Christine Dahn, Andrej Dudenhefner, Marc Jasper, Roman Kalkreuth, Philipp Oberdiek, Dimitri Scheftelowitsch, Christiane Spisla

Sommersemester 2018

Mathematik für Informatiker 2
Übungsblatt 10

Abgabefrist: 18.06.2018, 12:15 Uhr **Block:** 2

Zur Abgabe der Bearbeitungen stehen den Teilnehmern von „Mathematik für Informatiker II“ die **Briefkästen 32–41** im ersten Obergeschoss der Otto-Hahn-Straße 12 zur Verfügung. Die den einzelnen Gruppen zugeteilten Briefkästen sind durch den Namen der Veranstaltung, die Gruppennummer sowie Zeit und Ort der Übung gekennzeichnet.

Bitte werfen Sie Ihre Abgabe in den Ihrer Gruppe zugeteilten Briefkasten bis zur Abgabefrist ein.

Schreiben Sie unbedingt immer Ihren **vollständigen Namen**, Ihre **Matrikelnummer** und Ihre **Gruppennummer** auf Ihre Abgabe!

Aufgabe 10.1 *Quiz* (1+1+1+1 Punkte)

Welche der folgenden Aussagen sind richtig und welche falsch? Begründen Sie Ihre Antwort.

1. Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion, $a \in \mathbb{R}$ und $T_0[f,a](x)$ das 0. Taylorpolynom von f an der Stelle a. Es gibt ein $c \in \mathbb{R}, c \neq a$, sodass $T_0[f,a](c) = f(a)$.
2. Für $\alpha, g, v \in \mathbb{R}_{>0}$ erfüllt die Funktion
$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ mit } f(t) = \frac{-g}{\alpha}t + \frac{1}{\alpha}\left(v + \frac{g}{\alpha}\right)(1 - \exp(-\alpha t))$$
den Zusammenhang $f''(t) = -g - \alpha f'(t)$.
3. Die $n+1$-te Stelle x_{n+1} im Newton-Verfahren berechnet sich aus x_n durch $x_{n+1} = x_n - \frac{f'(x_n)}{f(x_n)}$.
4. Eine Funktion f ist genau dann Riemann-integrierbar auf dem Intervall $[a,b]$, wenn die Grenzwerte $\lim_{n\to\infty} s(Z_n)$ und $\lim_{n\to\infty} S(Z_n)$ der Unter- und Obersummen s bzw. S der Zerlegungen $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existieren.

Aufgabe 10.2 *Taylorreihe* (1+1+2 Punkte)

Sei $f\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ gegeben.

1. Bestimmen Sie für jedes $n \in \mathbb{N}$ die n-te Ableitung $f^{(n)}$ von f und beweisen Sie die Richtigkeit Ihrer Aussage mit vollständiger Induktion.
2. Entwickeln Sie die Taylor-Reihe $T[f,a](x)$ für f an der Stelle $a = 1$.
3. Zeigen Sie, dass für $x \in (0,2)$ die Reihe $T[f,1](x)$ konvergiert.

Aufgabe 10.3 *Riemann-Integral* (2+2 Punkte)

Es sei die Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2$ sowie für $n \in \mathbb{N}$ die äquidistante Zerlegung $Z_n = (x_0, \ldots, x_n)$ des Intervalls $[0,1]$ mit $x_i = \frac{i}{n}$ für $i = 0, 1, \ldots, n$ gegeben.

1. Zeigen Sie, dass für die Ober- und Untersumme der Funktion f gilt: $S(Z_n) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}$ und $s(Z_n) = \frac{1}{3} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}$.

   Hinweis: $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6} \cdot n(n+1)(2n+1)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

2. Zeigen Sie unter Ausnutzung von Aufgabenteil 1 und Satz 8.8, dass f Riemann-integrierbar ist und berechnen Sie das Integral $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

Aufgabe 10.4 *Konvexität und Lösung von Gleichungen* (2+2 Punkte)

Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 3x^4 + x^3 - 3x + 1$.

1. Bestimmen Sie, auf welchen Intervallen f konvex und auf welchen Intervallen f konkav ist.

2. Führen Sie, startend von der Stelle $x_0 = 0$, zwei Iterationen des Newton-Verfahrens durch. Zur Vereinfachung der Rechnung verwenden Sie Zahlen ausschließlich in Bruchdarstellung.