Intervallskattning

- En intervallskattning av en parameter är ett intervall med slumpvariabler som gränser
- *Konfidensgraden, (1-α),* för en intervallskattning är sannolikheten att parametern tillhör intervallet
- En observerad intervallskattning kallas för *konfidensintervall*
  - Metoder som inte kräver känd fördelning kallas för icke-parametriska
  - Metoder som kräver känd fördelning kallas för parametriska

Några hjälpfördelningar

- Om $X_1, X_2, \ldots, X_n$ är oberoende och $N(0,1)$ så är

$$\sum_{i=1}^{n} X^2 \in \chi^2(n)$$

Chi-2-fördelad med *n* frihetsgrader

- Om $X_1, X_2, \ldots, X_n$ är oberoende och $N(\mu,\sigma)$ så är

$$\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left(X-\overline{X}\right)^2 \in \chi^2(n-1)$$

Chi-2-fördelad med *n-1* frihetsgrader

- ”summerar man kvadrater av oberoende och normalfördelade stokastiska variabler får man en Chi-2 fördelning”

Några hjälpfördelningar

- Om $X_1, X_2, \ldots, X_n$ är oberoende och $N(\mu,\sigma)$ så är

$$\frac{\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}}{\sqrt{\dfrac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left(X-\overline{X}\right)^2}\,/\sqrt{n}} \in t(n-1)$$

t-fördelad med *n-1* frihetsgrader

- ”Bildar man en kvot av en *N(0,1)* och roten ur en $\chi^2(n-1)$ får man en *t-fördelad* variabel med *(n-1)* frigetsgrader”

t-fördelningen är en släkting till normalfördelningen och finns i tabeller för olika antal frihetsgrader och olika sannolikheter.
Då antalet frihetsgrader blir stort, närmar sig *t*-fördelningen en normalfördelning

Konfidensintervall för μ där σ **är känt** - normalfördelning

Låt $X_1, X_2, \ldots, X_n$ vara ett stickprov, X_i är oberoende och $N(\mu,\sigma)$

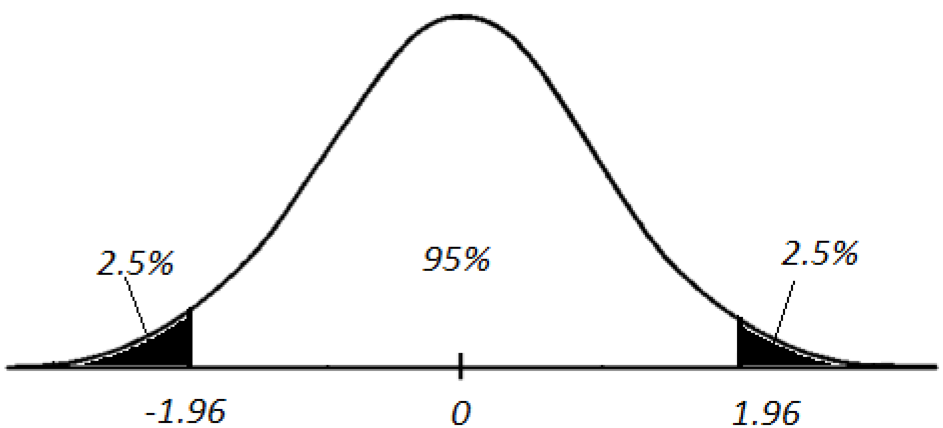
Låt $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vara en observation av stickprovet

För alla normalfördelningar gäller t.ex.:

$$P(\mu - 1.96\sigma < X < \mu + 1.96\sigma) = 0.95$$

Speciellt gäller

$$P\left(\mu - 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \bar{X} < \mu + 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 0.95$$



Lös ut μ ur

$$\mu - 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \overline{X} < \mu + 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\mu - 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \overline{X} \Leftrightarrow \mu < \overline{X} + 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \; och \; \overline{X} < \mu + 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Leftrightarrow \overline{X} - 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu$$

$$P\left(\mu - 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \overline{X} < \mu + 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 0.95 \Leftrightarrow$$

$$P\left(\overline{X} - 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 0.95$$

