

Splines Hermite

Abdellah Belaid - Safia Echarif

29 novembre 2021

Nous traiterons dans ce sujet l'interpolation Hermite. Ce type d'interpolation étend non seulement les conditions sur les valeurs aux nœuds de la fonction d'interpolation comme l'interpolation de Lagrange, mais aussi sur ses dérivées. Nous chercherons dans un premier temps une courbe spline Hermite cubique P interpolant les points P_k aux paramètres u_k dont On visualisera la qualité de la courbe.

Nous rappelons l'expression des les polynômes d'interpolation Hermite :

$$P(t) = P_0 H_0(t) + P_1 H_1(t) + P_2 H_2(t) + P_3 H_3(t) \quad (1)$$

où $P(t)$ est l'unique polynôme cubique interpolant les points P_0, P_1 et les tangentes (dérivées) m_0 et m_1 aux paramètres 0 et 1, et H_i , $i = 0, 1, 2, 3$ étant les polynômes d'Hermite cubiques.

Les splines Hermite cubiques sont des courbes C^1 polynomiales de degré 3 par morceaux interpolant $N+1$ points P_k et tangentes m_k , $k = 0, \dots, N$ aux paramètres respectifs u_0, \dots, u_n . Ils sont définis par

$$P|_{[u_k, u_{k+1}]}(u) = P_k H_0(t) + P_{k+1} H_1(t) + (u_{k+1} - u_k) m_k H_2(t) + (u_{k+1} - u_k) m_{k+1} H_3(t), u \in [u_k, u_{k+1}] \quad (2)$$

avec $t = \frac{u - u_k}{u_{k+1} - u_k} \in [0, 1]$ le paramètre local, et u le paramètre global.

Partie 1

0. Montrons que P interpole bien les points P_k et les tangentes m_k , $k = 0, \dots, N$

Soit $k \in [0, N]$, on a :

$$\begin{aligned} H_0(t) &= (1-t)^2(1+2t) & H_1(t) &= t^2(3-2t) \\ H_2(t) &= t(1-t)^2 & H_3(t) &= -t^2(1-t) \end{aligned}$$

donc :

$$P(u_k) = P|_{[u_k, u_{k+1}]}(u_k) = P_k$$

on a également :

$$(H_i(t))' = \frac{1}{u_{k+1} - u_k} H'_i(t), i \in [0, 3]$$

D'où on a :

$$P'(u_k) = P'|_{[u_k, u_{k+1}]}(u_k) = m_k$$

Donc P interpole bien les points P_k et les tangentes m_k pour $k \in [0, N]$

1. Expression de P comme courbe de Bézier

supposons que s'écrit sous la forme :

$$P|_{[u_k, u_{k+1}]}(u) = x_k(t) = \sum_{i=0}^3 b_{3k+i} B_i^3(t), u \in [u_k, u_{k+1}]$$

Comme on a

$$\begin{aligned} P(u_k) &= P_k & P(u_{k+1}) &= P_{k+1} \\ P'(u_k) &= m_k & P'(u_{k+1}) &= m_{k+1} \end{aligned}$$

Et de plus on a une paramétrisation equidistante, donc :

$$\begin{aligned} b_{3k} &= P_k & b_{3(k+1)} &= P_{k+1} \\ b_{3k+1} &= b_{3k} + \frac{m_k}{3} & b_{3k+2} &= b_{3(k+1)} - \frac{m_{k+1}}{3} \end{aligned}$$

