technische universität dortmund

LS 2 / Informatik

Datenstrukturen, Algorithmen und Programmierung 2 (DAP2)

Gierige Algorithmen

Einführendes Beispiel

- Preisausschreiben gewonnen
- 3 Preise auswählen

Mögliche Preise:

- Haus
- Auto
- Topfpflanze
- Reise nach Australien
- Abendessen

Gierige Algorithmen

Einführendes Beispiel

- Preisausschreiben gewonnen
- 3 Preise auswählen

Mögliche Preise:

1

- Haus
- Auto
- Topfpflanze
- Reise nach Australien
- Abendessen

Gierige Algorithmen

Einführendes Beispiel

- Preisausschreiben gewonnen
- 3 Preise auswählen

Mögliche Preise:

- Haus 1
- Auto 2
- Topfpflanze
- Reise nach Australien
- Abendessen

Gierige Algorithmen

Einführendes Beispiel

- Preisausschreiben gewonnen
- 3 Preise auswählen

Möglichen Preise:

- Haus 1
- Auto 2
- Topfpflanze
- Reise nach Australien 3
- Abendessen

Gierige Algorithmen

Was ist unser Ziel?

- Wollen Gewinn maximieren

Wie wollen wir dieses Ziel erreichen?

- In jedem Auswahlschritt wählen wir den teuersten noch nicht gewählten Gewinn

Frage:

- Maximieren wir dadurch den Gesamtgewinn?

Gierige Algorithmen

Was ist unser Ziel?

- Wollen Gewinn maximieren

Wie wollen wir dieses Ziel errei

- In jedem Auswahlschritt wählen wählten Gewinn

Offensichtlich ja!
Aber wir wollen dies trotzdem formal beweisen, um eine wichtige Beweistechnik kennenzulernen.

Frage:

- Maximieren wir dadurch den Gesamtgewinn?

Gierige Algorithmen

Formales Problem:

- Eingabe: n unterschiedliche Zahlen $C[1, \dots, n]$
- Problem: Wähle k unterschiedliche Zahlen aus C aus, so dass die Summe der Zahlen maximiert wird
- Ausgabe: Feld $J[1, \dots, k]$, das die gewählten Zahlen enthält

GierigeAuswahl(C)

1. **for** $i \leftarrow 1$ **to** k **do**
2. $J[i] \leftarrow$ die größte übrige Zahl aus C
3. **return** J

Gierige Algorithmen

Behauptung:

Algorithmus $\mathrm{GierigeAuswahl}$ berechnet eine optimale Menge von k Zahlen.

Behauptung:

Algorithmus GierigeAuswahl berechnet eine optimale Menge von k Zahlen.

$a = (a_1, a_2, \dots, a_j, \dots, a_k)$ Lösung von GierigeAuswahl

$b = (b_1, b_2, \dots, b_j, \dots, b_k)$ optimale Lösung $b \neq a$

Behauptung:

Algorithmus GierigeAuswahl berechnet eine optimale Menge von k Zahlen.

$a = (a_1, a_2, \ldots, a_j, \ldots, a_k)$ Lösung von GierigeAuswahl

$b = (b_1, b_2, \ldots, b_j, \ldots, b_k)$ optimale Lösung $b \neq a$

<u>OBdA.:</u>

$a_1 \geq \cdots \geq a_k$

$b_1 \geq \cdots \geq b_k$

Behauptung:

Algorithmus GierigeAuswahl berechnet eine optimale Menge von k Zahlen.

$a = (a_1, a_2, \ldots, a_j, \ldots, a_k)$ Lösung von GierigeAuswahl

$b = (b_1, b_2, \ldots, b_j, \ldots, b_k)$ optimale Lösung $b \neq a$

Sei j kleinster Index mit $a_j \neq b_j$

Behauptung:

Algorithmus GierigeAuswahl berechnet eine optimale Menge von k Zahlen.

$a = (a_1, a_2, \ldots, a_j, \ldots, a_k)$ Lösung von GierigeAuswahl

$b = (b_1, b_2, \ldots, b_j, \ldots, b_k)$ optimale Lösung $b \neq a$

Wegen unserer gierigen Strategie gilt
$a_j > b_j$

Behauptung:

Algorithmus $\mathrm{GierigeAuswahl}$ berechnet eine optimale Menge von k Zahlen.

$a = (a_1, a_2, \ldots, a_j, \ldots, a_k)$ Lösung von GierigeAuswahl

$b = (b_1, b_2, \ldots, b_j, \ldots, b_k)$ optimale Lösung $b \neq a$

Wegen unserer gierigen Strategie gilt $a_j > b_j$

Weil die b_i absteigend sortiert sind, wird a_j nicht in Lösung b verwendet.

Behauptung:

Algorithmus $\mathrm{GierigeAuswahl}$ berechnet eine optimale Menge von k Zahlen.

$a = (a_1, a_2, \ldots, a_j, \ldots, a_k)$ Lösung von GierigeAuswahl

$b = (b_1, b_2, \ldots, b_j, \ldots, b_k)$ optimale Lösung $b \neq a$

Ersetze b_j durch a_j.
Dies verbessert die Lösung.
Widerspruch zur Optimalität von b.

Gierige Algorithmen

Prinzip

- Konstruiere Lösung Schritt für Schritt
- In jedem Schritt: Optimiere ein einfaches, lokales Kriterium

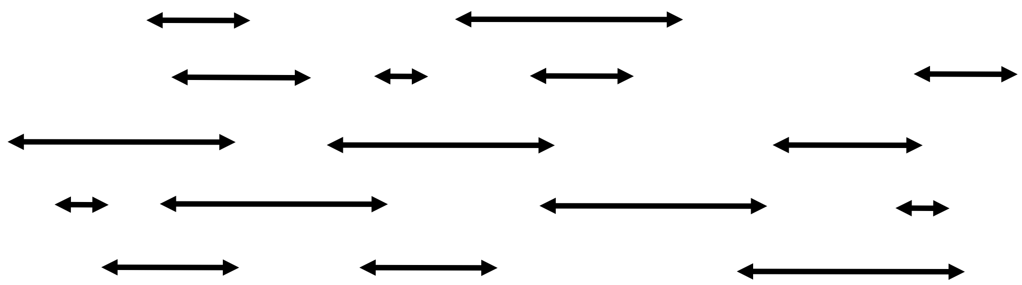
Beobachtung

- Man kann viele unterschiedliche gierige Algorithmen für ein Problem entwickeln
- Nicht jeder dieser Algorithmen löst das Problem korrekt

Gierige Algorithmen

Interval Scheduling

- Ressource (Hörsaal, Parallelrechner, Elektronenmikroskop,..)
- Anfragen: Kann ich die Ressource für den Zeitraum (t_1, t_2) nutzen?

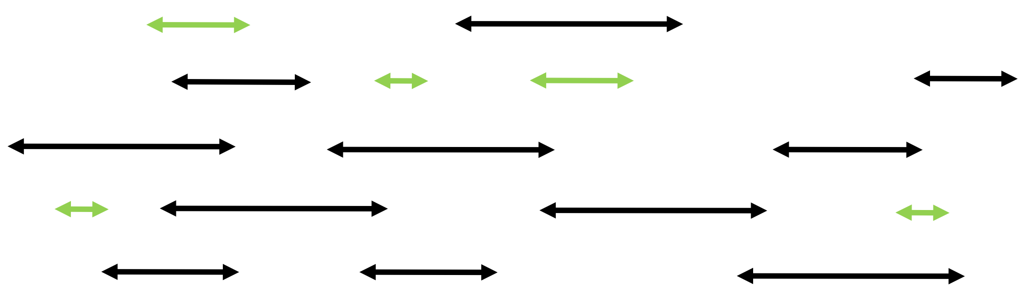


- Ziel: Möglichst viele Anfragen erfüllen

Gierige Algorithmen

Interval Scheduling

- Ressource (Hörsaal, Parallelrechner, Elektronenmikroskop,..)
- Anfragen: Kann ich die Ressource für den Zeitraum (t_1, t_2) nutzen?

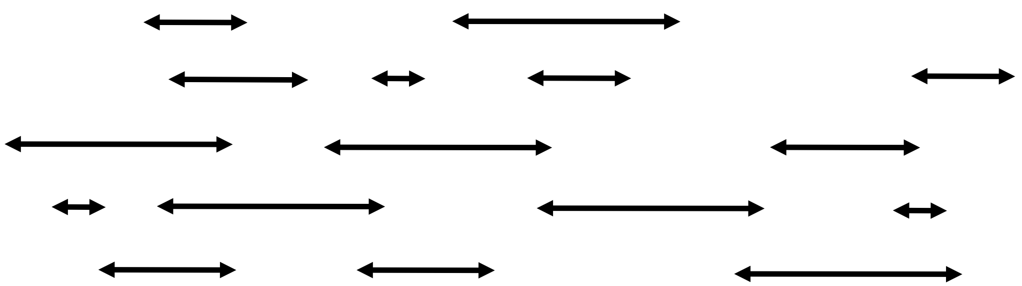


- Ziel: Möglichst viele Anfragen erfüllen

Gierige Algorithmen

Definition

- Zwei Anfragen heißen kompatibel, wenn sich die Intervalle nicht überschneiden.

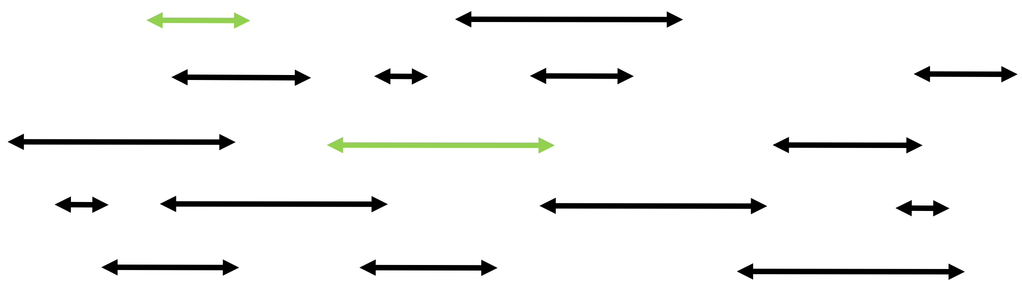


- Ziel: Möglichst viele Anfragen erfüllen

Gierige Algorithmen

Definition

- Zwei Anfragen heißen kompatibel, wenn sich die Intervalle nicht überschneiden.

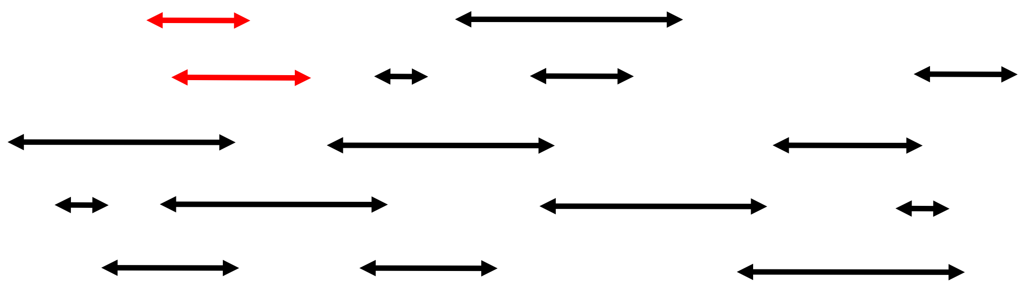


- Kompatibel

Gierige Algorithmen

Definition

- Zwei Anfragen heißen kompatibel, wenn sich die Intervalle nicht überschneiden.

