

$$\underline{P(n,r) = n * P(n-1, r-1)}$$

Permasalahan  
Solusinya apa?

Permasalahan  
Solusinya ada berapa yang memungkinkan?

$$P(6,2) = 6 * P(5,1)$$

$$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$
$$P(6,2) = \frac{6!}{(6-2)!} = \frac{6!}{4!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4!}{4!} = 6 \cdot 5!$$

if  $c(n=r) = P(n,n) = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!$

# Pengantar Kombinatorika

$$\frac{n \times (n-1)!}{(n-1)!}$$

By Abdan Hafidz

$$\text{if } c(r=1) \quad P(n,r) = \frac{n!}{(n-1)!} = n$$

Permasalahan : Kalian mau mendapatkan predikat apa di OSN 2025 ada berapa banyak cara?  
4 cara -> Emas, Perak, Perunggu, Tidak mendapatkan sama sekali

Permasalahan Kombinatorika : Menghitung ada berapa banyak konfigurasi penyelesaian / solusi untuk suatu masalah

- Kaidah Berhitung : Aturan Penjumlahan, Perkalian, dan Pengurangan (Komplementer)
- Prinsip Inklusi - Eksklusi
- Pigeonhole Principle (PhP)
- Permutasi : Permutasi Unsur berbeda, Permutasi Unsur Berulang, Permutasi Siklis
- Kombinasi : Kombinasi Unsur Berbeda, Kombinasi Unsur Berulang (Stars and Bars)
- Pengantar Peluang

## Aturan Penjumlahan

$$K_1 \cancel{\wedge} \quad K_2 \cancel{\wedge} \\ K_3 \cancel{\wedge} \dots \cancel{\wedge} \quad K_n$$

Kejadian  
Kemungkinan  
Sampel  
Percobaan

- \* antar Kejadian tdk memiliki insar
- \* antar Kejadian tdk saling berkaitan - Mempengaruhi

$$|A| = |K_1| + |K_2| + \dots + |K_n|$$

# Aturan Penjumlahan

Di suatu sekolah terdiri dari 5 ruang kelas X ( $X-1$ ,  $X-2$ ,  $X-3$ ,  $X-4$ , dan  $X-5$ ), kelas  $X-1$  terdiri dari 20 murid, kelas  $X-2$  terdiri dari 15 murid,  $X-3$  terdiri dari 17 murid,  $X-4$  dan  $X-5$  terdiri dari 10 murid.

Jika dari masing – masing kelas akan dipilih satu orang perwakilan untuk mengikuti rapat Hokage OSIS ada berapa banyak caranya?

$$\begin{aligned}k_1 &= x_1 \quad \text{Memilih 1 orang dari 20 orang} \\k_2 &= x_2 \quad \text{Memilih 1 orang dari 15 orang} \\&\vdots \\k_5 &= x_5 \quad \text{, , , dan 10 murid}\end{aligned}$$

Semua kelas tidak boleh Menganggu kelas

Lainnya

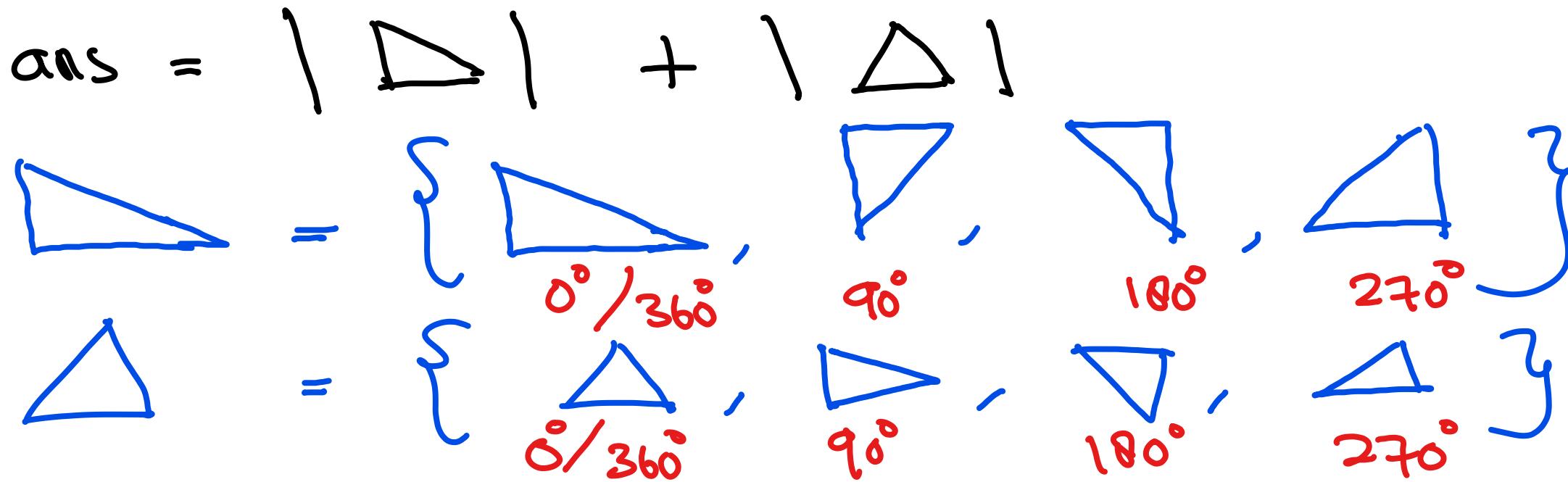
$$\text{ans} = 20 + 15 = \frac{72}{72}$$

$$+ 17 + 10 + 10 \quad \text{cara}$$

# Aturan Penjumlahan

” atau  $\rightarrow (+)$   
” dan  $\rightarrow (\times)$

Pak Dengklek menggambar sebuah segitiga pada selembar kertas, ia memiliki pilihan untuk menggambar sebuah segitiga siku – siku atau segitiga sama kaki, ia bisa saja menggambar segitiga dengan cara membuat variasi rotasinya  $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ, 360^\circ$ , ada berapa banyak gambar berbeda yang mungkin dihasilkan?



$$\text{ans} = 1 + 1 = \underline{\underline{8}}$$

# Aturan Penjumlahan

Perhatikan potongan program di bawah ini!

$$ans = \frac{(99+1)^{50} \cdot 99}{2} = 1950$$

$N=100$

```
while(N--) {  
    for(int i = 1; i<=N; i++) {  
        cout<<"kwak "<<endl;  
    }  
}
```

$N=99 \rightarrow$  cout kwak qq x  
 $N=98 \rightarrow$  cout kwak q8 x  
 $\vdots$   
 $N=0 \rightarrow$  cout lagi

