

# Pengantar Kombinatorika

By Abdan Hafidz

- Kaidah Berhitung : Aturan Penjumlahan, Perkalian, dan Pengurangan (Komplementer)
- Prinsip Inklusi - Eksklusi
- Pigeonhole Principle (PhP)
- Permutasi : Permutasi Unsur berbeda, Permutasi Unsur Berulang, Permutasi Siklis
- Kombinasi : Kombinasi Unsur Berbeda, Kombinasi Unsur Berulang (Stars and Bars)
- Pengantar Peluang

# Aturan Penjumlahan

Beberapa kejadian  $K_1, K_2, K_3, \dots, K_N$ . Antar kejadian ( $K_i$  dan  $K_j$ ) tidak saling mempengaruhi tidak mempunyai irisan => Aturan Penjumlahan

# Aturan Penjumlahan

Di suatu sekolah terdiri dari 5 ruang kelas X ( $X-1$ ,  $X-2$ ,  $X-3$ ,  $X-4$ , dan  $X-5$ ), kelas  $X-1$  terdiri dari 20 murid, kelas  $X-2$  terdiri dari 15 murid,  $X-3$  terdiri dari 17 murid,  $X-4$  dan  $X-5$  terdiri dari 10 murid.

Jika dari masing – masing kelas akan dipilih satu orang perwakilan untuk mengikuti rapat Hokage OSIS ada berapa banyak caranya?

$$= \frac{20}{x_1} + \frac{15}{x_2} + 17 + 10 + 10 = 72 \text{ cara}$$

$x_i$  = Penilih  $\frac{x_i}{x_1}$  Perwakilan kelas  $X - i$

$X_1$  tidak boleh ganggu  $X_2$

$X_1$  ————— ir —————  $X_3$

Penilih :  
Perwakilan setiap kelas  
tidak sawing Mengganggu'

# Aturan Penjumlahan

Pak Dengklek menggambar sebuah segitiga pada selembar kertas, ia memiliki pilihan untuk menggambar sebuah segitiga siku – siku atau segitiga sama kaki, ia bisa saja menggambar segitiga dengan cara membuat variasi rotasinya  $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ, 360^\circ$ , ada berapa banyak gambar berbeda yang mungkin dihasilkan?

$$K_1 = \{ \triangle \}$$

$$K_2 = \{ \triangle \text{ dengan } 2 \text{ sisi } \underline{\text{beriarsa}} \}$$

$$\begin{aligned} \text{ans} &= 4 + 4 \\ &= 8 \end{aligned}$$

$$K_1 = \{ \triangle, \triangle \text{ } \underline{90^\circ}, \triangle \text{ } \underline{180^\circ}, \triangle \text{ } \underline{270^\circ} \} = 4$$

$360^\circ$   
Gambar berbeda

$$K_2 = \{ \triangle \text{ dengan } 2 \text{ sisi } \underline{\text{beriarsa}} \} = 4$$

# Aturan Penjumlahan

Perhatikan potongan program di bawah ini!

```
while(N--) {
    for(int i = 1; i<=N; i++) {
        cout<<"kwak "<<endl;
    }
}
```

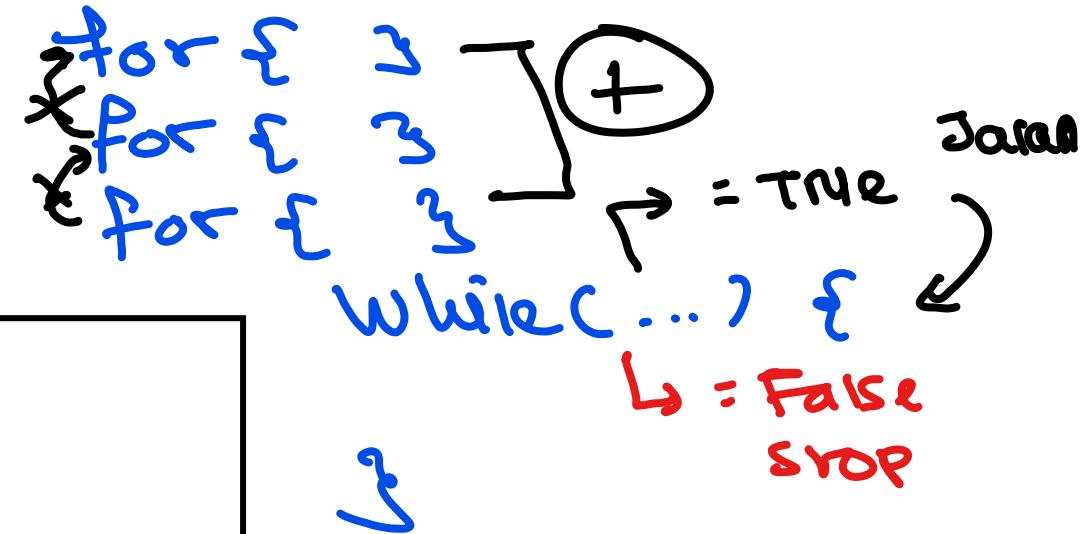
Mulai loop dari  $N - 1$

Ada berapa banyak string "kwak" yang dihasilkan jika  $N = 100$

$$N = 5$$

While  $\underline{N = -1} \rightarrow \{ \begin{matrix} N = 4 \\ N = 3 \\ N = 2 \\ N = 1 \end{matrix}$

$$\begin{aligned} "kwak" &= 99 + 98 + 97 + \dots + 1 \\ &= \cancel{(99 + 1)}^{50} \cancel{99}^{\frac{50}{2}} \\ &= 5050 - 100 = \underline{\underline{4950}} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} N &= 99 \rightarrow cout \text{ kwak} \\ N &= 98 \rightarrow \text{kwak } \cancel{99} \cancel{98} \end{aligned}$$

⋮

$$N = 0 \rightarrow \text{ } =$$

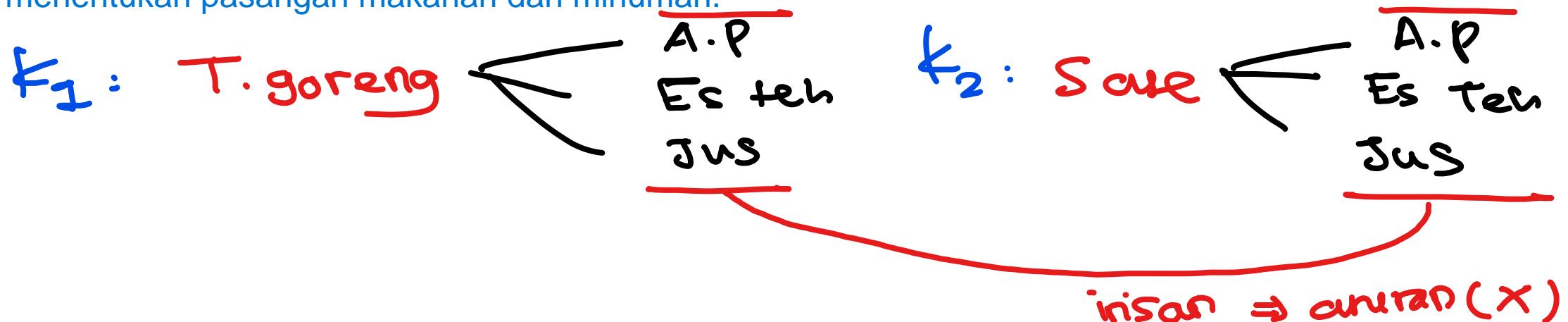
# Aturan Perkalian

$$5 + 5 + 5 = 5 \times 3$$

Kejadian K<sub>1</sub>, K<sub>2</sub>, K<sub>3</sub>, ..., K<sub>n</sub>, antar kejadian mempengaruhi / mempunyai irisan / saling terikat => Aturan Perkalian (DAN)

( P and Q ) = P dan Q terjadi bersamaan

3 jenis minuman (Air Putih, Es Teh, Jus), 2 jenis makanan (Telur Goreng, Sate) ada berapa banyak cara menentukan pasangan makanan dan minuman.



