Teori Bilangan Review + Latihan Soal

GCD/LCM, Euclidean, Tau Function, Sigma, Faktorisasi, Modulo

4. Sisa pembagian $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \ldots + 99^3 + 100^3$ oleh 7 adalah...

5. Dua digit terakhir dari $43^{43^{2018}}$ adalah...

3. Dua orang sahabat, Pak Dengklek dan Pak Ganesh memiliki sejumlah kucing kesayangan yang tak terhingga jumlahnya dengan harga 465 satuan per ekornya. Sedangkan pak Dengklek memiliki milyaran ekor bebek yang setiap bebeknya bernilai 300 satuan. Keduanya melakukan transaksi dengan cara bertukar hewan. Sebagai contoh, jika pak Dengklek berhutang ke pak Ganesh sebesar 135 satuan, maka ia dapat membayar hutangnya dengan memberi pak Ganesh 2 ekor bebek dan mendapatkan sebuah kucing sebagai kembalian. Berapakah <u>pecahan transaksi terkecil</u> yang <u>dapat diselesaikan</u> dengan menggunakan cara pertukaran tersebut ?

P. DioPhanntine

$k = 0, 1, 2, 3, \ldots$

$$ax \pm by = \gcd(a,b)\,k$$

$$465x - 300y = \boxed{\ldots}$$ minimum ?

$\gcd(465, 300) * k = 1$

$\gcd(465, 300) = \ldots$?

4. Jika FPB dari a dan 2008 = 251. Jika a < 4036, maka nilai terbesar untuk a adalah...

a. 3263
b. 4016
c. 2259
d. . 3765
e. 3514

$$\gcd(2008, a) = 251$$

$$a \equiv 251k$$

$$251k \leq 4036$$

$$\frac{4036}{251} \quad k_{max} = \cancel{16}$$

$$251 \cdot 16 = \underline{4016}$$

$$\gcd(2008, 4016) = 2008$$

$$k = 15 \rightarrow \underline{3765}$$

Kita tahu bahwa bilangan prima adalah suatu bilangan yang memiliki tepat 2 bilangan pembagi positif. Didefinisikan F-Primes adalah suatu bilangan yang memiliki tepat 5 bilangan pembagi positif. Berapa banyakkah bilangan F-Primes dari 1-1000 (inklusif)?

Bil Pangkat 4 $\leq$ 1000

$= \{\cancel{1^4}, 2^4, 3^4, \cancel{4^4}, 5^4\} \rightarrow$ ~~5 bilangan~~ 3 bilangan

Factorize $n = \prod . p_i^{e_i}$ → bil. prima

$f(n) = \prod (e_i + 1)$

$f(n) = 5 \rightarrow (1)(5) \rightarrow (4+1)$

Faktorisasi $n = p_i^4$ = prima

$n = \{p_i^4 \mid 1 \leq p_i \leq 1000\}$

Berapakah hasil 27^{2016} mod 26? $= 1$

$a^x \bmod a-1 = 1$

9. Terdapat 2 bilangan, yaitu 720000 dan 262144. Berapa banyak bilangan berbeda yang membag
habis kedua bilangan tersebut?

gcd / FPB

720.000

2 360.000

$* \; 720.000 = 72 \cdot 10^4$

$= 2 \cdot 36 \cdot (2.5)^4$

$10 = 2.5$

$= 2 \cdot 6^2 \cdot 2^4 \cdot 5^4$

$= 2 \cdot (2.3)^2 \cdot 2^4 \cdot 5^4$

$= 2^1 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 2^4 \cdot 5^4$

$= 2^7 \cdot 3^2 \cdot 5^4$

$* \; 262144 = 2^{18}$

$\tau(\gcd(720.000, 262.144))$

$\tau(2^7) = (7+1) = 8$ //

Ido berulang tahun ke-20 pada hari Kamis, 13 Oktober 2016. Pada hari apakah Ido lahir?

