

# **Teori Graf & Tree**

# Terminologi Graf

- Node / Verteks
- Edge
- Connectivity
- Degree
- Isomorphism

Pak Dengklek ingin membuat sebuah peta rancangan pembangunan dari lima kota di negaranya dengan keterhubungan antar kota oleh sebuah Jalan dengan informasi sebagai berikut :

- Kota A terhubung dengan tiga kota lain
- Kota B terhubung dengan dua kota lain
- Kota C terhubung dengan tiga kota lain
- Kota D terhubung dengan empat kota lain
- Kota E terhubung dengan dua kota lain

Keterhubungan antar kota masing – masing oleh sebuah jalan

1. Apakah peta tersebut mungkin untuk dibuat **{tuliskan jawaban dalam bentuk YA / TIDAK}**
2. Jika biaya Pembangunan sebuah jalan adalah sebesar 1 rupiah, berapa total biaya Pembangunan yang harus dikeluarkan untuk melakukan Pembangunan semua jalan? **{tuliskan jawaban dalam bentuk ANGKA saja}**
3. Berapa banyak model peta yang bisa dibuat oleh Pak Dengklek?

[OSNK 2024]

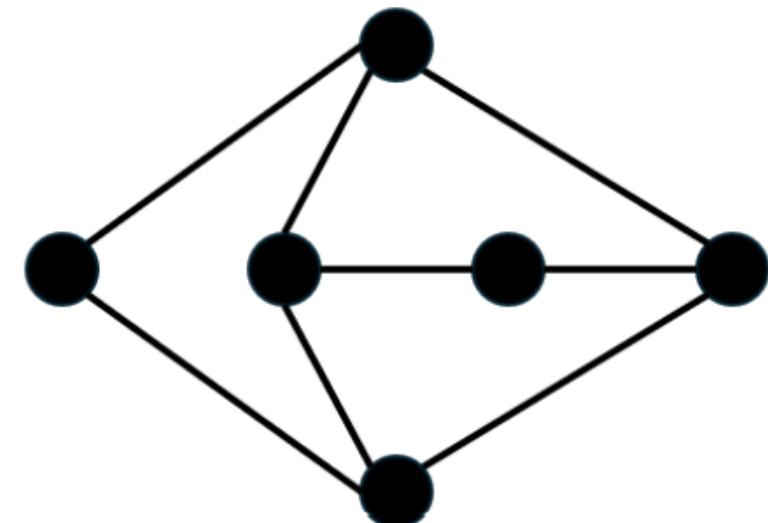
Pak Dengklek mengajari bebek-bebeknya untuk menggambar denah desa masa kecilnya. Pak Dengklek mengatakan bahwa di desa tersebut hanya terdapat 6 buah rumah yang dihubungkan oleh 8 ruas jalan sebagai berikut:

- Rumah 1 terhubung ruas jalan dengan rumah 2, 3, dan 4.
- Rumah 2 terhubung ruas jalan dengan rumah 1, 3, dan 5.
- Rumah 3 terhubung ruas jalan dengan rumah 1, 2, dan 6.
- Rumah 4 terhubung ruas jalan dengan rumah 1 dan 6.
- Rumah 5 terhubung ruas jalan dengan rumah 2 dan 6.
- Rumah 6 terhubung ruas jalan dengan rumah 3, 4, dan 5.

Bebek-bebek Pak Dengklek menggambar denahnya dengan lingkaran yang menunjukkan rumah dan garis yang menunjukkan ruas jalan. Namun karena mereka usil, mereka tidak menuliskan nomor rumah masing-masing.

**BENAR atau SALAH:** Jika nomor-nomor rumahnya dilabeli secara tepat, maka

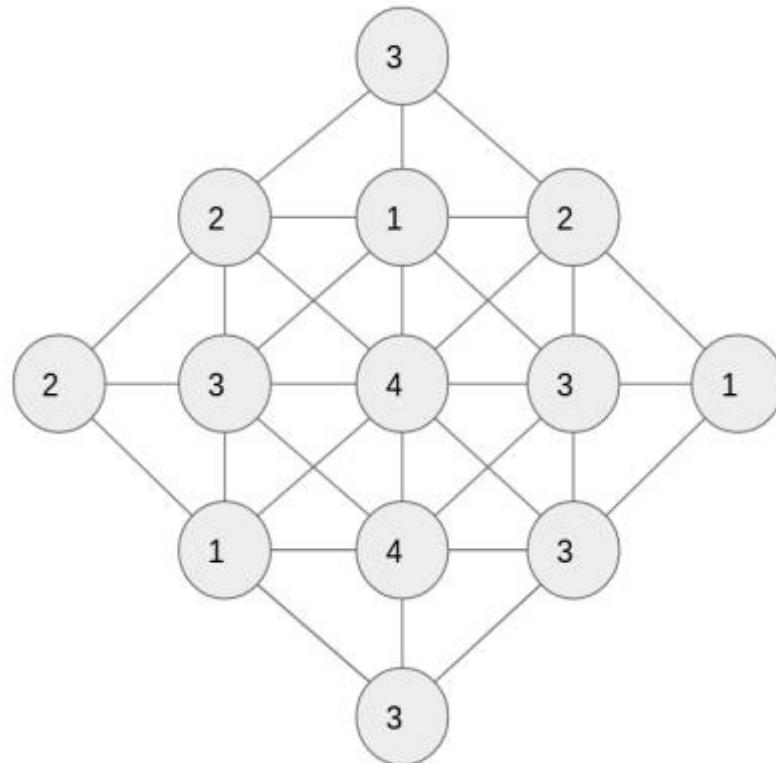
sesuai dengan denah yang diinginkan oleh Pak Dengklek.



[OSNK 2019]

Pak Dengklek sedang memimpin proyek pembangunan jalan di negara A, yang berjumlah 13 kota dengan rencana pembangunan 32 jalan. Suatu hari, Pak Dengklek harus pergi menemui istrinya di Indonesia dan meninggalkan untuk sementara waktu proyeknya. Presiden negara A ingin mengetahui berapa jalan antar kota yang sudah selesai, untuk membayar sementara Pak Dengklek, dengan peta sebagai berikut.

Dengan angka angka di dalam kota melambangkan banyaknya jalan yang menghubungkan kota tersebut



# Representasi Graf

- Directed Graph
- Undirected Graph
- Weighted Graph
- Unweighted Graph

# Representasi Graf

- Adjacency List

# Representasi Graf

- **Adjacency List**

[KSNK 2020]

Bebek-bebek baru Pak Dengklek yang bernama Anto, Budi, Candra, Doni, Eko, Ferdi, Geri, Hendra, Igor, dan Joko belum saling mengenal satu sama lain.

Definisi saling mengenal adalah bebek A mengenal bebek B jika dan hanya jika bebek B mengenal bebek A juga. Berikut adalah daftar bebek-bebek yang telah dikenal oleh masing-masing bebek.

- Anto : Eko, Doni, dan Ferdi
- Budi : Anto, Hendra, Joko, Eko, dan Ferdi
- Candra : Ferdi, Hendra, dan Joko
- Doni : Anto, Candra, dan Budi
- Eko : Joko, Igor, Hendra, Budi, dan Anto
- Ferdi : Hendra, Igor, Geri, Anto, dan Budi
- Geri : Anto, Budi, Ferdi dan Joko
- Hendra : Anto, Eko, Ferdi, Igor, Joko, dan Budi
- Igor : Geri, Hendra, Joko, Eko, dan Ferdi
- Joko : Igor, Hendra, Anto, Geri, Eko, dan Budi

Suatu hari Pak Dengklek ingin bertamasya bersama bebek-bebeknya menggunakan beberapa mobil. Setiap mobil hanya boleh diisi oleh bebek-bebek yang sudah saling mengenal saja. Berapakah mobil minimum yang harus disiapkan Pak Dengklek?

# Representasi Graf

- ## Adjacency List

Ada 12 buah kota, beberapa kota terhubung oleh sebuah jalan dua arah dengan beberapa kota lainnya.

- Kota A terhubung dengan kota B
- Kota B terhubung dengan kota C dan kota D
- Kota E terhubung dengan kota F dan G
- Kota I terhubung dengan kota J
- Kota K terhubung dengan kota L

Suatu saat Pak Dengklek akan bepergian dari suatu kota ke kota lainnya dan diketahui mungkin saja rute perjalananya tidak ada, ada berapa banyak jalan minimum yang harus dibangun sehingga jika Pak Dengklek bepergian dari kota manapun menuju kota manapun selalu ada rute yang tersedia? {**tuliskan jawaban dalam bentuk ANGKA saja**}

# Representasi Graf

- Adjacency Matrix

# Representasi Graf

- Adjacency Matrix

Perhatikan potongan program di bawah ini!

```
int M, N;
cin >> m >> n;
int adj [100] [100];
while(N--) {
    int u, v;
    cin >> u >> v;
    adj [u] [v] = 1;
    if(u + v % 2 == 0) {
        adj [v] [u] = 1;
    }
}
int ret = 0;

for(int i = 1; i<= m; i++) {
    for(int j = i + 1; j<=m; j++) {
        if(adj [u] [v]) ret++;
    }
}

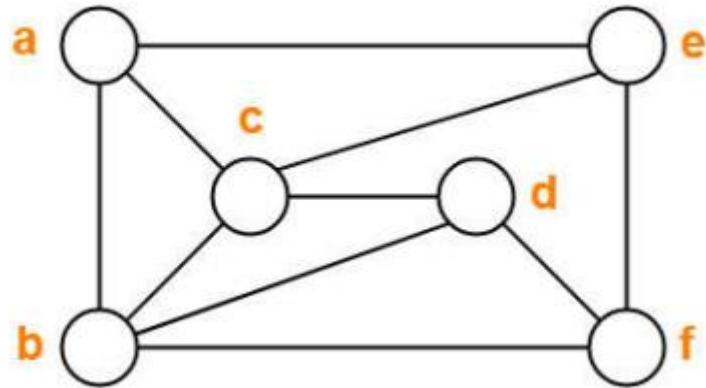
cout<<ret<<endl;
```

# Representasi Graf

- Graph Coloring Problem

[KSNK 2020]

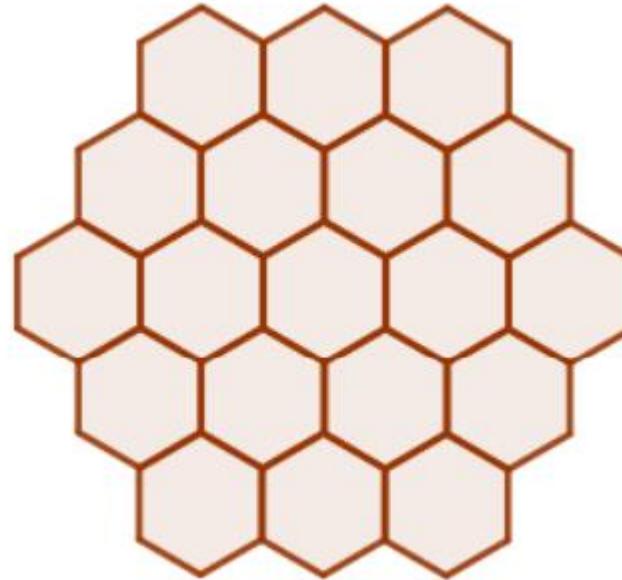
Pak Blangkon berencana mengecat kandang-kandang ayamnya. Konfigurasi lokasi dari kandang yang dimiliki oleh Pak Blangkon adalah sebagai berikut:



Posisi kandang dilambangkan dengan bulatan. Jika dua buah kandang dihubungkan oleh sebuah garis artinya ada jalan setapak yang menghubungkan secara langsung dua buah kandang tersebut. Seekor ayam tidak akan senang jika kandangnya berwarna sama dengan kandang ayam lain yang terhubung langsung dengan jalan setapak. Karena dana yang terbatas, berapa minimal warna cat yang harus dibeli oleh Pak Blangkon sehingga semua ayam senang

# Representasi Graf

- Graph Coloring Problem



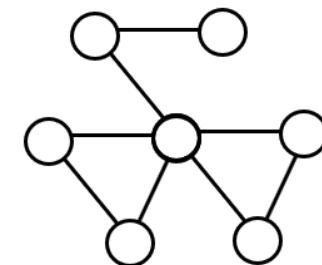
[KSNP 2021]

Berapa banyak warna berbeda minimal yang dibutuhkan untuk mewarnai setiap segienam di atas sehingga tidak ada dua segienam berwarna sama yang memiliki minimal satu sisi yang saling berhimpitan? Jawaban: ..... {tuliskan jawaban dalam bentuk ANGKA saja}

# Representasi Graf

- **Graph Coloring Problem**

Pak Dengklek, Pak Aesh, dan Pak Chanek sedang berlomba dalam mewarnai kandang Bebek. Setiap kandang Bebek yang diilustrasikan sebagai lingkaran akan diwarnai dengan syarat warna tidak boleh sama dengan warna pada lingkaran yang terhubung langsung melalui jalan setapak yang diilustrasikan sebagai garis penghubung antar lingkaran. Pak Dengklek akan mewarnai kandang dengan warna merah, Pak Aesh warna Hijau, dan Pak Chanek warna Biru. Dalam perlombaan ini setiap orang mengecat kandang mana saja secara bergantian. Seseorang yang tidak memiliki kesempatan untuk mengecat karena tidak ada kandang yang bisa dicat dapat dijeda dan pengecatan berlanjut ke giliran orang yang berikutnya. Pemenang ditentukan berdasarkan jumlah kandang yang berhasil dicat dan permainan akan berakhir saat semua orang tidak dapat mengecat kendang manapun



# Penjelajahan Graf

- Depth First Search
- Breadth First Search
- Backtracking

Mark = [A, B, D, C, E, F]

$\text{dfs}(A) \rightarrow \text{visited}[A]$

$\text{dfs}(B) + \text{vis}[B] \rightarrow \text{visited}$

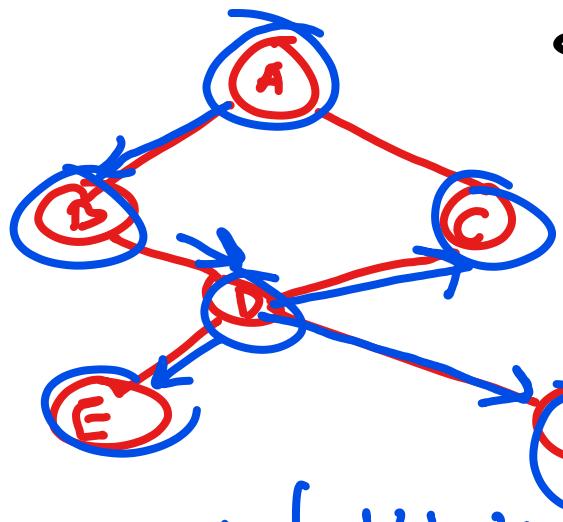
$\text{con} = [A, D]$

$\text{dfs}(D)$

$\text{con} = [B, C, D, E]$

$\text{dfs}(C)$

Traverse



$\text{visited}[A] = 1$

$\text{dfs}(A) = [B, C]$

$\text{dfs}(B) = [C]$

$\text{dfs}(D) = [E]$

$\text{dfs}(E) = [F]$

$\text{dfs}(F) = [C]$

$\text{dfs}(C) = [ ]$

Node | Visited

A	1
B	1
C	1
D	1
E	1

$\text{dfs}(C)$

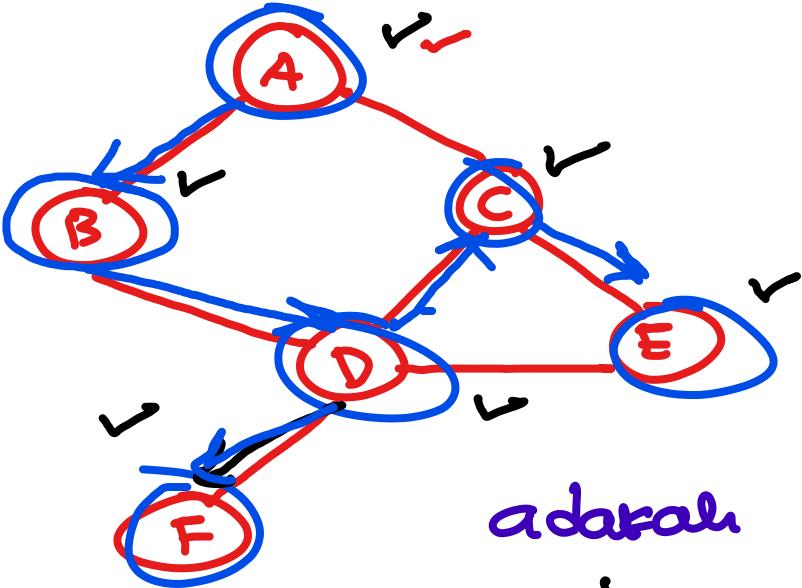
$\text{dfs}(E)$

$\text{con} = [B]$

$\text{dfs}(F)$

# Penjelajahan Graf

- Depth First Search ⇒ Rekursif, Stack



adakah node E termasuk dalam graf ?