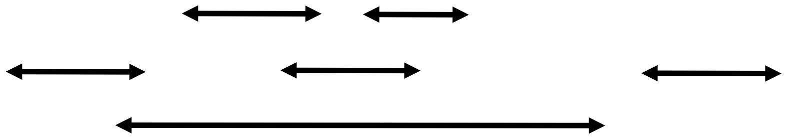


- Nicht kompatibel

Gierige Algorithmen

Generelle Überlegung

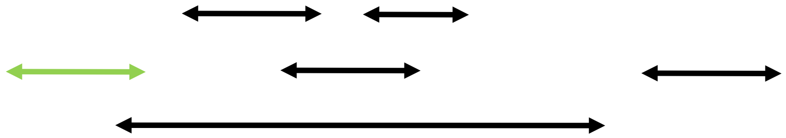
- Wähle erste Anfrage i_1 geschickt



Gierige Algorithmen

Generelle Überlegung

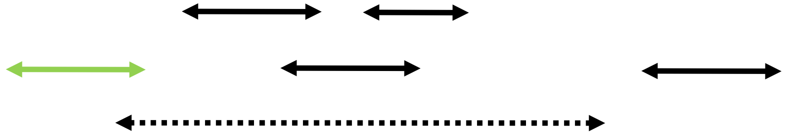
- Wähle erste Anfrage i_1 geschickt
- Ist i_1 akzeptiert, weise alle Anfragen zurück, die nicht kompatibel sind



Gierige Algorithmen

Generelle Überlegung

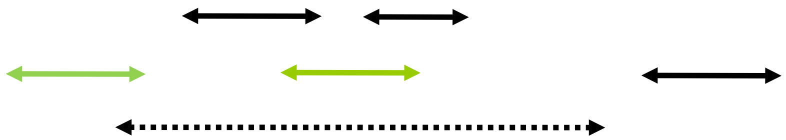
- Wähle erste Anfrage i_1 geschickt
- Ist i_1 akzeptiert, weise alle Anfragen zurück, die nicht kompatibel sind



Gierige Algorithmen

Generelle Überlegung

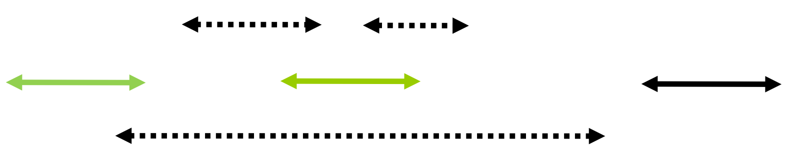
- Wähle erste Anfrage i_1 geschickt
- Ist i_1 akzeptiert, weise alle Anfragen zurück, die nicht kompatibel sind
- Wähle nächste Anfrage i_2 geschickt und weise alle Anfragen zurück, die nicht mit i_2 kompatibel sind



Gierige Algorithmen

Generelle Überlegung

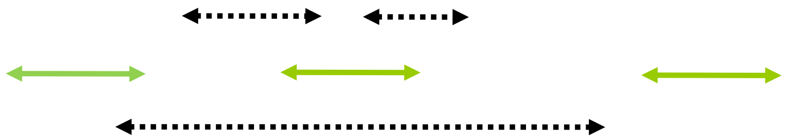
- Wähle erste Anfrage i_1 geschickt
- Ist i_1 akzeptiert, weise alle Anfragen zurück, die nicht kompatibel sind
- Wähle nächste Anfrage i_2 geschickt und weise alle Anfragen zurück, die nicht mit i_2 kompatibel sind
- Mache weiter, bis keine Anfragen mehr übrig sind



Gierige Algorithmen

Generelle Überlegung

- Wähle erste Anfrage i_1 geschickt
- Ist i_1 akzeptiert, weise alle Anfragen zurück, die nicht kompatibel sind
- Wähle nächste Anfrage i_2 geschickt und weise alle Anfragen zurück, die nicht mit i_2 kompatibel sind
- Mache weiter, bis keine Anfragen mehr übrig sind



Gierige Algorithmen

Welche der folgenden Strategien ist optimal? (Mehrfachnennung möglich)

A) Wähle immer die Anfrage, die am frühesten beginnt

B) Wähle immer die Anfrage, die am frühesten fertig wird

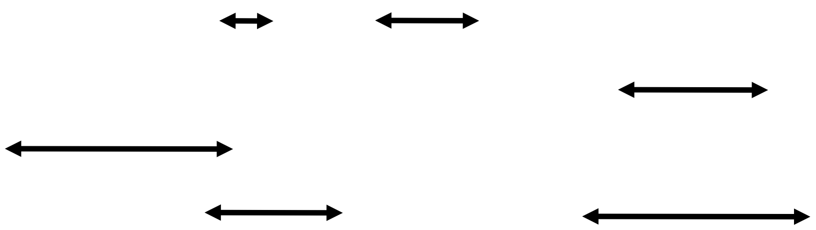
C) Wähle immer die Anfrage mit dem kürzesten Zeitintervall

D) Wähle immer das Interval mit den wenigsten nicht kompatiblen Intervallen. Bei Gleichheit wähle das kürzeste Intervall

Gierige Algorithmen

Strategie 1

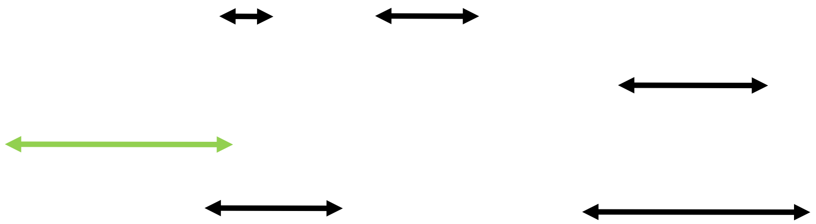
- Wähle immer die Anfrage, die am frühesten beginnt



Gierige Algorithmen

Strategie 1

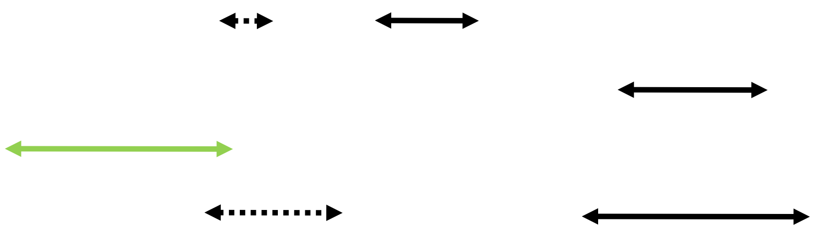
- Wähle immer die Anfrage, die am frühesten beginnt



Gierige Algorithmen

Strategie 1

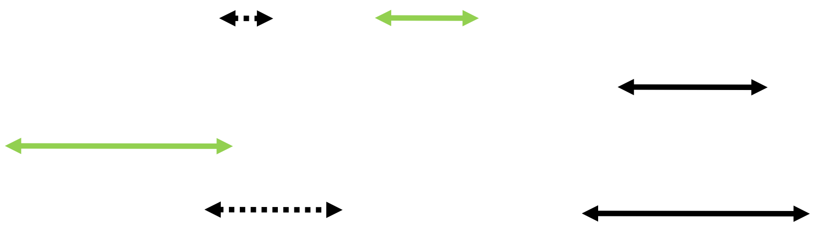
- Wähle immer die Anfrage, die am frühesten beginnt



Gierige Algorithmen

Strategie 1

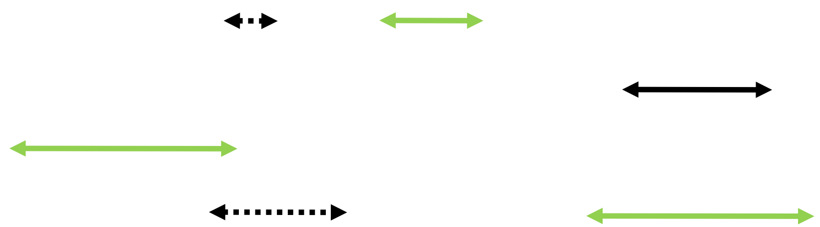
- Wähle immer die Anfrage, die am frühesten beginnt



Gierige Algorithmen

Strategie 1

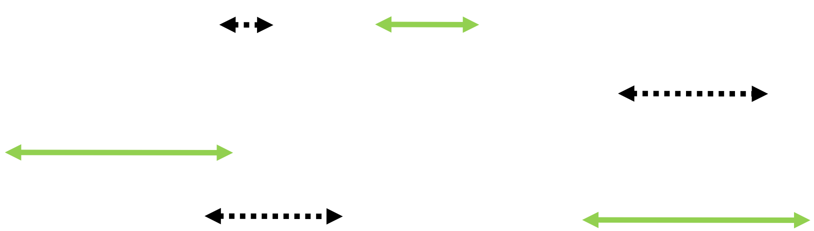
- Wähle immer die Anfrage, die am frühesten beginnt



Gierige Algorithmen

Strategie 1

- Wähle immer die Anfrage, die am frühesten beginnt

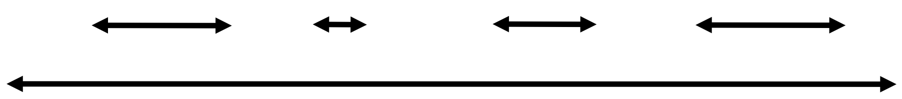


Gierige Algorithmen

Strategie 1

- Wähle immer die Anfrage, die am frühesten beginnt

Optimalität?



Gierige Algorithmen

Strategie 1

- Wähle immer die Anfrage, die am frühesten beginnt

Optimalität?

Gierige Algorithmen

Strategie 1

- Wähle immer die Anfrage, die am frühesten beginnt

Optimalität?

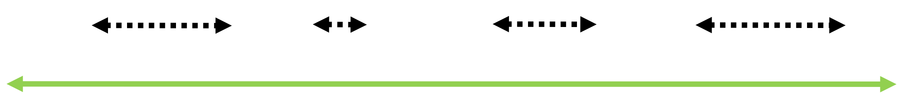
Gierige Algorithmen

Strategie 1

- Wähle immer die Anfrage, die am frühesten beginnt

Optimalität?

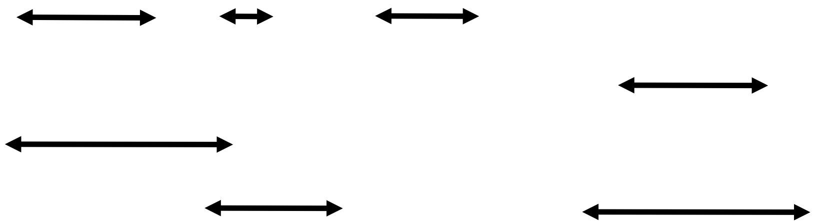
Nicht optimal, da eine optimale Lösung 4 Anfragen erfüllen kann



