SET 16

A. Bagian Analitika dan Logika

1. Pak Dengklek sedang bekerja sebagai kuli bangunan di Bebeknesia. Ia diberikan pekerjaan terdiri dari 100 tugas yang harus diselesaikan dalam waktu setengah tahun. Ia melakukan pekerjaannya itu dengan cara menyelesaikan beberapa tugas perbulan. Selama satu bulan ia harus menyelesaikan setidaknya satu buah tugas secara tuntas. Hal ini dilakukan hingga seluruh tugasnya selesai secara keseluruhan, berapa banyak konfigurasi penyelesaian tugas perbulan jika seluruh tugasnya harus sudah selesai sesuai jangka waktu yang ditetapkan dan banyak tugas yang ia selesaikan perbulannya bernilai ganjil? **{jawablah dengan hasil berupa dua digit terakhir jawaban}**
JAWABAN : 60

Lakukan analisa secara mendalam, permasalahan ini dapat diselesaikan dengan metode ***kombinasi - stars and bars theorm .***

Konfigurasinya adalah :

- Misalkan x_i adalah banyak tugas yang diselesaikan pada bulan ke-i

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 100$

Untuk setiap $x_i bilanganganjil$.

Sifat dari bilangan ganjil adalah $2k - 1$ untuk k suatu bilangan bulat positif

- Misalkan k_i adalah bilangan bulat yang akan memenuhi sehingga

$x_i = bilanganganjil = 2k_i - 1$

Maka

$2k_1 - 1 + 2k_2 - 1 + 2k_3 - 1 + 2k_4 - 1 + 2k_5 - 1 + 2k_6 - 1 = 100$

$2k_1 + 2k_2 + 2k_3 + 2k_4 + 2k_5 + 2k_6 = 100 + 6$

$2(k_1 + k_2 + k_3 + k_4 + k_5 + k_6) = 106$

$k_1 + k_2 + k_3 + k_4 + k_5 + k_6 = \frac{106}{2}$

$k_1 + k_2 + k_3 + k_4 + k_5 + k_6 = 53$

k_i tidak boleh 0 karena akan menyebabkan $2k_i - 1 = -1$ dan ini tidak diperbolehkan. Oleh karenanya kita batas dalam interval untuk $k_i \geq 1$ sehingga konfigurasi k_i yang dicari

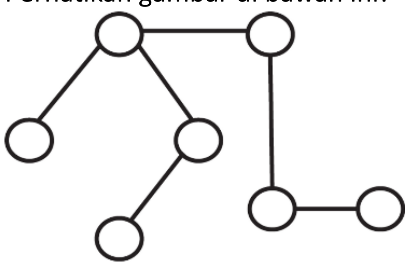
$k_1 + 1 + k_2 + 1 + k_3 + 1 + k_4 +_1 + k_5 + 1 + k_6 + 1 = 53$

Banyak $k_i(1 \leq i \leq 6)$,$k_i \geq 1$ yang memenuhi adalah :

$\binom{53-6+6-1}{53} = \binom{58}{53-6} = 2598960$

$2598960 \ mod \ 100 = 60$

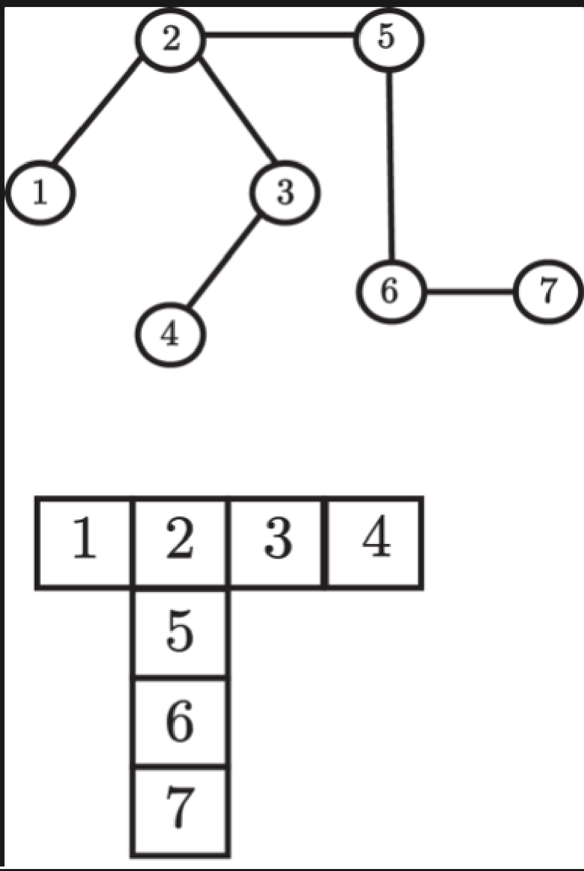
2. Perhatikan gambar di bawah ini!



Di Bebeknesia Kwak sedang membantu Pak Dengklek di bagian lain sebagai kuli Bangunan juga. Ia diberi tugas mengecat dengan beberapa pewarna merah,kuning,dan hijau untuk

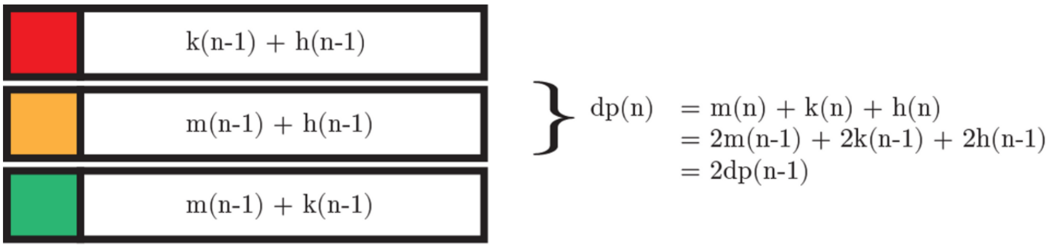
semua gedung (direpresentasikan sebagai lingkaran) ,saling terhubung dengan jalan (yang direpresentasikan sebagai garis). Setiap gedung diwarnai dengan ketentuan bahwa gedung yang saling terhubung langsung melalui sebuah jalan tidak boleh berwarna sama. Berapa banyak cara Kwak mewarnai semua gedung yang ada?ketentuan bahwa gedung yang saling terhubung langsung melalui sebuah jalan tidak boleh berwarna sama. Berapa banyak cara Kwak mewarnai semua gedung yang ada? **{Jawaban berupa angka bulat}**
Jawaban : 192

