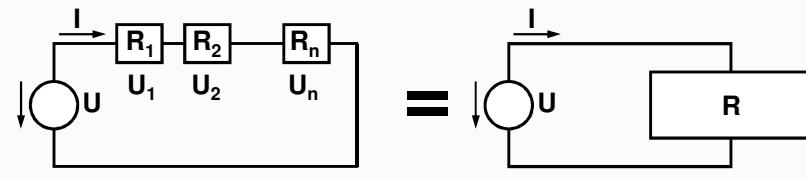
$$\sum U = 0$$

Kirchhoff'sche Gesetze

- ◆ **Maschen- und Knotenregel bilden die Grundlage für das Berechnen von Spannungen und Strömen in elektrischen Stromkreisen.**
- ◆ **Voraussetzung:**
Spannungs- und Strompfeile sind eindeutig gerichtet.
 - **Strom-Pfeilrichtung:**
 - im Erzeuger von – nach +
 - im Verbraucher von + nach –
 - **Spannungspfeilrichtung:**
 - im Erzeuger von + nach –
 - im Verbraucher von + nach -

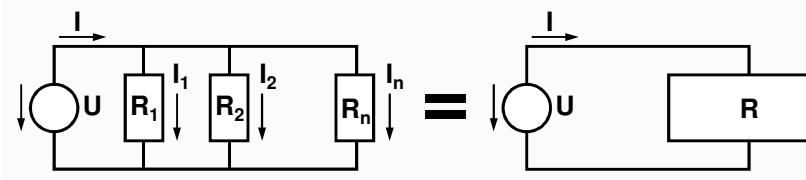


Reihenschaltung (Serienschaltung)



$$R = \sum R_k$$

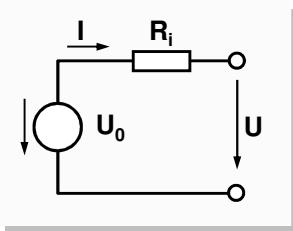
Parallelschaltung



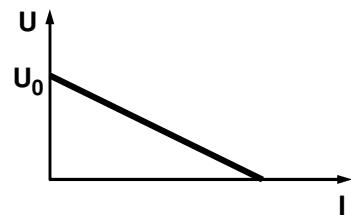
$$\frac{1}{R} = \sum \frac{1}{R_k}$$

Spannungsquellen

- ◆ Reale Spannungsquelle: Ersatzschaltbild



$$U = U_0 - R_i \cdot I$$

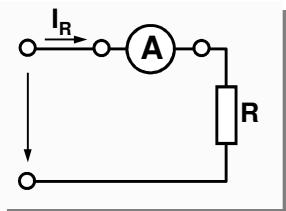


U_0 : Urspannung, eingeprägte Spannung

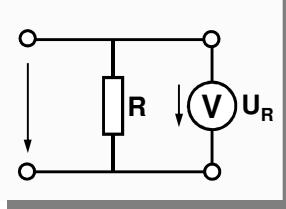
Wiederholung Vorlesung 4

Strom- und Spannungsmessung

Strommessung:



Spannungsmessung:



5.1 Kapazität eines Plattenkondensators

5.2 Schaltungen mit Kondensatoren

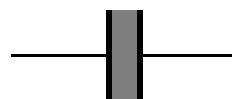
**5.3 Auflade- und Endladevorgang
beim Kondensator**

**5.4 Die Energie des geladenen
Kondensators**



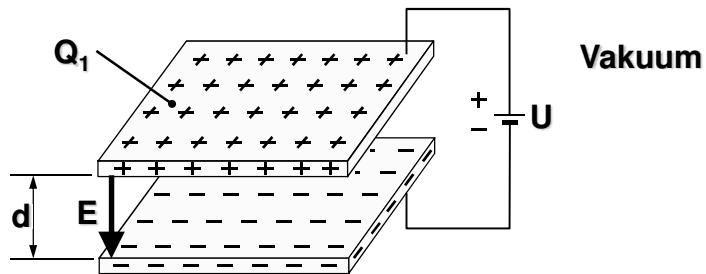
Kondensatoren

- ◆ **Kondensatoren werden in der Elektrotechnik zur Speicherung von Ladungen benötigt.**
- ◆ **Ein Kondensator besteht im wesentlichen aus zwei elektrisch leitenden Flächen, zwischen denen sich ein nichtleitendes Dielektrikum befindet.**