Gierige Algorithmen

Strategie 2

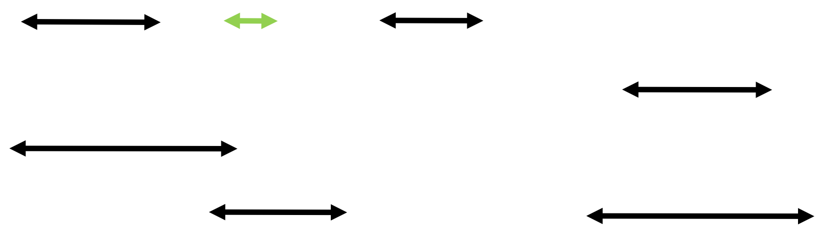
- Wähle immer das kürzeste Interval



Gierige Algorithmen

Strategie 2

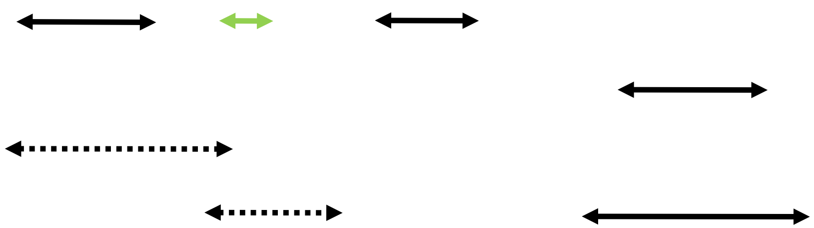
- Wähle immer das kürzeste Interval



Gierige Algorithmen

Strategie 2

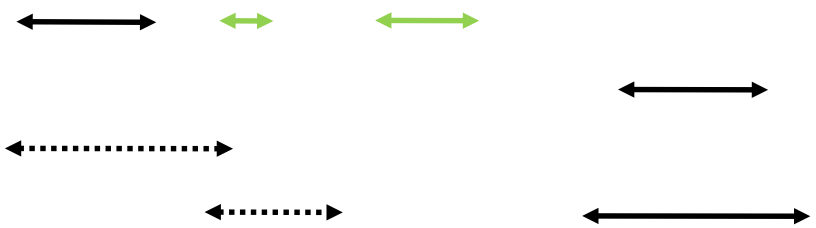
- Wähle immer das kürzeste Interval



Gierige Algorithmen

Strategie 2

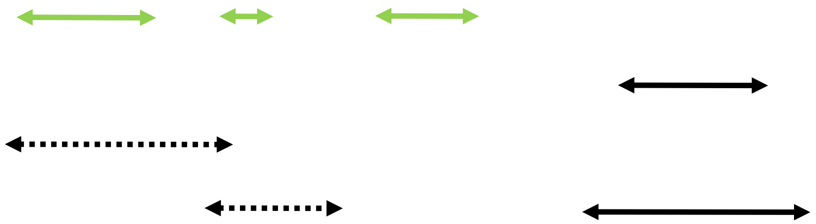
- Wähle immer das kürzeste Interval



Gierige Algorithmen

Strategie 2

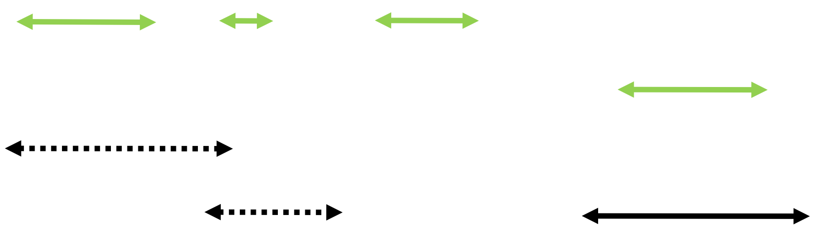
- Wähle immer das kürzeste Interval



Gierige Algorithmen

Strategie 2

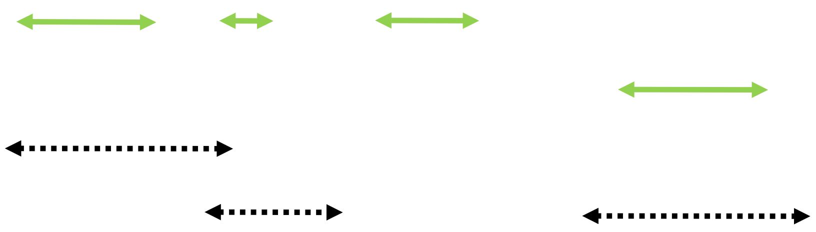
- Wähle immer das kürzeste Interval



Gierige Algorithmen

Strategie 2

- Wähle immer das kürzeste Interval

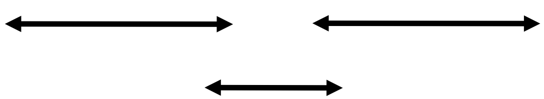


Gierige Algorithmen

Strategie 2

- Wähle immer das kürzeste Interval

Optimalität?

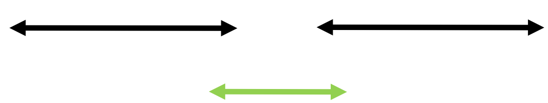


Gierige Algorithmen

Strategie 2

- Wähle immer das kürzeste Interval

Optimalität?



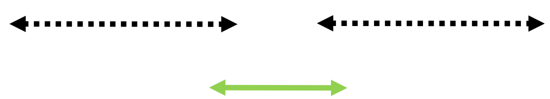
Gierige Algorithmen

Strategie 2

- Wähle immer das kürzeste Interval

Optimalität?

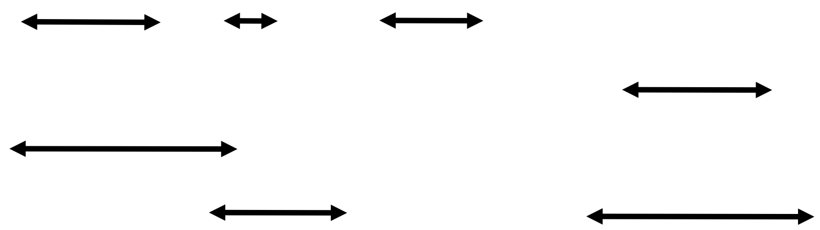
Ebenfalls nicht optimal, da
man 2 Anfragen erfüllen kann!



Gierige Algorithmen

Strategie 3

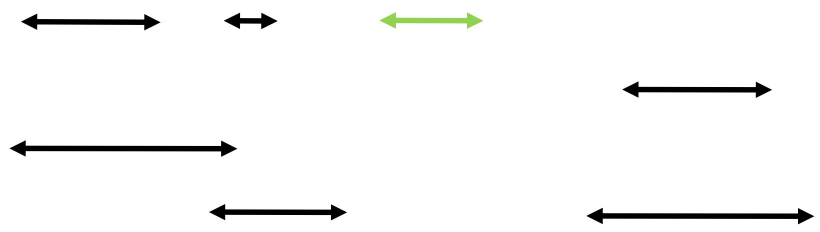
- Wähle immer das Interval mit den wenigsten nicht kompatiblen Intervallen
- bei Gleichheit wähle das kürzeste Interval



Gierige Algorithmen

Strategie 3

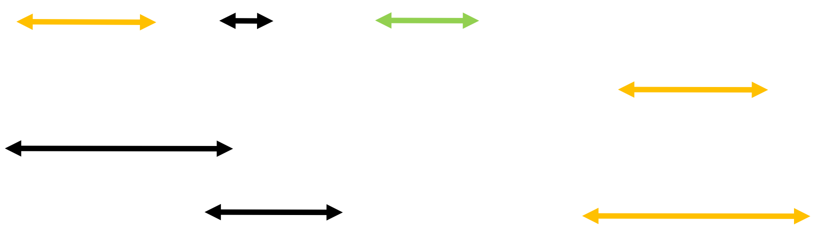
- Wähle immer das Interval mit den wenigsten nicht kompatiblen Intervallen
- bei Gleichheit wähle das kürzeste Interval



Gierige Algorithmen

Strategie 3

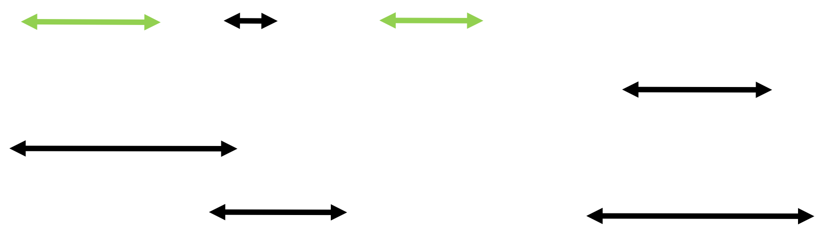
- Wähle immer das Interval mit den wenigsten nicht kompatiblen Intervallen
- bei Gleichheit wähle das kürzeste Interval



Gierige Algorithmen

Strategie 3

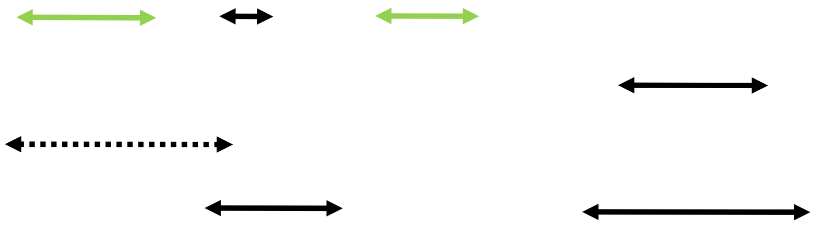
- Wähle immer das Interval mit den wenigsten nicht kompatiblen Intervallen
- bei Gleichheit wähle das kürzeste Interval



Gierige Algorithmen

Strategie 3

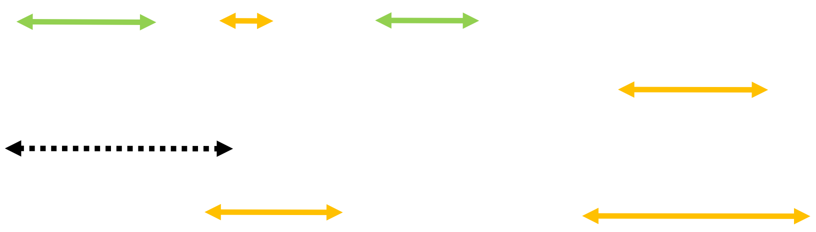
- Wähle immer das Interval mit den wenigsten nicht kompatiblen Intervallen
- bei Gleichheit wähle das kürzeste Interval



Gierige Algorithmen

Strategie 3

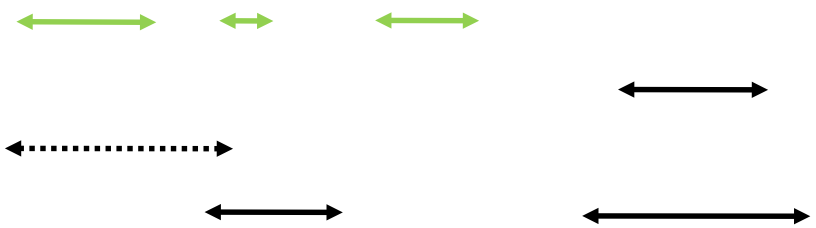
- Wähle immer das Interval mit den wenigsten nicht kompatiblen Intervallen
- bei Gleichheit wähle das kürzeste Interval



Gierige Algorithmen

Strategie 3

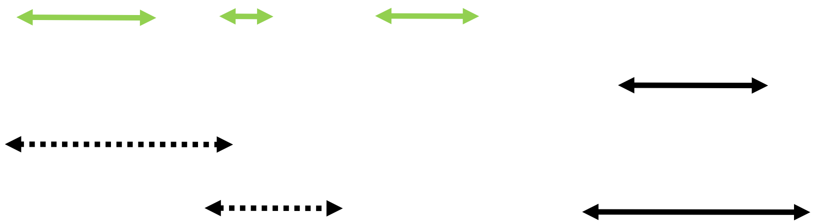
- Wähle immer das Interval mit den wenigsten nicht kompatiblen Intervallen
- bei Gleichheit wähle das kürzeste Interval



Gierige Algorithmen

Strategie 3

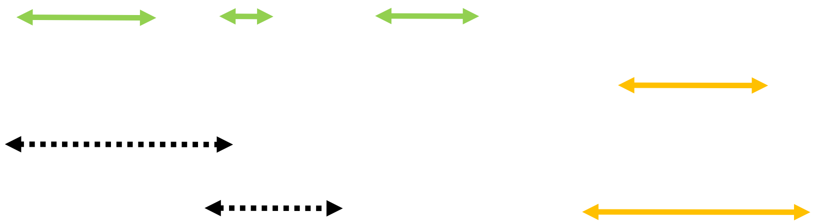
- Wähle immer das Interval mit den wenigsten nicht kompatiblen Intervallen
- bei Gleichheit wähle das kürzeste Interval



Gierige Algorithmen

Strategie 3

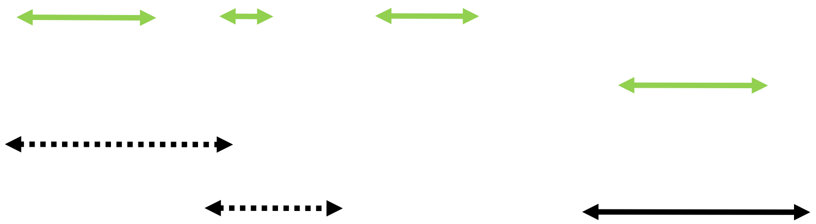
- Wähle immer das Interval mit den wenigsten nicht kompatiblen Intervallen
- bei Gleichheit wähle das kürzeste Interval