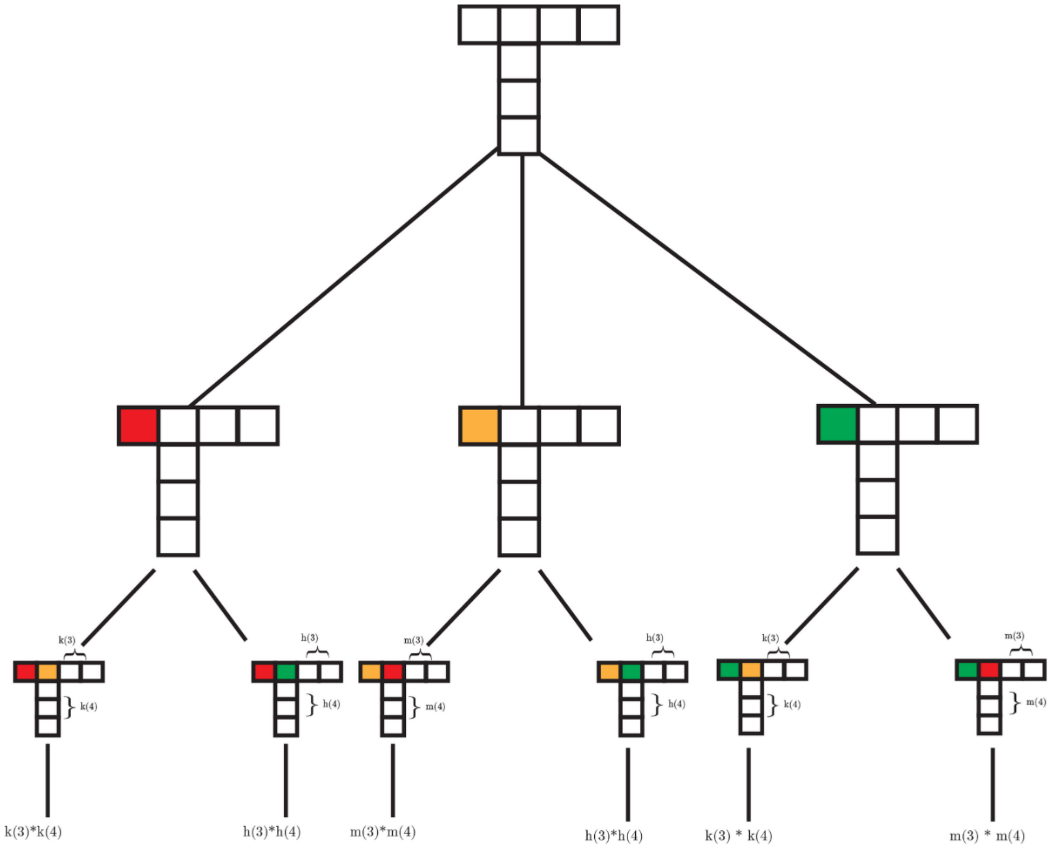
Kita dapat mengilustrasikan ulang bahwa graf tersebut sebagai grid di mana setiap petak yang bersebelahan terhubung oleh sebuah edge.



Misalkan

- $dp(n)$ merupakan banyaknya cara mewarnai petak berukuran $1 \times n$ maka
- $m(n)$merupakan banyak cara mewarnai petak berukuran $1 \times n$ dengan warna merah pada petak pertama
- $k(n)$ merupakan banyak cara mewarnai petak berukuran $1 \times n$ dengan warna kuning pada petak pertama
- $h(n)$ merupakan banyak cara mewarnai petak berukuran $1 \times n$ dengan warna hijau pada petak pertama





Banyak cara adalah

$$= 2(m(3) * m(4)) + 2(k(3) * k(4)) + 2(h(3) * h(4))$$
$$= 2(m(3) * m(4) + k(3) * k(4) + h(3) * h(4))$$

$$m(2) = k(2) = h(2) = 2$$

$$m(3) = k(2) + h(2) = 4$$
$$k(3) = m(2) + h(2) = 4$$
$$h(3) = m(2) + k(2) = 4$$

$$m(4) = k(4) + h(4) = 8$$
$$k(4) = m(4) + h(4) = 8$$
$$h(4) = m(4) + k(4) = 8$$

Banyak cara pada akhirnya adalah $2(4 \times 8 + 4 \times 8 + 4 \times 8) = 2(32 \times 3) = 2 * 96 = 192$

3. Dilan sedang ingin makan buah Jeruk dan Apel belakangan ini. Selama satu minggu ini ia hanya makan buah Jeruk dan Apel saja. Ia ingin makan buah dengan aturan sebagai berikut
   - Setiap harinya ia hanya boleh makan satu jenis buah
   - Tidak boleh ada kejadian di mana ia makan Jeruk pada suatu hari lalu dua hari berturut - turut berikutnya ia makan buah Apel

   Tentukan berapa banyak konfigurasi pengaturan buah yang ia makan dalam satu minggu tersebut!**{Jawaban berupa angka bulat}**

   Jawaban : 54

   Misalkan 1 = Buah Jeruk , 0 = Buah Apel. Maka dalam kasus ini sama saja ketika kita ingin menyusun string bit sepanjang 7 dengan syarat tidak memuat substring `100` . Pada hari tertentu Dilan bisa makan Buah Jeruk ini membuat $dp[n-1]$ dan Buah Apel ini membuat $dp[n-1]$. Kasus ketika string bit sepanjang n diawali oleh string `100` maka sisanya mempunyai $dp[n-3]$ konfigurasi, kasus inilah yang menjadi bagian invalidnya. Sehingga kita dapatkan transisi rekursifnya adalah $dp[n] = 2dp[n-1] - dp[n-3]$ dengan basecase $dp[0] = 1, dp[1] = 2, dp[2] = 4$.

   $dp[3] = 8 - 1 = 7$

   $dp[4] = 14 - 2 = 12$

   $dp[5] = 24 - 4 = 20$

   $dp[6] = 40 - 7 = 33$

   $dp[7] = 66 - 12 = 54$

4. Perhatikan potongan program di bawah ini!

```
long long so = n;
    for (int i = 2; i * i <= n; i++) {
        if (n % i == 0) {
            while (n % i == 0)
                n /= i;
            so -= so / i;
        }
    }
    if (n > 1)
        so -= so / n;
```

   Tentukan berapa nilai akhir so jika n bernilai 10^8! .**{Jawaban berupa angka bulat}**

   Jawaban : 40000000

Program di atas menghasilkan so ber-nilai $\phi(n)$ sesuai dengan aturan **Euler Totient Function**

$\phi(n) = n \prod_{p \text{ prime } p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$

$$\begin{aligned}
\phi(n) &= \phi({p_1}^{a_1}) \cdot \phi({p_2}^{a_2}) \cdots \phi({p_k}^{a_k}) \\
&= \left({p_1}^{a_1} - {p_1}^{a_1-1}\right) \cdot \left({p_2}^{a_2} - {p_2}^{a_2-1}\right) \cdots \left({p_k}^{a_k} - {p_k}^{a_k-1}\right) \\
&= p_1^{a_1} \cdot \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdot p_2^{a_2} \cdot \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdots p_k^{a_k} \cdot \left(1 - \frac{1}{p_k}\right) \\
&= n \cdot \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right)
\end{aligned}$$

Dengan cara sederhana kita dapat menentukan bahwa

$\phi(10) = 4$

$\phi(100) = 40$

$\phi(1000) = 400$

.....