Ada berapa banyak string "kwak" yang dihasilkan jika  $N = 100$

$N=10 \rightarrow$  while ( $N=10-1=9$ ) {  
loop dan ..... } sampai (...) = False  
 $N-1 \rightarrow 0$  } sebanyak N  
while (...) stop ketika { ... } False  
soalnya terus jalankan loop

$$\text{Total kwak} = 99 + 98 + 97 + 96 + \dots + 1$$

$$\begin{aligned}N &= 9 \\N &= 8\end{aligned}$$

$$\text{Sampai } (\dots) = \text{False}$$

$$N = 7$$

$$\vdots$$

$$N = 0 \quad \underline{\text{False}}$$

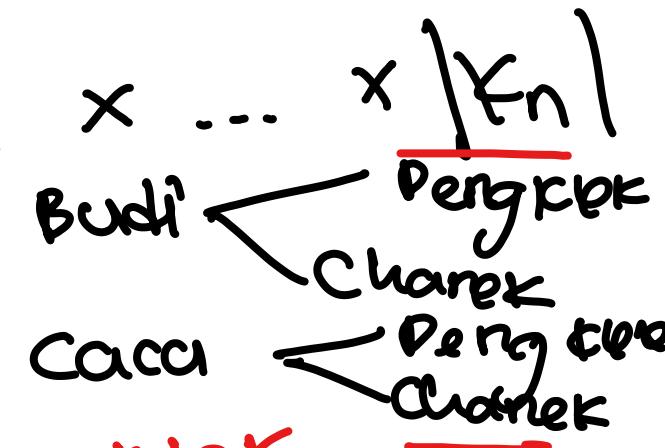
9  
8  
7  
6  
5  
4  
3  
2  
1  
ada 10 iterasi

# Aturan Perkalian

$$K_1 \cap K_2 \cap K_3 \cap \dots \cap K_n$$

$$\text{ans} = |K_1| \times |K_2| \times |K_3| \times \dots \times |K_n|$$

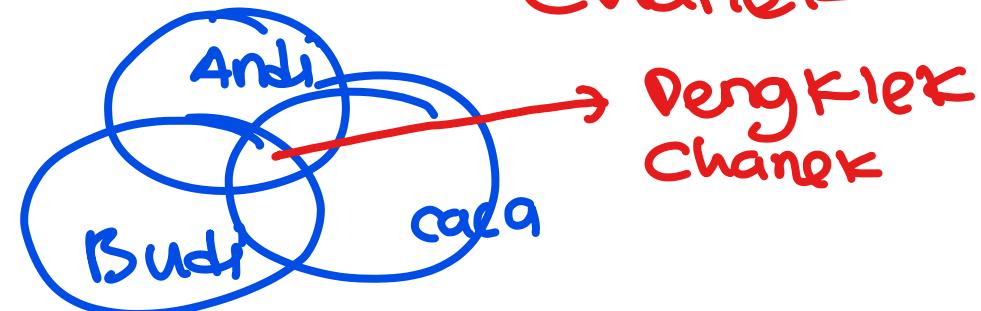
Ada 3 orang kandidat ketua osis, dan 2 kandidat wakil ketua osis  
 $3 \times 2 = 6$   
Ada berapa banyak cara membentuk satu pasang ketua dan wakil ketua?



Ketua = Andi  
Budi



Wakil = Pengkiek  
Chanek



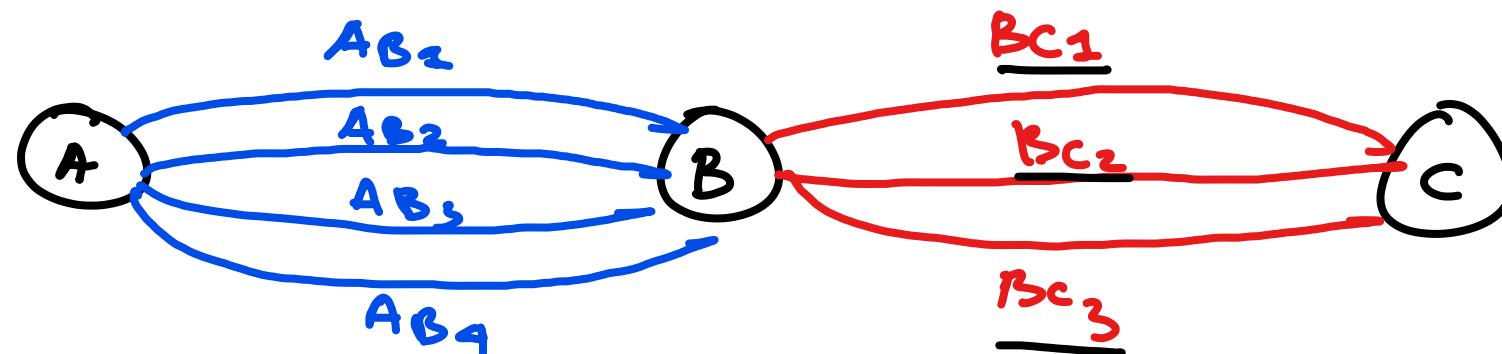
# Aturan Perkalian



Terdapat 10 butir soal Olimpiade Informatika di mana soal berjenis pilihan ganda yang terdiri dari opsi A,B,C,D, atau E, ada berapa banyak cara Pak Dengklek menjawab soal tersebut jika ia diperbolehkan mengosongkan jawaban?

$$\frac{6}{4-E} \times \frac{6}{A-E} \times \frac{6}{O} \times \frac{6}{O} \times \frac{6}{6} \times \frac{6}{6} \times \frac{6}{6} \times \frac{6}{6} = 6^{10}$$

Dari kota A ke kota B dilayani oleh 4 bus dan dari B ke C oleh 3 bus. Seseorang berangkat dari kota A ke kota C melalui B kemudian kembali lagi ke A juga melalui B. Jika saat kembali dari C ke A, ia tidak mau menggunakan bus yang sama, maka banyak cara perjalanan orang tersebut adalah



$$\text{ans} = 12 \times 6 = 72$$

A - C Lewat B

4 cara × 3 cara

A - B - C ( $k_1$ )

= 12 cara

2 cara × 3 cara

C - B - A ( $k_2$ )

= b cara

# Aturan Perkalian

Perhatikan potongan program di bawah ini!

```
for(int i = 1; i<=10; i++) {
    cout<<i;
    for(int j = 1; j<=27; j++) {
        for(int k = 1; k<=10; k++) {
            if(k%2 == 0) cout<<k<<endl;
        }
        if(j%3 == 0) cout<<j;
    }
}
```

$i \rightarrow j$        $j \rightarrow ijk$

Ada berapa banyak bilangan < 4 digit yang dicetak oleh program?

$$\begin{aligned} \text{ans} &= \underline{9} + \underline{36} + \underline{27} + \underline{1} + \underline{108} + \underline{9} + \underline{1} \\ &= 194 \text{ bilangan} \end{aligned}$$