Gierige Algorithmen

Strategie 3

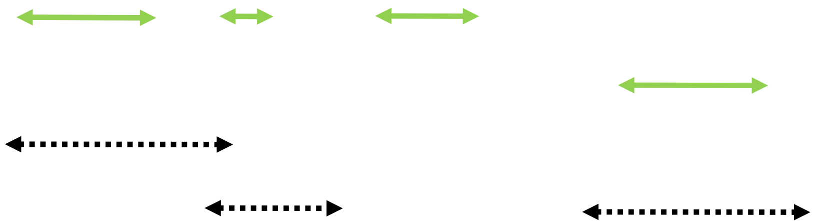
- Wähle immer das Interval mit den wenigsten nicht kompatiblen Intervallen
- bei Gleichheit wähle das kürzeste Interval



Gierige Algorithmen

Strategie 3

- Wähle immer das Interval mit den wenigsten nicht kompatiblen Intervallen
- bei Gleichheit wähle das kürzeste Interval

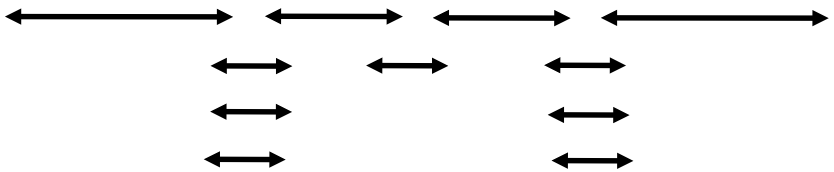


Gierige Algorithmen

Strategie 3

- Wähle immer das Interval mit den wenigsten nicht kompatiblen Intervallen
- bei Gleichheit wähle das kürzeste Interval

Optimalität?

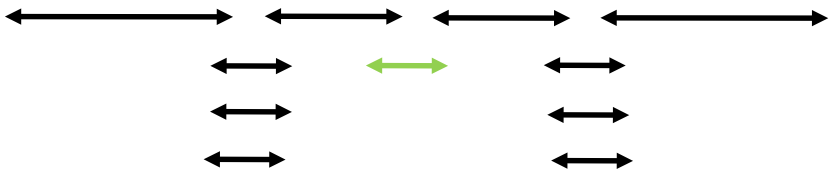


Gierige Algorithmen

Strategie 3

- Wähle immer das Interval mit den wenigsten nicht kompatiblen Intervallen
- bei Gleichheit wähle das kürzeste Interval

Optimalität?

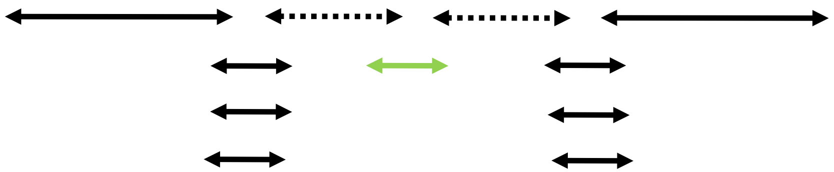


Gierige Algorithmen

Strategie 3

- Wähle immer das Interval mit den wenigsten nicht kompatiblen Intervallen
- bei Gleichheit wähle das kürzeste Interval

Optimalität?

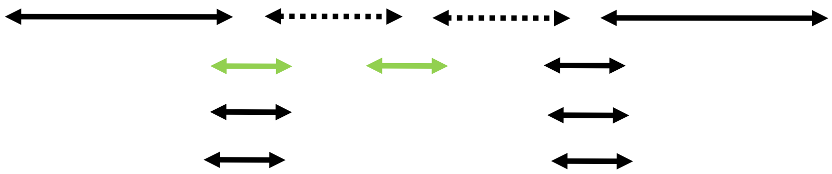


Gierige Algorithmen

Strategie 3

- Wähle immer das Interval mit den wenigsten nicht kompatiblen Intervallen
- bei Gleichheit wähle das kürzeste Interval

Optimalität?

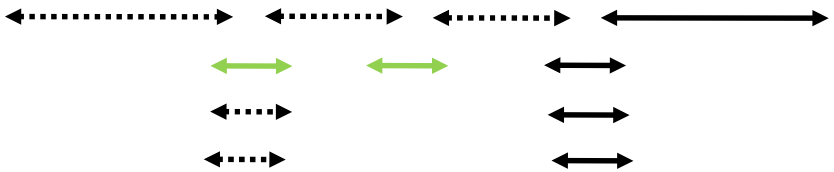


Gierige Algorithmen

Strategie 3

- Wähle immer das Interval mit den wenigsten nicht kompatiblen Intervallen
- bei Gleichheit wähle das kürzeste Interval

Optimalität?

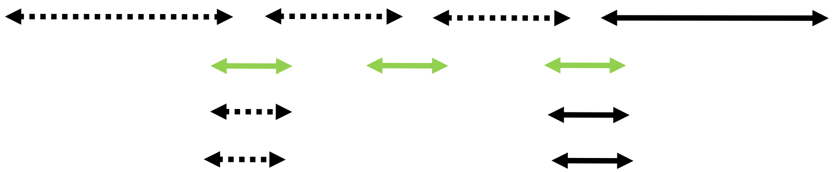


Gierige Algorithmen

Strategie 3

- Wähle immer das Interval mit den wenigsten nicht kompatiblen Intervallen
- bei Gleichheit wähle das kürzeste Interval

Optimalität?

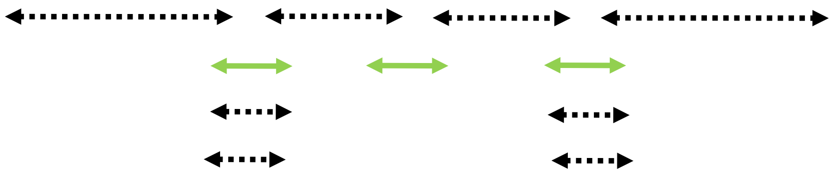


Gierige Algorithmen

Strategie 3

- Wähle immer das Interval mit den wenigsten nicht kompatiblen Intervallen
- bei Gleichheit wähle das kürzeste Interval

Optimalität?



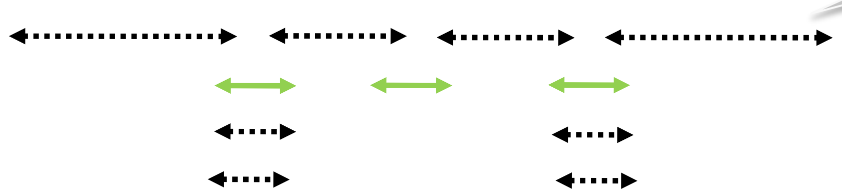
Gierige Algorithmen

Strategie 3

- Wähle immer das Interval mit den wenigsten nicht kompatiblen Intervallen
- bei Gleichheit wähle das kürzeste Interval

Optimalität?

Wieder nicht optimal!



Gierige Algorithmen

Worauf muss man achten?

- Ressource muss möglichst früh wieder frei werden!

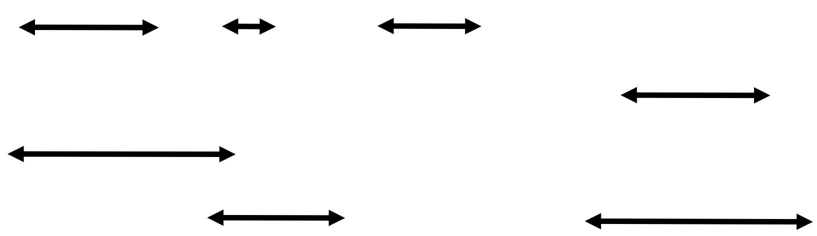
Gierige Algorithmen

Worauf muss man achten?

- Ressource muss möglichst früh wieder frei werden!

Neue Strategie

- Nimm die Anfrage, die am frühesten fertig ist.



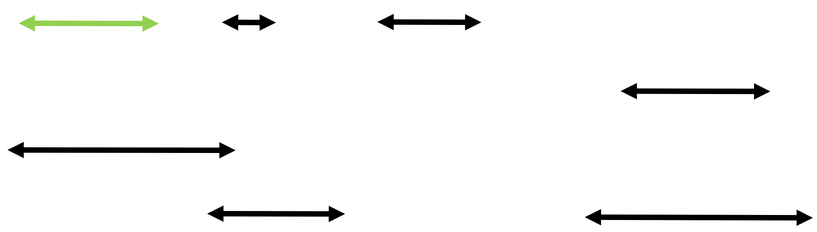
Gierige Algorithmen

Worauf muss man achten?

- Ressource muss möglichst früh wieder frei werden!

Neue Strategie

- Nimm die Anfrage, die am frühesten fertig ist.



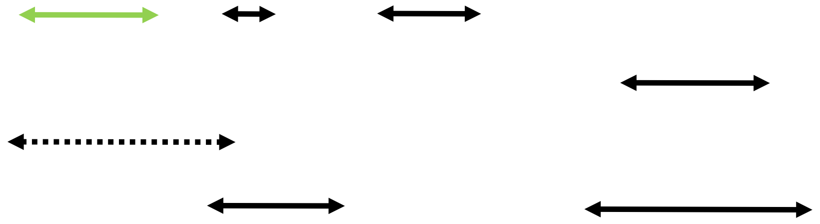
Gierige Algorithmen

Worauf muss man achten?

- Ressource muss möglichst früh wieder frei werden!

Neue Strategie

- Nimm die Anfrage, die am frühesten fertig ist.



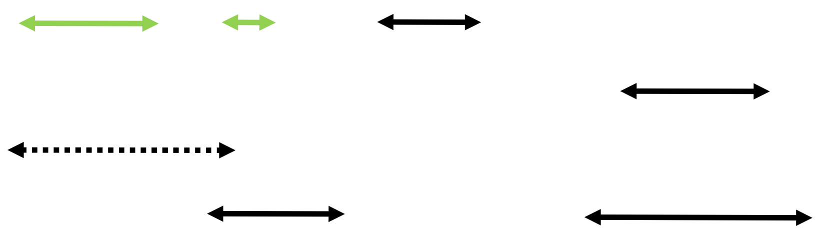
Gierige Algorithmen

Worauf muss man achten?

- Ressource muss möglichst früh wieder frei werden!

Neue Strategie

- Nimm die Anfrage, die am frühesten fertig ist.



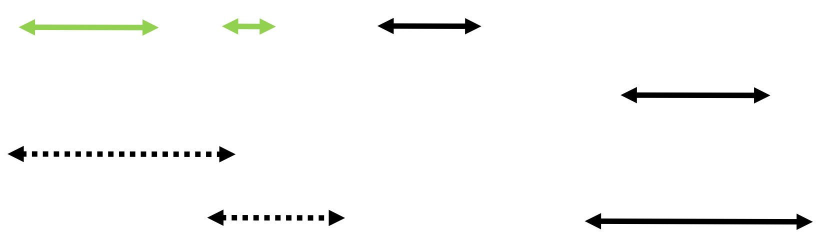
Gierige Algorithmen

Worauf muss man achten?

- Ressource muss möglichst früh wieder frei werden!

Neue Strategie

- Nimm die Anfrage, die am frühesten fertig ist.



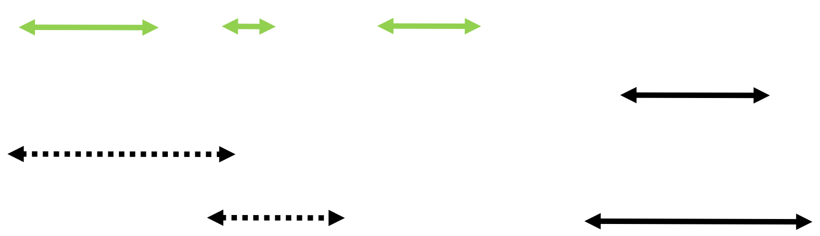
Gierige Algorithmen

Worauf muss man achten?

