

# **Projet programmation stochastique 2011**

Management de la production électrique  
Approche probabiliste avec recours

## Sommaire

I.	Présentation du problème .....	3
II.	Modélisations réelles du problème .....	7
1.	Modèle probabiliste .....	7
2.	Equivalent déterministe .....	7
3.	Modèle avec recours .....	8
4.	Avec scénario .....	9
III.	Modélisations binaires du problème .....	10
1.	Modèle sans aléa .....	10
2.	Modèle avec aléa et contraintes en probabilités .....	13
3.	Equivalent déterministe .....	14
4.	Relaxation .....	15
IV.	Recuit simulé .....	16
1.	Recuit métallurgique .....	16
2.	Parallèle .....	16
3.	Résultat .....	16
4.	Algorithme .....	16
5.	Adaptation au problème .....	17
a)	Voisinage .....	17
b)	Solution initiale .....	18
c)	Température initiale .....	18
d)	Décroissance de la température .....	19
e)	Condition 1 .....	19
f)	Condition 2 .....	19

## I. Présentation du problème

La programmation stochastique permet de résoudre des problèmes d'optimisation de contraintes comprenant des variations aléatoires. On peut s'en servir afin d'obtenir des solutions pour lesquelles la programmation linéaire ne suffit pas.

Dans ce projet nous nous proposons d'appliquer la programmation stochastique à un cas simplifié mais concret d'optimisation de la production d'un fournisseur d'énergie. Celui-ci dispose de quatre centrales thermiques :

- une nucléaire
- une au charbon
- une au fioul
- une au gaz

Il possède aussi une centrale hydraulique avec un réservoir d'eau et une turbine. L'électricité fournie par ces 5 centrales servira une demande aléatoire qui n'est pas connue à l'avance. Cette demande dépend du climat et de l'activité économique. Le fournisseur souhaite satisfaire toute la demande en minimisant les coûts de production, donc en évitant la surproduction. Il doit obéir à certaines contraintes. Ainsi, le réservoir doit respecter des quantités minimale et maximale d'eau et chaque centrale  $j$  est limitée par une puissance maximale qui lui est propre. De plus, une centrale peut voir sa production réduite durant une période à cause de pannes.

Nous cherchons donc à déterminer la production de chaque centrale pour satisfaire la demande tout en minimisant le coût de production.

Pour cela, nous allons dans un premier temps utiliser une formulation probabiliste à variables réelles dans le cas gaussien pour laquelle nous avons un équivalent déterministe sous la forme d'un second-order cone program (SOCP). Ce SOCP sera résolu avec le logiciel CVX dans Matlab. Nous utiliserons ensuite une formulation avec recours et scénarios à variables réelles. Nous obtenons un programme linéaire qui sera résolu avec CPLEX. Pour finir, nous allons résoudre le programme linéaire découlant d'une formulation probabiliste à variables binaires avec le recuit simulé et comparer cette solution avec la solution relaxée trouvée par CPLEX.

Il faut minimiser le coût de production de l'énergie sur les  $m$  jours.

Cela comprend :

- le coût de production de l'énergie dans les centrales thermiques
- le coût de production de l'énergie hydraulique

Posons :

- $x_{ij}$ ,  $j$  allant de 1 à 4 et  $i$  de 1 à  $m$ , un réel représentant la puissance produite en MW par la centrale thermique  $j$  durant la période  $i$ .
- $x_{i5}$ ,  $i$  allant de 1 à  $m$ , un réel représentant le volume utilisé en  $m^3$  par la centrale hydraulique durant la période  $i$ .
- $c_{ij}$ ,  $j$  allant de 1 à 4 et  $i$  de 1 à  $m$ , un réel représentant le coût de production en €/MW de la centrale thermique  $j$  durant la période  $i$ .
- $\omega$ , un réel représentant le coût d'utilisation de l'eau en €/m<sup>3</sup>. Ce coût est incertain mais pour simplifier, nous utilisons une moyenne.
- $P_j^{max}$ , pour  $j$  allant de 1 à 4, un réel représentant la puissance maximale en MW pouvant être fournie par la centrale thermique  $j$  durant une période.
- $T^{max}$ , un réel représentant le volume maximum en m<sup>3</sup> pouvant être utilisé par la centrale hydraulique.

