Aufgabe 1.1 [Modellierung] **4 Punkte**

An einem der nächsten Wochenenden wollen Jonny und Jenny mit ihrem Auto ans Meer fahren. Nach zahlreichen früheren Fahrten wissen sie:

1. Wenn das Auto vor Kurzem in der Inspektion war, ist genügend Öl vorhanden und die Elektronik funktioniert.
2. Nur wenn die Batterie geladen ist, funktioniert auch die Elektronik.
3. Es ist genau dann genügend Kühlmittel vorhanden, wenn genügend Öl vorhanden ist.
4. Der Motor läuft problemlos, wenn genügend Kühlmittel, genügend Öl und genügend Treibstoff vorhanden sind.

Modellieren Sie die Zusammenhänge durch aussagenlogische Formeln $\varphi_1, \dots, \varphi_4$. Erläutern Sie insbesondere die beabsichtigte Bedeutung Ihrer Aussagenvariablen.

Lösung:

Wir beschreiben zunächst die verwendeten Aussagenvariablen und geben dann entsprechende Formeln an.

Aussagenvariablen. In den unten angegebenen Formeln werden die Aussagenvariablen B, E, I, K, M, O und T mit der jeweils folgenden Bedeutung verwendet.

- B: Die Batterie ist geladen.
- E: Die Elektronik funktioniert.
- I: Das Auto war vor Kurzem in der Inspektion.
- K: Es ist genügend Kühlmittel vorhanden.
- M: Der Motor läuft problemlos.
- O: Es ist genügend Öl vorhanden.
- T: Es ist genügend Treibstoff vorhanden.

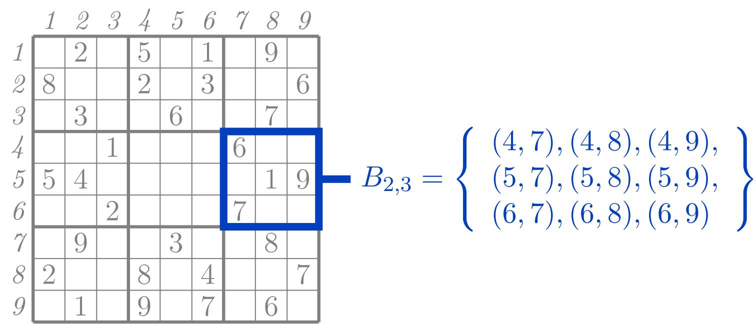
Modellierung.

1. Wenn das Auto vor Kurzem in der Inspektion war, ist genügend Öl vorhanden und die Elektronik funktioniert. $\boldsymbol{I \rightarrow (O \wedge E)}$
2. Nur wenn die Batterie geladen ist, funktioniert auch die Elektronik. $\boldsymbol{E \rightarrow B}$
3. Es ist genau dann genügend Kühlmittel vorhanden, wenn genügend Öl vorhanden ist. $\boldsymbol{K \leftrightarrow O}$
4. Der Motor läuft problemlos, wenn genügend Kühlmittel, genügend Öl und genügend Treibstoff vorhanden sind. $\boldsymbol{(K \wedge O \wedge T) \rightarrow M}$

Aufgabe 1.2 [Modellierung algorithmischer Probleme] **6 Punkte**

In einem Programmierpraktikum soll eine Anwendung zur automatischen Lösung von Sudoku-Rätseln entwickelt werden. Hannah schlägt vor, die Frage der Lösbarkeit eines solchen Rätsels auf die Frage nach der Erfüllbarkeit einer aussagenlogischen Formel zurückzuführen.

Formalisierung des Spiels. Formal besteht ein Sudoku aus 81 Feldern, die jeweils eindeutig durch eine Zeilennummer z und eine Spaltennummer s aus $P = \{1, \ldots, 9\}$ bezeichnet werden. Das Spiel ist zudem in 9 Blöcke mit $3{\times}3$ Feldern aufgeteilt: Für alle $i, j \in \{1, 2, 3\}$ sei Block $B_{i,j} = P_i \times P_j$ mit $P_1 = \{1, 2, 3\}$, $P_2 = \{4, 5, 6\}$ und $P_3 = \{7, 8, 9\}$. Block $B_{2,3}$ ist in folgender Abbildung beispielhaft hervorgehoben.