- Ressource muss möglichst früh wieder frei werden!

Neue Strategie

- Nimm die Anfrage, die am frühesten fertig ist.



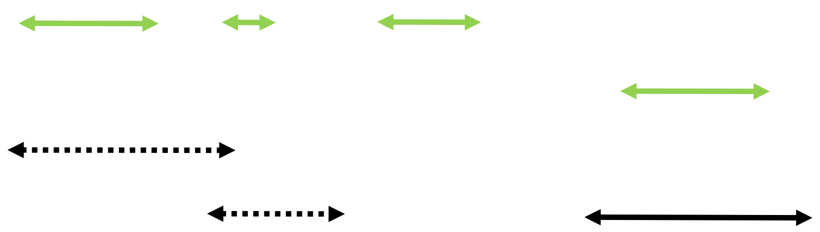
Gierige Algorithmen

Worauf muss man achten?

- Ressource muss möglichst früh wieder frei werden!

Neue Strategie

- Nimm die Anfrage, die am frühesten fertig ist.



Gierige Algorithmen

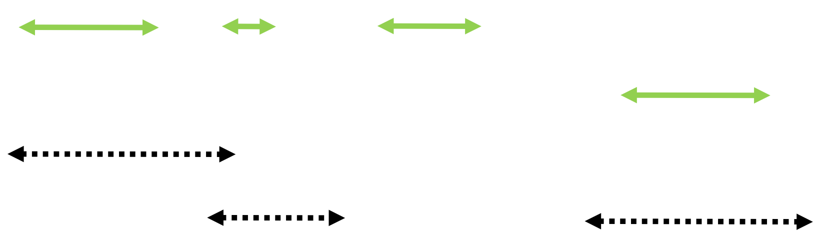
Worauf muss man achten?

- Ressource muss möglichst früh wieder frei werden!

Neue Strategie

- Nimm die Anfrage, die am frühesten fertig ist.

Diese Strategie ist optimal!
Aber wie beweist man das?



Gierige Algorithmen

Formale Problemformulierung:

- Problem: Interval Scheduling
- Eingabe: Felder s und f, die die Intervalle $(s[i], f[i])$ beschreiben
- Aufgabe: Finde maximale Menge von paarweise kompatiblen Intervallen
- Ausgabe: Indizes der ausgewählten Intervalle

Wichtige Annahme:

- Eingabe nach Intervallendpunkten sortiert, d.h.
- $f[1] \leq f[2] \leq \cdots \leq f[n]$

Gierige Algorithmen

IntervalScheduling(s, f)

$n \leftarrow \text{length}[s]$

$A \leftarrow \{1\}$

$j \leftarrow 1$

for $i \leftarrow 2$ **to** n **do**

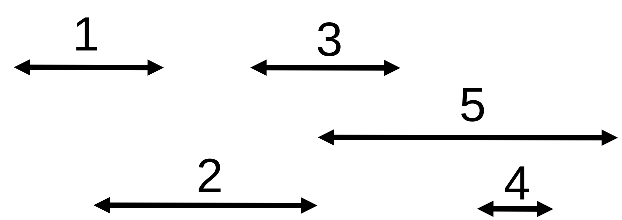
  if $s[i] \geq f[j]$ **then**

    $A \leftarrow A \cup \{i\}$

    $j \leftarrow i$

return A

s	1	2	4	7	5
f	3	5	6	8	9

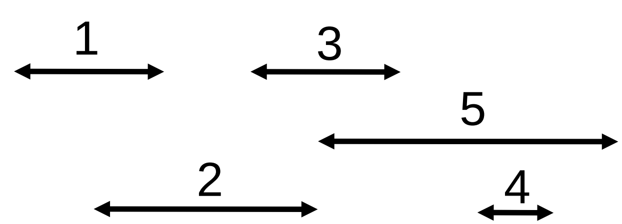


Gierige Algorithmen

IntervalScheduling(s, f)

$\boxed{n \leftarrow \text{length}[s]}$
$A \leftarrow \{1\}$
$j \leftarrow 1$
for $i \leftarrow 2$ **to** n **do**
  if $s[i] \geq f[j]$ **then**
    $A \leftarrow A \cup \{i\}$
    $j \leftarrow i$
return A

s	1	2	4	7	5
f	3	5	6	8	9

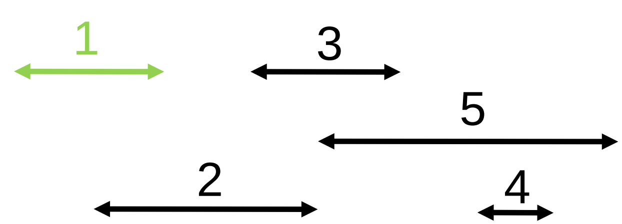


Gierige Algorithmen

IntervalScheduling(s, f)

```
n ← length[s]
A ← {1}
j ← 1
for i ← 2 to n do
    if s[i] ≥ f[j] then
        A ← A ∪ {i}
        j ← i
return A
```

s	1	2	4	7	5
f	3	5	6	8	9

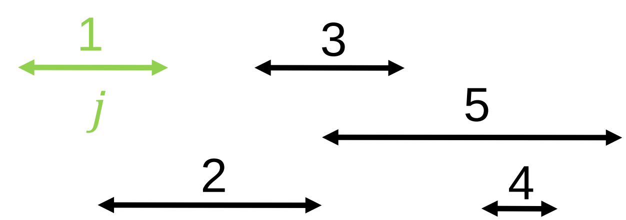


Gierige Algorithmen

$\text{IntervalScheduling}(s, f)$

1. $n \leftarrow \text{length}[s]$
2. $A \leftarrow \{1\}$
3. $\boxed{j \leftarrow 1}$
4. $\textbf{for } i \leftarrow 2 \textbf{ to } n \textbf{ do}$
5. $\quad \textbf{if } s[i] \geq f[j] \textbf{ then}$
6. $\quad\quad A \leftarrow A \cup \{i\}$
7. $\quad\quad j \leftarrow i$
8. $\textbf{return } A$

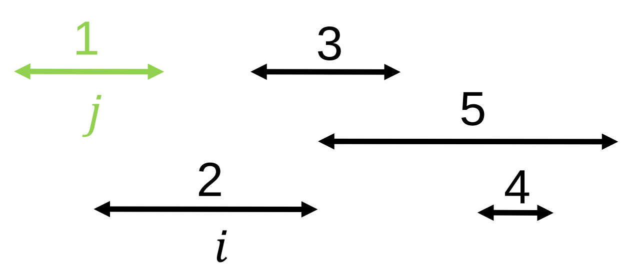
s	1	2	4	7	5
f	3	5	6	8	9



Gierige Algorithmen

s	1	2	4	7	5
f	3	5	6	8	9

```
IntervalScheduling(s, f)
n ← length[s]
A ← {1}
j ← 1
for i ← 2 to n do
    if s[i] ≥ f[j] then
        A ← A ∪ {i}
        j ← i
return A
```

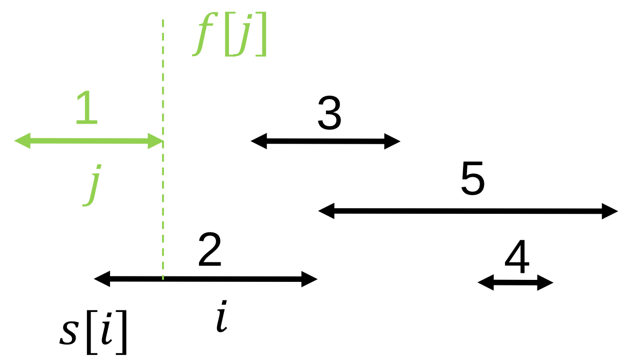


Gierige Algorithmen

IntervalScheduling(s, f)

$n \leftarrow \text{length}[s]$
$A \leftarrow \{1\}$
$j \leftarrow 1$
for $i \leftarrow 2$ **to** n **do**
  $\boxed{\textbf{if } s[i] \geq f[j] \textbf{ then}}$
    $A \leftarrow A \cup \{i\}$
    $j \leftarrow i$
return A

s	1	2	4	7	5
f	3	5	6	8	9

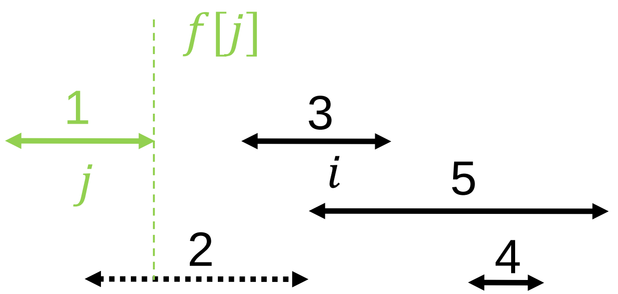


Gierige Algorithmen

IntervalScheduling(s, f)

1. $n \leftarrow \text{length}[s]$
2. $A \leftarrow \{1\}$
3. $j \leftarrow 1$
4. **for** $i \leftarrow 2$ **to** n **do**
5. $\quad$ $\boxed{\textbf{if } s[i] \geq f[j] \textbf{ then}}$
6. $\quad\quad A \leftarrow A \cup \{i\}$
7. $\quad\quad j \leftarrow i$
8. **return** A

s	1	2	4	7	5
f	3	5	6	8	9

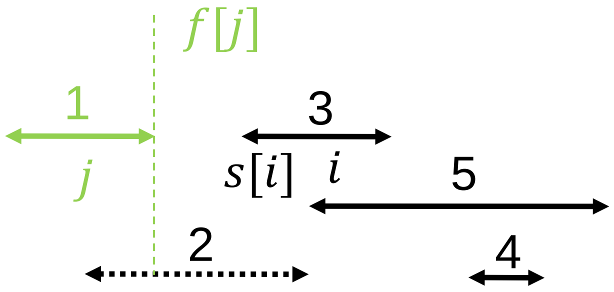


Gierige Algorithmen

s	1	2	4	7	5
f	3	5	6	8	9

IntervalScheduling(s, f)

1. $n \leftarrow \text{length}[s]$
2. $A \leftarrow \{1\}$
3. $j \leftarrow 1$
4. **for** $i \leftarrow 2$ **to** n **do**
5. $\boxed{\textbf{if } s[i] \geq f[j] \textbf{ then}}$
6. $A \leftarrow A \cup \{i\}$
7. $j \leftarrow i$
8. **return** A



Gierige Algorithmen

$\text{IntervalScheduling}(s, f)$

$n \leftarrow \text{length}[s]$

$A \leftarrow \{1\}$

$j \leftarrow 1$

for $i \leftarrow 2$ **to** n **do**

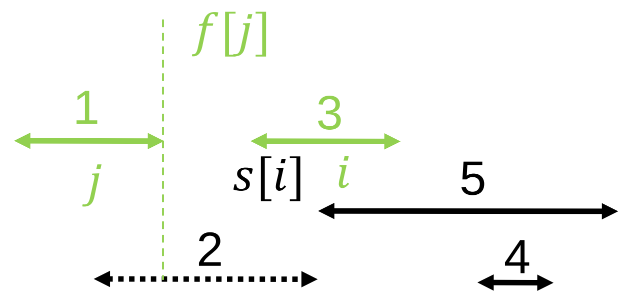
  if $s[i] \geq f[j]$ **then**

    $\boxed{A \leftarrow A \cup \{i\}}$

    $j \leftarrow i$

return A

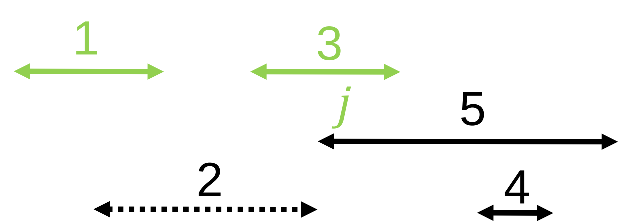
s	1	2	4	7	5
f	3	5	6	8	9



Gierige Algorithmen

```
IntervalScheduling(s, f)
    n ← length[s]
    A ← {1}
    j ← 1
    for i ← 2 to n do
        if s[i] ≥ f[j] then
            A ← A ∪ {i}
            j ← i
    return A
```

s	1	2	4	7	5
f	3	5	6	8	9

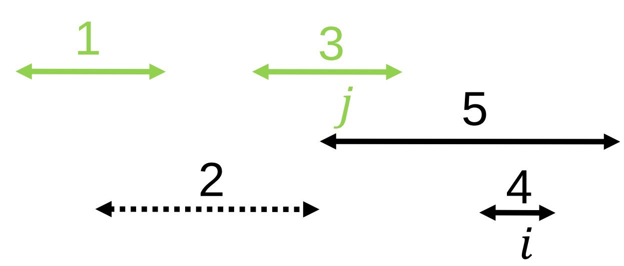


Gierige Algorithmen

IntervalScheduling(s, f)

