Hypotesprövning

Givet ett stickprov $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ från någon fördelning.

- Vill pröva en nollhypotes H_0, H_0 innebär att fördelningen specificeras något sätt. (ex. $\boldsymbol{H_0: p = 0.5}$, $\boldsymbol{H_0: \mu = 100}$)
- Sätt upp en mothypotes H_1, ett alt till H_0. ($\boldsymbol{H_1: p > 0.5}$, $\boldsymbol{H_1: \mu \neq 100}$)
- Vi ska pröva nollhypotesen H_0 mot mothypotesen H_1 med hjälp en testvariabel eller teststorhet, $t(\boldsymbol{x})$ vilken är en obs på stickprovsvariabeln $t(\boldsymbol{X})$.
- Ange kritiskt område C, en del av det område $t(\boldsymbol{X})$ varierar över

Testet blir sedan

- Förkasta H_0 om $t(\boldsymbol{x}) \in C$, förkasta inte H_0 om $t(\boldsymbol{x}) \notin C$,

Hypotesprövning

Vid hypotesprövning finns följande fyra möjligheter

	H_0 sann	H_0 falsk (H_1 sann)
Förkasta H_0	α (typ I fel)	OK
Förkasta inte H_0	OK	β (typ II-fel)

Med testets ***signifikansnivå*** (felrisk), betecknas α, menas
$\alpha = P$(förkasta $H_0|H_0$ sann), sannolikheten att gör Typ I-fel
Ett bra test liten felrisk, (α=0.05, 0.01 eller 0.001)

Sannolikheten att göra Typ II-fel, betecknas β
Sannolikheten att förkasta en falsk nollhypotes kallas **testets styrka**, 1-β
1-β = P(förkasta $H_0|H_1$ sann)
Ett bra test har låg signifikans nivå och hög sannolikhet att upptäcka att H_1 sann dvs hög styrka

Observera att om H_0 inte förkastas så accepteras *inte* H_0

Test av μ, σ känd - normalfördelning

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ är ett stickprov, X_i är oberoende och $N(\mu,\sigma)$

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ är en observation av stickprovet

Eftersom $X_i \in N(\mu,\sigma)$ vet vi att $\bar{X} \in N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

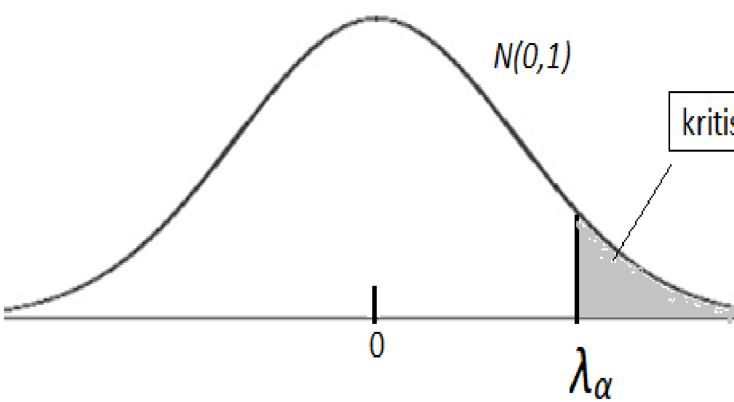
Vi vet också att $\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \in N(0,1)$

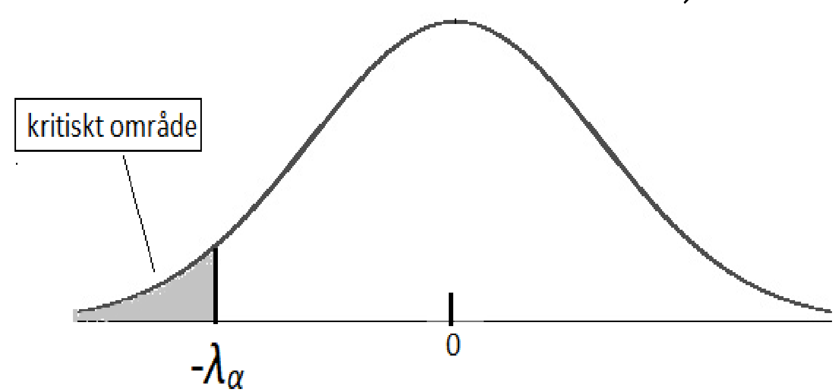
<u>**Ensidig hypotesprövning på signifikansnivån $\boldsymbol{\alpha}$**</u>