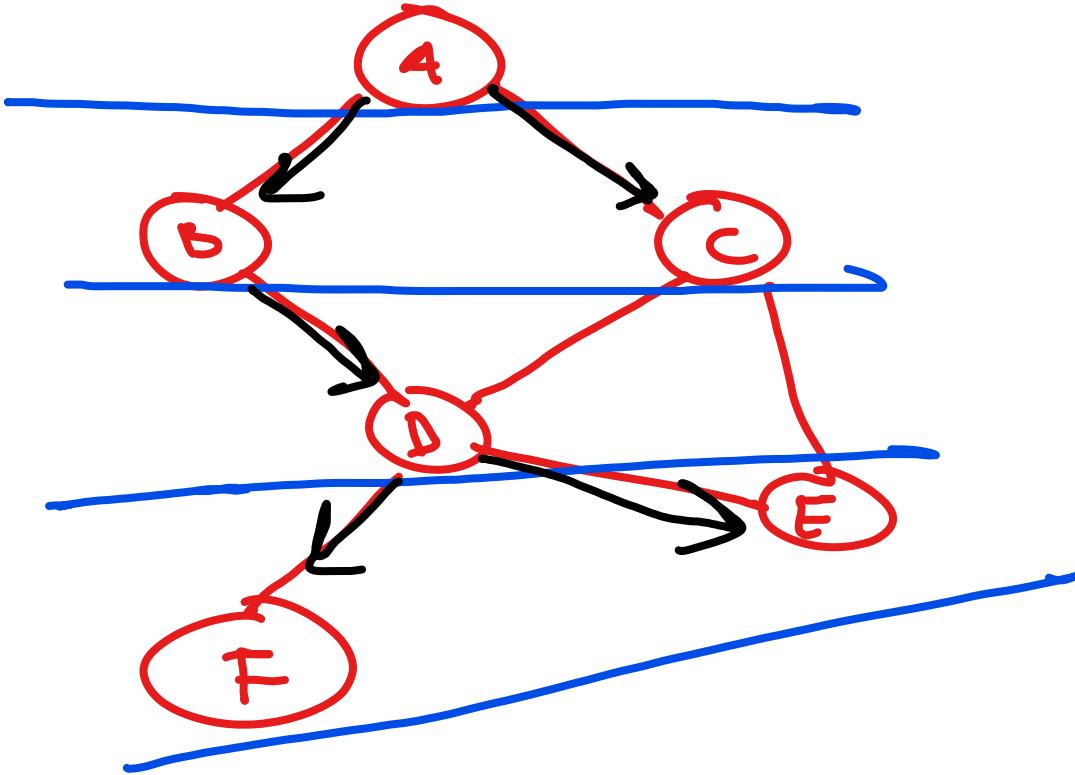
dfs(A)

dengan visiting every connection  
suatu node secara  mendalam  
dfs(A)

dfs(node)  
mark visited [node]  
dfs(connection - node)  
IF connection != visited

# Penjelajahan Graf

- Breadth First Search



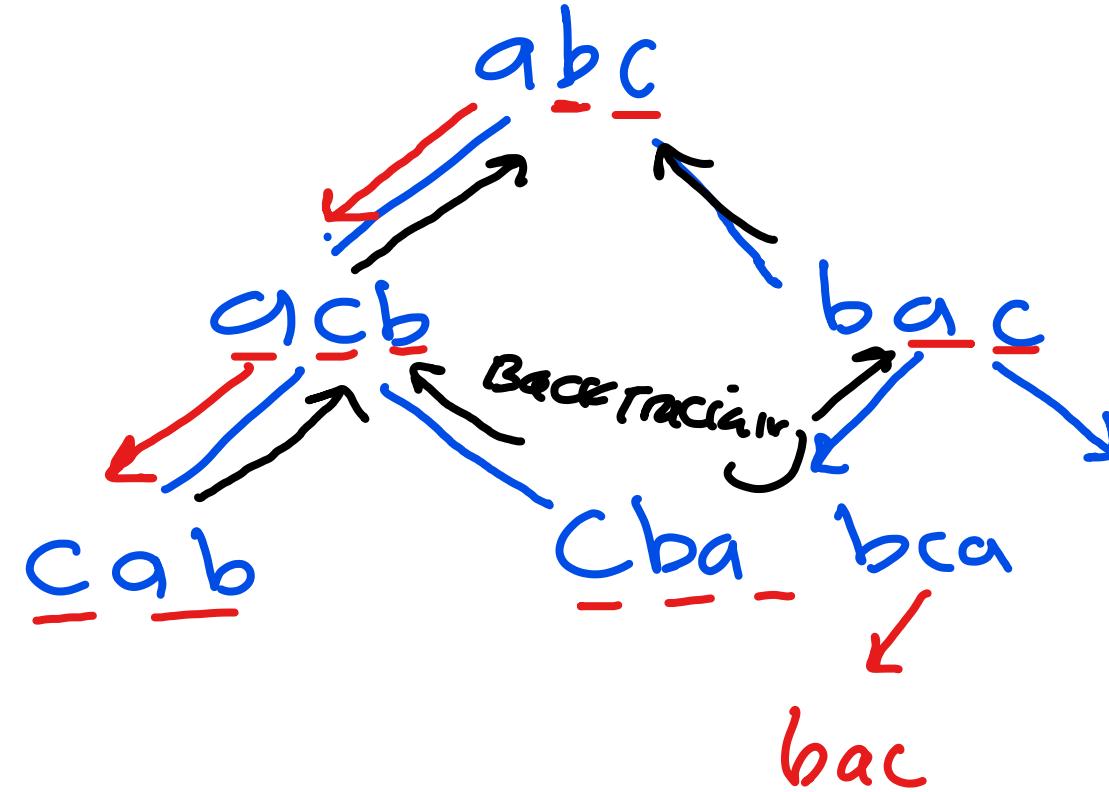
[ A ]  
[ B C ]  
[ D ]  
[ F E ]

A B C D F E

# Penjelajahan Graf

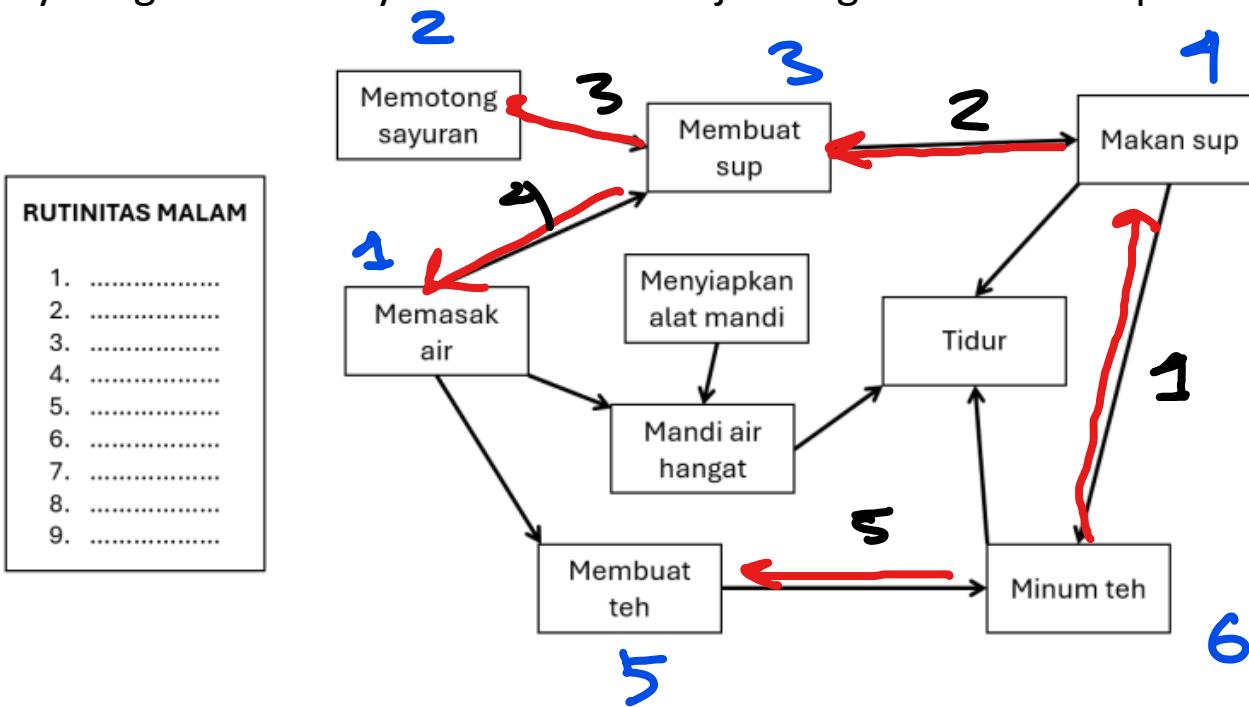
- Backtracking

hasilkan semua permutasi abc



# Penjelajahan Graf

Pak Dengklek ingin membuat sebuah rutinitas malam. Ada 9 kegiatan yang perlu ia rancang, namun ia menemukan bahwa terkadang sebuah kegiatan harus dilakukan sebelum sebuah kegiatan lainnya. Berikut merupakan ilustrasi dari persyaratan 9 kegiatan Pak Dengklek. Jika ada panah dari kegiatan A menuju kegiatan B, artinya kegiatan B hanya bisa dilakukan jika kegiatan A sudah pernah dilakukan sebelumnya.

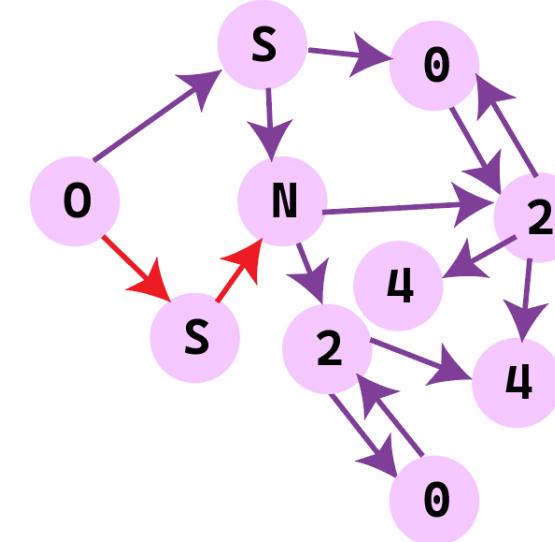
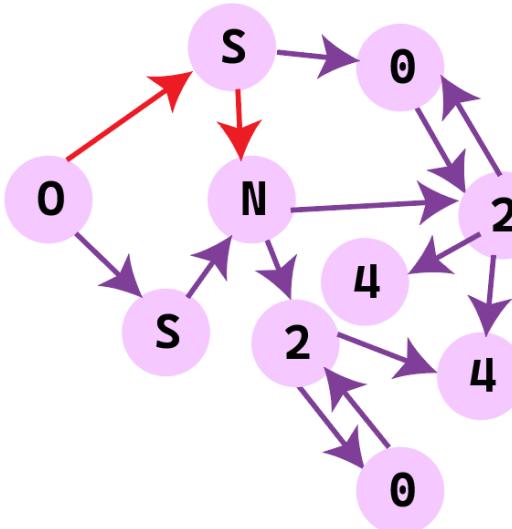
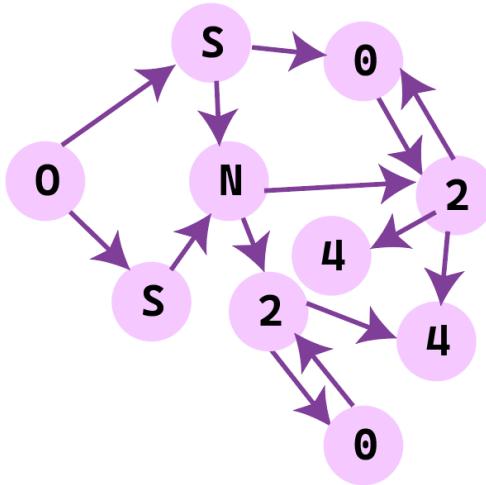


Andaikan Pak Dengklek ingin kegiatan minum teh dilakukan seawal mungkin, maka pada urutan ke berapakah paling awal kegiatan "Minum teh" yang bisa ia rancang?

6

# Penjelajahan Graf

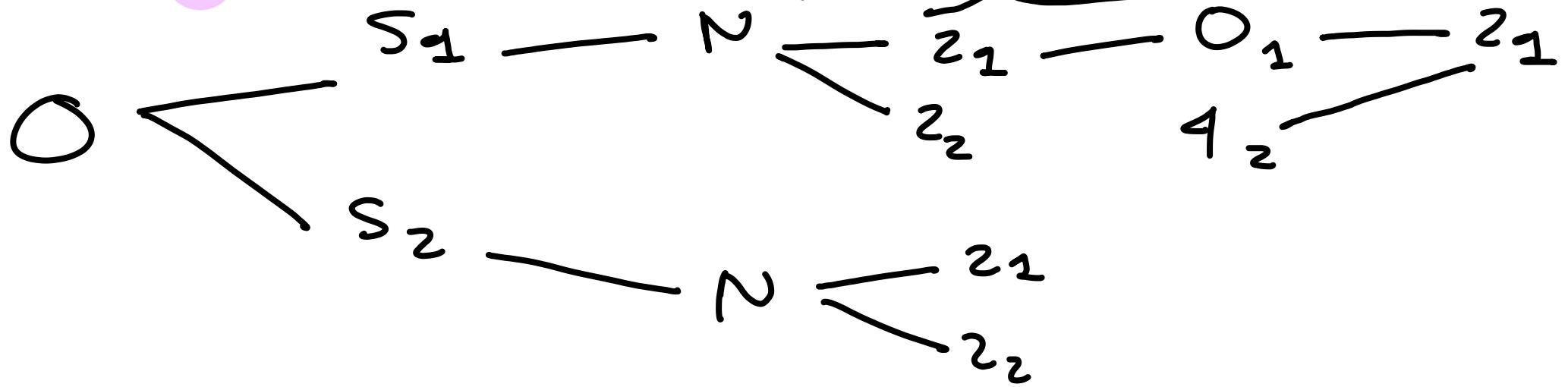
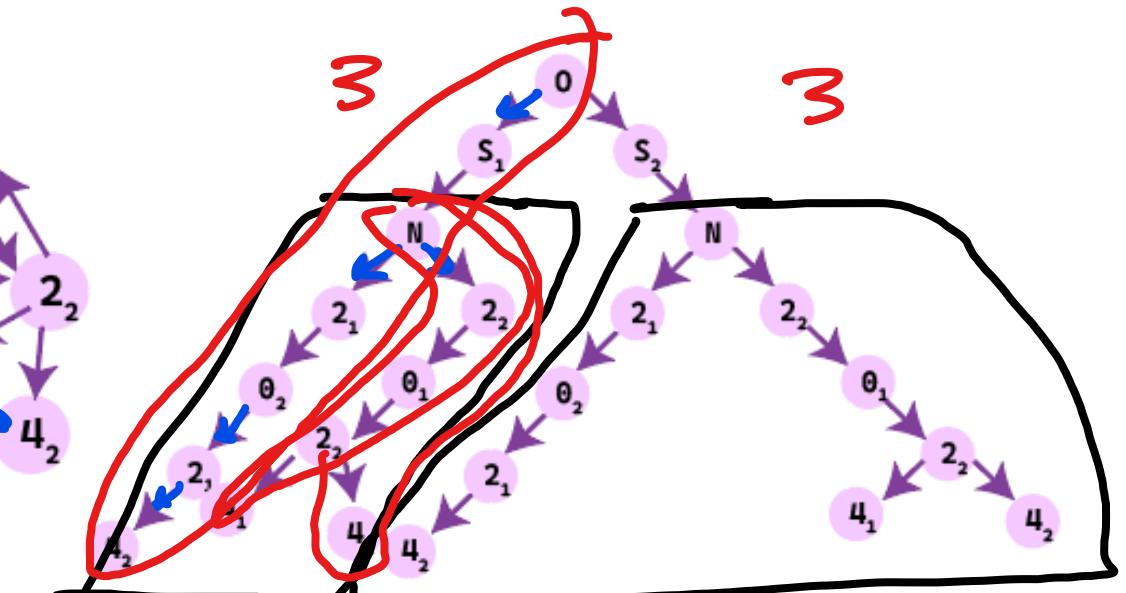
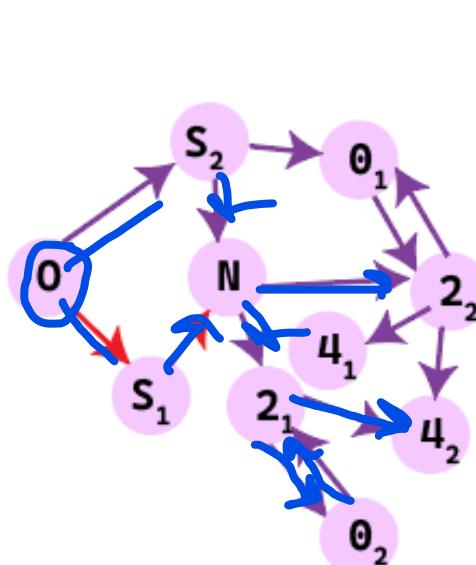
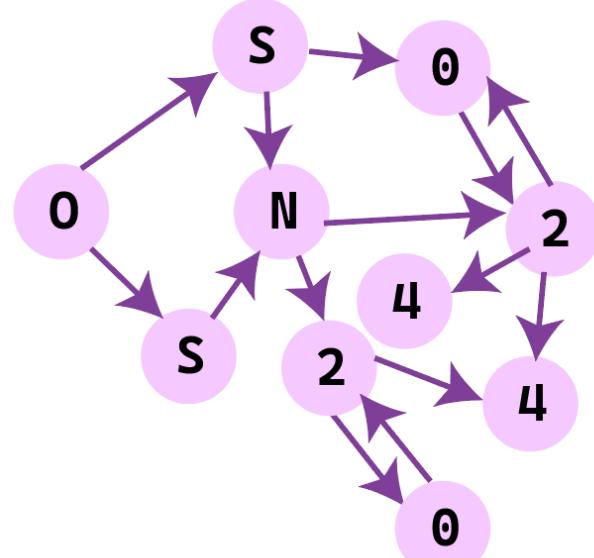
Mesin milik Pak Dengklek dapat membuat sebuah kata dengan mengikuti diagram di atas. Pertama ia memilih sebuah huruf lalu mengikuti tanda panah untuk menentukan huruf berikutnya. Contoh kata yang bisa ia buat adalah OSN dan ada dua cara membentuk kata tersebut :



