

## Mathematik für Informatiker 2 PowerLernTage

### Aufgabe Grundlagen.1

Bestimmen Sie das Supremum, Infimum, Maximum und Minimum (falls sie existieren) folgender Teilmengen der reellen Zahlen.

1.  $A = \{2^{-p} + 3^{-q} + 5^{-r} \mid p, q, r \in \mathbb{N}\}$

**Hinweis:** Sie dürfen die folgende Folgerung aus dem Archimedischen Axiom (Skript S.20) verwenden: für alle  $\alpha > 1$  und alle  $\varepsilon > 0$  existiert ein  $n \in \mathbb{N}$  mit  $\alpha^{-n} < \varepsilon$ .

2.  $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 3x^2 - 10x + 3 < 0\}$

3.  $A = \{1 + (-\frac{1}{2})^n \mid n \in \mathbb{N}\}$

4.  $B = \left\{ \frac{x-1}{x+1} \mid x \in [0, \infty) \right\}$

### Aufgabe Grundlagen.2

Man entscheide, ob folgenden Mengen  $M \subset \mathbb{R}$  nach oben bzw. nach unten beschränkt sind und bestimme ggf.  $\sup M$  und  $\inf M$ . Weiter entscheide man, ob  $M$  ein Maximum oder ein Minimum besitzt:

1.  $M = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \leq 10\}$

2.  $M = \{1 + \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$

3.  $M = \{1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{2^m} \mid n, m \in \mathbb{N}\}$

### Aufgabe Grundlagen.3

Bestimmen und erläutern Sie mit einer Rechnung, welche Zahlen  $x \in \mathbb{R}$  die folgenden Ungleichungen erfüllen:

1.  $x + 1 \leq 2|x| \leq x + 2$

2.  $|5x + 3| - |3x - 2| \geq 5$

### Aufgabe Grundlagen.4

Es seien  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $0 < a < b$  die Seitenlängen eines Rechtecks  $R$  und

$$A(a, b) := \frac{a+b}{2}, \quad (\text{Arithmetisches Mittel})$$

$$G(a, b) := \sqrt{ab}, \quad (\text{Geometrisches Mittel})$$

$$H(a, b) := \frac{1}{A\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\right)} = \frac{2ab}{a+b}. \quad (\text{Harmonisches Mittel})$$

Zeigen Sie: Ersetzt man  $a$  durch  $H(a, b)$  und  $b$  durch  $A(a, b)$ , so erhält man ein Rechteck mit dem selben Flächeninhalt wie  $R$ , aber einem geringeren Umfang.