- $A_i$  , pour  $i$  allant de 1 à  $m$ , un réel représentant les apports en eau en  $m^3$  dans le réservoir durant la période  $i$ .
- $V_0$  , un réel représentant le volume initial d'eau en  $m^3$  dans le réservoir.
- $V_{min}$  , un réel représentant le volume minimum d'eau en  $m^3$  dans le réservoir.
- $V_{max}$  , un réel représentant le volume maximum d'eau en  $m^3$  dans le réservoir.
- $\rho$ , un réel représentant le rendement de la turbine en  $MW/m^3$  de la centrale hydraulique.
- $a_{ij}(\xi_j)$  , pour  $j$  allant de 1 à 4 et  $i$  allant de 1 à  $m$ , un réel compris dans l'intervalle  $[0, 1]$  représentant le coefficient de disponibilité de la centrale thermique  $j$  durant la période  $i$ .  $\xi_j$  est l'aléa de panne de la centrale thermique  $j$ .
- $b_i(\xi_\delta)$  , pour  $i$  allant de 1 à 4, un réel représentant la demande de consommation électrique en MW durant la période  $i$ , affectée par l'aléa  $\xi_\delta$ .

Le coût de production est le suivant :

$$\sum_{i=1}^m (\sum_{j=1}^4 (c_{ij} \times x_{ij}) + E[\omega(\xi_\eta)] \times (x_{i5} - A_i))$$

Il est possible de sortir de la fonction objectif le terme  $-\sum_{i=1}^m E[\omega(\xi_\eta)] \times A_i$  car il ne dépend pas des variables d'optimisation.

Nous obtenons la fonction objectif suivante :

$$\min_x \sum_{i=1}^m (\sum_{j=1}^4 (c_{ij} \times x_{ij}) + E[\omega(\xi_\eta)] \times x_{i5})$$

Posons :

- Le vecteur  $x = \begin{pmatrix} x_{11} \\ \vdots \\ x_{15} \\ \vdots \\ x_{m1} \\ \vdots \\ x_{m5} \end{pmatrix}$  avec 5m éléments
- Le vecteur  $c = \begin{pmatrix} c_{11} \\ \vdots \\ c_{14} \\ E[\omega(\xi_\eta)] \\ \vdots \\ c_{m1} \\ \vdots \\ c_{m4} \\ E[\omega(\xi_\eta)] \end{pmatrix}$  avec 5m éléments

La fonction objectif devient donc :

$$\min_x c^T x$$

Nous avons les contraintes suivantes :

$$x_{ij} \leq P_j^{max} \text{ pour } i = 1..m \text{ et } j = 1..4 \quad \text{La puissance d'une centrale est comprise dans } [0, P_j^{max}]$$

$$x_{i5} \leq T^{max} \text{ pour } i = 1..m \quad \text{Le turbinage est compris dans } [0, T^{max}]$$

$$x_{i5} \leq V_0 + \sum_{k=1}^i A_k - \sum_{k=1}^{i-1} x_{k5} - V_{min} \text{ pour } i = 1..m \quad \text{Le volume d'eau dans le réservoir ne doit pas descendre sous } V_{min}$$

$$x_{i5} \geq V_0 + \sum_{k=1}^i A_k - \sum_{k=1}^{i-1} x_{k5} - V_{max} \text{ pour } i = 1..m \quad \text{Le volume d'eau dans le réservoir ne doit excéder } V_{max}$$

$$\sum_{j=1}^4 x_{ij} \times a_{ij}(\xi_j) + x_{i5} \times \rho \geq b_i(\xi_\delta) \text{ pour } i = 1..m \quad \text{La production d'énergie doit être supérieure à la demande}$$

$$x_{ij} \geq 0 \text{ pour } i = 1..m \text{ et } j = 1..5$$

Nous pouvons les écrire sous forme matricielle en posant :

$$H = \begin{pmatrix} -1 & & & & & & & & & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & & & & & & & & & \\ & & -1 & & & & & & & & & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & & & & & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & & & & & & & & & \\ & & & & & -1 & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & -1 & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & \ddots & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & -1 & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & \ddots & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & & \\ & & & & & & & & & & & \ddots & & & & & \\ & & & & & & & & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ & & & & & & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & & \\ & & & & & & & & & & & \ddots & & & & & \\ & & & & & & & & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

