Teori Bilangan Dasar + Latihan Soal

Fundamental of CRT, GCD/LCM, Euclidean, Tau Function, Sigma, Faktorisasi, Modulo

4. Sisa pembagian $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \ldots + 99^3 + 100^3$ oleh 7 adalah...

5. Dua digit terakhir dari $43^{43^{2018}}$ adalah...

1 digit terakhir $\rightarrow$ mod 10^{1}

2 digit terakhir $\rightarrow$ mod $100 \; 10^{2}$

⋮

n digit terakhir $\rightarrow$ mod 10^{n}

3. Dua orang sahabat, Pak Dengklek dan Pak Ganesh memiliki sejumlah kucing kesayangan yang tak terhingga jumlahnya dengan harga 465 satuan per ekornya. Sedangkan pak Dengklek memiliki milyaran ekor bebek yang setiap bebeknya bernilai 300 satuan. Keduanya melakukan transaksi dengan cara bertukar hewan. Sebagai contoh, jika pak Dengklek berhutang ke pak Ganesh sebesar 135 satuan, maka ia dapat membayar hutangnya dengan memberi pak Ganesh 2 ekor bebek dan mendapatkan sebuah kucing sebagai kembalian. Berapakah pecahan transaksi terkecil yang dapat diselesaikan dengan menggunakan cara pertukaran tersebut ?

x

FPB (465, 300)

* Linear Diophantine equation

$$ax - by = \gcd(a, b)k$$

$$\underline{465x} - 300y = Mk$$

$K_{min} = 1$

$M = \gcd(a, b)$

$\gcd(465, 300)$

4. Jika FPB dari a dan 2008 = 251. Jika a < 4036, maka nilai terbesar untuk a adalah...

a. 3263

b. ~~4016~~

c. 2259

d. 3765

e. 3514

$= 2008$

4016

$FPB(a, 2008) = 251$

$a < 4036$

a kelipatan 251

$a = 251k$

Kita tahu bahwa bilangan prima adalah suatu bilangan yang memiliki tepat 2 bilangan pembagi positif. Didefinisikan F-Primes adalah suatu bilangan yang memiliki tepat 5 bilangan pembagi positif. Berapa banyakkah bilangan F-Primes dari 1-1000 (inklusif)?

Inklusif 1. s.d n

Eksklusif antar 1 dan n

x = bilangan FP

berapa banyak x shg → f(x) = 5

e_i minimal 1

$(e_1+1)\times(e_2+1)\times(e_3+1)\times\ldots = 5$

$5 = 1 \times 5$

$e_1 = 4$

$5 = (e_1 + 1)$

$5 = 4+1$

$x = p_1^{e_1}$ ~~1^4~~

$x = p_1^4$

1000 > 2401

$2^4, 3^4, 5^4,$ ~~7^4~~

ada 3 bilangan

x yg Memenuhi bilangan Prima^4 ≤ 1000

Berapakah hasil 27^{2016} mod 26? $= 1$

$$a^{x} \bmod (a-1) = 1$$

9. Terdapat 2 bilangan, yaitu 720000 dan 262144. Berapa banyak bilangan berbeda yang membagi habis kedua bilangan tersebut?

2^{16}

$\tau(\mathrm{FPB}(72 * 10^4, 262144))$

Ido berulang tahun ke-20 pada hari Kamis, 13 Oktober 2016. Pada hari apakah Ido lahir?

Keterbagian 3 bilangan bulat

Bilangan x habis dibagi n $\rightarrow$ $x \mid n$

x kelipatan n

n habis membagi x

n faktor dari x

$$\frac{x}{n} = \text{bilangan bulat}$$

$x \mid n \longrightarrow x \bmod n = 0$

mod → sisa bagi

$3 \bmod 2 \rightarrow$

1 hasil bagi

$$\begin{array}{r} 1 \\ 2\overline{)\,3} \\ 2 \\ \hline 1 \end{array} -$$

$1 < 2$

1 sisa bagi

$3 \bmod 2 = \boxed{1}$ sisa bagi

$$a \overset{\times}{\underset{-}{+}} b \bmod n \equiv \left((a \bmod n) \overset{\times}{\underset{-}{+}} (b \bmod n) \right) \bmod n$$

$$a^b \bmod n \equiv (a \bmod n)^b \bmod n$$

$x \bmod n = 0 \rightarrow x \mid n$

$x \in \{n.1, n.2, n.3, n.4, \ldots, n.k\}$

$x \equiv nk$, unnk $k = (0, 1, 2, \ldots)$

$nk \bmod n = 0$

$n.k \bmod n \equiv ((\overset{0}{\cancel{n \bmod n}}) \times (k \bmod n)) \bmod n \equiv 0$

$$x \bmod \overset{n}{3} = 0$$

$\hookrightarrow x \in \{3 \cdot 1, 3 \cdot 2, \ldots, 3k\}$

Fundamental CRT

$$x \bmod n = c \rightarrow x \nmid n$$

x bersisa c ketika dibagi dengan n

$$5 \bmod 3 = 2$$

$$x \bmod 3 \equiv 2 \text{ , } x_{\text{terkecil}} = \overset{2}{\ldots} \text{ ?}$$