Helfen Sie Hannahs Gruppe, indem sie die folgenden Teilprobleme lösen. Nutzen Sie dazu ausschließlich die Aussagenvariablen, auf die sich die Gruppe geeinigt hat: die Variablen $X_{z,s,w}$ mit Indizes $z, s, w \in P$ mit der Intention *$X_{z,s,w}$ ist genau dann wahr, wenn Feld (z, s) der Wert w zugeordnet ist.*

a) Modellieren Sie die Regeln durch eine Formel $\varphi = \varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_4$. Die Teilformeln $\varphi_1, \ldots, \varphi_4$ sollen dabei die folgenden Spielregeln modellieren. **(4 Punkte)**

1. Jedem Feld (z, s) muss mindestens ein Wert $p \in P$ zugeordnet werden.
2. Jeder Wert darf in jeder Zeile nur einmal vorkommen.
3. Jeder Wert darf in jeder Spalte nur einmal vorkommen.
4. Jeder Wert darf in jedem Block nur einmal vorkommen.

Bei einem Sudoku-Rätsel sind einige Werte bereits durch das Rätsel vorgegeben. Es gibt also eine Menge V von Vorgaben der Art (z, s, w), die fordern, dass in Feld (z, s) der Wert w steht.

b) Wie kann Formel φ zu einer Formel φ' erweitert werden, sodass nur solche Lösungen berücksichtigt werden, die die Vorgaben aus V respektieren? **(1 Punkt)**

c) Beschreiben Sie den Zusammenhang zwischen Belegungen der Formel φ und Lösungen des Sudoku-Rätsels. **(1 Punkt)**

Hinweis

Sie können in dieser Aufgabe für endliche Mengen $I = \{i_1, \ldots, i_n\}$ die verallgemeinerten Operatoren $\bigwedge_{i \in I}$ und $\bigvee_{i \in I}$ verwenden. Für $I = \{1, 2, 3\}$ gilt beispielsweise

$$\bigwedge_{i \in I} \bigwedge_{\substack{j \in I \\ i < j}} A_{i,j} \equiv A_{1,2} \wedge A_{1,3} \wedge A_{2,3}.$$

Lösung:

a) Die folgenden Formeln modellieren die angegebenen Spielregeln.

1. Jedem Feld (z, s) muss mindestens ein Wert $p \in P$ zugeordnet werden.

$$\varphi_1 = \bigwedge_{z \in P} \bigwedge_{s \in P} \left(\bigvee_{w \in P} X_{z,s,w} \right)$$

Für alle Felder (alle Kombinationen von z und s) werden die Teilbedingungen konjunktiv verknüpft. Eine Teilbedingung fordert, dass für die jeweilige Kombination (z, s) die Variable $X_{z,s,w}$ für wenigstens ein $w \in P$ wahr ist.

2. Jeder Wert darf in jeder Zeile nur einmal vorkommen.

$$\varphi_2 = \bigwedge_{z \in P} \bigwedge_{s \in P} \bigwedge_{\substack{s' \in P \\ s < s'}} \bigwedge_{w \in P} (X_{z,s,w} \to \neg X_{z,s',w})$$

Für jede Zeile z werden alle verschiedenen Spaltennummern s und s' konjunktiv verknüpft. Für jeden Wert w wird gefordert: Wenn er in Feld (z, s) vorkommt, dann nicht in Feld (z, s'), welches in derselben Zeile liegt. Aus Symmetriegründen genügt es, die Kombinationen s, s' mit $s < s'$ statt alle mit $s \neq s'$ zu betrachten.

3. Jeder Wert darf in jeder Spalte nur einmal vorkommen.

$$\varphi_3 = \bigwedge_{z \in P} \bigwedge_{\substack{z' \in P \\ z < z'}} \bigwedge_{s \in P} \bigwedge_{w \in P} (X_{z,s,w} \to \neg X_{z',s,w})$$

Diese Formel ist analog zur vorherigen konstruiert. Hier werden die Spaltennummer fixiert und Kombinationen z, z' von Zeilennummern konjunktiv verknüpft.

