* Chinese remainder theorem

$a \equiv b \pmod n$

$\longrightarrow a \bmod n \equiv b \pmod n$

$\vee \quad a \equiv b \bmod n \pmod n$

$\vee \quad a \bmod n \equiv b \bmod n \pmod n$

$\boxed{1}$

$x \equiv 1 \pmod 3$ (1

$x \equiv 2 \pmod 5$ (2)

$x \equiv 3 \pmod 7$ (3

S.O

from (1

$x = 1 + 3q$

substitute in (2)

$1 + 3q \equiv 2 \pmod 5$

$3q \equiv 1 \pmod 5$

$$3q \equiv 6 \pmod{5}$$

$$q \equiv 2 \pmod{5}$$

$$q = 2 + 5k$$

$$\therefore x = 1 + 3(2 + 5k)$$

$$x = 7 + 15k$$

substitute in 3

$$7 + 15k \equiv 3 \pmod{7}$$

$$15k \equiv -4 \pmod{7}$$

$$15k \equiv 3 \pmod{7}$$

$$5k \equiv 1 \pmod{7}$$

$$5k \equiv 15 \pmod{7}$$

$$k \equiv 3 \pmod{7}$$

$$k = 3 + 7s$$

$$x = 7 + 15(3 + 7s)$$

$$x = 52 + 105s$$

$$x \equiv 52 \pmod{105}$$

$$\boxed{x = 52}$$

① $x \equiv 1 \pmod{3}$, $N_1 = 35$

② $x \equiv 2 \pmod{5}$, $N_2 = 21$

③ $x \equiv 3 \pmod{7}$, $N_3 = 15$

④ $\Rightarrow 35x_1 \equiv 1 \pmod{3}$

⑤ $\Rightarrow 21x_2 \equiv 1 \pmod{5}$

⑥ $\Rightarrow 15x_3 \equiv 1 \pmod{7}$

④ $35x_1 \equiv 1 \pmod{3}$

$2x_1 \equiv 1 \pmod{3}$

$2x_1 \equiv 4 \pmod{3}$

$\boxed{x_1 \equiv 2 \pmod{3}}$

⑤ $21x_2 \equiv 1 \pmod{5}$

$x_2 \equiv 1 \pmod{5}$

⑥ $15x_3 \equiv 1 \pmod{7}$

$x_3 \equiv 1 \pmod{7}$

$$x \equiv (1\cdot 35\cdot 2) + (2\cdot 21\cdot 1) + (3\cdot 15\cdot 1) \pmod{105}$$

$$x \equiv 157 \pmod{105}$$

$$x \equiv 52 \pmod{105}$$

$$\boxed{x = 52}$$

(b) $x \equiv 5 \pmod{11}$, $N_1 = 899$ a_1

$x \equiv 14 \pmod{29}$, $N_2 = 341$ a_2

$x \equiv 15 \pmod{31}$, $N_3 = 319$ a_3

① $899 x_1 \equiv 1 \pmod{11}$

② $341 x_2 \equiv 1 \pmod{29}$

③ $319 x_3 \equiv 1 \pmod{31}$

① $899 x_1 \equiv 1 \pmod{11}$

$8 x_1 \equiv 1 \pmod{11}$

$8 x_1 \equiv 56 \pmod{11}$

$x_1 \equiv 7 \pmod{11}$

② $341 x_2 \equiv 1 \pmod{29}$

$\gcd(341, 29)$, $341 = 11 \cdot 29 + 22$

$= \gcd(29, 22)$, $29 = 22 + 7$

$= \gcd(22, 7)$, $22 = 3 \cdot 7 + 1$

$1 = 22 - 3 \cdot 7$

$1 = 22 - 3 \cdot (29 - 22)$

$1 = 4 \cdot 22 - 3 \cdot 29$

$1 = 4(341 - 11 \cdot 29) - 3 \cdot 29$

$1 = 4 \cdot 341 - 47 \cdot 29$

$ax \equiv b \pmod{n}$

$\gcd(a, n) = 1 \quad 1 = mn + as$

$x \equiv b \cdot s \pmod{n}$

$x_2 \equiv 4 \pmod{29}$

$\boxed{\text{or}}$

$22 x_2 \equiv 1 \pmod{29}$

$22 x_2 \equiv 88 \pmod{29}$

$x_2 \equiv 4 \pmod{29}$

3 $\quad 319 x_3 \equiv 1 \pmod{31}$

$\gcd(319, 31) \Rightarrow 319 = 10 \cdot 31 + 9$

$= \gcd(31, 9) \Rightarrow 31 = 3 \cdot 9 + 4$

$= \gcd(9, 4) \Rightarrow 9 = 2 \cdot 4 + 1$

$1 = 9 - 2 \cdot 4$

$1 = 9 - 2(31 - 3 \cdot 9)$

$1 = 7 \cdot 9 - 2 \cdot 31$

$1 = 7(319 - 10 \cdot 31) - 2 \cdot 31$

$\therefore x_3 \equiv 7 \pmod{31}$

$319 x_3 \equiv 1 \pmod{31}$

$9 x_3 \equiv 1 \pmod{31}$

$9 x_3 \equiv 63 \pmod{31}$

$x_3 \equiv 7 \pmod{31}$

$x_1 = 7, \quad N_1 = 899, \quad a_1 = 5$

$x_2 = 4, \quad N_2 = 341 \quad , a_2 = 14 \quad , n = 9889$

$x_3 = 7, \quad N_3 = 319 \quad , a_3 = 15$

$$x \equiv (7 \cdot 5 \cdot 899) + (4 \cdot 341 \cdot 14) + (7 \cdot 15 \cdot 319)$$