$$x \bmod n \equiv c \quad (c < n)$$

$$x_{\min} \equiv c$$

$$x \equiv 0 + c \pmod n$$

$$x \equiv 0 + c \mod n$$

$$x \bmod n \quad (x < n) = x$$

$$\boxed{0} + c \mod n \equiv c$$

$$0 + c \mod n \equiv c$$

$$nk \mod n = 0$$

$$a + b \bmod n \equiv ((a \bmod n) + (b \bmod n)) \bmod n$$

$$nk \bmod n + c \bmod n = c$$

$$(nk + c) \bmod n = c$$

$$k = (0, 1, 2, \ldots)$$

$$x \bmod n = c$$

$\hookrightarrow$ $x = nk + c$

$$x \bmod \overset{n}{3} = \overset{c}{2}$$

$$x \equiv nk + c$$

$$x \equiv 3k + 2 \quad (k = \underline{0}, 1, 2, \ldots)$$

$$x_{min} \equiv 3 \cdot 0 + 2$$

$$\equiv 2$$

x

[OSNK 2016]
Pak Dengklek akan membeli sejumlah permen untuk dibagikan pada tamunya yang datang di pesta ulang tahunnya. Dia mengetahui akan ada paling banyak 8 tamu yang datang. Karena Pak Dengklek adil, Pak Dengklek akan membagi rata permen itu kepada tamu-tamu tersebut. Jika semua tamu datang akan tersisa 6 permen. Jika 1 tamu tidak 7 datang, akan tersisa 5 permen. Jika 3 5 tamu tidak datang, akan tersisa 2 permen. Bantulah Pak Dengklek untuk menentukan banyaknya permen paling sedikit yang harus dibeli.

a. 168
b. 504
c. 202
d. 222
e. 102

$nk + c$

$n \quad c$

$$x \bmod 8 \equiv 6 \rightarrow x \equiv 8k + 6$$

$$x \bmod 7 \equiv 5 \rightarrow x \equiv 7l + 5$$

$$x \bmod 5 \equiv 2 \rightarrow x \equiv 5m + 2$$

$$k, l, m = (0, 1, 2, \ldots)$$

* $8k+6 \equiv \{6 \xrightarrow{+8} 14, 22, 30, 38, \ldots, 222\}$

* $7l+5 \equiv \{5, 12, 19, 26, \ldots, \overset{x_{min}}{222}\}$

* $5m+2 \equiv \{2, 7, 12, \ldots, 222\}$

Faktorisasi Prima, Tau, Sigma, Phi (Euler)

$$n = p_1^{e_1} \times p_2^{e_2} \times p_3^{e_3} \times \dots \times p_i^{e_i}$$

e_i = Pangkat (bilangan bulat non negatif)

P_i = Faktor Prima dari n

$$10 = 2 . 5$$

$$1.000.000 \Rightarrow 10^6 = (2 . 5)^6 = 2^6 . 5^6$$

2   500.000

capek wok!

* Tau Function → $\tau(n)$

Ada berapa banyak faktor / pembagi / bilangan yang habis membagi suatu bilangan n → $\tau(n)$

10 Faktornya adalah = $\{\underbrace{1, 2, 5, 10}\}$

Banyak Faktor ada 4

$\tau(10) = 4$

$$\tau(n) = (e_1 + 1) \times (e_2 + 1) \times \ldots (e_i + 1)$$

$$= \prod (e_i + 1)$$

$P(1000.000) = \ldots ?$

$$10^6 = 2^{6} \cdot 5^{6}$$

$e_1 \quad e_2$

$$P(10^6) = (6+1)(6+1)$$

$$= 7 * 7$$

$$= 49$$

Banyak Faktor dari 10^6 adalah $\underline{\underline{49}}$

$$\sum_{i=1}^{5} i = 1 + 2 + 3 + 4 + 5$$

$$\prod_{i=1}^{5} i = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5$$

```
int hitung(int n){
  int ret = 0;
  for(int i = 1; i<=n; i++){
    if(n % i == 0){
      ret ++ ;
    }
  }
  return ret;
}
```

* hitung = ret

ret → ret bertambah 1 setiap kali n mod i = 0

ret = 1 * (banyak kejadian $\underbrace{n \bmod i}_{\text{saat } i \text{ merupakan faktor dari } n}$ = 0)

= banyak faktor n

f(n) = ... ?