H a 7m lignes et 5m colonnes.

$$d = \begin{pmatrix} -P_1^{max} \\ \vdots \\ -P_4^{max} \\ -T^{max} \\ \vdots \\ -P_1^{max} \\ \vdots \\ -P_4^{max} \\ -T^{max} \\ -V_0 - A_1 + V_{min} \\ \vdots \\ -V_0 - \sum_{k=1}^m A_k + V_{min} \\ V_0 + A_1 - V_{max} \\ \vdots \\ V_0 + \sum_{k=1}^m A_k - V_{max} \end{pmatrix} \text{ avec 7m lignes}$$

$$a_i(\xi) = \begin{pmatrix} \vdots \\ a_{i1}(\xi_1) \\ a_{i2}(\xi_2) \\ a_{i3}(\xi_3) \\ a_{i4}(\xi_4) \\ \rho \\ \vdots \end{pmatrix} \text{ les } 5(i-1) \text{ valeurs précédentes et les } 5(m-i) \text{ suivantes sont à } 0 \text{ dans ce vecteur qui à } 5m \text{ éléments.}$$

Le problème s'écrit donc :

$$\min_x c^T x$$

s.c.

$$Hx \geq d$$

$$a_i^T(\xi)x \geq b_i(\xi_\delta) \text{ pour } i = 1, \dots, m$$

$$x \geq 0$$

## II. Modélisations réelles du problème

### 1. Modèle probabiliste

$$\min_x c^T x$$

s.c.

$$Hx \geq d$$

$P[a_i^T(\xi)x \geq b_i(\xi_\delta)] \geq p_i$  pour  $i = 1..m$  La probabilité de respecter l'équilibre de l'offre-demande durant la période  $i$  doit être supérieure à  $p_i$ .

$$x \geq 0$$

### 2. Equivalent déterministe

Ici,  $a_i(\xi)$  et  $b_i(\xi_\delta)$  sont des variables aléatoires gaussiennes indépendantes.

Posons :

- $\Phi^{-1}$ , l'inverse de la fonction de répartition de la loi de probabilité utilisée.
- $\Sigma$ , la variance de la loi de probabilité utilisée.

On a l'équivalence suivante :

$$P[a_i^T(\xi)x \geq b_i(\xi_\delta)] \geq p_i \Leftrightarrow E[a_i^T(\xi)]x - \Phi^{-1}(p_i) \times \sqrt{x^T \Sigma x} \geq E[b_i(\xi_\delta)] \text{ pour } i = 1..m$$

Soit la modélisation suivante :

$$\min_x c^T x$$

s.c.

$$Hx \geq d$$

$$E[a_i^T(\xi)]x - \Phi^{-1}(p_i) \times \sqrt{x^T \Sigma x} \geq E[b_i(\xi_\delta)] \text{ pour } i = 1..m$$

$$x \geq 0$$

### 3. Modèle avec recours

Il faut minimiser le coût de l'énergie sur les  $m$  jours.

Cela comprend :

- le coût de production de l'énergie dans les centrales
- le coût de production de l'énergie hydraulique
- le coût de l'achat de l'énergie manquante sur le marché au prix  $M_{i \text{ achat}}$  durant la période  $i$  un réel en €/MW ou le gain fait en vendant l'énergie excédante au prix  $M_{i \text{ vente}}$  durant la période  $i$  un réel en €/MW.

On note  $y_{i \text{ achat}}(x, \xi)$  l'énergie achetée un réel en MW et  $y_{i \text{ vente}}(x, \xi)$  l'énergie vendue un réel en MW.

Posons :

$$y_{\text{achat}}(x, \xi) = \begin{pmatrix} y_{1 \text{ achat}}(x, \xi) \\ \vdots \\ y_{m \text{ achat}}(x, \xi) \end{pmatrix} \text{ avec } m \text{ lignes}$$

$$y_{\text{vente}}(x, \xi) = \begin{pmatrix} y_{1 \text{ vente}}(x, \xi) \\ \vdots \\ y_{m \text{ vente}}(x, \xi) \end{pmatrix} \text{ avec } m \text{ lignes}$$

$$m_{\text{achat}} = \begin{pmatrix} M_{1 \text{ achat}} \\ \vdots \\ M_{m \text{ achat}} \end{pmatrix} \text{ avec } m \text{ lignes}$$

$$m_{\text{vente}} = \begin{pmatrix} M_{1 \text{ vente}} \\ \vdots \\ M_{m \text{ vente}} \end{pmatrix} \text{ avec } m \text{ lignes}$$