2. Dessin de deux polygones de contrôle consécutifs, x_k et x_{k+1}

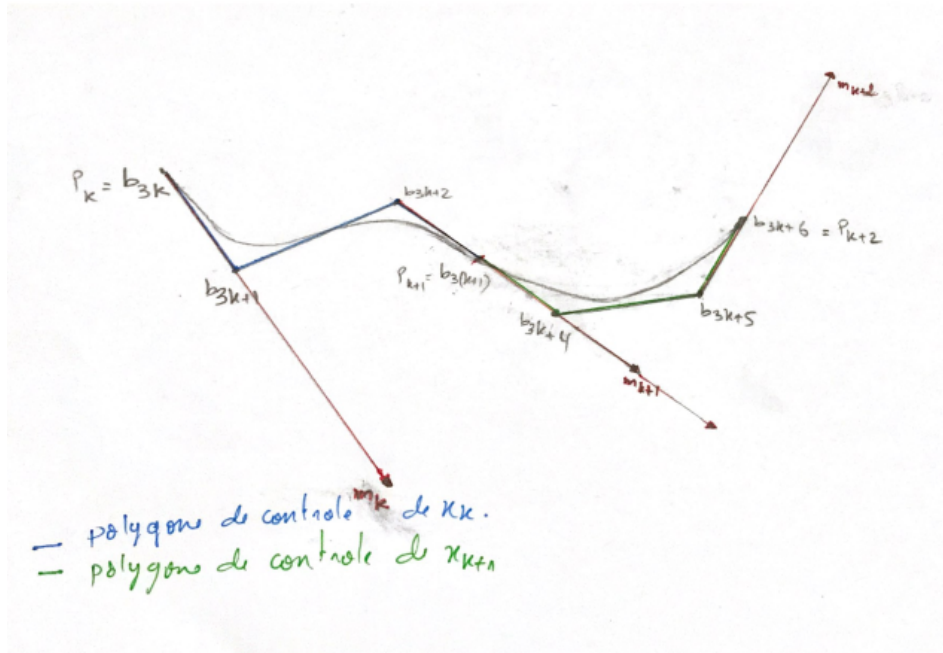


FIGURE 1 – dessin de x_k et x_{k+1}

3. Choix de m_0 et m_N

Comme les expressions des m_k sont similaires à des estimations de dérivée par différences finies, tels que la dérivée au point P_k est calculé à partir des P_{k+1} et P_{k-1} . De la même façon mais à l'aide d'un schéma droite (right-sided scheme) on choisit m_0 , et m_N à l'aide d'un schéma gauche (left-sided scheme), on propose donc les expressions suivantes :

$$m_0 = (1 - c) \frac{P_1 - P_0}{u_1 - u_0} \qquad m_N = (1 - c) \frac{P_N - P_{N-1}}{u_N - u_{N-1}}$$

4. Implémentation des cardinal splines Hermite

4.1

On constate que lorsqu'on fait augmenter c (se rapproche de 1) le graphe se rapproche de plus en plus du polygone de contrôle, jusqu'à aplatissement avec le polygone de contrôle en $c = 1$.

