Aritmetika dan Teori Bilangan

Ditulis oleh Daniel Stevanus

Konten

- Barisan dan Deret (Aritmatika, Geometri, Tak Hingga)
- Modulo (Syarat Keterbagian)
- Sigma Tau Phi
- Euler Theorem
- Euclidean Theorem (FPB, KPK)
- Linear Diophantine

DERET ARITMATIKA

Definisi Barisan Ar

- Barisan aritmatika adalah sebuah barisan bilangan yang memiliki pola selisih yang sama pada dua suku yang berurutan.
- Contoh:

1, 2, 3, 4, 5, 6 => barisan aritmatika

+1 +1 +1 +1 +1

15, 10, 5, 0, -5 => barisan aritmatika

-5 -5 -5 -5

10, 20, 30, 40, 50 => barisan aritmatika

+10 +10 +10 +10

Rumus B. Aritmatika

- Secara general, barisan aritmatika dapat ditulis sebagai berikut

$$U_1, U_2, U_3, U_4, \ldots, U_{n-1}, U_n$$

+b +b +b +b +b

- Sehingga, dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\boldsymbol{U_n = U_1 + (n-1)b}$$

Definisi Deret Ar

- Deret aritmatika adalah **jumlah** dari sebuah barisan bilangan yang memiliki pola selisih yang sama pada dua suku yang berurutan.
- Contoh:

1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 =>deret aritmatika

+1 +1 +1 +1 +1

15 + 10 + 5 + 0 + (-5) => deret aritmatika

-5 -5 -5 -5

10 + 20 + 30 + 40 + 50 => deret aritmatika

+10 +10 +10 +10

Rumus D. Aritmatika

- Secara general, deret aritmatika dapat ditulis sebagai berikut

$$U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + \ldots + U_{n-1} + U_n = Sn$$

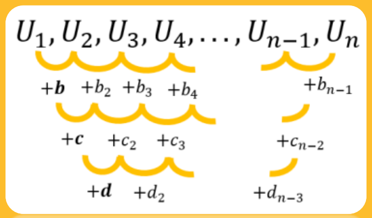
+b +b +b +b

- Sehingga, dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\boldsymbol{S_n = \frac{1}{2}(U_1 + U_n) = \frac{1}{2}(2U_1 + (n-1)b)}$$

DERET ARITMATIKA BERTINGKAT

Rumus B. Aritmatika



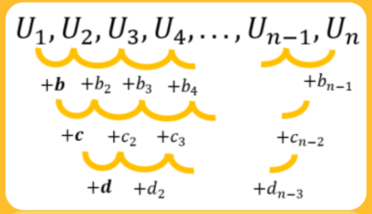
- Sebenarnya rumus suku ke-n barisan aritmatika itu adalah

$$\boldsymbol{U_n = \frac{U_1}{0!} + \frac{(n-1)b}{1!} + \frac{(n-1)(n-2)c}{2!} + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)d}{3!} + \cdots}$$

- Tapi, karena yang ada pada slide sebelumnya bukan barisan aritmatika bertingkat dimana c = 0, d = 0, maka rumus suku ke-n nya hanya

$$\boldsymbol{U_n = U_1 + (n-1)b}$$

Rumus B. Aritmatika



- Jasi, kesimpulannya rumus suku ke-n barisan aritmatika bertingkat itu adalah

$$\boldsymbol{U_n = \frac{U_1}{0!} + \frac{(n-1)b}{1!} + \frac{(n-1)(n-2)c}{2!} + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)d}{3!} + \cdots}$$

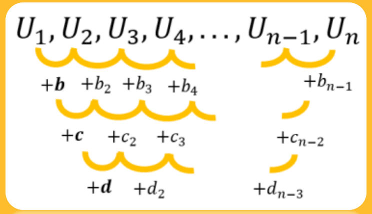
$$U_1, U_2, U_3, U_4, \dots, U_{n-1}, U_n$$

$$+\boldsymbol{b} \quad +b_2 \quad +b_3 \quad +b_4 \qquad\qquad +b_{n-1}$$

$$+\boldsymbol{c} \quad +c_2 \quad +c_3 \qquad\qquad +c_{n-2}$$

$$+\boldsymbol{d} \quad +d_2 \qquad\qquad +d_{n-3}$$

Rumus D. Aritmatika



- Jasi, kesimpulannya rumus Sn aritmatika bertingkat itu adalah

$$U_n = \frac{a}{0!} + \frac{(n-1)b}{1!} + \frac{(n-1)(n-2)c}{2!} + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)d}{3!} + \cdots$$

a b

$$U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + \ldots + U_{n-1} + U_n = S_n$$

c

$+b_1$ $+b_2$ $+b_3$ $+b_{n-1}$

d

$+c_1$ $+c_2$

e

$+d_1$ $+d_2$

DERET GEOMETRI

Definisi Barisan Geo

- Barisan geometri adalah sebuah barisan bilangan yang memiliki pola perkalian dengan rasio yang sama pada dua suku yang berurutan.
- Contoh:

$\underbrace{1, 2}_{x2}, \underbrace{4}_{x2}, \underbrace{8}_{x2}, \underbrace{16}_{x2}$ => barisan geometri

$\underbrace{2, 6}_{x3}, \underbrace{18}_{x3}, \underbrace{54}_{x3}$,=> barisan geometri

$\underbrace{15, 5}_{\times\frac{1}{3}}, \underbrace{\frac{5}{3}}_{\times\frac{1}{3}}, \underbrace{\frac{5}{9}}_{\times\frac{1}{3}}$ => barisan geometri

Rumus B. Geometri

- Secara general, barisan geometri dapat ditulis sebagai berikut

$$U_1, U_2, U_3, U_4, \ldots, U_{n-1}, U_n$$

x r x r x r x r x r

- Sehingga, dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\boldsymbol{U_n = U_1 \times r^{n-1}}$$

Definisi Deret Geo

- Deret geometri adalah **jumlah** dari sebuah barisan bilangan yang memiliki pola perkalian dengan rasio yang sama pada dua suku yang berurutan.
- Contoh:

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 \Rightarrow \text{deret geometri}$$

x2 x2 x2 x2

$$2 + 6 + 18 + 54 \Rightarrow \text{deret geometri}$$

x3 x3 x3

Rumus D. Geometri

- Secara general, deret geometri dapat ditulis sebagai berikut

$$U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + \ldots + U_{n-1} + U_n = Sn$$

x r x r x r x r

- Sehingga, dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\boldsymbol{S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}, \text{untuk } r > 1}$$

$$\boldsymbol{S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}, \text{untuk } r < 1}$$

DERET GEOMETRI TAK HINGGA

Rumus D. Tak Hingga

- Secara general, deret tak hingga dapat ditulis sebagai berikut

$$U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + \ \dots = S_{\sim}$$

x r   x r   x r

a | r

- Sehingga, dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\boldsymbol{S_{\sim} = \frac{a}{1-r}\ , -1 < r < 1}$$

SOAL

Sebuah bola dijatuhkan dari ketinggian $5\ m$ dan memantul kembali dengan $\frac{3}{5}$ kali tinggi sebelumnya. panjang lintasan gerak bola sampai berhenti adalah...

$(A)\ \frac{15}{2}\ m$

$(B)\ \frac{25}{2}\ m$

$(C)\ 15\ m$

$(D)\ 20\ m$

$(E)\ 25\ m$

5m

3m 3m $\frac{9}{5}$m . . .

$$3 + \frac{9}{5} + \frac{27}{25} + \dots = \frac{a}{1-r} = \frac{3}{1-\frac{3}{5}} = \frac{15}{2}$$

$$\frac{15}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2} = 15 + 5$$

$$= 20\ m$$

PEMBAHASAN

Sebuah bola dijatuhkan dari ketinggian $5\ m$ dan memantul kembali dengan $\frac{3}{5}$ kali tinggi sebelumnya. panjang lintasan gerak bola sampai berhenti adalah...

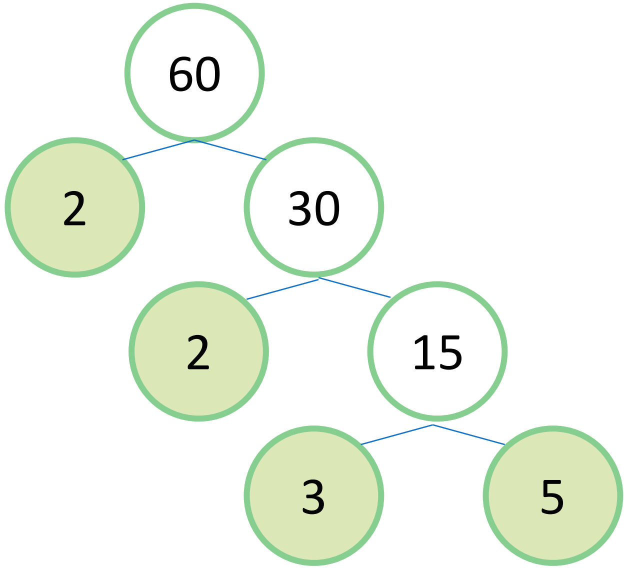
$(A)\ \frac{15}{2}\ m$
$(B)\ \frac{25}{2}\ m$
$(C)\ 15\ m$
$(D)\ 20\ m$
$(E)\ 25\ m$