1 digit

$$* i \Rightarrow (1-9) = 9 \text{ cara}$$

2 digit

$$\rightarrow \text{genap} = \{2, 4, 6, 8\}$$

$$* i \rightarrow k = 9 \times 1 = 36 \text{ cara}$$

$$(1 \text{ dg}) (1 \text{ dg})$$

$$* i \rightarrow j \rightarrow (3, 6, 9)$$

$$= 9 \times 3 = 27$$

$$* i \rightarrow 10 = 1 \text{ cara}$$

$$(2 \text{ dg})$$

3 digit

$$* i j k = 9 \times 3 \times 1$$

$$= 108 \text{ cara}$$

$$* i \rightarrow k = 9 \times 1 = 9 \text{ cara}$$

$$\rightarrow (1 \text{ dg}) (2 \text{ dg}) (2 \text{ dg})$$

$$= 1 \times 9 = 9 \text{ cara}$$

# Aturan Pengurangan (Komplemen)

A da 10 orang < 5 orang baik  
Jahat = ... ?  $A^C = S - A$

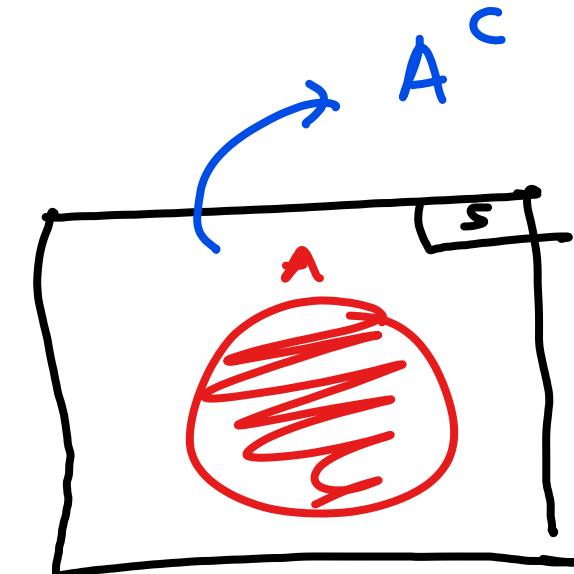
Jahat = Tdk baik

$|S| - |Baik|$

$$= 10 - 5$$

$$= 5$$

Misalkan kita melempar dua buah dadu  
Ada berapa banyak kemungkinan hasil  
jumlah kedua mata dadu > 3



$$\begin{aligned} |S| &= |A| + |A^C| \\ |A| &= |S| - |A^C| \\ |A^C| &= |S| - |A| \end{aligned}$$

# Aturan Pengurangan (Komplemen)

8. Perhatikan pernyataan logika berikut:

((if p then q) and r) iff not (p or (q xor r))

Jika

$a \text{ iff } b = (\text{if } a \text{ then } b) \text{ and } (\text{if } b \text{ then } a)$

serta

$a \text{ xor } b = (a \text{ and not } b) \text{ or } (b \text{ and not } a)$

maka berapa banyak cara berbeda untuk menentukan nilai  $p, q, r$  sehingga pernyataan tersebut menjadi benar?

A B C D

$$\begin{array}{cccc} \underline{1} & \underline{3} & \underline{2} & \underline{1} \end{array} = 4 \times 3 \times 2 \times 1 \\ = 1!$$

# Aturan Pengurangan (Komplemen)

Misalkan kita melempar dua buah dadu  
Ada berapa banyak kemungkinan hasil  
jumlah kedua mata dadu > 3

CAPEK WOK!

$$x_1 + x_2 > 3 \rightarrow (2,2), (2,3), (3,2), (3,3), (3,4), (4,3), \dots$$

$$|S| = 6 \times 6 = 36 \text{ cara}$$

$$|A| = (x_1 + x_2 > 3) = \dots ?$$

$$|A| = |S| - |A^C| \quad (\text{1.1})$$

$$|A^C| = !(\text{sum} > 3) \rightarrow \text{sum} \leq 3 \Rightarrow (1,2), (2,1)$$

$$|A^C| = 3 \text{ cara}$$

$$\text{ans} = 36 - 3 = 33 \text{ cara}$$

# Aturan Pengurangan (Komplemen)

Ada 5 orang Kwak, Kwik, Kwok, Kwek, dan Kwak yang duduk di sebuah kursi taman memanjang. Ada berapa banyak posisi duduk mereka jika Kwak dan Kwik tidak boleh duduk bersebelahan?

Dua buah dadu dilemparkan secara bersamaan, ada berapa banyak kemungkinan hasil jumlah mata kedua dadu  
> 3 ?

# Aturan Pengurangan (Komplemen)

```
int ret, res;  
res = 0;  
for(int i = 2; i<= 100; i++) {  
    ret = 0;  
    for(int j = 1; j<=i; j++) {  
        if(ret > 2){  
            res++; → res if ret > 2  
            break;  
        }  
        else if(i%j == 0) ret++;  
    }  
}
```

res = banyak kejadian banyak  
Faktor  $i > 2$

Bil. Komposit  
Bil. Bukan prima  
 $2 \leq i \leq 100$

ret ( $i \bmod j == 0$ )

Tentukan berapa nilai akhir res

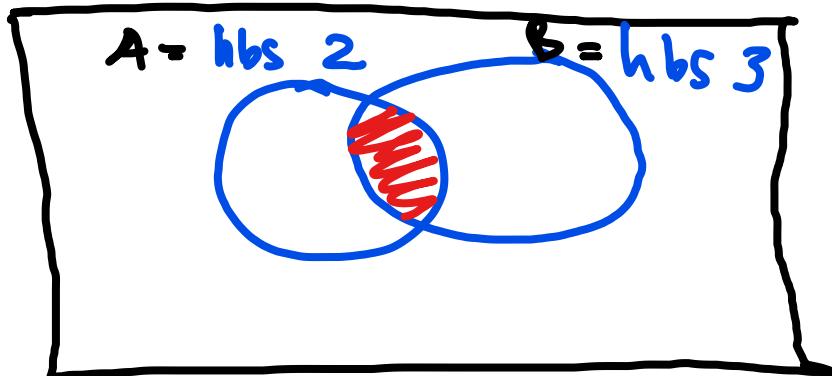
$$\begin{aligned}|A| &= 99 - |A^c| \\&= 99 - 25 \\&= 74\end{aligned}$$

ret = banyak kejadian  $i$  habis dibagi  $j$   
 $j \leq i$  faktor dari  $i$

ret; = banyak faktor dari  $i$

# Inklusi Eksklusi

Banyak bilangan habis dibagi 2 atau 3 dari 1 --- 1000?



$A \cup B$

$$\{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10\}$$

$A \cup B$

ata  $\cup$   
da  $\cap$

$$|A| = \left\lfloor \frac{1000}{2} \right\rfloor = 500$$

$$|B| = \left\lfloor \frac{1000}{3} \right\rfloor = 333$$

$$|A \cap B| = \left\lfloor \frac{1000}{\text{LCM}(2,3)} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1000}{6} \right\rfloor = 166$$

$$A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$$

$$B = \{3, 6, 9\}$$

$$A \cup B = \{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10\}$$

$$\{2, 3, 4, \cancel{6}, 8, 9\}$$

minus

$$= \underbrace{\{2, 4, 6, 8\}} + \{3, 6, 9\} - \{6\}$$
$$= A + B - A \cap B$$

$$\text{ans} = 500 + 333 - 166 \\ = 667$$

# Inklusi Eksklusi

$$A \cup B = A + B - A \cap B$$

6 sekawan (A,B,C,D,E, dan F) ingin duduk di bioskop menonton bersama. F tidak ingin duduk di sebelah E. E ingin duduk di sebelah C. A tidak ingin duduk di sebelah B. D ingin selalu duduk di sebelah B.

$$\cancel{FE} \quad EC \quad \cancel{AB} \quad DB$$

$$\text{Komplemen} = 1S1 - 1A^C)$$

$$\text{Banyak cara} \Rightarrow (EC \wedge DB) \wedge (\cancel{FE} \wedge \cancel{AB})$$

$$(S1 = \frac{EC}{X \rightarrow 2} \text{ dan } \frac{DB}{Y \rightarrow 2} \rightarrow FA \times Y \rightarrow 4! \times 2 \times 2 = 96 \text{ cara})$$

$$A = \cancel{FE} \wedge \cancel{AB}$$

$$\begin{aligned} A^C &= \neg(\cancel{FE} \wedge \cancel{AB}) \\ &= FE \vee AB \end{aligned}$$

$$A^C = (EC \wedge DB) \wedge (FE \vee AB)$$

$$= \underline{\underline{(EC \wedge DB \wedge FE)}} \vee \underline{\underline{(EC \wedge DB \wedge AB)}}$$

$$A^c = \underline{|P \cup Q|} = |P| + |Q| - |P \cap Q|$$

# Inklusi Eksklusi

```

int ret = 0;
for(int i = 1; i<= 100; i++) {
    if(i%2 == 0) {
        ret++;
    }else if(i % 3 == 0) {
        ret++;
    }
}

