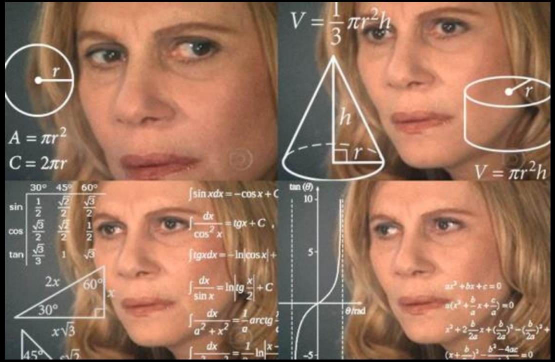
Aritmatika dan Teori Bilangan

Polikarpus Arya Pradhanika



Berdoa dulu yuks

Biar pertemuannya berkah

Funfact dikit

Ini salah satu materi yang lumayan menarik. Kenapa? Karena kalo paham materi ini, nanti bisa jadi lebih gampang buat ngerjain soal ngoding

Macam – macam bilangan

1. Bilangan bulat => semua bilangan negatif sampai positif Z
2. Bilangan cacah => semua bilangan dari 0 sampai positif
3. Bilangan asli => semua bilangan positif A
4. Bilangan decimal => semua bilangan (biasanya ada komanya)
5. Bilangan real => bilangan yang bisa dinyatakan dalam bentuk decimal
6. Bilangan prima => bilangan yang faktornya hanya 1 dan dirinya sendiri
7. Bilangan kuadrat => bilangan yang dapat dinyatakan dalam bentuk a*a
8. Bilangan kubik => bilangan yang dapat dinyatakan dalam bentuk a*a*a

Misal nih ...

Misal ada 5 bola merah, 6 bola kuning, sama 7 bola hijau. Berapa bola minimal yang perlu diambil, agar dapat dipastikan bahwa terambil 3 bola dengan warna berbeda?

5 6 7

3 → 5cm.a

PHP

Pigeonhole principle

7

1 → 14

9 7 1 17

Misal nih ...

Misal ada 9 bola merah, 6 bola kuning, sama 7 bola hijau. Berapa bola minimal yang perlu diambil, agar dapat dipastikan bahwa terambil 3 bola dengan warna berbeda?

Misal nih ...

Pak Dengklek yang kecewa dan kesepian karena Pak Ganesh sudah pensiun dari dunia bajak laut mencoba menyabotase kebun apel Pak Ganesh dengan mengirimkan hama tikus. Pak Ganesh punya total 150 pohon apel di kebunnya. Tiap pohon hanya bisa diserang oleh maksimum 10 ekor tikus. Tikus-tikus Pak Dengklek akan menyerang pohon secara acak. Berapa ekor tikus minimal yang harus dikirim Pak Dengklek jika dia ingin memastikan paling sedikit separuh dari pohon apel Pak Ganesh diserang setidaknya lima ekor tikus?

Pigeonhole principle

$x \longrightarrow \uparrow$

65

4 4 4 4 4 4 4 4 4 4

1 6 6 6 6

$40 + 24 + 1$

Pigeonhole principle

$x \longrightarrow \uparrow$

65

$150 \times 4 \longrightarrow \underline{600}$

$$\begin{array}{r} 444 \\ 1 \\ \hline 1045 \end{array}$$

1 6 6 6 1

74 4 4 4

Apa itu faktor bilangan?

Faktor bilangan adalah suatu bilangan yang dapat membagi habis bilangan lainnya.

Contoh:
2 adalah faktor dari 4
3 adalah faktor dari 9

Apa itu faktor bilangan?

12

$2^2 . 3$

18

$2 . 3^2$

Faktorisasi Prima

Kita dapat menyatakan sebuah bilangan dalam bentuk faktorisasi prima. Faktorisasi prima adalah perkalian beberapa bilangan prima yang menghasilkan suatu bilangan

Contoh:

12	= 2 x 2 x 3	$= 2^2 . 3$
36	= 2 x 2 x 3 x 3	$= 2^2 . 3^2$
2024	= 2 x 2 x 2 x 11 x 23	$= 2^3 . 11 . 23$

Faktorisasi Prima

Dengan faktorisasi prima, kita bisa mencari beberapa hal
Mencari FPB dua bilangan

Contoh:

$12 = 2^2 . 3$

$16 = 2^4$

$\text{FPB} = 2^2$

$= 4$

Untuk setiap bilangan yang muncul di dua tempat, ambil yang pangkatnya paling kecil

