

SOAL SET 7

A. Bagian Isian

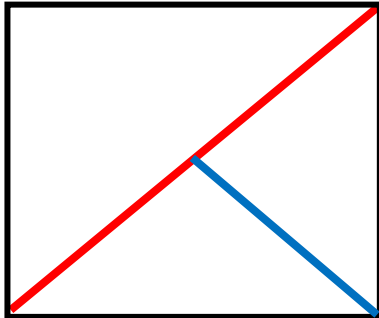
1. Kwok mempunyai sebuah persegi yang nantinya akan ia gambar beberapa garis lurus.



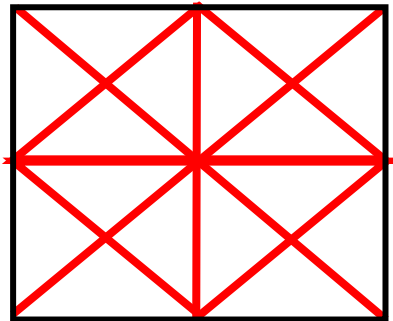
Ia akan membuat garis lurus pada persegi dengan cara sebagai berikut :

- Menghubungkan satu pasangan sudut, atau
- Menghubungkan salah satu sudut yang ada dengan titik tengah suatu garis

Ini adalah contoh gambar yang bisa ia buat :

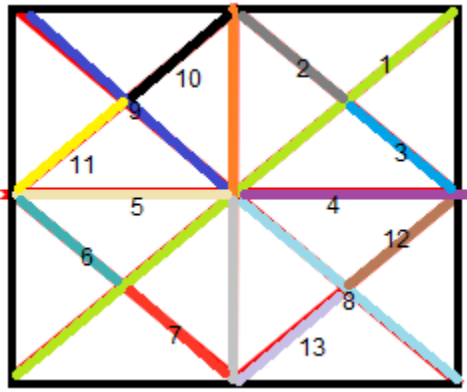


Jika ia ingin menggambar bangun di bawah ini



Berapa banyak garis lurus maksimum yang ia gambar?

Jawaban : 15



Ditambah garis oranye dan abu – abu di tengah menjadi 15. (saya lupa tandain maaf 😊)

2. Terdapat sebuah pulau yang terdiri dari 6 kota. Setiap kota dihubungkan oleh jalan. Ada 10 jalan yang menghubungkan kota-kota tersebut. Jika dihapus satu jalan, maka pulau tersebut terbagi menjadi 2 bagian. Berapa jumlah jalan yang harus dihapus sehingga pulau tersebut terbagi menjadi 3 bagian? **{jawaban hanya angka bulat}**

Jawaban : 8

Karena setiap jalan raya hanya menghubungkan 2 titik, maka kota tersebut membentuk suatu graf sederhana dengan 8 titik dan 7 tepi. Dari syarat soal, diketahui bahwa jika ada 2 jalan raya yang terhubung, maka ada setidaknya satu jalan raya yang melintasi keduanya. Oleh karena itu, kota tersebut membentuk suatu graf planar. Menurut teorema Euler, dalam graf planar dengan n titik, m tepi, dan f daerah, berlaku $n - m + f = 2$. Dalam hal ini, $n=8$ dan $m=7$, sehingga $f = 3$. Dalam graf planar, daerah merupakan bagian dari bidang yang dibatasi oleh tepi-tepi. Karena kota tersebut memiliki 3 daerah, maka jumlah tepi maksimum yang dapat dibangun adalah $m + f - 2 = 8$.

3. Suatu hari, Pak Ghanesh sedang mencari pola dalam sebuah barisan bilangan. Dia menemukan sebuah barisan bilangan dengan pola yang cukup unik. Barisan tersebut dimulai dengan angka 1 dan setiap angka selanjutnya dihitung dengan cara sebagai berikut: jika angka sebelumnya memiliki n digit, maka angka selanjutnya adalah jumlah dari n digit terakhir pada angka sebelumnya yang diurutkan secara menurun. Misalnya, angka ke-3 adalah 111 dan angka ke-4 adalah 2211. Tentukan suku ke-10 dari barisan bilangan tersebut **{jawaban hanya angka bulat}**

Jika diperhatikan pola bilangannya adalah :