- ◆ **Das Dielektrikum kann aus Naturstoff (Papier), Kunststoff (Polystyrol), oder Keramik bestehen.**

5.1 Kapazität eines Kondensators



Legt man an zwei parallele Platten eines elektrisch leitfähigen Materials (Kondensatorplatten) eine Spannung U an, so fließen solange Ladungen Q auf die Platten, bis sich die elektrische Feldstärke

einstellt.

$$E = U / d$$

5.1

Verschiebungsflußdichte D

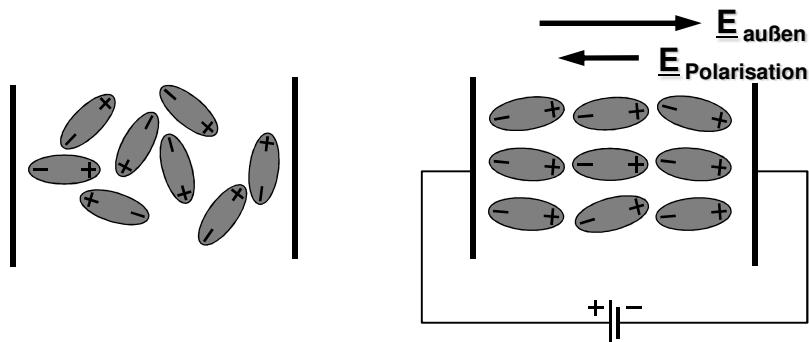
- ◆ Der Strom, der fließt, obwohl der Stromkreis nicht geschlossen ist, wird **Verschiebungsstrom** genannt, da Ladungen auf die Kondensatorplatten verschoben werden.
- ◆ Die Dichte der sich einstellenden elektrischen Feldlinien zwischen den Kondensatorplatten ist identisch mit der Flächenladungsdichte, d.h. mit der Anzahl der Ladungen Q pro Flächeneinheit A . Diese Größe nennt man **Verschiebungsflußdichte**:

$$D = Q / A$$

5.2

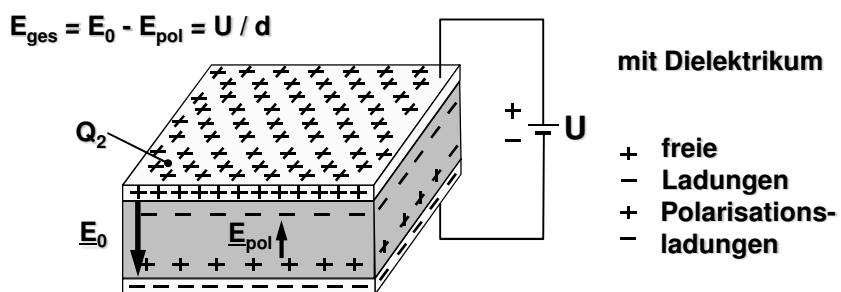
Kondensator mit Dielektrikum

- ◆ Bringt man nun einen Isolierstoff, das sogenannte Dielektrikum zwischen die Kondensatorplatten, dann orientieren sich die im Isolierstoff vorhandenen Dipole und bewirken eine Abschwächung des von außen angelegten Feldes.



Kondensator mit Dielektrikum

- ◆ Durch die von außen angelegte Spannung U wird aber letztlich die Feldstärke $E_{ges} = U / d$ erzwungen. Das lässt sich nur erreichen durch eine Erhöhung der Flächenladungsdichte Q/A .



Dielektrizitätskonstante

- ◆ Die Erhöhung der Flächenladungsdichte gegenüber dem Vakuum um den Faktor ϵ_r wird verursacht durch die Polarisationseigenschaft des Dielektrikums

$$Q_2 = \epsilon_r Q_1 \quad 5.3$$

- ◆ Sie führt ebenso zur Erhöhung der Verschiebungsflußdichte

$$D_2 = \epsilon_r D_1 \quad 5.4$$

- ◆ Der Faktor ϵ_r heißt relative Dielektrizitätskonstante oder auch relative Permittivität bzw. elektrische Suszeptibilität.