Le problème s'écrit donc sous la forme :

$$\min_x c^T x + E[m_{\text{achat}}^T \times y_{\text{achat}}(x, \xi) - m_{\text{vente}}^T \times y_{\text{vente}}(x, \xi)]$$

s.c.

$$Hx \geq d$$

$$a_i^T(\xi)x + y_{i \text{ achat}}(x, \xi) - y_{i \text{ vente}}(x, \xi) = b_i(\xi_\delta) \text{ pour } i = 1..m$$

vente doit être supérieure à la demande

L'énergie après la production et l'achat ou la

$$x \geq 0, y_{\text{achat}}(x, \xi) \geq 0, y_{\text{vente}}(x, \xi) \geq 0$$



#### 4. Avec scénario

Chaque scénario  $s$  a une probabilité  $\pi_s$  de se produire. On a donc :

$$E[m_{achat}^T \times y_{achat}(x, \xi) - m_{vente}^T \times y_{vente}(x, \xi)] = \sum_{s=1}^S \pi_s \times (m_{achat}^T \times y_{achat}(x, s) - m_{vente}^T \times y_{vente}(x, s))$$

Pour chaque scénario  $s$  on a une contrainte de respect de l'offre-demande :

$$a_i^T(s)x + y_{i \text{ achat}}(x, s) - y_{i \text{ vente}}(x, s) = b_i(s) \text{ pour } i = 1..m \text{ et } s = 1, \dots, S$$

On a donc l'équivalent déterministe suivant :

$$\min_x c^T x + \sum_{s=1}^S \pi_s \times (m_{achat}^T \times y_{achat}(x, s) - m_{vente}^T \times y_{vente}(x, s))$$

s.c.

$$Hx \geq d$$

$$a_i^T(s)x + y_{i \text{ achat}}(x, s) - y_{i \text{ vente}}(x, s) = b_i(s) \text{ pour } i = 1..m \text{ et } s = 1, \dots, S$$

$$x \geq 0, y_{achat}(x, s) \geq 0, y_{vente}(x, s) \geq 0$$

### III. Modélisations binaires du problème

#### 1. Modèle sans aléa

Le modèle probabiliste binaire utilise des paliers de production pour les centrales thermiques et des trajectoires de production hydraulique. A chaque période, un palier de production est décidé pour les centrales thermiques. Une trajectoire de production hydraulique unique est décidée.

- Pour les centrales thermiques, nous avons :

Les matrices des paliers de production des centrales thermiques :

$$P_1 = (p_{11} \ p_{12} \ p_{13} \ p_{14})$$

$$P_2 = (p_{21} \ p_{22} \ p_{23} \ p_{24} \ p_{25})$$

$$P_3 = (p_{31} \ p_{32} \ p_{33} \ p_{34} \ p_{35})$$

$$P_4 = (p_{41} \ p_{42} \ p_{43} \ p_{44} \ p_{45})$$

$nb_j$  le nombre de paliers de la centrale  $j$

Nous avons donc la matrice thermique suivante :

$$A^\theta = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & P_1 & P_2 & P_3 & P_4 \end{pmatrix} \text{ avec } m \text{ lignes et } 19m \text{ colonnes}$$

Ces paliers prennent en compte les contraintes sur les productions maximales des centrales.

Le vecteur de décision thermique avec  $y_{ijk}^\theta$  une variable binaire qui vaut 1 si le palier de production  $k$  de la centrale  $j$  est choisi durant la période  $i$  :

$$y^\theta = \begin{pmatrix} y_{111}^\theta \\ \vdots \\ y_{114}^\theta \\ \vdots \\ y_{m41}^\theta \\ \vdots \\ y_{m45}^\theta \end{pmatrix} \text{ avec } 19m \text{ lignes}$$

On a donc  $x_{ij}^\theta = \sum_{k=1}^{nb_j} P_{kj} y_{ijk}^\theta$  pour  $i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, 4$

