

Pengantar Kombinatorika

By Abdan Hafidz

- Kaidah Berhitung : Aturan Penjumlahan, Perkalian, dan Pengurangan (Komplementer)
- Prinsip Inklusi - Eksklusi
- Pigeonhole Principle (PhP)
- Permutasi : Permutasi Unsur berbeda, Permutasi Unsur Berulang, Permutasi Siklis
- Kombinasi : Kombinasi Unsur Berbeda, Kombinasi Unsur Berulang (Stars and Bars)
- Pengantar Peluang

Aturan Penjumlahan

Aturan Penjumlahan

Di suatu sekolah terdiri dari 5 ruang kelas X (X-1, X-2, X-3, X-4, dan X – 5), kelas X-1 terdiri dari 20 murid, kelas X – 2 terdiri dari 15 murid, X – 3 terdiri dari 17 murid, X – 4 dan X – 5 terdiri dari 10 murid.

Jika dari masing – masing kelas akan dipilih satu orang perwakilan untuk mengikuti rapat Hokage OSIS ada berapa banyak caranya?

Aturan Penjumlahan

Pak Dengklek menggambar sebuah segitiga pada selembar kertas, ia memiliki pilihan untuk menggambar sebuah segitiga siku – siku atau segitiga sama kaki, ia bisa saja menggambar segitiga dengan cara membuat variasi rotasinya $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ, 360^\circ$, ada berapa banyak gambar berbeda yang mungkin dihasilkan?

Aturan Penjumlahan

Perhatikan potongan program di bawah ini!

```
while(N--) {  
    for(int i = 1; i<=N; i++) {  
        cout<<"kwak "<<endl;  
    }  
}
```

5050

5050

$$\frac{(19+1) \cdot 19}{2} = 1950$$

$$99 + 98 + 97 + \dots + 0$$

$$\begin{aligned} \text{ans} &= 5050 - 100 \\ &= 1950 \\ &= \end{aligned}$$



Ada berapa banyak string "kwak" yang dihasilkan jika N = 100

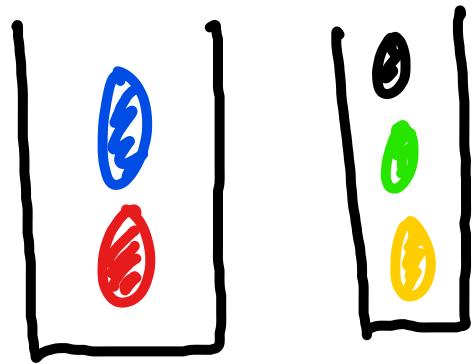
N = 5 ~~N = 5-1 = 4~~
while(~~N~~) {
 cout<<N<<endl;
}

