technische universität dortmund

SoSe 2018

M. Buchin
A. Krivošija, D. Mezlaf
L. Pfahler, A. Rey

DAP2 – Heimübung 4

Ausgabedatum: 27.04.2018 — Abgabedatum: Mo. 07.05.2018 bis 12 Uhr

Abgabe:

Schreiben Sie unbedingt immer Ihren vollständigen Namen, Ihre Matrikelnummer und Ihre Gruppennummer auf Ihre Abgaben! Beweise sind nur dort notwendig, wo explizit danach gefragt wird. Eine Begründung der Antwort wird allerdings *immer* verlangt.

Aufgabe 4.1 (6 Punkte): (Rekursionsgleichung)

Gegeben seien die Rekursionsgleichungen:

a)
$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{für } n = 1 \\ 8 \cdot T\left(\frac{n}{2}\right) + n^2\sqrt{n} & \text{für } n > 1 \end{cases}$$

b)
$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{für } n = 1 \\ 3 \cdot T\left(\frac{n}{9}\right) + 4n & \text{für } n > 1 \end{cases}$$

c)
$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{für } n = 1 \\ 16 \cdot T\left(\frac{n}{4}\right) + 2n^2 & \text{für } n > 1 \end{cases}$$

Bestimmen Sie jeweils eine asymptotische obere Schranke für $T(n)$ und beweisen Sie diese mittels vollständiger Induktion. Sie dürfen der Einfachheit halber annehmen, dass n von der Form 2^k, 9^k bzw. 4^k für ein $k \in \mathbb{N}$ ist.

Aufgabe 4.2 (4 Punkte): (Merge-Operation und Schleifeninvariante)

Im Folgenden ist als Pseudocode eine mögliche Realisierung der in der Vorlesung verwendeten Funktion Merge(A, p, q, r) gegeben. Diese Funktion fügt die aufsteigend sortierten Teilarrays $A[p \ldots q]$ und $A[(q+1) \ldots r]$ $(1 \leq p \leq q < r \leq \text{length}[A])$ von A zum sortierten Teilarray $A[p \ldots r]$ zusammen.

```
Merge(A, p, q, r):
1  B ← new Array [1 ... (r − p + 1)]
2  i ← p
3  j ← q + 1
4  k ← 1
5  while k ≤ r − p + 1 do
6      if i ≤ q and (j > r or A[i] ≤ A[j]) then
7          B[k] ← A[i]
8          i ← i + 1
9      else
10         B[k] ← A[j]
11         j ← j + 1
12     k ← k + 1
13 A[p ... r] ← B[1 ... (r − p + 1)]
```

Zeigen Sie die Korrektheit des gegebenen Programms Merge. Formulieren Sie dazu zunächst eine Invariante für die While-Schleife in Zeile 5, und beweisen Sie ihre Korrektheit mittels vollständiger Induktion. Verwenden Sie dann Ihre Invariante, um die Korrektheit des Programms zu folgern. Sie dürfen annehmen, dass die Anweisung in Zeile 13 den Inhalt des Arrays $B[1 \ldots (r-p+1)]$ elementweise korrekt in das Teilarray $A[p \ldots r]$ kopiert.