```

A saja true atau B saja true

$$|P_1| = A$$

$$|P_2| = B$$

$$P = \frac{CEFB}{2 \times 2} \quad A = 3! \cdot 2 \cdot 2 \\ = 24$$

$$Q = \frac{3! \cdot 2 \cdot 2}{x \times y} = 24$$

$$P \cap Q = \frac{FEC}{2} \cap \frac{DBA}{2} \\ = 2 \cdot 2 \cdot 2 \\ = 8$$

$$A = i \bmod 2 = 0 \rightarrow i \text{ Keviparan 2}$$

$$B = i \bmod 3 = 0 \rightarrow i \text{ Keviparan 3}$$

$$1 \leq i \leq 100 \rightarrow |A| + |B| - |A \cap B|$$

Banyaknya bilangan habis dibagi 2 atau 3 dari 1 -- 100 (inklusif)

$$= 50 + 33 - 16 = \underline{\underline{67}}$$

$$= \left\lfloor \frac{100}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{100}{\text{KPK}(2,3)} \right\rfloor \frac{100}{6}$$

$$A^c = 24 + 24 - 8 \\ = 40$$

$$\text{ans} = 151 - |A^c| \\ = 96 - 40$$

$$= \underline{\underline{56}}$$

# Inklusi Eksklusi

```
int ret = 0;  
for(int i = 1; i<= 100; i++) {  
    if(i%2 == 0){  
        ret++;  
    }  
    if(i % 3 == 0){  
        ret++;  
    }  
}
```

$$\text{Murnal} = |A| + |B| - |A \cap B|$$
$$\text{Unmurnal} = |A| + |B| \quad \times$$
$$|A| = \left\lfloor \frac{100}{2} \right\rfloor = 50 \quad |B| = \left\lfloor \frac{100}{3} \right\rfloor = 33$$

$$\text{ans} = 50 + 33 = \underline{\underline{83}}$$

# Pigeonhole Principle

( PHP )

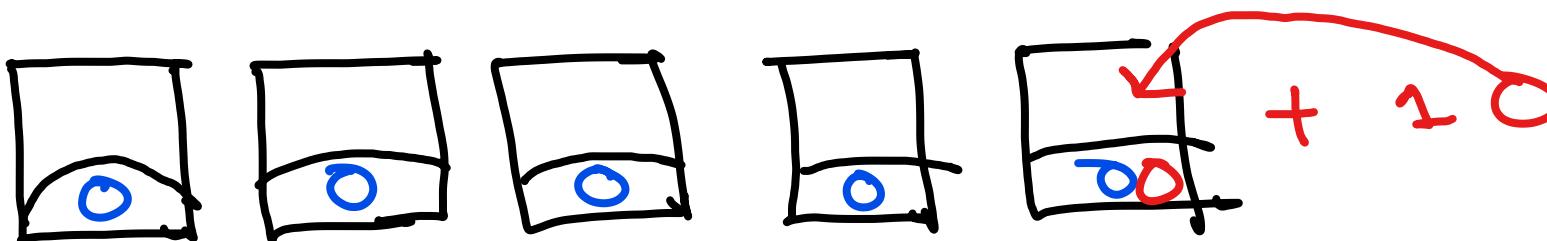
↳ worst case

Nyediain 5 kandang yang bisa diisi oleh merpati.

Nangkep merpati ada minimal satu kandang yang isinya >1 merpati.

$$\text{PHP} = \underline{W \cdot C + 1}$$

Pertanyaannya : Berapa minimal jumlah merpati yang masuk ke dalam kandang sehingga bisa kita pastikan ada minimal 1 buah kandang yang isinya >1 merpati?



A = >1 merpati

$$W_c = \underline{\text{Max}}( A^c )$$

$$W_c = \neg C > 1 \text{ merpati} \\ = \leq 1 \text{ merpati}$$

Worst case = Setiap kandang  $\frac{\text{Max}}{\text{diisi oleh } \Sigma \text{ merpati}} = 5 \text{ merpati}$

# Pigeonhole Principle

Pada permainan Jembatan Kaca Squidgame, terdapat 16 pasang sisi kaca (kaca kanan dan kiri), setiap pasang kaca terdapat salah satu kaca yang jika diinjak akan pecah dan membuat orang jatuh ke bawah. Berapa minimal orang yang harus dikorbankan agar diketahui kaca mana saja yang aman untuk diinjak?



WC = Banyak nginjuk      Semua kaca pecah

org ke berapa yg  
Menang ?  $\Rightarrow$  org ke - 17  
WC + 1

# Pigeonhole Principle

Terdapat 5 bola merah, 2 bola kuning, dan 3 bola hijau di dalam sebuah Kotak. Pak Dengklek ingin mengambil beberapa bola dengan mata tertutup.

Berapa minimal jumlah bola yang harus Pak Dengklek ambil untuk memastikan bahwa ia mendapatkan sebuah bola Merah?

$$M = 5, K = 2, H = 3$$

$$\begin{aligned}W_C &= \lceil C \text{ dapat } 1M \rceil \\&= \text{Tidak dapat sansek merah} \rightarrow K, H \\&= 2 + 3 = 5\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}PHP &= W_C + 1 \\&= 5 + 1 \\&= 6\end{aligned}$$

# Pigeonhole Principle

Terdapat 5 bola merah, 2 bola kuning, dan 3 bola hijau di dalam sebuah Kotak. Pak Dengklek ingin mengambil beberapa bola dengan mata tertutup.

Berapa minimal jumlah bola yang harus Pak Dengklek ambil untuk memastikan bahwa ia mendapatkan minimal 1 dari masing – masing jenis bola?

$$W_C = \neg(1M \wedge 1K \wedge 1H)$$
$$\rightarrow \neg 1M \vee \neg 1K \vee \neg 1H$$
$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$
$$\underline{2K \quad 3H} \quad \underline{5M \quad 3H} \quad \underline{5M \quad 2K}$$

MAX

$$W_C = 5 + 3 = 8$$

$$PHP = 8 + 1 = 9$$

# Pigeonhole Principle

Terdapat 5 bola merah, 2 bola kuning, dan 3 bola hijau di dalam sebuah Kotak. Pak Dengklek ingin mengambil beberapa bola dengan mata tertutup.