- Angka ke-2 adalah 11, karena angka sebelumnya (1) memiliki 1 digit dan ditulis ulang 1 kali secara menurun.
- Angka ke-3 adalah 111, karena angka sebelumnya (11) memiliki 2 digit dan ditulis ulang 2 kali secara menurun.
- Angka ke-4 adalah 2211, karena angka sebelumnya (111) memiliki 3 digit dan digit terakhirnya adalah 1, sehingga digit 2 dan 1 ditulis ulang secara menurun.
- Angka ke-5 adalah 3211, karena angka sebelumnya (2211) memiliki 4 digit dan digit terakhirnya adalah 1, sehingga digit 3, 2, dan 1 ditulis ulang secara menurun.
- Angka ke-6 adalah 321111, karena angka sebelumnya (3211) memiliki 5 digit dan digit terakhirnya adalah 1, sehingga digit 3, 2, dan 1 ditulis ulang secara menurun.
- Angka ke-7 adalah 421111, karena angka sebelumnya (321111) memiliki 6 digit dan digit terakhirnya adalah 1, sehingga digit 4, 2, dan 1 ditulis ulang secara menurun.

- Angka ke-8 adalah 521111, karena angka sebelumnya (421111) memiliki 6 digit dan digit terakhirnya adalah 1, sehingga digit 5, 2, dan 1 ditulis ulang secara menurun.
 - Angka ke-9 adalah 521211, karena angka sebelumnya (521111) memiliki 6 digit dan digit terakhirnya adalah 1, sehingga digit 2, 1, dan 1 ditulis ulang secara menurun.
 - Angka ke-10 adalah 621211, karena angka sebelumnya (521211) memiliki 6 digit dan digit terakhirnya adalah 1, sehingga digit 6, 2, dan 1 ditulis ulang secara menurun.
4. Terdapat 3 buah titik (0,0) (2,3) (4,0) yang terhubung membentuk segitiga sama sisi. Berapa banyak garis yang bisa dibentuk sehingga garis tersebut melintasi tepat salah satu titik dan pertengahan salah satu sisi segitiga? **{jawaban berupa angka bulat}**

Jawaban : 3

Sama saja dengan mencari garis potong segitiga sama sisi jika dirotasi.

5. Pada suatu hari, terdapat dua pemain, A dan B, yang akan memainkan sebuah permainan. Permainan ini dimainkan dengan cara berikut:
- Terdapat sebuah kotak dengan 10 kelereng di dalamnya.
 - Setiap pemain secara bergantian mengambil beberapa kelereng dari kotak tersebut. Jumlah kelereng yang diambil minimal 1 dan maksimal 4 kelereng.
 - Pemain yang mengambil kelereng terakhir dianggap sebagai pemenang.
- Namun, setiap pemain memiliki strategi yang berbeda dalam memainkan permainan ini. Pemain A bermain secara acak, dia mengambil jumlah kelereng yang diinginkannya secara acak. Sedangkan pemain B lebih pintar, dia selalu mengambil kelereng sedemikian rupa sehingga jumlah kelereng yang tersisa di dalam kotak merupakan kelipatan dari 5. Berapakah jumlah kelereng yang harus diambil oleh pemain A agar memaksimalkan peluang kemenangannya? **{jawaban berupa angka bulat}**

Jawaban : 2

Untuk mencari jumlah kelereng yang harus diambil oleh pemain A agar memaksimalkan peluang kemenangannya, kita perlu menganalisis strategi pemain B. Karena pemain B selalu mengambil kelereng sehingga jumlah kelereng yang tersisa di dalam kotak merupakan kelipatan dari 5, maka untuk mencapai tujuan ini, pemain B harus selalu mengambil kelereng sebanyak 4 atau 3, sehingga jumlah kelereng yang tersisa di dalam kotak setelah setiap gilirannya adalah 6, 7, 8 atau 9.