Verschiebungsflußdichte und elektrisches Feld

- ◆ Die Verschiebungsflußdichte und das sie verursachende elektrische Feld stehen im Vakuum in folgender Beziehung:

$$D_0 = \epsilon_0 E \quad 5.5$$

- ◆ Dabei ist ϵ_0 eine Naturkonstante, die auch Influenzkonstante oder Vakuumpermittivität genannt wird. Sie hat den Wert und die Dimension:

$$\epsilon_0 = 8,86 \cdot 10^{-12} \text{ As/Vm} \quad 5.6$$

Verschiebungsflußdichte und elektrisches Feld

Allgemein gilt:

$$\underline{D} = \epsilon \underline{E}$$

5.7

◆ Dabei heißt ϵ **Dielektrizitätskonstante**.

◆ Der Zusammenhang zwischen ϵ , ϵ_0 und ϵ_r lautet:

$$\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$$

5.8

Beispiele für ϵ_r - Werte

Material	ϵ_r (statischer Wert) bei 20 °C und Normaldruck
Vakuum	1 (per Definition)
Glas	4-9
Teflon	2
Trafo-Öl	2,5
Keramiken	10 bis 100
H ₂ O	80

Kapazität des Plattenkondensators

- ◆ Die Proportionalitätskonstante zwischen angelegter elektrischer Spannung U und der auf den Kondensatorplatten befindlichen Ladung Q wird als Kapazität C eines Kondensators bezeichnet.

$$Q = C U$$

5.9

- ◆ Die Kapazität eines Kondensators mit planparallelen Platten der Fläche A und dem Abstand d lautet:

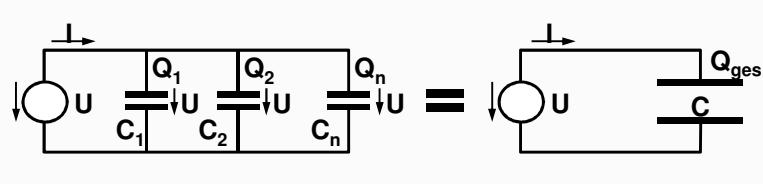
$$C = \epsilon_0 \epsilon_r A / d$$

5.10

- ◆ Die Einheit der Kapazität ist Farad: $1F = 1As/V$
Praktische Einheiten: $[\mu F] = 10^{-6} F, [nF], [pF]$

5.2 Schaltungen mit Kondensatoren

Parallelschaltung von Kondensatoren



Alle Kondensatoren besitzen die gleiche Spannung U .
Die Gesamtzahl aller Ladungen beträgt: $Q_{\text{ges}} = \sum Q_n$

$$C_{\text{ges}} = Q_{\text{ges}} / U = \sum Q_n / U = \sum C_n$$

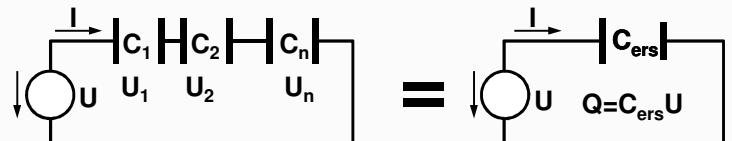
Daher gilt für Parallelschaltungen von Kondensatoren:

$$C_{\text{ers}} = \sum C_n$$

5.11

Schaltungen mit Kondensatoren

Reihenschaltung von Kondensatoren



Die Ladung Q auf allen in Reihe befindlichen Kondensatoren ist aufgrund von Influenz identisch.

Maschenregel: $U = \sum U_n = \sum Q / C_n = Q (\sum 1 / C_n)$

Für die Gesamt- bzw. Ersatzkapazität gilt: $U = Q / C_{ers}$

Daher gilt für Reihenschaltungen von Kondensatoren:

$$1 / C_{ers} = \sum 1 / C_n \quad 5.12$$

5.3 Strom und Spannung am Kondensator

- ◆ Strom ist allgemein definiert als : $I(t) = dQ / dt$
- ◆ Beim Kondensator gilt: $Q = CU$ bzw. $Q(t) = CU(t)$
- ◆ Daraus folgt für den Strom $I_c(t)$ am Kondensator:

