Mathematica
Fès - Maroc

Algèbre linéaire (Résumé)

1- Les $\mathbb{k}$-espaces vectoriels

1-1- Généralités :

Un $\mathbb{k}$-espace vectoriel est un ensemble des vecteurs dans lequel les opérations élémentaires des vecteurs (la somme et le produit par un scalaire) restent valides.

▶ Pour montrer que F est un $\mathbb{k}$-espace vectoriel, il suffit de montrer qu'il est un sous espace vectoriel inclus dans un $\mathbb{k}$-espace vectoriel connu.

▶ Pour montrer que F est un sous espace vectoriel il suffit de montrer :

1. $F \neq \emptyset$.
2. $(\forall a \in \mathbb{k})\ (\forall x \in F)\ a.x \in F$ (stabilité par la loi externe).
3. $(\forall (x, y) \in F^2)\ x + y \in F$ (stabilité par la loi interne).

Ou bien seulement, $(\forall a \in \mathbb{k})\ (\forall (x, y) \in F^2)\ x + ay \in F$ et $0 \in F$.

1-2- Une base d'un $\mathbb{k}$-espace vectoriel :

Chaque $\mathbb{k}$-espace vectoriel admet une base, c'est un ensemble des vecteurs qui déterminent le nombre de ses dimensions. C'est une partie génératrice et libre en même temps.

▶ Pour montrer que $B = \{e_1, ..., e_n\}$ est une base de E, on peut suivre l'une des méthodes suivantes :

Méthode 1 : Une base = génératrice + libre :

1. Montrer que B est génératrice.
   Soit $x \in E$, il faut écrire x sous forme d'une combinaison linéaire des e_i, c'est à dire sous forme $x = x_1e_1 + x_2e_2 + ... + x_ne_n$.
   On dira alors que B est une famille génératrice de E et on écrit $E = vect(B)$.
2. Montrer que B est libre.
   Soit $(a_1, ..., a_n) \in \mathbb{k}^n$ tel que $a_1e_1 + a_2e_2 + ... + a_ne_n = 0_E$. Il faut montrer que $a_1 = a_2 = ... = a_n = 0$.
   On dira alors que B est une famille libre.

Méthode 2 : Une famille génératrice minimale est une base.
Si on connaît déjà que n est la dimension de l'espace, il suffit de montrer que B est une famille génératrice pour dire que c'est une base (sans montrer qu'elle est libre).

Méthode 3 : Une famille libre maximale est une base.
Si on connaît déjà que n est la dimension de l'espace, il suffit de montrer que B est une famille libre pour dire que c'est une base (sans montrer qu'elle est génératrice).

Méthode 4 : Matricielle.
Si on connaît déjà que n est la dimension de l'espace, on écrit les coordonnées des e_i par lignes (ou par colonnes, peu importe) pour obtenir une matrice M. Il suffit alors que le déterminant de M soit non nul pour dire que B est une base.

Ces méthodes ne sont pas les seules, mais ce sont les plus fréquentes.

▶ Le nombre des éléments d'une base = la dimension.

▶ La dimension de l'espace $\{0\}$ est 0 et sa base est $B = \emptyset$.

▶ Le nombre des éléments d'une famille génératrice $\geq$ la dimension.

▶ Le nombre des éléments d'une famille libre $\leq$ la dimension.

▶ **Théorème de la base incomplète :**

1. Si S est une famille génératrice qui a un nombre des éléments supérieur strictement à la dimension, on peut toujours éliminer quelques vecteurs dedans jusqu'à obtenir une base.
2. Si S est une famille libre qui a un nombre des éléments inférieur strictement à la dimension, on peut toujours ajouter quelques vecteurs dedans jusqu'à obtenir une base.

1-3- La somme directe des sous espaces :

Lorsqu'on a F un sous espace de E de dimension $m < n$, alors il y a des dimensions qui manquent. Si on considère G le sous espace qui rassemble ces dimensions manquantes, on dira alors que E est la somme directe de F et G (ou bien F et G sont supplémentaires) et on écrit $E = F \bigoplus G$.

▶ Pour montrer que $E = F \bigoplus G$, On peut suivre l'une des méthodes suivantes :

Méthode 1 : Par définition :

1. Montrer que $F \cap G = \{0_E\}$.
2. Soit $x \in E$, trouver $x_F \in F$ et $x_G \in G$, tel que $x = x_F + x_G$.

Méthode 2 : Par la dimension :

1. Montrer que $F \cap G = \{0_E\}$.
2. Vérifier que $dimF + dimG = dimE$.

Méthode 3 : Par les bases. Soient B_F et B_G des bases de F et G resp. :

1. Vérifier que $B_G \cap B_F = \emptyset$
2. Montrer que $B_G \cup B_F$ est une base de E.

Ces méthodes ne sont pas les seules, mais ce sont les plus fréquentes.

