Les séries numériques

السلاسل العددية

La série c'est la somme infini d'une suite numérique $\sum_{n\geq 1} U_n$

Si $\sum_{n\geq 0} U_n$ $\begin{cases} \text{Constant (ثابت)} \Rightarrow \text{Converge} \\ \pm\infty \Rightarrow \text{diverge.} \end{cases}$

- **Séries Constantes** (السلاسل الثابتة)
  - La forme général $\sum_{n\geq 0} a$ (عدد ثابت) Si $\begin{cases} a = 0 \text{ Converge (متقاربة)} \\ a \neq 0 \text{ diverge (متباعدة)} \end{cases}$
- **Séries géométrique** (السلاسل الهندسية)
  - $\sum_{n\geq 0} q^n$
  - Si $q \in]-1,1[$ Converge (متقاربة)
  - Si $q \in]-\infty,-1[\cup [1,+\infty[$ diverge (متباعدة)
- **Séries harmonique**
  - $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$
  - toujours divergente (دائما متباعدة)
- **Séries de Riemann**
  - $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$
  - $\alpha > 1$ Converge
  - $\alpha \leq 1$ diverge

الشرط اللازم للتقارب

(Condition nécessaire de la Convergence)

$\lim_{n\to+\infty} U_n \neq 0 \Rightarrow \sum_{n\geq 0} U_n = \pm\infty$

السلسلة متباعدة

La série divergente

سلاسل ذات الحدود الموجبة

(Séries à terme positif)

الحد العام موجب $U_n \geq 0$

Critère de comparaison
معيار المقارنة

Si $U_n < V_n$ et $\sum_{n\geq 0} V_n$ converge $\Rightarrow \sum_{n\geq 0} U_n$ converge.

أي تكون الكبيرة متقاربة، الصغيرة متقاربة

Si $U_n > V_n$ et $\sum_{n\geq 0} V_n$ diverge $\Rightarrow \sum_{n\geq 0} U_n$ diverge

الصغيرة متباعدة أي تكون الكبيرة متباعدة

Critère d'équivalence
معيار التكافؤ

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{U_n}{V_n} = \ell$$

$\ell \in]0,+\infty[$

$\Rightarrow \sum_{n\geq 0} U_n$ et $\sum_{n\geq 0} V_n$ sont de même nature

Si $\sum_{n\geq 0} V_n$ converge $\Rightarrow \sum_{n\geq 0} U_n$ converge

Si $\sum_{n\geq 0} V_n$ diverge $\Rightarrow \sum_{n\geq 0} U_n$ diverge

règle de Cauchy
قاعدة كوشي.

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{U_n} = \lambda$$

règle d'Alembert
قاعدة D'Alembert

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = \lambda$$

$0 \leq \lambda < 1 \Rightarrow \sum_{n\geq 0} U_n$ converge

$\lambda > 1 \Rightarrow \sum_{n\geq 0} U_n$ diverge

$\lambda = 1 \Rightarrow$ ne peut rien dire

لا يمكن الحكم.

Séries Alternées

السلاسل المتناوبة

La forme général
الشكل العام → $\boxed{\sum_{n\geq 0}(-1)^n V_n \quad \text{avec } V_n \geq 0}$

Critère de Leibniz

Si $\lim_{n\to+\infty} V_n = 0$

Si V_n décroissante $\Rightarrow \sum_{n\geq 0}(-1)^n V_n$ Converge.

$V_{n+1} - V_n < 0$

$V_n \to f(x)$ على شكل دالة

$f'(x) < 0$ نحسب

سلاسل الكيفية: أي U_n إشارتها كيفية وليست متناوبة. نلجأ لاستخدام التقارب المطلق (la convergence absolue).

$\sum_{n\geq 0} U_n$ Converge absolument $\overset{\text{تعريف}}{\Longleftrightarrow} \sum_n |U_n|$ Converge.

تقارب: إذا كانت $\sum_{n\geq 0}|U_n|$ متقاربة $\Rightarrow \sum_{n\geq 0} U_n$ متقاربة.