Faktorisasi Prima

Dengan faktorisasi prima, kita bisa mencari beberapa hal
Mencari KPK dua bilangan

Contoh:

12	$= 2^2 . 3$
16	$= 2^4$
KPK	$= 2^4 . 3$
	$= 48$

Untuk setiap bilangan yang muncul, ambil yang pangkatnya paling besar

Faktorisasi Prima

Dengan faktorisasi prima, kita bisa mencari beberapa hal

Mencari banyak faktor bilangan

Contoh:

12 $= 2^2 . 3$

$= 3 . 2$ [ambil pangkatnya, tambahin 1, lalu kalikan]

$= 6$

30 $= 2 \times 3 \times 5$

$= 2 \times 2 \times 2$

$= 8$

1 2 3 4 6 12

1 2 3 5 10 15 30 6

Faktorisasi Prima

1 2 3 4 8 16
24 48 6 12

48

$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3$

$2^4 \times 3^1$

$(4 + 1) \times (1 + 1) = (5) \times (2) = 10$

Faktorisasi Prima

Dengan faktorisasi prima, kita bisa mencari beberapa hal
Mencari jumlah faktor bilangan

Contoh:

$$
\begin{aligned}
12 \quad &= 2^2 . 3 \\
&= (2^0 + 2^1 + 2^2) . (3^0 + 3^1) \\
&= (1 + 2 + 4) . (1 + 3) \\
&= (7) . (4) \\
&= 28
\end{aligned}
$$

6 12 3
3 4
12 6 12
24

28

Faktorisasi Prima

Dengan faktorisasi prima, kita bisa mencari beberapa hal
Mencari jumlah faktor bilangan

28

2 x 2 x 7
2^2 x 7^1
(2^0 + 2^1 + 2^2) * (7^0 + 7^1) = 7 * (8) = 56

1 2
7 14
28 4
28 18
56

Faktorisasi Prima

Dengan faktorisasi prima, kita bisa mencari beberapa hal
Mencari jumlah faktor bilangan

36

2^2 x 3^2
(2^0 + 2^1 + 2^2) = 7
(3^0 + 3^1 + 3^2) = (1 + 3 + 9) = 13

7x13 = 70 + 21 = 91

Funfact!

FPB dan KPK memiliki hubungan sebagai berikut:

$$KPK\ (A, B) = A * B\ /\ FPB(A, B)$$

8 6

$$\frac{2^3}{2 \cdot 3}$$

$$24 = \frac{8 \cdot \cancel{6}\ 3}{2}$$

Funfact!

$24 = 24$

FPB dan KPK memiliki hubungan sebagai berikut:

KPK (A, B) = A * B / FPB(A, B)

2 24

Deret

Deret itu kaya sekumpulan angka gitu. Biasanya punya pola

1. 1 2 3 4 5 .... b = 1
2. 2 4 6 8 .... b = 2
3. 2 4 8 16 ....

1

2 2 2 r

Deret Aritmatika

11

1 5 9 . . . .

1 2 3 4 5 10

Rumus : Un = a + (n-1)b

Jumlah : (a+Un)*n/2

$1+(11-1)4$

41

$\cancel{42}$

$$\frac{(1+41)11}{2}$$

21

21

21

231

Deret Geometri

1 3 9 27 81 … $\times 3$

Rumus : Un $= ar^{n-1}$

Jumlah : $\frac{a\,(r^n-1)}{r-1}$ atau $\frac{a\,(1-r^n)}{1-r}$

Jumlah tak hingga : $\frac{a}{1-r}$ kalo r < 1. sisanya infinity

$r < 1$

16 8 4 2 1 …

$\frac{1}{2} - 1 \rightarrow \frac{1}{1} = 1$

∞ 32

$\frac{16}{1 - \frac{1}{2}}$ $\frac{16}{\frac{1}{2}}$

Latihan soal

$2 \cdot 3^2 \cdot 5$

Berapakah jumlah dari semua faktor bilangan 90?

Ada berapa banyak faktor dari bilangan 42?

Berapakah banyak konfigurasi A, B, C, D, E dimana AxBxCxDxE = 720, dimana AxB = 20

Bu Dengklek adalah seorang guru. Minggu depan, Bu Dengklek ingin membagikan permen kepada 7 orang muridnya, namun belum tentu semua muridnya datang ke sekolah pada minggu depan. Sebagai tambahan, Bu Dengklek ingin membagikan permen kepada murid-muridnya sama rata dan tidak bersisa. Berapakah jumlah permen minimal yang harus Bu Dengklek bawa minggu depan?