X 1 3 2 1 0

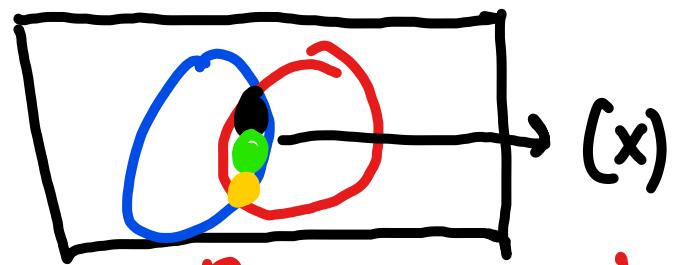


Var
While (Var) {
Var
}
}

Aturan Perkalian



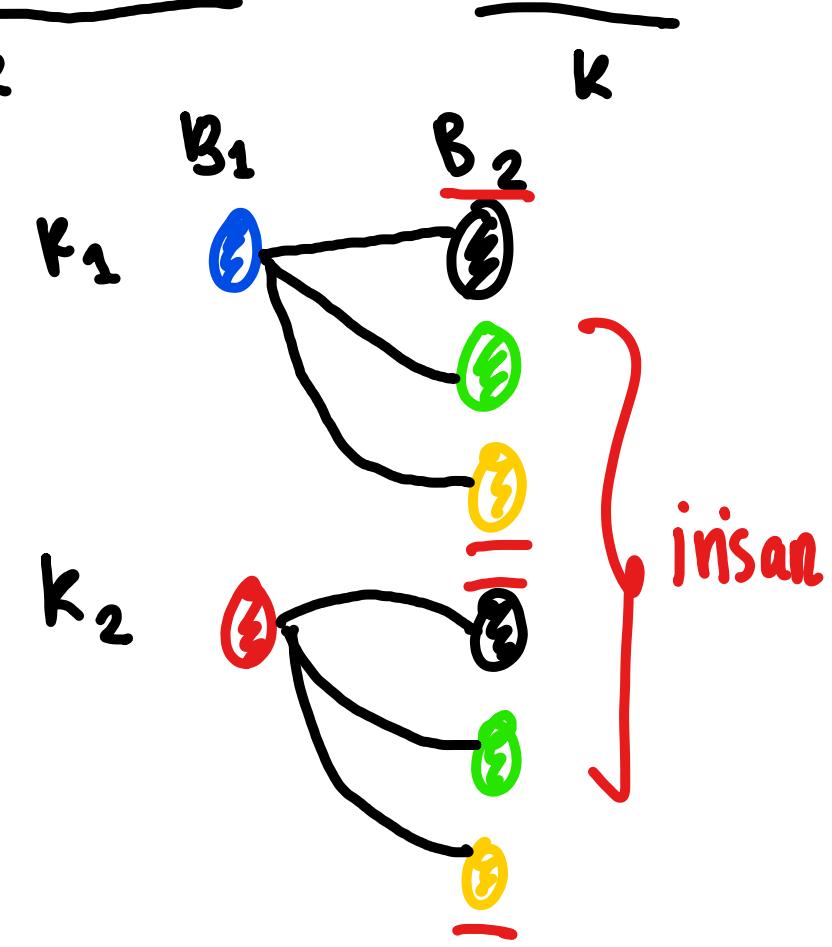
Ada berapa banyak pasangan bola jika diambil 1 dari kotak pertama dan 1 dari kotak kedua



$$\underline{B_1} = 2 \text{ bola}$$

$$\underline{B_2} = 3 \text{ bola}$$

K_1 & K_2 beririsasi



Aturan Perkalian

Terdapat 10 butir soal Olimpiade Informatika di mana soal berjenis pilihan ganda yang terdiri dari opsi A,B,C,D, atau E, ada berapa banyak cara Pak Dengklek menjawab soal tersebut jika ia diperbolehkan mengosongkan jawaban?

Dari kota A ke kota B dilayani oleh 4 bus dan dari B ke C oleh 3 bus. Seseorang berangkat dari kota A ke kota C melalui B kemudian kembali lagi ke A juga melalui B. Jika saat kembali dari C ke A, ia tidak mau menggunakan bus yang sama, maka banyak cara perjalanan orang tersebut adalah

Aturan Perkalian

151
 $i=1, k=10 \times 2 \text{ digit}$
 $1 \leq i \leq 10$
K genap $\Rightarrow \underline{\underline{27 \cdot 5}}$

Perhatikan potongan program di bawah ini!

```
for(int i = 1; i<=10; i++) {
    cout<<i;
    for(int j = 1; j<=27, j++) {
        for(int k = 1; k<=10; k++) {
            if(k%2 == 0) cout<< k <<endl;
        }
        if(j%3 == 0) cout<<j;
    }
}
```

i j 1 27 2
 1 9 2 ✓

* 2 digit
i k → j % 3 != 0
10 * 18 = 180 = 180
i j k
27 - 9

basis output berupa bilangan
Ada berapa banyak bilangan < 4 digit yang dicetak oleh program?

1 9 2 } 1 bilangan
1 9 2 } 2 output

j % 3 k % 2 != 0
1 9 2

Aturan Pengurangan (Komplemen)

3 digit

$$\overline{ik} = \underline{\cancel{q}} - \underline{\cancel{l}} = q$$

1 dg 2 dg

$$ij\overline{k} \rightarrow j \cancel{13} \times 12$$

1 dg 1 dg 1 dg

$$ij\overline{k} = \frac{q}{(2-1)} \times \frac{3}{(3,6,9)} \times \frac{1}{(2-8)} = 18q$$

$$ik = \frac{1}{10} \times \frac{1}{(2-8)} = 1$$

2 dg 1 dg

$$(9 + 1) \times \frac{18}{j \times 3} = 13 + 18 \\ = 231$$

ij k

$$\text{ans} = \overbrace{189 + 231 +}^{\cdot} \underbrace{f_{20}}$$

Aturan Pengurangan (Komplemen)