Jika sekarang Pak Dengklek ingin membuat kata **“OSN2024”** ada berapa banyak cara yang bisa dilakukan? **{jawaban berupa angka bulat}**

# Penjelajahan Graf

$$3+3=6$$



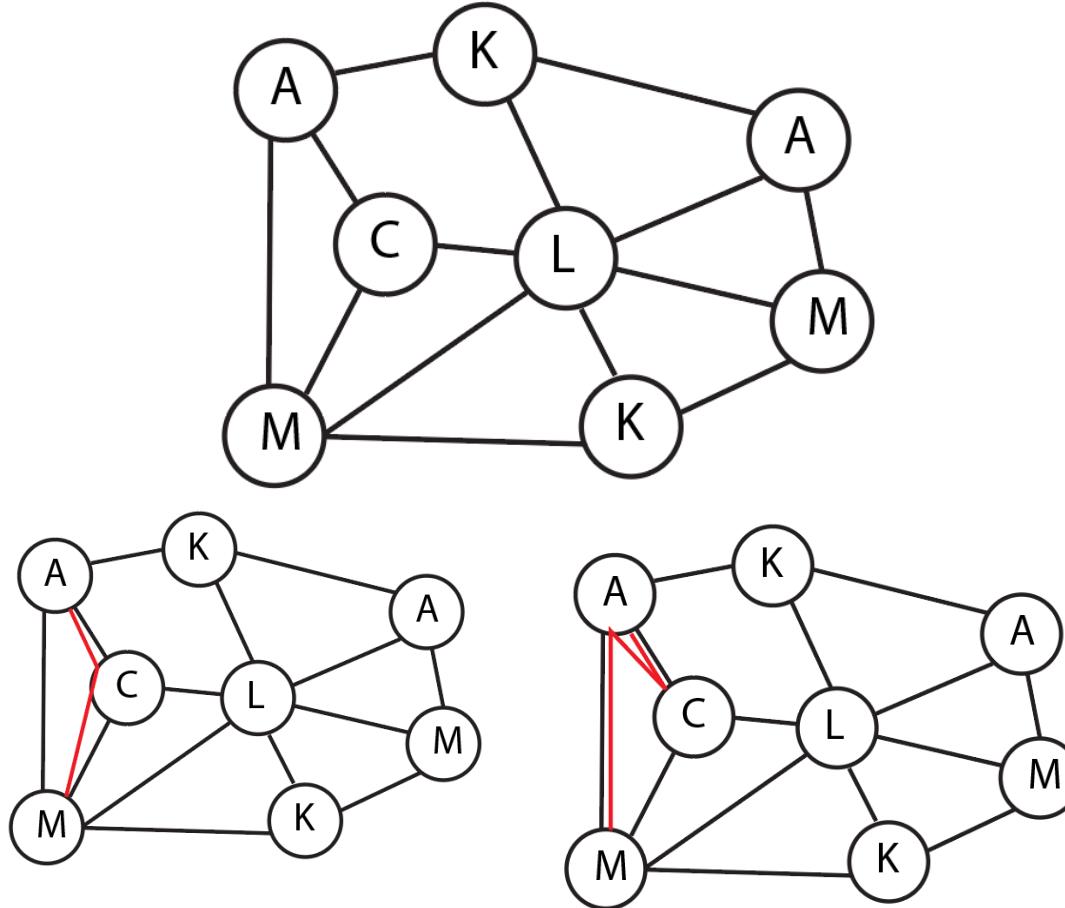
# Penjelajahan Graf

Mesin terbaru milik Pak Dengklek dapat membuat sebuah kata dengan mengikuti diagram di atas. Pertama ia memilih sebuah huruf lalu huruf berikutnya adalah huruf lainnya yang terhubung langsung dengan huruf sebelumnya.

Sebagai contoh Pak Dengklek dapat membuat kata ACM dan ACAM dengan tiga langkah sebagai berikut :

Manakah kata yang tidak mungkin terbentuk di bawah ini?

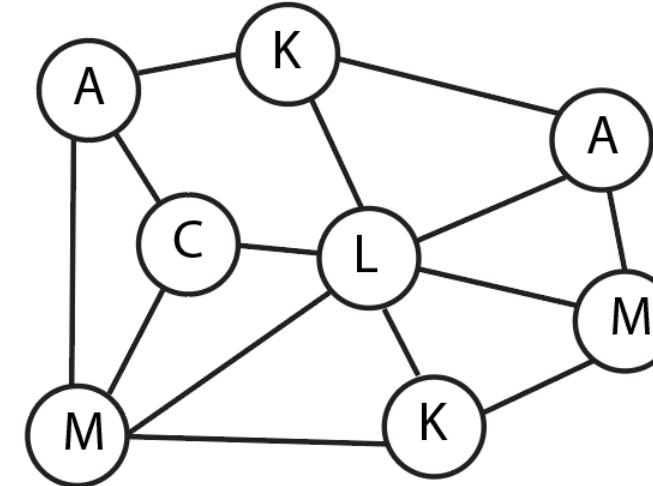
- a. ACLAMALKLMAK
- b. ACLAMKMAKAMLK
- c. CLMKMAKALCMKM
- d. CLMKLMCMLKAM X
- e. MLKMAKACLCAKLA



Senua huruf saling  
terkoneksi san sama lain  
kecuali C -> "CK", "KC"

# Penjelajahan Graf

Ada berapa banyak kata dengan panjang maksimum tidak memuat huruf berulang yang dapat dibentuk? {tuliskan jawaban dalam bentuk ANGKA saja}



Tidak Mungkin "CK", "KC"

Panjang Max = 5 → Pakai semua huruf

Kita bisa buat apapun Selama tidak mengandung

\* Kasus CK, KC

$$\begin{array}{c} \boxed{C \ K} \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad 2 \end{array} = \frac{3!}{2!} = 3! = 6$$

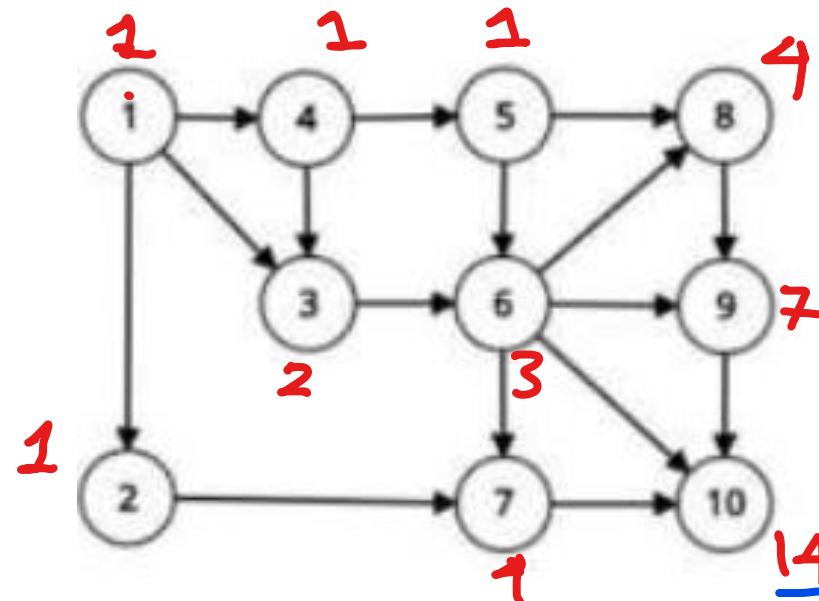
ans =  $5! - 6 = 120 - 6 = 114$

# Penjelajahan Graf

Graph di samping kanan menggambarkan peternakan dimana Pak Dengklek tinggal, yang terdiri dari 10 kandang dan 16 jalan satu arah. Pak Dengklek sedang berada di kandang nomor 1 dan ingin menuju kandang nomor 10. Berapa banyak rute berbeda yang dapat ditempuh Pak Dengklek? Dua arah. Pak Dengklek sedang berada di kandang nomor 1 dan ingin menuju kandang nomor 10. Berapa banyak rute berbeda yang dapat ditempuh Pak Dengklek? Dua rute dikatakan berbeda jika pak Dengklek melalui 2 jalan yang berbeda.

$$ans = \underline{\underline{14}}$$

$$\frac{7 \times 6 \times 5 \times 4!}{5! \quad 4!} = \underline{\underline{35}} = 35$$



Start	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	
1	3	6	10	15	
1	4	10	20	35	
					Finish

ada berapa banyak cara start f

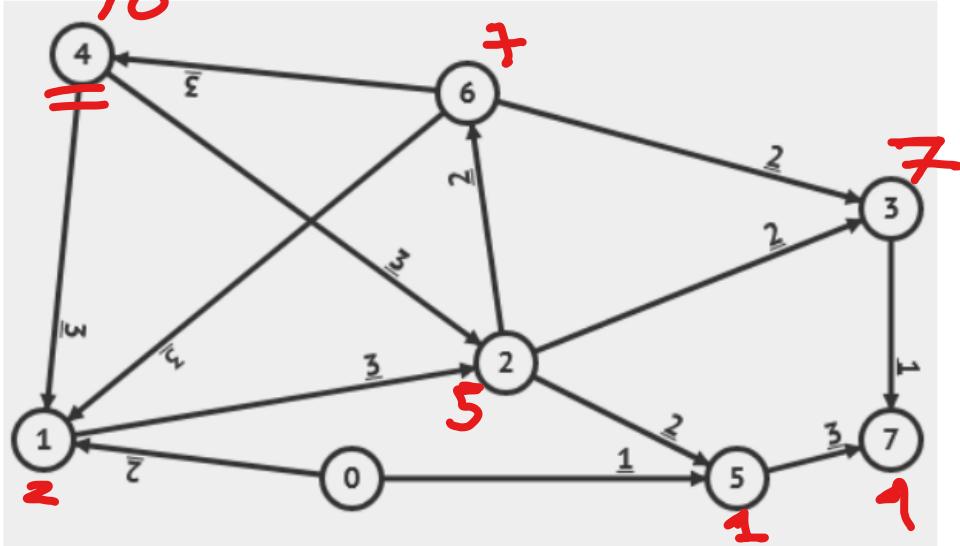
$$f(8) = f(5) + f(6)$$

$$\frac{7!}{3! \cdot 4!} \downarrow \Rightarrow 3x \rightarrow \Rightarrow 1x$$

$$35 \text{ cara} \\ f(4) = \frac{7!}{3! \cdot 4!}$$

# Penjelajahan Graf

Diketahui 8 buah kota dengan label 0, 1, 2, ..., 7 yang masing-masing terhubung dengan sebuah jalan. Setiap jalan bersifat satu arah.



$$2 + 3 + 2 + 3 = \underline{10}$$

$$0 - 1 = 13$$

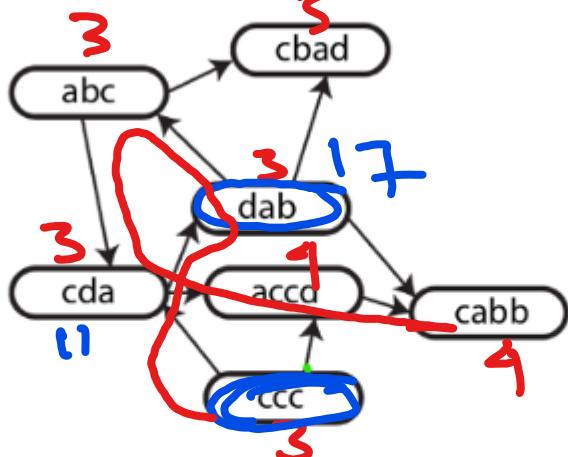
Diketahui pula waktu tempuh dari satu kota ke kota yang lain melalui masing-masing jalan sesuai dengan nilai yang ditunjukkan pada masing-masing jalur penghubung (dalam satuan jam). Waktu tempuh antara dua buah kota didefinisikan sebagai nilai terkecil dari total waktu tempuh jalan-jalan yang harus dilewati untuk berpindah dari satu kota ke kota lainnya. Misalnya, waktu tempuh dari 2 ke 7 adalah 3, karena kita dapat melalui jalur  $2 \rightarrow 3$  (waktu tempuh = 2) dan jalur  $3 \rightarrow 7$  (waktu tempuh = 1), sehingga total =  $2 + 1 = 3$ , dan tidak ada jalur lain dari 2 ke 7 yang memiliki total waktu tempuh  $< 3$ . Kota manakah yang waktu tempuhnya dari 0 paling besar?

- a. 3
- b. 4
- c. 5
- d. 6
- e. 7

# Penjelajahan Graf

Perhatikan deskripsi soal di bawah ini!

KATA – KATANYA DONG KAK DENGKLEK



Pak Dengklek ingin membentuk kalimat dengan penyusunnya adalah berdasarkan diagram di atas. Tanda panah yang menghubungkan kata penyusun berarti kata tersebut mendahului kata berikutnya pada kalimat. Misal kalimat yang bisa dibentuk adalah **abccdaaccdcabb**. Berdasarkan diagram di atas, jika kata yang dimuat dalam kalimat tidak boleh berulang misal **abccda**da**babccda**. Tuliskan satu string terpanjang yang bisa dibentuk! {berbentuk satu string berurutan dan tidak dalam kapital}

ccc dab abc  
c da accd cab b

---

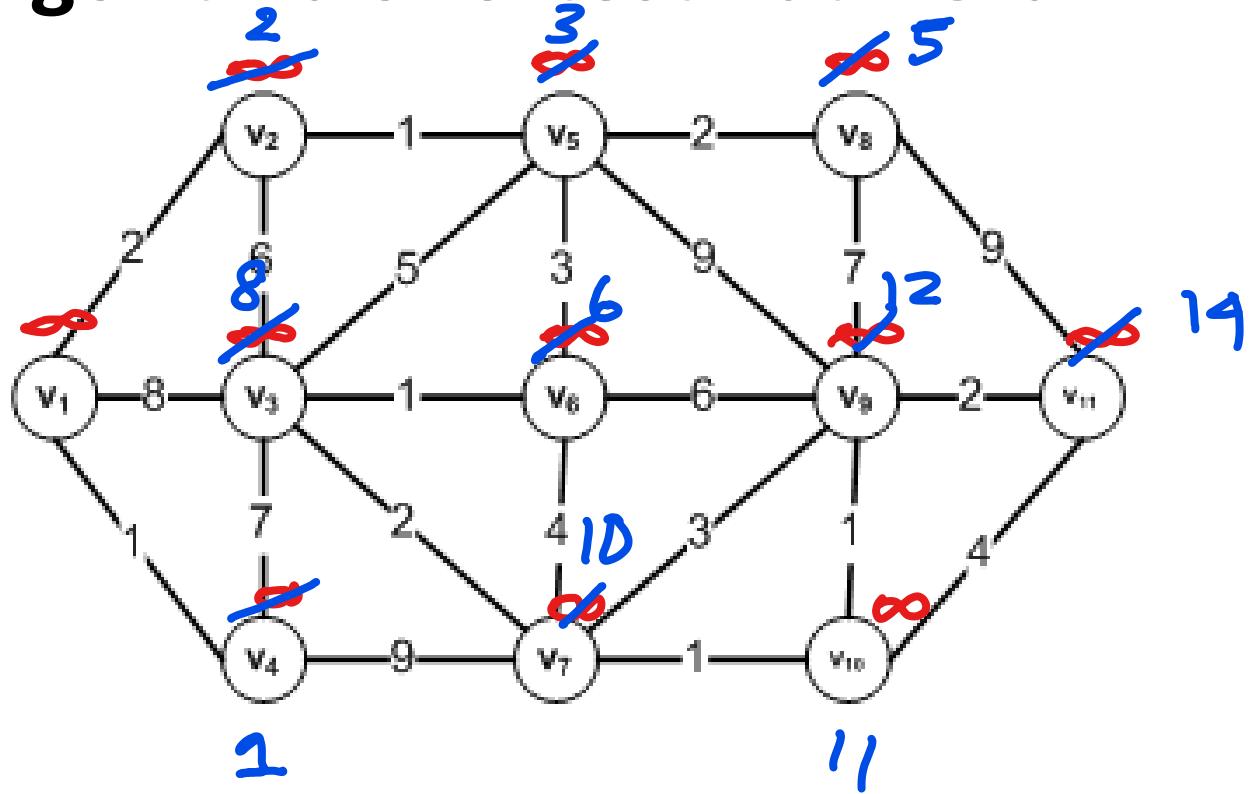
---

# Algoritma Shortest Path Graf

- Djikstra
- A Star
- Bellman Ford
- Floyd Warshall

Silahkan Literasi secara Mandiri, jika ada yang kurang mengerti silahkan tanyakan.