Sigma, Tau, Phi

FAKTORISASI PRIMA

- Faktorisasi prima sudah pernah dipelajari di SD maupun SMP

- Bagi yang lupa, mungkin gambar berikut bisa mengingatkan anda kembali



- Faktorisasi prima dari 60 adalah $2^2 \times 3^1 \times 5^1$

FAKTORISASI PRIMA

- Sehingga dapat disimpulkan, untuk semua bilangan positif $(x > 0)$ memiliki

  faktorisasi prima sebagai berikut :

$$Faktorisasi\ prima\ dari\ suatu\ bilangan\ adalah$$

$$\boldsymbol{p_1}^{\boldsymbol{e_1}} \times \boldsymbol{p_2}^{\boldsymbol{e_2}} \times \cdots \times \boldsymbol{p_i}^{\boldsymbol{e_i}}$$

p_i = bilangan prima ke-i
e_i = pangkat dari bilangan prima ke-i

SIGMA

$8 \rightarrow 1, 2, 4$ 7
$6 \rightarrow 1, 2, 3$ 6

- SIGMA disimbolkan dengan **σ** atau biasanya kalian kenal dengan **Σ**
- **σ(x)** adalah **jumlah** semua bilangan positif yang **habis membagi** bilangan x
- SIGMA dirumuskan sebagai berikut :

Faktorisasi prima dari x adalah
$\boldsymbol{p_1}^{e_1} \times \boldsymbol{p_2}^{e_2} \times \cdots \times \boldsymbol{p_i}^{e_i}$

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = \left(\frac{p_1^{e_1+1}-1}{p_1-1}\right) \times \left(\frac{p_2^{e_2+1}-1}{p_2-1}\right) \times \cdots \times \left(\frac{p_i^{e_i+1}-1}{p_i-1}\right)$$

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = (p_1^{0} + \cdots + p_1^{e_1})\,(p_2^{0} + \cdots + p_2^{e_2}) \ldots (p_i^{0} + \cdots + p_i^{e_i})$$

TAU

- TAU disimbolkan dengan $\boldsymbol{\tau}$
- $\boldsymbol{\tau}$**(x)** adalah **banyaknya** bilangan positif yang **habis membagi** bilangan x
- TAU dirumuskan sebagai berikut :

Faktorisasi prima dari x adalah
$\boldsymbol{p_1}^{e_1} \times \boldsymbol{p_2}^{e_2} \times \cdots \times \boldsymbol{p_i}^{e_i}$

$$\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}) = (\boldsymbol{e_1} + \mathbf{1}) \times (\boldsymbol{e_2} + \mathbf{1}) \times \cdots \times (\boldsymbol{e_i} + \mathbf{1})$$

Banyak faktor ganjil = Tau bernilai ganjil = ei harus bernilai genap = bilangan kuadrat

PHI

$6 = 1, \cancel{2}, \cancel{3}, \cancel{4}, 5$

$= 2^1 \cdot 3^1$

$\frac{3}{7}$ $\gcd(3,7) = 1$

$fpb(3,7) = 1$

- PHI disimbolkan dengan **Φ**
- **Φ(x)** adalah **banyaknya** bilangan positif yang **saling prima** dengan bilangan x dan **lebih kecil** dari x

  fpb = 1

- PHI dirumuskan sebagai berikut :

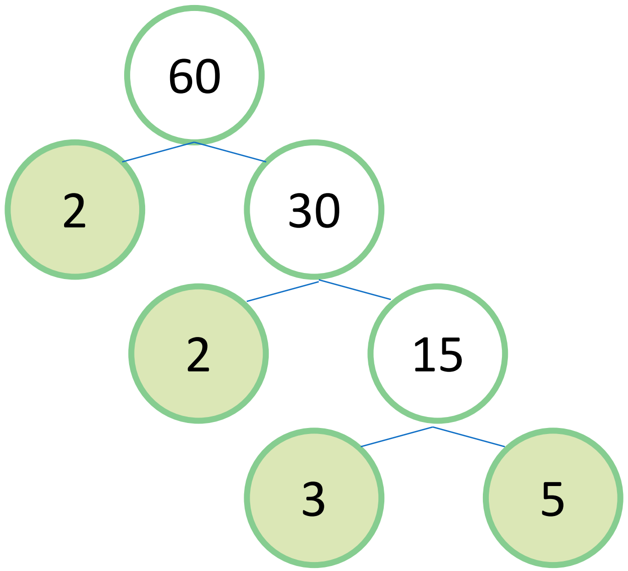
Faktorisasi prima dari x adalah
$p_1^{e_1} \times p_2^{e_2} \times \cdots \times p_i^{e_i}$

$$\Phi(x) = x \times \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \times \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \times \ldots \times \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$$

$$\Phi(6) = 6 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) \times \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \cancel{6} \times \frac{1}{\cancel{2}} \times \frac{2}{\cancel{3}} = 2$$