Bilangan < Komposit
Prima

B. Komposit = hasil perkalian bbrp bil. prima

$16 = 2 \cdot 8$

$= \underline{2} \cdot \underline{2} \cdot \underline{2} \cdot \underline{2} = \underline{2}^4$ ↳ prima

$24 = 3 \cdot 8 = \underline{3} \cdot \underline{2}^3$ ↳ prima

Faktorisasi **Prima**

- Menghitung banyak faktor dari suatu bilangan (tau Function)

$$\text{Faktor } \underline{20} = \underbrace{\{1, 2, 4, 5, 10, 20\}}_{\text{sebanyak 6 faktor}}$$

$f(n)$ = banyak faktor / pembagi dari n

$f(20) = 6 \to$ banyak faktor 20

Faktorisasi Prima $\to p_1^{e_1} \times p_2^{e_2} \times \cdots \times p_i^{e_i}$

$$f(n) = \prod (e_i + 1)$$

$\tau(20) = \ldots ?$

$20 = 2^{\overset{e_1}{2}} \cdot 5^{\overset{e_2}{1}}$

$\tau(20) = (2+1)(1+1)$

$= 3 \cdot 2$

$= 6$ → Banyak Faktor dari

Kita ingin membeli barang seharga 48862, Revan ingin belanja menggunakan satu jenis pecahan uang saja, ada berapa banyak cara Revan membayar belanjaannya tersebut? → $\tau(48862)$

$$48862 = 2 \cdot 11 \cdot 2221$$

$$f(48862) = (1+1)^3$$

$$= 8$$

Banyak Faktor dari suatu bilangan = Jumlah Faktor dari suatu bilang
!= Hasil Jumlah faktor dari suatu bilangan

- Hasil Jumlah Faktor dari Suatu Bilangan

Faktor 20 = {1, 2, 4, 5, 10, 20}

$\sum$ Faktor = 1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 20

= 42 //

$\sum$ Faktor (n) = $\sigma(n)$

$\sigma(20) = 42$

$\sigma(n) = \prod \left(\sum_{k=0}^{e_i} (p_i^k) \right)$

Faktorisasi 20 $= \underset{p_1}{\underline{2}}^{\overset{e_1}{2}} \cdot \underset{p_2}{\underline{5}}^{\overset{e_2}{1}}$

$$\sigma(20) = (2^0 + 2^1 + 2^2) \times (5^0 + 5^1)$$

$$= (1 + 2 + 4) \times (1 + 5)$$

$$= 7 \times 6$$

$$= 42$$

```
int N; cin>>N;
int ret = 0;
(1) for(int i = 1; i<=N; i++){
   if(N % i == 0){
       ret++;
   }
}
```

$\tau(178)$

```
int N; cin>>N;
int ret = 0;
(2) for(int i = 1; i<=N; i++){
   if(N % i == 0){
       ret+=i;
   }
}
```

$\sigma(178)$

N = 178

(1) dan (2)?

$$\sigma(178) = (2^0+2) \times (89^0+89) = 3 \times 90 = \underline{270}$$

$$178 = 2 \cdot 89$$

$$\tau(178) = (1+1)(1+1) = \underline{4}$$

GCD Euclid Algorithm

gcd (a, b) = b if a == 0

gcd (a, b) = a if b == a

gcd (a, b) = 1 if a, b Relatif Prima

gcd (a, b) = gcd (b mod a, a)

↳ b ≥ a

Fermat Little Theorm

$$a^{p-1} \bmod p = 1 \quad \text{(p is prime)}$$

$$8765449311115421^{2010} \bmod 2011 = 1$$

$$+\infty^{2010} \bmod 2011 = 1$$

$$a^{x} \bmod (a-1) = 1$$

$$(a \bmod (a-1))^{x} = (1)^{x}$$

$$= \underline{\underline{1}}$$

C.R.T Fundamental

$$x \bmod N \equiv c$$

$$x \equiv x_k \pmod{N}$$

$$x \equiv c \pmod{N}$$

$$x_k \equiv c \pmod{N}$$

$$\underline{x_k + c} \bmod N \equiv c$$

$k = (0, 1, 2, 3, 4, \ldots)$