Il faut un seul palier par période et par centrale, nous avons donc :

$$\sum_{k=1}^{nb_j} y_{ijk}^\theta = 1 \text{ pour } i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, 4 \Leftrightarrow Hy^\theta = u$$

$$\text{Avec : } H = \begin{pmatrix} h_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & h_4 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & h_1 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & h_4 \end{pmatrix} \text{ avec } 4m \text{ lignes et } 19m \text{ colonnes et } u = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \text{ avec } 4m \text{ lignes}$$

$$h_1 = (1 \quad 1 \quad 1 \quad 1)$$

$$h_2 = (1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1)$$

$$h_3 = (1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1)$$

$$h_4 = (1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1)$$

La matrice de coût est la suivante :

$$c^\theta = \begin{pmatrix} c_{11}p_{11} \\ \vdots \\ c_{14}p_{45} \\ \vdots \\ c_{m1}p_{11} \\ \vdots \\ c_{m4}p_{45} \end{pmatrix} \text{ avec 19m lignes}$$

- Pour la centrale hydraulique, nous avons :

La matrice des trajectoires de production hydraulique :

On a T trajectoires allant d'une utilisation minimale de l'eau à une utilisation maximale

$$A^\eta = \begin{pmatrix} \frac{1}{m}\rho \sum_{i=1}^m A_i & \dots & \frac{1}{m}\rho \sum_{i=1}^m A_i + (t-1)\frac{V_0-V_{min}}{T-1} & \dots & \frac{1}{m}\rho \sum_{i=1}^m A_i + V_0 - V_{min} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{m}\rho \sum_{i=1}^m A_i & \dots & \frac{1}{m}\rho \sum_{i=1}^m A_i + (t-1)\frac{V_0-V_{min}}{T-1} & \dots & \frac{1}{m}\rho \sum_{i=1}^m A_i + V_0 - V_{min} \end{pmatrix} \text{ avec m lignes et T colonnes}$$

Ces trajectoires prennent en compte les contraintes sur l'utilisation de l'eau, à savoir que le volume d'eau dans le réservoir doit être supérieur à  $V_{min}$  et inférieur à  $V_{max}$ .

Le vecteur de décision hydraulique avec  $y_t^\eta$  une variable binaire qui vaut 1 si la trajectoire t est choisie :

$$y^\eta = \begin{pmatrix} y_1^\eta \\ \vdots \\ y_T^\eta \end{pmatrix} \text{ avec T lignes}$$

Il faut qu'une seule trajectoire soit choisie :

$$\sum_{t=1}^T y_t^\eta = 1 \Leftrightarrow u^T y^\eta = 1 \text{ u avec T lignes à 1}$$

La matrice de coût suivante :

$$c^\eta = \begin{pmatrix} E[\omega(\xi_\eta)] \sum_{i=1}^m A_i \\ \vdots \\ E[\omega(\xi_\eta)] (\sum_{i=1}^m A_i + (t-1)\frac{V_0-V_{min}}{T-1}) \\ \vdots \\ E[\omega(\xi_\eta)] (\sum_{i=1}^m A_i + V_0 - V_{min}) \end{pmatrix} \text{ avec T lignes}$$

- On a donc la modélisation sans aléa suivante :

On pose  $y = \begin{pmatrix} y^\theta \\ y^\eta \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} c^\theta \\ c^\eta \end{pmatrix}, A = (A^\theta \quad A^\eta)$

$$\min_y c^T y$$

s.c.

$$Hy^\theta = u$$

$$u^T y^\eta = 1$$

$$Ay \geq b$$

$$y \in \{0,1\}^n$$

## 2. Modèle avec aléa et contraintes en probabilité

On pose  $a_i(\xi) = \begin{pmatrix} \vdots \\ a_{i1}(\xi_1)P_1^T \\ a_{i2}(\xi_2)P_2^T \\ a_{i3}(\xi_3)P_3^T \\ a_{i4}(\xi_4)P_4^T \\ \vdots \\ \frac{1}{m}\rho \sum_{i=1}^m A_i \\ \vdots \\ \frac{1}{m}\rho \sum_{i=1}^m A_i + (t-1) \frac{V_0 - V_{min}}{T-1} \\ \vdots \\ \frac{1}{m}\rho \sum_{i=1}^m A_i + V_0 - V_{min} \\ \vdots \end{pmatrix}$  les puissances produites par les centrales durant la période i avec

l'aléa  $\xi$ . Les  $19(i-1)$  valeurs qui sont dans les premiers : sont à 0, de même pour les  $19(m-i) + T(i-1)$  des seconds et les  $T(m-i)$  des derniers. Les autres sont toutes les valeurs de production possibles de la centrale hydraulique durant la période i. Avec  $19m + Tm$  lignes.