4. Jeder Wert darf in jedem Block nur einmal vorkommen.

$$\varphi_4 = \bigwedge_{i=1}^{3} \bigwedge_{j=1}^{3} \chi_{i,j} \text{ mit } \chi_{i,j} = \bigwedge_{(z,s) \in B_{i,j}} \bigwedge_{\substack{(z',s') \in B_{i,j} \\ (z,s) \neq (z',s')}} \bigwedge_{w \in P} (X_{z,s,w} \to \neg X_{z',s',w})$$

Teilformel $\chi_{i,j}$ verknüpft für alle verschiedenen Paare von Feldern des Blockes $B_{i,j}$ und jeden möglichen Wert w die Bedingung, dass der Wert höchstens von einem der beiden Felder angenommen werden darf. Formel φ_4 schließlich fordert dies für alle neun Blöcke.

b) Für jede Vorgabe $(z, s, w) \in V$ kann φ um ein Konjunkt $X_{z,s,w}$ erweitert werden. Insgesamt ergibt sich somit die Formel

$$\varphi' = \varphi \wedge \bigwedge_{(z,s,w) \in V} X_{z,s,w},$$

welche einerseits die Einhaltung der allgemeinen Spielregeln fordert und andererseits die Menge der Lösungen auf solche einschränkt, die die Vorgaben aus V respektieren.

c) Eine zur Formel φ passende Belegung α ist genau dann erfüllend, wenn sie eine Lösung des Sudokus beschreibt. Dabei ist eine Lösung eine Abbildung $\ell : P \times P \to P$, die jedem Feld (z, s) einen Wert $\ell(z, s) \in P$ zuordnet und die Spielregeln resepektiert.

Wenn $[\![\varphi]\!]_\alpha = 1$ gilt, dann ist eine solche Abbildung definiert durch $\ell_\alpha(z, s) = w$ für das $w \in P$ mit $\alpha(X_{z,s,w}) = 1$. Da $\alpha \models \varphi_1$ und somit $\alpha \models \bigvee_{w \in P} X_{z,s,w}$ für jedes Feld (z, s), gibt es einen solchen Wert $w \in P$. Da ferner $\alpha \models \varphi_2$ gilt, kann es nur einen solchen Wert geben – die anderen acht Werte müssen in den verbleibenden acht Feldern der Zelle verwendet werden, da kein Wert zweimal auftreten kann.

Analog garantieren $\alpha \models \varphi_3$ und $\alpha \models \varphi_4$, dass die Spielregeln 3 und 4 von ℓ_α respektiert werden.

Aufgabe 1.3 [Äquivalenzen und Normalformen] 5 Punkte

a) Gegeben sei die Formel $\varphi = \neg\Big((\neg A \rightarrow C) \wedge \big(C \rightarrow (B \wedge D)\big)\Big)$. **(3 Punkte)**

(i) Formen Sie φ schrittweise in eine äquivalente Formel φ' in DNF um. **[2 Punkte]**

(ii) Gilt $\varphi \equiv \top$ oder $\varphi \equiv \bot$? **[1 Punkt]**

b) Zeigen Sie, dass $(\varphi_1 \wedge \varphi_2) \rightarrow (\psi_1 \wedge \psi_2) \equiv \big(\varphi_1 \rightarrow (\varphi_2 \rightarrow \psi_1)\big) \wedge \big(\varphi_1 \rightarrow (\varphi_2 \rightarrow \psi_2)\big)$ für beliebige Formeln φ_1, φ_2 und ψ_1, ψ_2 gilt. **(2 Punkte)**

Lösung:

a) **(i)** Wir bestimmen zunächst eine äquivalente Formel Negationsnormalform:

$$\begin{aligned}
& \neg\Big((\neg A \rightarrow C) \wedge \big(C \rightarrow (B \wedge D)\big)\Big) & \\
\equiv\ & \neg(\neg A \rightarrow C) \vee \neg\big(C \rightarrow (B \wedge D)\big) & \textit{DeMorgan} \\
\equiv\ & \neg(\neg\neg A \vee C) \vee \neg\big(\neg C \vee (B \wedge D)\big) & \textit{Abkürzung auflösen} \\
\equiv\ & \neg(A \vee C) \vee \neg\big(\neg C \vee (B \wedge D)\big) & \textit{Doppelnegation} \\
\equiv\ & (\neg A \wedge \neg C) \vee \big(\neg\neg C \wedge \neg(B \wedge D)\big) & \textit{DeMorgan} \\
\equiv\ & (\neg A \wedge \neg C) \vee \big(C \wedge \neg(B \wedge D)\big) & \textit{Doppelnegation} \\
\equiv\ & (\neg A \wedge \neg C) \vee \big(C \wedge (\neg B \vee \neg D)\big) = \varphi'' & \textit{DeMorgan}
\end{aligned}$$