Latihan soal

Berapakah jumlah dari semua faktor bilangan 90?

$$2^1 \times 3^2 \times 5^1 = (2^0 + 2^1) * (3^0 + 3^1 + 3^2) * (5^0 + 5^1)$$

$$= (3) * (13) * (6)$$

$$= 18 * 13$$

Ada berapa banyak faktor dari bilangan 42?

$$2^1 \times 3^1 \times 7^1 = (2 \times 2 \times 2) = 8$$

18
13 2
154
18
234

Latihan soal

Berapakah banyak konfigurasi A, B, C, D, E dimana AxBxCxDxE = 720, dimana AxB = 20

AxB = 20 => banyak factor dari 20

2^2 x 5^1 = (3 x 2) = 6

CxDxE = 720 / 20 = 36

2^2 x 3^2
[0, 0, 2], [0, 2, 0], [2, 0, 0], [0, 1, 1], [1, 0, 1], [1, 1, 0] = 6
= 6 = 6x6 = 36
Total = 36 * 6 = 216

2^2

0 6 2

C D E

0 1 1

Modulo

Modulo adalah sisa pembagian dari suatu bilangan oleh bilangan lainnya
Biasanya dinyatakan dalam operasi *mod*

Contoh:

12 mod 5 = 2

90 mod 4 = 2

13 mod 3 = 1

Sifat Modulo

Terdapat beberapa sifat khusus dalam operasi modulo. Diantaranya adalah

a + b mod m = (a mod m) + (b mod m) mod m
a - b mod m = (a mod m) - (b mod m) mod m
a * b mod m = (a mod m) * (b mod m) mod m
-a mod m = -a + m mod m

$3 \cdot 4 \bmod 2$

$1 \quad 0 \quad 0 \bmod 2$

$-5 \bmod 7 = -5+7 \bmod 7$

$= 2 \bmod 7$

Pembagian Modulo

12 / 6 mod 3

2 mod 3 = 2

(12 mod 3) / (6 mod 3) mod 3

0/0 mod 3

Euclid (Just Info)

Algoritma buat nyari FPB. Cukup berguna kalo 2 bilangan yang diberikan itu susah difaktorin ga ngotak. Simpelnya kaya gini

FPB(A, B)

    kalo B = 0, maka jawaban = A
    kalo ga, jawaban = FPB(B, A mod B)

Manfaat lain dari algo ini adalah, kalo kalian nemu soal kodingan dan nemu struktur kode yang mirip, kalian bisa langsung tebak kalo maksud kodingan itu adalah mencari FPB

Pembagian Modulo

8 12 4

8, 12

12, 8 → 8, 4 → 4, 0 → 4

Euler Totient Function

2 7

8 12

Definisikan e(n) adalah euler totient function dari n

e(n) menyatakan banyak bilangan dari 1 hingga n yang koprima dengan n

Dua bilangan dikatakan koprima apabila fpb dari kedua bilangan adalah 1

Contoh

$\longrightarrow$ e(7) = 6

e(6) = 2

e(15) = 8

e(100) = ?

Euler Totient Function

ϕ(n) dapat dicari dengan faktorisasi prima yang sudah kita pelajari. Caranya, adalah untuk setiap factor prima p dari n, kita lakukan operasi berikut

$$\phi(n) = \mathrm{n}\,\frac{p1-1}{p1}.\frac{p2-1}{p2}.\frac{p3-1}{p3}...$$

Contoh:

$$\phi(100) = 100\,\frac{1}{2}.\frac{4}{5} = 40$$

Euler Totient Function

$e(100)$

2^2 . 5^2

100 = (1/2) . (4/5)

= 40

Euler Totient Function

E(12)

1 5 7 11 = 4

12 = 2^2 . 3

12 =12 . (1/2) . (2/3)

6.2/3

= 4

Highlight

Dengan begitu, Euler Totient Function dari N dimana N adalah suatu bilangan prima adalah **N-1**

Mungkin terasa ngambang

Gpp bentar lagi kita bakalan sampe di manfaat dari kedua hal barusan

Pernah liat soal kaya gini?

