

Materi 2 : Grafik Persamaan Garis Lurus, Parabola, dan Lingkaran

By : @abdan_hafidz

A. Persamaan Garis Lurus

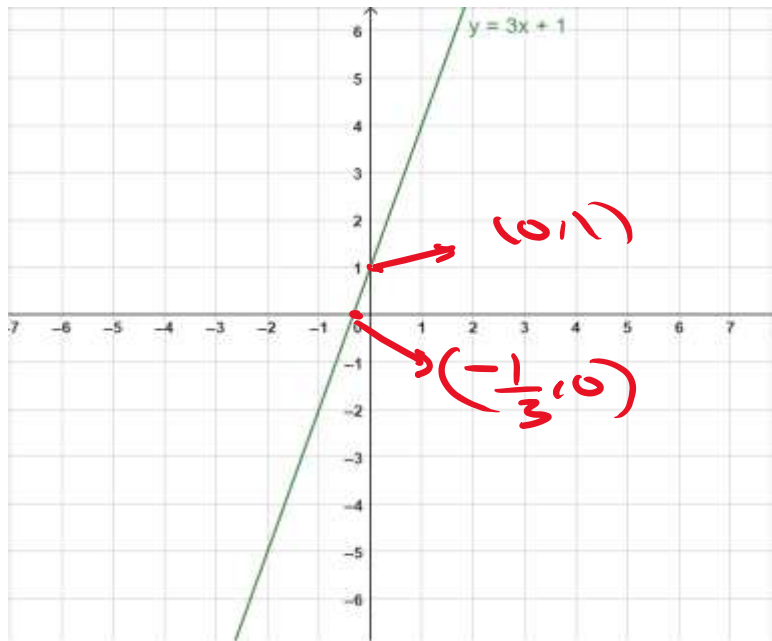
Misalkan kita mempunyai sebuah persamaan linier $y = 3x + 1$ ini artinya akan ada beragam nilai y karena nilai x yang juga beragam. Hubungan antara nilai y dan x dapat divisualisasikan dalam bentuk grafik yang Matematis.

Dari persamaan garis $y = 3x + 1$ kita dapat membuat sebuah hubungan antara x dan y .

x	y
$\frac{1}{3}$	0
$\frac{2}{3}$	3
...	...
0	1
1	4
2	7
3	10
4	13
...	...
dst	dst

Saat $x = 0$
dinamakan titik
potong terhadap
sumbu y

Saat $y = 0$
dinamakan titik
potong terhadap
sumbu x



Karena selisih perubahan nilai y adalah konstan $+3$, maka dapat ditemukan jenis grafiknya adalah garis lurus. Visualisasi grafik dapat dilihat pada gambar di atas.

Jika anda ingin menggambar grafik, anda bisa menarik garis lurus **dari titik potong terhadap sumbu-x ke titik potong terhadap sumbu-y** diteruskan menuju area tak hingga.

Hubungan antara nilai x dan y dapat direpresentasikan dalam bentuk (x,y) di mana bentuk ini kita sebut sebagai titik / point / koordinat / posisi / dsb dalam Matematika.

1. Menentukan persamaan garis lurus dari hubungan dua titik

Tentu sangat mudah jika anda diberikan titik – titik solusi dari sebuah persamaan kemudian anda memvisualisasikannya dalam bentuk grafik. Tapi bagaimana jika informasi yang kita peroleh adalah minimal dua titik – titik yang merupakan area dari grafik suatu persamaan tertentu?

CONTOH 1.1 : Suatu garis memotong titik (2,5) dan (1,3) gambarkanlah grafiknya!

Dari informasi di atas kita bisa menerapkan formula, jika suatu garis memotong titik (x_1, y_1) dan (x_2, y_2) maka persamaan garisnya adalah :

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

Untuk menyelesaikan **CONTOH 1.1** di atas kita cukup substitusikan nilai titik pada formula di atas.

$$\frac{x - 2}{3 - 2} = \frac{y - 5}{3 - 5}$$

$$\begin{aligned}\frac{x - 2}{1} &= \frac{y - 5}{-2} \\ -2(x - 2) &= y - 5 \\ -2x + 4 &= y - 5 \\ y &= -2x + 4 + 5 \\ y &= -2x + 9\end{aligned}$$