SIMPLE PROOF

Faktor dari 60	
1	60
2	30
3	20
4	15
5	12
6	10



Faktorisasi Prima dari 60 = $2^2 \times 3 \times 5$

$\sigma(60) = (2^0 + 2^1 + 2^2)\,(3^0 + 3^1)(5^0 + 5^1)$
$\sigma(60) = (1 + 2 + 4)\,(1 + 3)(1 + 5)$
$\sigma(60) = 7 \times 4 \times 6 = 168$

Dimana jumlah semua faktor dari 60 adalah 1+2+3+4+5+6+10+12+15+20+30+60 = **168**

$\tau(60) = (2 + 1) \times (1 + 1) \times (1 + 1)$
$\tau(60) = 3 \times 2 \times 2$
$\tau(60) = 12$

Dimana banyak faktor dari 60 dapat dilihat dari table yaitu sebanyak **12 bilangan**

$\Phi(60) = 60 \times (1 - \frac{1}{2}) \times (1 - \frac{1}{3}) \times (1 - \frac{1}{5})$
$\Phi(60) = 60 \times (\frac{1}{2}) \times (\frac{2}{3}) \times (\frac{4}{5}) = 16$

Dimana banyak bilangan lebih kecil dari 60 dengan fpb(bil,60)=1 ada sebanyak 16 buah, yaitu **1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 49, 53, 59**

SOAL LATIHAN

1. Berapa banyak bilangan yang merupakan faktor dari 2022?
   A. 4
   B. 5
   C. 6
   ~~D.~~ 8
   E. 16
2. Opah penasaran dengan banyaknya angka dari 1-10000 yang saling prima dengan 10000?
   A. 1000
   B. 2000
   C. 3000
   ~~D.~~ 4000
   E. 5000
3. Yoshiyuki mempunyai 2017 lampu dan 2017 saklar. Jika saklar ke-x ditekan, maka semua lampu berkelipatan x yang mati akan menyala, dan yang menyala akan mati. Mula-mula, semua lampu mati dan kemudian Yoshiyuki menekan semua sakelar yang ada. Setelah selesai menekan semua saklar, ada berapa banyak lampu yang menyala? *(TRY OUT KSN-K 2017 by Maximilianus Maria Kolbe)*

   A. 44
   B. 45
   C. 1973
   D. 1974
   E. 1975

~~2 × 1011~~

$2022 = 2^1 \times 3^1 \times 337^1$

$\tau(2022) = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ //

$\phi(10^4) = 10^4 \times \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{5}\right)$ $\quad 10^4 = 2^4 \cdot 5^4$

$= 10^{\cancel{4}\,3} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{4}{\cancel{5}}$

$= 4000$ //

No. 1

No. 2

No. 3

Problem Statement

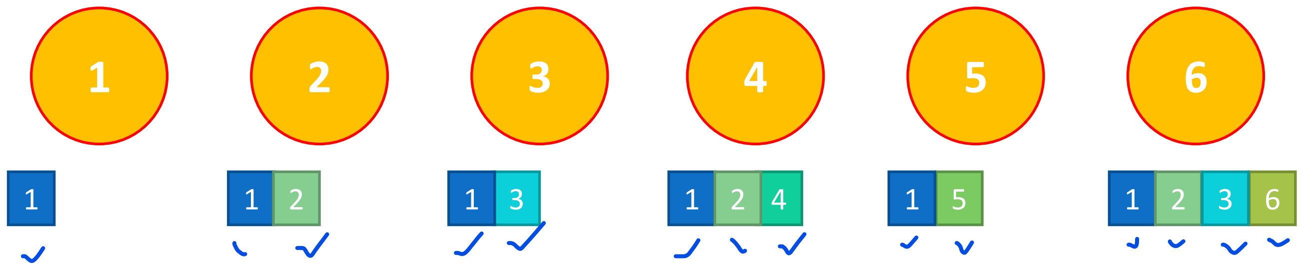
- Terdapat 2017 lampu mati 2017 saklar.
- Saklar ke-i ditekan maka semua lampu kelipatan i yang nyala akan mati, yang mati akan nyala.
- Setelah menekan ke-2017 saklar, berapakah lampu yang nyala?

No. 3

Observasi 1

- Kita coba simulasiin dulu untuk 6 buah lampu dan 6 buah saklar.

