DAP2 – Zusätzliches Vorlesungsmaterial 1

Vorlesungstermin: 12.04.2018

Einheit 1.1: O-Notation

1. $10n \in O(n)$

   Beweis: Zu zeigen: es gibt Konstanten $c, n_0 > 0$, sodass für alle $n \geq n_0$ es

   $$10n \leq c \cdot n$$

   gilt. Wähle $n_0 = 1$ und $c = 10$. Dann ist $10n \leq 10n$ für alle $n \geq n_0$ erfüllt. □

2. $n^2 \notin O(1000n)$

   Beweis:
   Zu zeigen: für jede Konstante c und n_0 gibt es ein $n \geq n_0$, sodass

   $$n^2 > c \cdot 1000 \cdot n$$

   ist. Seien also c und n_0 beliebige positive Konstanten. Wähle $n = \max\{(c+1) \cdot 1000, n_0\}$. Es gelten dann $n \geq n_0$ und

   $$n^2 \geq \max\{(c+1) \cdot 1000, n_0\} \cdot n \geq (c+1) \cdot 1000 \cdot n > c \cdot 1000 \cdot n.$$

   Somit folgt $n^2 \notin O(1000n)$. □

3. $O(1000n) = O(n)$

   Beweis:
   Zu zeigen: $g(n) \in O(1000n) \Leftrightarrow g(n) \in O(n)$

   "$\Rightarrow$" Sei $g(n) \in O(1000n)$. Dann gibt es $c, n_0 > 0$, sodass für alle $n \geq n_0$ es $g(n) \leq c \cdot 1000n$ gilt. Setze nun $c' = 1000c$. Dann gilt es für alle $n \geq n_0$ auch

   $$g(n) \leq c' \cdot n.$$

   Also ist $g(n) \in O(n)$.

   "$\Leftarrow$" Sei $g(n) \in O(n)$. Dann gibt es $c, n_0 > 0$, sodass für alle $n \geq n_0$ es $g(n) \leq c \cdot n$ gilt. Damit gilt insbesonders auch $g(n) \leq c \cdot 1000n$. Somit ist $g(n) \in O(1000n)$.

   □

4. Für allen Konstanten $c > 0$ und $\varepsilon > 0$ gilt:

$$O(\log^c n) \subseteq O(n^\varepsilon).$$

<u>**Beweis:**</u>

Seien $c > 0$, $\varepsilon > 0$ festgewählte Konstanten. Zu zeigen: für alle $g(n) \in O(\log^c n)$ gilt auch $g(n) \in O(n^\varepsilon)$.

Wir zeigen zunächst die folgende Behauptung.

Behauptung: Für jedes $k > 0$, $n > 1$ gilt $\log^k n \leq k^k \cdot n$.

Beweis:

$$\log^k n = \log^k \left(\left(n^{1/k}\right)^k \right) = k^k \cdot \log^k \left(n^{1/k}\right) \leq k^k \cdot \left(n^{1/k}\right)^k = k^k \cdot n$$

(da $\log x \leq x$ für $x \geq 1$ und mit $x = n^{1/k}$).

Sei nun $g(n) \in O(\log^c n)$. Dann gibt es $c', n_0 > 0$, sodass $g(n) \leq c' \cdot \log^c n$ für alle $n \geq n_0$ gilt. Wir zeigen im Folgenden, dass

$$\log^c n \leq \left(\frac{c}{\varepsilon}\right)^c \cdot n^\varepsilon$$

ist. Damit folgt mit $c'' = c' \cdot \left(\frac{c}{\varepsilon}\right)^c$, dass $g(n) \leq c'' \cdot n^\varepsilon$ ist und somit $g(n) \in O(n^\varepsilon)$.

Es bleibt zu zeigen, dass $\log^c n \leq \left(\frac{c}{\varepsilon}\right)^c \cdot n^\varepsilon$ ist. Für $k = \frac{c}{\varepsilon} > 0$ folgt aus unserer Behauptung und der Monotonität der Wurzelfunktion auf $\mathbb{R}^+$

$$\log^c n = (\log^{\frac{c}{\varepsilon}} n)^\varepsilon \leq \left(\left(\frac{c}{\varepsilon}\right)^{\frac{c}{\varepsilon}} \cdot n\right)^\varepsilon = \left(\frac{c}{\varepsilon}\right)^c \cdot n^\varepsilon \quad .$$

$\square$

5. $10n \in \Omega(n)$

<u>**Beweis:**</u>

Zu zeigen: Es gibt $c, n_0 > 0$, sodass für alle $n \geq n_0$ es

$$10n \geq c \cdot n$$

gilt. Wähle $n_0 = 1$ und $c = 1$. Dann ist $10n \geq n$ für alle $n \geq n_0$ erfüllt. $\square$