Diperoleh persamaan garisnya adalah $y = -2x + 9$

- Titik potong terhadap sumbu-x ($y = 0$)

$$\begin{aligned}-2x + 9 &= 0 \\ -2x &= -9 \\ x &= \frac{9}{2} = 4.5\end{aligned}$$

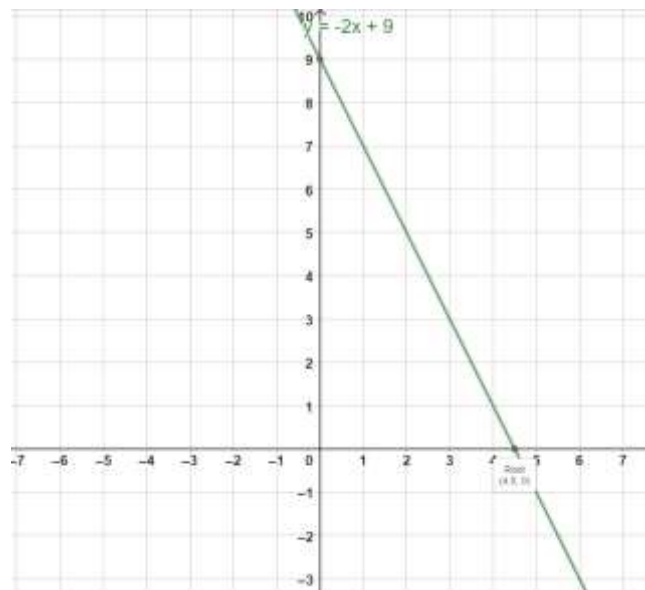
Titik potongnya adalah (4.5,0)

- Titik potong terhadap sumbu-y ($x=0$)

$$\begin{aligned}-2(0) + 9 &= y \\ y &= 9\end{aligned}$$

Titik potongnya adalah (0,9)

Sehingga grafiknya adalah :



2. Menentukan persamaan garis jika diketahui gradien (m)

Bentuk umum dari persamaan garis lurus adalah $y = mx + c$ di mana m adalah gradien / kemiringan garis dan c adalah konstanta. Dari formula sebelumnya

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

Kita dapat tentukan

$$\frac{x - x_1}{\Delta x} = \frac{y - y_1}{\Delta y}$$

Operasikan

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

(Bisa dibuktikan)

Bahwa

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Sehingga diperoleh

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

atau

$$y = m(x - x_1) + y_1$$

CONTOH 1.2 : Sebuah garis l memotong titik (1,2) dan memiliki kemiringan 2. Gambarkan grafik untuk garis l tersebut!

Dari soal di atas diketahui $m = 2$, $x_1 = 1$, $y_1 = 2$. Diperoleh persamaanya adalah :