8. Perhatikan pernyataan logika berikut:

```
((if p then q) and r) iff not (p or (q xor r))
```

Jika

```
a iff b = (if a then b) and (if b then a)
```

serta

```
a xor b = (a and not b) or (b and not a)
```

maka berapa banyak cara berbeda untuk menentukan nilai p, q, r sehingga pernyataan tersebut menjadi benar?

Aturan Pengurangan (Komplemen)

$$|A| = |S| - |A^c|$$

$$|A^c| = |S| - |A|$$

Baik = J.S orang - orang Jahat

Jahat = J.S orang - orang baik

Aturan Pengurangan (Komplemen)

Ada 5 orang Kwak, Kwik, Kwok, Kwek, dan Kwak yang duduk di sebuah kursi taman memanjang. Ada berapa banyak posisi duduk mereka jika Kwak dan Kwik tidak boleh duduk bersebelahan?

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{|A|}{|S|} \rightarrow P(S) = \frac{|S|}{|S|} = 1$$

Pemua

Dua buah dadu dilemparkan secara bersamaan, ada berapa banyak kemungkinan hasil jumlah mata kedua dadu > 3 ?

$$\frac{33}{36}$$

$$\underline{P(X=1)} + \underline{P(Y=5)} + \dots + \underline{P(X=12)}$$

$$A = \text{sum } > 3 = |S| - |A^c| = \frac{36}{36} - \frac{3}{36} = \frac{33}{36} (\checkmark)$$

$$A^c = !(\text{sum } >) = \text{sum } \leq 3 = P(\text{sum}=2) + P(\text{sum}=3) = \frac{3}{36}$$

$$S = P(\text{terjadi}) + P(\text{tidak terjadi}) = \frac{1}{1}$$

Aturan Pengurangan (Komplemen)

```
int ret, res;  
res = 0;  
for(int i = 2; i<= 100; i++) {  
    ret = 0;  
    for(int j = 1; j<=i; j++) {  
        if(ret > 2){  
            res++;  
            break;  
        }  
        else if(i%j == 0) ret++;  
    }  
}
```

$A^C = \underbrace{\text{banyak faktor}}_{A = \text{berapa banyak faktor} > \text{dari } 2} \leq 2 \rightarrow$
 $\text{ret} > 2 \text{ (?)}$

$\rightarrow j \text{ faktor dari } \rightarrow \text{ret}++$

$\text{ret} = \underbrace{\text{banyak faktor}}_i i$

Tentukan berapa nilai akhir res

$\text{ret} ; = \text{ret Masing - Masing } i$

ans : $\sum_{i=2}^{100} \text{banyak } i \text{ yang bukan prima} = 100 - 25 - 1 = 74$

Inklusi Eksklusi

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

atau

$$|A \cap B| = |A| + |B| - |A \cup B|$$

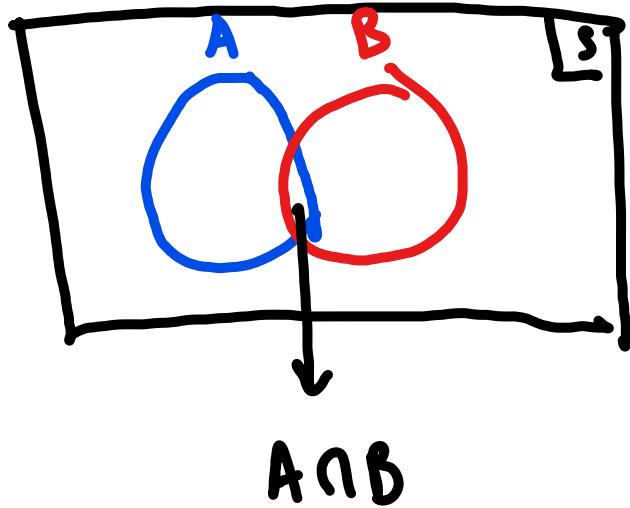
saling
lepas

dan

↓ $|A| + |B| \rightarrow$ Saling bebas

Inklusi Eksklusi

6 sekawan (A,B,C,D,E, dan F) ingin duduk di bioskop menonton bersama. F tidak ingin duduk di sebelah E. E ✓ ingin duduk di sebelah C. A tidak ingin duduk di sebelah B. D ingin selalu duduk di sebelah B.