$\boldsymbol{H_0}$**:** $\boldsymbol{\mu = \mu_0}$ **mot** $\boldsymbol{H_1: \mu > \mu_0}$ **(eller** $\boldsymbol{H_1: \mu < \mu_0}$**)**

testvariabel: $t(\mathrm{X}) = \frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \in N(0,1)$, förkasta H_0 på signifikansnivån α om

$\mathrm{t(x)} > \lambda_\alpha \Leftrightarrow \bar{x} > \mu_0 + \lambda_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ $\quad\left(\text{eller } \mathrm{t(x)} < -\lambda_\alpha \Leftrightarrow \bar{x} < \mu_0 - \lambda_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$





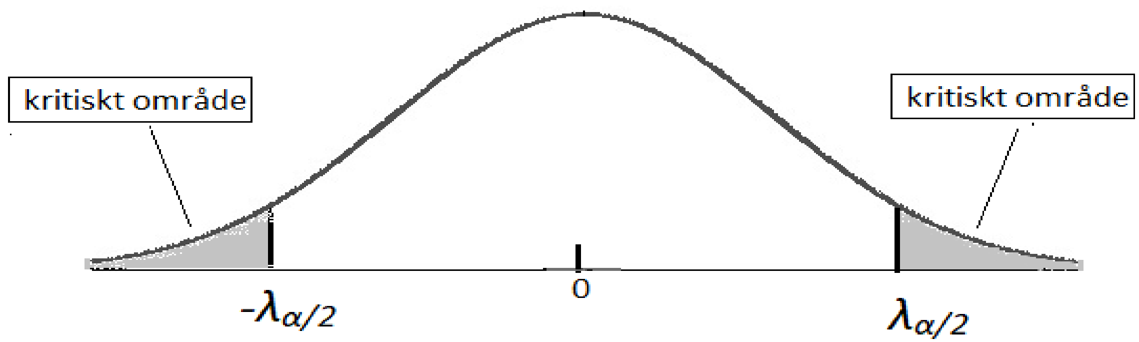
Test av μ, σ känd - normalfördelning

Tvåsidig hypotesprövning på signifikansnivån α

$H_0: \mu = \mu_0$ mot $H_1: \mu \neq \mu_0$

testvariabel: $t(X) = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \in N(0,1)$, förkasta H_0 på signifikansnivån α om

$|t(x)| > \lambda_{\alpha/2} \Leftrightarrow \bar{x} > \mu_0 + \lambda_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ eller $\bar{x} < \mu_0 - \lambda_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$



Test av μ, σ **okänd** - normalfördelning

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ är ett stickprov, X_i är oberoende och $N(\mu,\sigma)$

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ är en observation av stickprovet

Eftersom $X_i \in N(\mu,\sigma)$ vet vi att $\bar{X} \in N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

Vi vet också att $\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma^*/\sqrt{n}} \in t(n-1)$

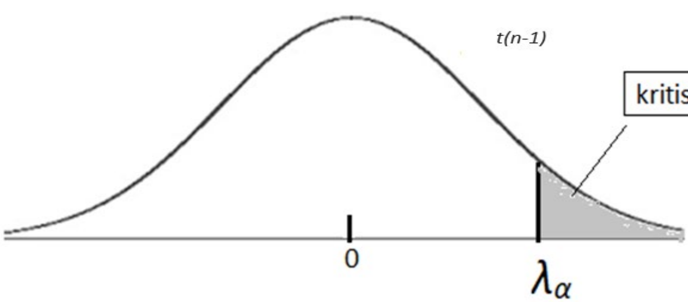
Ensidig hypotesprövning på signifikansnivån α