$$\min_y c^T y$$

s.c.

$$Hy^\theta = u$$

$$u^T y^\eta = 1$$

$$P[a_i^T(\xi)y \geq b_i(\xi_\delta)] \geq p \text{ pour } i = 1, \dots, m$$

$$y \in \{0,1\}^n$$

### 3. Equivalent déterministe

Ici, nous avons différents scénarios de disponibilité et de demande. Nous allons en activer certains et en désactiver d'autres pour que la probabilité que les scénarios se déroulent pendant une période  $i$  soit supérieure à  $p_i$ .

Posons :

- $z$  une variable binaire permettant d'activer les scénarios. C'est un vecteur en ligne de  $s$  éléments.  $z_s$  est à 1 si le scénario  $s$  est activé.
- $M$  un scalaire très grand pour désactiver les contraintes.
- $u$  un vecteur colonne rempli de 1.
- $\pi$  un vecteur colonne de  $s$  éléments.  $\pi_s$  est la probabilité que le scénario  $s$  se déroule.
- $A_s$  la matrice de production correspondant au scénario  $s$ . Elle est constituée de  $m$  lignes correspondant aux vecteurs  $a_i^T(s)$ .

Nous avons le modèle suivant :

$$\min_{y,z} c^T y$$

s.c.

$$Hy^\theta = u$$

$$u^T y^\eta = 1$$

$$\pi^T z \geq p$$

$$A_s y - (b_s + Mu)z_s \geq -Mu \text{ pour } s = 1, \dots, S$$

$$y \in \{0,1\}^n, z \in \{0,1\}^s$$

#### 4. Relaxation

La relaxation consiste à passer les contraintes sur les valeurs que peuvent prendre les variables  $y$  et  $z$  de discrètes à continues.

Nous avons donc le programme linéaire suivant :

$$\min_{y,z} c^T y$$

s.c.

$$Hy^\theta = u$$

$$u^T y^\eta = 1$$

$$\pi^T z \geq p$$

$$A_s y - (b_s + Mu)z_s \geq -Mu \text{ pour } s = 1, \dots, S$$

$$0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1$$

## IV. Recuit simulé

### 1. Recuit métallurgique

Le recuit simulé s'inspire du recuit métallurgique utilisant la thermodynamique pour fabriquer des cristaux. Ce sont trois chercheurs d'IBM, Scott Kirkpatrick, C. Daniel Gelatt et Mario P. Vecchi qui ont décrit la méthode du recuit simulé en 1983 et indépendamment par Vlado Černý en 1985.

Le recuit consiste à porter un matériau à haute température pour ensuite le refroidir. En baissant la température, l'énergie interne du matériau baisse. Cependant, en faisant chuter trop brutalement la température, l'énergie interne peut être bloquée dans un minimum local. Il faut donc refroidir lentement le matériau. En effet, plus la température est élevée plus le nombre de transitions acceptées est grand. La probabilité de trouver le métal dans un état  $X$  décroît de manière exponentielle selon la formule  $P(X) = \alpha(T) \times e^{-\frac{E(X)}{K_b T}}$ , où  $\alpha(T)$  est l'inverse de la fonction de répartition,  $E(X)$  l'énergie de l'état  $X$ ,  $K_b$  la constante de Boltzmann et  $T$  la température.

De plus, un palier est marqué entre chaque changement de température pour que celle-ci devienne uniforme dans le matériau.

### 2. Parallèle

Le recuit simulé a pour but d'optimiser une fonction objectif. Cette fonction est en fait l'analogie de l'énergie interne du matériau pour le recuit métallurgique. Selon le problème on peut vouloir maximiser ou minimiser cette fonction objectif, dans cette explication nous choisissons de faire une minimisation. De plus, une température fictive est introduite.