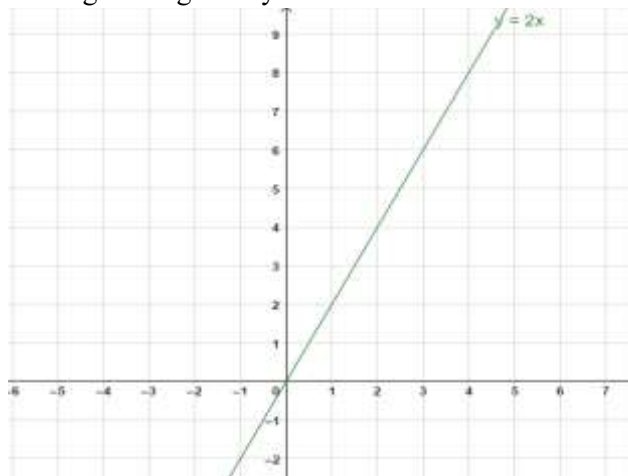
$$y = m(x - x_1) + y_1$$

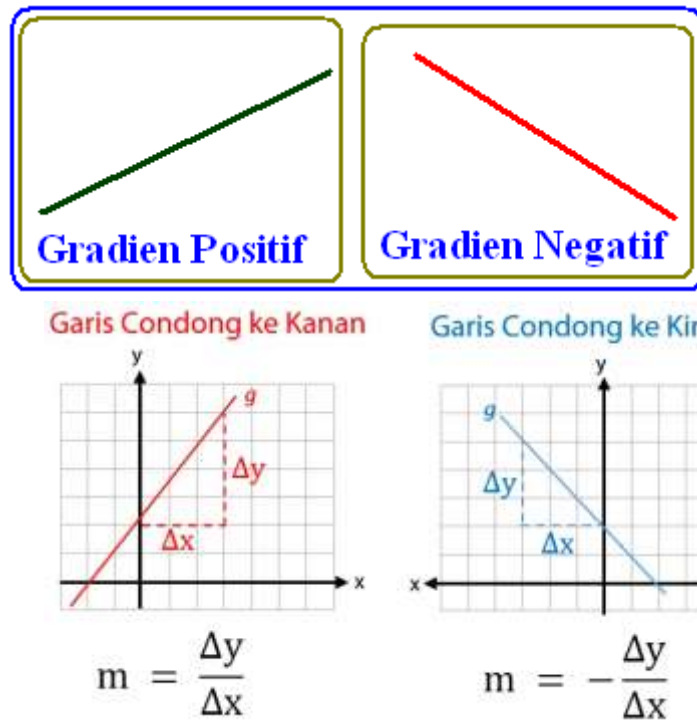
$$y = 2(x - 1) + 2$$

$$y = 2x - 2 + 2$$

$$y = 2x$$

Dengan mudah kita mengetahui grafiknya adalah :





3. Hubungan antar garis

3.1. Garis saling sejajar (//)

Garis l_1 dan l_2 dikatakan sejajar ($l_1 // l_2$) apabila m_1 (Kemiringan garis l_1) dan m_2 (Kemiringan garis l_2) sama

$$m_1 = m_2$$

CONTOH 1.3 : Garis $l_1: 2x + 3y = 1$ dan $l_2: y = (p + 1)x + 3$, diketahui ($l_1 // l_2$). Tentukan nilai p !

$$l_1 : 3y = -2x + 1$$

$$y = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$$

$$m_1 = -\frac{2}{3}$$

$$l_2: y = (p + 1)x + 3$$

$$m_2 = p + 1$$

Karena sejajar maka $m_1 = m_2$

$$-\frac{2}{3} = p + 1$$

$$p = -\frac{2}{3} - 1$$

$$p = -\frac{5}{3}$$

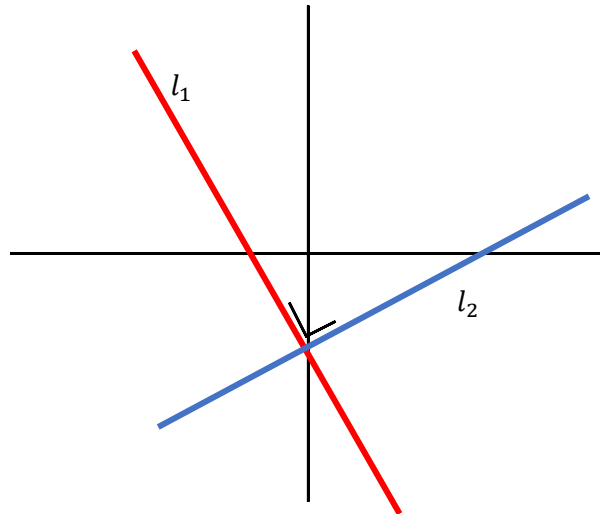
Diperoleh nilai

$$p = -\frac{5}{3}$$

3.2. Garis saling tegak lurus (\perp)

Garis l_1 dan l_2 dikatakan saling tegak lurus ($l_1 \perp l_2$) apabila $m_1 \cdot m_2 = -1$

CONTOH 1.4 [PM] : Diketahui dua garis l_1 dan l_2 saling tegak lurus berdasarkan gambar di bawah ini!



Tentukan apakah masing – masing dari pernyataan di bawah ini benar / salah!

- 1) $\frac{1}{m_1} = m_2$
- 2) $\frac{1}{m_1} = \frac{1}{m_2}$
- 3) $2m_1 > \frac{1}{m_2}$

Dari gambar diketahui bahwa l_1 memiliki persamaan $m_1(-)$ karena condong ke kiri dan $m_2(+)$ karena condong ke kanan. Maka $m_1 \cdot m_2 = -1$.

$$m_2 = \frac{-1}{m_1}$$

Untuk $m_1 < 0$, karena itu m_2 selalu positif.

Dari penyelesaian di atas diperoleh bahwa 1 benar, dan 2 salah

$$3) 2m_1 > \frac{1}{m_2} \rightarrow 2m_1 > \frac{1}{\frac{-1}{m_1}}$$

$$2m_1 > -m_1$$

HATI – HATI : Karena $m_1 < 0$ pernyataan di atas salah !