Berapa minimal jumlah bola yang harus Pak Dengklek ambil untuk memastikan bahwa ia mendapatkan 1 bola kuning, 2 bola merah, dan 2 bola hijau?

$$W_C = \lceil (1K \wedge 2M \wedge 2H) \rceil$$

$$\lceil 1K \rceil \vee \lceil 2M \rceil \vee \lceil 2H \rceil$$

$$\begin{array}{c} \downarrow \\ 5M \end{array}$$
  
$$\begin{array}{c} \downarrow \\ 3H \end{array}$$
  

---

$$\text{MAX}$$

$$\text{ans} = \cancel{5} \rightarrow 5M$$

$$\cancel{6} \rightarrow 5M 1K$$

$$\cancel{7} \rightarrow 5M 2K$$

$$\cancel{8} \rightarrow 5M 3H$$

$$> 8 \text{ (BSTA)}$$

$$W_C = 8$$

$$\text{PHP} = 8 + 1 = 9$$

# Pigeonhole Principle

$B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6, B_7$   
Min  $\frac{1}{5}$  Max  $\frac{1}{5}$   $\frac{1}{5}$   $\frac{1}{5}$   $\frac{2}{5}$   $\frac{1}{5}$   $\frac{1}{5}$   $\frac{1}{5}$

Asumsikan Pak Dengklek sudah membuat 7 tipe biskuit berbeda, yang masing-masing terdiri dari 5 butir biskuit. Jika Pak Dengklek ingin semua tipe biskuit pernah dicicipi oleh setidaknya 1 ekor bebek, berapa minimal bebek yang perlu diundang oleh Pak Dengklek?

$$W_C = \neg (B_1 \wedge B_2 \wedge B_3 \wedge B_4 \wedge \dots \wedge B_7)$$

$\neg B_1$   $\neg B_2$   $\neg B_3$   $\dots$   $\neg B_7$

$5 \times 6$   $5 \times 6$   $5 \times 6$

$$= \underline{5} \times \underline{6} = 30$$

$$\text{PHP} = 30 + 1 = \underline{\underline{31}}$$

# Pigeonhole Principle

Asumsikan Pak Dengklek sudah membuat 100 tipe biskuit berbeda. Biskuit tipe 1 terdiri dari 10 butir, biskuit tipe 2 terdiri dari 20 butir, biskuit tipe 3 terdiri dari 30 butir, dan seterusnya hingga biskuit tipe 100 terdiri dari 1000 butir. Jika Pak Dengklek ingin semua tipe biskuit pernah dicicipi oleh setidaknya 5 ekor bebek, berapa minimal bebek yang perlu diundang oleh Pak Dengklek?

# Permutasi Unsur Berbeda

n=5 ↓ Permanikan untan

Dari 5 huruf A,B,C,D, dan E ada berapa banyak string 3 huruf berbeda yang bisa dihasilkan?

A<sub>1</sub>B<sub>2</sub>C<sub>3</sub> — 1 cara

A<sub>1</sub>C<sub>2</sub>B<sub>3</sub> — 1 cara

B<sub>1</sub>A<sub>2</sub>C<sub>3</sub> — 1 cara

B<sub>1</sub>C<sub>2</sub>A<sub>3</sub> — 1 cara

:

Pilih r objek

$$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

AA

r=3

$$\frac{5!}{(5-3)!} \cdot \frac{5!}{2!} = 60$$

Sama  $\geq$  ABC tapi untan beda  
Mempermanikan untan

$$\frac{\square \square \square \square \square \square}{(\square \square \square \square - \square \square \square)} = \frac{6!}{2!} = 60$$

n objek

dan

$$\frac{n!}{(n-r)!}$$

# Permutasi Unsur Berbeda

$$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

$$f(n) = 2 f(n-1)$$

$$\text{Base Case: } f(0) = 1$$

$$\begin{aligned}f(9) &= 2 \cdot f(8) \\f(8) &= 2 f(7) \\&\vdots \\f(6) &= 1 \\f(5) &= 2 \cdot f(4) = 2\end{aligned}$$

# Permutasi Unsur Berbeda

$$f_{cn} = \underline{2^n}$$

$$f_{c(n-1)} = \underline{2^{n-1}}$$

$$2^9 = 2 \cdot 2^8$$

$$2^n = 2 \cdot 2^{n-1}$$

$$f_{cn} = 2 \cdot f_{c(n-1)}$$

$$6! = \underline{6 \cdot \underline{5 \cdot \underline{4 \cdot \underline{3 \cdot 2 \cdot 1}}}}$$

$$2^0 = 1 \rightarrow f(0) = 1$$

$$f_{cn} = \underline{\frac{n!}{n}} \Leftrightarrow (n-1)! = f_{c(n-1)}$$

$$f_{cn} = \underline{n * f_{c(n-1)}} \rightarrow$$

Base case  $\rightarrow f(0) = 1$

$$f_{c2} = 2 \cdot f_{c1} = 1$$

$$f_{c3} = 2 \cdot f_{c2} = 8$$

:

$$f_{cn} = \underline{2^n}$$

Eksplisit

abstraksi

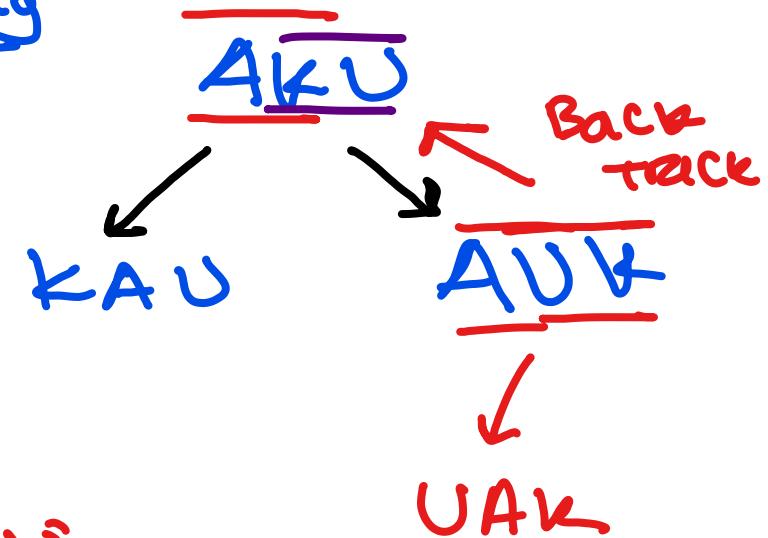
Rekursif

# Permutasi Unsur Berbeda

Perhatikan potongan program berikut untuk nomor 34 – 35!

```
void fly(string s, int x)
{
    if (x == s.size() - 1) {
        cout << s ;
        return;
    }
    for (int i = idx; i < s.size(); i++) {
        swap(s[x], s[i]);
        fly(s, idx + 1);
        swap(s[x], s[i]);
    }
}
```

Back tracking



**Catatan:** Pada kode tersebut, idx seharusnya x.

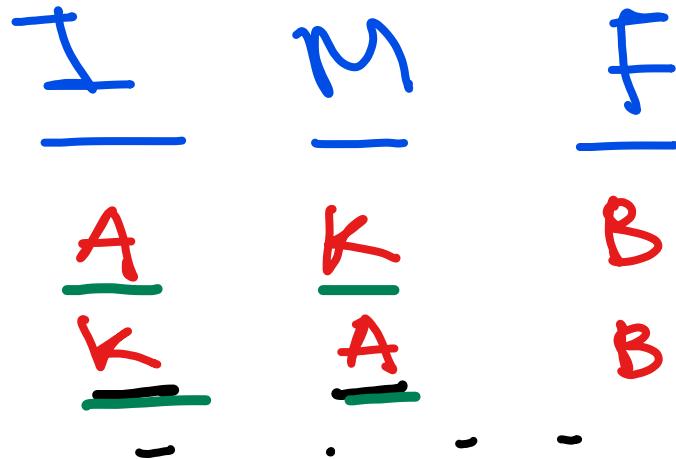
→ senarai Permutasi "AKU"

34. Tentukan keluaran dari hasil pemanggilan `fly("AKU", 0)`! {tuliskan jawaban dalam bentuk string tanpa dipisahkan spasi}

AKU  
KAU  
AUK  
...  
-

# Permutasi Unsur Berbeda

Dari ~~15 orang~~ kelas X – A akan dipilih satu orang untuk mengikuti lomba Informatika, satu orang untuk mengikuti lomba Matematika, dan satu lagi untuk lomba Fisika. Ada berapa banyak cara pemilihan yang bisa dilakukan?