$$A = \text{himp bil } |2 \quad (1 - 10)$$

$$B = \text{himp bil } |3 \quad (1 - 10)$$

$$A = \{2, 4, 6, 8, 10\} \quad) \cup \downarrow$$

$$B = \{3, 6, 9\}$$

$$A \cap B = \{6\}$$

$$A \cup B = \{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10\} \uparrow$$

$$\{2, 4, 6, 8, 10\} + \{3, 6, 9\} = \{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10\}$$
$$|A| + |B| - |A \cap B| = |A \cup B|$$

$A \cap B$
double count

Inklusi Eksklusi

```
int ret = 0;  
for(int i = 1; i<= 100; i++) {  
    if(i%2 == 0){  
        ret++;  
    }else if(i % 3 == 0){  
        ret++;  
    }  
}
```

If q
else if b

If b \leftarrow Tq
Tq \rightarrow If b

Banyak bilangan dari 1 sampai 100 habis dibagi 2 atau 3

$$|A| = \left\lfloor \frac{100}{2} \right\rfloor = 50$$

$$|B| = \left\lfloor \frac{100}{3} \right\rfloor = 33$$

$$|A \cap B| = \left\lfloor \frac{100}{\text{lcm}(2,3)} \right\rfloor = \frac{100}{6} = 16$$

$$\frac{1}{4} \quad \frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned}|A \cup B| &= |A| + |B| - |A \cap B| \\&= 50 + 33 - 16 \\&= 50 + 17 \\&= \underline{\underline{67}}\end{aligned}$$

Inklusi Eksklusi

```
int ret = 0;  
for(int i = 1; i<= 100; i++) {  
    if(i%2 == 0) {  
        ret++;  
    }  
    if(i % 3 == 0) {  
        ret++;  
    }  
}
```

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{if } i \% 2 == 0 \\ \text{if } i \% 3 == 0 \end{array} \right\} = \left\lfloor \frac{100}{2} \right\rfloor = 50$$

un-mutual

$$\left\lfloor \frac{100}{3} \right\rfloor = 33$$

~~50 + 33 = 83~~

= 83

Distributif

$$A \square (B \Delta C) \equiv (A \square B) \Delta (B \square C)$$
$$A \cap (B \cup C) \equiv (A \cap B) \vee (B \cap C)$$

Pigeonhole Principle

Pigeonhole Principle

Pada permainan Jembatan Kaca Squidgame, terdapat 16 pasang sisi kaca (kaca kanan dan kiri), setiap pasang kaca terdapat salah satu kaca yang jika diinjak akan pecah dan membuat orang jatuh ke bawah. Berapa minimal orang yang harus dikorbankan agar diketahui kaca mana saja yang aman untuk diinjak?



Pigeonhole Principle

Terdapat 5 bola merah, 2 bola kuning, dan 3 bola hijau di dalam sebuah Kotak. Pak Dengklek ingin mengambil beberapa bola dengan mata tertutup.

Berapa minimal jumlah bola yang harus Pak Dengklek ambil untuk memastikan bahwa ia mendapatkan sebuah bola Merah?

Pigeonhole Principle

Terdapat 5 bola merah, 2 bola kuning, dan 3 bola hijau di dalam sebuah Kotak. Pak Dengklek ingin mengambil beberapa bola dengan mata tertutup.

Berapa minimal jumlah bola yang harus Pak Dengklek ambil untuk memastikan bahwa ia mendapatkan minimal 1 dari masing – masing jenis bola?

Pigeonhole Principle

Terdapat 5 bola merah, 2 bola kuning, dan 3 bola hijau di dalam sebuah Kotak. Pak Dengklek ingin mengambil beberapa bola dengan mata tertutup.

Berapa minimal jumlah bola yang harus Pak Dengklek ambil untuk memastikan bahwa ia mendapatkan 1 bola kuning, 2 bola merah, dan 2 bola hijau?