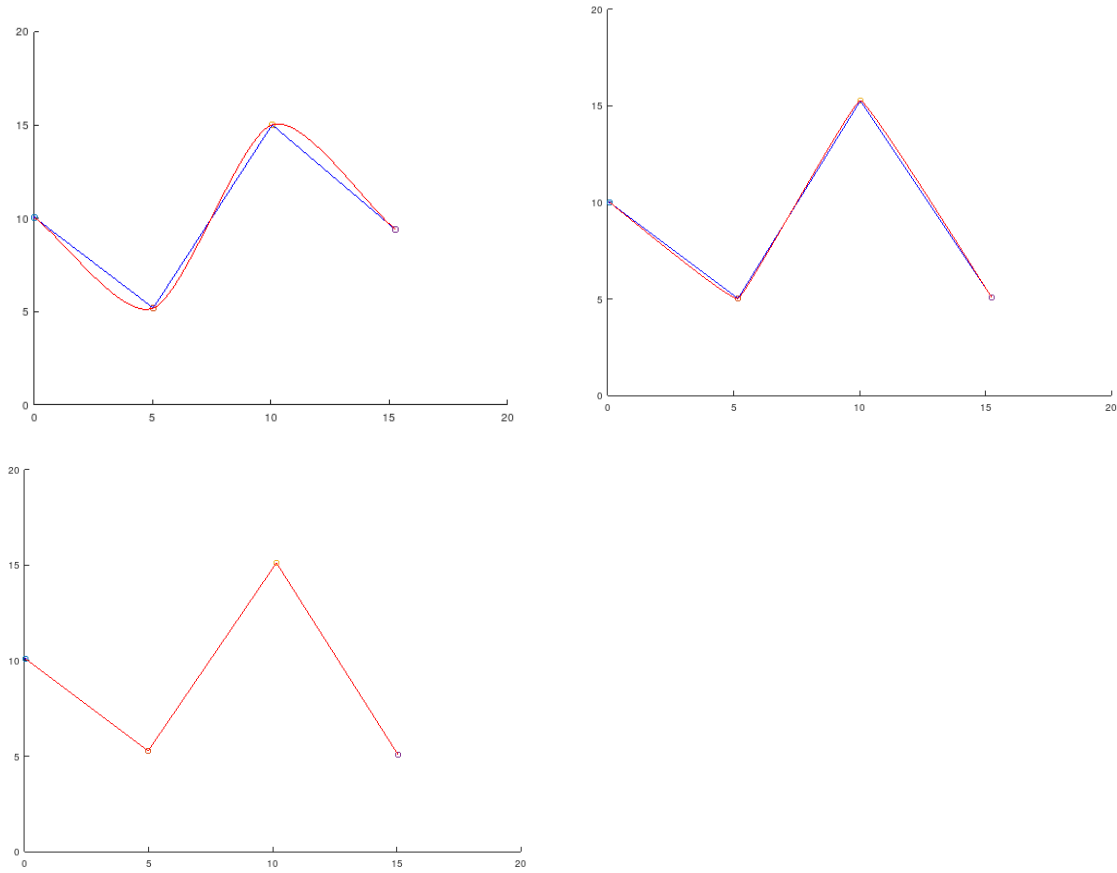
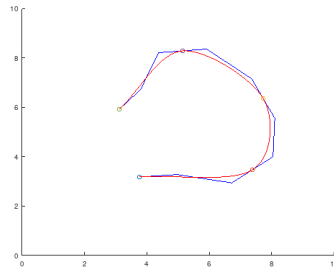


FIGURE 2 – Courbe Hermite pour $c = 0$, $c = 0.5$ et $c = 1$.

4.2

La qualité de la courbe qu'on obtient est bonne, en effet elle n'a pas d'ondulation non désirés, sauf quelque inflexion dans le debut et la fin de la courbe, et préserve les caractéristiques du polygone des points interpolés (convexité, concavité ...).



4.3

Pour les choix des m_k , nous avons fait deux choix :

-le premier consistait à choisir un schéma droite (right-sided scheme), donc on aura :

$$m_k = \frac{P_{k+1} - P_k}{u_{k+1} - u_k}$$

Ce choix nous a apparu moins pertinent que le schema symetrique, car décalée par rapport à la courbe et présente des irrégularités aux extrémités.

-pour le deuxieme choix, on s'est inspiré de la Kochanek–Bartels spline, ce modèle a enrichit

le modèle de deux autres paramètres b et t tels que :

$$m_k = (1 - c) \frac{(1 - t)(1 - b)}{2(u_{k+1} - u_k)} (P_{k+1} - P_k) + (1 - c) \frac{(1 + t)(1 + b)}{2(u_{k+1} - u_k)} (P_k - P_{k-1})$$

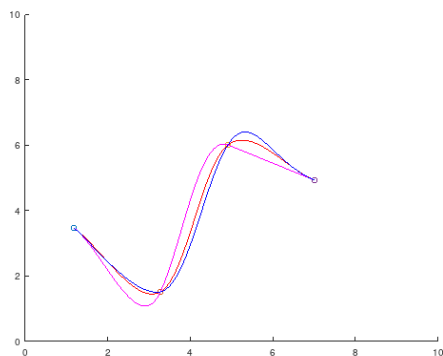


FIGURE 3 – dessin des splines hermite avec les 3 méthodes avec leurs courbures.

5. La courbure

5.1

On remarque des points de discontinuité sur la courbure au niveau des points de contrôle pour les splines hermite, donc on peut bien considérer que la courbure comme un indicateur de qualité d'une courbe, car permet de distinguer les courbes C^1 des courbes C^2 .