1. $n \leftarrow \text{length}[s]$
2. $A \leftarrow \{1\}$
3. $j \leftarrow 1$
4. $\boxed{\textbf{for } i \leftarrow 2 \textbf{ to } n \textbf{ do}}$
5. $\quad$ **if** $s[i] \geq f[j]$ **then**
6. $\quad\quad A \leftarrow A \cup \{i\}$
7. $\quad\quad j \leftarrow i$
8. **return** A

s	1	2	4	7	5
f	3	5	6	8	9

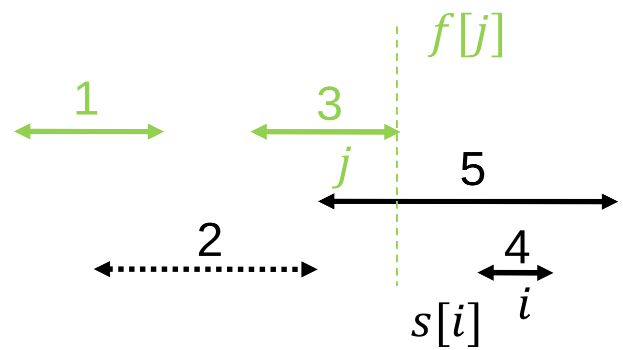


Gierige Algorithmen

s	1	2	4	7	5
f	3	5	6	8	9

IntervalScheduling(s, f)

1. $n \leftarrow \text{length}[s]$
2. $A \leftarrow \{1\}$
3. $j \leftarrow 1$
4. **for** $i \leftarrow 2$ **to** n **do**
5. **if** $s[i] \geq f[j]$ **then**
6. $A \leftarrow A \cup \{i\}$
7. $j \leftarrow i$
8. **return** A



Gierige Algorithmen

$\text{IntervalScheduling}(s, f)$

$n \leftarrow \text{length}[s]$

$A \leftarrow \{1\}$

$j \leftarrow 1$

for $i \leftarrow 2$ **to** n **do**

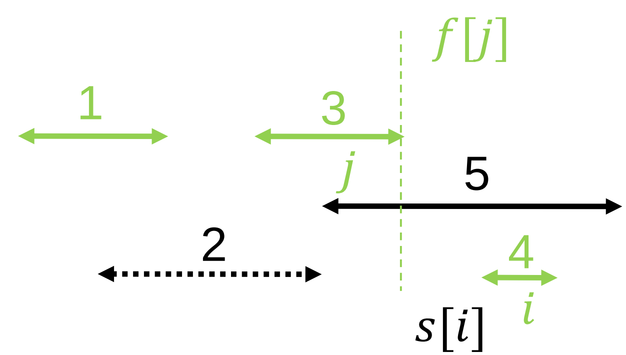
  if $s[i] \geq f[j]$ **then**

    $\boxed{A \leftarrow A \cup \{i\}}$

    $j \leftarrow i$

return A

s	1	2	4	7	5
f	3	5	6	8	9



Gierige Algorithmen

IntervalScheduling(s, f)

$n \leftarrow \text{length}[s]$

$A \leftarrow \{1\}$

$j \leftarrow 1$

for $i \leftarrow 2$ **to** n **do**

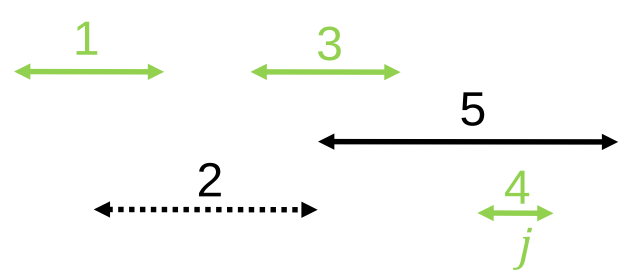
  if $s[i] \geq f[j]$ **then**

    $A \leftarrow A \cup \{i\}$

    $\boxed{j \leftarrow i}$

return A

s	1	2	4	7	5
f	3	5	6	8	9

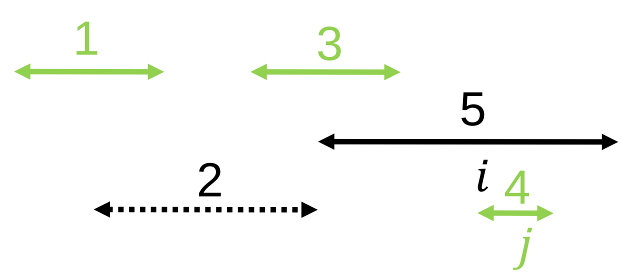


Gierige Algorithmen

IntervalScheduling(s, f)

$n \leftarrow \text{length}[s]$
$A \leftarrow \{1\}$
$j \leftarrow 1$
$\boxed{\textbf{for } i \leftarrow 2 \textbf{ to } n \textbf{ do}}$
    $\textbf{if } s[i] \geq f[j] \textbf{ then}$
        $A \leftarrow A \cup \{i\}$
        $j \leftarrow i$
$\textbf{return } A$

s	1	2	4	7	5
f	3	5	6	8	9



Gierige Algorithmen

$\text{IntervalScheduling}(s, f)$

$n \leftarrow \text{length}[s]$

$A \leftarrow \{1\}$

$j \leftarrow 1$

for $i \leftarrow 2$ **to** n **do**

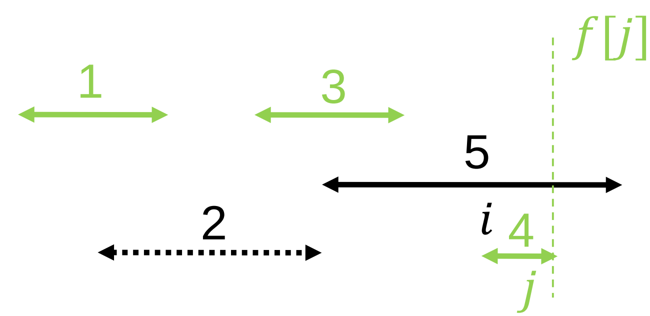
  $\boxed{\textbf{if } s[i] \geq f[j] \textbf{ then}}$

    $A \leftarrow A \cup \{i\}$

    $j \leftarrow i$

return A

s	1	2	4	7	5
f	3	5	6	8	9

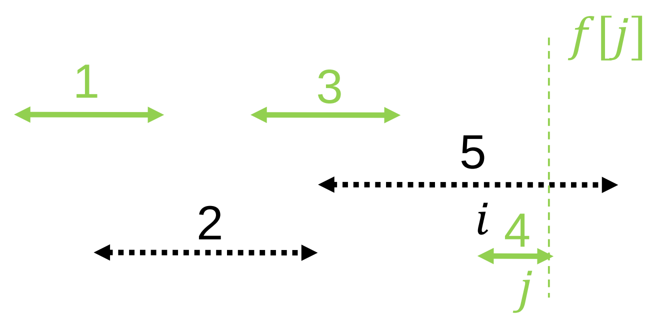


Gierige Algorithmen

IntervalScheduling(s, f)

```
n ← length[s]
A ← {1}
j ← 1
for i ← 2 to n do
    if s[i] ≥ f[j] then
        A ← A ∪ {i}
        j ← i
return A
```

s	1	2	4	7	5
f	3	5	6	8	9

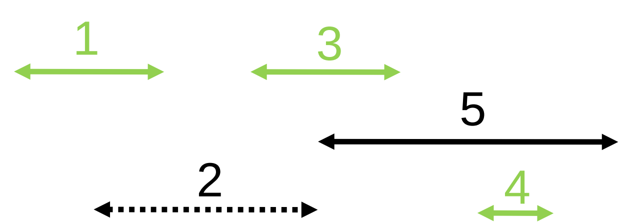


Gierige Algorithmen

IntervalScheduling(s, f)

1. $n \leftarrow \text{length}[s]$
2. $A \leftarrow \{1\}$
3. $j \leftarrow 1$
4. **for** $i \leftarrow 2$ **to** n **do**
5.   **if** $s[i] \geq f[j]$ **then**
6. $A \leftarrow A \cup \{i\}$
7. $j \leftarrow i$
8. $\boxed{\textbf{return } A}$

s	1	2	4	7	5
f	3	5	6	8	9



Gierige Algorithmen

Beweisidee: Der gierige Algorithmus „liegt vorn“

- Wir vergleichen eine optimale Lösung mit der Lösung des gierigen Algorithmen zu verschiedenen Zeitpunkten
- Wir zeigen: Die Lösung des gierigen Algorithmus ist bzgl. eines bestimmten Kriteriums mindestens genauso gut wie die optimale Lösung

Vergleichzeitpunkte

- Nach jedem Hinzufügen eines Intervalls zur aktuellen Lösung

Vergleichskriterium

- Maximaler Endzeitpunkt der bisher ausgewählten Anfragen

Gierige Algorithmen

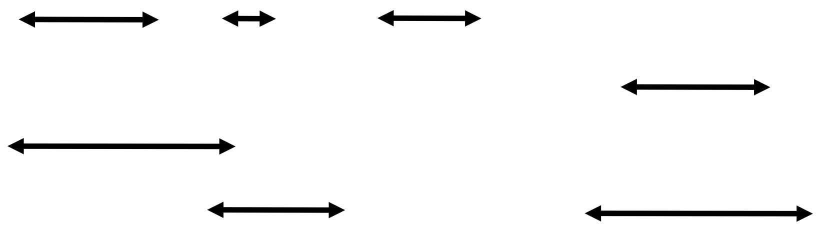
Erste Beobachtung

- A ist eine Menge von kompatiblen Anfragen.

Gierige Algorithmen

Wie können wir Optimalität zeigen?

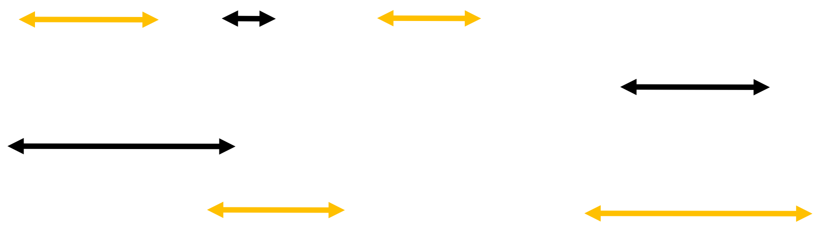
- Sei O eine optimale Menge von Intervallen
- u. U. viele optimale Lösungen
- Wir zeigen: $|A| = |O|$



Gierige Algorithmen

Wie können wir Optimalität zeigen?

