2G19

4.12

X = tid till napp för A, $X \in Exp(a)$

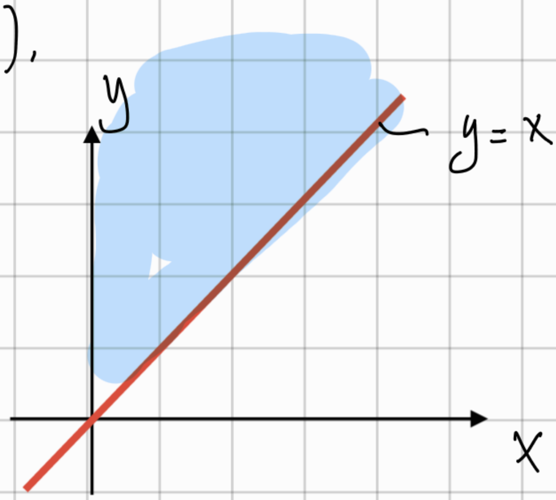
$f_X(x) = ae^{-ax}, \; x \geq 0$

Y = tid till napp för B $\quad Y \in Exp(b)$

$f_Y(y) = be^{-by}$

X o Y är oberoende s.v.

$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$,



P(A vinne) = $P(Y > X)$

$$= \int_0^{\infty}\int_x^{\infty} ae^{-ax} \cdot be^{-by} \, dx\, dy$$

$$= \int_0^{\infty} ae^{-ax}\left[-e^{by}\right]_x^{\infty} dx = \int_0^{\infty} ae^{-ax} e^{-bx} \, dx$$

$$= \int_0^{\infty} a\, e^{-(a+b)x} \, dx = \left[-\frac{a}{a+b} e^{-(a+b)x}\right]_0^{\infty}$$

$$= \frac{a}{a+b}$$

b) $a = 2b$

$P(\text{A vinner}) = \dfrac{2b}{3b} = \dfrac{2}{3}$ ←

$\boxed{4.8}$ X: ankomst tid efter K 12

$X \in U(0, 60)$

$f_X(x) = \dfrac{1}{60}, \quad 0 < x < 60.$

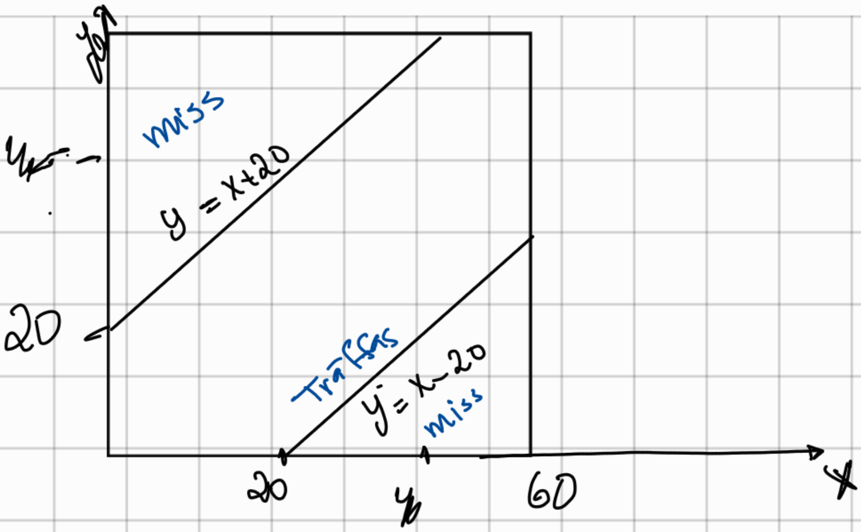
Y: ankomst tid efter

$f_Y(y) = \dfrac{1}{60}$

X och Y är oberoende s.v.

$f(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$

$P(\text{träffas}) = P(|X - Y| < 20) \qquad P(X - 20 < Y < X + 20)$



$$P(\text{inte träffas}) = 1 - \frac{2\cdot\frac{40\cdot 40}{2}}{3600}$$

$$= 1 - \frac{4}{36} = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$$

$$= 1 - 2P(Y < X+20)$$

$$= \underbrace{1 - 2\int_0^{40}\int_0^{x+20} \frac{1}{3600}\, dy\, dx}$$

Kap 4.6 | Finns inte med i Slidesn.

Största och Minsta Värde

$$Z_+ = \max(X_1 ; X_2) = (X_1 \leq z ; X_2 \leq z)$$

X_1, X_2 är oberoende s.v.

$z \in \Omega_z$

Bestäm fördelningsfunktion för Z_+

$$F_{Z_+}(z) = P(Z_+ \leq z) = P(X_1 \leq z ; X_2 \leq z)$$

$$\underbrace{}_{\text{oberoende}} = P(X_1 \leq z)\, P(X_2 \leq z) =$$

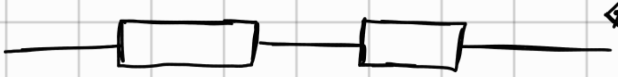
$F_{X_1}(z) \cdot F_{X_2}(z)$.