Cari nilai dari $4^{2021} \mod 7$

Cara pola

Kita bisa cari polanya

1. $4^1 \mod 7 = 4$
2. $4^2 \mod 7 = 2$
3. $4^3 \mod 7 = 1$
4. $4^4 \mod 7 = 4$
5. $4^5 \mod 7 = 2$
6. $4^6 \mod 7 = 1$
7. $4^7 \mod 7 = 4$

Terlihat bahwa pola berulang setiap 3 kali

Sehingga kita bisa mencari nilai jawaban dengan cara berikut

2021 mod 3 = 2

Maka

$4^{2021} \mod 7 = 4^2 \mod 7 = 2$

Euler Theorem

Terdapat suatu teorema yang menyatakan bahwa

$$a^p \; mod \; m = a^{p \; mod \; e(m)} \; mod \; m$$

Kita bisa memakai ini untuk menyelesaikan soal tadi

Pernah liat soal kaya gini?

4^2021 mod 7

2021 mod e(7)

7x(6/7) = 6

2021 mod 6 = 5

4^5 mod 7

Fermat Little Theorem

Berdasarkan euler totient function

$$a^{m-1} \, mod \, m = 1 \, mod \, m$$

Kalo m prima

Sehingga, kita bisa menggunakannya untuk menyelesaikan masalah sebelumnya

Fermat Little Theorem

Cari nilai dari $4^{2021}\ mod\ 7$

Cara fermat

$$\phi(7) = 7\frac{6}{7} = 7$$

$$4^{2021}\ mod\ 7$$
$$4^{2021\ mod\ e(7)}\ mod\ 7$$
$$4^{2021\ mod\ 6}\ mod\ 7$$
$$4^{5}\ mod\ 7$$
$$4^{2}4^{2}4\ mod\ 7$$
$$2.2.4\ mod\ 7$$
$$16\ mod\ 7$$
$$2\ mod\ 7$$
$$2$$

Euler Theorem 2 (lupa namanya)

Terdapat suatu teorema yang menyatakan bahwa

untuk semua bilangan y dari 1 sampai m, jika dimasukkan ke dalam

$$ay \bmod m = x$$

Maka akan menghasilkan nilai x unik
5y mod 7

Euler Theorem 2 (lupa namanya)

5y mod 7

Y = 1 => 5.1 mod 7 = 5

Y = 2 => 5.2 mod 7 = 3

5 = 3 => 5.3 mod 7 = 1

5 = 4 => 5.4 mod 7 = 6

5 = 5 => 5.5 mod 7 = 4

5 = 6 => 5.6 mod 7 = 2

5 = 7 => 5.7 mod 7 = 0

Wilson Theorem

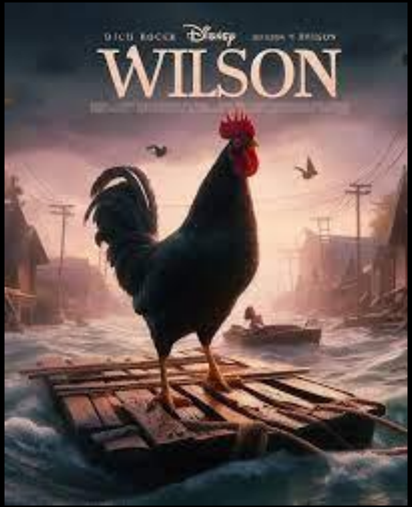
$5!\quad 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

Menyatakan bahwa

$$(p-1)!\ mod\ p = -1\ mod\ p$$

atau

$$(p-1)!\ mod\ p = p-1\ mod\ p$$



Dengan p bilangan prima

Linear Diophantine

Menyatakan bahwa

$$\boldsymbol{Ax + By = \mathbf{gcd}(A, B) * K}$$

Dengan A, B, K bilangan bulat
"Akan selalu ada bilangan x dan y dimana Ax + By
adalah kelipatan dari FPB(A, B)"

Ini persamaan GG yang bisa diselesaiin make Extended Euclidean

Contoh Soal 1

100! Mod 707 = ...?

Kita bisa simplify

Dengan cara ubah jadi

100! Mod 7

100! Mod 101

Contoh Soal 1

100! Mod 707 = ...?

100! Mod 7 = 0 (jelas banget ini parah riil)

100! = 7y

100! = 100x99x98x97x....x7x6x5x4x3x2x1

Contoh Soal 1

100! Mod 707 = ...?

Berdasarkan Wilson Theorem

$$100! \bmod 101 = 100$$

Berarti kita punya 2 persamaan

$$100! = 101x + 100$$

$$100! = 7y$$

Bisa kita ubah

$$7y = 101x + 100$$

$$7y - 101x = 100$$

Contoh Soal 1

100! Mod 707 = ...?

