Thomas Schwentick
Gaetano Geck Christopher Spinrath

Lehrstuhl 1
Logik in der Informatik

WS 2018/19 **Übungsblatt 5** **03.12.2018**

Abgabe bis spätestens am Montag, 17.12.2018,

- **(vor der Vorlesung) im HG II, HS 3, oder**
- **in die Briefkästen im Durchgangsflur, der die 1. Etage der OH 12 mit dem Erdgeschoss der OH 14 verbindet.**

Beachten Sie die Schließzeiten der Gebäude!

Ansonsten gelten die Hinweise von Blatt 1.

Aufgabe 5.1 [Prädikatenlogische Grundbegriffe] 2 Punkte

Gegeben seien die beiden Formeln

- $\varphi(x) = R(x) \wedge \big(\exists y S(x,y) \rightarrow T(x)\big)$,
- $\psi(x) = R(x) \wedge \exists y\big(S(x,y) \rightarrow T(x)\big)$

und die dazu passende Struktur $\mathcal{A} = (\{1,2\}, R^{\mathcal{A}}, S^{\mathcal{A}}, T^{\mathcal{A}})$ mit den Relationen $R^{\mathcal{A}} = \{2\}$, $T^{\mathcal{A}} = \{1\}$ und Relation $S^{\mathcal{A}} = \{(1,1),(2,1)\}$.

Beurteilen Sie für jede Belegung $\beta : \mathrm{PV} \rightharpoonup \{1,2\}$, ob $(\mathcal{A},\beta) \models \varphi$ und $(\mathcal{A},\beta) \models \psi$ gelten. Zeigen Sie davon ausgehend, dass $\varphi \not\equiv \psi$ ist.

Aufgabe 5.2 [Prädikatenlogische Interpretation und Modellierung] 9 Punkte

In einem Hobby-Projekt arbeitet Hannah mit einigen Freunden an einer Messaging-App. Kontakte und Nachrichten des (einzigen) Nutzers der App werden in einer Datenbank verwaltet, die als Struktur über der Signatur $S = \{K, F, N, S, G\}$ aufgefasst werden kann. Die Relationssymbole werden dabei wie folgt interpretiert.

- *Einstellige Relationssymbole:*
  - K, enthält alle IDs, die *Kontakte* bezeichnen;
  - F, enthält alle IDs, die *Freunde* bezeichnen;
  - N, enthält alle IDs, die *Nachrichten* bezeichnen;
  - S, enthält alle IDs, die *Spam* bezeichnen.
- *Zweistelliges Relationssymbol:*
  G, enthält alle ID-Paare (k,n), für die Kontakt k Nachricht n an den Nutzer *gesendet* hat.

Das Universum umfasst alle Kontakt- und Nachrichten-IDs.

a) Formulieren Sie zu der folgenden Formel zunächst eine formelähnliche Aussage und anschließend eine möglichst prägnante natürlichsprachliche Aussage. **(1 Punkt)**

$$\varphi = \forall x\Big[\forall y\big(G(x,y) \rightarrow S(y)\big) \rightarrow \neg F(x)\Big]$$

b) Beim Debugging ist aufgefallen, dass die Datenbank gelegentlich mit inkonsistenten Daten gefüllt ist. Hannah schlägt vor, einige Konsistenzbedingungen durch prädikatenlogische Formeln zu modellieren, die in einer Testroutine automatisch überprüft werden können.

Helfen Sie dem Team, indem Sie *geschlossene* Formeln für die folgenden Bedingungen angeben.

1. Jede ID bezeichnet einen Kontakt oder eine Nachricht. Keine ID bezeichnet sowohl einen Kontakt als auch eine Nachricht.

2. Ausschließlich Kontakte sind als Freunde verzeichnet und nur Nachrichten werden als Spam markiert. Außerdem beschreibt jedes Paar (k, n) in G einen Kontakt k sowie eine Nachricht n.
3. Jede Nachricht, die von einem Sender stammt, der kein Freund ist und mindestens eine Spam-Nachricht verschickt hat, ist ebenfalls als Spam markiert.
4. Es gibt einen Nutzer, der Nachrichten gesendet hat, jedoch keinen Spam.