6. $1000n \notin \Omega(n^2)$

<u>**Beweis:**</u>

Zu zeigen: Für allen Konstanten $c, n_0 > 0$ gibt es eine $n \geq n_0$ mit

$$1000n < c \cdot n^2.$$

Seien also c, n_0 beliebige Konstanten. Wähle

$$n = \max\left\{\frac{1001}{c}, n_0\right\}.$$

Dann gilt $n \geq n_0$ und

$$c \cdot n^2 \geq c \cdot \max\left\{\frac{1001}{c}, n_0\right\} \cdot n \geq c \cdot \frac{1001}{c} \cdot n = 1001n > 1000n.$$

$\square$

7. $f(n) \in \Omega(g(n)) \Leftrightarrow g(n) \in O(f(n))$

<u>**Beweis:**</u>

"$\Rightarrow$" Sei $f(n) \in \Omega(g(n))$. Dann gibt es $c, n_0 > 0$, sodass für alle $n \geq n_0$ gilt

$$f(n) \geq c \cdot g(n)$$

Damit gilt auch

$$g(n) \leq \frac{1}{c} \cdot f(n) = c' \cdot f(n)$$

für alle $n \geq n_0$ mit $c' = \frac{1}{c} > 0$, und somit $g(n) \in O(f(n))$.

"$\Leftarrow$" Sei $g(n) \in O(f(n))$. Dann gibt es $c, n_0 > 0$, sodass für alle $n \geq n_0$ gilt

$$g(n) \leq c \cdot f(n)$$

Damit gilt auch

$$f(n) \geq \frac{1}{c} \cdot g(n) = c' \cdot g(n)$$

für alle $n \geq n_0$ mit $c' = \frac{1}{c} > 0$, und somit $f(n) \in \Omega(g(n))$.

$\square$

8. $n^{1-\sin(\pi n/2)} \notin \Theta(n)$

<u>**Beweis:**</u>

Wenn $f(n) = n^{1-\sin(\pi n/2)} \in \Theta(n)$ wäre, dann wäre $f(n) \in \Omega(n)$ und $f(n) \in O(n)$. Das ist äquivalent zu $\exists c', c'', n_0', n_0'' > 0$, sodass $f(n) \geq c' \cdot n$ und $f(n) \leq c'' \cdot n$ für alle reelle Zahlen $n \geq \max\{n_0', n_0''\}$ ist.

Wir wissen, dass die Funktion $f(n)$ periodisch mit Periode 2π ist, und dass $\sin x \in [-1, 1]$ gilt. Außerdem gilt dass $\sin(\pi n/2) = 1$ ist, wenn $n = 1 \mod 4$ ist, und $\sin(\pi n/2) = -1$, wenn $n = 3 \mod 4$ ist. Damit gilt $f(n) = n^0 = 1$ für alle n mit $n = 1 \mod 4$ und $f(n) = n^2$ für alle n mit $n = 3 \mod 4$.

Seien $c', c'', n_0', n_0'' > 0$ Konstanten definiert wie im ersten Paragraph. Dann gilt $f(n) < c' \cdot n$ für jedes $n \geq n_0$ mit $n = 1 \mod 4$, was ein Widerspruch ist. (Ebenso gilt $f(n) > c'' \cdot n$ für jedes $n \geq \max\{n_0, c''\}$ mit $n = 3 \mod 4$. Dies ist ebenfalls ein Widerspruch.) $\square$

9. $n \in o(n^2)$

<u>**Beweis:**</u> Die Definition von *klein-o-Notation* lautet:

$$o(f(n)) = \{g(n) : (\forall c > 0)\, (\exists n_0 > 0)\, (\forall n \geq n_0) : g(n) < c \cdot f(n)\}.$$

Sei $c > 0$. Wähle $n_0 = \frac{1}{c-1}$. Es gilt für $n \geq n_0 = \frac{1}{c-1}$, dass

$$g(n) = n < c \cdot \frac{1}{c-1} \cdot n \leq c \cdot n^2 = c \cdot f(n),$$

und somit $n \in o(n^2)$. $\square$

10. $n \notin o(n)$

Beweis:

$\neg\,(n \in o(n))$ heißt, dass

$$(\exists c > 0)\,(\forall n_0 > 0)\,(\exists n \geq n_0) : g(n) \geq c \cdot f(n)$$

ist. Wähle $c = 1$. Dann gilt für beliebiges $n_0 > 0$ und $n = n_0$ dass

$$g(n) = n = 1 \cdot n = 1 \cdot f(n)$$

und $n \notin o(n)$ ist. $\square$