# Aturan Perkalian

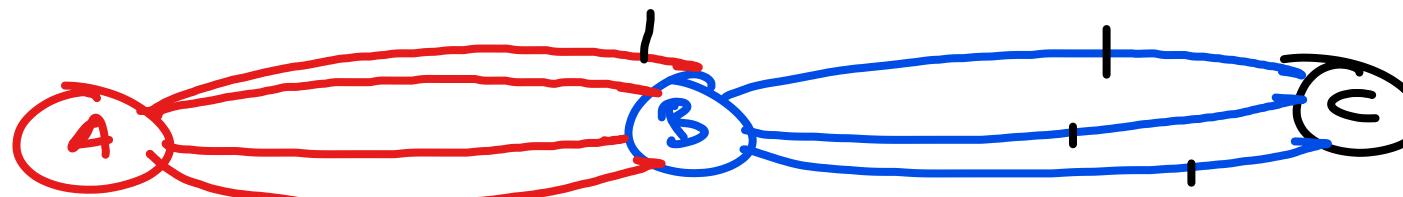
1. A
2. B
3. C

String Samajang

- Terdapat 10 butir soal Olimpiade Informatika di mana soal berjenis pilihan ganda yang terdiri dari opsi A,B,C,D, atau E, ada berapa banyak cara Pak Dengklek menjawab soal tersebut jika ia diperbolehkan mengosongkan jawaban?

$$\frac{6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6}{\begin{matrix} \text{A/B/C/D/E/Empty} \\ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 0 \end{matrix}} = 6^{10}$$

Dari kota A ke kota B dilayani oleh 4 bus dan dari B ke C oleh 3 bus. Seseorang berangkat dari kota A ke kota C melalui B kemudian kembali lagi ke A juga melalui B. Jika saat kembali dari C ke A, ia tidak mau menggunakan 2 bus, maka banyak cara perjalanan orang tersebut adalah



$$\begin{aligned} \text{ans} &= \text{Pergi} * \text{Pulang} \\ &= 12 \times 6 = 72 // \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} * \text{ Pergi} &= 4 \times 3 \\ &= 12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} * \text{ Pulang} &= 3 \times 2 \\ &= 6 \end{aligned}$$

# Aturan Perkalian

27

Perhatikan potongan program di bawah ini!

```
for(int i = 1; i<=10; i++) {  
    cout<<i;  
    for(int j = 1; j<=27; j++) {  
        for(int k = 1; k<=10; k++) {  
            if(k%2 == 0) cout<< k << endl;  
        }  
        if(j%3 == 0) cout<<j;  
    }  
}
```

$i \ j \rightarrow i$   
 $i \ j \leftarrow \rightarrow i \ 1 \ digit, j \ 1 \ digit, \leftarrow 1 \ digit$   
 $i \ j = 9 * 3 * 4 = 108 \ cara$

$$+ 1 \ digit = 9$$

$$+ i = \{1 - 9\} = 9 \ cara$$

$$+ j = \frac{2 \ digit}{i} = 1 + 27 + 36 + 12 = 76$$

$$+ i = \sqrt{103} = 1 \ cara$$

$$+ i \ j \rightarrow i$$

$$1 \ digit = \{1 - 9\} = 9$$

$$1 \ digit, j \ keiparan_3$$

$$j = \{3, 6, 9\} = 3 \ cara$$

$$9 * 3 = 27$$

$$+ i \leftarrow \rightarrow i$$

$$1 \ digit, \leftarrow 1 \ digit$$

$$= 9 \ cara, \leftarrow = \{2, 4, 6, 8\}$$

$$9 * 4 = 36 = 9 \ cara$$

$i \leftarrow$

$$+ j \leftarrow = 3 * 4 = 12$$

Ada berapa banyak bilangan  $< 4$  digit yang dicetak oleh program?

$$\downarrow \min = 1 \ digit$$

$$(12 \atop 12) \ 3^2 \ cara$$

Kewaran

berupa angka  $< 4$  digit

# Aturan Pengurangan (Komplemen)

{12, 15, 18, 21, 24, 3}

\* 3 digit = 108 +  $\rightarrow K3 < 27$

$$\begin{array}{lllll} i & j & < & i & 2 \text{ digit} \\ i & k & < & i & 1 \text{ digit} \\ j & k & < & j & 2 \text{ digit} \\ & & & j & 1 \text{ digit} \\ & & & k & 2 \text{ digit} \\ & & & j & 1 \text{ digit} \\ & & & k & 1 \text{ digit} \\ & & & j & 2 \text{ digit} \\ & & & k & 2 \text{ digit} \\ & & & j & 1 \text{ digit} \\ & & & k & 1 \text{ digit} \end{array} = \begin{array}{l} 9 \times 5 = 45 \\ 1 \times 3 = 3 \\ 9 \times 1 = 9 \\ 1 \times 1 = 1 \\ 3 \times 1 = 3 \\ 5 \times 1 = 20 \end{array}$$

$$= 9 + 76 + 108 + 45 + 3 + 9 + 1 + 3 + 20$$

# Aturan Pengurangan (Komplemen)

8. Perhatikan pernyataan logika berikut

$$\begin{aligned}
 & F \rightarrow T \wedge T = T \equiv T \quad F \text{ xor } F = F \\
 & ((\text{if } p \text{ then } q) \text{ and } r) \text{ iff not } (p \text{ or } (\neg q \text{ and } r)) \\
 & (P \rightarrow q \wedge r) \equiv (F \vee (q \oplus r)) \\
 & \text{Jika } \begin{array}{c} T \\ \hline T \end{array} \quad \begin{array}{c} F \\ \hline F \end{array} \neq \begin{array}{c} T \\ \hline F \end{array} \quad \begin{array}{c} F \\ \hline T \end{array} = \begin{array}{c} T \\ \hline T \end{array} \\
 & a \text{ iff } b = (\text{if } a \text{ then } b) \text{ and } (\text{if } b \text{ then } a) \\
 & \begin{array}{c} T \\ \hline F \end{array} \neq \begin{array}{c} F \\ \hline F \end{array} \quad \begin{array}{c} T \\ \hline F \end{array} \neq \begin{array}{c} F \\ \hline T \end{array} \\
 & \text{serta} \quad \begin{array}{c} F \\ \hline F \end{array} \\
 & a \text{ xor } b = (a \text{ and not } b) \text{ or } (b \text{ and not } a)
 \end{aligned}$$

$P \rightarrow q$   
 false, kerika  
 $P = \text{False}, q = \text{False}$

$P \leftrightarrow q$  (biimpikan)  
 $P \equiv q$

$$P \text{ xor } q$$

$$P \text{ ! } = q$$

P	q	r	hasil	
			F	F
F	T	F	F	F
T	F	F	F	F
F	F	F	F	F

maka berapa banyak cara berbeda untuk menentukan nilai  $p, q, r$  sehingga pernyataan tersebut menjadi benar?

$$\begin{array}{ccc}
 P & q & r \\
 \nearrow & \nearrow & \\
 \text{True/False} & &
 \end{array}$$

$$|S| = 2^3$$

Salah < Benar

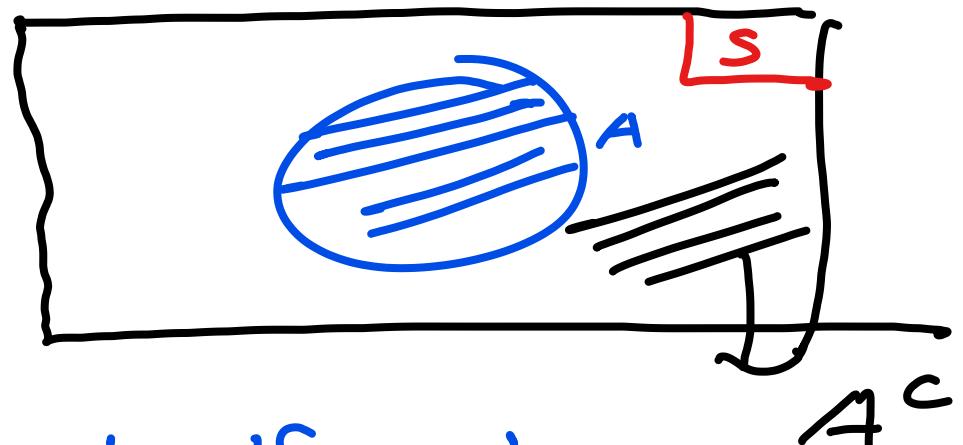
$$|A^c| = 5$$

$$\begin{aligned}
 |A| &= 2^3 - 5 \\
 &= 3 //
 \end{aligned}$$

# Aturan Pengurangan (Komplemen)

F T T F  
F F T F

Alih-alih hitung berapa banyak yang memenuhi, hitung berapa banyak yang tidak memenuhi



$$|A|^c < |A|$$

$$\begin{aligned}|S| &= |A| + |A^c| \\ |A^c| &= |S| - |A| \\ |A| &= |S| - |A^c|\end{aligned}$$

$$A^c$$

A

Di negeri yang indah ada 3000 orang, terdapat 1200 orang jahat, ada berapa banyak orang yang baik?

$$\begin{aligned}|A| &= |S| - |A^c| \\ &= 3000 - 1200 \\ &= \underline{\underline{1800 \text{ orang}}}\end{aligned}$$

# Aturan Pengurangan (Komplemen)

~~• Kwak x y  $\geq$  Kwik~~  
~~• Kwak x Kwik  $\geq$~~   
 : Lambat

Ada 5 orang Kwak, Kwik, Kwok, Kwek, dan Kwak yang duduk di sebuah kursi taman memanjang. Ada berapa banyak posisi duduk mereka jika Kwak dan Kwik tidak boleh duduk bersebelahan?

$$|S| = \underline{5 \ 1 \ 3 \ 2 \ 1} = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5!$$

Kwak Kwik (4!)  
Kwik Kwak (4!)