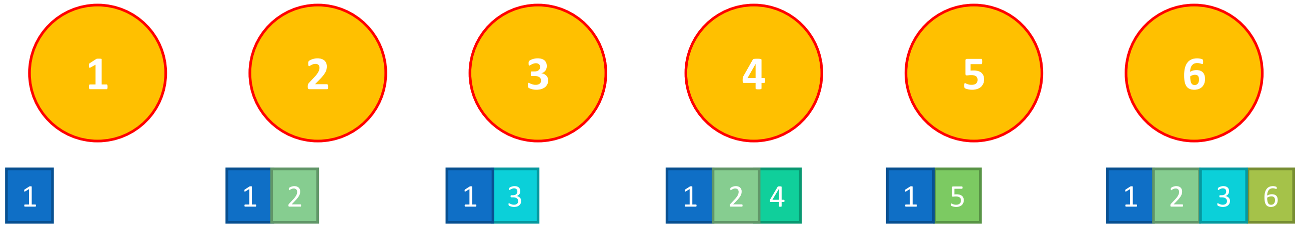
- Setelah itu kita tekan semua saklar yang ada, dan lihat lampu ke-I dipengaruhi oleh siapa saja



No. 3

Observasi 1

- Nah nah nah, apa itu adik-adik?



- Yap, banyaknya saklar yang mempengaruhi suatu lampu i adalah banyak faktor dari i itu.

1	
1	1

2	
1	2

3	
1	3

4	
1	4
2	2

5	
1	5

6	
1	6
2	3

No. 3

Observasi 2

- Dengan mengetahui banyak saklar yang mempengaruhi lampu, maka dapat kita ketahui pula status lampu tersebut setelah penekanan semua saklar.
- Tekan sekali, nyala, tekan dua kali mati, tekan tiga kali nyala, tekan empat kali mati
- Tekan **GENAP** KALI mati, Tekan **GANJIL** kali nyala
- Jadi, banyak lampu yang nyala adalah banyak lampu dengan banyak saklar yang mempengaruhi berjumlah **GANJIL**.

- Oleh karena itu soal kini dapat disederhanakan menjadi

  "Berapa banyak angka diantara 1-2017(inklusif) yang memiliki banyak factor ganjil?"

No. 3

Observasi 3

- Dengan memanfaatkan formula Tau(x) untuk menghitung banyak factor.

- Kita tahu bahwa

$$\boldsymbol{\tau(\mathrm{x}) = (e_1 + 1) \times (e_2 + 1) \times \cdots \times (e_i + 1)}$$

- Atau gampangnya, Tau(x) = (Pangkat+1)(Pangkat+1)…(Pangkat+1)

- Nah dari sini, untuk membuat Tau(x) bernilai ganjil, otomatis kan semua perkaliannya harus Ganjil. Dengan kata lain, **semua pangkat faktor primanya harus Genap.**

No. 3

<u>Penyelesaian</u>

- Pangkat factor prima genap? Coba kita lihat beberapa contohnya.

$$\mathbf{2^4 * 5^2 = 400 = 20^2}$$
$$\mathbf{3^2 * 5^2 = 225 = 15^2}$$
$$\mathbf{2^2 * 3^4 * 5^2 = 90^2}$$

- **Ternyata,** semua bilangan yang memiliki semua pangkat factor primanya genap adalah bilangan kuadrat.
- **Maka, terakhir,** soal dapat disederhanakan menjadi

  “Berapa banyak angka kuadrat diantara 1-2017(inklusif) ?”
- **Jawabannya adalah $\left\lfloor\sqrt{2017}\right\rfloor = 44$**

MODULO

SIFAT MODULO #1

1. $(a + b)\ \boldsymbol{mod}\ \boldsymbol{m} \ = \ ((a\ \boldsymbol{mod}\ \boldsymbol{m}) \ + \ (b\ \boldsymbol{mod}\ \boldsymbol{m}))\ \boldsymbol{mod}\ \boldsymbol{m}$
2. $(a - b)\ \boldsymbol{mod}\ \boldsymbol{m} \ = \ ((a\ \boldsymbol{mod}\ \boldsymbol{m}) \ - \ (b\ \boldsymbol{mod}\ \boldsymbol{m}))\ \boldsymbol{mod}\ \boldsymbol{m}$

<u>Contoh soal</u>

$$\mathbf{201\underline{9}}\ \boldsymbol{mod}\ \mathbf{10} \ = \ \_\ ?$$

Cara 1 : (2010+19) mod 10 = ((2010 mod 10) + (9 mod 10)) mod 10
= (0+9) mod 10
= 9

Cara 2 : (2029-10) mod 10 = ((2029 mod 10) - 10 mod 10)) mod 10
= (9-0) mod 10
= 9

SIFAT MODULO #2

3. $(ab)\ \boldsymbol{mod\ m} = ((a\ \boldsymbol{mod\ m})(b\ \boldsymbol{mod\ m}))\ \boldsymbol{mod\ m}$