3.3. Garis berpotongan

Dua garis l_1 dan l_2 saling berpotongan, maka keduanya berpotongan pada saat l_1 dan l_2 .

CONTOH 1.5 : Garis $l_1: y = 3x + 2$ dan $l_2: y = 4x + 1$ berpotongan pada titik?

Karena l_1 dan l_2 saling berpotongan maka

$$3x + 2 = 4x + 1$$

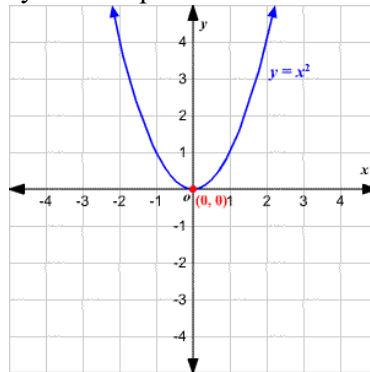
$$4x - 3x = 2 - 1$$

$$x = 1$$

Substitusikan ke salah satu persamaan $y = 3 \cdot 1 + 2 = 5$. Diperoleh titik potong pada (1,5).

B. Grafik Parabola

Bentuk persamaan kuadrat pada umumnya adalah $y = ax^2 + bx + c$ Visualisasi dari grafik persamaan kuadrat pada umumnya adalah parabola.



Sifat umum solusi persamaan kuadrat

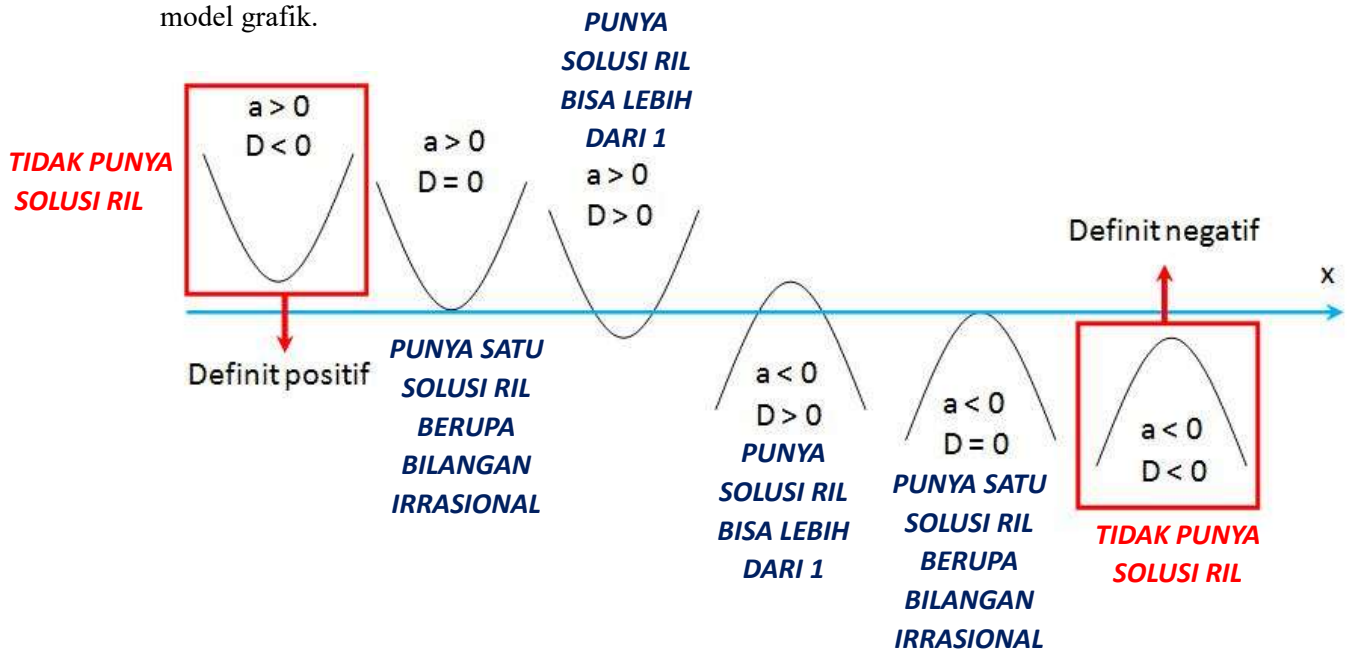
Misalkan suatu persamaan kuadrat $y = (x - p)(x - q)$ maka penyelesaiannya adalah $x = p$ atau $x = q$.