$|A|$  = tidak boleh Kwak Kwik

$$|A^c| = \text{boleh } \underline{\text{Kwak Kwik}} = X \rightarrow XABC = 4! \times 2 = 1$$

$$|A| = 5! - 4! \times 2 = 5 \times 4! - 4! \times \frac{2}{2} = (5-2)1! = 3 \times 24 = 72$$

Dua buah dadu dilemparkan secara bersamaan, ada berapa banyak kemungkinan hasil jumlah mata kedua dadu

$$\star \text{sum} = 4$$

$\{1,3\}, \{2,2\}$

$\cancel{\{3,1\}}$

$$\star \text{sum} = 5$$

$\{2,3\}, \{3,2\}$

cara euy!

$$\left. \begin{array}{l} \text{ans} = 3 \\ \text{cara} = 36 - 3 \\ = 33 \end{array} \right\} 3 \text{ cara}$$

$$\left. \begin{array}{l} \star \text{sum} = 2 \Rightarrow 1 \text{ cara} \\ \star \text{sum} = 3 \Rightarrow 2 \text{ cara} \end{array} \right\} 3 \text{ cara}$$

$$|S| = D_1 \quad D_2$$

$$6 \times 6 = 36$$

$$|A| = \text{sum} > 3 \dots ?$$

$$\star \text{sum} = 12$$

:)

$$\overline{|A^c|} = 3 \text{ cara}$$

$$|A| = |S| - |A^c|$$

$$|A^c| = \sim (\text{sum} > 3)$$

$$= \text{sum} \leq 3$$

# Aturan Pengurangan (Komplemen)

```
int ret, res;  
res = 0;  
for(int i = 2; i<= 100; i++) {  
    ret = 0;  
    for(int j = 1; j<=i; j++) {  
        if(ret > 2) {  
            res++;  
            break;  
        }  
        else if(i%j == 0) ret++;  
    }  
}  
}  $|A| = \text{Banyak Non Prima}$   $2 \leq i \leq 100$   
 $|A^c| = \text{Bil. Prima} = 25$   $99 - 25$   
ans =  $\frac{74}{2}$ 
```

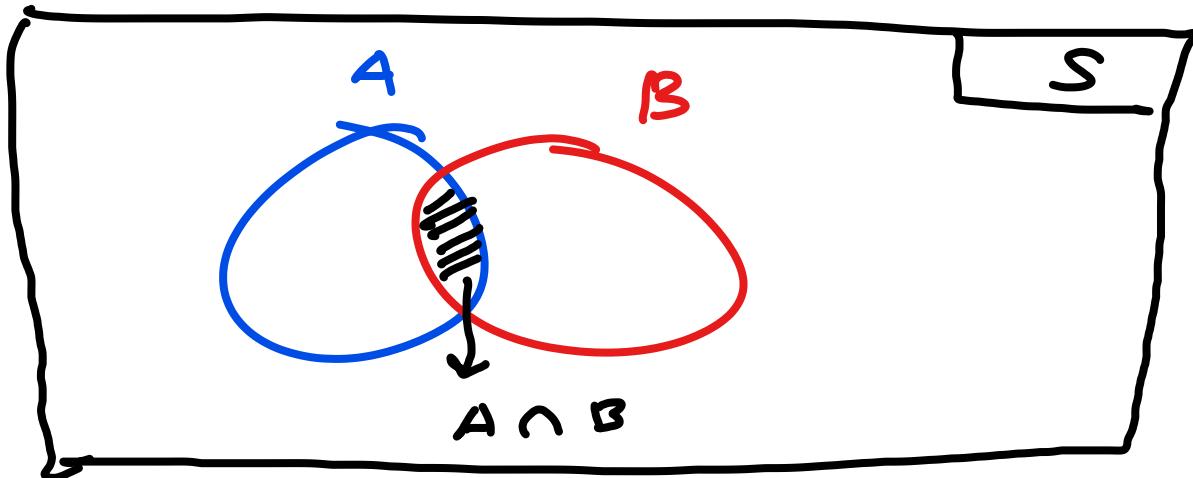
Tentukan berapa nilai akhir res

$i \bmod j = 0$   
 $\downarrow$   
 $j$  adalah faktor  
 $i$   
Senap  $j$  faktor  $i$   
 $ret + 1$   
 $j \leq i$   
 $ret = \text{banyak faktor}$   
dan  $i$

untuk senap  $i$  cek  $ret > 2$

Non Prima  $\leftarrow$  B. Faktor  $> 2$  ?  $\rightarrow res + 1$

# Inklusi Eksklusi



$$|A \cup B| = \underline{|A| + |B|} - \underline{\underline{|A \cap B|}}$$

Dari angka 1 -- 10 ada berapa banyak bilangan habis dibagi 2 atau 3

$$A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$$

$$B = \{3, 6, 9\}$$

$$A \quad B$$

$$A \cup B = \{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10\}$$

$$\begin{aligned} A \cup B &= \{2, 4, 6, 8, 10\} + \{3, 6, 9\} \\ &= \{2, 4, 6, 8, 9, 10\} \end{aligned}$$

wilangkan iisan

# Inklusi Eksklusi

6 sekawan (A,B,C,D,E, dan F) ingin duduk di bioskop menonton bersama. F tidak ingin duduk di sebelah E. E ingin duduk di sebelah C. A tidak ingin duduk di sebelah B. D ingin selalu duduk di sebelah B.

Ada berapa banyak konfigurasi duduk?

$$|A^C| = (EC \wedge DB) \wedge (FB \vee AB) \quad \checkmark$$

$$\begin{aligned} |A| &= F \text{ tidak boleh duduk E} \wedge \\ &\quad EC \wedge A \text{ tidak boleh B} \wedge DB \\ &= \underline{\underline{EC \wedge DB}} \wedge \cancel{(C \cancel{\wedge} \cancel{E})} \wedge \cancel{(A \cancel{\wedge} \cancel{B})} \end{aligned}$$

$|S|$  = Bangat cara

$$\begin{aligned} &= \frac{EC \wedge DB}{96} \quad \dots \quad = \frac{XY}{2!2!} AF. - \frac{4!}{\cancel{4!}} \cdot \frac{2!}{\cancel{2!}} \cdot \frac{2!}{\cancel{2!}} \end{aligned}$$

# Inklusi Eksklusi

Banyak bilangan habis dibagi 2 atau 3 dari 1 -- 100 =

```

int ret = 0;
for(int i = 1; i<= 100; i++) {
    if(i%2 == 0) {
        ret++;
    } else if(i % 3 == 0) {
        ret++;
    }
}

```

$$|A \cap B| = \left\lfloor \frac{100}{6} \right\rfloor \leftarrow |B| = \text{bil. habis dibagi 3}$$

$$= 33 \cancel{35} = 33$$

$$|A| = \left\lfloor \frac{100}{2} \right\rfloor$$

$|A \cap B| = \text{habis dibagi 2 \& 3}$

$$\begin{aligned}
& \text{Bit. habis dibagi 2} = \left\lfloor \frac{100}{2} \right\rfloor \\
& \text{Bit. habis dibagi 3} = \left\lfloor \frac{100}{3} \right\rfloor \\
& = |A| + |B| - |A \cap B| \\
& = 50 + 33 - 16 \\
& = \left\lfloor \frac{100}{6} \right\rfloor \\
& = 16
\end{aligned}$$

A Komplemen = E dan C bersebelahan D dan B bersebelahan, FB bersebelahan atau AB bersebelahan

$$\begin{aligned}
& P \cap (q \cup r) = (P \cap q) \cup (P \cap r) \\
& |A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|
\end{aligned}$$