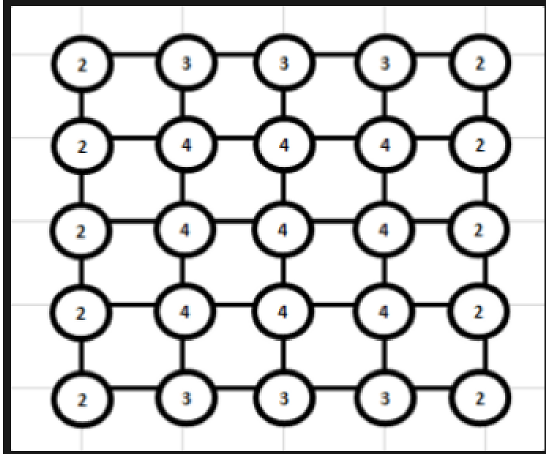
$\phi(10^n) = 4 * 10^{n-1}$

Sehingga

$\phi(100000000) = \phi(10^8) = 4 * 10^7 = 40000000$

5. Diberikan papan catur ukuran 4 × 4 dan seekor semut akan berjalan di sisi - sisinya. Tentukan banyaknya sisi petak satuan minimum yang harus dihilangkan sehingga seluruh sisi petak satuan sisanya dapat dilewati oleh semut tepat sekali tanpa putar balik.**{Jawaban berupa angka bulat}**

Permasalahan ini menyangkut teori graf **Lintasan Euler** . Misalkan pada petak 4 x 4 setiap titik sudutnya adalah sebuah simpul/node dan sisinya adalah edge/sisi graf. Dapat diilustrasikan sebagai berikut :

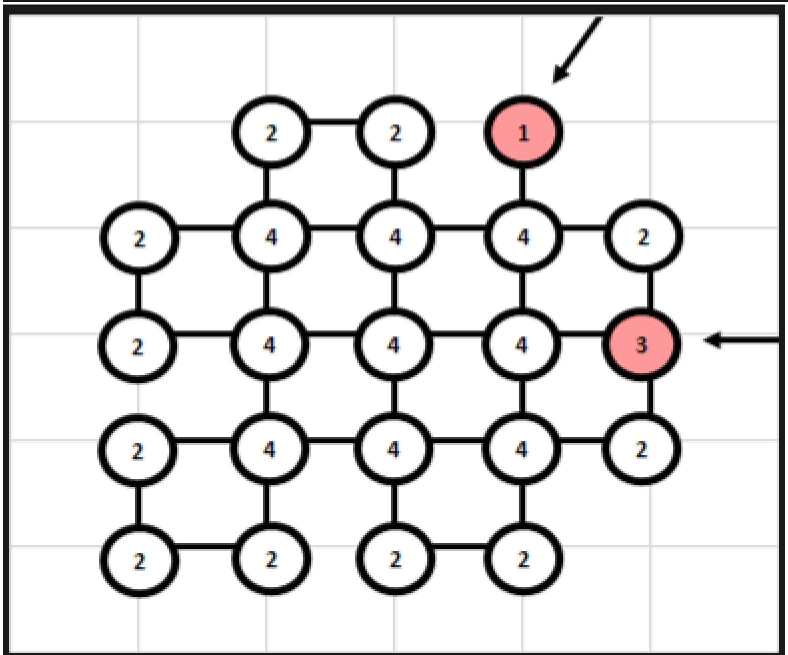


Angka pada simpul menunjukkan derajat / degree . Dalam kasus ini kita akan menghapus beberapa sisi sehingga terbentuk lintasan euler.

Lintasan euler terdapat dalam sebuah graf jika dan hanya jika :

- Seluruh simpul/node berderajat genap.
- Terdapat tepat sebuah pasangan (2 buah node) yang memiliki derajat ganjil.

Dilakukan dengan cara optimal kita bisa menghapus beberapa sisi/edge seperti ilustrasi di bawah ini. Sehingga tepat ada dua node yang berderajat ganjil



Sehingga minimal 9 sisi akan dihapus

6. Perhatikan potongan program di bawah ini!

```
int meng(int a, int b) {
 if(a == b) {
    return a;
}else if(a > b) {
    a -= b;
    return meng(a, b);
} else {
     b -= a;
     return meng(a, b);
}
}

int inet(int x, int y){
 int val = meng(x,y);
    if(val > 1){
      return x/meng(x,y)*y/meng(x,y);
    }else{
      return 0;
    }
}
```

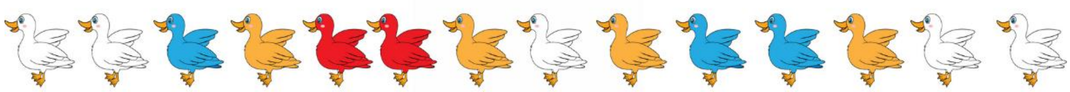
Dalam pemanggilan fungsi `inet` berapa banyak pasangan `x y` dalam interval $1 \leq x, y \leq 10^5$ yang memenuhi sehingga memberikan kembalian bernilai 37?

Jawaban : 2702

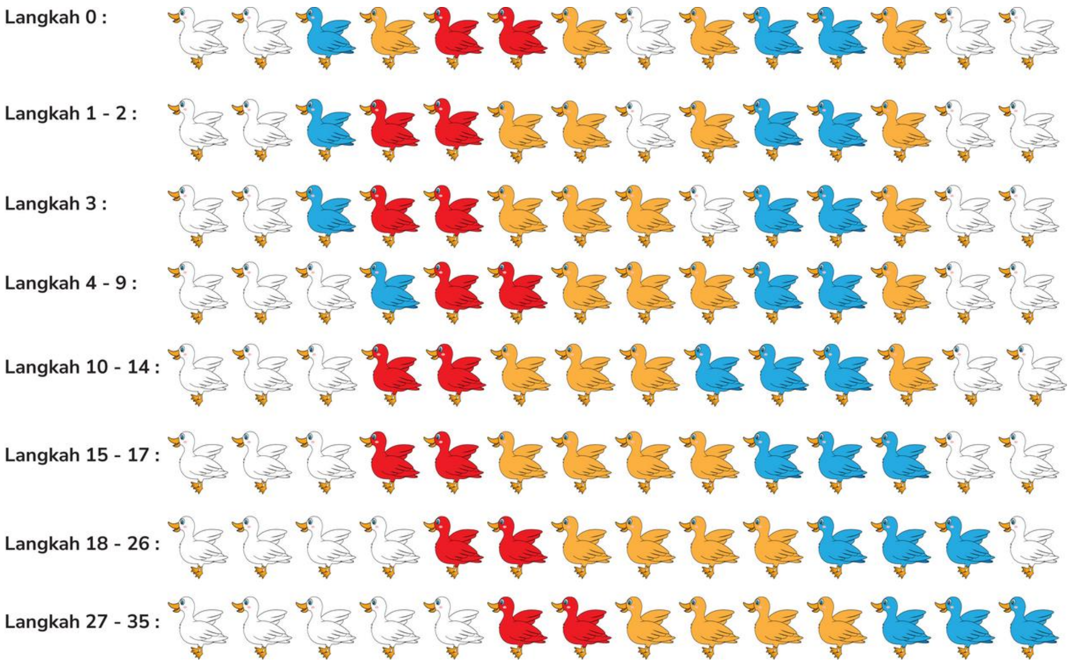
Fungsi `meng` akan mengembalikan nilai $GCD(a, b)$, fungsi inet akan mengembalikan hasil dari $\frac{x}{y}$
Sehingga dalam permasalahan ini kita akan menentukan banyaknya pasangan x, y yang memenuhi sehingga terpenuhi untuk $\frac{x}{y} = 37$.

x minimal dan y minimal masing masing $(37, 1)$. Lalu berikutnya kita tinggal mencari banyak k yang memenuhi sehingga $(37k, k) \leq 10^5$. $37k \leq 10^5$, atau mudahnya mencari banyak bilangan kelipatan 37 di antara $1 - 10^5$ (inklusif)banyak k yang memenuhi adalah $floor(10^5/37) = 2702$

