Teori Bilangan Review + Latihan Soal

GCD/LCM, Euclidean, Tau Function, Sigma, Faktorisasi, Modulo

4. Sisa pembagian $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \ldots + 99^3 + 100^3$ oleh 7 adalah...

$3^{2018} \bmod 40 = 3^{2018 \bmod 4} \bmod 40 = 3^2 \bmod 40$
$= \underline{\underline{9}}$

$3^1 \bmod 40 = 3$
$3^2 \bmod 40 = 9$
$3^3 \bmod 40 = 27$
$3^4 \bmod 40 = 1$

$3^5 \bmod 40 = 3$
$\vdots \quad = 9$
$= 27$
$= 1$

$3^{\text{Pangkat kelipatan } 4} \bmod 40 = 1$

$(3^4)^2 \bmod 40 = \underline{1}$

$43^2 \bmod 100$
$= 49$

$43^9 \bmod 100$

$= (43^2 \cdot 43^2 \cdot 43^2 \cdot 43^2) \cdot 43 \bmod 100$

$((\cancel{49^2})^2 \cdot 43) \bmod 100$

$= 1^2 \cdot 43 \bmod 100 = \underline{\underline{43}}$

5. Dua digit terakhir dari $43^{43^{2018}}$ adalah...

$43^{43^{2018}} \bmod 100$

1 digit terakhir = Mod 10

2 digit terakhir = Mod 100

⋮

N digit terakhir = Mod 10^N

phi (n)

$a^x \bmod n = a^{x \bmod \varphi(n)} \bmod n$

$\gcd(a, n) = 1$

$43^{\overbrace{43^{2018} \bmod \varphi(100)}^{9}} \bmod 100 = 43^{\overline{43^{2018} \bmod 40}}$

$43^{2018} \bmod 40 = (\cancel{43 \bmod 40} \; 3)^{2018} \bmod 40$

$3^{2018} \bmod 40 = 9$

3. Dua orang sahabat, Pak Dengklek dan Pak Ganesh memiliki sejumlah kucing kesayangan yang tak terhingga jumlahnya dengan harga 465 satuan per ekornya. Sedangkan pak Dengklek memiliki milyaran ekor bebek yang setiap bebeknya bernilai 300 satuan. Keduanya melakukan transaksi dengan cara bertukar hewan. Sebagai contoh, jika pak Dengklek berhutang ke pak Ganesh sebesar 135 satuan, maka ia dapat membayar hutangnya dengan memberi pak Ganesh 2 ekor bebek dan mendapatkan sebuah kucing sebagai kembalian. Berapakah pecahan transaksi terkecil yang dapat diselesaikan dengan menggunakan cara pertukaran tersebut?

>0 mi >0

$\underbrace{465}_{a}x - \underbrace{300}_{b}y = \ldots$

gcd(a,b).1

k=1

gcd (465, 300)

* P. Diophantine

$ax + by = \text{gcd}(a,b)\,k$

4. Jika FPB dari a dan 2008 = 251. Jika a < 4036, maka nilai terbesar untuk a adalah...

a. 3263 : /251
b. 4016 /251
c. 2259 : /251
d. 3765 / 251
e. 3514 / 251

gcd (a , 2008) = 251

$\dfrac{a * 2008}{\text{Lcm}(a, 2008)} = 251$

gcd(a , b) = x

a harus dibagi x

b harus dibagi x

a = 251 k

a = 251 * (4 * 2)

= 251 * 8

= 1004 * 2 = ~~2008~~

a = 251 * 9

= 2259

251 *

9

a 59

a = 251 * 10

= 2510

a = 251 * 11

= 2761

a = 251 * 13

= 3263

251

13

753

251

3263

Kita tahu bahwa bilangan prima adalah suatu bilangan yang memiliki tepat 2 bilangan pembagi positif. Didefinisikan F-Primes adalah suatu bilangan yang memiliki tepat 5 bilangan pembagi positif. Berapa banyakkah bilangan F-Primes dari 1-1000 (inklusif)?

$x \le 1000$

$f(\text{F-Primes}) = 5$

$f(x) = (e_1 + 1)(e_2 + 1) \ldots$

$f(x) = 5 \rightarrow 1 \cdot 5$

$f(x) = (\underset{e_1}{4} + 1)$

$x \rightarrow$ F primes

x adalah bilangan $p_1^{e_1 = 4}$

x adalah bilangan p_1^4

F primes = bil prima$^4 \le 1000$

Fprimes = $\{2^4, 3^4, 5^4, \}$ → sebanyak $\underline{3}$ $\underline{\text{bil}}$

Berapakah hasil 27^{2016} mod 26?

$$a^x \bmod n = (a \bmod n)^x \bmod n$$

$$27^{2016} \bmod 26 = 1$$

$$(\underbrace{27 \bmod 26}_{1})^{2016} = 1^{2016} = \underline{\underline{1}}$$

9. Terdapat 2 bilangan, yaitu 720000 dan 262144. Berapa banyak bilangan berbeda yang membagi habis kedua bilangan tersebut?