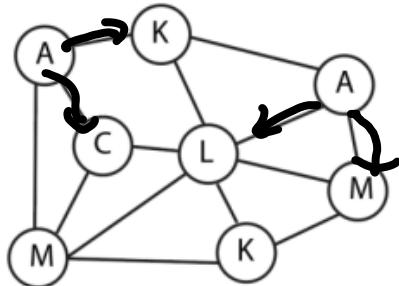
A informatica    → A MTK

Permutasi  $\Rightarrow \frac{15!}{(15-3)!}$

$$\Rightarrow \frac{15!}{12!}$$
$$= \frac{15 \times 14 \times 13 \times 12!}{12!}$$

# Permutasi Unsur Berbeda

MESIN PEMBUAT KATA 2 [11 – 12]



semua huruf Terhubung sama  
Sama lain, ~~KECUALI~~ "A"

Mesin terbaru milik Pak Dengklek dapat membuat sebuah kata dengan mengikuti diagram di atas. Pertama ia memilih sebuah huruf lalu huruf berikutnya adalah huruf lainnya yang terhubung langsung dengan huruf sebelumnya.

12. Ada berapa banyak kata dengan panjang maksimum tidak memuat huruf berulang yang dapat dibentuk? {tuliskan jawaban dalam bentuk ANGKA saja}

A C M L K ~~ek~~

$$|S| = |A^c|$$

$$\begin{aligned} |A^c| &= ^{\cancel{C}\cancel{K}} \text{ atau } ^{\cancel{K}\cancel{C}} \\ AXML &\Rightarrow 2 \cdot 4! \rightarrow 48 \text{ cara} \end{aligned}$$

$$|S| = 5! = 120 \text{ cara}$$

$$\text{ans} = 120 - 48 = 72 \text{ kata}$$

# Permutasi Unsur Berulang

ada berapa banyak

susunan

"KIKI" ?

$$\begin{array}{l} \vec{x_1} \\ k=2 \\ \vec{x_2} \\ l=2 \\ \downarrow x_2 \end{array}$$

P unsur Berulang =  $\frac{n!}{x_1! x_2! x_3! \dots x_i!}$

ans =  $\frac{4!}{2! 2!} = \frac{\cancel{4} \times 3!}{\cancel{4}} = 6$  susunan

# Permutasi Unsur Berulang

Berapa banyak permutasi string KSNK2021 sehingga tidak ada huruf maupun angka yang sama bersebelahan? [Jawablah dengan angka saja!]

$$A = |S| - |A^c|$$

$$S = \frac{8!}{2! \cdot 2!}$$

sama

$A = \text{Tidak ada huruf bas.}$

$A^c = \text{ada huruf bersebelahan}$

~~XSNK2021~~

$|X| = "KK"$  berseb

$$|Y| = "22"$$

bersebelahan  
 $\overbrace{XY}^{SNO1}$

$$|X \cup Y| = |X| + |Y| - |X \cap Y|$$

$$\frac{7!}{2!} + \frac{7!}{2!} - 6! = 6 \cdot 6!$$

$$\begin{aligned} A^c &= \frac{2 \cdot 7!}{2!} - 6! \\ &\rightarrow 7 \cdot 6! \\ &= 7! - 6! \\ &= 7 \cdot 6! - 6! \\ &= 6 \cdot 6! \end{aligned}$$

KLR berseb ] atau

22 berseb

# Permutasi Unsur Berulang

$$\text{ans} = \frac{8!}{4!} - 6 \cdot 6! = 5760$$

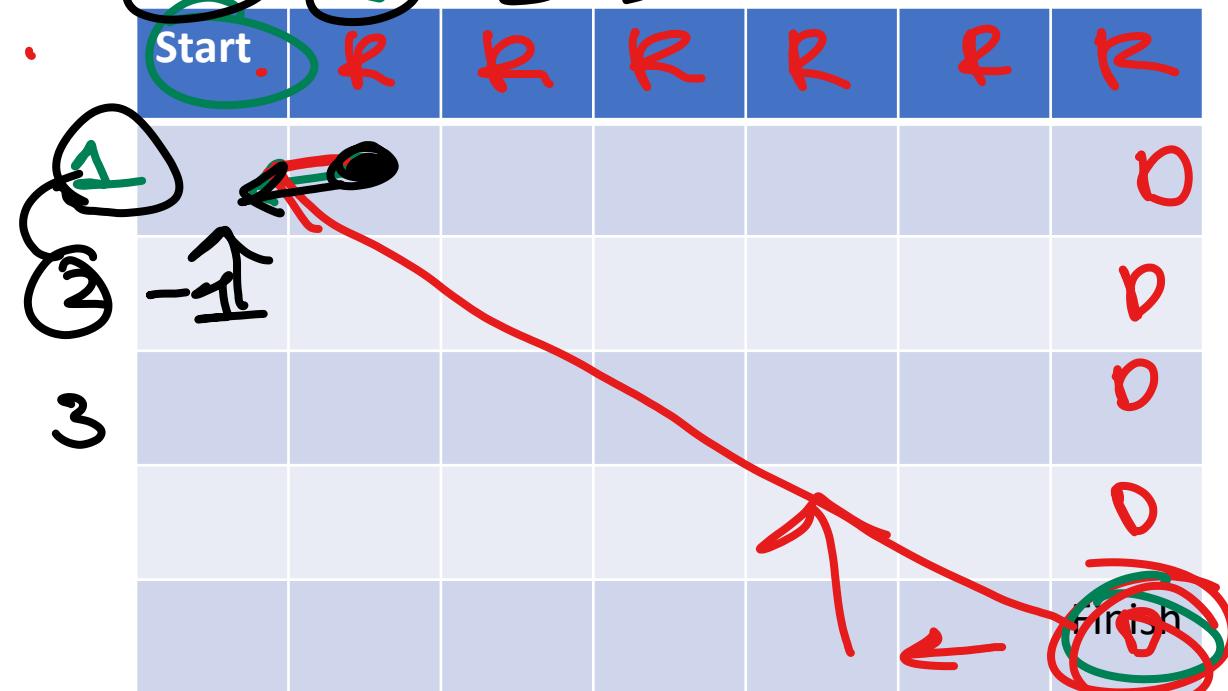
Terdapat 4 ekor bebek berwarna merah, 3 ekor bebek berwarna biru, dan 2 ekor bebek berwarna hijau. Kesembilan bebek tersebut diminta untuk berbaris oleh Pak Dengklek dengan ketentuan:

- Setiap bebek yang berwarna sama tidak bisa dibedakan. 
- Untuk setiap pasang bebek yang berwarna sama, tidak boleh ada bebek lain yang warnanya berbeda yang berada di antara sepasang bebek tersebut. Ada berapa macam posisikan yang mungkin dalam barisan bebek tersebut?