Pigeonhole Principle

Asumsikan Pak Dengklek sudah membuat 7 tipe biskuit berbeda, yang masing-masing terdiri dari 5 butir biskuit. Jika Pak Dengklek ingin semua tipe biskuit pernah dicicipi oleh setidaknya 1 ekor bebek, berapa minimal bebek yang perlu diundang oleh Pak Dengklek?

Pigeonhole Principle

Asumsikan Pak Dengklek sudah membuat 100 tipe biskuit berbeda. Biskuit tipe 1 terdiri dari 10 butir, biskuit tipe 2 terdiri dari 20 butir, biskuit tipe 3 terdiri dari 30 butir, dan seterusnya hingga biskuit tipe 100 terdiri dari 1000 butir. Jika Pak Dengklek ingin semua tipe biskuit pernah dicicipi oleh setidaknya 5 ekor bebek, berapa minimal bebek yang perlu diundang oleh Pak Dengklek?

Permutasi Unsur Berbeda

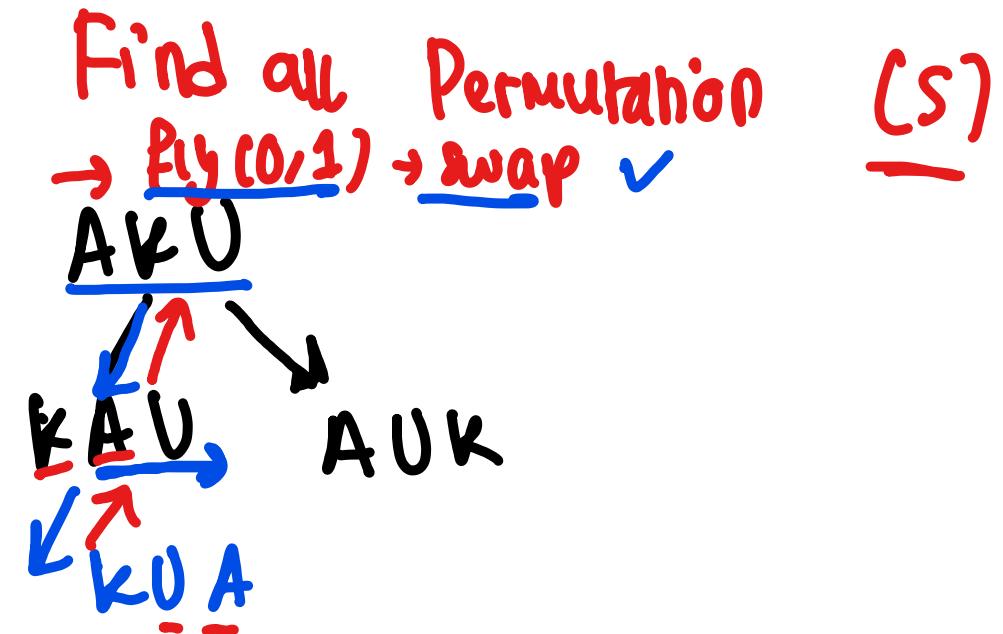
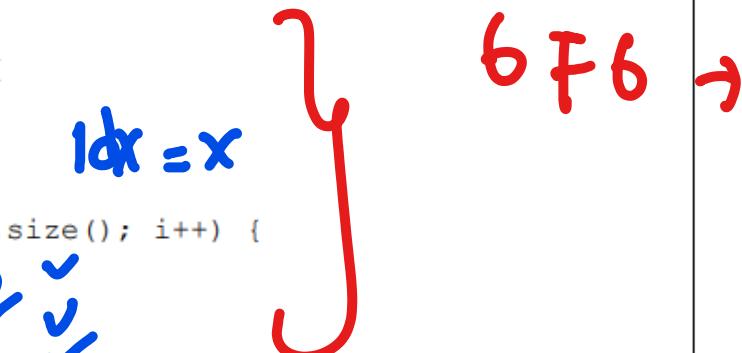
Permutasi Unsur Berbeda

Permutasi Unsur Berbeda

Permutasi Unsur Berbeda

Perhatikan potongan program berikut untuk nomor 34 – 35!

```
void fly(string s, int x)
{
    if (x == s.size() - 1) {
        cout << s ;
        return;
    }
    for (int i = idx; i < s.size(); i++) {
        swap(s[x], s[i]);
        fly(s, idx + 1);
        swap(s[x], s[i]);
    }
}
```



Catatan: Pada kode tersebut, `idx` seharusnya `x`.