$\tau(\text{FPB}(720.000, 262144))$

$\text{FPB}(720.000, 262144) =$

$$\begin{aligned}
720.000 &= 72 \cdot 10^4 \\
&= 2 \cdot 36 \cdot 10^4 \\
&= 2 \cdot (2 \cdot 3)^2 \cdot (2 \cdot 5)^4 \\
&= 2^1 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 2^4 \cdot 5^4 \\
&= 2^7 \cdot 3^2 \cdot 5^4
\end{aligned}$$

$262144 = 2^{18}$

$\tau(2^7) = (7+1)$
$= 8$

FPB = cari p_i yang sama, pilih e_i minimum

2^7

Ido berulang tahun ke-20 pada hari Kamis, 13 Oktober 2016. Pada hari apakah Ido lahir?

berapa hari modulo 7

Keterbagian & Bil. Bulat

a habis dibagi n → $a \mid n$

$a \bmod n \equiv 0$ → a kelipatan n → $a \equiv n.k$

$x \bmod 3 = 0$ → $x \mid 3$ → $x \equiv 3.k$

→ {0, 3, 6, 9, 12, ... }

3.0 3.1 3.2 ⋮ 3.4 3k

$(a \pm b) \bmod n = (a \bmod n) + (b \bmod n) \bmod n$

×

$a^b \bmod n = (a \bmod n)^b \bmod n$

Sisa bagi

$x \bmod n$, $x \nmid n$

x bukan kelipatan n $\quad x \bmod n \neq 0$

x jika dibagi n memiliki sisa bulat non negatif

$0 \leq$ sisa bagi $<$ pembagi

$0 \leq c \leq n - 1$

$x \bmod n \equiv 1$

$x \bmod n \equiv 2$

$\vdots$

$x \bmod n \equiv c \rightarrow \underline{x} = \underline{nk + c}$

$$x \bmod n \equiv c \rightarrow x \equiv nk + c$$

$$nk + c \equiv x \pmod n$$

$$(nk + c) \bmod n \equiv$$

$$(\underline{n}k \bmod \underline{n}) + (c \bmod n) \bmod n$$

$$= 0 + c \equiv x \pmod n$$

$$x \equiv c \pmod n$$

CRT

$$x + n \;,\; 0 \leq c \leq n-1$$

$$5 \bmod 2 = 1$$

$$2 \sqrt{5}^{\,2}$$

$$\begin{array}{r} 4 \\ \hline \textcircled{1} \end{array}$$

kalan: sisa bagi

$$x \bmod n \equiv c$$

$$\downarrow$$

$$x \equiv nk + c$$

$$\searrow k = (0, 1, 2, \ldots)$$

$x \equiv 2k + 3 = \{$

$$\left.\begin{array}{l} x \bmod 2 = 3 \\ x \equiv 3l + 1 = \{ \\ x \bmod 3 = 1 \\ x \equiv 5m + 1 = \{ \\ x \bmod 5 = 1 \end{array}\right\}$$

Find x ! $\rightarrow$ CRT

Bilangan terkecil x sbg

$x \bmod 9 \equiv 2$

$x \bmod n = c$

$x \equiv nk + c$

$k = (0, 1, 2, \ldots)$

$x \equiv 9k + 2$

$n = 9 \rightarrow$ Pembagi

Suku pertama $= a = c$

$x = \{2, 11, 20, \ldots\}$

$9.0+2 \quad 9.1+2 \quad 9.2+2$

$x_{min} = 6$ bukan nol

$x \bmod 2 = 0$

$x \bmod 3 = 0$

$x \equiv 2k$

$x \equiv 3l$

KPK(2, 3)

$x \equiv \{0, 2, 4, 6\}$

$x \equiv \{0, 3, 6\}$

* **Format little theorm** P is Prime

$a^{p} \bmod p = a$

$a^{p-1} \bmod p = 1$

$a \bmod (a-1) = 1$

* Gcd - Lcm / FPB - KPK

$\gcd(a, b) = 1$, a,b Relatif Prima

$\gcd(a, b) = a$, $a == b$

$\gcd(\underbrace{a, b}_{b \geq a}) = \gcd(b \bmod a, a)$

Euclid Algorithm

$$\gcd(a,b) = \frac{a * b}{\mathrm{lcm}(a,b)}$$

$$\mathrm{lcm}(a,b) = \frac{a * b}{\gcd(a,b)}$$

```
for (i ->
    for (j ->
        ret = gcd(i,j) * lcm(i,j)
```

