Teori Bilangan Review + Latihan Soal

GCD/LCM, Euclidean, Tau Function, Sigma, Faktorisasi, Modulo

4. Sisa pembagian $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \dots + 99^3 + 100^3$ oleh 7 adalah...

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \dots + n)^2$$

5. Dua digit terakhir dari $43^{43^{2018}}$ adalah...

3. Dua orang sahabat, Pak Dengklek dan Pak Ganesh memiliki sejumlah kucing kesayangan yang tak terhingga jumlahnya dengan harga 465 satuan per ekornya. Sedangkan pak Dengklek memiliki milyaran ekor bebek yang setiap bebeknya bernilai 300 satuan. Keduanya melakukan transaksi dengan cara bertukar hewan. Sebagai contoh, jika pak Dengklek berhutang ke pak Ganesh sebesar 135 satuan, maka ia dapat membayar hutangnya dengan memberi pak Ganesh 2 ekor bebek dan mendapatkan sebuah kucing sebagai kembalian. Berapakah pecahan transaksi terkecil yang dapat diselesaikan dengan menggunakan cara pertukaran tersebut ?

$-3 \wedge a = -1$, $3 \wedge a = 1$

P. Diophantine $\longrightarrow$ $ax \pm by = \gcd(a,b) * k$

$465x - 300y = \gcd(465, 300)$

$\gcd(465, 300) = \dots$

harga satu k. Ganesh = 465

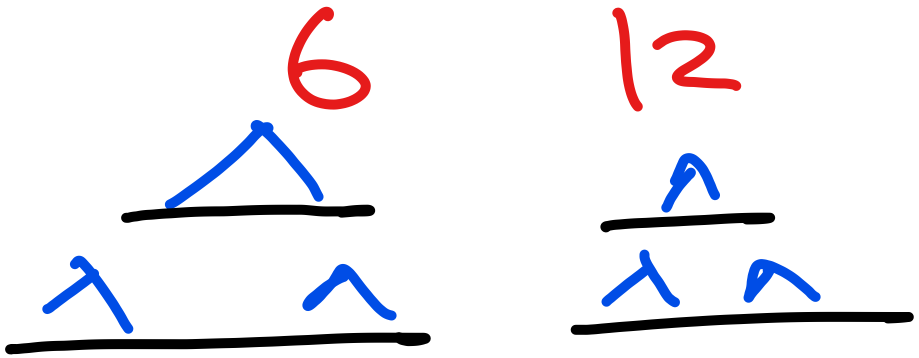
—"— , —"— k. Dengklek = 300

Ganesh tukar Dengklek

$465x - 300y = \frac{\text{Kembalian}}{\gcd(a,b)} * \frac{k}{1}$

4. Jika FPB dari a dan 2008 = 251. Jika a < 4036, maka nilai terbesar untuk a adalah...

a. 3263
b. 4016
c. 2259
d. 3765
e. 3514



$\gcd(a, 2008) = 251$

$a < 4036$

$a = 251k$

$4016 = 251 \cdot 16$

$ans = 251 \cdot 15$

$ans = 3765$

Kita tahu bahwa bilangan prima adalah suatu bilangan yang memiliki tepat 2 bilangan pembagi positif. Didefinisikan F-Primes adalah suatu bilangan yang memiliki tepat 5 bilangan pembagi positif. Berapa banyakkah bilangan F-Primes dari 1-1000 (inklusif)?

ans = 3

$f(x) = 5$

ada berapa banyak x

$1 \le x \le 1000$

$f(x) = 5 \rightarrow (p_1 + 1) = 5$

$f(x) = 10 \rightarrow (p_1 + 1) = 10 \rightarrow p_1 = 9$

$(p_1 + 1)(p_2 + 1) = 10$

10: 1, 10

10: 2, 5

$(p_1 + 1) = 5$

$p_1 = 4 \rightarrow x = a_i^4$

a_i bil. prima

$a_i^4 \le 1000 \rightarrow$ bilangan pangkat 4

$\rightarrow \cancel{1}, 16, 81, \cancel{256}, 625, \cancel{6^4 > 1000}$

Berapakah hasil 27^{2016} mod 26? $= 1$

$a^x \bmod (a-1) = 1$

9. Terdapat 2 bilangan, yaitu 720000 dan 262144. Berapa banyak bilangan berbeda yang membagi habis kedua bilangan tersebut?

→ FPB / GCD

$720.000 = 72 \cdot 10.000 = 2 \cdot 36 \cdot 2^4 \cdot 5^4$

$= 2 \cdot 6^2 \cdot 2^4 \cdot 5^4$

$= 2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 2^4 \cdot 5^4$

$= 2^7 \cdot 3^2 \cdot 5^4$

$10.000 \to (100)^2 \to (2^2 \cdot 5^2)^2 \to (2^4 \cdot 5^4)$

$720.000 \to 2 \cdot 360.000$

$2^x = \ldots$

$3^x = \ldots$

$\vdots$

$2^x = 262144$

$x = {}^2\log 262144$

$262144 = 2^{18}$

$262000 + 144$

ans = $\tau(\gcd(720000, 262144))$

$\gcd = 2^7$

$\tau(2^7) = (7+1) = 8$

Ido berulang tahun ke-20 pada hari Kamis, 13 Oktober 2016. Pada hari apakah Ido lahir?

Kita ingin membeli barang seharga 27685, Bintang ingin belanja menggunakan satu jenis pecahan uang saja, ada berapa banyak cara Bintang membayar belanjaannya tersebut?