<u>Contoh soal</u>

$$144\ mod\ 3 = \_?$$

(12.12) mod 3 = ((12 mod 3)(12 mod 3)) mod 3

= 0 mod 3

[redacted] = 0

SYARAT KETERBAGIAN

- 2, jika digit akhir genap
- 3, jika jumlah digit-digitnya habis dibagi 3
- 4, jika dua digit terakhir habis dibagi 4
- 5, jika digit terakhir 5 atau 0
- 6, jika genap dan jumlah digit-digitnya habis dibagi 3
- 7, angka terakhir dikali 2, dikurangi ke angka yang tersisa, harus habis dibagi 7
- 8, tiga digit terakhir habis dibagi 8
- 9, jika jumlah digit-digitnya habis dibagi 9
- 10, jika digit terakhir adalah 0
- 11, jika jumlah digit pada posisi genap – jumlah digit posisi ganjil habis dibagi oleh 11
- 13, angka terakhir dikali 9, dikurangi ke angka yang tersisa

111/3

100

140

18, 1188

$34\cancel{3}$

$6\ -$

28

TEOREMA MODULO

PENGANTAR

- Apakah Anda pernah menemukan soal seperti di bawah ini?

$$2^{2022}\ mod\ 10 = \ ...?$$

- Yash, saya yakin banyak diantara kalian dapat menyelesaikan soal ini. Ada banyak cara menyelesaikan soal ini, ada yang manual, ada yang cari pola, dll. Tentu saja untuk soal ini paling mudahnya adalah dengan mencari pola pengulangan digit terakhir sebagai berikut:

2^n	Digit Akhir (mod 10)
2^1	2
2^2	4
2^3	8
2^4	6

2^n	Digit Akhir (mod 10)
2^5	2
2^6	4
2^7	8
2^8	6

- Kemudian, Anda tahu bahwa digit terakhir yang sama kembali terulang setiap penambahan 4 pangkat.

PENGANTAR

- Lalu, Anda menyederhanakan soalnya menjadi seperti ini

$$2^{2022\ \boldsymbol{mod\ 4}}\ mod\ 10 = \ \ldots?$$

- Lalu seperti ini

$$2^2\ mod\ 10 = \cdots?$$

- Lalu didapatkan hasil seperti ini

$$4\ mod\ 10 = \mathbf{4}$$

- Perhatikan apa yang di bold merah. Anda melakukan **mod 4** karena tau bahwa **pola hasil mod 10 yang sama** terulang **setiap kenaikan 4 pangkat**.

PENGANTAR

- Bagaimana jika soal diganti menjadi

$$2^{2022}\ mod\ 2017 = \ \ldots ?$$

- Kini, Anda tidak mungkin mencari pola perulangan hasil mod 2017 dengan cara tabel seperti tadi. Jadi, sekarang bagaimana?
- Nah, sebenarnya **angka 4 tadi merupakan hasil dari Phi(10),** kalau ga percaya coba hitung aja Phi(10).
- Jadi kalau $2^{2022} mod\ 2017$ bagaimana? Ya, sama aja dengan

$$2^{2022\ mod\ phi(2017)} mod\ 2017$$

- Banyak lagi cara cepat lainnya. Yuk, simak slide berikutnya.

EULER THEOREM

EULER THEOREM

$$a^{\Phi(n)} mod\ n = 1$$

atau

$$a^b\ mod\ n = \ a^{b\ mod\ \Phi(n)} mod\ n$$

Dengan syarat $\gcd(a, n) = 1$.

gcd itu FPB ges

FERMAT LITTLE THEOREM

FERMAT LITTLE THEOREM

$$a^{p-1} - 1\ (mod\ p) = 0\ (mod\ p)$$

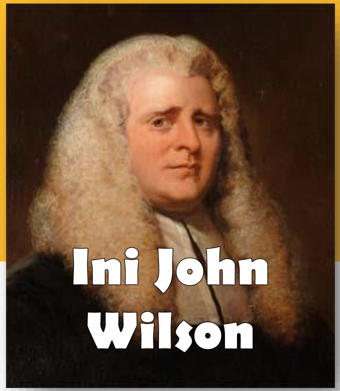
atau

$$a^{p-1}\ mod\ p = 1\ (mod\ p)$$

$\boxed{\text{Dengan syarat } p \text{ adalah balagan prima.}}$

WILSON THEOREM

WILSON THEOREM



$$(p-1)!\ mod\ p = -1\ (mod\ p)$$

atau

$$(p-1)!\ mod\ p = p-1\ (mod\ p)$$

Dengan syarat p adalah balagan prima.

