7/11 def Kretskort

Ex

- X = antal def. i urvalet
- $X \in Hy(N; n; p)$

$N = 800000$

$n = 16000$

Stickprovet gav $x = 168$

Skattning av p

$$p^*_{OBS} = \frac{168}{16000} = 0{,}0105$$

- $p^* = \frac{X}{n}$

$$E(p^*) = E\left(\frac{X}{n}\right) = \frac{1}{n} np = p, \text{ VVR}$$

$$V(p^*) = V\left(\frac{X}{n}\right) = \frac{1}{n^2} V(X)$$

$$= \frac{p(1-p)}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right) = \sigma^2_{p^*}$$

medelfel

$$D(p^*) = \sigma_{p^*}$$

Skattning av medel

$$d(p^*) = \sqrt{\frac{0{,}0105 \cdot 0{,}9895}{16000} \cdot \frac{800000-16000}{799999}}$$

$$\approx 7{,}9 \cdot 10^{-4}$$

$$p^* = \frac{X}{n} \underset{\text{CGS}}{\overset{1}{\approx}} N(p; \sigma_{p^*})$$

11.13 X_i = tid till fel

$X_i \in Exp(\lambda)$

$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, x \geq 0 \quad E(X) = \frac{1}{\lambda}$

Här led ML-skattning av λ

Baserata på stickprovet $x_1, \ldots, x_n$.

- $L(\lambda) = \prod_1^n \lambda e^{-\lambda x_i} = \lambda^n e^{-\lambda \sum_1^n x_i}$

- logaritmera $L(\lambda)$

$\ln(L(\lambda)) = n \ln(\lambda) - \lambda \sum_1^n x_i$

- derivera

$$\frac{d \ln(L(\lambda))}{d\lambda} = \frac{n}{\lambda} - \sum_1^n x_i = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{n}{\sum_1^n x_i} = \frac{1}{\bar{x}}$$

ML-skattning av λ är $\lambda^* = \frac{1}{\bar{x}}$

V.V.R?

$E(\lambda^*) = E\left(\frac{1}{\bar{X}}\right) \approx \frac{1}{\frac{1}{\lambda}} = \lambda$

$X_i \in Exp(\lambda)$ $\quad f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ $\quad E(X) = \frac{1}{\lambda} = \mu \Rightarrow \lambda = \frac{1}{\mu}$

$V(X) = \frac{1}{\lambda^2} = \sigma^2 \Rightarrow \frac{1}{\lambda} = \sigma = \mu$

$X_i \; Exp\left(\frac{1}{\mu}\right)$ $\quad f(x) = \frac{1}{\mu} e^{-\frac{x}{\mu}}$

$$\boxed{\mu^* = \bar{X} \approx N\left(\mu; \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)}$$

Härled ML-skattning för μ

Baserat på stickprovet $x_1, \dots, x_n$

- $L(\mu) = \prod_1^n \frac{1}{\mu} e^{-\frac{x_i}{\mu}} = \frac{1}{\mu^n} \cdot e^{-\frac{1}{\mu}\sum_1^n x_i}$

- $\ln(L(\mu)) = -n \ln(\mu) - \frac{1}{\mu}\sum_1^n x_i$

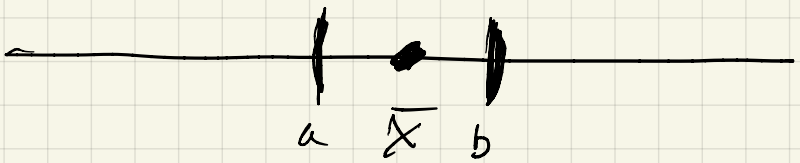
$D(\ln(L(\mu))) = -\frac{n}{\mu} + \frac{1}{\mu^2}\sum_1^n x_i = 0 \Rightarrow \mu = \frac{1}{n}\sum_1^n x_i = \bar{x}$

$E(\mu^*) = E(\bar{X}) = \mu$, V.V.R

Skattningsmedelfel

$V(\mu^*) = V(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n} \Rightarrow D(\mu^*) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, $d(\mu^*) = \frac{\bar{x}}{\sqrt{n}}$

KAP 12 intervallskattning



$\mu \in (a; b), (95\%)$

$\mu \in \left(\bar{x} - 1{,}96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \bar{x} + 1{,}96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