# Inklusi Eksklusi

```

int ret = 0;
for(int i = 1; i<= 100; i++) {
    if(i%2 == 0) {
        ret++;
    }
    if(i % 3 == 0) {
        ret++;
    }
}
    
```

$$|A| = \frac{EC + DBF}{x_8}$$

$$\begin{array}{r} \cancel{XA \underline{DBF}} \\ \times A \underline{FB D} \\ \hline Y \end{array} \quad \begin{array}{l} \cancel{3! \times 2!} \\ \cancel{3! \times 2!} \\ + \end{array}$$

$$|B| = EC DBA$$

$$A \cap B$$

$$|A^c| =$$

$$24 + 24 = 48$$

} unumurah

$$ans = |S| - |A^c|$$

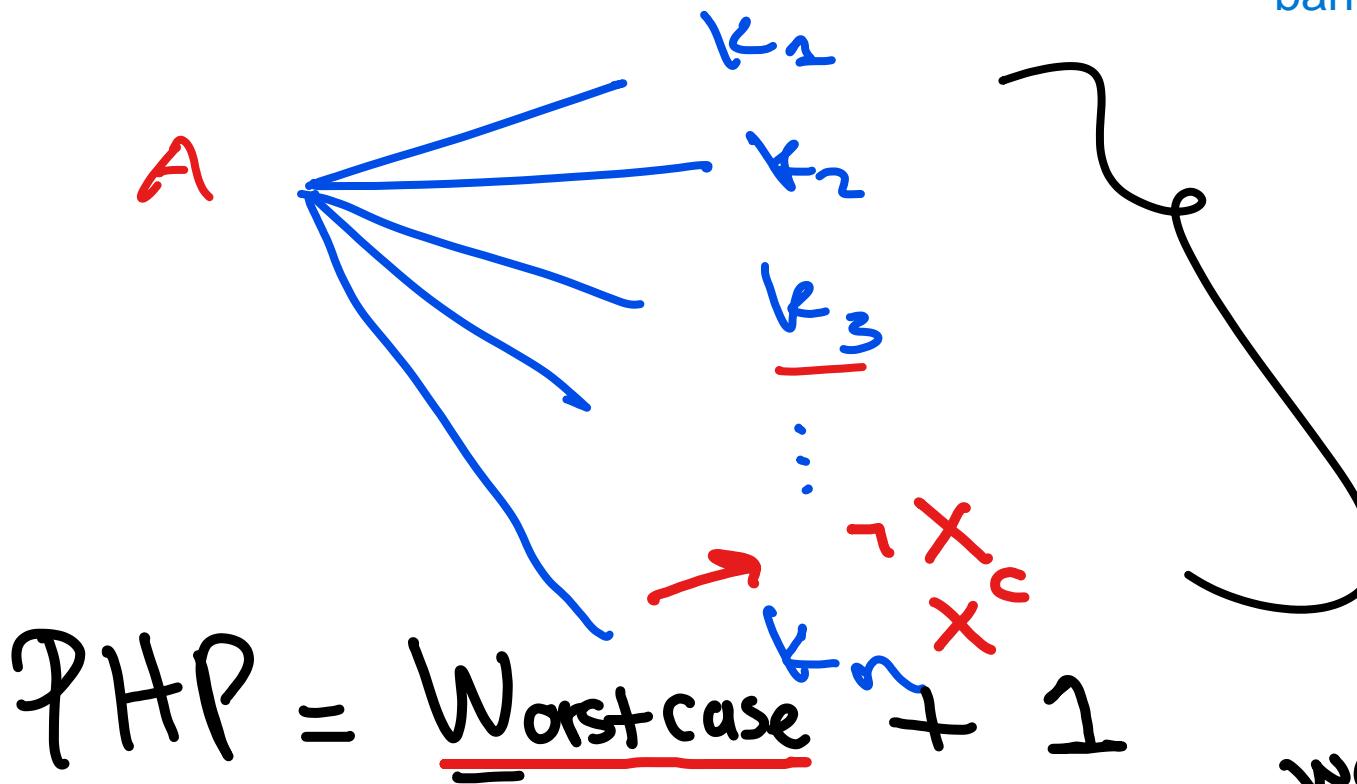
$$= 96 - 48$$

$$= 48 //$$

$$\left\lfloor \frac{100}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{3} \right\rfloor$$

$$= 50 + 33 = 83$$

# Pigeonhole Principle

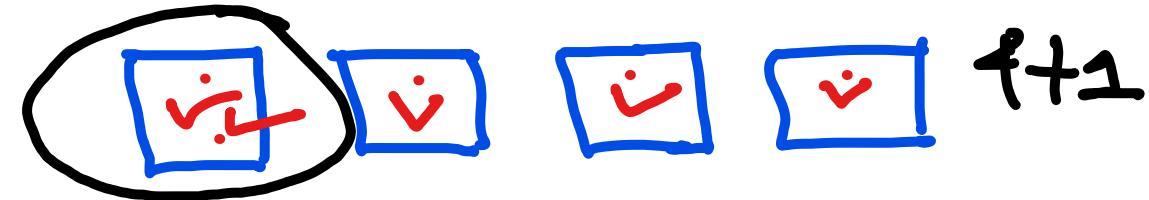


$$\text{PHP} = \underline{\text{Worst case}} + 1$$

Di dalam tas kamu ada 5 benda = {Buku, Pulpen, Kertas, Makanan, Pensil}, berapa benda yang harus diambil minimum sehingga di antaranya terdapat (PASTI) sebuah Makanan?

1 benda = Buku, Pulpen, Kertas, Makanan, Pensil  
2 benda = (Buku, Pulpen), (Buku, Kertas), dsb ...

3 benda = (Buku, Pulpen, Kertas), ... , 5 benda = Semua  
4 benda = (Buku, Pulpen, Kertas, Pensil),

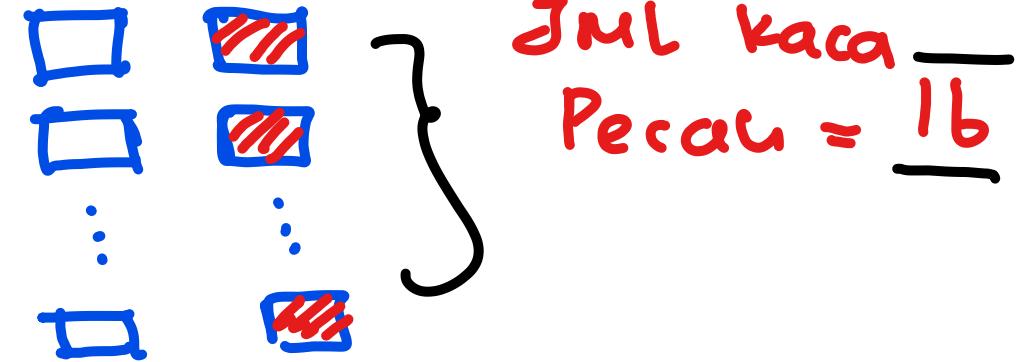


Tentukan jumlah merpati minimum sehingga diperoleh bahwa terdapat satu kandang yang berisi dua merpati

$wc = x^c = 1$   $\times$   
 $k_x$  terjadi  
 $k_i \neq x$  harus terjadi  
Secara minimum  
sehingga kita  
Mendapatkan  $k_i$   
 $wc = 1$ , PHP =  $q+1$

# Pigeonhole Principle

Pada permainan Jembatan Kaca Squidgame, terdapat 16 pasang sisi kaca (kaca kanan dan kiri), setiap pasang kaca terdapat salah satu kaca yang jika diinjak akan pecah dan membuat orang jatuh ke bawah. Berapa minimal orang yang harus dikorbankan agar diketahui kaca mana saja yang aman untuk diinjak?



Bisa dilewati / Pecah

$$\text{PHP} = \text{Worstcase} + 1 = 17 \text{ orang}$$

↳ same orang nginjak 1 kaca Pecah

# Pigeonhole Principle

Terdapat 5 bola merah, 2 bola kuning, dan 3 bola hijau di dalam sebuah Kotak. Pak Dengklek ingin mengambil beberapa bola dengan mata tertutup.

Berapa minimal jumlah bola yang harus Pak Dengklek ambil untuk memastikan bahwa ia mendapatkan sebuah bola Merah?

$X$  = dapat bola Merah

$X^c$  = Tidak dapat bola Merah

$$|X^c| = \text{Worst-case} = 2K + 3H$$

$$\text{PHP} = \text{Worstcase} + 1 = 5 + \cancel{1}^M = 6$$

# Pigeonhole Principle

$$BSSTA \Rightarrow \underline{M.C}$$

Terdapat 5 bola merah, 2 bola kuning, dan 3 bola hijau di dalam sebuah Kotak. Pak Dengklek ingin mengambil beberapa bola dengan mata tertutup.

Berapa minimal jumlah bola yang harus Pak Dengklek ambil untuk memastikan bahwa ia mendapatkan minimal 1 dari masing – masing jenis bola?

- Worst Case = Kita tidak dapat Masing jenis bola sebanyak 1**
- (a) ~~5~~ ~~✓~~
- (b) ~~6~~ ~~✓~~  $\rightarrow$  Tdk Memenuhi
- (c) ~~7~~  $\rightarrow$  ~~5M, 2K~~ Max
- (d) ~~8~~  $\rightarrow$  ~~5M, 3H~~
- (e) 9  $\checkmark$  ans  $\neq$  ~~7~~
- $$\left\{ \begin{array}{l} M \cdot K = 5 + 2 = 7 \\ K \cdot H = 2 + 3 = 5 \\ M \cdot H = 5 + 3 = 8 \end{array} \right.$$
- 

$$\text{PHP} = W.C + 1$$
$$\begin{aligned} \text{Max} &= 8 \rightarrow 5M, 3H \\ &= 8 + 1 = 9 \end{aligned}$$

# Pigeonhole Principle

Terdapat 5 bola merah, 2 bola kuning, dan 3 bola hijau di dalam sebuah Kotak. Pak Dengklek ingin mengambil beberapa bola dengan mata tertutup.

Berapa minimal jumlah bola yang harus Pak Dengklek ambil untuk memastikan bahwa ia mendapatkan 1 bola kuning, 2 bola merah, dan 2 bola hijau?