Nun wird die Formel φ'' in DNF gebracht:

$$\begin{aligned}
& (\neg A \wedge \neg C) \vee \big(C \wedge (\neg B \vee \neg D)\big) & \\
\equiv\ & (\neg A \wedge \neg C) \vee \big((C \wedge \neg B) \vee (C \wedge \neg D)\big) & \textit{Distributivität} \\
\equiv\ & (\neg A \wedge \neg C) \vee (C \wedge \neg B) \vee (C \wedge \neg D) = \varphi'. & \textit{Assoziativität}
\end{aligned}$$

(ii) **Es gilt weder $\varphi \equiv \top$ noch $\varphi \equiv \bot$.** Dies lässt sich wegen $\varphi \equiv \varphi'$ leicht an $\varphi' = (\neg A \wedge \neg C) \vee (C \wedge \neg B) \vee (C \wedge \neg D)$ ablesen: Wir betrachten hierzu die Belegungen α_0 und α_1:

	A	B	C	D	$(\neg A \wedge \neg C)$	$(C \wedge \neg B)$	$(C \wedge \neg D)$	φ'
α_0 :	1	0	0	1	0	0	0	0
α_1 :	0	0	1	1	0	1	0	1

Da $[\![\varphi]\!]_{\alpha_0} = [\![\varphi']\!]_{\alpha_0} = 0$ gilt, ist φ' nicht allgemeingültig ($\varphi' \not\equiv \top$), und da $[\![\varphi]\!]_{\alpha_1} = [\![\varphi']\!]_{\alpha_1} = 1$ gilt, ist φ' nicht unerfüllbar ($\varphi' \not\equiv \bot$).

b) Die Äquivalenz lässt sich auf verschiedene Art zeigen. Beispielsweise durch eine Folge von Äquivalenzumformungen oder durch einen Beweis, der auf Fallunterscheidungen hinsichtlich der Variablenbelegung basiert, oder aber durch erschöpfende Auswertung der Formeln (wie in der Wahrheitstabelle unten).

Äquivalenzumformungen:

$$\begin{aligned}
& (\varphi_1 \wedge \varphi_2) \to (\psi_1 \wedge \psi_2) & \\
\equiv\ & \neg(\varphi_1 \wedge \varphi_2) \vee (\psi_1 \wedge \psi_2) & \textit{Abkürzungen auflösen} \\
\equiv\ & (\neg\varphi_1 \vee \neg\varphi_2) \vee (\psi_1 \wedge \psi_2) & \textit{DeMorgan} \\
\equiv\ & \big((\neg\varphi_1 \vee \neg\varphi_2) \vee \psi_1\big) \wedge \big((\neg\varphi_1 \vee \neg\varphi_2) \vee \psi_2\big) & \textit{Distributivität} \\
\equiv\ & \big(\neg\varphi_1 \vee (\neg\varphi_2 \vee \psi_1)\big) \wedge \big(\neg\varphi_1 \vee (\neg\varphi_2 \vee \psi_2)\big) & \textit{Assoziativität} \\
\equiv\ & \big(\neg\varphi_1 \vee (\varphi_2 \to \psi_1)\big) \wedge \big(\neg\varphi_1 \vee (\varphi_2 \to \psi_2)\big) & \textit{Abkürzungen einführen} \\
\equiv\ & \big(\varphi_1 \to (\varphi_2 \to \psi_1)\big) \wedge \big(\varphi_1 \to (\varphi_2 \to \psi_2)\big) & \textit{Abkürzungen einführen}
\end{aligned}$$

Fallunterscheidung. Es genügt zu zeigen, dass die Formeln $\chi = (\varphi_1 \wedge \varphi_2) \to (\psi_1 \wedge \psi_2)$ und $\chi' = \big(\varphi_1 \to (\varphi_2 \to \psi_1)\big) \wedge \big(\varphi_1 \to (\varphi_2 \to \psi_2)\big)$ für jede passende Belegung α denselben Wert annehmen. Sei α eine beliebige zu χ (und damit auch zu χ') passende Belegung. Wir unterscheiden die folgenden Fälle.