(6 Punkte)

c) Die App soll einige Nachrichten direkt in den Papierkorb verschieben. Unterstützen Sie Hannahs Team abermals, indem Sie eine Formel mit einer *freien* Variablen y für die folgende Bedingung angeben: *y repräsentiert die Nachricht eines Absenders, der weder Freund ist noch jemals eine Nachricht gesendet hat, die nicht als Spam markiert wurde.* **(2 Punkte)**

Aufgabe 5.3 [Äquivalenzen und Normalformen] 4 Punkte

a) Bestimmen Sie eine zur Formel φ äquivalente Formel in Pränexnormalform, sodass der quantorenfreie Teil in KNF ist. **(2 Punkte)**

$$\varphi = \neg\Big[\forall x \exists y \big(P(x) \leftrightarrow R(x,y)\big) \vee Q(a)\Big] \wedge \forall x \Big[Q(x) \wedge \exists z \big(R(x,b) \vee R(x,z)\big)\Big]$$

b) Bestimmen Sie eine zur Formel ψ erfüllbarkeitsäquivalente Skolemformel ψ' und anschließend die zu ψ' gehörige Matrixklauselform. **(2 Punkte)**

$$\psi = \exists v \forall x \exists w \forall y \exists z \Big[\big(\neg R(v,y,u) \vee S(z)\big) \wedge T(f(a)) \wedge \big(R(x,w,x) \vee \neg S(x) \vee \neg S(z)\big)\Big]$$

Zusatzaufgabe [Homomorphismen und Erfüllbarkeitsimplikation] 2 Punkte

Die Implikationsrelation $\models$ ist auf der Ebene der Semantik definiert: $\varphi \models \psi$ gilt genau dann, wenn jedes Modell von φ auch ein Modell von ψ ist. Für gewisse Formelmengen lässt sich diese Bedingung auch syntaktisch charakterisieren. Der folgende Satz, ein zentrales Resultat der Datenbanktheorie, greift eine solche Charakterisierung für eine wichtige Klasse prädikatenlogischer Formeln und für einen abgeschwächten Implikationsbegriff (den wir *Erfüllbarkeitsimplikation* nennen) auf. In diesem Fall kann das Problem, die Erfüllbarkeitsimplikation zu entscheiden, auf die Suche nach einem Homomorphismus zurückgeführt werden.

In dieser Aufgabe betrachten wir ausschließlich *einfache* prädikatenlogische Formeln. Eine Formel heißt *einfach*, wenn sie von der Form $\varphi = \varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_m$ ist, wobei jedes Konjunkt φ_i ein Relationsatom ohne Funktions- und Konstantensymbole ist.

Satz

Für je zwei einfache Formeln φ und ψ sind folgenden beiden Aussagen äquivalent.

1. Wenn $(\mathcal{A}, \beta) \models \varphi$ für eine Belegung β gilt,
   dann gibt es auch eine Belegung γ mit $(\mathcal{A}, \gamma) \models \psi$.
2. Es existiert ein Homomorphismus von ψ nach φ.

Ein Homormorphismus von einer einfachen Formel ψ mit Variablen $y_1, \dots, y_n$ nach einer einfachen Formel φ mit Variablen $x_1, \dots, x_m$ ist dabei eine Abbildung h^* mit $h^*(\{\psi_1, \dots, \psi_m\}) \subseteq \{\varphi_1, \dots, \varphi_m\}$, die durch eine Abbildung $h : \{x_1, \dots, x_m\} \to \{y_1, \dots, y_n\}$ wie folgt induziert wird:

- für ein Relationsatom $A = R(z_1, \dots, z_p)$ gilt $h^*(A) = R(h(z_1), \dots, h(z_p))$ und
- für eine Menge $\{A_1, \dots, A_k\}$ von Relationsatomen gilt $h^*(\{A_1, \dots, A_k\}) = \{h^*(A_1), \dots, h^*(A_k)\}$.

Beispiel

Für die einfachen Formeln $\varphi = R(x_1, x_2) \wedge R(x_2, x_1) \wedge S(x_2, x_2)$ und $\psi = R(y_1, y_2) \wedge S(y_1, y_1)$ gibt es einen Homomorphismus von ψ nach φ. Ein solcher Homomorphismus h^* wird etwa durch die Abbildung $h = \{y_1 \mapsto x_2, y_2 \mapsto x_1\}$ induziert, denn es gilt

$$h^*\big(\{R(y_1, y_2), S(y_1, y_1)\}\big) = \{R(x_2, x_1), S(x_2, x_2)\} \subseteq \{R(x_1, x_2), R(x_2, x_1), S(x_2, x_2)\}.$$

a) Gegeben sei die Stuktur $\mathcal{A} = (\{a, b, c\}, R^{\mathcal{A}}, S^{\mathcal{A}})$ mit $R^{\mathcal{A}} = \{(a, b), (b, c), (c, b)\}$ und $S^{\mathcal{A}} = \{(a, b), (b, b)\}$. Gibt es eine Belegung β mit $(\mathcal{A}, \beta) \models \varphi$ und eine Belegung γ mit $(\mathcal{A}, \gamma) \models \psi$ für die Formeln φ und ψ aus dem Beispiel?

b) Beweisen Sie die Implikation (2) $\Longrightarrow$ (1) des Satzes.