Worst case = Tdk dapat bola kuning  
Max  $\rightarrow$  M, H  $\Rightarrow$   $5 + 3$

$$\text{PHP} = \frac{w \cdot c}{5+3} + 1 = \underline{\underline{9}} -$$

# Pigeonhole Principle

Asumsikan Pak Dengklek sudah membuat 7 tipe biskuit berbeda, yang masing-masing terdiri dari 5 butir biskuit. Jika Pak Dengklek ingin semua tipe biskuit pernah dicicipi oleh setidaknya 1 ekor bebek, berapa minimal bebek yang perlu diundang oleh Pak Dengklek?

Worst case =  $\neg (\text{Mencicipi } \underline{\pm} \text{ tipe})$   
= Mencicipi tidak  $\neq$  tipe  
 $\textcircled{G}, 5, 4, 3, 2, 1, 0$   
max  
= 6 tipe biskuit  
=  $6 \times 5$  biskuit  
= 30 + 1 = 31 bebek

# Pigeonhole Principle

Asumsikan Pak Dengklek sudah membuat 100 tipe biskuit berbeda. Biskuit tipe 1 terdiri dari 10 butir, biskuit tipe 2 terdiri dari 20 butir, biskuit tipe 3 terdiri dari 30 butir, dan seterusnya hingga biskuit tipe 100 terdiri dari 1000 butir. Jika Pak Dengklek ingin semua tipe biskuit pernah dicicipi oleh setidaknya 5 ekor bebek, berapa minimal bebek yang perlu diundang oleh Pak Dengklek?

$$50499 + 1 = 50500$$

Worst Case -  $\lceil \frac{100 \text{ tipe}}{5 \text{ bebek}} \rceil$   
100 tipe, 4 bebek  $\rightarrow$  Max  
100 tipe, 3 bebek

$$\begin{aligned} \text{tipe}-x &= 10x \\ &= 10 \times (1 + 2 + 3 + \dots + 100) \\ &= 5050 \end{aligned}$$

1 bebek nyicipi semua

3 bebek  $50497$   
4 bebek  $50496$   
5 bebek  $50495$

biskuit  $\rightarrow 1 \times 50500$

$$50499 + 1 = 50500$$

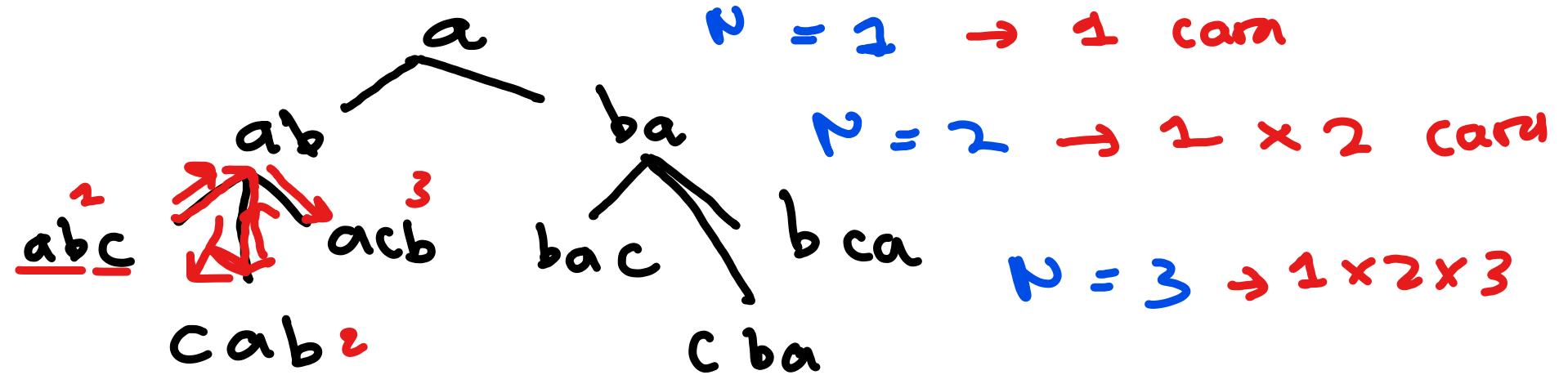
2 bahan 50.499

# Permutasi Unsur Berbeda

Backtracking

Permutasi = Banyak kemungkinan dari hasil pengacakan susunan objek

$N$  orang



$$\frac{N! \text{ cara}}{N \rightarrow 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times N \text{ cara}}$$

$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

# Permutasi Unsur Berbeda

Kita punya  $N$  objek, dan kita mau mencari setiap  $r$  objek di antaranya ada berapa banyak susunannya?

$$abcd \rightarrow P_r = \{ abcd, abdc, acbd, acdb, \dots \}$$

$$P_r = 4! \checkmark$$

abcd  $\rightarrow$  Piuh  $r$  huruf Kenuadian hanya  
ada berapa banyak susunannya

$$r = 2 \rightarrow {}^4P_2 = \{ ab, ba, bc, cb, cd, dc, ac, ca, \dots \}$$

$${}^N P_r = \frac{n!}{(n-r)!} \rightarrow {}^4P_2 = \frac{4!}{2!}$$

→ susunan semua  
→ susunan yg tersisa =  $\frac{4!}{2!}$

# Permutasi Unsur Berbeda

$$cd = \frac{abcd}{(abcd - cd)}$$

$$cd = \frac{abcd}{ab}$$

$$\frac{n!}{(n-r)!} = \frac{n!}{ab}$$

Algoritmitika :

- Teori Bilangan => FPB, KPK, Persamaan Pertidaksamaan
- Dynamic Programming / Recursive =>

# Permutasi Unsur Berbeda

Perhatikan potongan program berikut untuk nomor 34 – 35!

```
void fly(string s, int x)
{
    if (x == s.size() - 1) {
        cout << s ;
        return;
    }
    for (int i = x; i < s.size(); i++) {
        swap(s[x], s[i]);
        fly(s, x + 1);
        swap(s[x], s[i]);
    }
}
```

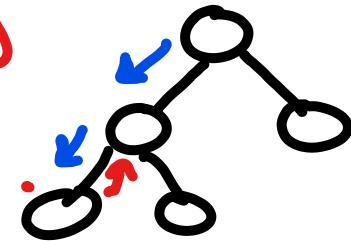


Catatan: Pada kode tersebut, idx seharusnya x.

34. Tentukan keluaran dari hasil pemanggilan `fly("AKU", 0)`! {tuliskan jawaban dalam bentuk string tanpa dipisahkan spasi}

AKU AUK KAU KUA ...

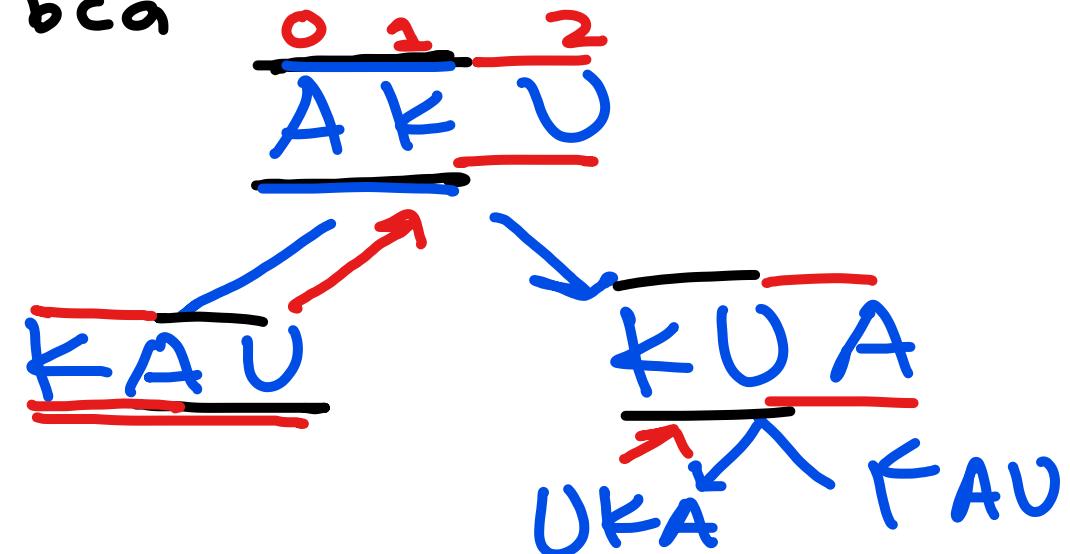
Backtracking



`fly ("abc", 3 )`

↳ Permutasi  
tertiga karakter

abc  
acb  
bac  
bca



# Permutasi Unsur Berbeda

( Susunan berpengaruh )

Dari 15 orang kelas X – A akan dipilih satu orang untuk mengikuti lomba Informatika, satu orang untuk mengikuti lomba Matematika, dan satu lagi untuk lomba Fisika. Ada berapa banyak cara pemilihan yang bisa dilakukan?

$$\frac{15}{M} \times \frac{14}{I} \times \frac{13}{F} = 15 * 14 * 13$$

$$\frac{15!}{12!} = 15 P_3 \rightarrow \\ = 15 * 14 * 13$$

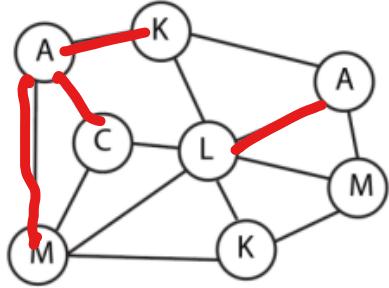
Pembahasan  
susunan  
slot bidang

M I F  
A      B      C  
A      C      B } 2 cara  
Caca      Fisika, caca      Infor

Sesuatu yang berbeda

# Permutasi Unsur Berbeda

MESIN PEMBUAT KATA 2 [11 – 12]



Mesin terbaru milik Pak Dengklek dapat membuat sebuah kata dengan mengikuti diagram di atas. Pertama ia memilih sebuah huruf lalu huruf berikutnya adalah huruf lainnya yang terhubung langsung dengan huruf sebelumnya.

