Vous devez écrire votre prénom / nom et le numéro de page récto-verso, et ainsi de même chaque document que vous accompagnerez et que vous rassemblez le tout à la fin dans une double feuille nommée. Bon courage

Date :	N° Page
Nom : Farid	
Prénom : Abdeljalil	/
Examen :	

1) Soit $f \in C_b$, on $Ef(U_{(1)},\dots,U_{(n)}) = \sum_{\sigma \in S_n} Ef(U_{\sigma(1)},\dots,U_{\sigma(n)}) \cdot 1_{\{U_{\sigma(1)}<\dots<U_{\sigma(n)}\}}$

donc $Ef(U_{(1)},\dots,U_{(n)}) = n!\, Ef(U_1,\dots,U_n) 1_{\{U_1<\dots<U_n\}}$

$= n! \int_{[0,1]} f(u_1,\dots,u_n)\, du_1\dots du_n 1_{\{u_1<\dots<u_n\}}$

d'où $\boxed{f_{(U_{(1)},\dots,U_{(n)})}(u_1,\dots,u_n) = n!\, 1_{\{0<u_1<\dots<u_n<1\}}}$

2.) pour $n=0$ car $\lambda e^{-\lambda x} 1_{\mathbb{R}^+}$ est densité de loi exponentielle

on a $\int_{\mathbb{R}^+} \lambda e^{-\lambda x} dx = 1 = \alpha \times 0!$ avec $\boxed{\alpha = 1}$

Supposons que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_{\mathbb{R}^+} \lambda e^{-\lambda x} dx = n!$

on a $\int_{\mathbb{R}^+} \lambda^{n+2} x^{n+1} e^{-\lambda x} dx \overset{IPP}{=} \underbrace{\left[-\lambda^{n+1} e^{-\lambda x} \cdot x^{n+1}\right]_0^{+\infty}} + \int_{\mathbb{R}^+} \lambda^{n+1} (n+1) x^n e^{-\lambda x} dx$

$= (n+1) \int_{\mathbb{R}^+} \lambda^{n+1} x^n e^{-\lambda x} dx = (n+1) \cdot n! = (n+1)!$

d'où par reccurence on a $\underline{\int_{\mathbb{R}^+} \lambda^{n+1} x^n e^{-\lambda x} dx = \alpha\, n!}$ avec $\underline{\alpha = 1}$

3.) $D_2(a, b_1, b_2) = \begin{vmatrix} a & b_1 \\ -a & b_2 \end{vmatrix} = a b_2 + a b_1 = a(b_1 + b_2)$

$D_3(a, b_1, b_2, b_3) = \begin{vmatrix} a & 0 & b_1 \\ -a & a & b_2 \\ 0 & -a & b_3 \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} a & b_2 \\ -a & b_3 \end{vmatrix} + b_1 \begin{vmatrix} -a & a \\ 0 & -a \end{vmatrix}$

$= a^2(b_2 + b_3) + a^2 b_1 = a^2(b_1 + b_2 + b_3)$

4) pour $n = 1$, on a bien $D_{n+1} = a^n(b_1 + \dots b_n)$ d'après la question précédente

Supposons que $\forall n \geq 1$, $D_{n+1}(a, b_1, \dots b_n) = a^n(b_1 + \dots b_n)$

on a

$D_{n+2} = \begin{vmatrix} a & 0 & \dots & 0 & b_1 \\ -a & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & & a & b_{n+1} \\ 0 & & & -a & b_{n+2} \end{vmatrix} = b_{n+2} \begin{vmatrix} a & 0 & \dots & 0 \\ -a & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & -a & a \end{vmatrix} + a \begin{vmatrix} a & & 0 & b_1 \\ -a & \ddots & & \vdots \\ & 0 & \ddots & a\, b_n \\ 0 & & & -a\, b_{n+1} \end{vmatrix}$

$= b_{n+2} a^{n+1} + a D_{n+1}(a, b_1 \dots b_{n+1}) = \underline{a^{n+1}(b_1 + \dots + b_{n+2})}$

d'où le resultat

Vous devez écrire votre prénom / nom et le numéro de page récto-verso, et ainsi de même chaque document que vous accompagnerez et que vous rassemblez le tout à la fin dans une double feuille nommée. Bon courage

Date : .... Nom : Farid Prénom : Abdeljalil Examen :	N° Page .... / ....

5) Soit $X_i > 0$, on a

* $(X_i > 0 \text{ pour } 1 \leq i \leq n+1) \Longrightarrow \begin{cases} 0 < \dfrac{\sum_{j=1}^{i} X_j}{\sum_{j=1}^{n+1} X_j} < \dfrac{\sum_{j=1}^{i+1} X_j}{\sum_{j=1}^{n+1} X_j} < 1 \text{ pour } 1 \leq i \leq n \\ \text{et } \sum_{i=1}^{n+1} X_i > 0 \end{cases}$

donc $\begin{cases} 0 < V_1 < \dots < V_n < 1 \\ V_{n+1} > 0 \end{cases}$

* supposons que $\begin{cases} 0 < V_1 < \dots < V_n \\ V_{n+1} > 0 \end{cases}$

on a $X_i = (V_i - V_{i-1}) V_{n+1}$ pour $2 \leq i \leq n$, donc $X_i > 0$

et $X_1 = V_1 \cdot V_{n+1} > 0$

et $X_{n+1} = V_{n+1} - \sum_{i=1}^{n} X_i = V_{n+1}\left(1 - \dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{V_{n+1}}\right) = V_{n+1}(1 - V_n) > 0$

