Sheet 2

Nyquist Rate

$\boxed{Q:1}$ BW = 1 MHz , sampled at 1.5 NR , $L = 256$, using μ-law
$\mu = 255$

a) $SNR = \underbrace{\dfrac{3L^2}{(\ln(1+\mu))^2}} = 6393.9655 \xrightarrow{dB} 10\log SNR = 38.06\ dB$

ال SNR في حالة استخدام ال μ-Law

ReCall → for Pw $\xrightarrow{dB}$ $10\log P_w$ | for Amp $\xrightarrow{dB}$ $20\log A$

عشان ال $P_w \propto A^2$ ، ف $10\log A^2 \Rightarrow 20\log A$

b) هل ممكن نزود ال SNR بـ 10dB ؟ بس نخلي ال $BW)_{trans}$ ثابت ، مع العلم ان اقل fs هي 1.2 NR

ReCall → $BW)_{trans} = \dfrac{R_b}{\eta} = \dfrac{F_s R}{\eta}$ (R → no. of levels)

$SNR)_{new} = 48.06\ dB \xrightarrow{[10^{\frac{\square}{10}}]} = 63973.48 \rightarrow L \approx 809 \rightarrow L_{new} = 1024$ (nearest Power of 2)

$L)_{new} = 1024 \rightarrow R = 10$ bits/sample

$\therefore BW_T)_{new} = BW_T)_{old} \Rightarrow F_s)_{new}\ R)_{new} = F_s)_{old}\ R)_{old}$

$F_s)_{new}\ 10 = 1.5NR \times 8$

$F_s)_{new} = 1.2NR$ ✓✓

- فنقدر نحقق المطلوب

* $SNR)_{max} = 102303.44 = 50.09\ dB$ ✓✓ (L) - عشان نجيب أكبر SNR نعوض بأكبر ال L هي 1024 مش 809

Q.2 $x(t) = A\cos(2\pi f_c t + \underset{\text{random var}}{\phi})$ $\quad f_\theta(\phi) = \begin{cases} 1/2\pi & , -\pi \le \theta \le \pi \\ 0 & , \text{ow} \end{cases}$

* $\underset{\text{ACF}}{R_x(\tau)} = E[x(t)\,x(t+\tau)]$

Recall

$\hookrightarrow \cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$

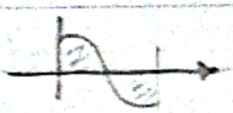
b.c طلع const ال $E()$

$= A^2 E[\cos(2\pi f_c t + \phi)\cos(2\pi f_c t + 2\pi f_c \tau + \phi)]$

$= \frac{A^2}{2} E[\cos(4\pi f_c t + 2\pi f_c \tau + 2\phi) + \underbrace{\cos(2\pi f_c \tau)}_{\text{const}}]$

$= \frac{A^2}{2}\cos(2\pi f_c \tau) + \frac{A^2}{2} E(\square)$

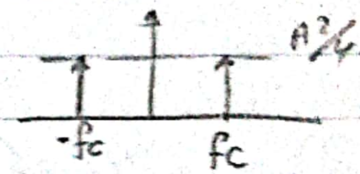
But, $E(\square) = \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\cos(\square)}_{f(\phi)} \underbrace{\frac{1}{2\pi} d\phi}_{\phi \text{ قيمة}} = 0$



- تكامل ال Cos
لـ Period كاملة
بـ Zero، هنا عندنا 2Φ جوا
- ده تكامل ع 2Period، برضو صفر!

So $R_x(\tau) = \frac{A^2}{2}\cos(2\pi f_c \tau)$

So $\underset{\text{PSD}}{G_x(f)} = \frac{A^2}{4}[\delta(f - f_c) + \delta(f + f_c)]$



Recall: $\cos(2\pi f_c t) \longleftrightarrow \frac{1}{2}[\delta(f - f_c) + \delta(f + f_c)]$

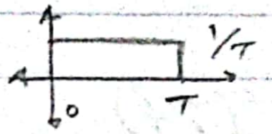
Q:3

- بيقول عندنا Pulses قيمتها من A و $-A$ حسب (0) ولا (1) ، وده

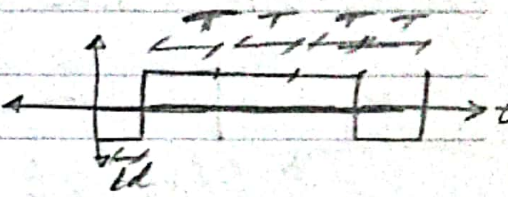
بيـ follow الـ Random Process زي tossing coin ، يعني كل واحدة (نص)

- أول Pulse بتاعت هيحصل فيها delay بوقت t_d وده أقل من T

$$f_{T_d}(t_d) = \begin{cases} 1/T & , 0 \le t_d < T \\ 0 & , \text{o.w} \end{cases}$$