Tentukan berapa hasil pemanggilan hitung(2886)!

$$2886 = 2^{1 = e_1} * 3^{1 = e_2} * 13^{1 = e_3} * 37^{1 = e_4}$$

$$f(2886) = (1+1) \times (1+1) \times (1+1) \times (1+1)$$

$$= 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16 //$$

2^x , 3^x

2886 mendekati $2^?$

* Sigma Function $\rightarrow \sigma(n)$

Menghitung berapa hasil jumlah semua faktor bilangan n

$\sigma(20) = \ldots ?$

20 Faktornya adalah (1, 2, 4, 5, 10, 20)

$\sigma(20) = 1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 20 = 42$

$20 = 2^2 \cdot 5$

$$2^2 \cdot 5$$

$$(2^0 + 2^1 + 2^2) \times (5^0 + 5^1)$$

$$= (1 + 2 + 4) \times (1 + 5)$$

$$= 7 \times 6$$

$$= 42$$

0001 → decimal

1. Misalkan kita mau membayar belanjaan yang harganya 2769 rupiah dengan satu jenis pecahan saja yaitu senilai x. Ada berapa banyak nilai x yang memenuhi?

$x \cdot k = 2769$

x merupakan faktor dari 2769

$\tau(2769) = \ldots ?$

* Phi Euler Totient Function $\rightarrow \phi(n)$

$a^b \bmod n$ > a dan b relatif prima

$a \neq b$, $b \neq a$

$\gcd(a,b) = 1$

$$a^b \bmod n \equiv a^{b \bmod \phi(n)} \bmod n$$

$$\phi(n) = n \times \left(1 - \frac{1}{P_1}\right) \times \left(1 - \frac{1}{P_2}\right) \times \dots$$

$$= n \times \prod \left(1 - \frac{1}{P_i}\right)$$

$\phi(n)$ = banyaknya bilangan yang tidak bisa membagi dan dibagi n atau 1

relatif prima dgn n

$\gcd(\text{bil}, n) = 1$

$\phi(10) = 4$ //

10 relatif prima dgn $(\underbrace{1, 3, 7, 9}_{\text{ada } 4})$

Berapa digit terakhir dari 36^{2025}

$36^{2025} \bmod 10 = 36^{2025 \bmod \phi(10)} \bmod 10$

$= 36^{2025 \bmod 4} \bmod 10$

$$43^{43^{2018}} \bmod 100 \,? = 36^{1} \bmod 10 = 6$$

$$100 = 2^2 \, 5^2$$

$p_1 \quad p_2$

$$\phi(100) = 100 \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) \times \left(1 - \frac{1}{5}\right)$$

$$= \cancel{100} \times \frac{1}{\cancel{2}} \times \frac{4}{\cancel{5}}$$

$\cancel{50}$ 10

$$\phi(100) = 40$$

$$= 40$$

$$43^{2018} \bmod \phi(100)$$

$$43^{\boxed{43^{2018} \bmod 40}} \bmod 100$$

$$43^{1} \bmod 100$$

$$43^{2018} \bmod 40 = (43 \bmod 40)^{2018} \bmod 40$$

$$= 3^{2018} \bmod 40$$

$$= (3^4)^{502} \bmod 40$$

$$= 81^{502} \bmod 40$$

$$= (81 \bmod 40)^{502}$$

$$= 1^{502} = 1$$

$$43^{1} \bmod 100 = 43,$$

$$\left.\begin{aligned} \phi(10) &= 4 \\ \phi(100) &= 40 \\ \phi(1000) &= 400 \end{aligned}\right\} \quad \phi(10^n) = 4 * 10^{n-1}$$

* Lil Fermat Theorm

$$a^{p-1} \bmod p = 1 \ , \ p = \text{Prime}$$

$$a^{x} \bmod (a-1) = 1$$

$$198798865^{\boxed{10}\ p-1} \bmod \underset{p}{\boxed{11}} = 1$$

* GCD – LCM

$$FPB(a,b) = \frac{a \times b}{KPK(a,b)}$$

$$KPK(a,b) = \frac{a \times b}{FPB(a,b)}$$

→ Euclid GCD Algorithm

```
int findGCD(int a, int b) {
    if (a == 0)
        return b;
    return findGCD(b % a, a);
}
```

$gcd(a, b) = gcd(b \bmod a, a)$

$a | b$

$gcd(a, b) = gcd(b \bmod a, a)$

$a | b$

$gcd(b, a)$

$gcd(a, \cancel{\bmod b}, b)$ 0

$= b$

```
int f(int a, int b){
    if (a == 0)
        return b;
    return f(b % a, a);
}

int g(int a, int b){
    return a * b / f(a,b);
}
int ret = 0;
for(int i = 1; i<=10; i++){
   for(int j = 1; j<=i; j++){
      ret += f(i,j) * g(i,j) / i * j
  }
cout<<ret<<endl;?
```

$= 1$

FPB(i,j) KPK(i,j)

gcd (a, 1) = 1

$$FPB(i,j) = \frac{i * j}{KPK(i,j)}$$

$$FPB(i,j) * KPK(i,j) = i * j$$

i=1 → 1 * 1

i=2 → 1 * 2

i=3 → 1 * 3

i=4 → 1 * 4

⋮

i=10 → 1 * 10

+

1 + 2 + 3 + 4 + … + 10