Ett konfidensintervall för μ med konfidensgraden $1\text{-}\alpha$ fås då av

$$\mu \in \left(\bar{x} \pm \lambda_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right), (1-\alpha)100\%$$

där $\lambda_{\alpha/2}$ fås ur $\Phi(\lambda_{\alpha/2}) = 1 - \alpha / 2$

Konfidensintervall för μ där σ **är okänt** - normalfördelning

X är en stokastisk variabel

- Låt $X_1, X_2, ..., X_n$ vara ett stickprov av X, där X_i är oberoende
- Låt $x_1, x_2, ..., x_n$ vara en observation av stickprovet

$$\boxed{\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma^*/\sqrt{n}} \in t(n-1)}$$

Ett konfidensintervall för μ med konfidensgraden *1-*α fås då av

$$\mu \in \left(\bar{x} \pm t_{\alpha/2}^{(n-1)} \frac{s}{\sqrt{n}}\right), (1-\alpha)100\%$$

där $t_{\alpha/2}^{(n-1)}$ fås ur t-fördelningen, F(x), med n-1 frihetsgrader

$$F\left(t_{\alpha/2}^{(n-1)}\right) = 1 - \alpha/2$$

Konfidensintervall för varians - N(μ,σ)

- X är en stokastisk variabel
  - Låt X_1, X_2, ..., X_n vara ett stickprov av X, där X_i är oberoende och normalfördelade N(μ,σ)

$$\boxed{\frac{(n-1)\left(\sigma^2\right)^*}{\sigma^2} \in \chi^2(n-1)}$$

$$\boxed{\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 \in \chi^2(n-1)}$$

Ett konfidensintervall, som är uppåt begränsat och med undre gräns 0, med konfidensgraden 1-α fås då av

$$\left[0, \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{\chi^2_{1-\alpha,(n-1)}}\right] = \left[0, \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha,(n-1)}}\right]$$

där $\chi^2_{1-\alpha,(n-1)}$ fås ur χ^2-fördelningen, F(x), med n-1 frihetsgrader:

$F(\chi^2_{1-\alpha,(n-1)}) = \alpha$

Tvåsidigt konfidensintervall för varians - N(μ,σ)

- En tvåsidig intervallskattning av **variansen**, **σ^2**, konfidensgraden 1-α fås av

$$\left[\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2,(n-1)}},\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2,(n-1)}}\right]$$

och för **standardavvikelsen,** σ

$$\left[\sqrt{\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2,(n-1)}}},\sqrt{\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2,(n-1)}}}\right]$$

Två stickprov - normalfördelning

- $X_1, X_2, \ldots, X_{n_1}$ är stickprov med fördelningen $N(\mu_1,\sigma)$
- $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{n_2}$ är stickprov med fördelningen $N(\mu_2,\sigma)$
- Stickproven är oberoende

$$\frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \in N(0,1), \text{om } \sigma \text{ känd}$$

$$\frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sigma^*\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \in t(n_1 + n_2 - 2), \text{om } \sigma \text{ okänd}$$

Där $\sigma^* = s_p = \sqrt{\frac{(n_1-1)s_x^2+(n_2-1)s_y^2}{(n_1+n_2-2)}}$

Standardavvikelserna måste vara lika i modellen, annars går det inte att vikta ihop dem, se kap 11.7 s 266-267.

Två stickprov - normalfördelning

Konfidensintervall för $\mu_2 - \mu_1$ blir

$$\mu_2 - \mu_1 \in \left(\bar{y} - \bar{x} \pm \lambda_{\alpha/2} \sigma \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} \right), \ (1-\alpha)100\%, \ \text{om } \sigma \text{ känd}$$

$$\mu_2 - \mu_1 \in \left(\bar{y} - \bar{x} \pm t_{\alpha/2}^{(f)} s_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} \right), \ (1-\alpha)100\%, \ \text{om } \sigma \text{ okänd}$$

$$f = n_1 + n_2 - 2$$

Stickprov i par - normalfördelning

- Vi har parvisa oberoende observationer (X_i, Y_i), i = 1, ..., n
- $X_i \in N(\mu_i, \sigma_X)$ och $Y_i \in N(\mu_i + \Delta, \sigma_Y)$, X_i oberoende av Y_i
- Låt $Z_i = Y_i - X_i \in N(\Delta, \sigma_Z)$, $\sigma_Z = \sqrt{V(Y_i - X_i)}$

Δ och σ_Z okända parametrar

skattas med $\Delta^* = \bar{Z}$ och $\sigma_Z{}^* = S_Z$ och $\dfrac{\bar{Z} - \Delta}{S_Z / \sqrt{n}} \in t(n-1)$