وبيـ follow ده ←



$$R_x(\tau) = E[x(t)\, x(t+\tau)]$$

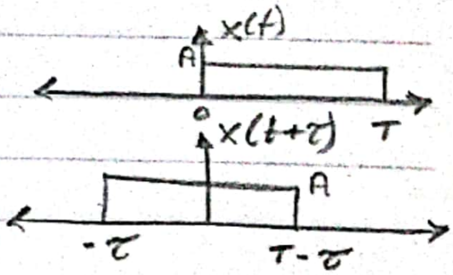
- الـ τ ده فرق وقت بين t_1 و t_2 ، لو t_1 و t_2 مش في نفس الـ Pulse ← $\tau > T$
ساعتها كل واحدة هتبقى معتمدة على رمية مختلفة ← Indep

at $|\tau| > T \rightarrow R_x(\tau) = E[x(t)]\, E[x(t+\tau)] = 0 \times 0 = 0$

$\frac{0.5A - 0.5A}{2} = \text{zero}$

- الـ E ده بيعبر عن الـ value أو الـ mean ، هنا هي بـ(0)

at $|\tau| < T$



$\rightarrow 0 \le t_d \le T - |\tau| \Rightarrow$ overlap

$E[x(t)\, x(t+\tau)] = A^2$

$\rightarrow T - |\tau| < t_d < T \Rightarrow$ No-overlap

$E[x(t)\, x(t+\tau)] = \text{zero}$

for $|\tau| < T \rightarrow R_x(\tau) = \frac{1}{T}\int_0^T \square \, dt_d = \frac{1}{T}\int_0^{t_d} A^2 \, dt_d + \frac{1}{T}\int_{t_d}^{T} 0 \, dt_d$

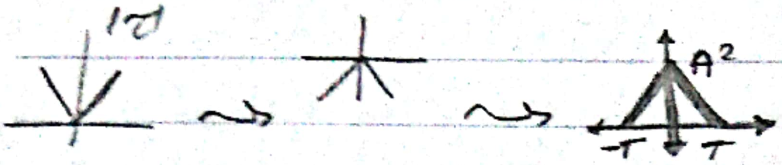
$= \frac{A^2}{T}[T - |\tau|]$

$$R_x(t) = \begin{cases} A^2\left[1 - \frac{|\tau|}{T}\right] & , |\tau| < T \\ \text{zero} & , \text{o.w} \end{cases}$$

* خلي بالك من الـ interval

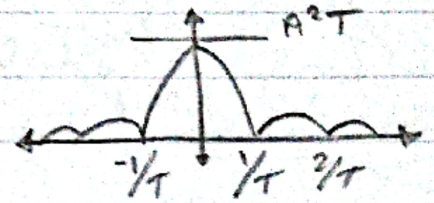
Follow Q.13

$$R_x(\tau) = \begin{cases} A^2\left[1 - \frac{|\tau|}{T}\right], & |\tau| < T \\ \text{zero}, & \text{o.w.} \end{cases}$$



$\rightarrow A^2\, \text{tri}(\tau/T)$

$G_x(f) \Rightarrow A^2 T\, \text{sinc}^2(Tf)$



Recall $\rightarrow$ $\text{tri}(at) \longleftrightarrow \frac{1}{|a|}\, \text{sinc}^2(f/a)$

Notes

1) ال avg Pw لأي func هي → Value of ACF at zero: $R_x(0)$

Area under PSD: $\int_{-\infty}^{\infty} G_x(f)\,df$

2) ال DC Power → The shift value of $R_x(\tau)$ in the y-axis

3) ال AC Power → هي ال $R_x(0)$ من غير ال shift أو $[R_x(0) - \text{DC Pw}]$

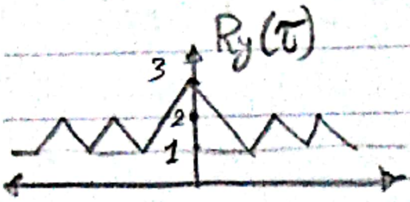
4) ال Expected لأي signal بيعبر عن ال DC Comp بتاعها!

5) ال Pw بتاع أي حاجة Const هو ال Square بتاعه

Val $A \rightarrow$ Pw A^2

Q:4

- مديني الـ ACF بتاع $y(t)$ وقالي كل الـ DC Comp فيه $\sqrt{\frac{3}{2}}$
- ليه جزء Periodic ← $x(t)$ وجزء random ← $g(t)$
- عاوزين الـ avg Pw بتاع $x(t)$ و $g(t)$



- احنا عارفين ان الـ avg Pw بتاع الـ func بيكون عند الـ zero في الـ ACF بتاعها!
- معنى كده لو جبت الـ ACF بتاع $\sqrt{3/2}$ و $x(t)$ و $g(t)$ ه نعرف أحسبهم!