34. Tentukan keluaran dari hasil pemanggilan `fly("AKU", 0)`! {tuliskan jawaban dalam bentuk string tanpa dipisahkan spasi}

Handwritten annotations:

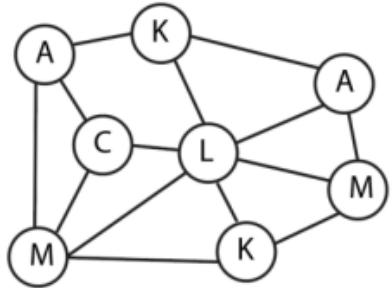
- Letters A, B, C, and D are written above a sequence of four arrows pointing right.
- The first two arrows are grouped by a double-headed blue arrow labeled `fly(0,1)`.
- The last two arrows are grouped by a double-headed blue arrow labeled `fly(1,2)`.

Permutasi Unsur Berbeda

Dari 15 orang kelas X – A akan dipilih satu orang untuk mengikuti lomba Informatika, satu orang untuk mengikuti lomba Matematika, dan satu lagi untuk lomba Fisika. Ada berapa banyak cara pemilihan yang bisa dilakukan?

Permutasi Unsur Berbeda

MESIN PEMBUAT KATA 2 [11 – 12]



Mesin terbaru milik Pak Dengklek dapat membuat sebuah kata dengan mengikuti diagram di atas. Pertama ia memilih sebuah huruf lalu huruf berikutnya adalah huruf lainnya yang terhubung langsung dengan huruf sebelumnya.

12. Ada berapa banyak kata dengan panjang maksimum tidak memuat huruf berulang yang dapat dibentuk? **{tuliskan jawaban dalam bentuk ANGKA saja}**

Permutasi Unsur Berulang

Permutasi Unsur Berulang

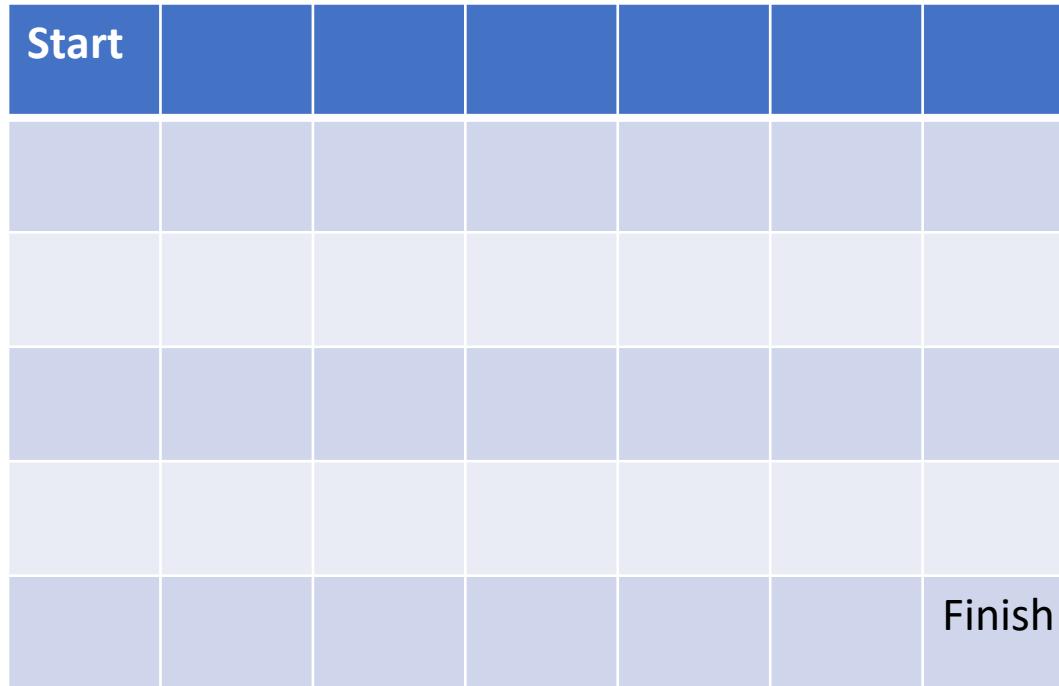
Berapa banyak permutasi string KSNK2021 sehingga tidak ada huruf maupun angka yang sama bersebelahan? [Jawablah dengan angka saja!]