Dengan mempertimbangkan strategi pemain B, maka jumlah kelereng yang harus diambil oleh pemain A agar memaksimalkan peluang kemenangannya adalah 2 kelereng. Karena jika pemain A mengambil 1 atau 3 kelereng, maka pemain B dapat mengambil kelereng sehingga jumlah kelereng yang tersisa di dalam kotak merupakan kelipatan dari 5, sehingga pemain B akan memenangkan permainan. Namun jika pemain A mengambil 2 kelereng, maka setelah gilirannya, jumlah kelereng yang tersisa di dalam kotak menjadi 8. Pemain B hanya bisa mengambil 2 atau 3 kelereng, sehingga jumlah kelereng yang tersisa di dalam kotak setelah gilirannya menjadi 5 atau 6. Dalam kedua kasus tersebut, pemain A dapat memenangkan permainan.

6. Seorang detektif yang harus memecahkan misteri di sebuah rumah mewah. Ada lima orang yang tinggal di dalam rumah: Mr. Green, Mrs. White, Miss Scarlet, Colonel Mustard, dan Professor Plum. Ada juga lima warna ruangan di dalam rumah: hijau, putih, merah, kuning, dan ungu. Detektif tahu bahwa setiap orang tinggal di ruangan yang berbeda, dan setiap ruangan hanya ditempati oleh satu orang. Detektif juga tahu warna favorit setiap orang. Mereka adalah:

- Mr. Green: kuning
- Mrs. White: putih
- Miss Scarlet: merah
- Colonel Mustard: ungu
- Professor Plum: hijau

Detektif memasuki rumah dan menemukan sebuah catatan yang tergeletak di meja depan. Catatan itu berisi petunjuk untuk memecahkan misteri. Setiap petunjuk memiliki dua pernyataan. Satu pernyataan mengatakan kebenaran tentang orang-orang yang tinggal di ruangan-ruangan yang berbeda, dan yang lainnya mengatakan kebenaran tentang warna ruangan-ruangan tersebut.

Petunjuk-petunjuk tersebut adalah sebagai berikut:

Colonel Mustard tinggal di ruangan merah atau ungu.

- Ruangan hijau tidak ditempati oleh Mrs. White atau Colonel Mustard.
- Miss Scarlet tidak tinggal di ruangan merah.
- Mr. Green tinggal di ruangan kuning.
- Mrs. White dan Miss Scarlet tidak tinggal di ruangan hijau.
- Colonel Mustard dan Professor Plum tidak tinggal di ruangan putih.
- Mrs. White tinggal di ruangan yang bersebelahan dengan Colonel Mustard.
- Ruangan kuning bukanlah ruangan favorit dari Miss Scarlet atau Colonel Mustard.

Detektif harus menentukan siapa yang tinggal di ruangan mana dan warna apa dari ruangan tersebut. Berdasarkan petunjuk-petunjuk tersebut, siapa yang tinggal di ruangan ungu?

- A. Miss Scarlet
- B. Colonel Mustard
- C. Professor Plum
- D. Mrs. White
- E. Mr. Green

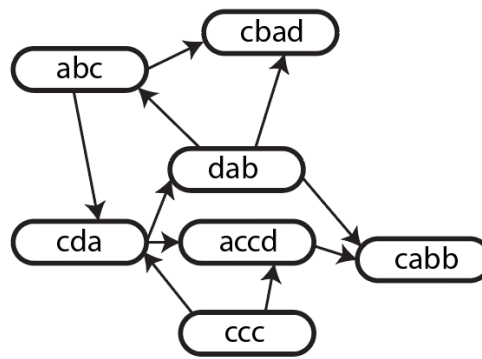
{jawaban berupa huruf kapital}

Jawaban : A

Pernyataan 1 memberi tahu kita bahwa Colonel Mustard tinggal di ruangan merah atau ungu. Juga, ruangan hijau tidak ditempati oleh Mrs. White atau Colonel Mustard. Oleh karena itu, Mrs. White tidak dapat tinggal di ruangan hijau, sehingga ruangan tersebut harus ditempati oleh Professor Plum atau Miss Scarlet.

Pernyataan 2 memberi tahu kita bahwa Miss Scarlet tidak tinggal di ruangan merah. Dan pernyataan 4 memberi tahu kita bahwa ruangan kuning bukanlah ruangan favorit dari Miss Scarlet atau Colonel Mustard. Oleh karena itu, Miss Scarlet harus tinggal di ruangan putih atau ungu. Jika dia tinggal di ruangan putih, maka Colonel Mustard harus tinggal di ruangan ungu. Tetapi pernyataan 1 memberi tahu kita bahwa Colonel Mustard tinggal di ruangan merah atau ungu, sehingga dia tidak dapat tinggal di ruangan ungu jika Miss Scarlet tinggal di ruangan putih. Oleh karena itu, Miss Scarlet harus tinggal di ruangan ungu.