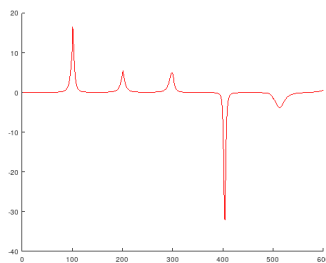


FIGURE 4 – courbure d'un spline hermite.

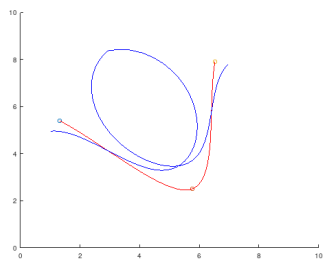


FIGURE 5 – courbe focale d'un spline hermite.

5.2

Notre choix ajuste la courbe dans le sens de réduire les discontinuités de la courbure mais pas les enlever, car nos splines hermite sont par défaut des C^1 .

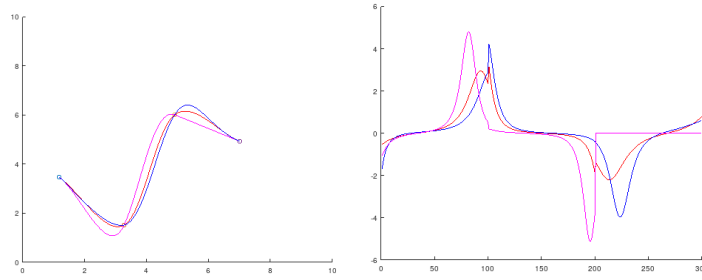


FIGURE 6 – courbures et spline hermite

6. Dessin

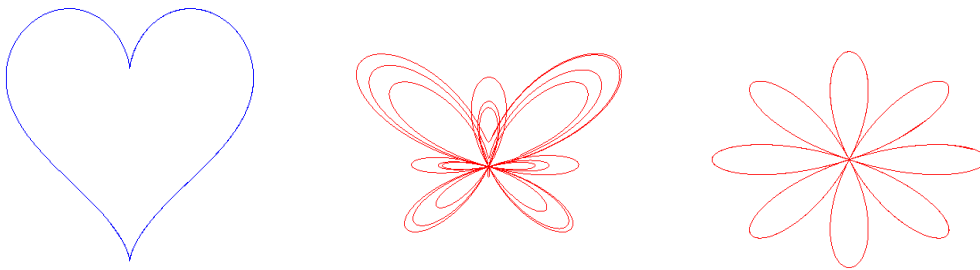


FIGURE 7 – Dessin d'un coeur, d'une papillon d'une fleur.

7. Implémentation de lagrange et spline cubique C^2

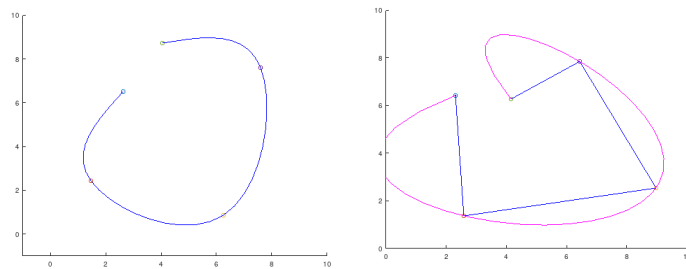


FIGURE 8 – Interpolation Lagrange C^2 .

8. Implémentation de la superposition des 3 courbes d'interpolation

9.

L'interpolation des splines cubiques C^2 nous apparaît meilleure que les splines Hermite C^1 et lagrange, car sa courbure est toujours continue.

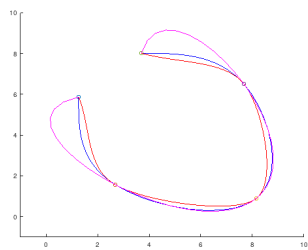


FIGURE 9 – Interpolation Lagrange C^2 .