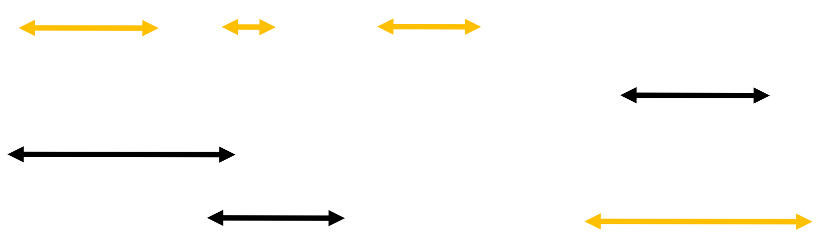
- Sei O eine optimale Menge von Intervallen
- u. U. viele optimale Lösungen
- Wir zeigen: $|A| = |O|$



Gierige Algorithmen

Wie können wir Optimalität zeigen?

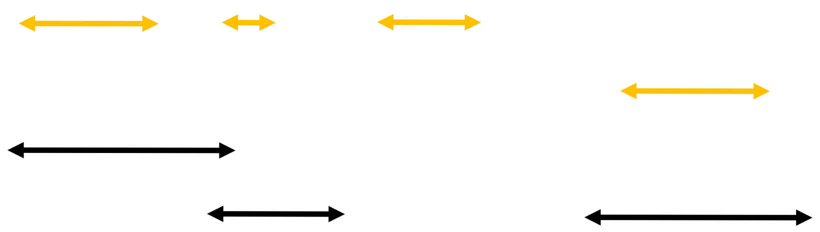
- Sei O eine optimale Menge von Intervallen
- u. U. viele optimale Lösungen
- Wir zeigen: $|A| = |O|$



Gierige Algorithmen

Wie können wir Optimalität zeigen?

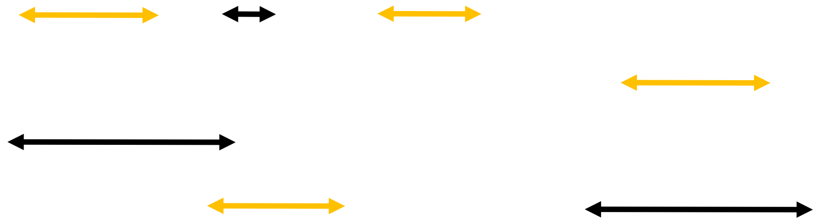
- Sei O eine optimale Menge von Intervallen
- u. U. viele optimale Lösungen
- Wir zeigen: $|A| = |O|$



Gierige Algorithmen

Wie können wir Optimalität zeigen?

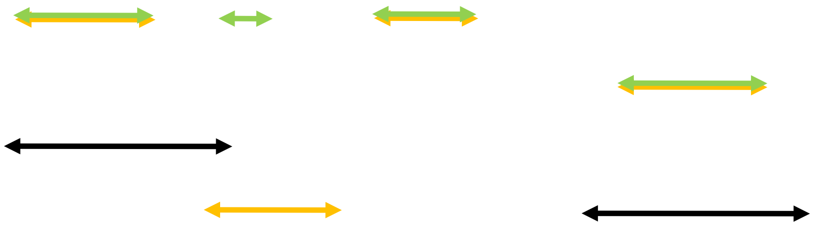
- Sei O eine optimale Menge von Intervallen
- u. U. viele optimale Lösungen
- Wir zeigen: $|A| = |O|$



Gierige Algorithmen

Wie können wir Optimalität zeigen?

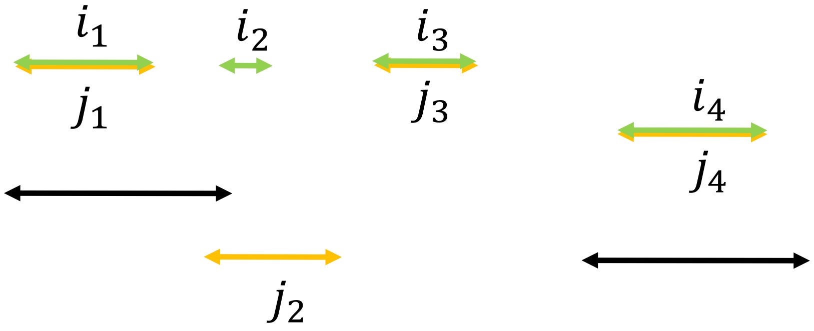
- Sei O eine optimale Menge von Intervallen
- u. U. viele optimale Lösungen
- Wir zeigen: $|A| = |O|$



Gierige Algorithmen

Notation

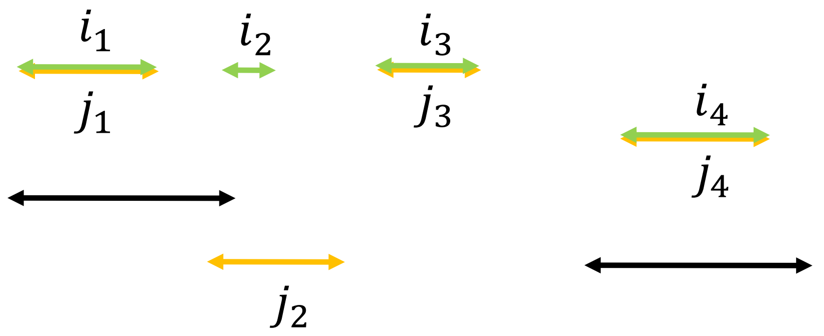
- $i_1, \ldots, i_k$ Intervalle von A in Ordnung des Hinzufügen
- $j_1, \ldots, j_m$ Intervalle von O sortiert nach Endpunkt
- Zu zeigen: $k = m$



Gierige Algorithmen

Der gierige Algorithmus liegt vorn

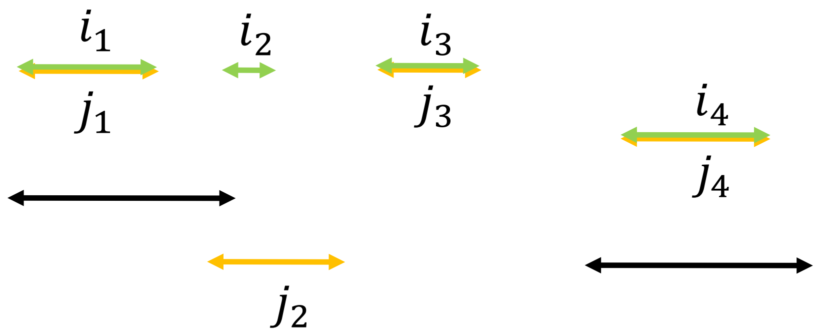
- Idee des Algorithmus: Die Ressource soll so früh wie möglich wieder frei werden
- Dies ist wahr für das erste Interval: $f[i_1] \leq f[j_1]$
- Zu zeigen: Gilt für alle Intervalle



Gierige Algorithmen

Lemma 15

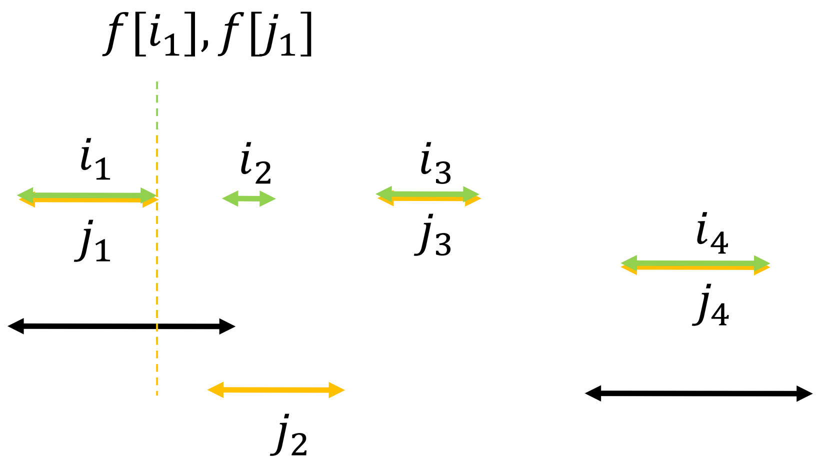
Für alle $r \leq k$ gilt $f[i_r] \leq f[j_r]$.



Gierige Algorithmen

Lemma 15

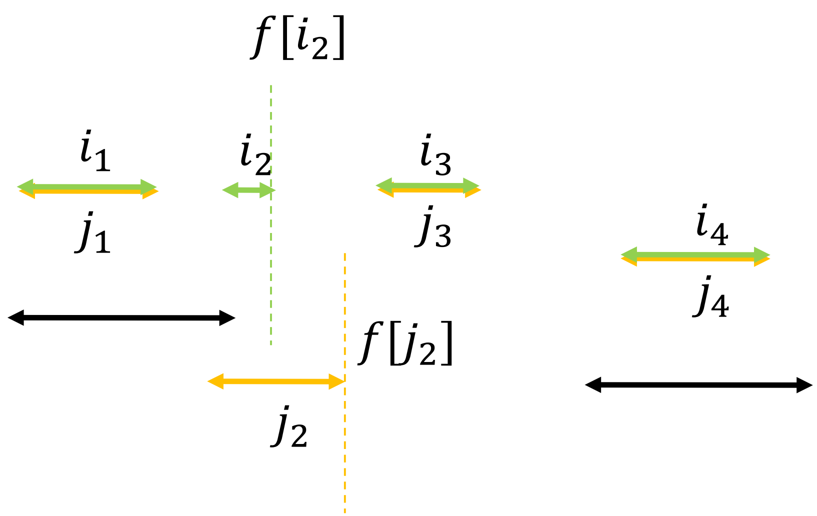
Für alle $r \leq k$ gilt $f[i_r] \leq f[j_r]$.



Gierige Algorithmen

Lemma 15

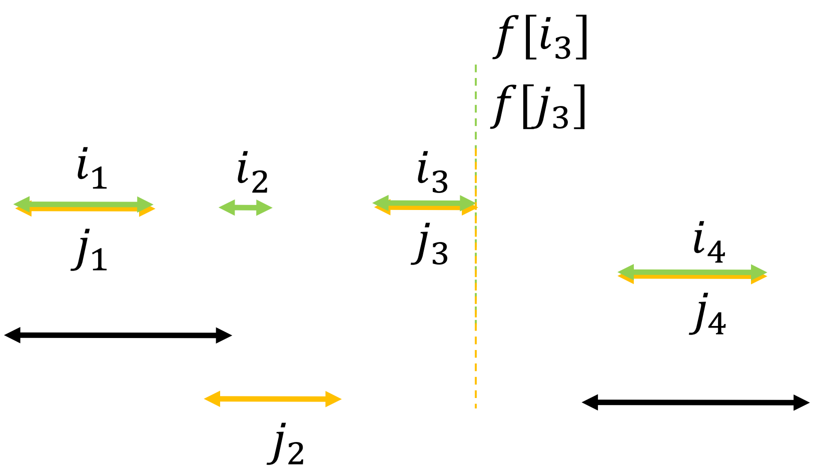
Für alle $r \leq k$ gilt $f[i_r] \leq f[j_r]$.



Gierige Algorithmen

Lemma 15

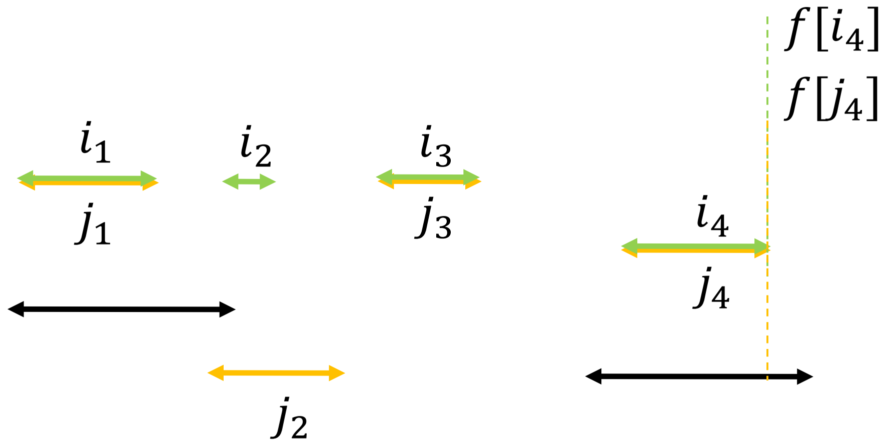
Für alle $r \leq k$ gilt $f[i_r] \leq f[j_r]$.