7. Perhatikan gambar di bawah ini!



Pak Dengklek ingin membentuk kalimat dengan penyusunnya adalah berdasarkan diagram di atas. Tanda panah yang menghubungkan kata penyusun berarti kata tersebut mendahului kata berikutnya pada kalimat. Misal kalimat yang bisa dibentuk adalah **abccdaaccdcab**. Berdasarkan diagram di atas, jika kata yang dimuat dalam kalimat tidak boleh berulang misal **abccdaabccda**. Tuliskan satu string terpanjang yang bisa dibentuk! **{berbentuk satu string berurutan dan tidak dalam kapital}**

Jawaban : dababccdaaccdcab

Lakukan Breadth First Search (BFS) namun sebagai optimalisasi kita bisa telusuri mulai dari node yang mempunyai derajat keluar paling banyak dan memastikan untuk tidak memeriksa node yang tidak mempunyai derajat keluar seperti **cabb** dan **cbad**

8. Pak Dengklek mempunyai dua buah mesin pencetak kertas. Mesin pencetak pertama bisa menghasilkan tiga kali dari bobot bahan yang dimasukkan, namun lima di antaranya adalah kertas rusak dan harus dibuang. Mesin pencetak kedua bisa menghasilkan dua kali lebih banyak dari hasil mesin pencetak pertama saat bobot yang dimasukkan pada mesin pencetak pertama dua kurangnya dari mesin pencetak kedua, namun tiga di antaranya ada kertas rusak. Berapa bobot bahan yang dimasukkan sehingga kedua mesin pencetak pertama mempunyai hasil cetak kertas yang sama? **{jawaban berbentuk pecahan a/b dengan fpb(a,b) = 1}**

Jawaban : 20/3

Misalkan bobot bahan yang dimasukkan adalah x .

Maka fungsi matematis mesin pencetak pertama adalah $f(x) = 3x - 5$. Fungsi matematis mesin pencetak kedua adalah $g(x) = 2f(x - 2) - 3$.