7. Pak Dengklek mempunyai 14 ekor bebek yang disusun berbaris. Dalam barisan terdapat 4 jenis bebek yang dibedakan berdasarkan warna merah,kuning,putih, dan biru . Semua bebek dalam kelompok warna tertentu dianggap identik. Ia ingin mengubah susunan barisan bebeknya tersebut dengan cara mengurutkan susunan bebek berdasarkan warna. Ia bisa mengubah susunan suatu bebek dalam satu langkah dengan cara menukar posisi dua ekor bebek yang saling bersebelahan. Tentukan berapa langkah minimal yang harus ia lakukan sehingga susunan barisan bebeknya terurut berdasarkan warna!**{Jawaban berupa angka bulat}**



Jawaban : 35



8. Perhatikan potongan program di bawah ini!

```
int arr[5][5] = {
    {3,2,4,1,1},
    {2,0,1,2,3},
    {7,12,9,5,9},
    {9,-3,5,6,8},
    {10,3,2,0,3}
};

int kwak[5][5];
    kwak[0][0] = arr[0][0];

        for(int i=0;i<5;i++){
            for(int j=0;j<5;j++){
                int l = 0, r = 0;
                if(j > 0) l = kwak[i][j - 1];
                if(i > 0) r = kwak[i - 1][j];
                kwak[i][j] = max(l,r)+arr[i][j];
            }
        }
cout<<kwak[4][4]<<endl;
```

Tentukan keluaran program di atas! **{Jawaban berupa angka bulat}**

JAWABAN : 58

Perhatikan dengan baik pada program tersebut kita diberikan sebuah matriks berukuran 5×5 sebagai berikut .

3	2	4	1	1
2	0	1	2	3
7	12	9	5	9
9	-3	5	6	8
10	3	2	0	3

Kita dapat mengilustrasikan bahwa program ingin mengunjungi petak yang ada, dari petak $(1,1)$ menuju petak $(5,5)$. Dengan cara hanya bisa bergerak ke bawah $(x, y+1)$ atau ke kanan $(x+1, y)$. Setiap kali mengunjungi sebuah petak akan mendapatkan angka yang ada dalam petak tersebut , program ingin mendapatkan total angka semaksimal mungkin, ini sebagai ilustrasi $kwak[i][j]$ yang menyatakan total angka maksimal yang bisa ia dapatkan jika ingin mengujungi dari petak $(1,1)$ menuju petak (i,j) . Sama saja dengan ***Dynamic Programming***! anda bisa simulasikan menggunakan teknik optimal berupa metode top-down dari DP.

	1	2	3	4	5
1	3	2	4	1	1
2	2	0	1	2	3
3	7	12	9	5	9
4	9	-3	5	6	8
5	10	3	2	0	3

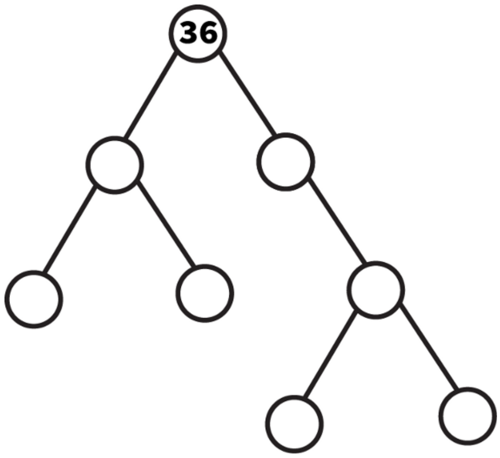
Top Down - DP Step Matrix

Di sini juga kita peroleh sebuah intuisi DP :

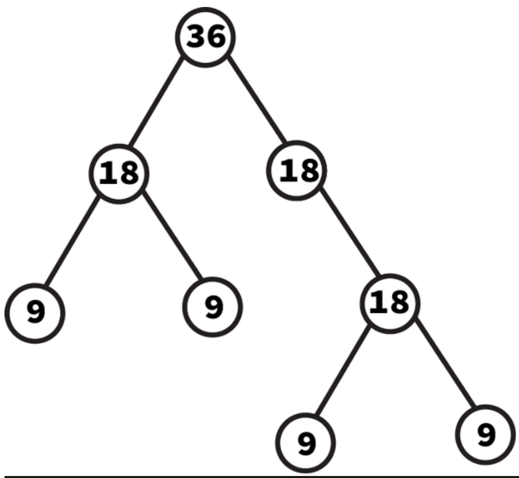
$$kwak[i][j] = \begin{cases} arr[0][0], (i,j) = 0 \\ max(kwak[i-1][j], kwak[i][j-1]) + arr[i][j], (i,j) > 0 \\ kwak[i-1][j] + arr[i][j], i > 0\ j = 0 \\ kwak[i][j-1] + arr[i][j], i = 0\ j > 0 \end{cases}$$

Diperoleh $kwak[4][4] = 3+8+9+5+9+12+7+2+3 = 58$

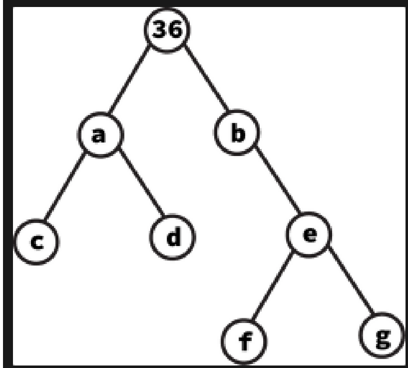
9. Perhatikan gambar di bawah ini!



Pada masing - masing lingkaran akan diisi sebuah angka [0,1,2,3,4,..] (mulai dari susunan terbawah hingga ke atas) sehingga lingkaran yang terhubung langsung oleh sebuah garis di atasnya bernilai sama dengan jumlah angka yang ada pada satu atau dua lingkaran di bawahnya. Tentukan berapa banyak cara mengisi lingkaran - lingkaran di atas dengan sebuah angka positif. Di bawah ini adalah salah satu konfigurasi yang memenuhi



Misalkan representasi pohon dapat dirubah sebagai berikut



Maka akan diperoleh fakta bahwa :

$a + b = 36$
$c + d = a$
$b = e$
$e = f + g$

$c + d + f + g = 36$

Terapkan teorema ***Stars and Bars*** diperoleh banyaknya solusi adalah $\binom{36+4-1}{36} = 9139$

10. $1^1 \times 2^2 \times 3^3 \times 4^4 \times 5^5 \times \ldots \times 30^{30}$ dapat habis dibagi oleh 10^n. Berapakah bilangan n terbesar yang mungkin? **{Jawaban berupa angka bulat}**
JAWABAN : 130

Perhatikan bahwa faktorisasi prima dari bilangan $10 = 2^1 \times 5^1$, yang menyatakan bahwa angka puluhan/banyaknya angka nol di depan suatu bilangan dipengaruhi oleh angka 5 dan suatu angka genap. Perhatikan deret $1^2 \times 2^2 \times 3^3 \times 4^4 \times 5^5 \times \ldots \times 30^{30}$, karena kita tahu bahwa angka genap lebih banyak daripada angka 5, maka hitung hanya angka yang merupakan kelipatan 5.

Didapat 5, 10, 15, 20, 25 dan 30 adalah angka yang merupakan kelipatan dari 5 dari deret tersebut. Perhatikan:

5^5 memiliki lima angka 5, $10^{10} = 2^{10} \times 5^{10}$ memiliki sepuluh angka 5, 15, $15^{15} = 3^{15} \times 5^{15}$ memiliki lima belas angka 5, $20^{20} = 4^{20} \times 5^{20} = 2^{40} \times 5^{20}$ memiliki 20 angka

5, $25^{25} = (5^2)^{25} = 5^{50}$ memiliki lima puluh angka 5,
dan $30^{30} = (2 \times 5 \times 3)^{30} = 2^{30} \times 5^{30} \times 3^{30}$ terdapat tiga puluh angka 5.