▶ Si $E = F \bigoplus G$ alors $dimE = dimF + dimG$.

▶ Si $E = F \bigoplus G$ alors $B_F \cup B_G$ est une base de E.

▶ Si F est un sous espace vectoriel de E, on peut toujours le compléter pour obtenir E en faisant une somme directe avec un certain sous espace vectoriel G (i.e. il existe un sous espace G, tel que $E = F \bigoplus G$).

1-4- L'espace quotient :

Si la somme directe permet d'ajouter des dimension à un sous espace, le quotient permet d'annuler des dimensions déjà existantes. Si E un $\mathbb{k}$-espace vectoriel, on veut annuler les dimensions déterminé par les vecteurs $\{v_1, .., v_d\}$, alors on pose $F = vect(v_1, ..., v_d)$ et on fait le quotient E/F qui donne l'espace privé des dimensions de F.

► Les éléments de E/F sont des classes $\overline{x}$ des $x \in E$.
► Dans E/F, $\overline{x} = \overline{y}$ désigne que $x - y \in F$.
► Dans E/F, $\overline{x} = \overline{0}$ désigne que $x \in F$.
► $dim(E/F) = dimE - dimF$.
► $(F \bigoplus G)/F \sim G$ et $(F \bigoplus G)/G \sim F$.

2- Les applications linéaires et les matrices :

2-1- Généralités :

Une application linéaire est une application pour dont l'image d'une ligne reste une ligne (image d'une droite est une droite).

► Pour montrer qu'une application $f : E \to F$ est linéaire (avec E et F sont des $\mathbb{k}$-espaces vectoriels) on montre :

1. $(\forall a \in \mathbb{k})(\forall x \in E)\ f(a.x) = a.f(x)$.
2. $(\forall (x, y) \in E^2)\ f(x + y) = f(x) + f(y)$.

Ou bien seulement $(\forall a \in \mathbb{k})(\forall (x, y) \in E^2)\ f(x + a.y) = f(x) + a.f(y)$.

► Une application linéaire est un **homomorphisme** de E dans F.
► Une application linéaire bijective est un **isomorphisme** de E dans F. (on dit dans ce cas que E est isomorphe à F, noté $E \sim F$).
► Si $E = F$, l'homomorphisme sera appelé **endomorphisme**. S'il est de plus bijectif, il sera appelé **automorphisme**.
► $Kerf = \{x \in E \mid f(x) = 0\}$ est un sous espace vectoriel de E.
► $Imf = \{f(x) \in F \mid x \in E\}$ est un sous espace vectoriel de F.
► le rang de f est la dimension de Imf. $rang(f) = dimImf$.
► Pour montrer que f est surjectif, il suffit de montrer que $Imf = F$ (ou encore, $rang(f) = dimF$).
► Pour montrer que f est injectif, il suffit de montrer que $Kerf = \{0\}$ (ou encore, $rang(f) = dimE$).
► Une application linéaire f est dite **nilpotente** s'il existe un entier $\alpha \in \mathbb{N}$ tel que $f^\alpha = 0$. Son **indice de nilpotence** est la première puissance qui l'annule, c'est à dire β tel que $f^\beta = 0$ et $f^{\beta-1} \neq 0$.
► Si f nilpotente d'indice β, et $x \in E$ tel que $f^{\beta-1}(x) \neq 0$, alors $\{x, f(x), f^2(x), ..., f$ est un système libre.

2-2- Propriétés sur les isomorphismes :

► Si $dimE = dimF$, pour montrer que l'homomorphisme f est bijectif, il suffit de montrer qu'il est injectif (sans montrer la surjectivité), ou bien montrer la surjectivité (sans montrer l'injectivité).
► **Théorème d'isomorphisme :** $E/Kerf$ est isomorphe à Imf (ils auront la même dimension).
► **Théorème du rang :** $dimKerf + rang(f) = dimE$.

► Si $B = (e_1, ..., e_n)$ est une base de E et f un isomorphisme de E dans F, alors $B' = (f(e_1), ..., f(e_n))$ est une base de F.