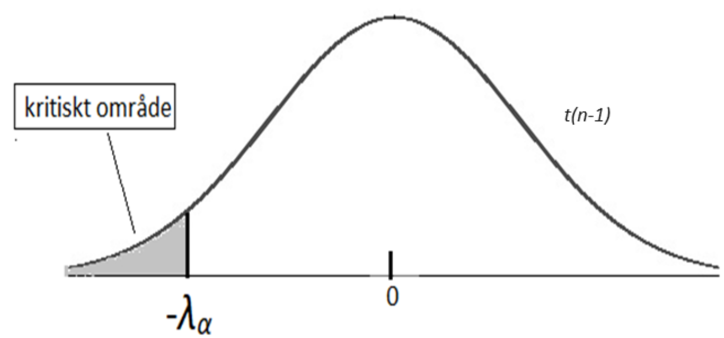
$H_0: \mu = \mu_0$ mot $H_1: \mu > \mu_0$ (eller $H_1: \mu < \mu_0$)

testvariabel: $t(\mathrm{X}) = \dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma^*/\sqrt{n}} \in t(n-1)$,

förkasta H_0 på signifikansnivån α om

$\mathrm{t(x)} > t_\alpha^{(n-1)} \Leftrightarrow \bar{x} > \mu_0 + t_\alpha^{(n-1)} \dfrac{s}{\sqrt{n}}$ $\quad \left(\text{eller } \mathrm{t(x)} < -t_\alpha^{(n-1)} \Leftrightarrow \bar{x} < \mu_0 - t_\alpha^{(n-1)} \dfrac{s}{\sqrt{n}}\right)$





Test av μ, σ okänd - normalfördelning

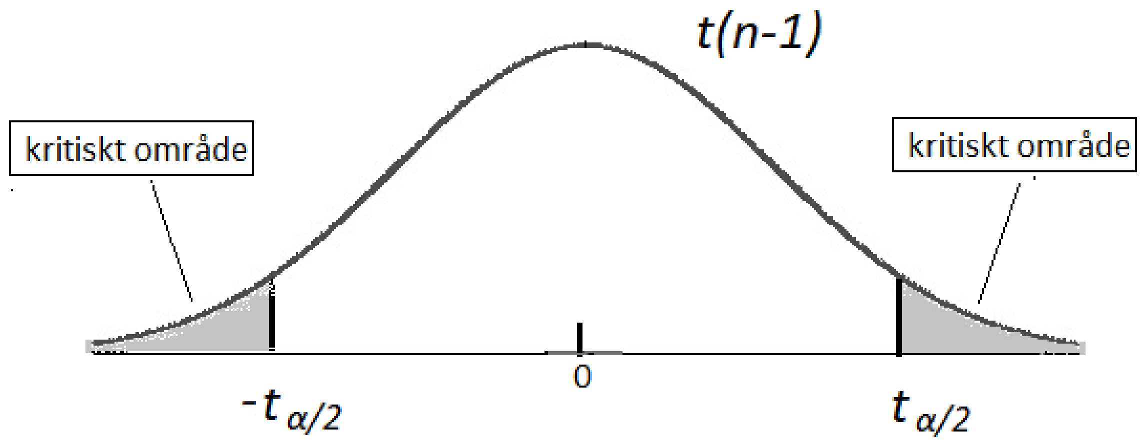
<u>Tvåsidig hypotesprövning på signifikansnivån α</u>

$H_0: \mu = \mu_0$ mot $H_1: \mu \neq \mu_0$

testvariabel: $t(\mathrm{X}) = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \in t(n-1)$

förkasta H_0 på signifikansnivån α om

$|\mathrm{t(x)}| > t_{\alpha/2}^{(n-1)} \Leftrightarrow \bar{x} > \mu_0 + t_{\alpha/2}^{(n-1)} \dfrac{s}{\sqrt{n}}$ eller $\bar{x} < \mu_0 - t_{\alpha/2}^{(n-1)} \dfrac{s}{\sqrt{n}}$



Konfidensintervall vs hypotesprövning

Normalfördelning

$$\frac{\text{Tvåsidig hypotesprövning på signifikansnivån } \alpha}{H_0: \mu = \mu_0 \text{ mot } H_1: \mu \neq \mu_0}$$

Konfidensintervall

σ känd

Förkasta H_0 om μ_0 inte finns intervallet nedan

$$\left[\bar{x} - \lambda_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + \lambda_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

σ okänd

Förkasta H_0 om μ_0 inte finns intervallet nedan

$$\left[\bar{x} - t_{\alpha/2,(n-1)} \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + t_{\alpha/2,(n-1)} \frac{s}{\sqrt{n}}\right]$$