Gierige Algorithmen

Lemma 15

Für alle $r \leq k$ gilt $f[i_r] \leq f[j_r]$.



Gierige Algorithmen

Lemma 15

Für alle $r \leq k$ gilt $f[i_r] \leq f[j_r]$.

Beweis

Induktion über r.

(I.A.) Für $r = 1$ ist die Aussage offensichtlich korrekt.

(I.V.) Die Aussage gelte für $r - 1$.

Gierige Algorithmen

Lemma 15

Für alle $r \leq k$ gilt $f[i_r] \leq f[j_r]$.

Beweis

Induktion über r.

(I.A.) Für $r = 1$ ist die Aussage offensichtlich korrekt.

(I.V.) Die Aussage gelte für $r - 1$.

(I.S.) Nach (I.V.) gilt $f[i_{r-1}] \leq f[j_{r-1}]$. Da die Intervalle in O kompatibel sind, gilt $f[j_{r-1}] \leq s[j_r]$ und somit auch $f[i_{r-1}] \leq s[j_r]$.

Gierige Algorithmen

Lemma 15

Für alle $r \leq k$ gilt $f[i_r] \leq f[j_r]$.

Beweis

Induktion über r.

(I.A.) Für $r = 1$ ist die Aussage offensichtlich korrekt.

(I.V.) Die Aussage gelte für $r - 1$.

(I.S.) Nach (I.V.) gilt $f[i_{r-1}] \leq f[j_{r-1}]$. Da die Intervalle in O kompatibel sind, gilt $f[j_{r-1}] \leq s[j_r]$ und somit auch $f[i_{r-1}] \leq s[j_r]$.

Damit ist j_r in der Menge der Intervalle, die mit den ersten $r - 1$ Intervallen kompatibel sind, die IntervalScheduling ausgewählt hat.

Gierige Algorithmen

Lemma 15

Für alle $r \leq k$ gilt $f[i_r] \leq f[j_r]$.

Beweis

Induktion über r.

(I.A.) Für $r = 1$ ist die Aussage offensichtlich korrekt.

(I.V.) Die Aussage gelte für $r - 1$.

(I.S.) Nach (I.V.) gilt $f[i_{r-1}] \leq f[j_{r-1}]$. Da die Intervalle in O kompatibel sind, gilt $f[j_{r-1}] \leq s[j_r]$ und somit auch $f[i_{r-1}] \leq s[j_r]$.

Damit ist j_r in der Menge der Intervalle, die mit den ersten $r - 1$ Intervallen kompatibel sind, die IntervalScheduling ausgewählt hat.

Da der Algorithmus das Interval mit kleinstem f-Wert auswählt, gilt $f[i_r] \leq f[j_r]$.

Gierige Algorithmen

Lemma 15

Für alle $r \leq k$ gilt $f[i_r] \leq f[j_r]$.

Beweis

Induktion über r.

(I.A.) Für $r = 1$ ist die Aussage offensichtlich korrekt.

(I.V.) Die Aussage gelte für $r - 1$.

(I.S.) Nach (I.V.) gilt $f[i_{r-1}] \leq f[j_{r-1}]$. Da die Intervalle in O kompatibel sind, gilt $f[j_{r-1}] \leq s[j_r]$ und somit auch $f[i_{r-1}] \leq s[j_r]$.

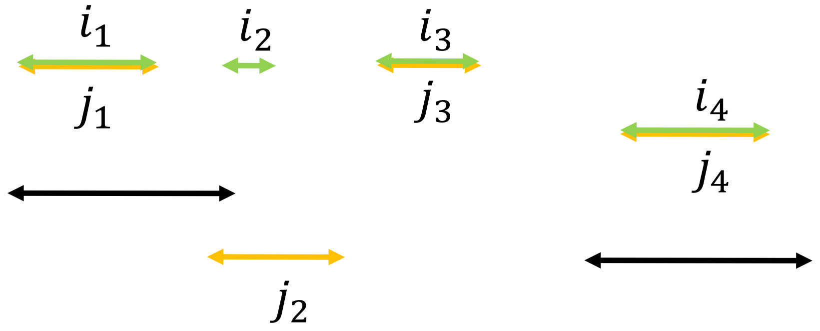
Damit ist j_r in der Menge der Intervalle, die mit den ersten $r - 1$ Intervallen kompatibel sind, die IntervalScheduling ausgewählt hat.

Da der Algorithmus das Interval mit kleinstem f-Wert auswählt, gilt $f[i_r] \leq f[j_r]$.

Gierige Algorithmen

Satz 16

Die von Algorithmus $\text{IntervalScheduling}$ berechnete Lösung A ist optimal.



Gierige Algorithmen

Satz 16

Die von Algorithmus $\text{IntervalScheduling}$ berechnete Lösung A ist optimal.

Beweis (durch Widerspruch)

Ist A nicht optimal, so hat O mehr Anfragen, d.h. es gilt $|O| = m > k = |A|$. Nach unserem Lemma mit $r = k$ gilt $f[i_k] \leq f[j_k]$.

Gierige Algorithmen

Satz 16

Die von Algorithmus $\mathrm{IntervalScheduling}$ berechnete Lösung A ist optimal.

Beweis (durch Widerspruch)

Ist A nicht optimal, so hat O mehr Anfragen, d.h. es gilt $|O| = m > k = |A|$. Nach unserem Lemma mit $r = k$ gilt $f[i_k] \leq f[j_k]$.

Da $m > k$ gibt es eine Anfrage j_{k+1} in O, die startet, nachdem j_k und somit auch i_k endet, d.h. $s[j_{k+1}] \geq f[i_k]$. Außerdem gilt natürlich $f[j_{k+1}] \geq s[j_{k+1}] \geq f[i_k]$.

Gierige Algorithmen

Satz 16

Die von Algorithmus $\mathrm{IntervalScheduling}$ berechnete Lösung A ist optimal.

Beweis (durch Widerspruch)

Ist A nicht optimal, so hat O mehr Anfragen, d.h. es gilt $|O| = m > k = |A|$. Nach unserem Lemma mit $r = k$ gilt $f[i_k] \leq f[j_k]$.

Da $m > k$ gibt es eine Anfrage j_{k+1} in O, die startet, nachdem j_k und somit auch i_k endet, d.h. $s[j_{k+1}] \geq f[i_k]$. Außerdem gilt natürlich $f[j_{k+1}] \geq s[j_{k+1}] \geq f[i_k]$.

Betrachten wir nun den Zeitpunkt, zu dem $\mathrm{IntervalScheduling}$ Interval i_k in A aufnimmt. Da die Intervalle nach Endzeitpunkten sortiert sind, wurde j_{k+1} noch nicht betrachtet.

Gierige Algorithmen

Satz 16

Die von Algorithmus $\mathrm{IntervalScheduling}$ berechnete Lösung A ist optimal.

Beweis (durch Widerspruch)

Ist A nicht optimal, so hat O mehr Anfragen, d.h. es gilt $|O| = m > k = |A|$. Nach unserem Lemma mit $r = k$ gilt $f[i_k] \leq f[j_k]$.

Da $m > k$ gibt es eine Anfrage j_{k+1} in O, die startet, nachdem j_k und somit auch i_k endet, d.h. $s[j_{k+1}] \geq f[i_k]$. Außerdem gilt natürlich $f[j_{k+1}] \geq s[j_{k+1}] \geq f[i_k]$.

Betrachten wir nun den Zeitpunkt, zu dem $\mathrm{IntervalScheduling}$ Interval i_k in A aufnimmt. Da die Intervalle nach Endzeitpunkten sortiert sind, wurde j_{k+1} noch nicht betrachtet.

Da kein weiteres Interval in A aufgenommen wird, muss für alle noch nicht betrachteten Intervalle der Startzeitpunkt vor $f[i_k]$ liegen.

Gierige Algorithmen

Satz 16

Die von Algorithmus $\mathrm{IntervalScheduling}$ berechnete Lösung A ist optimal.

Beweis (durch Widerspruch)

Ist A nicht optimal, so hat O mehr Anfragen, d.h. es gilt $|O| = m > k = |A|$. Nach unserem Lemma mit $r = k$ gilt $f[i_k] \le f[j_k]$.

Da $m > k$ gibt es eine Anfrage j_{k+1} in O, die startet, nachdem j_k und somit auch i_k endet, d.h. $s[j_{k+1}] \ge f[i_k]$. Außerdem gilt natürlich $f[j_{k+1}] \ge s[j_{k+1}] \ge f[i_k]$.

Betrachten wir nun den Zeitpunkt, zu dem $\mathrm{IntervalScheduling}$ Interval i_k in A aufnimmt. Da die Intervalle nach Endzeitpunkten sortiert sind, wurde j_{k+1} noch nicht betrachtet.

Da kein weiteres Interval in A aufgenommen wird, muss für alle noch nicht betrachteten Intervalle der Startzeitpunkt vor $f[i_k]$ liegen.

Widerspruch, denn wir haben bereits gezeigt, dass $s[j_{k+1}] \ge f[i_k]$ gilt.

Gierige Algorithmen

Satz 16

Die von Algorithmus $\mathrm{IntervalScheduling}$ berechnete Lösung A ist optimal.

Beweis (durch Widerspruch)

Ist A nicht optimal, so hat O mehr Anfragen, d.h. es gilt $|O| = m > k = |A|$. Nach unserem Lemma mit $r = k$ gilt $f[i_k] \leq f[j_k]$.

Da $m > k$ gibt es eine Anfrage j_{k+1} in O, die startet, nachdem j_k und somit auch i_k endet, d.h. $s[j_{k+1}] \geq f[i_k]$. Außerdem gilt natürlich $f[j_{k+1}] \geq s[j_{k+1}] \geq f[i_k]$.

Betrachten wir nun den Zeitpunkt, zu dem $\mathrm{IntervalScheduling}$ Interval i_k in A aufnimmt. Da die Intervalle nach Endzeitpunkten sortiert sind, wurde j_{k+1} noch nicht betrachtet.

Da kein weiteres Interval in A aufgenommen wird, muss für alle noch nicht betrachteten Intervalle der Startzeitpunkt vor $f[i_k]$ liegen.

Widerspruch, denn wir haben bereits gezeigt, dass $s[j_{k+1}] \geq f[i_k]$ gilt.

Gierige Algorithmen

$\text{IntervalScheduling}(s, f)$

$$
\left.\begin{array}{l}
n \leftarrow \text{length}[s] \\
A \leftarrow \{1\} \\
j \leftarrow 1
\end{array}\right\} \boldsymbol{\Theta}(1)
$$

$$
\left.\begin{array}{l}
\textbf{for } i \leftarrow 2 \textbf{ to } n \textbf{ do} \\
\quad \textbf{if } s[i] \geq f[j] \textbf{ then} \\
\quad\quad A \leftarrow A \cup \{i\} \\
\quad\quad j \leftarrow i
\end{array}\right\} \boldsymbol{\Theta}(n)
$$

$$
\left.\begin{array}{l}
\textbf{return } A
\end{array}\right\} \boldsymbol{\Theta}(1)
$$

$$\boldsymbol{\Theta}(n)$$

Gierige Algorithmen

Satz 17

Algorithmus $\mathrm{IntervalScheduling}$ berechnet in $\mathbf{\Theta}(n)$ Zeit eine optimale Lösung, wenn die Eingabe nach Endzeit der Intervalle (rechter Endpunkt) sortiert ist. Die Sortierung kann in $\mathbf{\Theta}(n \log n)$ Zeit berechnet werden.