Jika dijabarkan akan menjadi

$$y = x^2 - qx - px + pq$$

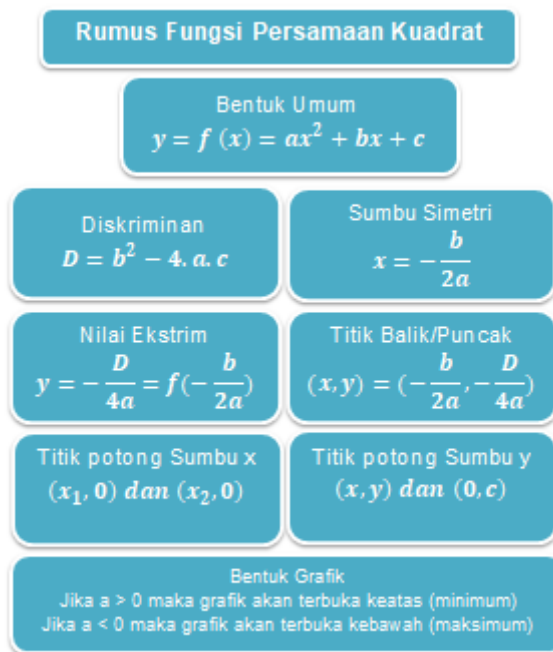
$$y = x^2 - (p + q)x + pq$$

Sehingga dari persamaan di atas dapat kita peroleh misalkan suatu persamaan kuadrat memiliki penyelesaian p dan q maka $p + q = -\frac{b}{a}$ dan $pq = \frac{c}{a}$. Di bagi dengan a karena persamaan di atas memiliki nilai $a = 1$. Nilai a bisa saja berubah dan akan menjadi penentu model grafik.



Di mana D adalah diskriminan untuk $D = b^2 - 4ac$

Menggambar grafik parabola



Misalkan persamaan kuadrat $y = ax^2 + bx + c$ untuk memodelkan grafiknya

- 1) Jika $D \geq 0$ tentukan titik potong terhadap sumbu-x dengan menyelesaikan persamaan
Misalkan penyelesaiannya adalah $x = p$ atau $x = q$, maka titik potong terhadap sumbu-x adalah $(p, 0)$ dan $(q, 0)$.
Jika $D < 0$ anda bisa langsung ke langkah berikutnya
- 2) Tentukan titik puncak yaitu $(-\frac{b}{2a}, -\frac{D}{4a})$
Kemudian tarik garis melengkung dari titik puncak memotong titik $(p, 0)$ dan $(q, 0)$ [Jika ada] menuju area tak hingga.