Jumlahkan seluruh populasi angka 5, maka diperoleh $5 + 10 + 15 + 20 + 50 + 30 = 130$. **Dari sini didapat bahwa bilangan terbesar n untuk $1^2 \times 2^2 \times 3^3 \times 4^4 \times 5^5 \times \ldots \times 30^{30}$ dapat dibagi 10^n adalah $n = 130$.**

B. Bagian Problem Solving

Deskripsi Soal

Digit Ajaib

Batas Waktu : 1 detik

Memori : 1MB

Mika mempunyai dua buah bilangan yakni $A1$ dan $A2$ di mana ia menambahkan $N1$ digit 0 ke posisi terakhir pada bilangan $A1$ dan $N2$ digit 0 digit 0 ke posisi terakhir pada bilangan $A2$. Mika penasaran berapa banyak konfigurasi $N1$, $N2$ yang memenuhi sehingga bilangan $A1$ dan $A2$ saling berbesaran pada rentang $N1$, $N2$ tertentu . Bilangan yang saling berbesaran adalah setiap pasangan $A1$ dan $A2$ di mana terpenuhi untuk $A1 > A2$ atau $A1 < A2$.

1. Jika Mika mempunyai dua buah bilangan 138 dan 83 lalu ia menambahkan $N1$ digit 0 ke 138 untuk $1 \leq N1 \leq 103$ dan $N2$ digit 0 ke 83 untuk $1 \leq N2 \leq 102$ berapa banyak konfigurasi $N1$ dan $N2$ yang memenuhi sehingga dua buah bilangan tersebut saling berbesaran?
   JAWABAN : 100.000

   $A1$ dan $A2$ akan saling berbesaran selama nilainya berbeda . Banyak kejadian yang memenuhi adalah $1000 * 100$ = 100.000

2. Untuk suatu bilangan A dan B di mana $1 \leq A \leq 23$, $1 \leq B \leq 57$ ia ingin menambahkan N digit 0 ke masing – masing bilangan A dan B untuk $1 \leq N \leq 23$. Berapa banyak kemungkinan A dan B saling berbesaran? **{Jawaban berupa angka bulat}**
   JAWABAN : 29624
   Tidak peduli berapapun nilai N nya selama A = B , maka tidak akan berbesaran. Kondisi tidak berbesaran adalah ketika $1 \leq A = B \leq 23$. Untuk semua N ada $23 * 23 = 529$ Konfigurasi.

   Total semua konfigurasi adalah 23 x 57 x 23 = 30153.
   Banyak konfigurasi memenuhi = 30153 – 529 = 29624.

3. Jika diketahui dua bilangan X dan Y untuk $1 \leq X \leq 10^9$ serta $1 \leq Y \leq 10^7$, Mika ingin menambahkan M digit 0 ke bilangan X dan N digit 0 ke bilangan Y. Tentukan nilai terbesar X − Y yang bisa didapatkan untuk $1 \leq (M + N) \leq 10^3$, karena jawaban terlalu besar tuliskan hasilnya dimodulo dengan 17! **{Jawaban berupa bilangan bulat}**

   Agar X - Y bernilai maksimum maka X harus makimum dan Y minimum. Dari soal kita akan peroleh bahwa agar X maksimum maka haruslah M sebesar mungkin dan agar Y minimum N harus sekecil mungkin.
   $X_{max} = 10^9$, $M_{max} = 999$
   $Y_{min} = 1$, $N_{min} = 1$.

   X – Y = $10^9 * 10^{999} - 1 * 10^1 = 10^{999} - 10 = (10^{999} mod\ 17 - 10\ mod\ 17\ )\ mod\ 17 = 12$

4. **Membuat Program sederhana**
   Buatlah program menggunakan bahasa C/C++ untuk membantu menjawab pertanyaan di atas.

Format Masukan

Baris pertama berisikan T yang menyatakan banyaknya kasus uji T Baris berikutnya berisikan Ti yang merupakan kasus uji ke-i (1 ≤ i ≤ T) . Setiap Ti memuat satu baris $A1i$, $A2i$ lalu berikutnya memuat $N1i$ dan $N2i$

```
T
A11 A21 N11 N21
A12 A22 N12 N22
A13 A23 N13 N23
.
.
.
A1T A2T N1T N2T
```

Format Keluaran

Format Keluaran Hasil jumlah semua jawaban setiap kasus uji Ti

Contoh Masukan 1

```
3
1 2 1 1
3 2 2 2
2 2 1 1
```

Contoh Keluaran 1

```
2
```

Penjelasan Contoh Masukan :
- Pada kasus uji pertama ($i = 1$) angka 1 dan 2 akan berubah menjadi 10 dan 20 di mana 10<20 dan ini adalah satu kemungkinan saling berbesaran
- Pada kasus uji pertama ($i = 2$) angka 3 dan 2 akan berubah menjadi 300 dan 200 di mana 300>200 dan ini adalah satu kemungkinan saling berbesaran
- Pada kasus uji pertama ($i = 3$) angka 2 dan 2 akan berubah menjadi 20 dan 20 di mana 20 = 20 tidak terpenuhi saling berbesaran

Subsoal Mudah (Output-Only)

Untuk soal ini anda cukup menentukan sebuah jawaban saja dari salah satu kasus uji yang diberikan.

Hanya berisikan kasus uji sebagai berikut :
$T = 10^3$
$A_{1_i} = i + 2 * 10^7$, $A_{2_i} = 3 * i * 10^5 + 1$
$1 \leq N_{1_i} \leq 10^{i+3}\ mod\ 22$, $1 \leq N_{2_i} \leq 10^{i+12}\ mod\ 35$

A_1 dan A_2 akan saling berbesaran selama nilainya berbeda . Sehingga banyak kejadian saling berbesaran setiap T_i adalah $max(N_{1_i}) * max(N_{2_i})$ hanya berjaga jaga setiap kasus uji T_i yang memuat A_{1_i} dan A_{2_i} bernilai sama maka seluruh jawaban nantinya akan dikurangi dengan $max(N_{1_i}) * max(N_{2_i})$ ketika pada i tertentu $A_{1_i} = A_{2_i}$. Namun pada kasus di atas tidak ada kemungkinan $A_{1_i} = A_{2_i}$. Pembuktian :

$A_{1_i} = 20.000.000 + i$

$A_{2_i} = 300.000i + 1$

$A_{1_i} = A_{2_i}$

$20.000.000 + i = 300.000i + 1$

$299999i = 19999999$

Sudah pasti tidak benar ketika $1 \leq i \leq 10^3$

<u>Menentukan $max(N_{1_i})$</u>

$max(N_{1_i}) = 10^{i+3} \, mod \, 22$

$\varphi(22) = 10$

$max(N_{1_i}) = 10^{(i+3) \, mod \, 10} \, mod \, 22$

Menyebabkan bahwa

$max(N_{1_i}) = 10$ ketika $i + 3$ ganjil

$max(N_{1_i}) = 12$ ketika $i + 3$ genap

$i + 3$ akan bernilai ganjil ketika i genap, dan berlaku sebaliknya bernilai genap ketika i ganjil . Sehingga pada setiap iterasi kita bisa melakukan validasi :

$max(N_{1_i}) = 10 \, , i \, mod \, 2 == 0$

$max(N_{1_i}) = 12\ , i\ mod\ 2\ ! = 0$

<u>Menentukan $max(N_{2_i})$</u>

$max(N_{2_i}) = 10^{i+12}\ mod\ 35$

Observasi bahwa

$10^1\ mod\ 35 = 10$

$10^2\ mod\ 35 = 30$

$10^3\ mod\ 35 = 20$

$10^4\ mod\ 35 = 25$

$10^5\ mod\ 35 = 5$

$10^6\ mod\ 35 = 15$

$10^7\ mod\ 35 = 10$ … dst

Sehingga kita dapati bahwa

$max(N_{2_i}) = 10^{(i+12)\ mod\ 6}\ mod\ 35$

Setelah kita tentukan jawaban setiap T_i jumlahkan dengan metode prefix sum lalu keluarkan hasilnya sebagai jawaban.