CONTOH SOAL

$5^2 \bmod 10$

$\phi(2017) = 2016$

Sekarang jika ketemu soal seperti ini, sudah tidak pusing ya adik-adik :D

1. $3^{2021} \, mod \, 17 = 5$
2. $3^{2020} mod \, 2021$
3. $3^{2018} mod \, 2019$
4. $3^{2018^{2019^{2020^{2021^{2022^{2023}}}}}} \quad mod \, 2017$
5. $2018! \; mod \; 2019$

$= 0$

$3^{2016^{\cdots}} \bmod 2017$

$2016^{\cdots} \bmod 2016$

$3 \bmod 2017$

$3^0 \bmod 2017$

$2019 \neq$ prime

$\boxed{1}$

fpb$(3, 2017) = 1$

EUCLIDEAN THEOREM/ALGORITHM

EUCLIDEAN THEOREM

$$\boldsymbol{gcd\ (a,b) = gcd(b, a\ mod\ b)}$$

dengan

$$\boldsymbol{gcd(a, 0) = a}$$

“FPB dari a dan b sama dengan fpb dari b dan (a % b)”

GCD = Greatest Common Divisor atau Bahasa Indonesianya **Faktor Persekutuan Terbesar (FPB).**

CONTOH SOAL

Sebenarnya, Euclidean Theorem ini tidak cocok untuk hitung Manual yak, karena masih lebih efisien pakai pohon faktor prima. Tapi didalam Programming, ini lebih cepat dan efisien. Akan sangat melelahkan jika Anda mengimplementasikan pohon factor prima pada codingan Anda.

Tentukan FPB dari 215 dan 35!

FPB(215,35) = FPB(35, 215 % 35)
FPB(35,5) = FPB (5, 0)
FPB(5,0) = 5

Ketemu deh..

LINEAR DIOPHANTINE

LINEAR DIOPHANTINE

$2x + 4y = K \cdot 2$

$$Ax + By = gcd(A, B) * K$$

$5x + 10y = \cancel{1,2,3,4}\ K \cdot 5$

A,B,K adalah bilangan bulat (Integer)

“Akan selalu ada bilangan bulat x dan y dimana Ax+By adalah kelipatan dari FPB(A,B)”

CONTOH

Mungkinkah terdapat nilai x dan y untuk persamaan berikut!

- $1000x + 250y = 20$

Jawab : **Tidak, karena 20 bukan merupakan kelipatan dari 250(yaitu FPB dari 1000 dan 250)**

- $1000x + 17y = 1$

Jawab : **Ada, karena 1 merupakan kelipatan dari 1(yaitu FPB dari 1000 dan 17)**

"Akan selalu ada bilangan bulat x dan y dimana Ax+By adalah kelipatan dari FPB(A,B)"

SOAL EXPERT 1

$$100!\, mod\ 707 = \ \dots ?$$

$$100!\, mod\ 7 \times 101 = \ \dots ?$$

$$1.2.3 \dots 7 \dots 99.100\ mod\ 7 \times 101 = \ \dots ?$$

Kita boleh anggap $100!$ sebagai $7a$, dimana nantinya **kita akan mencari** $\boldsymbol{nilai\ a}$ yang sudah **diperkecil** namun memiliki **hasil mod yang sama.**

Dengan Wilson's Theorem, kita tahu bahwa

$$\boldsymbol{7a = 100\ (mod\ 101)}$$

SOAL EXPERT 1

$$100!\, mod\ 707 = \ \ldots ?$$

Dengan Wilson’s Theorem, kita tahu bahwa

$$\boldsymbol{7a = 100\ (mod\ 101)}$$

Kita dapat menuliskan 7a sebagai bentuk berikut:

$$7a = 101x + 100$$

(7a sama dengan 101 kali suatu bilangan ditambah sisanya yaitu 100)

Kemudian pindah ruas menjadi:

$$7a - 101x = 100$$

Dengan Linear Diophantine tadi, kita tahu bahwa terdapat nilai (a,x) yang memenuhi persamaan diatas karena fpb(7,101) = 1.

11
7 / 80
7
10
7
3

$80 = 7.11 + 3$

EXTENDED EUCLIDEAN ALGORITHM

SOAL EXPERT 1

$$100!\ mod\ 707 = \ ...?$$

Mari kita cari nilai a dan x itu dengan **Extended Euclidean Algorithm**

$$7a - 101x = 100$$

Mulai dari

$$101 = 7 \times 14 + 3$$

$$7 = 3 \times 2 + \mathbf{1}$$

1 ini fpb mereka kan..

$^{101}/_{7} = 14$ bersisa 3

$3 = 101 - 7 . 14$

Kemudian menjadi

$$\mathbf{1} = 7 - 2 \times 3$$

$$\mathbf{1} = 7 - 2 \times (101 - 7 \times 14)$$

$$\mathbf{1} = 7 \times 29 - 2 \times 101$$

SOAL EXPERT 1

$100! \, mod \, 707 = \; ...?$

$201 = 7 \times 29 . 201$ — 8

7a

Sekarang, kita tahu bahwa

$$\mathbf{1} = 7 \times 29 \; - 2 \times 101$$

403 ✓
302 ✓

Sedangkan kita maunya 100 = 7a – 101x bukan 1 = 7a – 101x 201 ✓ 302 mod 101 = 100

Ya tinggal dikali 100 aja.

$$\mathbf{1} \times \mathbf{100} = 7 \times 29 \times \mathbf{100} \; - 2 \times 101 \times \mathbf{100}$$

$$100 = 7 \times \boxed{2900} - 101 \times 200$$

7a

Jadi, nilai $\boldsymbol{a} \; = \; \mathbf{2900}$.