12.1 Tabellövning

Bestäm a, b o c så att

$X \in \chi^2(24)$

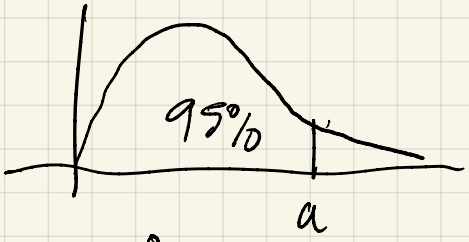
$P(X < a) = 0{,}95$

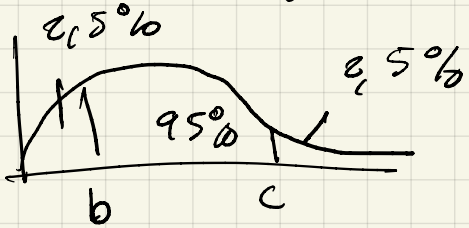
$\Leftrightarrow$

$P(X > a) = 0{,}05$

$\Leftrightarrow$

$a = 36{,}42$





$P(b < X < c) = 0{,}95$

$\Leftrightarrow$

$P(X > b) = 0{,}975$ & $P(X > c) = 0{,}025$ $\Rightarrow$ $b = 12{,}40$ & $c = 39{,}36$

t-fördelning

stickprov $X_1, \dots, X_n$ obs. $X_i \in N(\mu; \sigma)$

$$\mu^* = \bar{X} \in N\left(\mu; \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

$$(\sigma^2)^* = S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_1^n (X_i - \bar{X})^2 \in \chi^2(n-1)$$

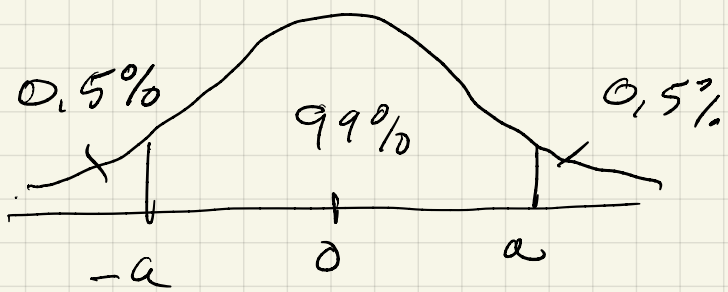
$$\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma^*/\sqrt{n}} = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \in t(n-1)$$

12.4 $X \in t(9)$

$$P(|X| < a) = 0{,}99$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$P(-a < X < a) = 0{,}99 \Longrightarrow a = 3{,}25$$



Ex mäter syrekoncentration i vatten vid ett reningsverk

"Vad" X_i = syrekoncentration (mg/l) $i = 1, \dots, 30$

"Hur" $X_i \in N(\mu; 2)$, (σ KÄND)

$$\mu^* = \bar{X} \in N\left(\mu; \frac{2}{\sqrt{30}}\right)$$

Efter 30 dagar fick man resultatet $\bar{x} = 2{,}52$

Bestäm ett konfidensintervall för μ med konfidensgrad 99%

$$\mu \in \left(\bar{x} \pm 2{,}5758 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right), (99\%)$$

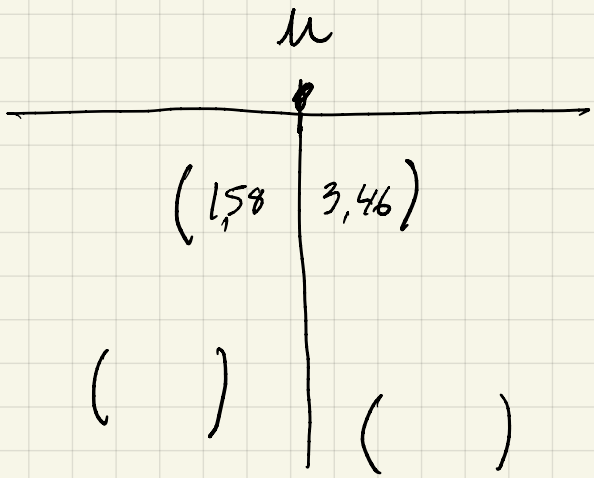
$$e = 2{,}5758 \frac{2}{\sqrt{30}} \approx 0{,}94 \quad \text{(felmarginalen)}$$

$$\mu \in (2{,}52 \pm 0{,}94) \qquad \mu \in (1{,}58; 3{,}46), (99\%)$$

$$(1{,}57; 3{,}47)$$

tolkning: med 99% säkerhet (1% felrisk) är den
$(1-\alpha)$ (α)

Verkliga syrekoncentration, μ, i vattnet i intervallet (1,58, 3,46)



Kan man med rimlig säkerhet påstå att verklig syrekonc är $\mu = 3{,}0$ mg/l ?

<u>Nej</u>!

$H_0: \mu = 3.0$

$H_1: \mu \neq 3.0$

$\bar{X} = 2{,}52 < 3{,}0$

Syrekonc är lägre men det är inte en statistiskt säkerställd förändring, felrisk 1%.