12. Ada berapa banyak kata dengan panjang maksimum tidak memuat huruf berulang yang dapat dibentuk? {tuliskan jawaban dalam bentuk ANGKA saja}

$$S_{\max} = \underline{\underline{A}} \underline{\underline{C}} \underline{\underline{M}} \underline{\underline{L}} \underline{\underline{K}}$$

A ↙ C ↘  
...  
semua huruf  
saling terhubung  
exc c dan k

~~ek~~  
~~ke~~

$$|S| = P(ACMLK) = 5!$$

$$|A^c| = \cancel{C} \cancel{K} \times \cancel{A} \cancel{C} \rightarrow \underline{\cancel{C}} \underline{\cancel{K}} AML = 1! \cdot 2$$

$$|A| = 5! - 1! \cdot 2 = \underline{\underline{48}}$$

## Permutasi Unsur Berulang

$$abc \rightarrow 3! = 6 \text{ susunan}$$

$$\underline{\underline{abcc}} \rightarrow \cancel{4!} \rightarrow \frac{4!}{1!.1!.2!}$$

$$= \frac{4!}{2!}$$

$$= 4 \times 3 = 12$$

Permutasi Unsur berulang =  $\frac{n!}{\Gamma_1!. \Gamma_2!. \dots \Gamma_3!}$

$$\begin{array}{c} \dot{a}\dot{b}\dot{c}\dot{d}\dot{d}\dot{e}\dot{e}\dot{f}\dot{f}\dot{f} \\ \hline n = 10, \Gamma_a = 2, \Gamma_e = 2, \\ \Gamma_d = 3 \\ n = 4 \quad P = \frac{10!}{2!.2!.3!} \\ \Gamma_a = 1, \Gamma_b = 1 \\ \Gamma_c = 2 \end{array}$$

# Permutasi Unsur Berulang

Berapa banyak permutasi string KSNK2021 sehingga tidak ada huruf maupun angka yang sama bersebelahan? [Jawablah dengan angka saja!]

$$ans = \frac{8!}{1} - \left[ \frac{2 \cdot 7!}{2!} - 6! \right]$$

$C \rightarrow \rightarrow$  KOMPLEMENT

$$\frac{8!}{4} - 6 \cdot 6!$$

$$= 7 \cdot 6! - 1 \cdot 6! \\ = 6 \cdot 6!$$

$$|S| = \text{KSNK2021} = \frac{8!}{2! \cdot 2!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{2}$$

$|A| =$  Tdk ada huruf atau angka yg sam bersebelahan

$|A^C| =$  ada huruf atau angka bersebelahan  
 ↳ "KK" atau "22"

$$|X| = \frac{\text{KK SN } 2021}{P} = \text{PSN } 2021 = \frac{7!}{2!}$$

$$|Y| = \frac{220SN KK1}{P} = PSN 2021 = \frac{7!}{2!}$$

$$|X \cap Y| = \frac{KK}{P} \frac{22}{Q} 0^{2n}$$

$$= PQ SNO 1 \\ = 6!$$

$$|A^C| = \left( \frac{7!}{2!} + \frac{7!}{2!} \right) 6!$$

# Permutasi Unsur Berulang

Terdapat 4 ekor bebek berwarna merah, 3 ekor bebek berwarna biru, dan 2 ekor bebek berwarna hijau. Kesembilan bebek tersebut diminta untuk berbaris oleh Pak Dengklek dengan ketentuan:

- Setiap bebek yang berwarna sama tidak bisa dibedakan
- Untuk setiap pasang bebek yang berwarna sama, tidak boleh ada bebek lain yang warnanya berbeda yang berada di antara sepasang bebek tersebut. Ada berapa macam posisikan yang mungkin dalam barisan bebek tersebut?

$$\begin{array}{c} 4R \quad 3B \\ \hline M \quad M \quad M \quad M \\ \hline \cancel{M \quad R \quad M \quad M} \quad \cancel{M \quad R} \end{array}$$

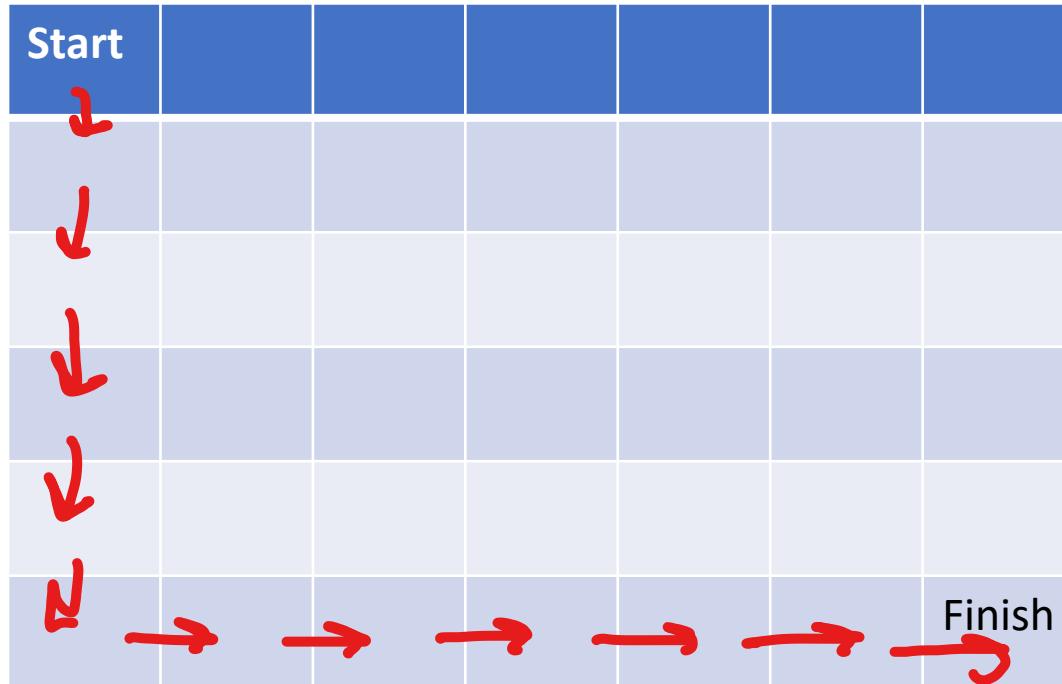
$$\begin{array}{c} 2H \quad Y \\ \hline B \quad B \quad B \\ \hline H \quad B \quad B \quad S \quad H \end{array}$$

$$\begin{array}{c} Z \\ \hline H \quad H \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{c} X \quad Y \quad Z \\ = \quad 3! \\ = \quad 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} A \quad B \quad C \quad D \quad E \quad A \\ \text{siklus} = (n-1)! \\ = 1! \end{array}$$

# Permutasi Unsur Berulang



Ada berapa banyak cara seseorang dari petak start menuju petak Finish jika ia hanya bisa bergerak ke bawah atau ke kanan saja?