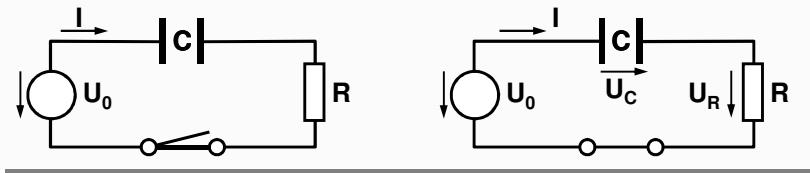
$$I_c(t) = C dU_c / dt \quad 5.13$$

→ Es gibt nur einen Stromfluß am Kondensator, wenn die Spannung sich zeitlich ändert.

◆ Für die Spannung U_c am Kondensator folgt:

$$U_c(t) = \frac{1}{C} \int_0^t I_c(t) dt \quad 5.14$$

5.4 Aufladeverhalten des Kondensators



Maschenregel: $U_0 = U_R + U_C$

$$U_0 = R I + \frac{1}{C} \int_0^t I_c(t) dt$$

Ableitung: $0 = R dI_C/dt + (1/C) I_C$

$$dI_C/dt = - (1/RC) I_C$$

$$dI_C/I_C = - (1/RC) dt$$

Integration: $\ln I_C = -t/RC + \text{Konstante}$

Exponentiation: $I_C(t) = I_C(t=0) \exp(-t/RC)$

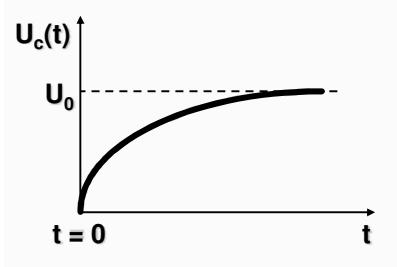
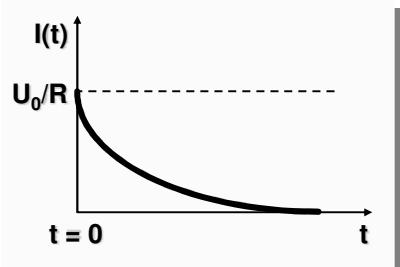
Aufladeverhalten des Kondensators

mit: $I_C(t=0) = U_0/R$ folgt:

$$U_C(t) = \frac{1}{C} \int_0^t I_C(t) dt$$

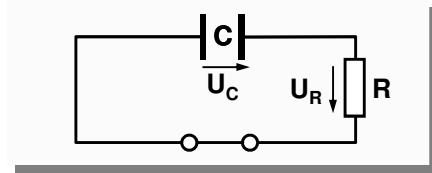
$I_C(t) = U_0 / R \exp(-t/RC)$ 5.15

$U_C(t) = U_0 [1 - \exp(-t/RC)]$ 5.16



5.5 Entladung eines Kondensators

- ◆ Annahme: Der Kondensator sei bis zur Spannung U_0 aufgeladen:



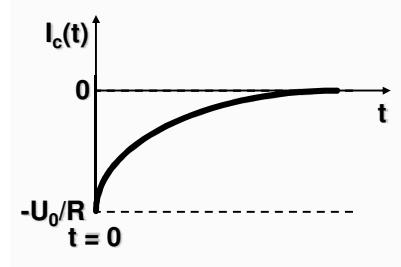
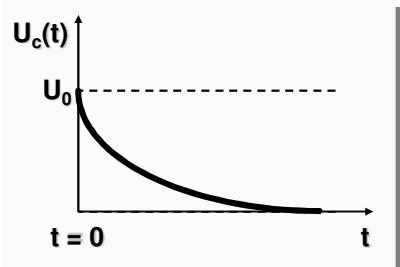
- ◆ Die Spannungsquelle sei abgeklemmt, und der Kondensator wird über einen Widerstand R entladen.
 - ◆ Es gilt (Maschenregel): $U_c + U_R = 0$
mit $U_R = R I_c$ und $I_c = C d U_c / dt$
folgt dann:
Integration:
- $$d U_c / U_c = - dt / RC$$
- $$\ln U_c - \ln U_0 = -t/RC$$
- $$U_c(t) = U_0 \exp(-t/RC)$$