# Algoritma Shortest Path Graf



Tentukan jarak minimum dari V<sub>1</sub> ke V<sub>11</sub>

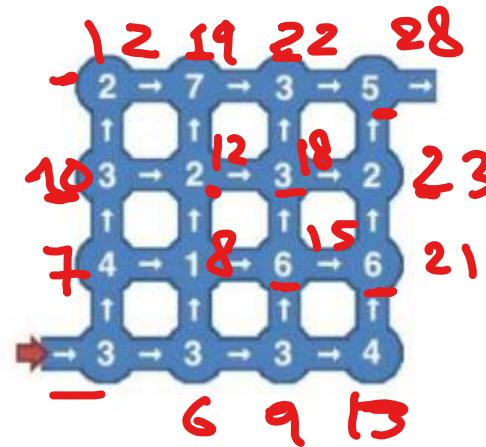
Dijkstra

# Algoritma Shortest Path Graf

Pak Dengklek membuat suatu permainan bagi para bebeknya, membawa mereka ke dalam satu goa yang petanya sebagai berikut. Lingkaran adalah ruangan, dan arah panah menunjukkan lorong untuk mencapai suatu ruangan dari sebuah ruangan. Angka menunjukkan jumlah permata dalam setiap ruangan. Hadiah akan diberikan kepada bebek, yang berhasil mengumpulkan sejumlah permata yang paling banyak,

Berapa maksimum permata yang dapat dikumpulkan mulai dari pintu masuk (kiri bawah) sampai keluar (Kanan atas)?

- a. 26
- b. 27
- c. 28
- d. 29
- e. 30

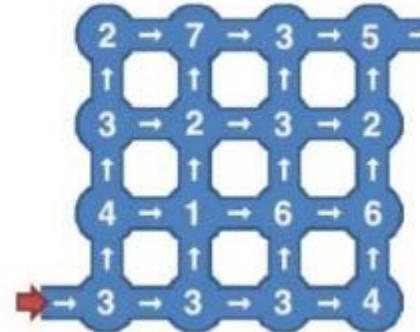


# Algoritma Shortest Path Graf

Pak Dengklek membuat suatu permainan bagi para bebeknya, membawa mereka ke dalam satu goa yang petanya sebagai berikut. Lingkaran adalah ruangan, dan arah panah menunjukkan lorong untuk mencapai suatu ruangan dari sebuah ruangan. Angka menunjukkan jumlah permata dalam setiap ruangan. Hadiah akan diberikan kepada bebek, yang berhasil mengumpulkan sejumlah permata yang paling banyak,

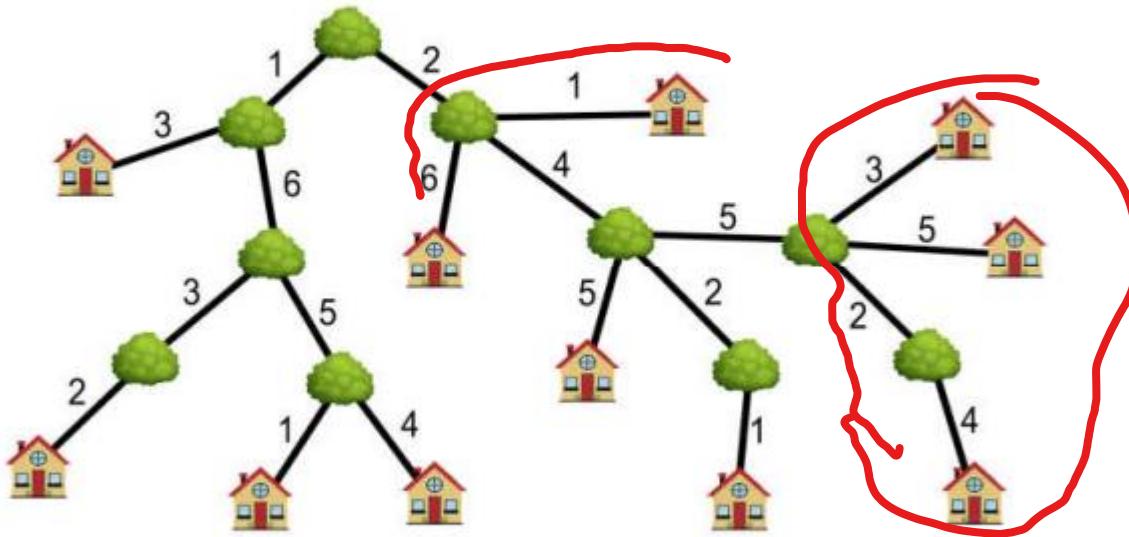
Berapa maksimum permata yang dapat dikumpulkan mulai dari pintu masuk (kiri bawah) sampai keluar (Kanan atas)?

- a. 26
- b. 27
- c. 28
- d. 29
- e. 30



# Algoritma Shortest Path Graf

Kwak, Kwik, dan Kwek merupakan bebek-bebek Pak Dengklek yang sangat beruntung. Mereka baru saja memenangkan undian dan memenangkan tiga unit rumah baru. Karena pihak penyelenggara undian adil, mereka diperbolehkan untuk memilih ketiga rumah mereka sendiri. Kwak, Kwik dan Kwek senang sekali bermain bersama, mereka tidak ingin rumah mereka jauh satu sama lain.



Berapakah jumlah jarak minimum dari ketiga pasang rumah tersebut? (Jumlah jarak didefinisikan sebagai jumlah dari jarak rumah Kwak-rumah Kwik, jarak rumah Kwik-rumah Kwek, jarak rumah Kwek-rumah Kwak)

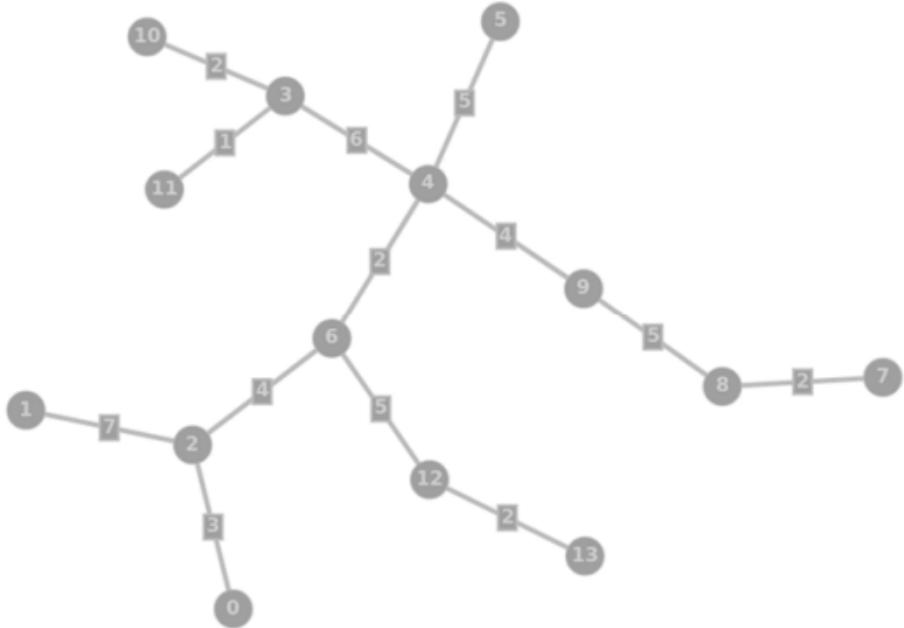
11 Kwak - Kwik  
Kwak - Kwek  
Kwik - Kwek

---

9  
8  
+  
28  
=

# Algoritma Shortest Path Graf

Pak Dengklek merupakan ilmuwan terbaik di Singanesia. Saat ini ia hendak mencoba penemuan terbarunya, mesin teleportasi! Ia ingin mencoba mesinnya tersebut untuk memindahkan barang sejauh mungkin. Untungnya, Singanesia merupakan negara yang cukup besar.

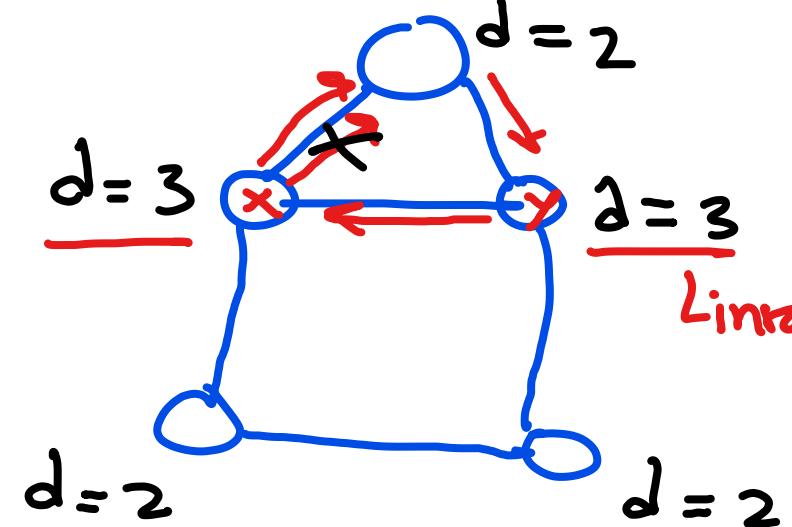


Bantulah Pak Dengklek mencari pasangan kota terjauh yang mungkin! Perhatikan bahwa pasangan kota terjauh yang dimaksud adalah 2 buah kota A dan B sehingga untuk setiap pasangan kota C dan D,  $C \neq A$  atau  $D \neq B$ , sehingga jarak dari kota A dan B di graf di bawah lebih besar dari pada jarak C dan D.

- a. 22
- b. 23
- c. 24
- d. 25
- e. 26

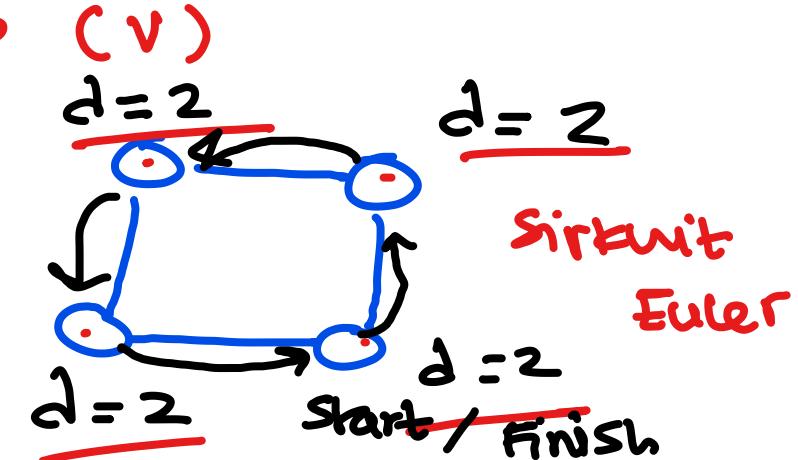
# Lintasan dan Sirkuit Euler

- **Lintasan Euler** : ada rute dari suatu node ke node lainnya sehingga melewati semua edge yang ada sekali (tanpa putar balik)
- **Sirkuit Euler** : ada rute dari suatu node sehingga melewati semua edge yang ada sekali (tanpa putar balik) dan kembali lagi ke node awal
- Sebuah graf **mempunyai Lintasan Euler** jika dan hanya jika graf tersebut memiliki tepat dua node berderajat ganjil sedangkan node lainnya berderajat genap.
- Sebuah graf **mempunyai Sirkuit Euler** jika dan hanya jika pada graf tersebut semua nodenya berderajat genap



Lintasan Euler ... ?

Start =  $x$ , Finish =  $y$   
Start =  $y$ , Finish =  $x$

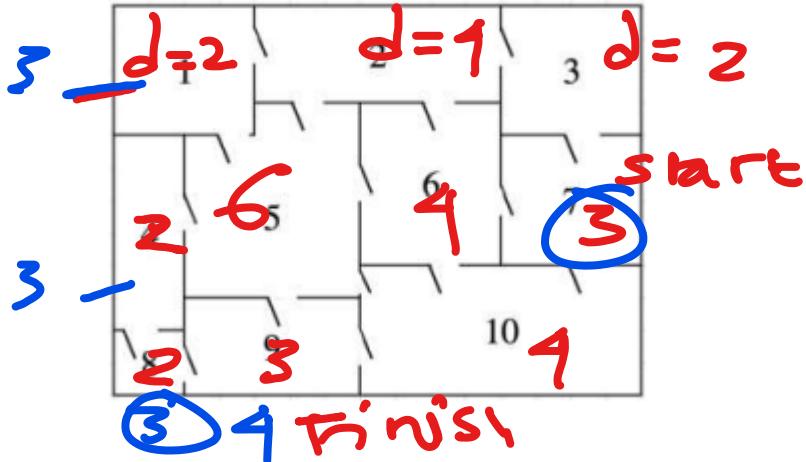


Sirkuit  
Euler

Start / Finish

ubah graf lintasan euler (semi-euler) menjadi graf euler (punya sirkuit euler) dengan cara menambah derajat pada node yang derajatnya ganjil sehingga derajat node tsb skrg genap, dan derajat semua node genap

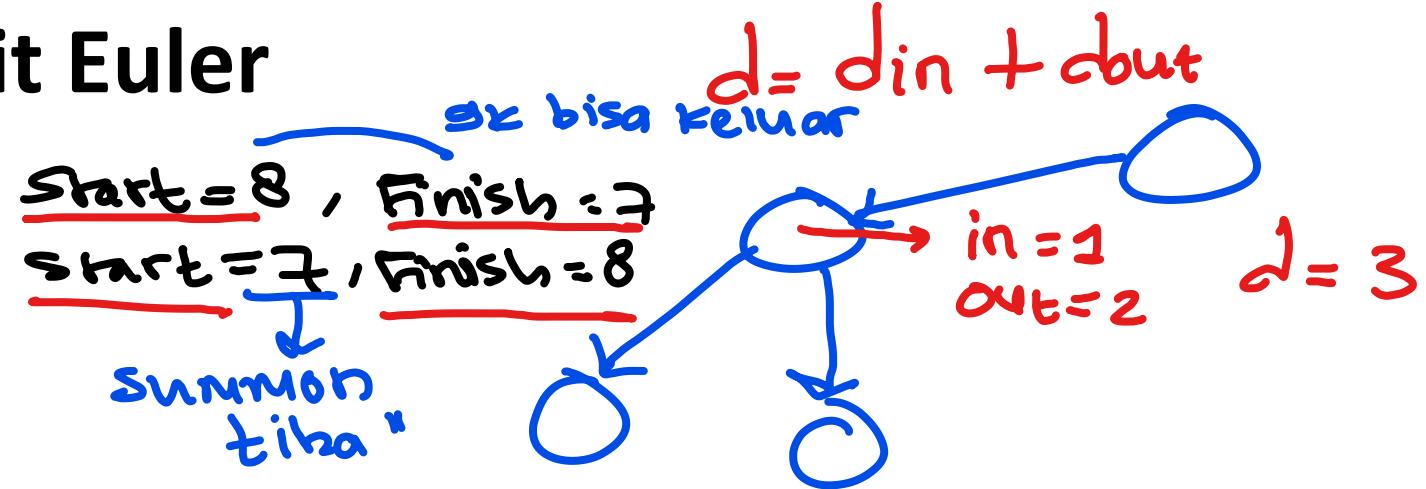
# Lintasan dan Sirkuit Euler



[KSNK 2020]

Pak Dengklek meminta bantuanmu untuk menentukan dua buah ruangan di mana yang satunya akan ditempatkan pintu masuk dan yang lain akan ditempatkan pintu keluar. Ruangan-ruangan manakah yang bisa ditempatkan pintu masuk dan pintu keluar?