$$\underbrace{\gcd(i,j) * \mathrm{lcm}(i,j)}^{i * j}$$

$$\mathrm{lcm}(a,b) * \gcd(a,b) = a * b$$

* Euler Phi - Totient Function

ada berapa banyak $\underline{x}$ sug

$x \bmod n \neq 0$

$\underline{gcd}(x, \underline{N}) = \underline{1}$ → x dan n relatif prima

$\phi(n)$ = banyak bilangan yg rel. prima dgn n

$$\phi(n) = n * \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) * \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) * \ldots$$

$$= n * \prod \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$$

→ Faktor prima n

$$43^{43^{2018}} \bmod 100 = 43^{43^{2018} \bmod \underline{\phi(100)}} \bmod 100$$

$$\phi(100) = (2.5)^2 = 2^2 \cdot 5^2$$

$2 \to p_1$, $5 \to p_2$

Faktor Prima 100 $\rightarrow$ 2, 5

$$\phi(100) = 100 * \left(1 - \frac{1}{2}\right) * \left(1 - \frac{1}{5}\right)$$

$$= \cancel{100}^{20} * \left(\frac{1}{\cancel{2}}\right) * \left(\frac{\cancel{4}^{2}}{\cancel{5}}\right)$$

$$= 40$$

$$\varphi(10) = 4$$

$$\varphi(100) = 40$$

$$\varphi(1000) = 400 \quad \ldots$$

$$\varphi(10^N) = 4 * 10^{N-1}$$

- Tau Function → $f(x)$

x Faktornya ada berapa ?

20 Faktornya ada berapa = $\{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$
= 6

$f(20) = 6$ → banyak Faktor 20 = 6

$f(10000)$

$$\tau(x) = (\overset{\nearrow \text{Pangkat Faktorisasi Prima}}{e_1} + 1)(e_2 + 1) \ldots (e_i + 1)$$

$$= \prod (e_i + 1)$$

$$x = p_1^{e_1} \cdot p_2^{e_2} \cdot p_3^{e_3} \ldots p_i^{e_i}$$

Banyak Faktor $\underline{1000} \rightarrow f(1000)$

$$\underline{1000} = \underline{(2.5)^3}$$
$$= \underset{p_1}{2}^{\overset{e_1}{3}} \cdot \underset{p_2}{5}^{\overset{e_2}{3}}$$

$e_1 = 3$

$\underline{e_2 = 3}$

$$f(1000) = (3+1)(3+1)$$
$$= \underline{\underline{16}}$$

$f(20)$ $20 \rightarrow 2^{\overset{e_1}{2}} \cdot 5^{\overset{e_2}{1}}$

$$f(20) = (2+1)(1+1) = 3 * 2$$
$$= 6_{//}$$

* Sigma Function

hasil jumlah faktor"

$20 = \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$

$\sigma(20)$

$= 1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 20$

$= \underline{\underline{42}}$

$20 = 2^{2} \cdot 5^{1}$

$\sigma(20) = (2^0 + 2^1 + 2^2) * (5^0 + 5^1)$

$= (1 + 2 + 4) * (1 + 5)$

$= 7 * 6$

$= \underline{\underline{42}}$

Problem Solving Paradigma

Masalah

Solusi 1 — Cara 1

Solusi 2 — Cara 2

...

(1) TEPAT

(2) CEPAT / HEMAT

↓ Time complexity

↓ Memory / space complexity

* Brute-Force ⇒ Kuli, simulasi,
* Greedy ⇒ Optimisasi Naif
* DnC ⇒ Divide & conquer
* DP ⇒ Dynamic programming
* BSTA ⇒ Binary Search

Greedy

Diberikan x bilangan positif 4 digit dan y bilangan positif 3 digit. Tentukan nilai

x - y terbesar

Greedy Choice Property

Minimal sesuai

Maximal sesuai

Masalah

Maximal

Minimal

$$\underline{X} - \underline{Y} = \text{Max}$$

Maximal Minimal

$$9999 - 111 = \underline{9888}$$

* Divide & Conquer

$$2022^2 - 2019^2$$

→ divide

$$(2022 - 2019) \qquad (2022 + 2019)$$

conquer — conquer

$= 3 \qquad 4041$

Rekursif Tanpa Memoisasi

combine → $3 * 4041$

★ Dynamic Programming

DNC , Rekursif , Memoisasi

↓

Save transisi nilai rekursif

$$f(n) = f(n-1) + f(n-2)$$

DnC

worst time comp $O(2^x)$ Best space

$f(5)$

$f(4) = \dots$ $\quad$ $f(3)$

$f(3) \dots$ $\quad$ $f(2) = f(2)$ $\quad$ $f(1)$

Memo

1 = ...
2 = ...
3 = ...
4 = ...
⋮

DP

Worst space
Best time

$f(5)$ $\quad O(N)$

↓

$f(4)$

↓

$f(3)$