$$f(x - 2) = 3(x - 2) - 5 = 3x - 6 - 5 = 3x - 11$$

$$g(x) = 2(3x - 11) - 3 = 6x - 22 - 3 = 6x - 25$$

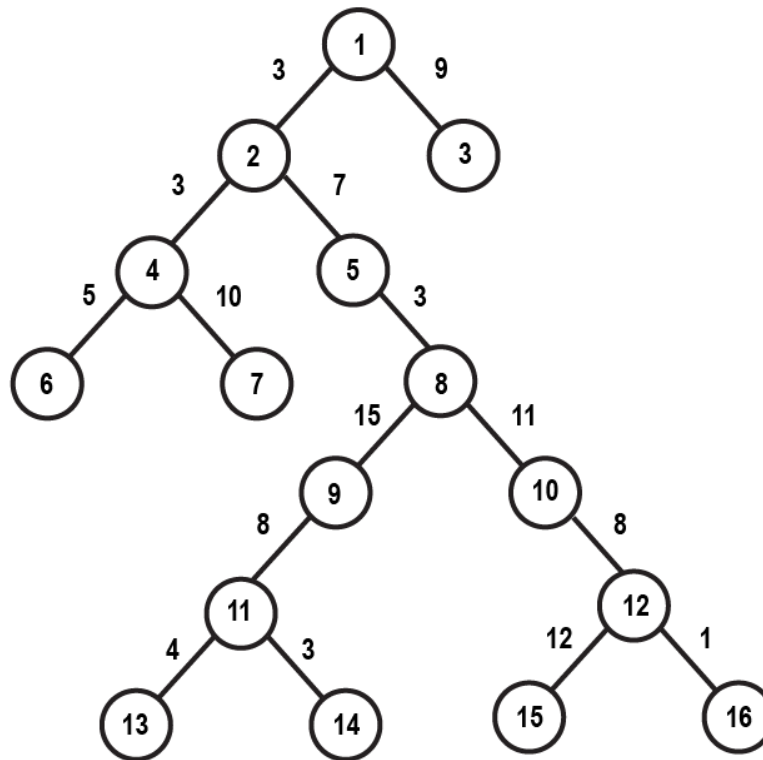
$$f(x) = g(x)$$

$$3x - 5 = 6x - 25$$

$$3x = 20$$

$$x = 20/3$$

9. Perhatikan gambar di bawah ini



Di kandang bebeknya Pak Ghanesh ada 16 bebek yang ia pelihara. Gambar di atas menunjukkan pengurutan bebek Pak Ghanesh dari yang tertua hingga ke yang termuda. Angka yang tertera menunjukkan perbedaan usia antar dua bebek. Misalnya bebek ke-10 lebih tua 8 tahun dari bebek ke-12. Tentukan berapa selisih usia Bebek 15 dan bebek 7! **{Jawaban hanya angka}**

Jawaban : 28

Pembahasan :

$$\text{Usia 1} - \text{Usia 7} = 3 + 3 + 10 = 16$$

$$\text{Usia 1} - \text{Usia 15} = 44$$

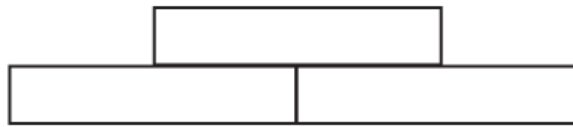
$$\text{Usia 1} = 44 + \text{Usia 15}$$

$$(44 + \text{Usia 15}) - \text{Usia 7} = 16$$

$$44 + \text{Usia 15} - \text{Usia 7} = 16$$

$$\text{Usia 15} - \text{Usia 7} = |16 - 44| = 28$$

10. Pak Chanek mempunyai 3 buah batu bata ia tahu bahwa ini bisa ditumpuk sehingga berbentuk piramid .



Pada lapisan pertama piramid yang ia bentuk disusun oleh 2 buah batu bata. Jika Pak Chanek menyusun 1275 buah batu bata. Tentukanlah jumlah batu bata lapisan ke-20 sampai lapisan ke 30! {Jawaban hanya angka}

Jawaban : 286

Perhatikan ini sama saja dengan pola bilangan segitiga
1,3,6, ...

Di mana $U_n = \frac{1}{2}n \times (n+1)$.

$$\frac{1}{2}n \times (n+1) = 1275$$

n yang memenuhi adalah 50.

Pada lapisan pertama akan dimuat sebanyak n batu bata , lapisan ke dua ada n – 1 batu bata, dst ... (Jumlah batu bata pada lapisan ke k adalah n – k + 1 .

Sehingga jumlah batu bata pada lapisan ke 20 sampai 30 adalah

$$31 + 30 + 29 + 28 + 27 + 26 + 25 + 24 + 23 + 22 + 21 = 286.$$

B. Bagian Soal Cerita

OSN Tahun Ini *Offline*

Batas Memori : 1MB

Batas Waktu : 1 Detik

Deskripsi Soal

Akhirnya setelah Pandemi berlalu, pelaksanaan Olimpiade Sains Nasional (OSN) tahun ini diselenggarakan secara *offline* / berlangsung di tempat terbuka lebih tepatnya di Kabupaten Bogor, Jawa Barat. Tentunya rangkaian acara OSN tidak hanya berkompetisi, tapi juga akan ada wisata bersama seluruh peserta OSN lainnya. Dalam wisata edukasi kali ini Panitia membutuhkan N orang pemandu yang akan memandu X orang peserta. Setiap peserta harus memilih satu dari beberapa pemandu yang tersedia dan harus mengikuti pemandu tersebut. Tidak ada pemandu yang tidak memandu pesertanya, sehingga nantinya akan terbentuk beberapa kelompok wisata dengan pemandunya masing – masing.

