technische universität dortmund

SoSe 2018

M. Buchin
A. Krivošija, D. Mezlaf
L. Pfahler, A. Rey

DAP2 – Heimübung 3

Ausgabedatum: 20.04.2018 — Abgabedatum: Mo. 30.04.2018 bis 12 Uhr

Abgabe:

Schreiben Sie unbedingt immer Ihren vollständigen Namen, Ihre Matrikelnummer und Ihre Gruppennummer auf Ihre Abgaben! Beweise sind nur dort notwendig, wo explizit danach gefragt wird. Eine Begründung der Antwort wird allerdings *immer* verlangt.

Aufgabe 3.1 (5 Punkte): (Korrektheitsbeweis: Schleifeninvariante und Induktion)

Die Fibonacci-Zahlen sind definiert durch

$$F_n := \begin{cases} 0 & \text{falls } n = 0 \\ 1 & \text{falls } n = 1 \\ F_{n-1} + F_{n-2} & \text{falls } n > 1 \end{cases} .$$

Betrachten Sie den folgenden Algorithmus, der die Eingabevariable n sowie die Variablen a und b verwendet, die natürliche Zahlen speichern können.

FibProduct(**int** n):

1. $a \leftarrow 1$
2. $b \leftarrow 0$
3. **for** $i \leftarrow 1$ **to** n **do**
4. $\quad a \leftarrow a + b$
5. $\quad b \leftarrow a - b$
6. **return** $a \cdot b$

Beweisen Sie, dass der Algorithmus bei Eingabe einer natürlichen Zahl n das Produkt der beiden Fibonacci-Zahlen F_n und F_{n+1} berechnet.

a) Formulieren Sie zunächst für die `for`-Schleife eine Invariante. Beweisen Sie dann die Korrektheit Ihrer Schleifeninvariante.

Lösung: Unsere Schleifeninvariante ist gegeben als $A(i)$: Es gelten $a = F_i$ und $b = F_{i-1}$ vor dem Eintritt in die i-te Iteration der For-Schleife. Wir zeigen durch vollständige Induktion nach der Schleifenvariable i, dass die Invariante $A(i)$ für $1 \leq i \leq n + 1$ gilt.

Induktionsanfang Vor dem ersten Eintritt in die `for`-Schleife der Zeile 3 gilt $a = 1 = F_1$ und $b = 0 = F_0 = F_{1-1}$, also gilt $A(1)$ for der ersten Iteration der `for`-Schleife.

Induktionsvoraussetzung Es sei $i \leq n$ beliebig. Für jedes $i' \leq i$ gilt die Schleifeninvariante $A(i')$ **vor** dem i'-ten Schleifeneintritt.

Induktionsschluss Mit $i \leq n$ erfolgt ein weiterer Schleifendurchlauf. Zu zeigen ist, dass $A(i+1)$ vor dem $(i+1)$-ten Schleifeneintritt, also nach der i-ten Iteration gilt. Nach Induktionsvoraussetzung gilt $A(i)$, d. h. $a = F_i$ und $b = F_{i-1}$, vor dem i-ten Schleifeneintritt. In der i-ten Iteration wird in Zeile 4 der Wert von a auf $a + b = F_i + F_{i-1} = F_{i+1}$ gesetzt. Mit der Anweisung $b \leftarrow a - b$ in Zeile 5 erhält b den Wert $F_{i+1} - F_{i-1} = F_i + F_{i-1} - F_{i-1} = F_i$. Nach der i-ten Iteration und somit vor einem potenziellen $(i+1)$-ten Schleifeneintritt gilt also $A(i+1)$.

b) Zeigen Sie dann die Korrektheit des Programms, d. h., zeigen Sie, dass das Programm bei Eingabe einer natürlichen Zahl n den Wert des Produktes $F_n \cdot F_{n+1}$ ausgibt.

Lösung:

Gemäß unseres Beweises aus Teilaufgabe a) gilt für i mit $1 \leq i \leq n+1$ vor dem i-ten Schleifeneintritt unsere Invariante $A(i)$. **Nach** der n-ten Iteration gilt unsere Invariante $A(n+1)$, also $a = F_{n+1}$ und $b = F_n$.

Die `for`-Schleife wird nach der n-ten Iteration verlassen, also wenn die Laufvariable i den Wert $n+1$ annimmt. Der Wert $a \cdot b = F_{n+1} \cdot F_n$ wird nach Verlassen der Schleife in Zeile 6 zurückgegeben. $\square$

Aufgabe 3.2 (5 Punkte): (Korrektheitsbeweis mit Rekursion)

Betrachten Sie das folgende rekursive Programm, das eine natürliche Zahl $n \geq 1$ erhält.

```
BerechneWas(n):
1 if n=1 then
2     return 16
3 else
4     return 2n + 5 + BerechneWas(n − 1)
```

Stellen Sie eine Behauptung darüber auf, was dieses Programm bei Eingabe einer natürlichen Zahl n berechnet, und beweisen Sie die Korrektheit Ihrer Behauptung mittels vollständiger Induktion.

Lösung:

Behauptung: Das Programm BerechneWas berechnet den Wert $(n+3)^2$, wenn eine natürliche Zahl n eingegeben wird. Wir beweisen diese Aussage durch vollständige Induktion für alle $n \in \mathbb{N}$.

Induktionsanfang Wenn $n = 1$ ist, wird die Bedingung in der Zeile 1 erfüllt. Der Wert 16 wird in der Zeile 2 zurückgegeben. Da $(1 + 3)^2 = 16$ ist, gilt die Behauptung für $n = 1$.

Induktionsvoraussetzung Sei $n \geq 1$ beliebig. Für alle n' mit $1 \leq n' \leq n$ berechnet das Programm den Wert $(n' + 3)^2$.

Induktionsschritt Sei $n \geq 1$ beliebig. Zu zeigen ist, dass das Programm für die Eingabe $n + 1$ den Wert $(n + 1 + 3)^2 = (n + 4)^2$ berechnet. Nach Induktionsvoraussetzung liefert BerechneWas(n) den Wert $(n + 3)^2$. Da n eine natürliche Zahl ist, ist die Eingabe $n + 1$ größer als 1, also wird der Wert $2 \cdot (n+1) + 5 + \text{BerechneWas}(n)$ in der Zeile 4 zurückgegeben. Es gilt

$$\begin{aligned} 2(n+1) + 5 + \text{BerechneWas}(n) &= 2(n+1) + 5 + (n+3)^2 \\ &= 2n + 2 + 5 + n^2 + 6n + 9 \\ &= n^2 + 8n + 16 \\ &= (n+4)^2 \end{aligned}$$

unser Programm gibt also bei Eingabe $n + 1$ den korrekten Wert aus. $\square$