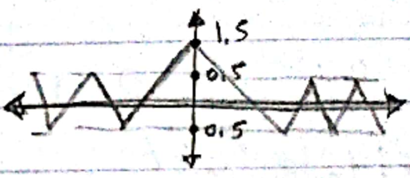
$$y(t) = \sqrt{3/2} + \underbrace{x(t) + g(t)}_{z(t)} = \sqrt{3/2} + z(t)$$

مالوش DC علشان كله في $\sqrt{3}/2$

$$R_y(\tau) = E\left(\left(\sqrt{3/2} + z(t)\right)\left(\sqrt{3/2} + z(t+\tau)\right)\right)$$
$$= 3/2 + \sqrt{3/2}\, E(z(t)) + \sqrt{3/2}\, E(z(t+\tau)) + E(z(t)\, z(t+\tau))$$
$$= 3/2 + 0 + 0 + R_z(\tau)$$

$E(f(t)) = DC$ of $f(t)$
واحنا قولنا هنا بصفر!

$\therefore R_z(\tau) \Rightarrow$



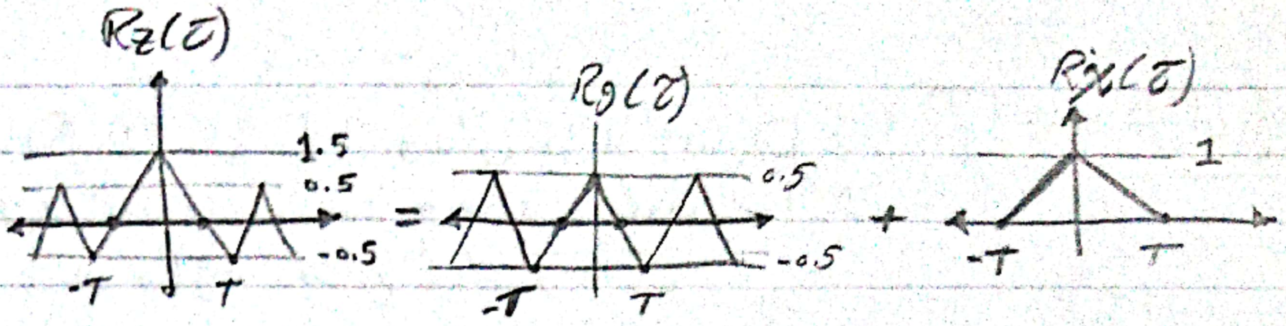
هل ممكن نقسم $R_z(\tau)$ لـ R_x و R_g ؟

$$R_z(\tau) = E[z(t)\, z(t+\tau)] = E[(x(t) + g(t))(x(t+\tau) + g(t+\tau))]$$
$$= E[x(t)x(t+\tau) + g(t)g(t+\tau) + x(t)g(t+\tau) + x(t+\tau)g(t)]$$
$$= R_x(\tau) + R_g(\tau) + E(x(t))\,E(g(t+\tau)) \to DC = \text{zero}$$

- كده ممكن أفصل $R_z(\tau)$ كـ sum لرسمتين!

follow ↓

Follow Q:4



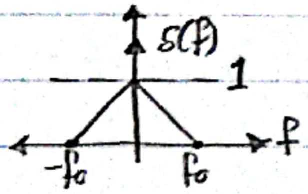
avg Pw → $y(t) \to R_y(0) = 3$

→ DC → $E(\sqrt{3/2}\,\sqrt{3/2}) = 3/2 = 1.5$

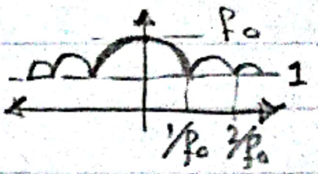
→ $g(t) \to R_g(0) = 0.5$

→ $x(t) \to R_x(0) = 1$] $z(t) \to R_z(0) = 1.5$

Q.5



⇒ $R_X(f)$



a) $G_X(f) = \delta(f) + tri(f/f_0)$

$R_X(f) = F^{-1}(G_X(f)) = 1 + f_0\, sinc^2(f_0 \tau)$

b) DC Pw = 1 — $\boxed{OR}$ Area under $G_X(f)$ — ال DC Pw بتظهر في ال Rx كـ shift لفوق -

c) AC Pw $= R_X(0) - 1 = f_0$ → $\frac{1}{2} \times 1 \times 2f_0$ $\boxed{OR}$ — ال AC Pw هي قيمة ال Rx عند 0 بس بعد ما نشيل ال DC Pw -

* Total Avg Pw $= R_X(0) = 1 + f_0$

d] uncorrelated samples → Correlation = zero → $R_X(\tau) = zero$

$R_X(\tau) = zero$ at $\pm 1/f_0, \pm 2/f_0, \dots$

يعني $T = \frac{n}{f_0}$, $n = \pm 1, \pm 2, \dots$ ⇒ $F_s = f_0/n$, $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$