technische universität dortmund

Fakultät für Informatik
Lehrstühle 4 und 11

Christine Dahn, Andrej Dudenhefner, Marc Jasper, Roman Kalkreuth, Philipp Oberdiek, Dimitri Scheftelowitsch, Christiane Spisla

Sommersemester 2018

Mathematik für Informatiker 2
Übungsblatt 3

Abgabefrist: 30.04.2018, 12:15 Uhr **Block:** 1

Aufgabe 3.1 *Quiz* (1+1+1+1 Punkte)

Welche der folgenden Aussagen sind richtig und welche falsch? Begründen Sie Ihre Antwort.

1. Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Folge, so ist $(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ebenfalls eine Nullfolge.
2. Um die Divergenz einer Folge zu zeigen, reicht es, die Existenz einer unbeschränkten Teilfolge nachzuweisen.
3. Um die Konvergenz einer Folge zu zeigen, reicht es, zu zeigen, dass alle ihre Teilfolgen beschränkt sind.
4. Eine Folge ist konvergent, falls sie genau einen Häufungspunkt besitzt.

Aufgabe 3.2 *Sandwich-Theorem* (4 Punkte)

Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}, (c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ drei reellwertige Folgen mit $a_n \leq b_n \leq c_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie: wenn $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent sind mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = b \in \mathbb{R}$, dann ist $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent mit $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$.

Aufgabe 3.3 *Konvergenz* (1+2+1 Punkte)

Untersuchen Sie folgende Folgen auf Konvergenz. Bei Konvergenz der Folge bestimmen Sie den Grenzwert.

1. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \frac{1}{n^2}$.
2. $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $b_n = \frac{n!}{2^n}$.
3. $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $c_n = \frac{\ln n}{n^2}$. ***Hinweis:*** Es gilt $\ln n \leq n$ für $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 3.4 *Induktion* (4 Punkte)

Beweisen Sie mit der Technik der vollständigen Induktion folgende Ungleichung.

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} < 2$$

Hinweis: Zeigen Sie zunächst eine stärkere Aussage: $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} \leq 2 - X_n$ (mit $X_n > 0$). Welche Werte von X_n kann man hier günstig wählen, damit die vollständige Induktion funktioniert?