Hypotesprövning

σ känd

Förkasta H_0 om

$$\bar{x} < \mu_0 - \lambda_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \text{ eller } \bar{x} > \mu_0 + \lambda_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Förkasta H_0 om

$$\bar{x} < \mu_0 - t_{\alpha/2,(n-1)} \frac{s}{\sqrt{n}} \text{ eller } \bar{x} > \mu_0 + t_{\alpha/2,(n-1)} \frac{s}{\sqrt{n}}$$

Konfidensintervall vs hypotesprövning

Normalfördelning

Ensidig hypotesprövning på signifikansnivån α

$H_0: \mu = \mu_0$ mot $H_1: \mu > \mu_0$ (Alt. $H_1: \mu < \mu_0$)

Konfidensintervall

σ känd

Förkasta H_0 om μ_0 inte finns intervallet nedan

$$\left(\bar{x} - \lambda_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \infty\right) \text{ Alt. } \left(-\infty, \bar{x} + \lambda_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

σ okänd

Förkasta H_0 om μ_0 inte finns intervallet nedan

$$\left(\bar{x} - t_\alpha^{(n-1)} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \infty\right) \text{ Alt.}$$

$$\left(-\infty, \bar{x} + t_\alpha^{(n-1)} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

Hypotesprövning

σ känd

Förkasta H_0 om

$$\bar{x} > \mu_0 + \lambda_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \text{ Alt. } \bar{x} < \mu_0 - \lambda_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

σ okänd

Förkasta H_0 om

$$\bar{x} > \mu_0 + t_{\alpha,(n-1)} \frac{s}{\sqrt{n}} \text{ Alt. } \bar{x} < \mu_0 - t_{\alpha,(n-1)} \frac{s}{\sqrt{n}}$$

Använda normalapproximation

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ är ett stickprov, X_i är oberoende och likafördelade
dvs $E(X_i) = \mu$ *och* $D(X_i) = \sigma$
$x_1, x_2, \ldots, x_n$ är en observation av stickprovet

Vi vet att $\bar{X} \approx N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$, om $n > 30$ och att $\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma^*/\sqrt{n}} \approx N(0,1)$

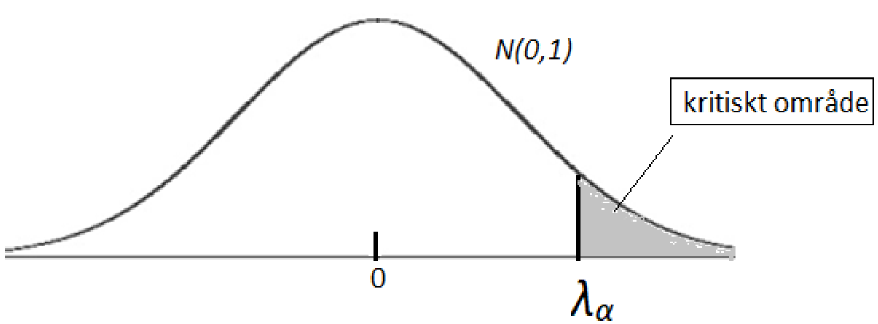
<u>Ensidig hypotesprövning på approximativ signifikansnivån α</u>

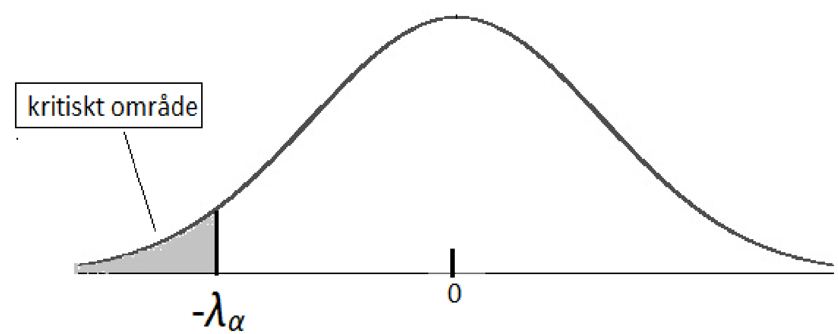
$H_0: \mu = \mu_0$ mot $H_1: \mu > \mu_0$ (eller $H_1: \mu < \mu_0$)

testvariabel: $t(X) = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma^*/\sqrt{n}} \approx N(0,1)$,

förkasta H_0 på *approximativ* signifikansnivån α om

$$t(x) > \lambda_\alpha \Leftrightarrow \bar{x} > \mu_0 + \lambda_\alpha \frac{s}{\sqrt{n}} \left(\text{eller } t(x) < -\lambda_\alpha \Leftrightarrow \bar{x} < \mu_0 - \lambda_\alpha \frac{s}{\sqrt{n}}\right)$$