- a. 1 dan 4 →
- b. 2 dan 3
- c. 3 dan 8
- d. 8 dan 9
- e. 7 dan 9



Ngunjungi semua pintu kepat sekali

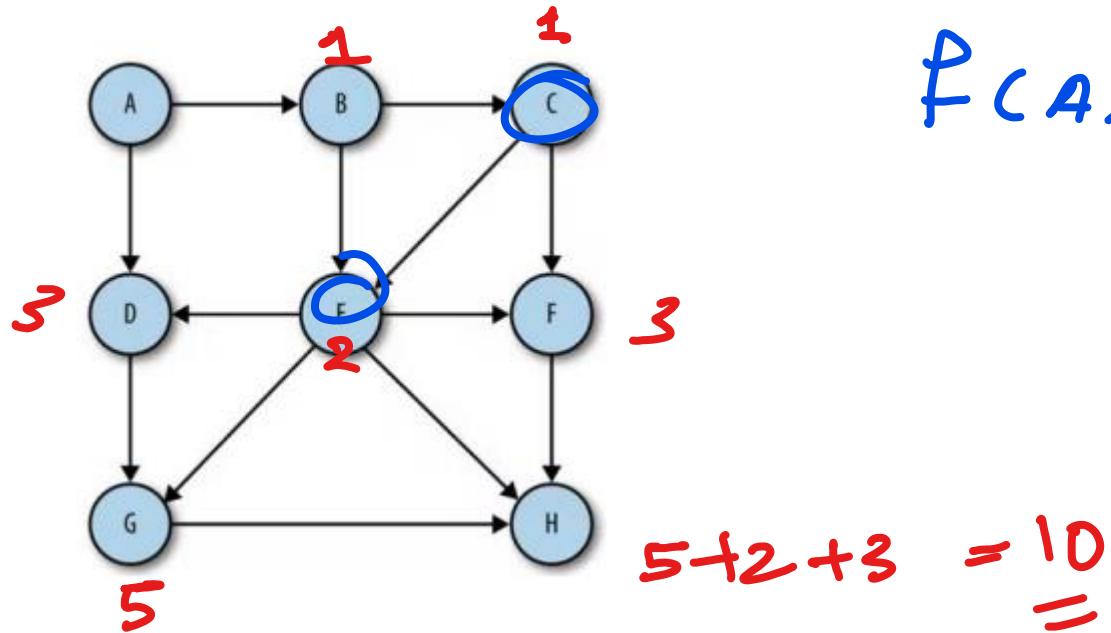
Gena P, genap →  
ganjil, ganjil L

$$\begin{aligned}
 & \cancel{dc(1) = \text{genap}, dc(2) = \text{genap}} \\
 & \cancel{dc(3) = \text{genap}, dc(4) = \text{genap}} \\
 & \cancel{dc(5) = \text{genap}, dc(6) = \text{genap}} \\
 & dc(7) = \text{ganjil}, dc(8) = \text{genap} \\
 & dc(9) = \text{ganjil}, dc(10) = \text{ganjil}
 \end{aligned}$$

# Lintasan dan Sirkuit Euler

[OSNP 2022]

Pak Dengklek memiliki pekarangan yang berisi 8 kandang yang diberi label A, B, C, D, E, F, G dan H sebagai berikut:



$$\begin{aligned}F(A, F) &= \sum F(A, \text{con}(F)) \\&= F(A, C) + F(A, E) \\&= 1 + 2\end{aligned}$$

Tanda panah antara dua kandang (X, Y) menandakan bahwa terdapat jalan setapak yang bisa dilalui dari kandang X ke kandang Y namun tidak sebaliknya. Jika saat ini posisi Pak Dengklek ada di kandang A, dan ingin menuju ke kandang H. Ada berapa rute yang bisa dilalui Pak Dengklek dari kandang A ke kandang H, di mana setiap kandang dapat dikunjungi maksimal satu kali? {tuliskan jawaban dalam bentuk ANGKA saja}

# Lintasan dan Sirkuit Euler

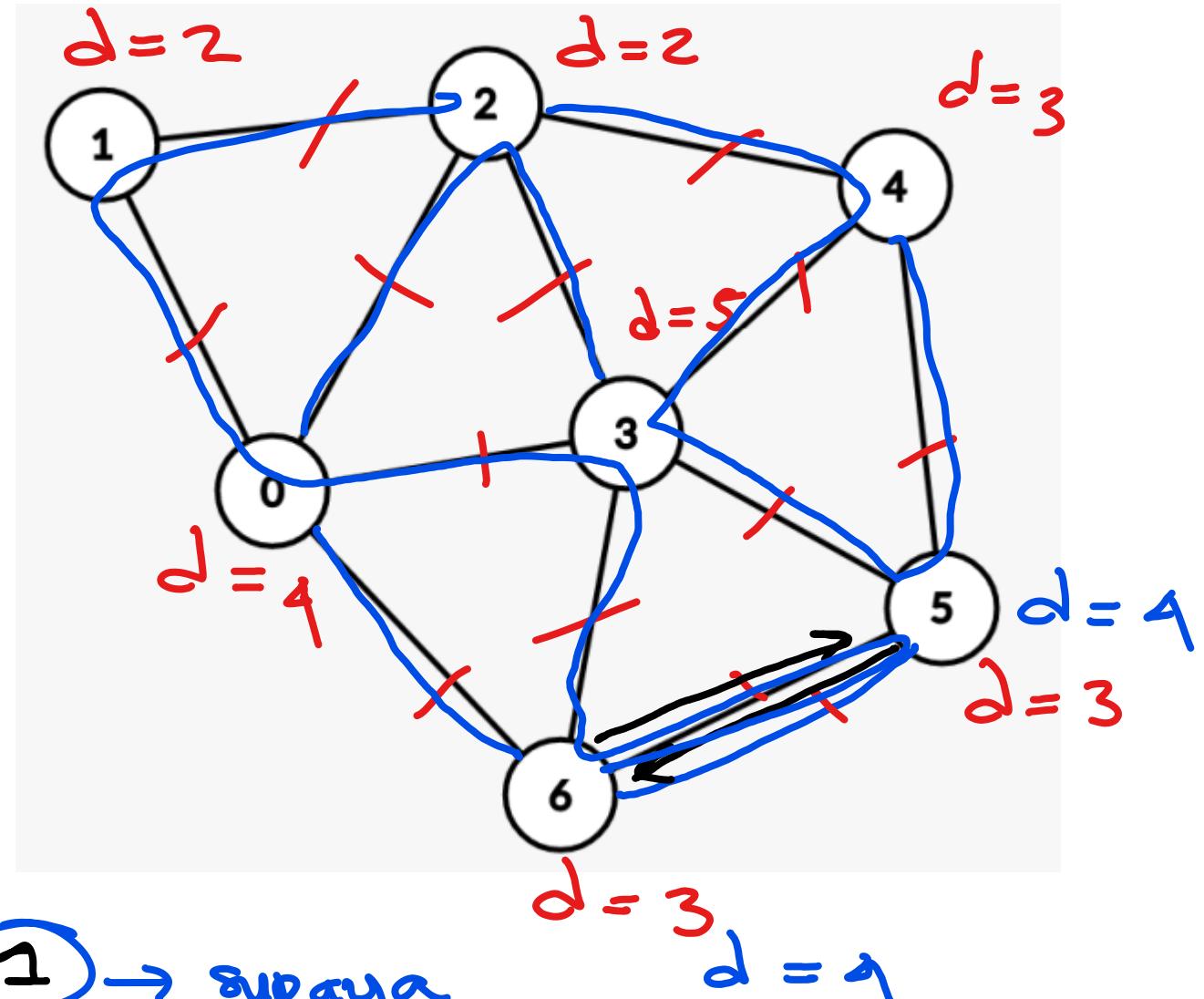
[OSNK 2023]

Pak Dengklek sekarang berada di kandang bernomor 0, dan ia ingin menyiram tanaman yang berada di tiap jalan setapak. Maka, Pak Dengklek ingin menelusuri semua jalan setapak setidaknya sekali. Pak Dengklek dapat menelusuri sebuah jalan setapak dalam satu menit. Berapa waktu minimum (dalam menit) yang dibutuhkan Pak Dengklek untuk menelusuri semua jalan setapak setidaknya sekali?

= Jumlah Jalannya

= 13

= Semua Jalan

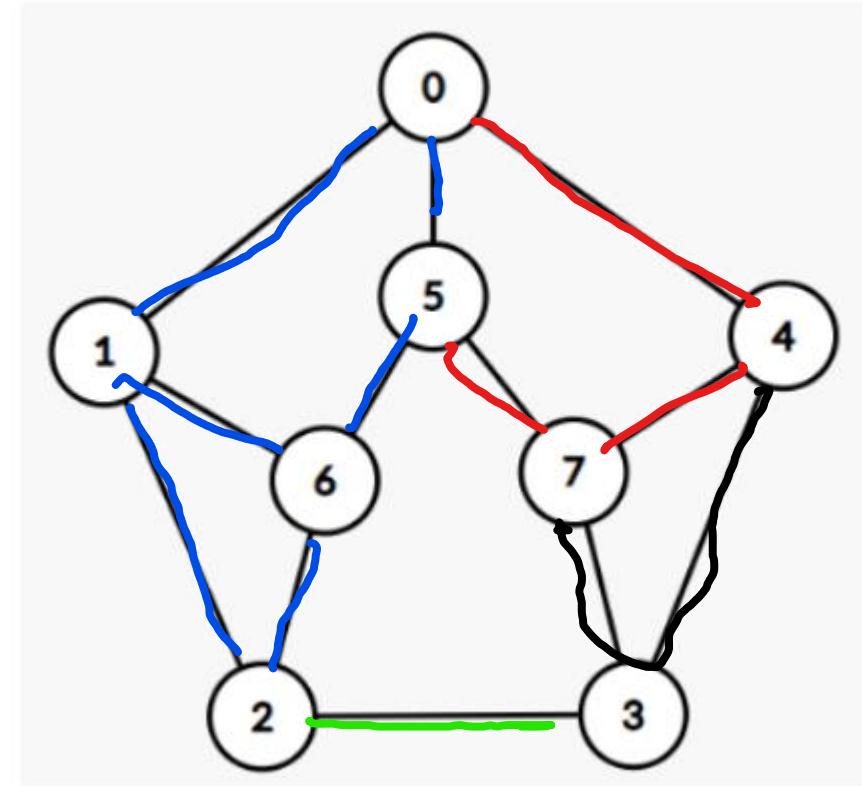


# Lintasan dan Sirkuit Euler

[OSNK 2024]

Pak Dengklek ingin menjamin bahwa seluruh jalan pernah dilewati oleh parade bebek. Namun, karena masalah anggaran, setiap jalan hanya dapat dilewati maksimal satu kali. Perhatikan bahwa setiap persimpangan jalan tetap dapat dikunjungi lebih dari satu kali.

Pak Dengklek memiliki ide untuk mengadakan parade bebek selama beberapa hari. Dalam satu hari, akan ada satu parade bebek yang diadakan oleh Pak Dengklek, dan Pak Dengklek dapat menentukan bagaimana parade bebek tersebut akan berjalan. Ingat bahwa apabila suatu jalan sudah dilewati oleh parade bebek pada suatu hari, maka jalan tersebut juga tidak boleh dilewati oleh parade bebek pada hari-hari lainnya. Berapakah minimal hari yang diperlukan oleh Pak Dengklek agar seluruh jalan dijamin pernah dilewati oleh parade bebek?

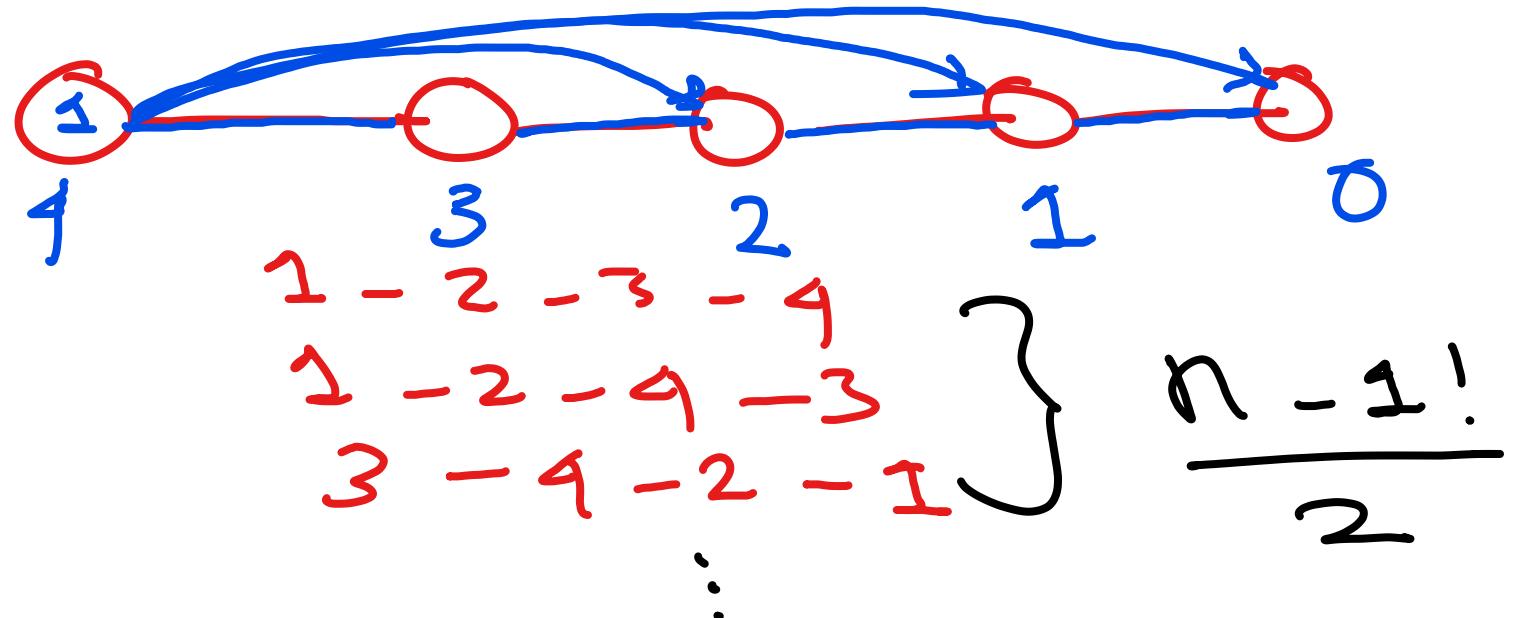
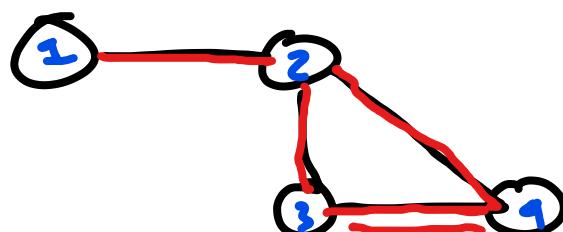


4  
=

# Lintasan dan Sirkuit Hamilton → TSP

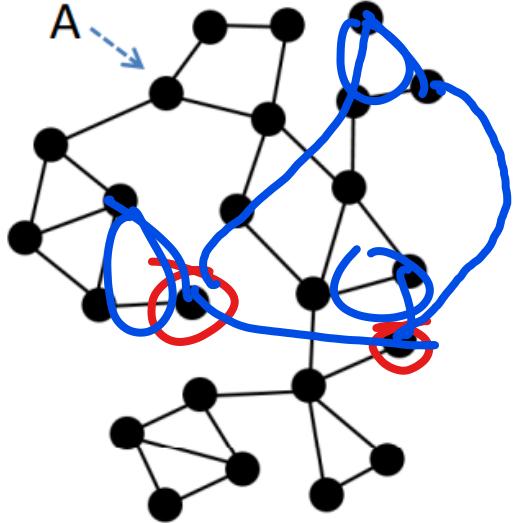
- **Lintasan Hamilton** : ada rute dari suatu node ke node lainnya sehingga melewati semua node yang ada sekali
- **Sirkuit Hamilton** : ada rute dari suatu node sehingga melewati semua node yang ada sekali hingga kembali lagi ke node awal
- Setiap graf lengkap adalah graf Hamilton.
- Di dalam graf lengkap  $G$  dengan  $n$  buah simpul ( $n \geq 3$ ), terdapat  $(n - 1)!/2$  buah sirkuit Hamilton.
- Di dalam graf lengkap  $G$  dengan  $n$  buah simpul ( $n \geq 3$  dan  $n$  ganjil), terdapat  $(n - 1)/2$  buah sirkuit Hamilton yang saling lepas (tidak ada sisi yang beririsan). Jika  $n$  genap dan  $n \geq 4$ , maka di dalam  $G$  terdapat  $(n - 2)/2$  buah sirkuit Hamilton yang saling lepas.