Pembahasan :

Permasalahan di atas adalah menentukan banyaknya pemetaan dari A ke B , untuk A adalah himpunan semua pemandu dan B adalah himpunan semua peserta. Di sini kita dapat tentukan $n(A) = N$ dan $n(B) = X$. Banyaknya pemetaan adalah $n(A)^{n(B)} = N^X$. Namun sesuai syarat di mana **Setiap peserta harus memilih satu dari beberapa pemandu yang tersedia dan harus mengikuti pemandu tersebut. Tidak ada pemandu yang tidak memandu pesertanya.** Tidak boleh satu pemandu memandu semua orang , sehingga kita akan mengurangi dengan kasus di mana untuk X peserta seluruhnya terpetakan ke salah satu anggota A atau salah satu pemandu saja ada sebanyak N kasus.

Sehingga untuk menentukan banyaknya konfigurasi kelompok wisata yang mungkin terbentuk adalah sebanyak $N^X - N$.

1. Jika $N = 3$, dan $X = 9$. Tentukan banyaknya konfigurasi kelompok wisata yang mungkin terbentuk! **{jawaban berupa angka}**

Pembahasan :

Jawaban : $3^9 - 3 = 19680$

2. Untuk 2023 orang pemandu, berapa minimal nilai X sehingga bisa dibentuk kelompok Wisata yang sesuai?

Jawaban : 2023

Agar bisa dibentuk kelompok yang sesuai minimal $X = N$ (sehingga setiap pemandu bisa memandu minimal satu orang)

3. Untuk $N = 2023$, $X = 99$, misalkan M adalah banyak konfigurasi kelompok wisata yang mungkin terbentuk. Tentukanlah nilai $M \bmod 11$!

Jawaban :

$$2023^{99} - 2023 \bmod 11 = ((2023 \bmod 11)^{99} \bmod 11 - 2023 \bmod 11) \bmod 11 = 0$$

4. **Membuat Program sederhana**

Buatlah program menggunakan bahasa C/C++ untuk membantu menjawab pertanyaan di atas.

Format Masukan

Baris pertama berisi bilangan bulat T yang menyatakan banyaknya kasus uji.

T barisnya berisikan setiap kasus uji yang memuat dua buah bilangan bulat positif N dan X .

Format Keluaran

Terdiri dari T jawaban yang menyatakan penyelesaian banyak konfigurasi kelompok wisata yang mungkin terbentuk untuk setiap kasus uji *dimodulo dengan* 10^9 .

Contoh Masukan	Contoh Keluaran
3	1
1 2	6
2 3	78
3 4	

Penjelasan Contoh 1 :

1 orang pemandu hanya bisa membentuk satu kelompok yang terdiri dari 2 orang

Penjelasan Contoh 2 :

2 orang pemandu bisa membentuk 6 konfigurasi kelompok

Contoh konfigurasinya adalah Pemandu pertama memandu 2 orang siswa misalkan A dan B dan pemandu kedua memandu 1 orang siswa yaitu C. Pemandu pertama memandu 2 orang siswa misalkan A dan C dan pemandu kedua memandu 1 orang siswa yaitu B, dan seterusnya.

Batasan

Untuk kasus uji berlaku

- $1 \leq T \leq 10^{12}$
- $1 \leq N \leq 10^9$
- $N \leq X \leq 10^9$

50% kasus uji berlaku

- $1 \leq T \leq 10^3$
- $1 \leq N, X \leq 10^6$

Solusi :

Kita bisa gunakan pemangkatan dengan metode divide and conquer namun setiap faktorisasi kita langsung memodulo dengan 10^9 untuk mencegah *overflow* dan TLE.

```

#include <bits/stdc++.h>

using namespace std;
long long T,N,X,MOD = 1000000000;

long long pangkat(long long x,long long y){
    int temp;
    if (y == 0)
        return 1;
    temp = pangkat(x, y / 2);
    if (y % 2 == 0)
        return (temp%MOD * temp%MOD)%MOD;
    else
        return (x%MOD * temp%MOD * temp%MOD)%MOD;
}

void solve(){
    if(X<N){
        cout<<0<<endl;
    }else if(N == 1){
        cout<<1<<endl;
    }
    else{
        long long res = (pangkat(N,X) - N%MOD)%MOD;
        cout<<res<<endl;
    }
}

int main()
{
    cin>>T;
    while(T--){
        cin>>N>>X;
        solve();
    }

    return 0;
}

```

Kompleksitas : $O(\log N)$