Använda normalapproximation

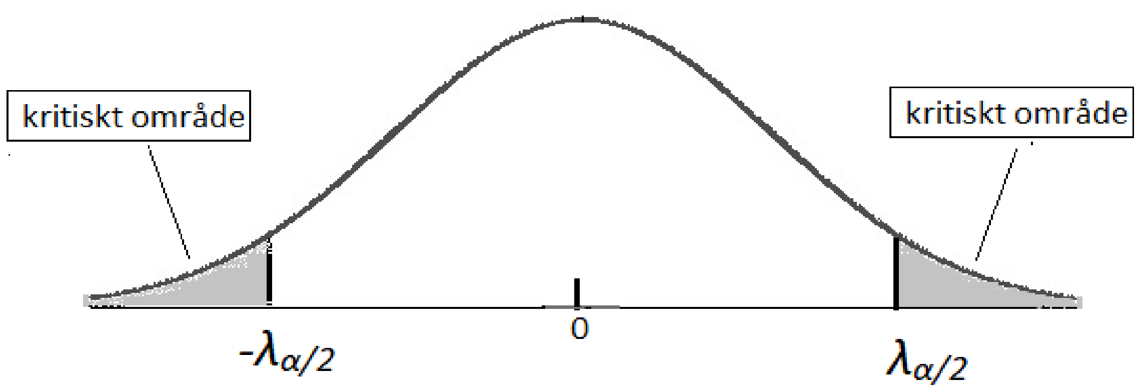
Tvåsidig hypotesprövning på *approximativ* signifikansnivån α

$H_0: \mu = \mu_0$ mot $H_1: \mu \neq \mu_0$

testvariabel: $t(\mathrm{X}) = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma^*/\sqrt{n}} \approx N(0,1)$,

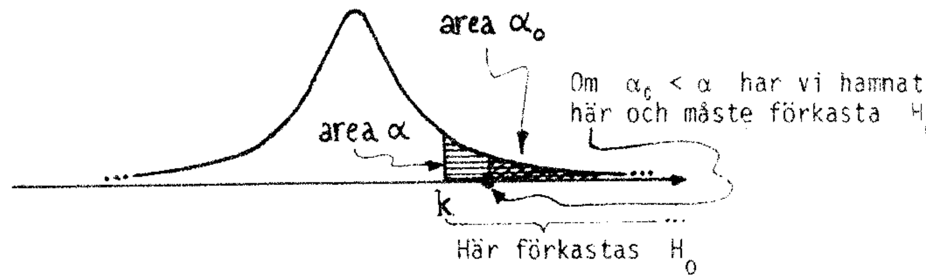
förkasta H_0 på approximativ signifikansnivån α om

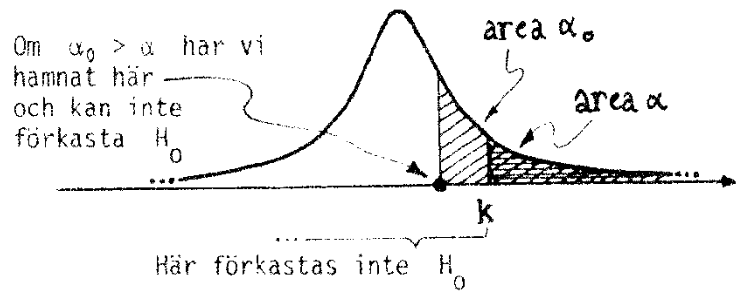
$|\mathrm{t(x)}| > \lambda_{\alpha/2} \Leftrightarrow \bar{x} > \mu_0 + \lambda_{\alpha/2}\dfrac{s}{\sqrt{n}}$ eller $\bar{x} < \mu_0 - \lambda_{\alpha/2}\dfrac{s}{\sqrt{n}}$