Salaman  $\Rightarrow$



# Disjoint Set

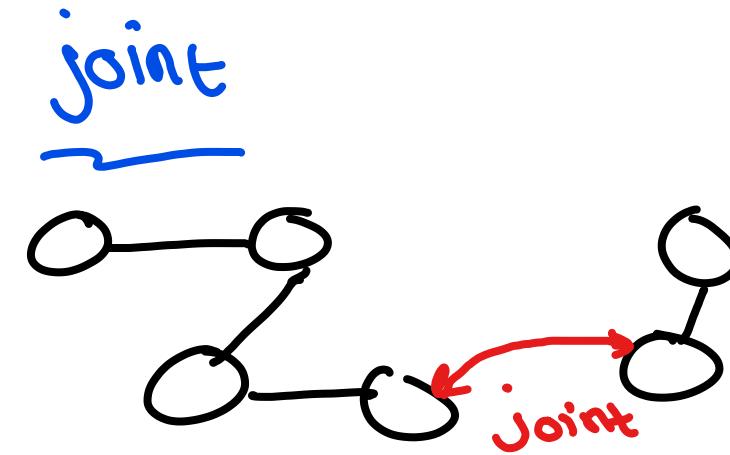
Bebek-bebek pak Dengklek membentuk pertemanan seperti diilustrasikan pada gambar di bawah ini, dengan bulatan hitam adalah bebek dan garis adalah hubungan pertemanan antara dua bebek



Pak Dengklek biasa memberikan berita ke salah satu bebek, dan berita tersebut menyebar melalui hubungan pertemanan. Ada sejumlah bebek yang jika keluar dari hubungan pertemanan mengakibatkan terputusnya komunikasi. Contoh: Jika A meninggalkan pertemanan, akan mengakibatkan terputusnya komunikasi sejumlah bebek. Untuk menghindari hal tersebut, pak Dengklek meminta para bebek untuk menambah hubungan pertemanan. Berapa minimal hubungan pertemanan baru yang perlu dibuat supaya hubungan komunikasi tetap terjaga ketika salah satu bebek meninggalkan kelompok tersebut.

Jawaban: ..... {tuliskan jawaban dalam bentuk angka saja}

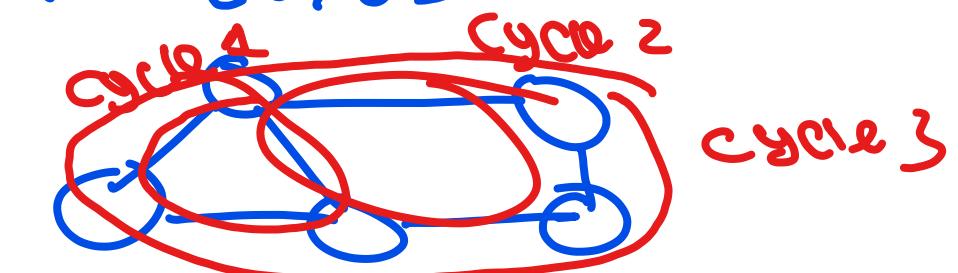
3 =



disjoint



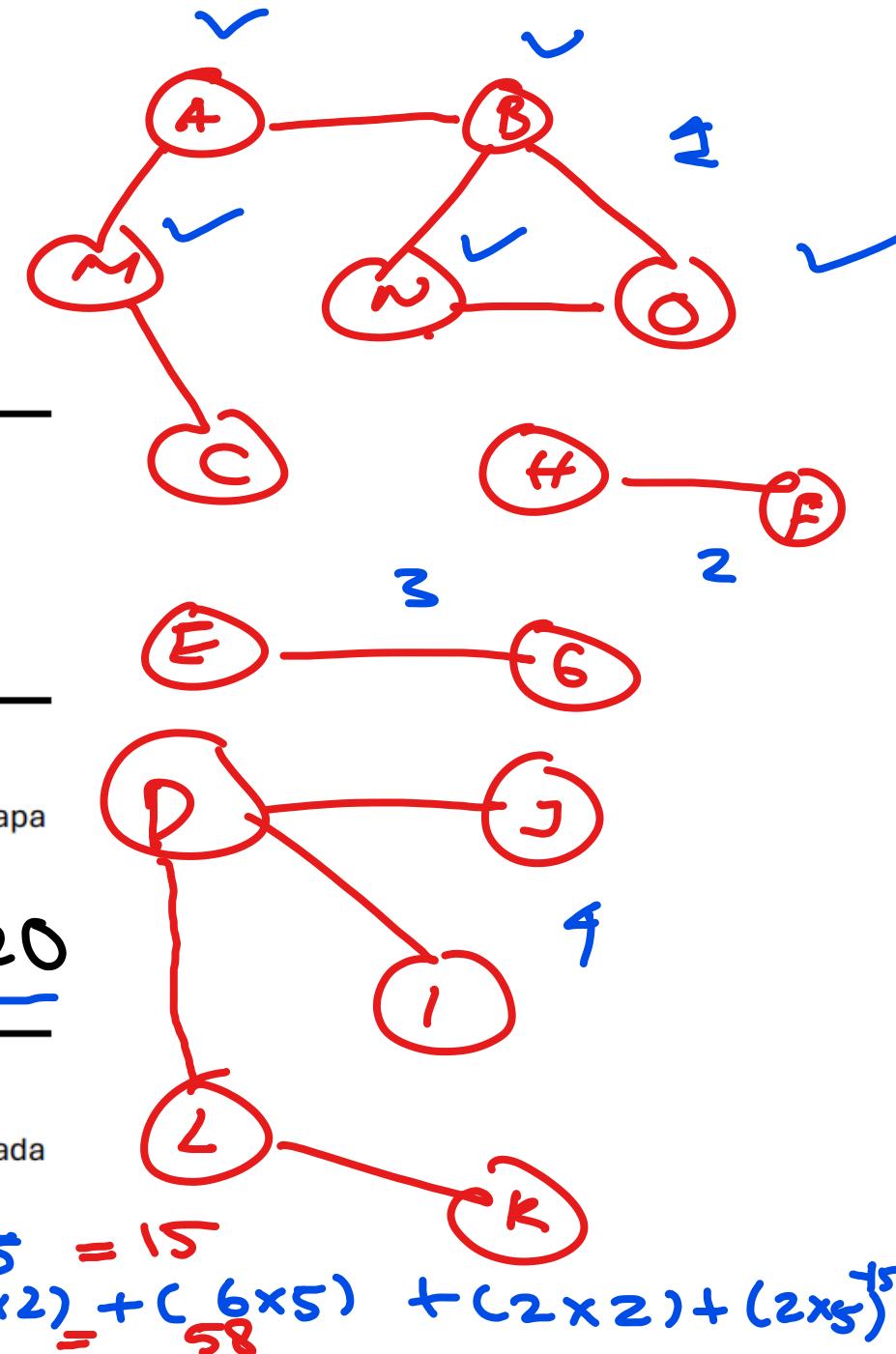
$h_1: \{1, 2, 3, 4\}$  } disjoint  
 $h_2: \{5, 6\}$



# Disjoint Set

Diketahui bahwa informasi pertemanan antar ayam adalah sebagai berikut:

<del>P(A,B)</del>	<del>P(C,M)</del>	<del>P(E,O)</del>	<del>P(A,M)</del>
<del>P(D,J)</del>	<del>P(G,N)</del>	<del>P(B,O)</del>	<del>P(K,I)</del>
<del>P(D,I)</del>	<del>P(B,N)</del>	<del>P(L,D)</del>	<del>P(H,F)</del>



Ada berapa banyak lingkaran pertemanan ayam-ayam Pak Blangkon?

$$= 4$$

Tuliskan jawaban dalam bentuk ANGKA.

Jika untuk setiap lingkaran pertemanan harus ada perwakilan ayam yang diajak bermain, ada berapa banyak cara yang bisa dilakukan Pak Blangkon dalam memilih ayam-ayamnya?

Tuliskan jawaban dalam bentuk ANGKA

$$6 \times 2 \times 2 \times 5 = 120$$

$$15 + 58 + 169 + 120 = 378$$

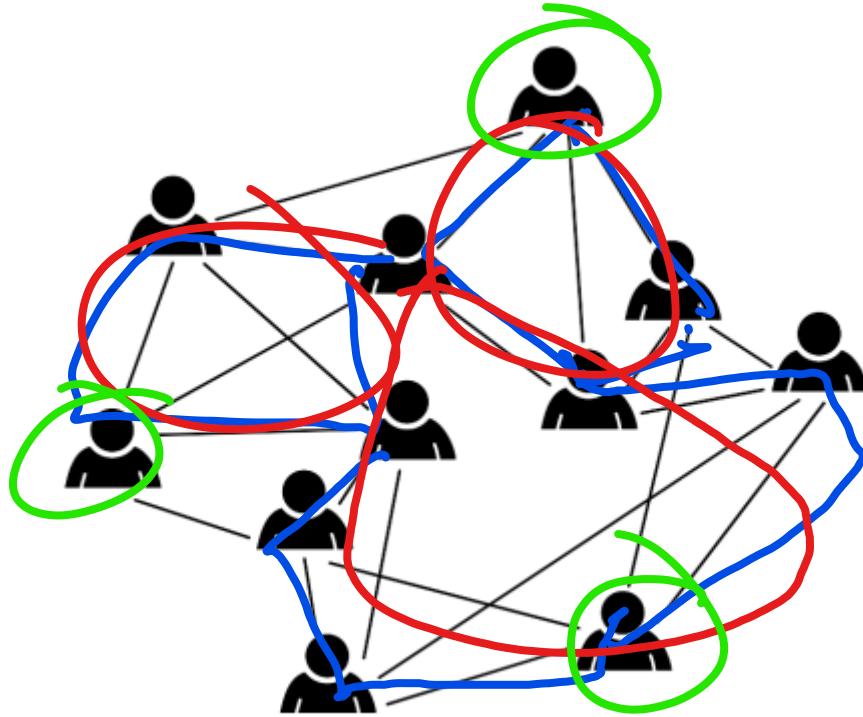
Jika untuk setiap lingkaran pertemanan tidak harus ada perwakilan ayam yang diajak bermain, ada berapa banyak cara yang bisa dilakukan Pak Blangkon dalam memilih ayam-ayamnya?

Tuliskan jawaban dalam bentuk ANGKA.

$$1 \text{ Kelompok} = 6 + 2 + 2 + 5 = 15$$

$$2 \text{ kelompok} = (6 \times 2) + (6 \times 2) + (6 \times 5) + (2 \times 2) + (2 \times 5) = 58$$

# Disjoint Set

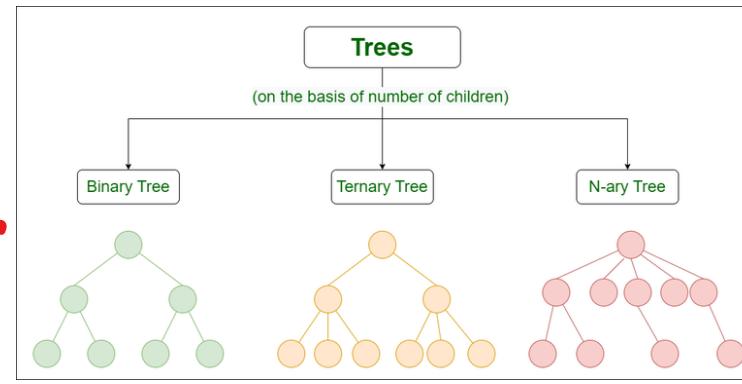
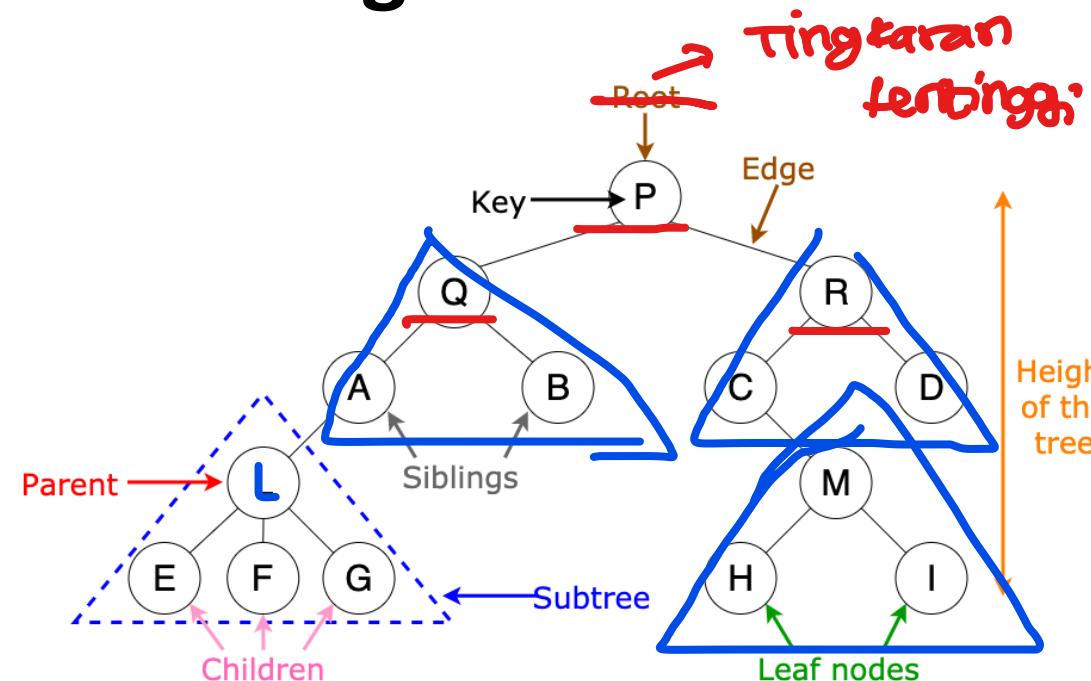


$$3 \text{ kelompok} = (6 \times 2 \times 2) + C_2^2 \times 5 + (6 \times 5) + \\ TEL = (6 \times 2 \times 2 \times 5) - (6 \times 2 \times 2 \times 5) = 120$$

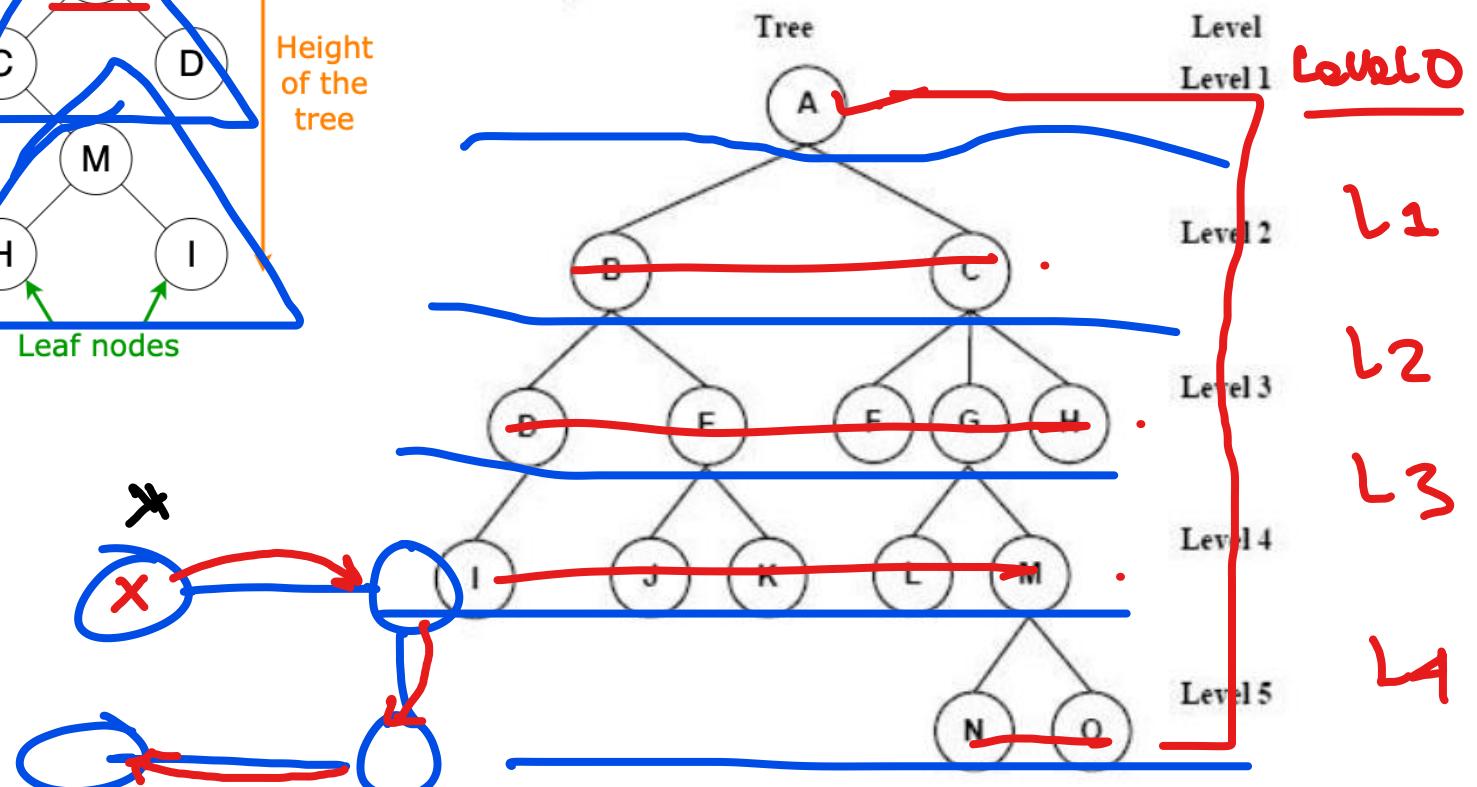
Jika anggota komite audit terdiri dari calon-calon pemain yang tidak mempunyai hubungan dengan anggota komite audit lainnya. Berapa paling banyak jumlah anggota komite audit yang mungkin? Tuliskan jawaban dalam bentuk ANGKA