$27685 = 5^1 \times 7^2 \times 113^1$

$f(27685) = (1+1)(2+1)(1+1)$

$= 12$ //

Cari nilai nominal 27685

$\rightarrow$ Faktor dari 27685

$\underline{\text{nominal}} * \underline{k} = 27685$

$k = (0, 1, 2, 3, 4, \ldots)$

Ada 10.000 kue, dan kemungkinan ada x orang yang akan datang, ada berapa banyak kemungkinan pembagian jumlah kue secara adil?

$10.000 \mid x$

x habis membagi 10k

$P(10.000)$

Pigeonhole Principle

PHP = Worstcase + 1

Suatu kejadian A terjadi → A

Worstcase (A) → tidak terjadi (A)

→ A^c

→ Max A^c, Lawan A

Fermat Little Theorm

$$a^{p-1} \bmod p \equiv 1 \bmod p$$

p prima

$$9987654232110g^{\overset{p-1}{2010}} \bmod \underset{\text{prima}}{\overset{p}{2011}} = 1$$

$$a^{x} \bmod (a-1) = 1$$

$$43^{2020} \bmod 42 = 1 \rightarrow (43 \bmod 42)^{2020} \bmod 42 = 1$$

$$\gcd(a,b) = \frac{a*b}{lcm(a,b)}$$

$$\underline{lcm(a,b)} = \frac{a*b}{\underline{\gcd(a,b)}} \rightarrow \cancel{lcm} * \gcd = a*b$$

```
int f(int a, int b){    → gcd(a,b)
   if(a == 0) return b
   return f(b % a, a)
}

int g(int a, int b){    → lcm(a,b)
  return (a * b) / f(a,b)
}
```

```
for(int i = 1; i<=10.000; i++){
   for(int j = 1; j<=i; j++){
   ret += f(i,j) * g(i,j) / j
   }
}
```

$$\frac{gcd(i,j) * lcm(i,j)}{j} = \frac{i*\cancel{j}}{\cancel{j}}$$

$$ret += i \rightarrow 1+2+3+4+\ldots+10.000 = \frac{(10.000+1)(10.000)}{2}$$

Euclid GCD Algorithm

gcd (a , b) = 0   a == 0 \ a == 0

gcd (a , b) = a   b == a

gcd (a , b) = 1   a dan b Relatif Prima

besar mod kecil

gcd (a , b) = gcd ($\underline{\text{b mod}}$ a , a) kecil

6   12 → 12 mod 6 = 0

91 → 21   91 mod 21 = 7

13 7 7 3

gcd (7 , 21) =

gcd (21 % 7 , 7) = gcd (0 , 7)
= 7

Jumlah Faktor != Hasil Jumlah Faktor

Hasil penjumlahan semua faktor ✗

$20 = \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$

$\sigma(20) = 1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 20$

$= 42$

2×2 $4+1$ 2×5 2×10

akan memiliki: faktor prima terkecil → ×

$20 = 2^2 \cdot 5^1$

a_i → faktor & lainnya adalah hasil jumlah/kali perpangkatan a_i

$(2^0 + 2^1 + 2^2) \times (5^0 + 5^1)$

$= (1 + 2 + 4) \times (1 + 5)$

$= 7 \times 6 = 42$

```
for(int i = 1; i<=x; i){
 if(x % i == 0){
    ret++
  }
}
```

→ f(98)

Berapakah nilai ret jika x = 98

Banyak Faktor bilangan x

$\tau(x)$ = Tau Function   Function

* Faktorisasi prima x

$$x = a^{p_1} \cdot b^{p_2} \cdot c^{p_3} \cdot (\dots)$$

$a, b, c, \dots$ bilangan prima

$$100 = \underline{2}^{2} \cdot \underline{5}^{2}$$

~~$20 \cdot 5$~~ ↓ bkn prima

$\tau(100)$
$= (2+1)(2+1)$
$= 3 \cdot 3$
$= \underline{\underline{9}}$

* $\tau(x)$

$$\tau(x) = (p_1+1)(p_2+1)(p_3+1) \dots (p_i+1)$$

Kita dikasih sebuah bilangan N, temukan ada berapa banyak bilangan yang habis membagi N (banyak faktor dari N)

20 Faktor = {1, 2, 4, 5, 10, 20}

Bisa ditemukan nilai k

Sdg $F_i = N$

Ekivalen / Kongruen

$1 . 20 \equiv 20$

$2 . 10 \equiv 20$

$\vdots$

100 berapa banyak Faktor ?

$$x \bmod N \equiv c$$

C.R.T

Fundamental

$$xk + c \bmod N$$

xk kelipatan N

x kelipatan N

$$0 + c \bmod N \equiv c$$

Jika $\underline{a \mid N}$, $c \nmid N$

$\hookrightarrow a \bmod N = 0$

$$(a + c) \bmod N =$$

$$(\underbrace{\cancel{(a \bmod N)}}_{0} + (c \bmod N)) \bmod N$$

$$\bmod N$$

$$= \underline{c \bmod N}$$

$c \leq N$

$c \bmod N \equiv c$

Setiap $a \mid N$ (a habis dibagi N)

$ak \mid N$

$a \bmod N = 0$

$ak \bmod N = 0$

$$\Big(\underbrace{\cancel{(a \bmod N)}}_{0}(k \bmod N)\Big) \bmod N = 0$$

$x \bmod n = c$

$x = kn + c$

Bilangan a habis dibagi n

a k habis dibagi n

Bilangan bulat non-negatif (0, 1, 2, 3, 4)