P-värdesmetoden

- H_0: nollhypotesen ($\mu = \mu_0, p = p_0$)
- Utgå från stickprovet
- Räkna ut sannolikheten, α_0, att få ett lika extremt eller extremare värde på testvariabeln under förutsättning att H_0 är sann
- Jämför med signifikansnivån α
  - Om $\alpha_0 < \alpha$ så förkastas H_0
  - Om $\alpha_0 > \alpha$ så förkastas inte H_0





- Speciellt användbar för diskreta fördelningar

Teckentest

- Fördelningsoberoende
- Observationer i par , (X_i, Y_i), i =1, ..., n där variation mellan paren söks
  Vill pröva
  - H_0: Ingen skillnad mellan X och Y
  - H_1: Skillnad finns
  - Signifikansnivån = α

Låt Z = antal gånger X_i är större än Y_i
$Z \in Bin(n,0.5)$ om H_0 sann

Om resultat från stickprovet blir k st uppmätta skillnader då X_i är större än Y_i
Bestäm $P(Z \geq k) = P$
Förkasta H_0 om $P < \alpha$,
Förkasta inte H_0 om $P \geq \alpha$

χ^2 - test (hypotesprövning)

- Givet
  - En hypotes H_0, ger ett förväntat utfall E_i , $i = 1, \ldots, k$
  - Mothypotes H_1: H_0 gäller inte
  - Ett observationsmaterial, observationer O_i , $i = 1, \ldots, k$
- Beräkna $Q = \sum_{i=1}^{k} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$ $\quad Q \in \chi^2(k-1)$
- Förkasta H_0 om $Q \geq \chi^2_{\alpha,(k-1)}$, $\chi^2_{\alpha,(k-1)}$ fås ur tabell
  - α är signifikansnivå
  - k-1 är antalet frihetsgrader
  - $F(\chi^2_{\alpha,(k-1)}) = 1-\alpha$, där F(x) är fördelningsfunktionen för χ^2

χ^2 - test (exempel)

- En kundenkät med tre glassar: A, B och C
  - 240 kunder får välja glass
  - H_0: glassarna är lika populära hos kunderna mot
    H_1: minst en av glassarna skiljer sig från de övriga ifråga om popularitet hos kunderna
  - Signifikansnivå: $\alpha = 1$ %
- Utfall (siffror inom parentes är förväntat utfall om H_0 sann)

	A	B	C
Antal	60 (80)	68 (80)	112 (80)

- Beräkna $Q = (60-80)^2/80 + (68-80)^2/80 + (112-80)^2/80 = 19.6$
- Antalet frihetsgrader: $k-1 = 3-1 = 2$
- $\chi^2_{1\%,(2)} = 9.210$, således förkasta H_0

χ^2 - test (fördelningen F_0 helt känd)

- Låt $x_1, x_2, ..., x_n$ vara en observationer från en okänd fördelning, F
- F_0 är en helt känd fördelning, H_0: $F = F_0$, H_1: $F \neq F_0$
- Dela in observationsmaterialet i klasser
  - $a_{i-1} < x \leq a_i$, i = 1, ..., k (a_0 och a_k är obegränsade nedåt respektive uppåt)
  - O_i, antal observationer i klassen
  - E_i, förväntat antal observationer i klassen om H_0 sann
    - kan beräknas som np_i, där p_i är sannolikheten för en observation i klassen
- Beräkna Q $\quad Q = \sum_{i=1}^{k} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$ $\quad Q \in \chi^2$ (k-1)
- Förkasta H_0 om $Q \geq \chi^2_{\alpha,(k-1)}$, α är signifikansnivå
  - $F(\chi^2_{\alpha,(k-1)}) = 1-\alpha$, där F(x) är fördelningsfunktionen med k-1 frihetsgrader

χ^2 - test (fördelningen F_0 inte helt känd)

- Låt $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vara en observationer från en okänd fördelning, F
- F_0 är en inte helt känd fördelning, H_0: $F = F_0$, H_1: $F \neq F_0$
- Skatta de okända parametrarna i den antagna fördelningen F_0
- Gör på samma sätt som för helt känd fördelning, men antalet frihetsgrader är

k-1-(antalet skattade parametrar)