Permutasi Unsur Berulang

Terdapat 4 ekor bebek berwarna merah, 3 ekor bebek berwarna biru, dan 2 ekor bebek berwarna hijau. Kesembilan bebek tersebut diminta untuk berbaris oleh Pak Dengklek dengan ketentuan:

- Setiap bebek yang berwarna sama tidak bisa dibedakan
- Untuk setiap pasang bebek yang berwarna sama, tidak boleh ada bebek lain yang warnanya berbeda yang berada di antara sepasang bebek tersebut. Ada berapa macam posisikah yang mungkin dalam barisan bebek tersebut?

Permutasi Unsur Berulang



Ada berapa banyak cara seseorang dari petak start menuju petak Finish jika ia hanya bisa bergerak ke bawah atau ke kanan saja?

Kombinasi Unsur Berbeda

Kombinasi Unsur Berbeda

Dari 15 orang kelas X – A akan dipilih tiga orang untuk mengikuti lomba Informatika. Ada berapa banyak cara pemilihan yang bisa dilakukan?

Kombinasi Unsur Berbeda

Tahun ini Pak Dengklek ditunjuk menjadi ketua panitia Olimpiade Internasional Bebek (OIB). Untuk memberikan pengalaman kepada bebek-bebeknya, Pak Dengklek berencana memilih 10 dari 15 bebek yang dimilikinya untuk menjadi peserta. Tentunya kita tahu bahwa di antara 15 bebek tersebut, ada empat bebek kesayangan Pak Dengklek, yaitu Kwak, Kwik, Kwek dan Kwok. Kwak dan Kwik harus dipilih untuk menjadi peserta lomba karena keduanya yang paling pintar. Sedangkan Kwek dan Kwok tidak bisa dipilih sebab saat ini sedang sakit. Ada berapa banyak cara memilih bebek-bebek sebagai peserta OIB?

Kombinasi Unsur Berbeda

Ada 2 buah kendi, pada kendi pertama terdapat 5 buah bola warna berbeda, kendi kedua 3 buah bola warna berbeda Pak Dengklek melakukan 3 kali pengambilan bola tanpa pengembalian, ada berapa banyak kombinasi bola yang didapatkan, jika warna bola pada kendi kedua tidak ada pada kendi pertama?

Kombinasi Unsur Berbeda

Ada 2 buah kendi, pada kendi pertama terdapat 5 buah bola warna berbeda, kendi kedua 3 buah bola warna berbeda Pak Dengklek melakukan 2 kali pengambilan bola tanpa pengembalian, ada berapa banyak kombinasi bola yang didapatkan, jika ada bola dari kendi kedua memiliki warna yang sama dari bola pada kendi pertama?

Kombinasi Unsur Berbeda

Jika diberikan sembilan buah patok pada lahan Pak Dengklek sebagai berikut:

Pak Dengklek ingin membuat sebuah kandang yang berbentuk segitiga dimana setiap pojok sudut kandang harus merupakan patok-patok tersebut. Sisi kandang boleh melewati atau mengandung patok-patok lainnya. Ada berapa banyak kemungkinan kandang yang bisa dibangun oleh Pak Dengklek?