CONTOH 2.1 : Gambarkan grafik fungsi $y = x^2 - 3x + 2$

$$y = x^2 - 3x + 2$$

$$(x - 1)(x - 2) = 0$$

$$x = 1 \text{ atau } x = 2$$

$$a = 1$$

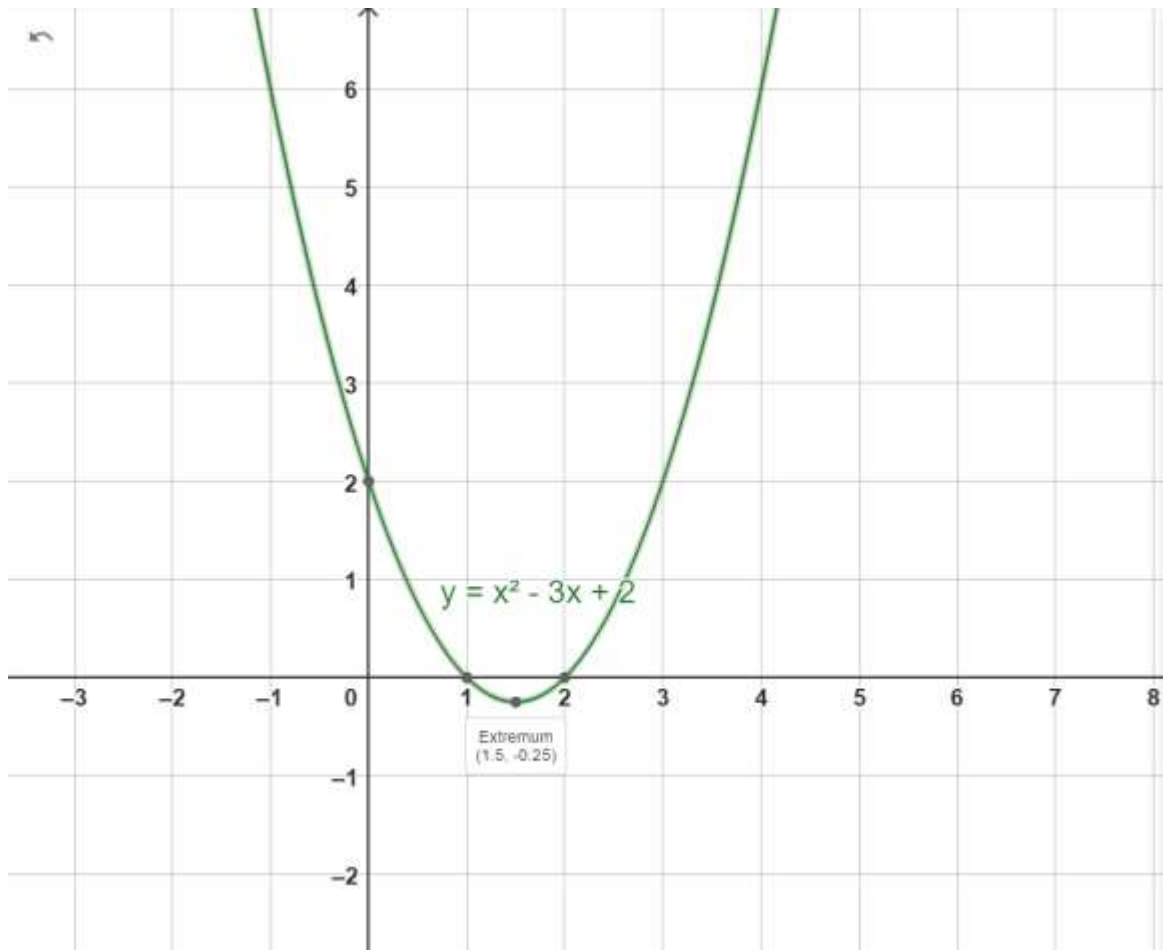
$$b = -3$$

$$c = 2$$

$$D = b^2 - 4ac$$

$$D = 9 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 1$$

- Titik potong terhadap sumbu-x adalah (1,0) dan (2,0)
- Titik puncak adalah $\left(-\frac{-3}{2}, -\frac{1}{4}\right) = \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{4}\right) = (1.5, -0.25)$.
 Karena $a > 0$ maka kurva terbuka ke-atas.



Hubungan Garis dan Kurva Parabola dibahas di pert – berikutnya setelah materi Kalkulus (Limit, Turunan, Integral) Ya!!! Hubungan mereka baik – baik aja kok 😊

C. Grafik Persamaan Lingkaran

Persamaan lingkaran dengan pusat (a, b) dan jari – jari r adalah :

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

Dalam Matematika umum kita pasti sudah mengerti bahwa :

- Jari – jari (r) = jarak dari titik pusat ke salah satu titik pada sisi lingkaran