2-3- Les présentation matricielles des applications linéaires :
Si $dimE = n$ et $dimF = m$, alors la présentation matricielle de f sera une matrice de n colonnes et m lignes.
► Soient $B_E = \{u_1, ..., u_n\}$ et $B_F = \{v_1, ..., v_m\}$ des bases de E et F respectivement. Si $\left\{\begin{array}{lllll} a_{1,1}v_1+ & a_{2,1}v_2+ & \cdots & +a_{m,1}v_m & = f(u_1) \\ a_{1,2}v_1+ & a_{2,2}v_2+ & \cdots & +a_{m,2}v_m & = f(u_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{1,n}v_1+ & a_{2,n}v_2+ & \cdots & +a_{m,n}v_m & = f(u_n) \end{array}\right.$ alors la présentation matricielle de f par rapport aux bases B_E et B_F est la matrice
$$mat(f, B_E, B_F) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$
► Si M est la matrice de f dans la base canonique, alors les coordonnées de $f((x_1, ..., x_n))$ sont les coordonnées de $M \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.
► f est bijectif désigne que sa matrice est inversible.
► Le rang de f est le nombre des pivots de sa matrices après l'échelonnement.
► **La matrice de passage :** Si M est la matrice de l'endomorphisme f dans la base $B = \{e_1, ..., e_n\}$ et M' sa matrice dans la base $B' = \{e'_1, ..., e'_n\}$ alors il existe une matrice inversible P (appelée la matrice de passage de B à B') telle que $M' = P^{-1}MP$.
Et si $\left\{\begin{array}{lllll} a_{1,1}e_1+ & a_{2,1}e_2+ & \cdots & +a_{n,1}e_n & = e'_1 \\ a_{1,2}e_1+ & a_{2,2}e_2+ & \cdots & +a_{n,2}e_n & = e'_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{1,n}e_1+ & a_{2,n}e_2+ & \cdots & +a_{n,n}e_n & = e'_n \end{array}\right.$
alors $P = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}$
(on écrit les coordonnées de la nouvelle base par colonnes)

2-4- Propriétés sur les matrices :
► Pour montrer qu'une matrice est inversible, on peut suivre l'une des méthodes suivantes :
Le déterminant : vérifier que son déterminant est non nul.

$det(A) \neq 0 \iff A$ est inversible.

Le rang : Vérifier que la matrice est carrée (le nombre des colonnes = le nombre de lignes) et le rang égal à la dimension (le nombre de pivots égal le nombre de colonnes).

► $det(A \times B) = det(A)det(B)$.

► $det({}^tA) = det(A)$. (${}^tA$ est la transposée de A).

► la comatrice de A est la matrice $com(A) = (a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq n}}$ où $a_{i,j} = (-1)^{i+j}det(A_{i,j})$ et $A_{i,j}$ est la matrice A privée de la i-ème ligne et j-ème colonne.

► Pour calculer l'inverse de la matrice A, on a deux méthodes générales :

Méthode de l'échelonnement : On met notre matrice A à gauche et la matrice I_n à droite. En suivant les opérations élémentaires de l'échelonnement, on essaie d'obtenir la matrice I_n à gauche. La matrice obtenue à droite est l'inverse de A.

Méthode directe : $A^{-1} = \frac{1}{det(A)} \times {}^tCom(A)$.

3- Les systèmes linéaires :

Un système linéaire est un système d'équations linéaires, il est toujours de la forme :

$$(\Sigma) \quad \left\{ \begin{array}{lllll} a_{1,1}x_1+ & a_{1,2}x_2+ & \cdots & +a_{1,m}x_m & = b_1 \\ a_{2,1}x_1+ & a_{2,2}x_2+ & \cdots & +a_{2,m}x_m & = b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1}x_1+ & a_{n,2}x_2+ & \cdots & +a_{n,m}x_m & = b_n \end{array} \right.$$

► La matrice associée au système (Σ) est $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,m} \end{pmatrix}$

► On peut résoudre le système (Σ) par l'échelonnement de la matrice $(A|B)$.

Avec $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$.

► L'ensemble des solutions de système (Σ) est le sous espace $f^{-1}((b_1, b_2, ..., b_n))$ avec f est l'endomorphisme présenté par la matrice A.

► Le système (Σ) est de Cramer si sa matrice A est inversible.

► Lorsque (Σ) est de Cramer, il admettra une seule solution $(x_1, ..., x_n)$. On peut la trouver directement sans passer par l'échelonnement avec la formule : $x_i = \frac{1}{det(A)} \times |A_i|$ avec A_i est la matrice obtenue en remplaçant la i-ème colonne de A par le vecteur B.

FIN