Berdasarkan Wilson Theorem

$$100! \bmod 101 = 100$$

Berarti kita punya 2 persamaan

$$100! = 101x + 100$$

$$100! = 7y$$

Bisa kita ubah

$$7y = 101x + 100$$

$$7y - 101x = 100$$

$$101x - 7y = 100$$

$$101 = 7 * 14 + 3$$

$$3 = 101 - 7 * 14$$

$$7 = 3 * 2 + 1$$

$$7 = (101 - 7 * 14) * 2 + 1$$

$$7 = 101 * 2 - 7 * 28 + 1$$

$$1 = 101 * (-2) + 7 * 29$$

Contoh Soal 1

100! Mod 707 = ...?

Berdasarkan Wilson Theorem

100! Mod 101 = 100

Berarti kita punya 2 persamaan

100! = 101x + 100

100! = 7y

Bisa kita ubah

7y = 101x + 100

7y - 101x = 100

101x – 7y = 100

101 = 7*14 + 3

3 = 101 – 7*14

7 = 3 * 2 + 1

1 = 7 – 3 * 2

= 7 – (101 – 7 * 14) * 2

= 7 – (101 * 2 – 7 * 28)

= 7 * 1 – 101 * 2 + 7 * 28

1 = 7 * 29 – 101 * 2

100 = 7 * (29 * 100) – 101 * (2 * 100)

100 = 7 * 2900 – 101 * 200

Contoh Soal 1

100! Mod 707 = ...?

101 * (-2) + 7 * 29 = 1
7y – 101x = 100

Maka
y = 29 * 100 = 2900
X = 2 * 100 = 200

Maka kita dapat
100! = 7 * (2900) = 20300
100! = 101 * 200 + 100 = 20300

100! Mod 707

20300 Mod 707 = 504

Contoh Soal 2

42! Mod 2021 = ...?

Kita bisa simplify

Dengan cara ubah jadi

42! Mod 43

42! Mod 47

Contoh Soal 2

42! Mod 2021 = ...?

Berdasarkan Wilson Theorem

42! Mod 43 = 42 (done)

42! = 43x + 42

Contoh Soal 2

42! Mod 2021 = ...?

Berdasarkan Wilson Theorem

$$46! = 46 \text{ Mod } 47$$
$$42! \times 43 \times 44 \times 45 \times 46 = 46 \text{ Mod } 47$$
$$42! \times 24 = 46 \text{ Mod } 47$$

$$42! \times 24 \times 2 = 46 \times 2 \text{ Mod } 47$$
$$42! = 45 \text{ Mod } 47$$
$$42! = 47y + 45$$

Buat ilangin 24 nya, kita kaliin sama multiplication invers (P)

Caranya, cari P yang
24P mod 47 = 1
Dapet P = 2

Contoh Soal 2

42! Mod 2021 = ...?

42! X 24 mod 47 = 26

24 x 2 = 48 mod 47 = 1

Contoh Soal 2

$42! \text{ Mod } 2021 = \ldots?$

Akhirnya kita punya 2 persamaan

$42! = 42 \text{ Mod } 43$

$42! = 45 \text{ Mod } 47$

$42! = 43x + 42$

$42! = 47y + 45$

$47y + 45 = 43x + 42$

$43x - 47y = 3$

$47 = 43 + 4$

$4 = 47 - 43$

$43 = 4 * 10 + 3$

$43 = (47 - 43) * 10 + 3$

$43 = 47 * 10 - 43 * 10 + 3$

$3 = 43 * 11 - 47 * 10$

$X = 11$

$Y = 10$

Contoh Soal 2

42! Mod 2021 = ...?

Akhirnya kita punya 2 persamaan

42! = 42 Mod 43

42! = 45 Mod 47

42! = 43x + 42

42! = 47y + 45

47y + 45 = 43x + 42

43x – 47y = 3

47 = 43 + 4

4 = 47 - 43

43 = 4 * 10 + 3

43 = (47 - 43) * 10 + 3

43 = 47 * 10 – 43 * 10 + 3

47 * -10 + 43 * 11 = 3

47 * -10 – 43 * (-11) = 3

43 * 11 – 47 * 10 = 3

X = 11, y = 10

Contoh Soal 2

42! Mod 2021 = ...?

X = 11, Y = 10

Maka

Kita bisa make salah satu persamaan

42! = 43x + 42 = 43(11) + 42 = 515

42! = 47y + 45 = 47(10) + 45 = 515

515 mod 2021 = 515

Contoh Soal 2

42! Mod 2021 = ...?

X = 2 mod 7

X = 3 mod 5

Sekian Terima Kasih

Ada pertanyaan?