~~M-B-M~~

$$X Y Z = 3! \\ = 6$$

# Permutasi Unsur Berulang



$(x, y)$        $\xrightarrow{\text{left}}$   $x - 1$   
 $\xrightarrow{\text{down}}$   $y - 1$

Ada berapa banyak cara seseorang dari petak start menuju petak Finish jika ia hanya bisa bergerak ke bawah atau ke kanan saja?

$$\begin{aligned}
 \text{Pernurasi} &= \frac{6R \quad 5D}{\underline{\quad} \quad \underline{\quad}} \\
 &= \frac{11?}{\underline{\quad \quad}} \\
 &= \frac{6! \quad 5!}{\underline{\quad \quad}} \\
 &= 11C_6 \\
 &= 462 \quad \underline{\overline{\text{cara}}}
 \end{aligned}$$

# Kombinasi Unsur Berbeda

Permutasi  $\Rightarrow$  Menperhatikan Urutan

Kombinasi  $\Rightarrow$  Tdk Memperhatikan urutan

$$n C_r = \frac{n!}{(n-r)! r!}$$

cancel urutan

# Kombinasi Unsur Berbeda

Dari 15 orang kelas X – A akan dipilih tiga orang untuk mengikuti lomba Informatika. Ada berapa banyak cara pemilihan yang bisa dilakukan?

$$n = 15, \quad r = 3$$

$$\begin{aligned} {}^n C_r &= \frac{n!}{(n-r)! \cdot r!} \\ {}^{15} C_3 &= \frac{15!}{(15-3)! \cdot 3!} = \frac{15!}{12! \cdot 3!} \\ &= \frac{\cancel{15} \cdot \cancel{14} \cdot \cancel{13} \cdot \cancel{12}!}{\cancel{(2)!} \cdot \cancel{3!} \cdot \cancel{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}} \\ &= 5 \cdot 4 \cdot 13 \end{aligned}$$

# Kombinasi Unsur Berbeda

Tahun ini Pak Dengklek ditunjuk menjadi ketua panitia Olimpiade Internasional Bebek (OIB). Untuk memberikan pengalaman kepada bebek-bebeknya, Pak Dengklek berencana memilih 10 dari 15 bebek yang dimilikinya untuk menjadi peserta. Tentunya kita tahu bahwa di antara 15 bebek tersebut, ada empat bebek kesayangan Pak Dengklek, yaitu Kwak, Kwik, Kwek dan Kwok. ~~Kwak dan Kwik harus dipilih untuk menjadi peserta lomba karena keduanya yang paling pintar. Sedangkan Kwek dan Kwok tidak bisa dipilih sebab saat ini sedang sakit.~~ Ada berapa banyak cara memilih bebek-bebek sebagai peserta OIB?

$$\underline{n = 11} \quad , \quad r = 8$$

Isenasi → objek yg mungkin kita pilih

$$11 C_8 = \frac{11!}{(11-8)! 8!}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8!}{3! \cdot 8!} \\ &= \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1} \\ &= 11 \cdot 5 \cdot 3 \\ &= \underline{\underline{165}} \text{ cara} \end{aligned}$$

$$\text{Aturan Max } (A \cap B) = \max (A, B)$$

# Kombinasi Unsur Berbeda

$$\begin{aligned} {}^n C_1 &= n \\ {}^n C_n &= 1 \end{aligned}$$

Ada 2 buah kendi, pada kendi pertama terdapat 5 buah bola warna berbeda, kendi kedua 3 buah bola warna berbeda. Pak Dengklek melakukan 3 kali pengambilan bola tanpa pengembalian, ada berapa banyak kombinasi bola yang didapatkan, jika warna bola pada kendi kedua tidak ada pada kendi pertama?

Per Pengambilan = 1

$k_1, k_2$  /  $k_2, k_1$

$$\frac{8}{P_1} \cdot \frac{C_1}{C_1} \cdot \frac{6}{C_1} = 8 * 7 * 6 \quad (\checkmark)$$

$P_1 \rightarrow P_2 \rightarrow P_3$

$$8 C_3 = \frac{8!}{5! \cdot 3!} = \frac{8 * 7 * 6}{3!} = 8 * 7 \quad (\times)$$


# Kombinasi Unsur Berbeda

Ada 2 buah kendi, pada kendi pertama terdapat <sup>2</sup>~~3~~ buah bola warna berbeda, kendi kedua <sup>3</sup>~~3~~ buah bola warna berbeda. Pak Dengklek melakukan 2 kali pengambilan bola tanpa pengembalian, ada berapa banyak kombinasi bola yang didapatkan, jika ada bola dari kendi kedua memiliki warna yang sama dari bola pada kendi pertama?

$$W_1$$

$$W_2$$



$$K_1 \cap K_2$$



\* Warna Sama = 1

$$n = 5$$

$$5C_1 * 1C_1 - 1 = 19$$

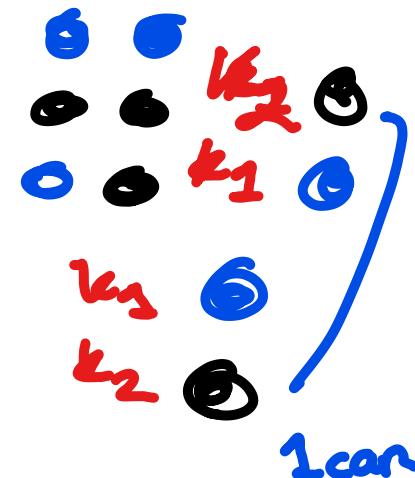
$$W_1 = W_2$$

$$1 = 19$$

$$\frac{K_1}{K_2}$$



$$ans = 19 + 17 = 36$$



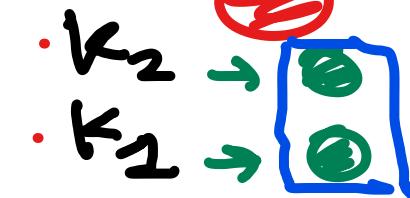
1 car

\* Warna Sama = 2

$$5C_1 * 1C_1 - 3 = 17$$

1 cara  
yg sama

{  
•  $K_1 \rightarrow$  HH  
•  $K_2 \rightarrow$  BB



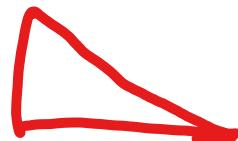
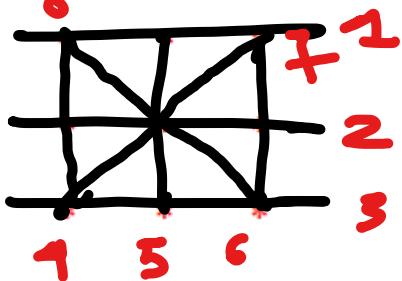
HH

# Kombinasi Unsur Berbeda

$k_1 \bullet$     $k_2 \bullet$   
 $k_2 \bullet$     $k_1 =$  } 1 cara

Jika diberikan sembilan buah patok pada lahan Pak Dengklek sebagai berikut:

Pak Dengklek ingin membuat sebuah kandang yang berbentuk segitiga dimana setiap pojok sudut kandang harus merupakan patok-patok tersebut. Sisi kandang boleh melewati atau mengandung patok-patok lainnya. Ada berapa banyak kemungkinan kandang yang bisa dibangun oleh Pak Dengklek?



=

$$9C_3 - 8$$

Pilih 3 \*

# Kombinasi Unsur Berulang

Misalkan kamu belanja Roti sebuah toko, kamu mau beli 5 roti, di toko tersedia dengan stok tak terbatas roti stroberi, roti coklat, dan roti Anggur. Ada berapa banyak cara / konfigurasi roti yang dibeli?