$Z_- = \min(X_1, X_2) = (X_1 > z, X_2 > z)$

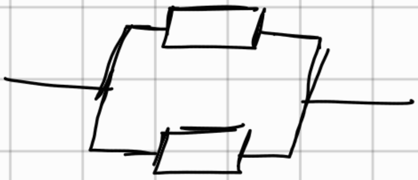
$F_{Z_-}(z) = P(Z_- \leq z) = 1 - P(Z_- > z) = 1 - P(X_1 > z ; X_2 > z)$

$= 1 - P(X_1 > z)(X_2 > z)$

$= 1 - (1 - F_{X_1}(z))(1 - F_{X_2}(z))$.



Min
Livs Längd.



Max
Livs Längd

$\boxed{4.16}$ $X_1, X_2, \ldots X_n$ är oberoend s.v.

med en täthetsfunktion: $f_{X_i}(x) = \lambda_i e^{-\lambda_i x}, x \geq 0$

$X_i \in Exp(\lambda_i)$. $F_{X_i}(x) = 1 e^{-\lambda_i x}, x \geq 0$.

$Z_- = \min(X_1, \ldots X_n)$.

$F_Z(z) = P(Z \leq z) = 1 - P(Z > z)$

$\overset{\text{oberoende}}{=} 1 - P(X_1 > z) \cdots P(X_n > z)$.

$= 1 - e^{-\lambda_1 z} \cdot e^{-\lambda_n z}$

$= 1 - \dfrac{1}{e^{z(\lambda_1 + \lambda_n)}}$

Sätt: $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_n =$

$F_Z(z) = 1 - e^{-\lambda z} \Rightarrow F'_Z(z) = \lambda e^{-\lambda z}$

$z \geq 0$

$Z \in \text{Exp}\left(\sum_1^n \lambda_i\right)$.

$\boxed{4.23}$ $Z = X + Y$ X o Y är oberoende

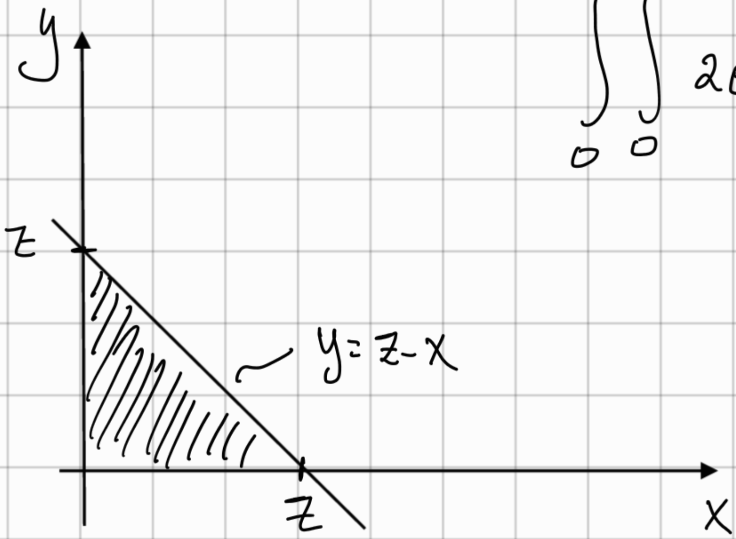
med $f_X(x) = 2e^{-2x}$, $x > 0$

$f_Y(y) = 3e^{-3y}$, $y > 0$

bestäm $f_Z(z)$ $z > 0$

$$F_Z(z) = P(Z \le z) = P(X + Y \le z) = P(Y \le z - X).$$

$$\int_0^z \int_0^{z-x} 2e^{-2x}\, 3e^{-3y}\, dy\, dx$$



$$= \int_0^z 2e^{-2x} \left[-e^{-3y}\right]_0^{z-x} dx$$

$$= \int_0^z 2e^{-2x} \left[1 - e^{-3(z-x)}\right] dx$$

$$= \int_0^z 2e^{-2x} \left(1 - e^{3z} e^{3x}\right) dx$$

$$= \int_0^z 2e^{-2x} - 2e^{3z} e^{x}\, dx$$

$$= \left[-e^{-2x} - 2e^{-3z} e^{x}\right]_0^z$$

$$= 1 - e^{-2z} - 2e^{-2z} + 2e^{-3z}$$

$$= 1 - 3e^{-2z} + 2e^{-3z}.$$

$$F'(z) = f_z(z) = 6e^{-2z} - 6e^{-3z}, \quad z > 0$$

A

~