Kombinasi Unsur Berulang

$$\sum_{x_i \leq N} x_i = N \rightarrow x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_i = N$$

ada berapa banyak konfigurasi solusi

$$ans = \frac{N+i-1}{N} C_{i-1}$$

Kombinasi Unsur Berulang

Terdapat 5 bola merah, 2 bola kuning, dan 2 bola hijau, semua bola pada masing – masing warna tidak bisa dibedakan atau identik. Ada berapa banyak cara memilih 8 bola secara acak di antaranya?

$$M + K + H = 8$$

$$x_1 \quad x_2 \quad x_3 = 8$$

$$x_1 \leq 5 , \quad x_2 \leq 2 , \quad x_3 \leq 2$$

Kombinasi Unsur Berulang

Asumsikan Pak Dengklek sudah membuat 3 tipe biscuit berbeda. Biskuit tipe 1 terdiri dari A butir, biskuit tipe 2 terdiri dari B butir, dan biskuit tipe 3 terdiri dari C butir. Diketahui bahwa total biskuit yang dibuat Pak Dengklek adalah 25 (dengan kata lain, $A + B + C = 25$). Jika diketahui pula bahwa Pak Dengklek perlu mengundang minimal 20 ekor bebek agar semua tipe biscuit pernah dicicipi oleh setidaknya 1 ekor bebek, maka berapa banyak triplet berbeda yang mungkin?

$$x_1 + x_2 + x_3 = 25$$

$$x_i \geq 1, 20$$

Kombinasi Unsur Berulang

Ada berapa banyak nilai x_i yang memenuhi persamaan di bawah ini

$$x_1 + x_2 + x_3 = 15, \text{ jika } x_1 \geq 2, x_2 > 3, \text{ dan } x_3 \leq 4?$$

$$x_1 \geq 0 \rightarrow x_1 \geq 2$$

$$(x_1 + 2) + (x_2 + 4) +$$

$$x_2 \geq 0 \rightarrow x_2 \geq 4$$

$$(x_3 - 1) = 15$$

$$x_3 \leq 15 \rightarrow x_3 \leq 4$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 15 - 4 - 2 + 11$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 20$$

$$20+3-1 C 20$$

$$22 C 20$$

Pengantar Peluang

$$X_1 + X_2 + X_3 = 10, X_i \geq 1$$

$$\sum X_i = N, X_i \geq 0 \rightarrow X_i \geq 1$$

$$X_i + 1 \geq 1$$

$$(X_1 + 1) + (X_2 + 1) + (X_3 + 1) = 10$$

$$X_1 + X_2 + X_3 = 10 - 3 \rightarrow \underline{\underline{1}} + \underline{\underline{3}} - \underline{\underline{1}} \text{ C } \underline{\underline{1}}$$

Pengantar Peluang

Pak Dengklek menghadiri acara undian berhadiah. Pak Dengklek akan memenangkan sepeda dengan peluang $\frac{1}{2}$, memenangkan tank dengan peluang $\frac{1}{3}$, dan memenangkan kapal dengan peluang $\frac{1}{4}$. Jika ketiga hadiah tersebut diundi secara terpisah, berapa peluang Pak Dengklek mendapatkan setidaknya 2 kendaraan?

$$\underline{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 12}$$

$$x_i \leq 4 \text{ dan } x_i \geq 1 \rightarrow 1 \leq x_i \leq 4$$

✓

$$x_i \leq \dots, x_i > \dots$$

$$+1 \quad 0 \leq x_i \leq 12 - 8 \quad \cancel{\text{+1}} \quad 0 \leq x_i \leq 4$$

$$+1 \quad 0 \leq x_i \leq 8 + 1 \quad \cancel{V} \quad 8 \leq x_i \leq 12 - 8$$

$$\cancel{+1} \quad 1 \leq x_i \leq 9$$

$$V \quad 0 \leq x_i \leq 12$$

inklusi eksklusi

$$12 + 1 - 1 C 2$$

Pengantar Peluang

Empat anak bernama Andi, Budi, Caca, dan Dudi sedang bermain hompimpa. Andi, Budi, dan Caca mempunyai peluang berturut-turut $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, dan $\frac{1}{4}$ untuk mengeluarkan hitam. Permainan dilakukan terus-menerus sampai ada yang menang. Seorang pemain dikatakan menang apabila mengeluarkan warna yang berbeda dengan semua pemain lainnya. Untuk mendapatkan peluang menang terbesar, Dudi perlu mengeluarkan warna ... sehingga peluangnya menjadi ...

- a. Hitam - $\frac{1}{8}$
- b. Hitam - $\frac{1}{6}$
- c. Putih - $\frac{1}{6}$
- d. Hitam - $\frac{1}{4}$
- e. Hitam - $\frac{3}{5}$