Ett konfidensintervall för Δ fås av

$$\Delta \in \left(\bar{z} \pm t_{\alpha/2}^{(n-1)} \frac{s_z}{\sqrt{n}} \right), \ (1-\alpha)100\%$$

Övning 12.22, s. 316

Låt

$X_i =$ blodtryck före behandling person i, $X_i \in N(\mu_i, \sigma)$

$Y_i =$ blodtryck efter behandling person i, $Y_i \in N(\mu_i + \Delta, \sigma)$

$Z_i = Y_i - X_i =$ skillnaden i blodtryck person i, $Z_i \in N(\Delta, \sigma_Z)$

$\mu_i =$ person i förväntade (genomsnittliga) blodtryck, $\Delta =$ systematisk skillnad i blodtryck

Data										
Person	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Före (x)	75	70	75	65	95	70	65	70	65	90
Efter (y)	85	70	80	80	100	90	80	75	90	100
Diff (z)	**10**	**0**	**5**	**15**	**5**	**20**	**15**	**5**	**25**	**10**

$\Delta^*_{obs} = \bar{z} = 11$
verkar höja blodtrycket i genomsnitt
$\sigma^*_{Z_{OBS}} = s_Z = 7.75,$
$t^{(9)}_{0.025} = 2.26$

Konfidensintervall för Δ (samma som 1−stickprovsfallet med σ okänd)

$$\Delta \in \left(\bar{z} \pm t^{(9)}_{0.025} \frac{s_Z}{\sqrt{n}}\right)$$

$$\Delta \in \left(11 \pm 2.262 \rightleftarrows \frac{7.75}{\sqrt{10}}\right), (95\%) \rightarrow \Delta \in (11 \pm 5.54), (95\%)$$

$\Delta \in (6.46, 16.54), (95\%)$

Med 5% risk att ha fel kan man påstå att preparatet höjer blodtrycket istället för att sänka det. ($0 \notin$ intervallet)

Om man inte har normalfördelning?

- Teckenintervall är en icke-parametrisk metod för intervallskattning av medianvärde
- Om vi har stora stickprov från en fördelning med väntevärde $E[X_i] = \mu$ och $V[X_i] = \sigma^2$, så är

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \approx N(0;1)$$

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma^* / \sqrt{n}} \approx N(0;1)$$

Enligt Centrala Gränsvärdes Satsen

”Väljarbarometer” - konfidensintervall för p

I en mängd med *N* element är en andel *p* av speciellt slag. Bland de *N* elementen väljs *n* element. *X* = antal speciella element bland *n*

- Då gäller: $X \in Hyp(N, n, p)$
- Om *N* stort och *n/N < 0.1* gäller approximativt: $X \in Bin(n, p)$
- Om n stort (*n>30*) gäller

$$X \approx N\left(np; \sqrt{np(1-p)}\right) \text{ eller } p^* = \frac{X}{n} \approx N\left(p; \sqrt{\frac{np(1-p)}{n}}\right)$$

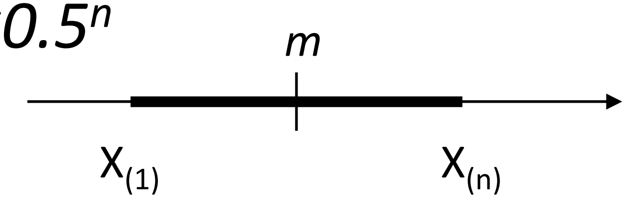
- Om p^* skattas med $p^* = x/n$, ger detta följande konfidensintervall:

$$p \in \left(p^*_{obs} \pm \lambda_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p^*_{obs}(1-p^*_{obs})}{n}}\right)$$

med approximativa konfidensgraden $1-\alpha$

Teckenintervall - en icke-parametrisk metod

- Låt $X_1, X_2, \ldots, X_n$ vara ett stickprov
- Ordna i storlek observationerna så att: $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \ldots \leq X_{(n)}$
- Låt Y = antal obs. t.v. om m, $Y \in Bin(n, 0.5)$
- Ett konfidensintervall för *medianen* är $m \in (X_{(1)}, X_{(n)})$ med konfidensgrad $1-2P(Y=0) = 1-2\times 0.5^n$



- Konfidensgraden minskas om man i stället tar $m \in (X_{(2)}, X_{(n-1)})$, konfidensgrad

$$P(Y \leq 1) = 1 - 2\left(0.5^n + \binom{n}{1} 0.5^n\right)$$