Entladung eines Kondensators

mit $I_c = C d U_c / dt$ folgt:

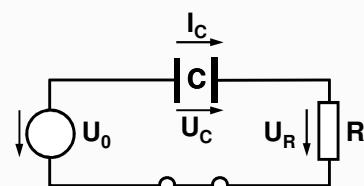
$$U_c(t) = U_0 \exp(-t/RC)] \quad 5.19$$

$$I_c(t) = - U_0 / R \exp(-t/RC) \quad 5.20$$

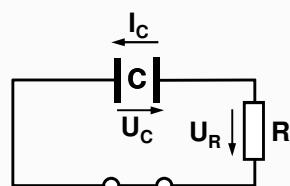


Entladung eines Kondensators

- ◆ Strom und Spannung am Kondensator haben beim Entladevorgang entgegengesetztes Vorzeichen.
Die Stromrichtung hat sich gegenüber dem Ladevorgang umgekehrt.



Ladevorgang



Entladevorgang

5.6 Energie eines aufgeladenen Kondensators

- ◆ Die Energie des aufgeladenen Kondensators beträgt:

$$W_{\text{Kondensator}} = \int_0^{\infty} U_c(t) I_c(t) dt \quad 5.17$$

- ◆ Der zur Kondensatorspannung $U_c(t)$ gehörige Ladestrom I_c beträgt laut 5.13: $I_c(t) = C dU_c/dt$
- ◆ Damit lässt sich das Integral 5.17 schreiben:

$$W_{\text{Kondensator}} = \int_0^U U_c(t) [C dU_c / dt] dt = C \int_0^U U_c(t) dU_c$$

$$W_{\text{el}} = \frac{CU^2}{2} \quad 5.18$$

Verständnisfragen zur Vorlesung 05

- ◆ **Wozu benötigt man Kondensatoren?**
- ◆ **Welche Kenngröße des Kondensators und welche Materialeigenschaft bestimmt das Maß eines Kondensators, Ladungen zu speichern?**
- ◆ **Welcher Zusammenhang besteht zwischen der gespeicherten Ladung und der Spannung an einem Kondensator?**
- ◆ **Was besagt die Verschiebungsflußdichte und wie hängt sie mit dem verursachenden elektrischen Feld zusammen?**
- ◆ **Wie lautet die Kapazität eines Plattenkondensators?**

Verständnisfragen zur Vorlesung 05

- ◆ **Welche Ersatzkapazitäten ergeben sich bei Parallel- und Reihenschaltung von Kondensatoren?**
- ◆ **Welche Zusammenhängen gelten zwischen Strom und Spannung am Kondensator?**
- ◆ **Wie ist der Strom- und Spannungsverlauf eines Kondensators der Kapazität C beim Auf- und Entladen über einen Widerstand R ?**
- ◆ **Welche Energie kann in einem Kondensator der Kapazität C beim Aufladen auf eine Spannung U gespeichert werden?**

Übungsaufgaben

Aufgabe 5-01:

Von drei in Reihe geschalteten Kondensatoren mit 100pF, 220 pF und 470pF ist der zuletzt genannte durchgeschlagen. Um welchen Wert und um wieviel Prozent ändert sich dadurch die Gesamtkapazität ?

Wie sehen die Werte aus, wenn die drei Kondensatoren parallel geschaltet sind ?

Aufgabe 5-02:

Zur Bereitstellung elektrischer Energie in kurzzeitiger Impulsform werden in der Regel Kondensatoren benutzt, aus denen die vorher gespeicherte Energie innerhalb kürzester Zeit entnehmen kann. Hier sei die notwendige Energie 120 Ws, die Benötigte Dauer (Entnahmzeit) 4ms.

Mit welcher Leistung würde das Netz in der Entnahmzeit belastet, wenn die Impulsenergie direkt entnommen, also kein Speicherkondensator eingesetzt würde?

Wie groß müßte die Kapazität des Speicherkondensators sein, wenn eine Ladespannung von 800 V zur Verfügung steht ?

Wie groß ist die praktisch verbrauchte Energie, wenn am Kondensator nach der Energieentnahme noch eine Restspannung von 97 V gemessen wird ?