Source Code :

```
#include <bits/stdc++.h>

using namespace std;
long long A1,A2,N1,N2,res=0,max_n1,max_n2;
long long T;
void solve(){

        if(T%2==0){
            max_n1 = 10;
        }else{
             max_n1 = 12;
        }

        max_n2 = pow(10,(T+12)%6);
        max_n2 = max_n2%35;

        res += max_n1 * max_n2;

}
int main()
{


    cin>>T;

    T++;
    cout<<T<<endl;
    while(T--){
        cin>>A1>>A2>>N1>>N2;
        if(T>0){
        solve();
        cout<<res<<endl;
        }

    }

    cout<<res;
    return 0;
}
```

Kompleksitas : O(T x Log T)

Output

```
163590
```

SET 17

A. Bagian Analitika dan Logika

1. Pada suatu turnamen catur, ada 25 peserta yang mengikuti turnamen. Mereka bertanding sehingga setiap pemain bertanding tepat satu kali melawan pemain lain. Diketahui bahwa setelah turnamen selesai, setiap dipilih kelompok berisi tiga pemain, dua dari tiga pemain tersebut pernah bertanding. Banyaknya pertandingan minimal pada turnamen catur ini adalah…**{Jawaban berupa angka bulat}**

   JAWABAN : 144

   Pembahasan : Misalkan kelompok peserta turnamen tersebut dibagi menjadi dua kelompok beranggotakan 12 dan 13 peserta dengan kondisi, setiap dua peserta bertanding jika dan hanya jika mereka berasal dari kelompok yang sama. Untuk setiap tiga pemain, berdasarkan prinsip sarang burung, ada dua pemain yang berasal dari kelompok yang sama, dan akibatnya dua dari tiga pemain tersebut pernah bertanding. Banyaknya pertandingan berarti adalah $\binom{12}{2}+\binom{13}{2}$.

   Pembuktian :

   Misalkan banyak pertandingan adalah $n \leq 144$. Misalkan pula setiap kelompok berisi tiga pemain, pasti ada dua yang pernah bertanding. Ada pemain, sebut saja A, yang bermain tidak lebih dari 11 permainan. Misalkan $S1$ adalah himpunan pemain yang pernah bertanding melawan A, dan $S2$ adalah himpunan pemain yang tidak pernah melawan A . Didapat, $|S1| = k \leq 11$, $|S2| = 24-k$. Semua pemain di $S2$ memainkan melawan satu sama lain. Diperhatikan bahwa $\binom{23}{2} > 144$, maka akibatnya, $k > 1$. Misalkan m pasangan dari $S1$ tidak bertanding satu sama lain, maka $0 \leq m \leq \binom{k}{2}$. Diambil satu pemain B dari $S2$. Satu dari dua orang pada setiap m pasangan di atas pasti pernah melawan B. Jika pasangan pasangan dari m pasangan tersebut berbentuk (X, Y), maka banyaknya pasangan (X, Y) tersebut tidak kurang dari $\frac{m(24-k)}{k-1}$ karena setiap pemain dari $S1$ bisa menjadi anggota dari maksimal sebanyak $(k-1)$ pasangan. Didapat

   $$n \geq \binom{24-k}{2} + k + \binom{k}{2} + \frac{m(24-k)}{k-1} \geq \binom{24-k}{2} + k + \binom{k}{2} = (k-11)(k-12) + 144 \geq 144.$$

2. Rei ingin memilih satu bilangan secara acak, sebut saja bilangan ini adalah n . Bilangan yang ingin dipilih Rei ini merupakan pembagi dari 20! . Peluang Rei memilih bilangan n ini sehingga n dapat dinyatakan sebagai jumlahan $n = a^2 + b^2$ dengan a,b bulat adalah… **{Jawaban berformatkan a/b dengan gcd(a,b) = 1}**

   JAWABAN : 5/54

   Jika ditulis bentuk faktorisasi prima dari $20!$,didapat

   $$20! = 2^{18}.3^8.5^4.7^2.11.13.17.19$$

   Hal ini berarti banyaknya faktor adalah

   $$(18+1)(8+1)(4+1)(2+1).16 = 41040.$$

   Diingat fakta bahwa jika d_1, d_2 masing-masing bisa dituliskan sebagai $d_i = a_i^2 + b_i^2, i = 1, 2, a_i, b_i$ bulat positif, maka hasilkali $d_1 d_2$ juga bisa.

   Berdasarkan hal ini, cukup dihilangkan bilangan bilangan dengan faktor $3, 7, 9, 11$ berpangkat ganjil, dan yang tersisa banyaknya adalah

   $$(18+1)(4+1)(4+1)(1+1)(1+1)(1+1) = 3800,$$

   sehingga peluang yang dicari adalah

   Peluangnya adalah $\frac{38000}{41040} = \frac{5}{54}$

3. Tentukan banyaknya cara membentuk barisan angka dengan panjang 10 menggunakan angka 1,2,3,4 sehingga banyaknya angka 1 yang muncul adalah ganjil! **{Jawaban berupa angka bulat}**

JAWABAN : 32736

- Misalkan $A(n)$ menyatakan banyaknya cara membentuk barisan dengan panjang n menggunakan angka $1, 2, 3, 4$ sehingga banyaknya angka 1 yang muncul adalah ganjil
- Misalkan $B(n)$ menyatakan banyaknya cara membentuk barisan yang diinginkan, tetapi banyak angka 1 yang muncul adalah genap.

Dalam hal ini diasumsikan $B(0) = 1$. Diperhatikan terlebih dahulu bahwa $A(n) + B(n) = 4n$, karena secara keseluruhan ada $4n$ barisan dengan panjang n yang dapat dibentuk.

Misalkan

$$f(x) = \sum_n A(n)x^n, g(x) = \sum_n B(n)x^n$$

$$f(x) + g(x) = \sum_n 4^n x^n = \sum_n (4x)^n = \frac{1}{1-4x}$$

Diperhatikan juga bahwa

$$A(n+1) = 3A(n) + B(n)$$

karena setiap barisan dengan panjang n + 1 dan sejumlah ganjil angka 1 bisa memiliki digit terakhir 1 dan barisan dengan panjang n sebelumnya memiliki sejumlah genap angka 1, atau digit terakhir adalah 2,3,4 dan barisan dengan panjang n sebelumnya memiliki sejumlah ganjil angka 1.