5 Bawah, 6 Kanan

Perm C<sup>5</sup> BBBBRB    KKK KKKK")

$$= \frac{11!}{5! 6!}$$

$$= \frac{11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times \cancel{6!}}{\cancel{5!} \times \cancel{6!}}$$

$$\frac{11 \times 10 \times 9^3 \times 8^2 \times 7}{124 \times 10} = 33 \times 207$$

Kombinasi Unsur Berbeda  $\rightarrow$  Tdk Memperhatikan urutan

\* Jumlah aja banyak konfigurasi  
~~banyak susunan~~

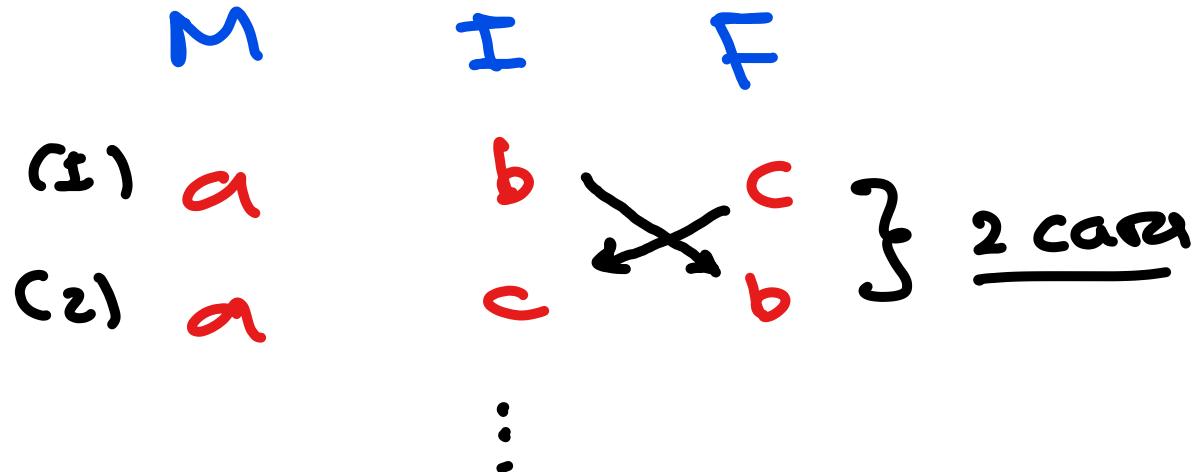
Pilih r objek dari n

$${}^n C_r = \frac{n!}{(n-r)! \cdot r!}$$

# Kombinasi Unsur Berbeda

Dari 15 orang kelas X – A akan dipilih tiga orang untuk mengikuti lomba Informatika. Ada berapa banyak cara pemilihan yang bisa dilakukan?

## \* Permutasi



## \* Kombinasi

1 cara {

I	I	I
a	b v	c v
a	c v	b v

b - 1      →      b - 1

c - 1      →      c - 1

3 + 1 k  
benb  
ah

Susunan tidak

berpangaruh

$$15C_2 = \frac{15!}{(13! \cdot 2!)} = \frac{15 \times 14}{2}$$

# Kombinasi Unsur Berbeda

Tahun ini Pak Dengklek ditunjuk menjadi ketua panitia Olimpiade Internasional Bebek (OIB). Untuk memberikan pengalaman kepada bebek-bebeknya, Pak Dengklek berencana memilih 10 dari 15 bebek yang dimilikinya untuk menjadi peserta. Tentunya kita tahu bahwa di antara 15 bebek tersebut, ada empat bebek kesayangan Pak Dengklek, yaitu Kwak, Kwik, Kwek dan Kwok. Kwak dan Kwik harus dipilih untuk menjadi peserta lomba karena keduanya yang paling pintar. Sedangkan Kwek dan Kwok tidak bisa dipilih sebab saat ini sedang sakit. Ada berapa banyak cara memilih bebek-bebek sebagai peserta OIB?

Pilih 10 dari 15, 2 harus dipilih, 2 jangan dipilih  
\* belum dipilih

$$10 - 2 = 8$$

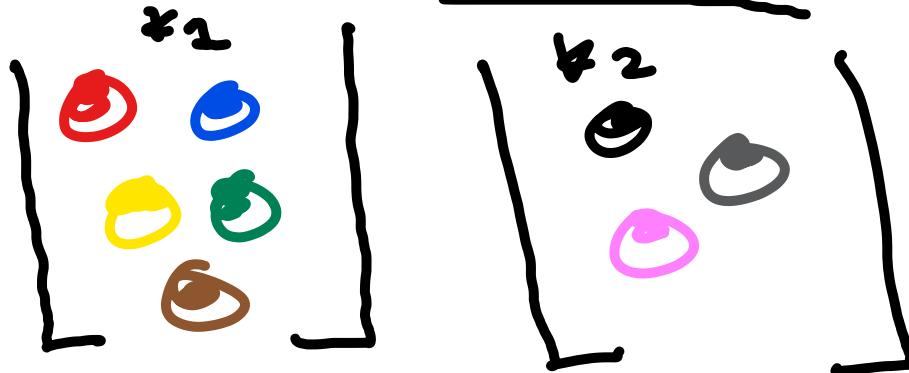
\* bisa dipilih

$$15 - 2 - 2 = 11$$

$$\begin{aligned} \text{ans} &= {}^{11}C_8 \\ &= \frac{11!}{8! 3!} = \frac{11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} \\ &= 165 \text{ cara} \end{aligned}$$

# Kombinasi Unsur Berbeda

Ada 2 buah kendi, pada kendi pertama terdapat 5 buah bola warna berbeda, kendi kedua 3 buah bola warna berbeda  
Pak Dengklek melakukan 3 kali pengambilan bola tanpa pengembalian, ada berapa banyak kombinasi bola yang didapatkan, jika warna bola pada kendi kedua tidak ada pada kendi pertama? Ngambil sebuah bola



$$\begin{aligned} \text{ans} &= 15 + 8 + 3 \\ &= 26 \quad \underline{\text{cara}} \end{aligned}$$

- Peng 1st

$$K_1 C_1 \times K_2 C_2$$

$$5 C_1 \times 3 C_1 = 5 \times 3$$

- Peng 2nd

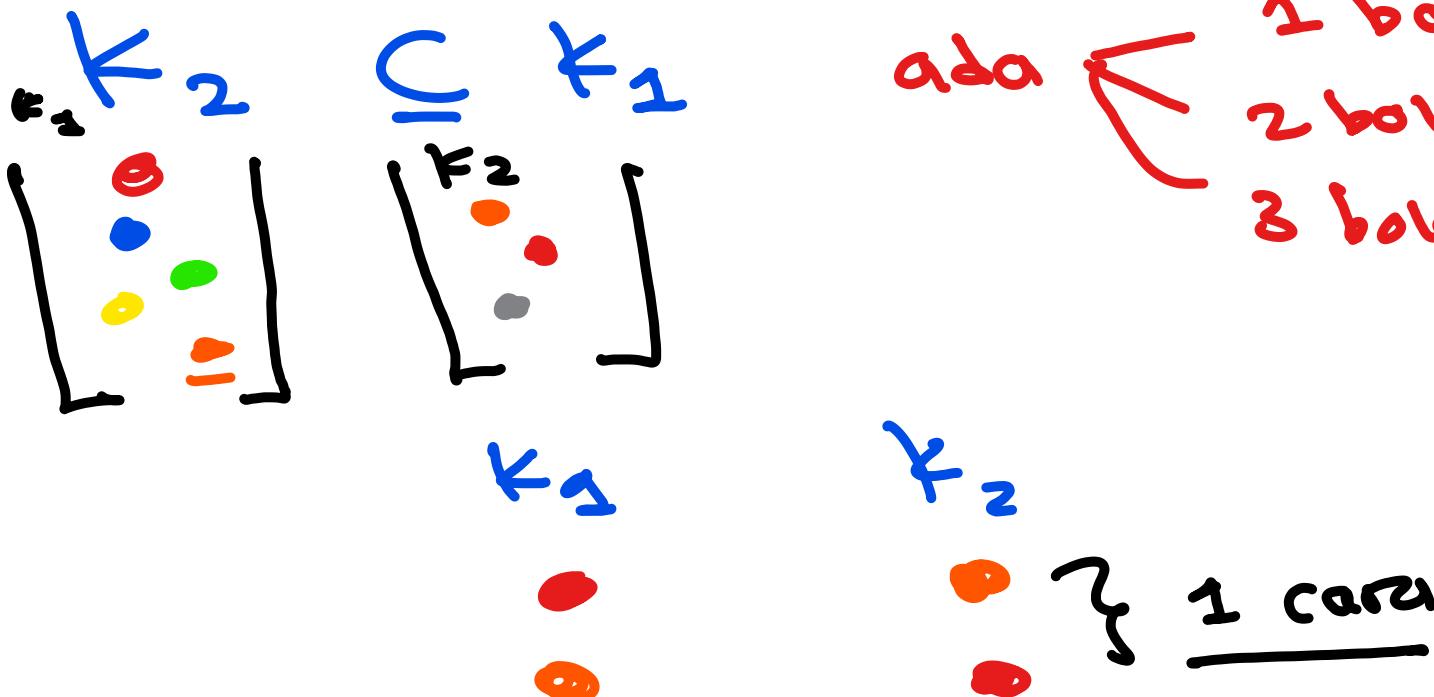
$$1 C_1 \times 2 C_1 = 1 \times 2$$

- Peng 3rd

$$3 C_1 \times 1 C_1 = 3 \times 1$$

# Kombinasi Unsur Berbeda

Ada 2 buah kendi, pada kendi pertama terdapat 5 buah bola warna berbeda, kendi kedua 3 buah bola warna berbeda Pak Dengklek melakukan 2 kali pengambilan bola tanpa pengembalian, ada berapa banyak kombinasi bola yang didapatkan, jika ada bola dari kendi kedua memiliki warna yang sama dari bola pada kendi pertama?



ada

$K_2 \subseteq K_1$

$K_2 \subseteq K_1$

$K_2 \subseteq K_1$

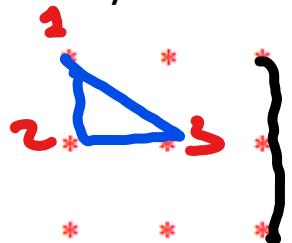
1 bola  
2 bola  
3 bola

$\{ \}$  1 cara

# Kombinasi Unsur Berbeda

Jika diberikan sembilan buah patok pada lahan Pak Dengklek sebagai berikut:

Pak Dengklek ingin membuat sebuah kandang yang berbentuk segitiga dimana setiap pojok sudut kandang harus merupakan patok-patok tersebut. Sisi kandang boleh melewati atau mengandung patok-patok lainnya. Ada berapa banyak kemungkinan kandang yang bisa dibangun oleh Pak Dengklek?