3  
=  
degree = 4 semuanya

# Terminologi Tree

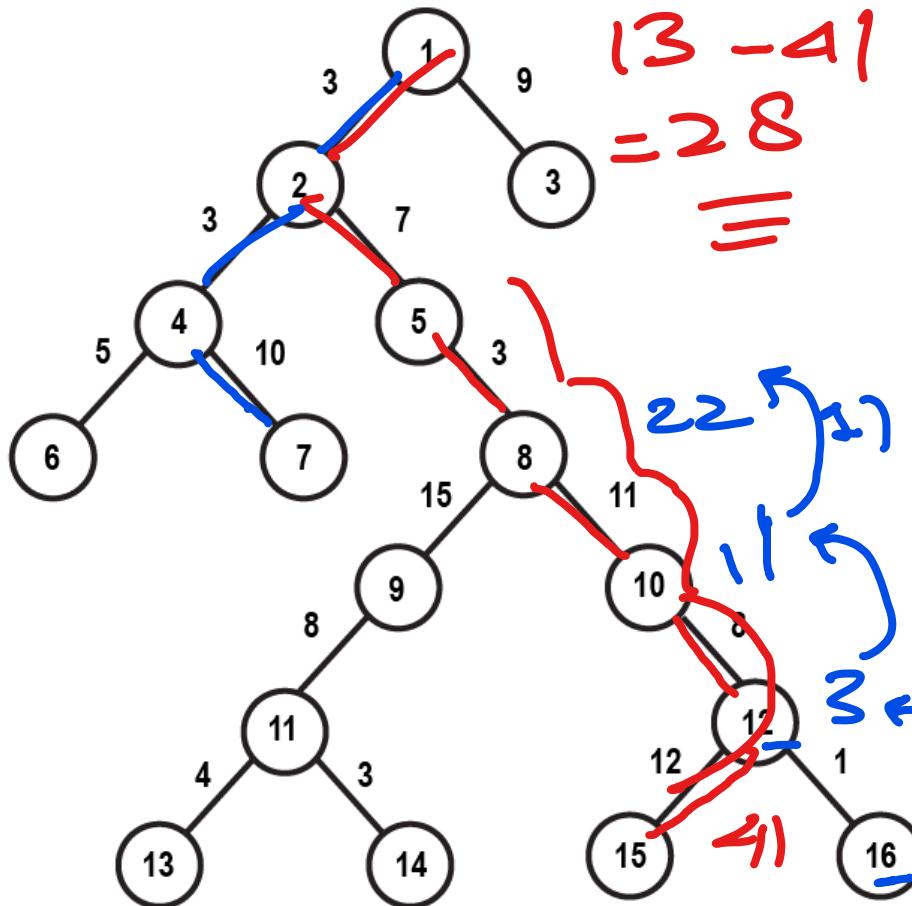


- Tree = Graf tanpa cycle / siklus / siklik (tidak ada sirkuit)
- Cara membentuk sebuah graf menjadi tree = menghilangkan cycle (Spanning Tree)
- Depth = Level + 1



# Representasi Tree

Naik (+)  
Turun (-)



$$10 + 3 - 7 - 3 - 11 - 8 \\ - 12 = - 41$$

Di kandang bebeknya Pak Ghanesh ada 16 bebek yang ia pelihara. Gambar di atas menunjukkan pengurutan bebek Pak Ghanesh dari yang tertua hingga ke yang termuda. Angka yang tertera menunjukkan perbedaan usia antar dua bebek. Misalnya bebek ke-10 lebih tua 8 tahun dari bebek ke-12.

$$13 - 41$$

Tentukan berapa selisih usia Bebek 15 dan bebek 7!  
**{tuliskan jawaban dalam bentuk ANGKA saja}**

$$18$$

Jika diketahui usia bebek ke-16 adalah 2 tahun berapakah usia bebek ke - 8 ? **{tuliskan jawaban dalam bentuk ANGKA saja}**

$$22$$

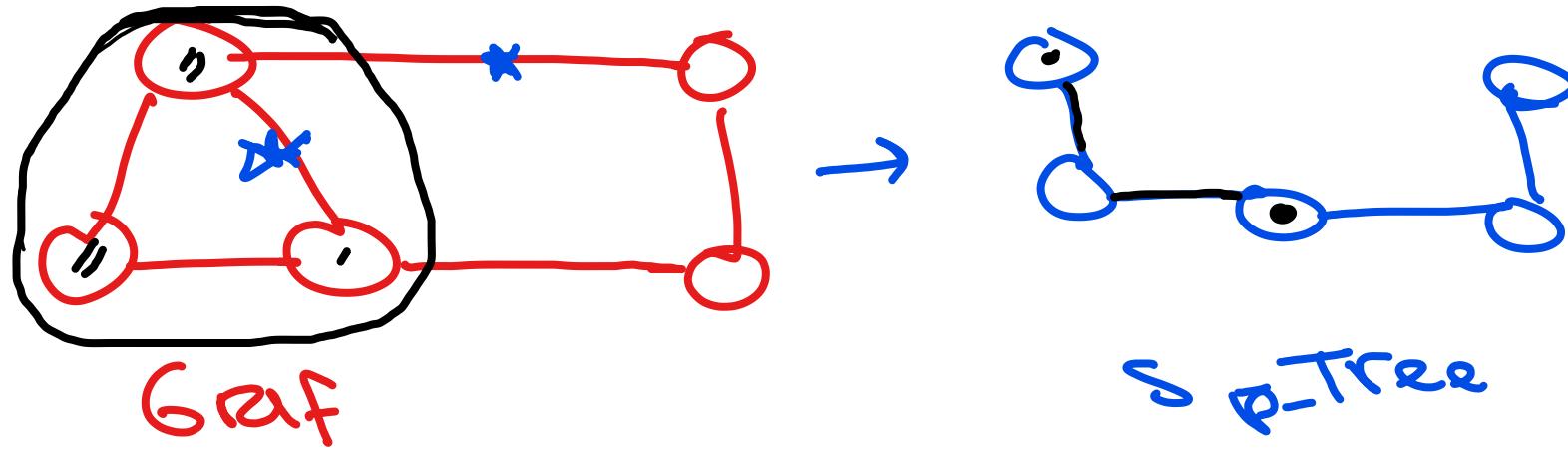
$$b_1 - b_7 = 16$$

$$\begin{aligned} b_1 - b_{15} &= 41 \\ -b_7 + b_{15} &= -28 \times (-1) \end{aligned}$$

# Spanning Tree

$$b_7 - b_{15} = 28$$
$$b_7 > b_{15}$$

- Cara membentuk sebuah graf menjadi tree = menghilangkan cycle (Spanning Tree)
- Spanning Tree biasanya meminta kita untuk menghilangkan beberapa edge namun tidak merubah keterhubungan agar semua node tetap terhubung secara langsung atau tidak langsung



$A$  = Kegadian  $A$  Terjadi

$$S = A + A^C$$

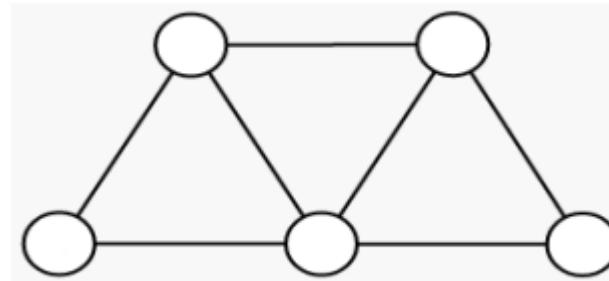
$$A = S - A^C \leftrightarrow A^C = S - A$$



# Spanning Tree

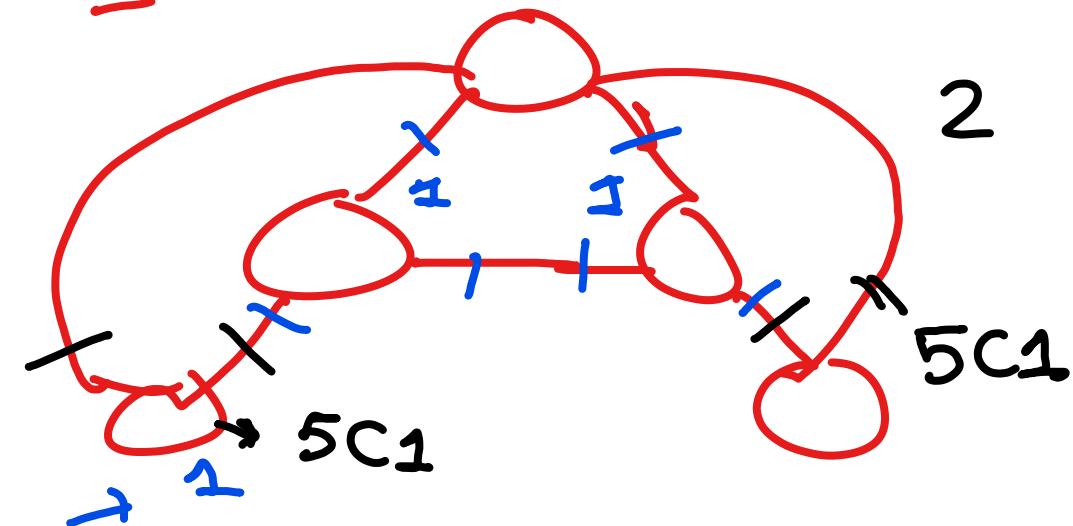
$$\begin{aligned} \text{ans} &= {}^7C_5 - 12 \\ &= \frac{35}{1} - 12 \\ &= 23 \end{aligned}$$

Diberikan denah perumahan seperti pada gambar di bawah ini. Lingkaran merepresentasikan sebuah rumah dan garis merepresentasikan kabel telepon yang menghubungkan antar rumah. Oleh karena suatu masalah tertentu, Pak Dengklek ingin memotong 3 dari 7 kabel yang ada. Namun, Pak Dengklek harus memastikan bahwa setiap pasang rumah masih tetap terhubung melalui kabel-kabel yang tidak dipotong, baik secara langsung maupun melalui rumah lain



Kita lempar dua buah dadu, berapa peluang hasil jumlah mata dadu yang dihasilkan  $\geq 3$

$$\begin{aligned} |S| &= {}^7C_3 \rightarrow \frac{7!}{3!4!} = \frac{7 \times 6 \times 5}{6} \\ |A^c| &= 5+5+1+1 = 12 \end{aligned}$$



Berapa banyak kabel minimum yang bisa dipotong oleh Pak Dengklek?

Berapa banyak konfigurasi pemotongan kabel yang bisa Pak Dengklek lakukan? [Jawablah dengan angka saja!] = 10

$$5C3 = \frac{5!}{3!2!} = 10$$

$$\frac{35}{36} \checkmark$$

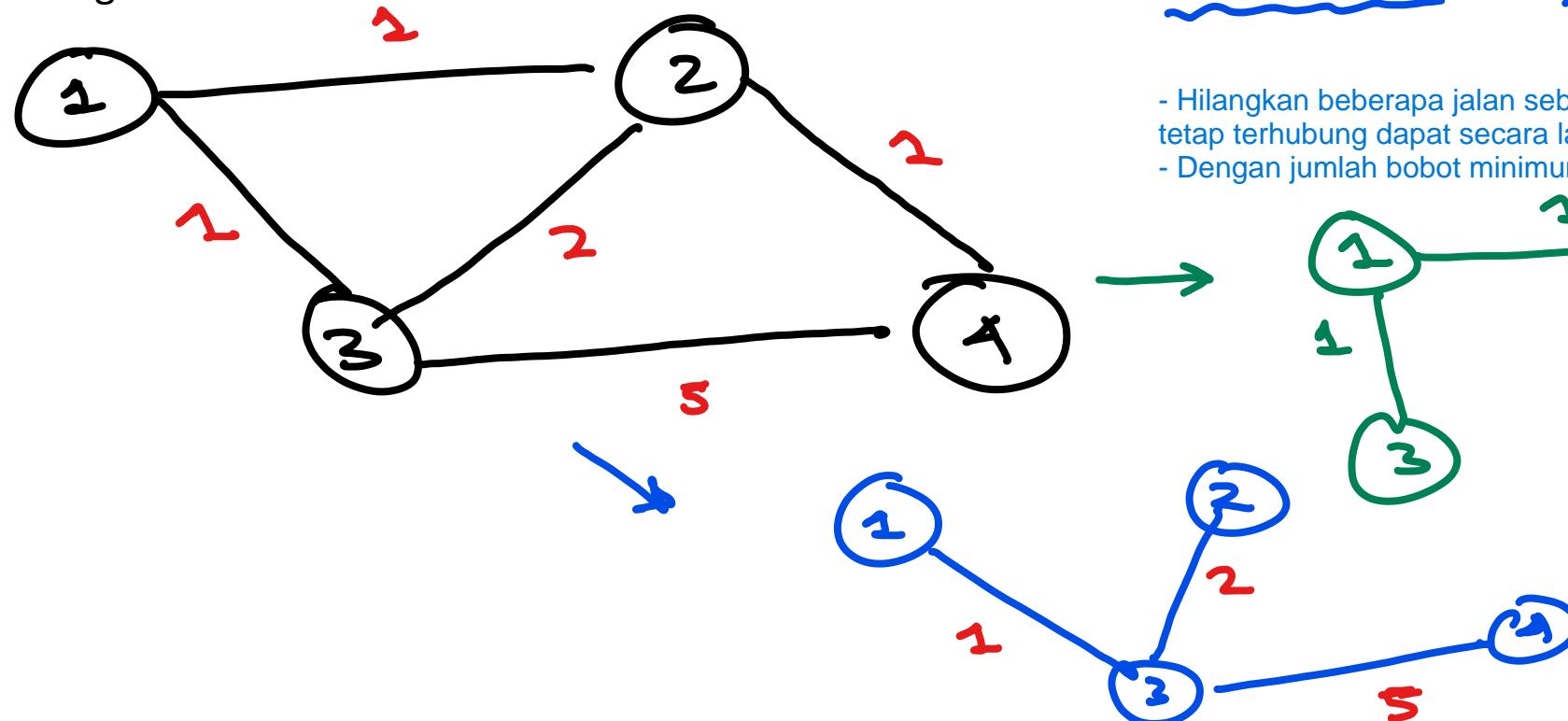
~~$$\begin{aligned} P(C_{\text{sum}=3}) &+ \\ P(C_{\text{sum}=4}) &+ \end{aligned}$$~~

# Minimum Spanning Tree

Berapa total bobot minimum jika dirubah graf tersebut menjadi tree

(Jika dihapus beberapa jalan tapi semua rumah masih terhubung berapa total bobot/jarak/biaya secara minimum)?