$x_1$  = Jml Stroberi

$x_1$   $x_2$   $x_3$  = Coklat

$x_3$  = Anggur

$\begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}$   $\begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix}$   $\begin{matrix} 2 \\ 2 \end{matrix}$   $\rightarrow$  1 cara  $\rightarrow$   $\boxed{\text{SCC}}$  AA

$x_1 + x_2 + x_3 = 5$   $\rightarrow$  Stars & bars

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

$x_1 + x_2 + \dots + x_r = n$

$x_r \leq n$

$x_r \geq 0, x \in \mathbb{Z}^+ \wedge x = 0$

Banyak solusi  $x_r \Rightarrow n+r-1 \text{ } C_n$

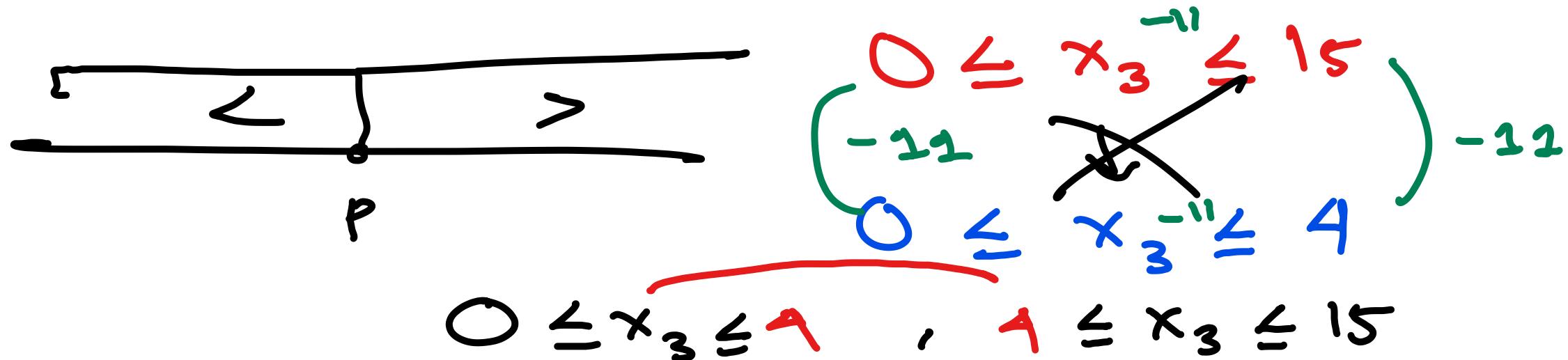
$5+3-1 \text{ } C_5 = {}^7 \text{ } C_5 = 21$

# Kombinasi Unsur Berulang

Terdapat 5 bola merah, 2 bola kuning, dan 2 bola hijau, semua bola pada masing – masing warna tidak bisa dibedakan atau identik. Ada berapa banyak cara memilih 8 bola secara acak di antaranya?

# Kombinasi Unsur Berulang

Asumsikan Pak Dengklek sudah membuat 3 tipe biscuit berbeda. Biskuit tipe 1 terdiri dari A butir, biskuit tipe 2 terdiri dari B butir, dan biskuit tipe 3 terdiri dari C butir. Diketahui bahwa total biskuit yang dibuat Pak Dengklek adalah 25 (dengan kata lain,  $A + B + C = 25$ ). Jika diketahui pula bahwa Pak Dengklek perlu mengundang minimal 20 ekor bebek agar semua tipe biscuit pernah dicicipi oleh setidaknya 1 ekor bebek, maka berapa banyak triplet berbeda yang mungkin?



$$x_1 \geq 2 \wedge x_2 \geq 4 \wedge x_3 \leq 4$$

# Kombinasi Unsur Berulang

$$x_3 \leq 1 \rightarrow 0, 1, 2, 3, 4$$

Ada berapa banyak nilai  $x_i$  yang memenuhi persamaan di bawah ini

$$x_1 + x_2 + x_3 = 15, \text{ jika } x_1 \geq 2, x_2 \geq 4 \text{ dan } x_3 \leq 4?$$

$$\begin{aligned} x_3 &\leq 15 \\ x_3 &\leq 4 \end{aligned}$$

$$x_2 > 3 \rightarrow x_2 \geq 4$$

$$x_1 + x_2 + 0 = 15 \rightarrow \underline{(x_1+2)} + \underline{(x_2+4)} + 0 = 15 \rightarrow x_1 + x_2 = 9$$

$$x_1 + x_2 + 1 = 15 \rightarrow \underline{(x_1+2)} + \underline{(x_2+4)} + 1 = 15 \rightarrow x_1 + x_2 = 10$$

$$x_1 + x_2 + 2 = 15 \rightarrow 8+2-1 C_8 = 9 C_8$$

$$x_1 + x_2 + 3 = 15 \rightarrow 7 C_6$$

$$x_1 + x_2 + 4 = 15 \rightarrow 6 C_5$$

$$(x_1+2) + (x_2+4) + (x_3-1) = 15$$

$$= 10 + 9 + 8 + 7 + 6 = 40 //$$
$$\frac{22!}{20! * 2} = 2311$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 20$$
$$= 22 C_{20}$$

# Pengantar Peluang

Tentukan banyak solusi  $X_i$  jika

$$x_1 + x_2 + x_3 = 9, \text{ untuk } x_1 \geq 2, x_2 \geq 3, x_3 \geq 1$$

$$x_1 \geq 0 \rightarrow x_1 \geq 2 \quad (x_1 + 2)$$

$$x_2 \geq 0 \rightarrow x_2 \geq 3 \quad (x_2 + 3)$$

$$x_3 \geq 0 \rightarrow x_3 \geq 1 \quad (x_3 + 1)$$

$$(x_1 + 2) + (x_2 + 3) + (x_3 + 1) = 9$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 9 - (2+3+1) = 3$$
$$3+3-1 C_3 = 5 C_3$$

# Pengantar Peluang

Pak Dengklek menghadiri acara undian berhadiah. Pak Dengklek akan memenangkan sepeda dengan peluang  $\frac{1}{2}$ , memenangkan tank dengan peluang  $\frac{1}{3}$ , dan memenangkan kapal dengan peluang  $\frac{1}{4}$ . Jika ketiga hadiah tersebut diundi secara terpisah, berapa peluang Pak Dengklek mendapatkan setidaknya 2 kendaraan?

# Pengantar Peluang

Empat anak bernama Andi, Budi, Caca, dan Dudi sedang bermain hompimpa. Andi, Budi, dan Caca mempunyai peluang berturut-turut  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{2}{3}$ , dan  $\frac{1}{4}$  untuk mengeluarkan hitam. Permainan dilakukan terus-menerus sampai ada yang menang. Seorang pemain dikatakan menang apabila mengeluarkan warna yang berbeda dengan semua pemain lainnya. Untuk mendapatkan peluang menang terbesar, Dudi perlu mengeluarkan warna ... sehingga peluangnya menjadi ...

- a. Hitam -  $\frac{1}{8}$
- b. Hitam -  $\frac{1}{6}$
- c. Putih -  $\frac{1}{6}$
- d. Hitam -  $\frac{1}{4}$
- e. Hitam -  $\frac{3}{5}$

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$A \cap B = \{ \dots \}$$

max =