Nous avons une configuration initiale avec une température initiale que nous allons baisser jusqu'à un certain point. À chaque changement de température nous laissons plusieurs transitions se produire pour stabiliser le système comme en métallurgie avant de la faire diminuer de nouveau. De plus nous définissons un voisinage qui est l'ensemble des états atteignables à partir d'un état courant, à l'aide de certaines transformations.

On va générer une solution aléatoire dans un voisinage. Si cette solution est meilleure que la solution actuelle on la choisira. Cependant on ne la rejettera pas automatiquement si elle est moins bonne. Cela dépendra de la température. Plus celle-ci sera élevée, plus la probabilité d'accepter une solution moins bonne sera grande. Si nous nous étions contentés de toujours prendre les meilleures solutions nous courrions le risque de nous enfermer dans un minimum local alors que la meilleure solution sera tout autre.

Pour savoir si on accepte une solution avec une moins bonne fonction objectif, on calcule une probabilité de la même façon que dans le recuit métallurgique. On génère un nombre aléatoire  $p$  entre 0 et 1. Si  $p < e^{-\frac{\Delta}{T}}$ , on acceptera la solution, sinon on la rejettera.  $\Delta$  représente la variation de la fonction objectif et  $T$  la température.

Nous verrons dans la suite comment nous adaptons le recuit simulé à notre problème et donc comment tous ces paramètres sont choisis. C'est d'ailleurs le principal inconvénient du recuit simulé : il y a beaucoup de paramètres à choisir.

### 3. Résultat

Le recuit simulé est une méta-heuristique. Elles permettent de résoudre des problèmes difficiles en des temps raisonnables. En contrepartie, la solution trouvée peut être un minimum local et non le minimum global. En effet, cette méthode est stochastiques et à différents paramètres à fixer. Le résultat dépend donc de plusieurs critères dont le hasard.

### 4. Algorithme

Pour une fonction objectif à minimiser comme dans notre cas :



```

// On initialise le recuit.
Calculer une solution initiale X
 $X_{\text{meilleur}} \leftarrow X$ 
 $f_{\min} \leftarrow f(X_{\text{meilleur}})$ 
Initialiser la température t
// La Condition 1 représente le nombre de paliers de température.
Tant que Condition 1 est vraie, faire :
    // La Condition 2 est le nombre de transformations par palier.
    Tant que Condition 2 est vraie, faire :
        Choisir  $X' \in V(X)$  // On prend une nouvelle solution dans le voisinage.
        Calculer  $\nabla f \leftarrow f(X') - f(X)$ 
        /* Si la nouvelle solution est meilleure que la précédente,
        elle devient la nouvelle solution courante. */
        Si  $\nabla f \leq 0$  alors
             $X \leftarrow X'$ 
            /* Si on améliore la fonction objectif,
            on modifie les meilleures valeurs. */
            Si  $f(X) < f_{\min}$  alors
                 $f_{\min} \leftarrow f(X)$ 
                 $X_{\text{meilleur}} \leftarrow X$ 
            /* Si la nouvelle solution n'est pas mieux que la précédente,
            on calcule la probabilité d'accepter la solution grâce à la distribution de Gibbs-
            Boltzman.
            On accepte la transformation désavantageuse si la probabilité est plus grande
            qu'un nombre tiré aléatoirement entre 0 et 1. */
            Sinon
                Tirer p dans [0, 1]
                Si  $p \leq e^{-\frac{\nabla f}{t}}$  alors
                     $X \leftarrow X'$ 
        t  $\leftarrow g(t)$  // g une fonction décroissante pour faire baisser la température.
Retourner  $X_{\text{meilleur}}$ 

```

## 5. Adaptation au problème

### a) Voisinage

Pour un ensemble de scénarios activés  $z$ , il y a plusieurs configurations  $y$  possibles. Nous allons donc réaliser plusieurs transformations de  $y$  pour une même configuration de  $z$ . Après un certain nombre  $k$  de transformations de  $y$ , nous modifions  $z$  en plus de  $y$ . Si, pour une configuration  $z$ , trop de configurations de  $y$  ont été testées sans succès, il faut modifier à nouveau  $z$ .