donc $(X_i > 0 \text{ pour } 1 \leq i \leq n+1)$

6) on a $\forall\, 2 \leq i \leq n \quad X_i = (V_i - V_{i-1}) V_{n+1}$

et $X_1 = V_1 V_{n+1}$ et $X_{n+1} = (1 - V_n) V_{n+1}$

donc

$$\begin{pmatrix} dX_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ dX_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{n+1} & 0 & \cdots & 0 & V_1 \\ -V_{n+1} & V_{n+1} & & & V_2 - V_1 \\ & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & & -V_{n+1} & V_{n+1} & V_n - V_{n-1} \\ & & & -V_{n+1} & -V_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dV_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ dV_{n+1} \end{pmatrix}$$

Vous devez écrire votre prénom / nom et le numéro de page récto-verso, et ainsi de même chaque document que vous accompagnerez et que vous rassemblez le tout à la fin dans une double feuille nommée. Bon courage

Date :	N° Page
Nom : Farid	
Prénom : Abdeljalil	/
Examen :	

7) en introduisant (1) :

on voit dans 6 que $\begin{pmatrix} dx_1 \\ \vdots \\ dx_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} dv_1 \\ \vdots \\ dv_{n+1} \end{pmatrix}$, et A a la même forme que $\Gamma_{n+1}(a, b_1, \dots, b_{n+1})$

avec $a = V_{n+1}$, $b_1 = V_1$, $b_{n+1} = -V_n$

et $\forall 1 < k < n+1 \quad b_k = V_k - V_{k-1}$

donc le Jacobien est : $J = V_{n+1}^n \left(\sum_{i=1}^{n+1} b_i\right)$

donc $J = V_{n+1}^n \left(\sum_{i=1}^{n+1} (C_i - C_{i-1})\right)$ avec $C_0 = 0$ et $C_{n+1} = 0$

et $\forall 1 \leq k \leq n$; $C_i = V_i$

donc $J = 0$

9) soit $f \in C_b$, $(Y_1, \dots, Y_{n+1}) \longrightarrow (\mathbb{R}^+)^{n+1}$

on a $E\left[f(Y_1 \dots Y_{n+1})\right] = E\, f\left(X_1, \dots, \sum_{j=1}^{i} X_j, \dots, \sum_{j=1}^{n+1} X_j\right)$

$= \int_{(\mathbb{R}^+)^{n+1}} f(x_1, x_1 + x_2, \dots, x_1 + \dots + x_{n+1}) \prod_{i=1}^{n+1} \lambda e^{-\lambda x_i} dx_1 \dots dx_{n+1}$

$= \int_{\mathbb{R}^{n+1}} f(x_1, x_1 + x_2, \dots, x_1 + \dots + x_{n+1})\, \lambda^{n+1} e^{-\lambda(x_1 + \dots + x_{n+1})} dx_1 \dots dx_{n+1}$

on pose $y_i = \sum_{j=1}^{i} x_j$ donc $dy_i = \sum_{j=1}^{i} dx_j$ avec $y_1 < y_2 < \dots < y_{n+1}$

$$\begin{pmatrix} dy_1 \\ \vdots \\ dy_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 1 & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx_1 \\ \vdots \\ dx_n \end{pmatrix}$$, son Jacobien $J = 1$

donc $E\, f(Y_1 \dots Y_{n+1}) = \int_{(\mathbb{R}^+)^{n+1}} f(y_1 \dots y_{n+1})\, \lambda^{n+1} e^{-\lambda y_{n+1}} . \mathbb{1}(y_1 \dots y_{n+1}) dy_1 \dots dy_{n+1}$

d'où $f_{Y_1, \dots Y_{n+1}}(y_1 \dots y_{n+1}) = \lambda^{n+1} e^{-\lambda y_{n+1}} \mathbb{1}_{\{0 \leq y_1 < \dots < y_{n+1}\}}(y_1, \dots, y_{n+1})$

Vous devez écrire votre prénom / nom et le numéro de page récto-verso, et ainsi de même chaque document que vous accompagnerez et que vous rassemblez le tout à la fin dans une double feuille nommée. Bon courage

Date :	N° Page
Nom : Farid	/
Prénom : Abdeljalil	
Examen :	

1.c)

$$f_{Y_{n+1}} = \int_{(\mathbb{R}_+)^n} \lambda^{n+1} e^{-\lambda y_{n+1}} \cdot 1_{(0<y_1 \dots < y_{n+1})}(y_1, \dots, y_{n+1})\, dy_1 \dots dy_n$$

$$= \lambda^{n+1} e^{-\lambda y_{n+1}} \int_{y_{n-1}}^{y_{n+1}} dy_n \int_{y_{n-2}}^{y_n} dy_{n-1} \dots \underbrace{\int_{y_1}^{y_3} dy_2 \underbrace{\int_0^{y_2} dy_1}_{y^2}}_{\left(\frac{y_3^2}{2} - \frac{y_1^2}{2}\right)}$$

$=$