Didapat

$$f(x) = x(3f(x) + g(x)).$$

Dari persamaan

$$f(x) + g(x) = \frac{1}{1-4x}$$

Didapat

$$f(x) = \frac{x}{(1-2x)(1-4x)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-4x}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-2x}\right) = \frac{1}{2}\sum_n (4^n - 2^n))x^n$$

Secara khusus diperoleh

$$A(n) = \frac{4^n - 2^n}{2}$$

Sehingga $A(10) = \frac{4^{10} - 2^{10}}{2} = 523776$

4. Diberikan himpunan

A = { 1,4,7, 10, ...,100 }.

Bilangan asli N adalah bilangan yang memenuhi sifat, setiap himpunan bagian dari A dengan N anggota memuat dua bilangan yang jumlahnya adalah 104. Nilai terkecil bagi N adalah... **{Jawaban berupa angka bulat}**

JAWABAN : 36

Ada 33 pasang bilangan dari himpunan tersebut yang jika dijumlah hasilnya sama dengan Jika 1 dan 52 diabaikan, maka berdasarkan prinsip sarang burung merpati, minimal harus diambil 34 bilangan agar memenuhi syarat. Jika 1 dan 52 dimasukkan ke himpunan ini, didapat 36 anggota yang minimal harus diambil agar memenuhi syarat.

5. Tentukan tiga digit terakhir dari 1 x 3 x … x 2019! **{Jawaban berupa angka bulat}**

   JAWABAN : 875

   - Menggunakan Chinese Remainder Theorem, jika

   $A = 1 \times 3 \times \ldots \times 2019$

   Cukup dicari sisa pembagian 8 dan 125

   $GCD(8, 125) = 1.$

   $8 * 125 = 1000$

   Mengingat $1 < 125 < 2019$ dan juga merupakan bilangan ganjil, maka jelas bahwa

   $A \equiv 0\ (mod\ 125).$

   Diperhatikan bahwa *A* dapat ditulis sebagai

   $$A = 2019 \times 2017 \times \prod_{k=0}^{251}(8k+1)(8k+3)(8k+5)(8k+7) \equiv 1.3.\prod 1.3.(-3).(-1) \equiv 3mod8.$$

   Didapat persamaan modulo

   $A \equiv 0\ (mod\ 125)$, $A \equiv 3\ (mod\ 8)$, dengan penyelesaian terkecil 875.

6. DeltaK membeli permen di supermarket. Permen di supermarket ini terdiri dari tiga kategori, yaitu bungkus kecil berisi 6 permen, bungkus sedang berisi 9 permen dan bungkus besar berisi 20 permen. Banyak permen maksimum yang tidak bisa diperoleh DeltaK adalah … **{Jawaban berupa angka bulat}**

   Jawaban : 43

   Pembahasan :

   Gunakan teorema McChicken Nugget Theorm

   Misalkan N adalah banyak permen terbanyak yang tidak bisa diperoleh Maul.

   N adalah bilangan bulat positif terbesar yang tidak dapat ditulis sebagai

   $6x + 9z + 20z, x, y, z$ bulat nonnegatif.

   Substitusi $z = 0$, sebarang bilangan bulat positif kelipatan 3, selain 3 itu sendiri dapat dinyatakan sebagai bentuk di atas.

   Untuk $z = 1$, sebarang bilangan bulat positif berbentuk $3k + 2$ lebih besar dari 23 dapat disajikan dalam bentuk di atas, dan untuk $z = 2$, sebarang bilangan bulat positif berbentuk $3k + 1$ lebih besar dari 43

7. Bilangan-bilangan 1,2,3,4 disusun pada lingkaran sesuai urutan tersebut. Dimulai dari angka 1, Roni bergerak menuju angka di sebelahnya, boleh di sebelah kanan maupun sebelah kiri. Banyak kemungkinan langkah sehingga angka-angka yang pernah dikunjungi Roni jumlahnya seluruhnya bernilai 21 adalah. .. [Misalkan Roni mengunjungi angka - angka 1,4,3,4,1,2 maka jumlahnya adalah 1 + 4 + 3 + 4 + 1 + 2 = 15] **{Jawaban berupa angka bulat}**

   JAWABAN : 167

Namakan a_i, b_i, c_i, d_i masing-masing adalah banyaknya langkah yang berakhir pada $1, 2, 3, 4$ dan jumlahnya sama dengan i . Beberapa kondisi awal yang mudah diperiksa antara lain adalah

$a_1 = 1, b_1 = c_1 = d_1 = 0,$

$a_2 = b_2 = c_2 = d_2 = 0,$

$a_3 = c_3 = d_3 = 0, b_3 = 1,$

$a_4 = 1, b_4 = c_4 = d_4 = 0.$

Bilangan 1 dapat dikunjungi dari 2 atau 4. Dengan argumen yang sama, 2 dari 1 atau 3,3 dari 2 atau 4,4 dari 3 atau 1. Dapat disimpulkan relasi

$a_n = b_{n-1} + d_{n-1}$

$b_n = a_{n-2} + c_{n-2}$

$c_n = b_{n-3} + d_{n-3}$

$d_n = c_{n-4} + a_{n-4}$.

Akan dihitung nilai dari

$a_{21} + b_{21} + c_{21} + d_{21}$.

Jika ditulis

$u_n = a_n + c_n, v_n = b_n + d_n, n \geq 1$ maka

$u_n = v_n{-}1 + v_n{-}3, v_n = u_{n-2} + u_{n-4}.$

Dalam hal ini, syarat awalnya adalah

$u_1 = u_4 = v_3 = 1$

$u_2 = u_3 = v_1 = v_2 = v_4 = 0.$

Diperoleh pula bahwa

$v_n = v_{n-3} + 2v_{n-5} + v_{n-7}$

$u_n = u_{n-3} + 2u_{n-5} + u_{n-7}.$

Jika ditulis *sn* = *un* + *vn*, didapat

$s_n = s_{n-3} + 2s_{n-5} + s_{n-7},$

dengan syarat awal $s_1 = 1, s_2 = 0, s_3 = s_4 = s_5 = s_7 = 1, s_6 = 3.$

Dengan penghitungan manual, didapat

$s_8 = 4, s_9 = 5, s_{10} = 4, s_{11} = 11, s_{12} = 8$ dan seterusnya hingga diperoleh $s_{21} = 167.$

8. Di dalam kasus pembunuhan virus baik (seharusnya tidak dibunuh) ada lima orang tersangka pembunuhan, sebut saja A, B,C, D, E diinterogasi oleh polisi. Diketahui bahwa dari lima orang ini, tepat satu orang adalah orang yang pernyataannya selalu benar, dan empat lainnya adalah orang yang pernyataannya selalu salah. Berikut adalah tiga fakta yang perlu diketahui.
   i.) A berkata D adalah pelakunya, D berkata bahwa B pelakunya, dan B berkata C pelakunya.
   ii.) C berkata bahwa bukan dia pelakunya, dan E mengaku bahwa dia pelakunya.
   iii.) Diketahui bahwa A bukan pelaku pembunuhan.
   Pelaku pembunuhan ini adalah… **{Jawaban dalam Huruf Kapital}**
   JAWABAN : C

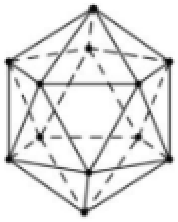
Misalkan orang dikatakan jujur jika pernyataannya selalu benar dan pembohong jika selalu salah. Pernyataan B dan C berlawanan, sehingga salah satunya adalah pembohong. Hal ini berarti tiga orang lainnya adalah pembohong. A pembohong, sehingga D bukanlah pelakunya, D pembohong sehingga B bukanlah pelakunya. E juga pembohong, sehingga bukan dia pelakunya. Mengingat diketahui bahwa A bukan pelakunya, maka pelakunya adalah C.