Nous avons l'algorithme suivant :

```

nombre d'itérations ← 1 // On incrémente cette variable à chaque fois qu'on applique l'algorithme qui suit
Faire
    Si nombre d'itérations % (k+1) = 0 // k est le nombre de modifications de y pour une configuration z
        Faire
            Changer une valeur aléatoire de z // 0 devient 1, 1 devient 0
            Tant que  $\pi^T z < p$ 

        nombre de tests ← 0 // Variable qui compte le nombre de transformations de y testées impossibles
        Faire
            Changer une valeur de y en respectant les contraintes d'unicité // Cela modifie deux valeurs
            nombre de tests++
            Tant que  $A_s y - (b_s + Mu)z_s < -Mu$  pour  $s = 1, \dots, S$  ET nombre de test < a
        Tant que nombre de tests = a
nombre d'itérations++

```

### b) Solution initiale

Tirer au hasard une solution initiale est une possibilité. Mais il faut savoir que la solution initiale est un paramètre important de cette méta-heuristique. Une bonne solution initiale améliore la recherche de l'optimum. Cependant, faute de temps pour chercher, nous allons utiliser une solution aléatoire.

Il faut créer aléatoirement un vecteur  $z$  et pour chaque période, créer un vecteur  $y_i$  respectant les contraintes d'offre-demande et d'unicité. On peut ajouter un test qui vérifie qu'il n'y a pas trop de vecteurs  $y_i$  rejetés si le vecteur  $z$  est trop mauvais et retirer un vecteur  $z$ .

Nous avons l'algorithme suivant :

```

Faire
    Tirer aléatoirement le nombre de scénarios à activer
    Activer aléatoirement les scénarios pour créer z
Tant que  $\pi^T z < p$ 

Pour i allant de 1 à m
    Faire
        Tirer aléatoirement un vecteur  $y_i$  respectant les contraintes d'unicité
        Tant que  $A_s y - (b_s + Mu)z_s < -Mu$  pour  $s = 1, \dots, S$ 

    Ajouter  $y_i$  au vecteur y

```

### c) Température initiale

La température initiale est un paramètre très important pour le recuit simulé. Elle doit être assez grande pour accepter les transformations coûteuses, c'est-à-dire demandant de tirer un nombre  $p$  au hasard pour l'accepter ou la refuser. Nous voulons un taux d'acceptation de transformations d'au moins 80%. Pour cela nous testons l'algorithme avec différentes températures. Pour chaque température nous faisons vingt itérations pour calculer le taux d'acceptation :

$$\frac{\text{Nombre de transformations coûteuses acceptées}}{\text{Nombre de transformations coûteuses}}$$

Si ce taux est d'au moins 80%, on adopte la valeur de la température comme valeur initiale. Sinon la température est doublée. Nous choisissons 1 000 comme température de départ.

#### d) Décroissance de la température

Pour faire décroître la température, nous utilisons une fonction affine :

$$g(t) = \mu t \text{ avec } 0 < \mu < 1$$

Dans la pratique, il faut choisir  $\mu$  entre 0,85 et 0,95. En lançant le recuit simulé avec différentes valeurs de  $\mu$ , il serait possible de déterminer quelle valeur donne le meilleur résultat. Ne pouvant pas faire cela et faute de mieux, nous choisissons la valeur 0,90. Nous avons donc la fonction suivante :

$$g(t) = 0,90 t$$

#### e) Condition 1

Au final, il faut qu'aucune transformation coûteuse ne soit acceptée. La température doit donc être assez faible à la fin. Nous aurons une valeur seuil de la température, l'algorithme s'arrête lorsqu'elle est atteinte.

Nous estimons que la solution est coûteuse si  $\nabla f \geq 1$ . C'est-à-dire si le coût de production augmente de 1€.

La probabilité minimale d'accepter une solution à une température donnée est  $e^{-\frac{1}{t}}$ . Or nous voulons que la probabilité d'accepter la solution soit quasi nulle. C'est le cas avec une température de 0,01.

Ainsi, tant que la température est supérieure à 0,01 on continue à baisser la température. A 0,01 on sait qu'aucune transformation coûteuse ne sera acceptée, on arrête l'algorithme.

#### f) Condition 2

C'est le temps que nous attendons pour laisser le système se stabiliser. Généralement, c'est taille du problème au carré. Ici nous prenons  $(n \times m + s)^2$ . Ici  $n = 4$ ,  $m = 7$ .