SOAL EXPERT 1

$100!\, mod\ 707 = \ ...?$

Kini soalnya menjadi

$$7a\ mod\ 707 = \ ...?$$

$$7(2900) mod\ 707 = \cdots ?$$

And.....

$$20300\ mod\ 707 = \mathbf{504}$$

SOAL EXPERT 2

$$42! \, mod \; 2021 = \; \ldots ?$$

$42! \, mod \; 43 \times 47 = \; \ldots ?$

Kita tahu bahwa **42! mod 43 = 42**

Trus bagaimana? ~~Dah kosongin ajah kalo keluar ya,atau gacha 2023~~

Kita juga tau bahwa **46! Mod 47 = 46,** kalau kita buka lagi jadilah

$\mathbf{42! \times 43 \times 44 \times 45 \times 46 \; \boldsymbol{mod} \; 47 = 46}$

$\mathbf{42! \times -4 \times -3 \times -2 \times -1 \; \boldsymbol{mod} \; 47 = 46}$

$\mathbf{42! \times 24 \; \boldsymbol{mod} \; 47 = 46}$

SOAL EXPERT 2

$42!\,mod\ 2021 = \ \ldots ?$

$$\mathbf{42! \times 24\ \mathit{mod}\ 47 = 46}$$

Ada dua cara buat ngilangin 24

Cara 1: Multiplication Inverse

$$\mathbf{41!\,\mathit{mod}\ 47 = \frac{46}{24}\ (\mathit{mod}\ 47)}$$

$$47 = 1 \times 24 + 23$$

$$24 = 1 \times 23\ - 1$$

24.P mod 47 = 1

Multiplication Inverse itu cari nilai p nya

$$1 = 24\ - 23$$

$$1 = \mathbf{2} \times 24\ - 47$$

$$\mathbf{42!\,\mathit{mod}\ 47 = 46 \times 2(\mathit{mod}\ 47)}$$

$$\mathbf{42!\,\mathit{mod}\ 47 = 45\ (\mathit{mod}\ 47)}$$

Cara 2: Keluarin, Mod, Balikin

- Keluarin $\times$ 42 dari 42!

$$\mathbf{41! \times 2 \times 21 \times 24\ \mathit{mod}\ 47 = 46}$$

- Kaliin 2 dengan 24

$$41! \times 21 \times 48\ mod\ 47 = 46\ (mod\ 47)$$

- Mod yang bisa di mod

$$41! \times 21 \times 1\ mod\ 47 = 46\ (mod\ 47)$$

- Balikin 42 dengan kali ruas kiri kanan kali 2

$$41! \times 21 \times 1 \times \mathbf{2}\ mod\ 47 = 46 \times \mathbf{2}(mod\ 47)$$

$$42!\,mod\ 47\ = 45(mod\ 47)$$

SOAL EXPERT 2

$42! \, mod \, 2021 = \; ...?$

Sekarang, kita ada dua persamaan, yaitu

- $42! \, mod \, 43 = 42$
- $42! \, mod \, 47 \; = \; 45$

Atau

- $\mathbf{42! = 43x + 42}$ **... (1)**
- $\mathbf{42! = 47y + 45}$ **... (2)**

SOAL EXPERT 2

$42! \; mod \; 2021 = \; ...?$

- $\mathbf{42! = 43x + 42}$ **... (1)**
- $\mathbf{42! = 47y + 45}$ **... (2)**

Mari kita eliminasi!

$$43x - 47y - 3 = 0$$

$$\mathbf{43x - 47y = 3}$$

Pakai Extended Euclid Algorithm lagi untuk mencari nilai x dan y

$$47 = 43 + 4$$

$$43 = 4 * 10 + 3$$

SOAL EXPERT 2

$42! \; mod \; 2021 = \; \ldots ?$

$$3 = 43 \; - 4 * 10$$

$$3 = 43 - 10 * (47 - 43)$$

$$3 = 11 * 43 - 10 * 47$$

Berarti nilai x adalah 43 dan y adalah 10.

Kini 42! Dapat disederhanakan menjadi salah satu dari

- $\mathbf{42! = 43x + 42}$ **= 43(11) +42 = 515**
- $\mathbf{42! = 47y + 45 = 47(10) + 45 = 515}$