1. Fall ($[\![\varphi_1]\!]_\alpha = 1$ und $[\![\varphi_2]\!]_\alpha = 1$):
   Dann gilt nach Definition der Konjunktion $[\![\varphi_1 \wedge \varphi_2]\!]_\alpha = 1$ und nach Definition der Implikation $[\![\chi]\!]_\alpha = [\![(\varphi_1 \wedge \varphi_2) \to (\psi_1 \wedge \psi_2)]\!]_\alpha = [\![\psi_1 \wedge \psi_2]\!]_\alpha$. Gleichermaßen gilt $[\![\varphi_1 \to (\varphi_2 \to \psi_1)]\!]_\alpha = [\![\varphi_2 \to \psi_1]\!]_\alpha = [\![\psi_1]\!]_\alpha$ und analog $[\![\varphi_1 \to (\varphi_2 \to \psi_2)]\!]_\alpha$, also, nach Definition der Konjunktion, $[\![\chi']\!]_\alpha = 1$ genau dann, wenn $[\![\psi_1]\!]_\alpha = 1$ und $[\![\psi_2]\!]_\alpha = 1$ gilt. Dies wiederum gilt genau dann, wenn $[\![\psi_1 \wedge \psi_2]\!]_\alpha = [\![\chi]\!]_\alpha = 1$ gilt.
2. Fall ($[\![\varphi_1]\!]_\alpha = 1$ und $[\![\varphi_2]\!]_\alpha = 0$):
   Dann gilt nach Definition der Konjunktion $[\![\varphi_1 \wedge \varphi_2]\!]_\alpha = 0$ und nach Definition der Implikation $[\![\chi]\!]_\alpha = [\![(\varphi_1 \wedge \varphi_2) \to (\psi_1 \wedge \psi_2)]\!]_\alpha = 1$. Ferner gelten nach Definition der Implikation $[\![\varphi_1 \to (\varphi_2 \to \psi_1)]\!]_\alpha = [\![\varphi_2 \to \psi_1]\!]_\alpha = 1$ und analog $[\![\varphi_1 \to (\varphi_2 \to \psi_2)]\!]_\alpha = 1$. Mithin gilt, nach Definition der Konjunktion, $[\![\chi']\!]_\alpha = 1$.
3. Fall ($[\![\varphi_1]\!]_\alpha = 0$):
   Dann gilt $[\![\varphi_1 \wedge \varphi_2]\!]_\alpha = 0$ nach Definition der Konjunktion und somit $[\![(\varphi_1 \wedge \varphi_2) \to (\psi_1 \wedge \psi_2)]\!]_\alpha = [\![\chi]\!]_\alpha = 1$ nach Definition der Implikation. Ebenfalls nach Definition der Implikation gelten $[\![\varphi_1 \to (\varphi_2 \to \psi_1)]\!]_\alpha = [\![\varphi_1 \to (\varphi_2 \to \psi_2)]\!]_\alpha = 1$, also nach Definition der Konjunktion $[\![\chi']\!]_\alpha = 1$.

In jedem Fall gilt also $[\![\chi]\!]_\alpha = [\![\chi']\!]_\alpha$. Daraus folgt $\chi \equiv \chi'$.

Wahrheitstabelle. Es genügt zu zeigen, dass

$$\underbrace{(A \wedge B) \to (C \wedge D)}_{\chi} \equiv \underbrace{\overbrace{(A \to (B \to C))}^{\chi_1'} \wedge \overbrace{(A \to (B \to D))}^{\chi_2'}}_{\chi'}$$

gilt. Die eigentliche Aussage folgt dann unter Verwendung des Substitutionslemmas mit der Substitution $S = \{A \mapsto \varphi_1, B \mapsto \varphi_2, C \mapsto \psi_1, D \mapsto \psi_2\}$.

A	B	C	D	$A \wedge B$	$C \wedge D$	$B \to C$	$B \to D$	χ	χ'_1	χ'_2	χ'
0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1
0	0	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1
0	0	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1
0	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1
1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	1	1	0	0	1	0	0	1	0
1	1	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1