Pilih 3 titik random -

$$1 - 2 - 3$$

$$3 - 2 - 1$$

$$1 - 3 - 2$$

⋮

=

$$9 \text{ C } 3 - 8 =$$

$$\frac{9!}{6!3!} - 8 = \frac{9 \times 8 \times 7}{1 \times 2 \times 1} =$$

$$\begin{aligned} \text{ans} &= 12 \times 7 - 8 \\ &= 84 - 8 = 76 \end{aligned}$$

# Kombinasi Unsur Berulang

Pak Dengklek ingin membeli 8 buah roti di antara pilihannya roti rasa stroberi, roti rasa anggur, dan roti rasa mangga. Jika stok masing - masing rasa tidak terbatas dan semua roti tidak bisa dibedakan untuk setiap rasa.

SSSS ... AA AA ... MM ....

S A } 1 cara  
S A }

\* Stars and bars

$$\leq x_i = n$$

$$N+1-1 C_N$$

$$8+3-1 C_8 \leftarrow$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_i = n$$

$$10 C_8$$

Berapa banyak solusi  $x_i$  yg memenuhi  
 $x_i \geq 0, x_i \leq n, x_i \in \mathbb{Z}^+$

$$\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + x_3 \\ \hline S + A + M = 8 \\ \hline 1 \quad 7 \quad 0 \\ 8 \quad 0 \quad 0 \end{array}$$

# Kombinasi Unsur Berbeda

Terdapat 5 bola merah, 2 bola kuning, dan 2 bola hijau, semua bola pada masing – masing warna tidak bisa dibedakan atau identik. Ada berapa banyak cara memilih ~~3~~ bola secara acak di antaranya?

5

$$M + (K + H) = 5$$

$$M = 5 - (K + H)$$

$$M \leq 5, K \leq 2, H \leq 2$$

{

$$K + H \leq 4 \rightarrow K + H = 0$$

$$1 \text{ cara} \quad K + H = 1 = {}^5C_1$$

$$K + H = 1 \quad {}^{1+2-1}C_1 = 2 \text{ cara}$$

$$\begin{aligned} \text{ans} &= 1+2+3+4+5 \\ &= 15 \text{ cara} \end{aligned}$$

$$K + H = 2 \quad {}^{2+2-1}C_2 = {}^3C_2 = 3$$

$$K + H = 3 \quad {}^{3+2-1}C_3 = {}^4C_3 = 4$$

# Kombinasi Unsur Berbeda

Asumsikan Pak Dengklek sudah membuat 3 tipe biskuit berbeda. Biskuit tipe 1 terdiri dari A butir, biskuit tipe 2 terdiri dari B butir, dan biskuit tipe 3 terdiri dari C butir. Diketahui bahwa total biskuit yang dibuat Pak Dengklek adalah 25 (dengan kata lain,  $A + B + C = 25$ ). Jika diketahui pula bahwa Pak Dengklek perlu mengundang minimal 20 ekor bebek agar semua tipe biskuit pernah dicicipi oleh setidaknya 1 ekor bebek, maka berapa banyak triplet berbeda yang mungkin?

$$\text{bebek} = \underline{20} \rightarrow A + B + C = 25$$

$$\text{bebek} = 1 \rightarrow 1 + 1 + 1$$

$$\begin{aligned}\text{bebek} &= 6 \\ &= 13 \underline{6 + 6 + 13}\end{aligned}$$

$$6 \text{ bebek} \rightarrow A \& B$$

$$7 \text{ bebek} \rightarrow C$$

$$x_2 > 3 \rightarrow x_2 \geqslant 4$$

# Kombinasi Unsur Berbeda

Ada berapa banyak nilai  $x_i$  yang memenuhi persamaan di bawah ini

$$x_1 + x_2 + x_3 = 15, \text{ jika } x_1 \geq 2, x_2 > 3, \text{ dan } x_3 \leq 4?$$

$$\text{ans} = \frac{10+9+8+7+6}{}$$

$$\rightarrow (\underline{0,1,2,3,4})$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 15 \quad (x_3 \leq 4)$$

$$x'_1 + \cancel{2} + x'_2 + \cancel{4} + x_3 = 15 - 6 \quad x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0$$

$$x'_1 + x'_2 + x_3 = 9 \quad x'_1 + 2 \geq 2 \quad x'_2 + 1 \geq 1$$

$$(1) \quad x'_1 + x'_2 + 0 = 9 \rightarrow x'_1 + x'_2 = 9 \rightarrow {}^{10C9} = 10$$

$$(2) \quad x'_1 + x'_2 + 1 = 9 \rightarrow x'_1 + x'_2 = 8 \rightarrow {}^{9C8} = 9$$

$$(3) \quad x'_1 + x'_2 + 2 = 9 \rightarrow x'_1 + x'_2 = 7 \rightarrow \vdots = 8$$

$$\vdots \\ (5) \quad x'_1 + x'_2 + 4 = 9 \quad \underline{x'_1 + x'_2 = 5} \quad = 6$$

# Pengantar Peluang

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

Melerapar 1 buah dadu

$$P(\text{Angka} = 3) = \frac{|A|}{|S|} = 1/6$$

$$A = \{\text{angka} = 3\} = \{3\} \rightarrow |A| = 1$$

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \rightarrow |S| = 6$$

# Pengantar Peluang

Pak Dengklek menghadiri acara undian berhadiah. Pak Dengklek akan memenangkan sepeda dengan peluang  $\frac{1}{2}$ , memenangkan tank dengan peluang  $\frac{1}{3}$ , dan memenangkan kapal dengan peluang  $\frac{1}{4}$ . Jika ketiga hadiah tersebut diundi secara terpisah, berapa peluang Pak Dengklek mendapatkan setidaknya 2 kendaraan?  $2 \rightarrow 3$

$$P(\text{sepeda}) = \frac{1}{2}$$

$$P(\text{tank}) = \frac{1}{3}$$

$$P(\text{kapal}) = \frac{1}{4} \quad \text{ans} = \underline{\underline{\frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}}{12}}}$$

$$\begin{array}{c} * \text{ Sepeda} - \text{ Kapal} \\ \xrightarrow{\quad} \end{array}$$

$$\begin{aligned} & P(S) \times P(K) \times P(T) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{12} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{c} \leftarrow \text{ Sepeda - tank} \\ \xrightarrow{\quad} \end{array}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{8} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{c} * \text{ Kapal} - \text{ Tank} \quad \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \\ = \frac{1}{24} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{Sepeda - Kapal - Tank} \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{1}{24} \end{array}$$

# Pengantar Peluang

Empat anak bernama Andi, Budi, Caca, dan Dudi sedang bermain hompimpa. Andi, Budi, dan Caca mempunyai peluang berturut-turut  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{2}{3}$ , dan  $\frac{1}{4}$  untuk mengeluarkan hitam. Permainan dilakukan terus-menerus sampai ada yang menang. Seorang pemain dikatakan menang apabila mengeluarkan warna yang berbeda dengan semua pemain lainnya. Untuk mendapatkan peluang menang terbesar, Dudi perlu mengeluarkan warna ... sehingga peluangnya menjadi ...

- a. Hitam -  $\frac{1}{8}$
- b. Hitam -  $\frac{1}{6}$
- c. Putih -  $\frac{1}{6}$
- d. Hitam -  $\frac{1}{4}$
- e. Hitam -  $\frac{3}{5}$

$$A \ B \ C \quad \frac{1}{2} \ \frac{2}{3} \ \frac{1}{4}$$

Dudi Menang

dudi putih, ABC hitam  
dudi hitam, ABC putih

$$P(C_{ABC \text{ hitam}}) = \frac{1}{2} * \frac{2}{3} * \frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned} P(C_{ABC \text{ putih}}) &= \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} * \frac{1}{3} * \frac{3}{4} \\ &= \frac{1}{8} \end{aligned}$$