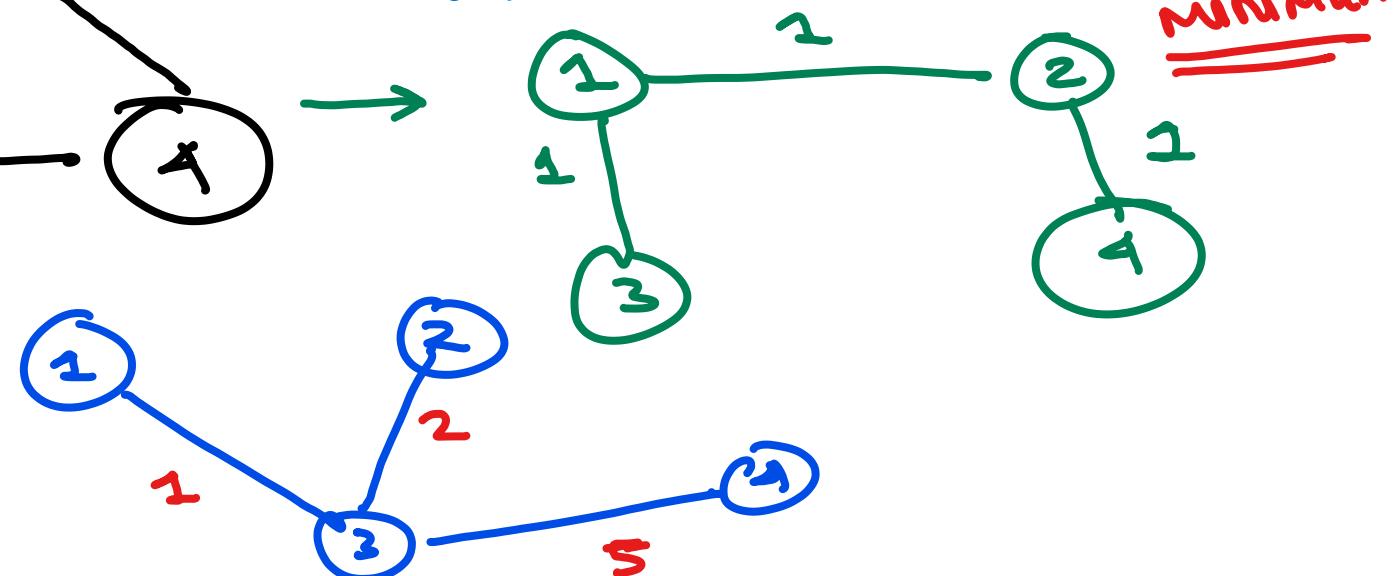
Kruskal Algorithm



$$\text{Menentui } = S - \text{Tdk menentui } P(\text{sum}=S) + P(\text{sum}=6) + \dots$$

## minimum spanning tree

- Hilangkan beberapa jalan sebanyak mungkin, namun semua node tetap terhubung dapat secara langsung atau tidak langsung
- Dengan jumlah bobot minimum



# Minimum Spanning Tree – Kruskal Algorithm

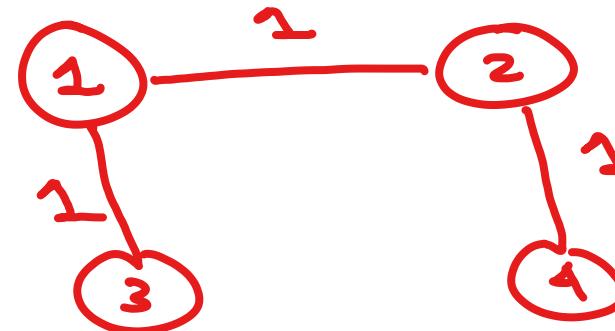
$$1 - 2 = \textcircled{1}$$

$$1 - 3 = \textcircled{1}$$

$$2 - 3 = 2$$

$$2 - 1 = \textcircled{1}$$

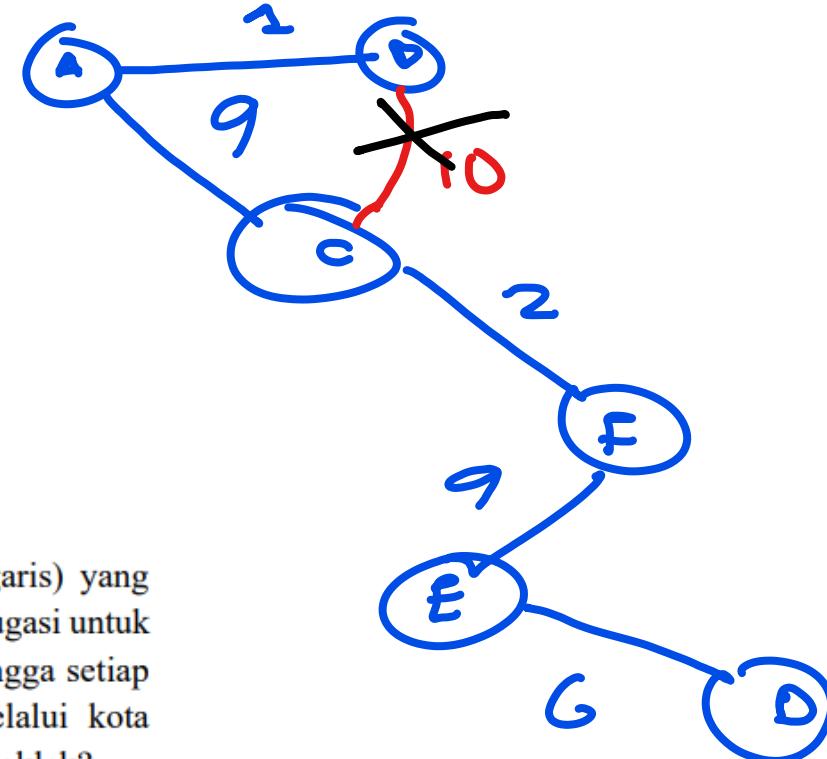
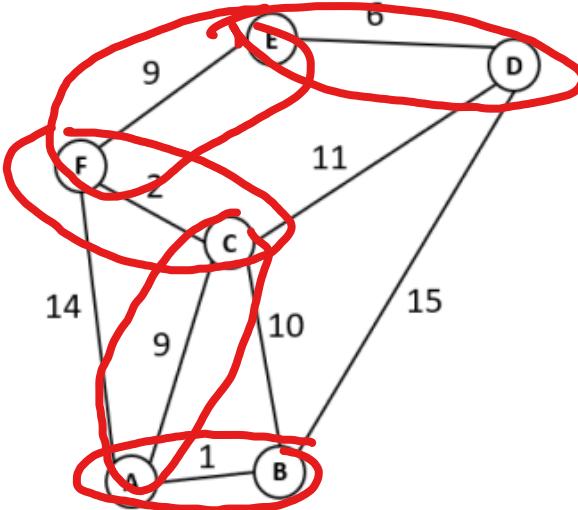
$$3 - 4 = 5$$



$$w_{MST} = 1+1+1$$

# Minimum Spanning Tree – Kruskal Algorithm

5. Diketahui ada enam kota A, B, C, D, E, dan F sebagai berikut:



Dua kota dikatakan terhubung jika ada jalan (divisualisasikan sebagai garis) yang menghubungkan keduanya dengan jarak dalam kilometer. Pak Dengklek ditugasi untuk memasang kabel internet di atas beberapa jalan yang ada sedemikian sehingga setiap kota bisa terhubung baik secara langsung maupun tidak langsung (melalui kota lainnya). Berapa panjang kabel minimal yang harus disiapkan oleh Pak Dengklek?

- A. 25
- B. 27**
- C. 29
- D. 32
- E. 33

$$27_{11}$$

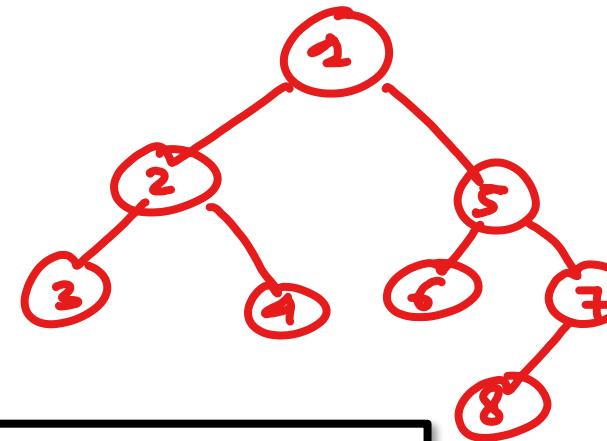
# Tree Traversal

- DFS
- Level Order (BFS)
- Pre-Order
- In-Order

```
// Pre Order  
mark_node();  
visit_left(); con  
visit_right(); cor
```

```
// In Order  
visit_left();  
mark node();  
visit_right();
```

```
// Post Order  
visit_left(); segmen kin mark  
visit_right(); segmen kanan mark  
mark_node();
```



DFS = 1 - 2 - 3 -  
9 - 5 - 6 -  
7 - 8

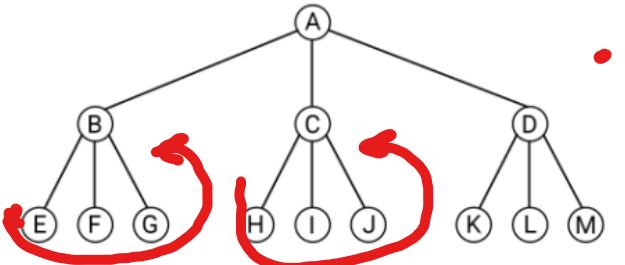
BFS = 1 - 2 - 5 -  
3 - 4 - 6 - 7 -  
8

dfs(node) →  
mark visitedNodes

```
For C (con : node) →  
  If (visited[con]) {  
    continue  
  } else {  
    dfs(con)  
  }
```

# Tree Traversal

Pak Dengklek memiliki 13 buah benda pusaka yang dilabeli A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, dan M dalam sebuah tanah yang masing-masing memiliki hubungan sebagai berikut:



Dari gambar di atas diketahui bahwa benda pusaka B, C, dan D memiliki kekuatan yang diturunkan dari benda pusaka A, benda pusaka E, F, dan G memiliki kekuatan yang diturunkan dari benda pusaka B, dst. Kemudian Pak Dengklek mendefinisikan sebuah fungsi kiri(X), tengah(X) dan kanan(X) suatu benda pusaka X yang didefinisikan sebagai benda pusaka yang posisinya sebagai turunan benda pusaka X sebelah kiri, tengah, dan kanan. Sebagai contoh kiri(B)=E, tengah(B)=F, kanan(B)=G, tentunya benda pusaka yang tidak memiliki turunan, nilai fungsi kiri, tengah, dan kanannya akan bernilai kosong. Selanjutnya Pak Dengklek mendefinisikan sebuah cara untuk mencari benda pusaka yang dia miliki yaitu dengan cara membuat fungsi cari sebagai berikut:

```
fungsi cari(x):
    jika nilai x tidak kosong:
        cari(kiri(x));
        cari(tengah(x));
        cari(kanan(x));
        letakkan x dalam box
```

Setiap kali menemukan benda pusaka, Pak Dengklek akan meletakkannya dalam sebuah boks kosong pada posisi paling atas. Jika Pak Dengklek memulai pencarian dengan benda pusaka A yaitu cari(A) sampai semua benda pusaka ditemukan, tuliskan urutan benda pusaka dalam boks mulai dari posisi paling atas sampai posisi paling bawah.

Jawaban: ..... {tuliskan jawaban dalam bentuk HURUF KAPITAL saja tanpa spasi }

E F G B     H I J C     K L M D  
A

C(A) = C(CB)    C(CC)    C(CD)    A  
EFGB        HISC        KLMD

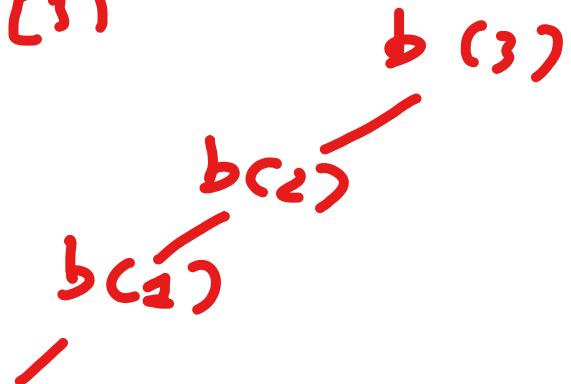
C(B) = CCE)    CCF)    C(G)  
E              F         G    B

C(CC) = H I J C  
C(CD) = K L M D

# Tree Traversal

```
void bebek(int x){  
    if(x == 0) cout << "o";  
    else{  
        bebek(x - 1);  
        cout << x << endl;  
        bebek(x - 1);  
    }  
}
```

Tentukan tampilan yang dihasilkan dari pemanggilan  
bebek(9)!  $b(3)$



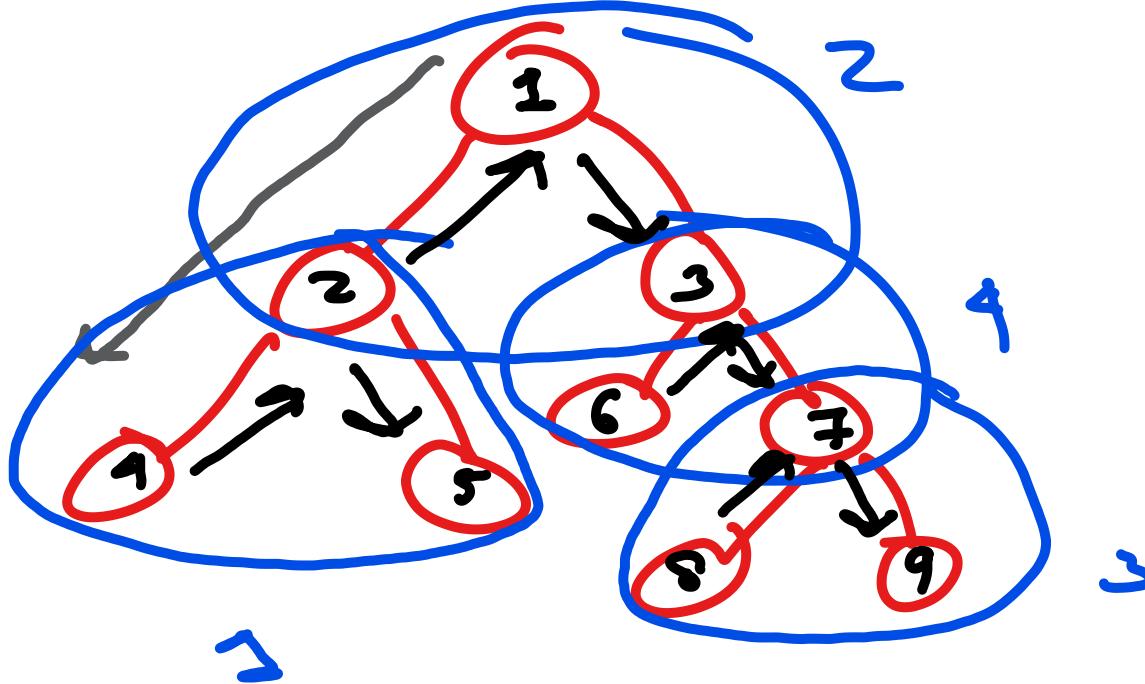
$$\begin{aligned}\underline{b(3)} &= \underline{b(2)} \underline{3} \underline{b(2)} \\ \underline{b(2)} &= \underline{b(1)} \underline{2} \underline{b(1)} \\ \underline{b(1)} &= \underline{b(0)} \underline{1} \underline{b(0)} \\ &= 1\end{aligned}$$

$$\underline{b(2)} = "121"$$

$$b(3) = 121 \ 3 \ 121$$

$$\begin{aligned}b(4) &= b(3) \ 4 \ b(3) \\ &= 121 \ 3 \ 121 \rightarrow 1213121\end{aligned}$$

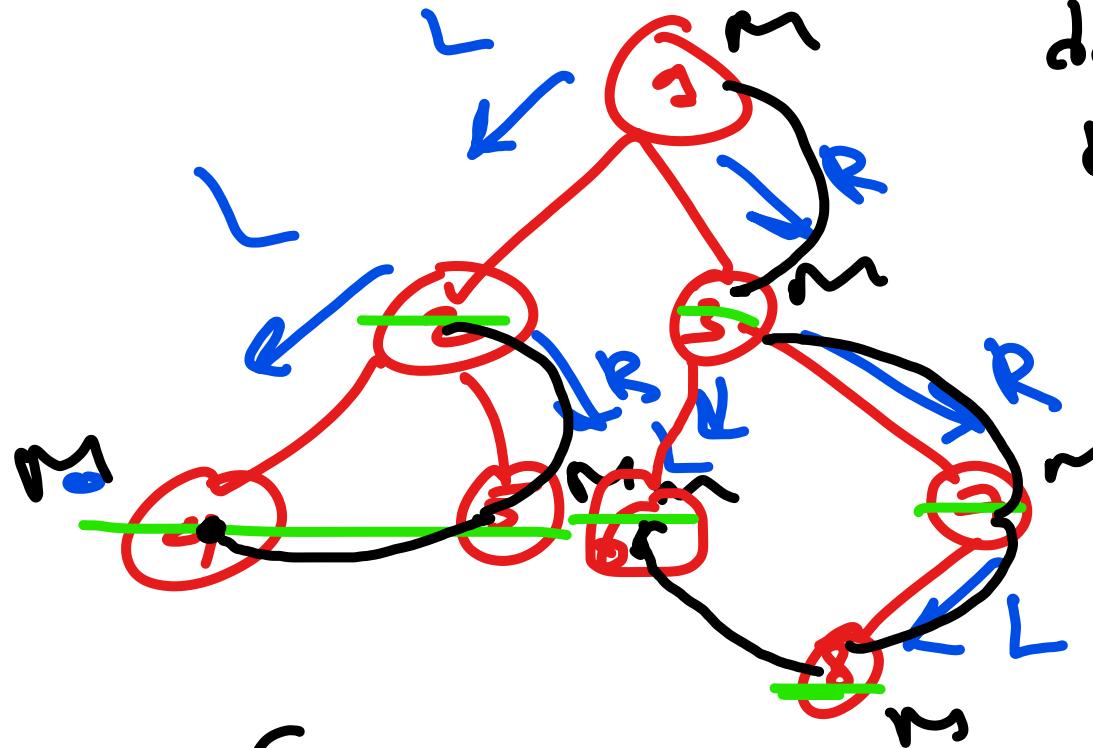
in order



4 - 2 - 5 - 1 - 8 - 7 - 9 - 6 - 3

Post Order

Segment kiri  
Segment kanan



dari bawah  
berlawanan  
arah jam  
jam

1 - 5 - 2 - 6 - 8 - 7 - 3 - I













**JANGAN LUPA  
MENGERJAKAN SOAL  
LATIHAN DI E LEARNING!**