- Diameter = 2 x jari – jari

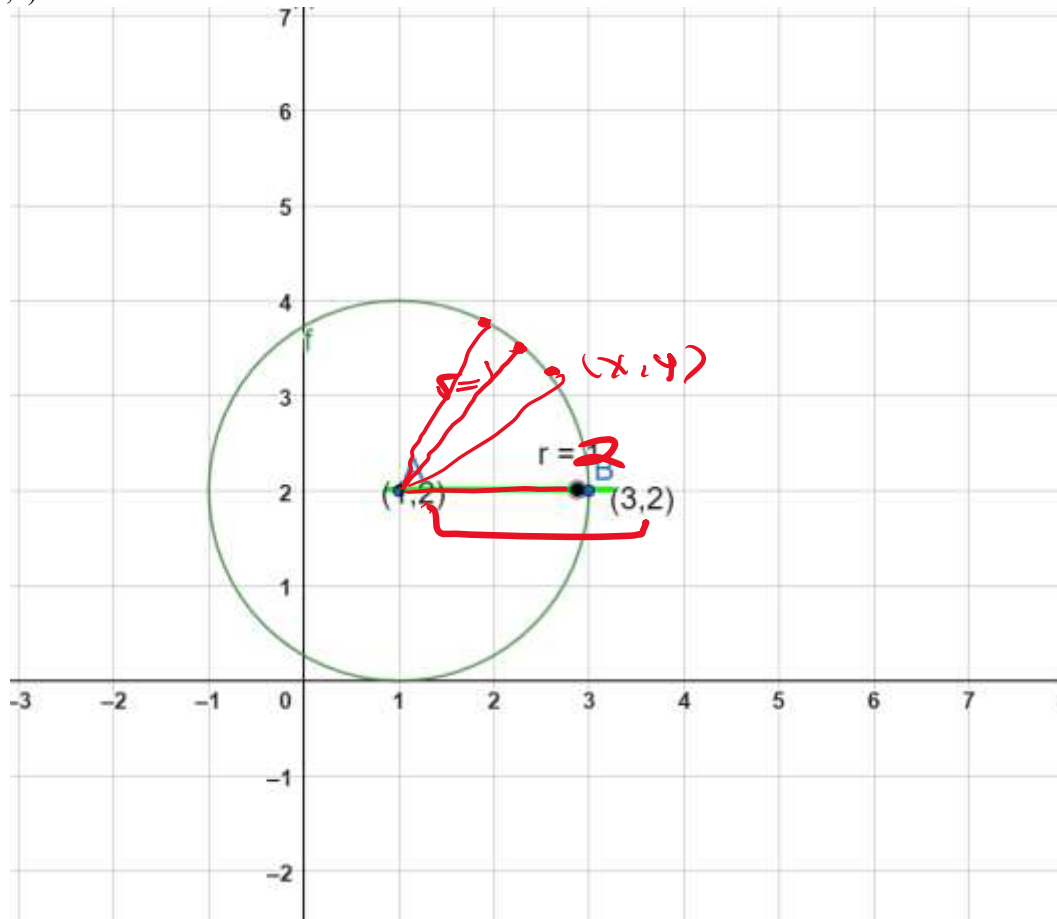
Sehingga dari pengetahuan dasar di atas kita dapat dengan mudah **menggambarkan grafik persamaan lingkaran dengan membuat sebuah lingkaran berpusat pada (a, b) dan buat jari – jari yang mudah dengan cara menghubungkan titik pusat ke suatu titik $(a+r, b)$**

CONTOH 3.1 : Gambarkan grafik persamaan lingkaran dengan pusat (1,2) dan jari – jari sebesar 2 satuan!

PENYELESAIAN : Dari soal di peroleh bahwa $a = 1, b = 2$ dan $r = 2$
 Berarti persamaan lingkarannya adalah $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 2^2$

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$$

Berarti lingkaran pusatnya pada (1,2) dan jari – jari kita tarik dari (1,2) ke (1+2,2) , (1,2) ke (3,2).



Persamaan umum lingkaran di atas bisa dirubah ke bentuk lain yang sering muncul pada soal.

Di mana jika kita jabarkan

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

Bisa menjadi bentuk

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

$$a = \frac{A}{-2}, b = \frac{B}{-2}$$

$$r^2 = a^2 + b^2 - c$$

Semisal diberi persamaan lingkaran dalam bentuk di atas

CONTOH 3.2 : Persamaan lingkaran $x^2 - 2x + y^2 - 4y + 1 = 0$ berpusat pada titik dan memiliki jari – jari sebesar?

$$x^2 - 2x + y^2 - 4y + 1 = 0$$

$$A = -2, B = -4, C = 1$$

$$a = \frac{A}{-2}$$

$$a = \frac{-2}{-2} = 1$$

$$b = \frac{-4}{-2} = 2$$

$$r^2 = 1 + 4 - 1 = 4 \rightarrow r = 2$$

Sehingga pusat lingkaran di atas adalah (1,2) dan jari – jari $r = 2$. Persamaan di atas jika dirubah ke bentuk lain adalah :

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$$

HUBUNGAN GARIS DAN LINGKARAN ITU MATEMATIKA SAINTEK YA GUYS

**LATIHAN SOAL : MENYUSUL, KITA FOKUS BAHAS SOAL PM YANG KEMARIN
DULU YAK!**