9. Bilangan 1,2,...,2022 ditulis di papan tulis. Setiap hari, Herman memilih dua bilangan *a,b* dan menggantinya dengan *ab + a + b*. Setelah beberapa hari, akan tersisa satu bilangan, sebut saja *N*. Jika *N* diketahui memiliki *k* angka 9 berurutan pada penulisan desimalnya, maka nilai maksimum *k* yang mungkin adalah ... **{Jawaban berupa angka bulat}**

JAWABAN : 503

Pembahasan : Dipandang kejadian semua angka di papan ditambah 1. Jika dua bilangan a, b pada papan awal diganti dengan $ab + a + b$, maka pada papan yang baru, $a + 1$ dan $b + 1$ diganti dengan $ab + a + b + 1 = (a + 1)(b + 1)$. Hal ini berarti, bilangan yang terakhir yang tersisa di papan yang baru adalah $2023.2022...2 = 2023!$ dan bilangan ini memiliki $404 + 80 + 16 + 3 = 503$ angka 0 yang tidak putus di belakang, dan akibatnya $k = 503$ angka 9 yang tidak putus di belakang pada papan yang asli.

10. Perhatikan gambar di bawah.



Terdapat Segi-20 yang terdiri dari 20 segitiga sama sisi. Segi-20 tersebut terdiri dari simpul atas dan simpul bawah yang membentuk segi lima, dan 10 segitiga sama sisi yang mengelilingi satu sama lain dan terletak di antaranya. Seekor semut yang berada di titik paling atas akan kembali ke rumahnya yang berada di titik paling bawah. Tetapi semut tersebut hanya boleh berjalan melalui mendatar atau turun (dengan kata lain tidak boleh ke atas) dan tidak ada titik yang berulang. Banyaknya jalan yang dapat ditempuh oleh semut adalah.......

JAWABAN : 810

Kita akan bagi menjadi 3 bagian yaitu bagian atas (5 segitiga), bagian tengah(10 segitiga), dan bagian bawah (5 segitiga).

● Pada bagian pertama, kita dapat turun ke 5 titik yang berbeda.

● Di antara bagian pertama dan kedua terdapat 9 jalan, yaitu 4 kemungkinan berjalan mendatar searah jarum jam, 4 kemungkinan berjalan mendatar berlawanan arah jarum jam, atau berhenti di tempat.

● Terdapat 2 jalan untuk turun ke bagian ketiga.

● Di antara bagian kedua dan ketiga terdapat 9 kemungkinan, yaitu 4 kemungkinan berjalan mendatar searah jarum jam, 4 kemungkinan berjalan mendatar berlawanan arah jarum jam, atau berhenti di tempat.

● Hanya ada 1 jalan untuk menuruni ke titik terbawah.

Banyak jalan adalah 5 x 9 x 2 x 9 x 1 = 810.

B. **Bagian Problem Solving**

Liburan Bersama

Batas Waktu : 1 detik

Memori : 1 MB

Tiga Sekawan Pak Dengklek,Pak Chanek, dan Pak Ganesh sedang berlibur. Mereka mengisi waktu luang mereka dengan mengecat petak pada grid berukuran R x C. Setiap petak diwarnai menggunakan minimal satu warna dan satu orang hanya boleh mengecat menggunakan satu warna. Seseorang tidak boleh mengecat petak yang bersebelahan langsung dengan petak yang sebelumnya sudah ia Cat. Pak Dengklek dan Pak Chanek penasaran apakah setiap orang mungkin mendapatkan bagian mengecat yang sama.

Pembahasan :
Semua orang bisa mendapat bagian cat yang sama jika R atau C kelipatan 3. Anda tinggal melakukan cek apakah salah satu di antara R atau C kelipatan 3.

1. Untuk $1 \leq R, C \leq 10^5$ Tentukan banyaknya pasangan (R,C) sehingga setiap orang bisa mendapatkan bagian mengecat yang sama! **{Jawaban berupa angka bulat}.**
   JAWABAN : 5555511111
   Banyaknya R habis dibagi 3 = $floor\left(\frac{10^5}{3}\right) = 33333$
   Banyaknya C habis dibagi 3 = $floor\left(\frac{10^5}{3}\right) = 33333$
   - R habis dibagi 3 tapi C tidak habis dibagi 3
     Ada 33333 x (100 000 – 33333) = 2222211111
   - C habis dibagi 3 tapi R tidak habis dibagi 3
     Ada 33333 x (100 000 – 33333) = 2222211111
   - R dan C keduanya habis dibagi 3
     33333 x 33333 = 1111088889
     TOTAL = 2 x 2222211111 + 1111088889 = 5555511111
     Dengan digit yang unik sepertinya bisa membantu anda melakukan perhitungan.

2. Untuk R = 2, C = 3 ada berapa banyak cara mewarnai grid sehingga setiap orang bisa mendapatkan bagian mengecat yang sama? **{Jawaban berupa angka bulat}**
   JAWABAN : 216
   Gunakan *dynamic programming.* Kita akan temukan fungsi rekursif f(n) = 6f(n-1) untuk f(0) = 1 . Kita akan menentukan f(3) = 6 x 6 x 6 = 216.
3. Untuk R = 2, C = 5 ada berapa banyak cara mewarnai grid sehingga ketiganya tidak memiliki banyak bagian mengecat yang sama? **{Jawaban berupa angka bulat}**
   JAWABAN : 51273
   Jika ketiganya memiliki bagian mengecat yang sama (dari fungsi rekursif nomor 2) diperoleh sebanyak 6^5 cara.

   Total cara mengecat grid = 3^{10}.

   banyak cara mewarnai grid sehingga ketiganya tidak memiliki banyak bagian mengecat yang sama =
   $3^{10} – 6^5 = 3^5 3^5 – 2^5 3^5 = (3^5 - 2^5)3^5 = 51273$.

4. **Membuat Program sederhana**

Buatlah program menggunakan bahasa C/C++ untuk membantu menjawab pertanyaan di atas.

Format Masukan

Baris pertama berisikan bilangan bulat T yang menyatakan banyaknya kasus uji.
T baris berikutnya berisikan bilangan bulat R dan C yang menyatakan ukuran grid yang akan dicat.

Format Keluaran

Untuk setiap kasus uji format keluaran berupa bilangan biner 1 atau 0. Dengan ukuran grid R x C yang diberikan, keluarkan 1 jika bisa diwarnai dengan cara yang sesuai pada deskripsi soal atau keluarkan 0 jika tidak bisa.

Contoh Masukan	**Contoh Keluaran**
3 2 4 1 6 9 8	0 1 0

Subsoal Mudah (10% Poin)

Jika anda bisa menyelesaikan kasus uji untuk

Masukan
5 4992 9 283 19 109 3 989 23 298 29

Subsoal Sedang (40% Poin)

Jika anda bisa menyelesaikan kasus uji untuk
$T = 100$, $R_i = (i * 2 + 1)^3$, $C_i = (R + 5)/3$
$1 \le i \le T$
R_i , C_i menyatakan R dan C pada kasus uji ke-i

Subsoal Sulit (50% Poin)

$1 <= T <= 10^{15}$
$1 <= R,C <= 10^{35}$