$$(\mathrm{mod}(9889))$$

$$x \equiv 84056 \ (\mathrm{mod}\ 9889)$$

$$x \equiv 4944 \ (\mathrm{mod}\ 9889)$$

$$\boxed{x = 4944}$$

$\boxed{2}$ $2^2 \mid a$, $3^2 \mid (a+1)$, $5^2 \mid (a+2)$

$a = 4k \Rightarrow a \equiv \overset{a_1}{0} \pmod{4}$, $N_1 = 225$

$3^2 \mid (a-(-1)) \Rightarrow a \equiv -1 \pmod{9} \Rightarrow a \equiv \overset{a_2}{8} \pmod{9}$, $N_2 = 100$

$5^2 \mid (a-(-2)) \Rightarrow a \equiv -2 \pmod{25} \Rightarrow a \equiv \overset{a_3}{23} \pmod{25}$, $N_3 = 36$

$225 x_1 \equiv 1 \pmod{4}$, $x_1 = 1$

$100 x_2 \equiv 1 \pmod{9} \Rightarrow x_2 = 1$

$36 x_3 \equiv 1 \pmod{25} \Rightarrow x_3 = 16$

$$x \equiv 8 \cdot 100 + 23 \cdot 36 \cdot 16 \pmod{900}$$

$$x \equiv 14048 \pmod{900}$$

$$x \equiv 548 \pmod{900}$$

$$\boxed{x = 548}$$

$\boxed{4}$

$x \equiv 3 \pmod{17}$ (1

$x \equiv 10 \pmod{16}$ (2

$x \equiv 0 \pmod{15}$ (3

$x = 3 + 17K$

$3 + 17K \equiv 10 \pmod{16}$

$17K \equiv 7 \pmod{16}$

$K \equiv 7 \pmod{16}$

$K = 7 + 16q$

$x = 3 + 17(7 + 16q)$

$x = 122 + 272q$

$122 + 272q \equiv 0 \pmod{15}$

$272q \equiv -122 \pmod{15}$

$2q \equiv 13 \pmod{15}$

$2q \equiv 28 \pmod{15}$

$q \equiv 14 \pmod{15}$

$q = 14 + 15s$

$x = 122 + 272(14 + 15s)$

$x = 3930 + 4080s$

$x \equiv 3930 \pmod{4080}$

$x \in [1, 1200]$

a_1

$x \equiv 1 \pmod 9, N_1 = 143$

a_2

$x \equiv 2 \pmod{11}, N_2 = 117$

a_3

$x \equiv 6 \pmod{13}, N_3 = 99$

$n = 1287$

$143x_1 \equiv 1 \pmod 9$

$8x_1 \equiv 1 \pmod 9$

$8x_1 \equiv 64 \pmod 9$

$x_1 \equiv 8 \pmod 9$

$$117x_2 \equiv 1 \pmod{11}$$
$$7x_2 \equiv 1 \pmod{11}$$
$$7x_2 \equiv 56 \pmod{11}$$
$$x_2 \equiv 8 \pmod{11}$$
$$99x_3 \equiv 1 \pmod{13}$$
$$8x_3 \equiv 1 \pmod{13}$$
$$8x_3 \equiv 40 \pmod{13}$$
$$x_3 \equiv 5 \pmod{13}$$

$$x \equiv [1 \cdot 143 \cdot 8 + 2 \cdot 117 \cdot 8 + 6 \cdot 99 \cdot 5] \pmod{1287}$$
$$x \equiv 5986 \pmod{1287}$$
$$x \equiv 838 \pmod{1287}$$

$x \equiv 1 \pmod 9$ ①
$x \equiv 2 \pmod{11}$ ②
$x \equiv 6 \pmod{13}$ ③

$x = 1 + 9K$
$1 + 9K \equiv 2 \pmod{11}$
$9K \equiv 1 \pmod{11}$
$9K \equiv 45 \pmod{11}$
$K \equiv 5 \pmod{11}$

$K = 5 + 11q$
$x = 1 + 9(5 + 11q)$
$x = 46 + 99q$

$46 + 99q \equiv 6 \pmod{13}$
$99q \equiv -40 \pmod{13}$
$99q \equiv 12 \pmod{13}$
$8q \equiv 12 \pmod{13}$

$2q \equiv 3 \pmod{13}$

$2q \equiv 16 \pmod{13}$

$q \equiv 8 \pmod{13}$

$q = 8 + 13s$

$x = 46 + 99(8 + 13s)$

$\boxed{x = 838 + 1287s}$

$\underline{34} \mid x_2 \equiv 1 \pmod{29}$

$\cancel{x_2 \equiv 1364 \pmod{29}}$

$22x_2 \equiv 1 \pmod{29}$

$22x_2 \equiv 88 \pmod{29}$

$x_2 \equiv 4 \pmod{29}$

$$341 x_2 \equiv 1 \pmod{29}$$

$$\frac{1+29x}{341} \to \text{calc}$$

$x=6$ $\quad \frac{1}{341}$

$x=8$ $\quad \frac{233}{341}$

$x=12$ $\quad \frac{349}{341}$