$\not\Leftarrow$

خواص:

$\left.\begin{array}{l}\sum_n U_n \text{ متقاربة} \\ \sum_n V_n \text{ متقاربة}\end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{n\geq 0}(U_n+V_n)$ متقاربة.

$\left.\begin{array}{l}\sum_{n\geq 0} U_n \text{ متقاربة} \\ \sum_{n\geq 0} V_n \text{ متباعدة}\end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{n\geq 0}(U_n+V_n)$ متباعدة.

$\left.\begin{array}{l}\sum_{n\geq 0} U_n \text{ متباعدة} \\ \sum_{n\geq 0} V_n \text{ متباعدة}\end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{n\geq 0}(U_n+V_n)$ لا يمكن الحكم على طبيعتها.

④ حالات ما فيها لا يمكن الحكم على طبيعتها :

① $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$ لا يمكن الحكم على تقارب السلسلة $\sum\limits_{n\geq 0} U_n$

② $U_n \leq V_n$
$\sum\limits_{n\geq 0} V_n$ متباعدة

لا يمكن الحكم على طبيعة السلسلة $\sum\limits_{n\geq 0} U_n$

③ $U_n \geq V_n$
$\sum\limits_{n\geq 0} V_n$ متقاربة

لا يمكن الحكم على طبيعة السلسلة $\sum\limits_{n\geq 0} U_n$

④ - D'Alembert
- Cauchy $k = 1$

لا يمكن الحكم على طبيعة السلسلة

⑤ $\sum\limits_{n\geq 0} |U_n|$ متباعدة $\Rightarrow$ لا يمكن الحكم على طبيعة $\sum\limits_{n\geq 0} U_n$

⑥ $\sum\limits_{n} U_n$ متباعدة
$\sum\limits_{n} V_n$ متباعدة
$\Rightarrow \sum\limits_{n\geq 0} (U_n + V_n)$

لا يمكن الحكم على طبيعتها .

(13)

Séries entières

السلاسل الصحيحة

$\sum_{n\geq 0} a_n x^n$

معاملات السلسلة
les coefficients.

$\boxed{\text{le rayon de CV}}$

نصف قطر التقارب

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = R$$

$R \in]0, +\infty[$.

$\boxed{\text{domaine de Convergence}}$

مجال التقارب

① Si $R = +\infty$

Alors. $D = \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$

مجموعة الأعداد الحقيقية

② $D = \quad -R, \ R$.

$]\quad [$
$]\quad]$
$[\quad]$
$[\quad [$

غلق وفتح المجال على حسب تقارب وتباعد السلسلة الصحيحة لما $x=1$ و $x=-1$

بعد حساب R (le rayon de Convergence) نقوم بتحديد مجال التقارب D و لكن قبل ذلك لمعرفة إن كان مجال التقارب مغلق أو مفتوح من جهة الحدود $-R$ و R يجب دراسة تقارب السلسلة الصحيحة لما $x = R$ و لما $x = -R$ نحصل على سلسلة عددية ندرس التقارب بنفس الطريقة في المجال 1 . (السلاسل العددية)

الجهة المتقاربة نغلق عندها المجال
" المتباعدة " نفتح "

Séries de Fourier

(متسلسل فوريي)

$\boxed{f(-x) = f(x)}$

Fonction paire

$b_n = 0 \ \forall n$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$$

$$\boxed{f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 0} a_n \cos nx}$$

$\boxed{f(-x) = -f(x)}$

Fonction impaire

$a_n = 0 \ \forall n$

$$b_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$$

$$\boxed{f(x) = \sum_{n\geq 0} b_n \sin nx}$$

ni paire ni impaire

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 0}\left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right)$$

on $[0, 2\pi[$

. dı

Integral

① Integral simple (Primitive).

f, g, 2 fonctions continue

$$\int (f(x) \pm g(x))\, dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$$

$$\int \alpha f(x) = \alpha \int f(x) \quad \text{où } \alpha \text{ constante}$$

$\int f(x) g(x) \leftarrow$ (التكامل بالتجزئة) intégral par partie ou bien

appliquer les primitive suivantes (أو الدوال التالية)

ⓐ $\int f'(x) [f(x)]^{\alpha} dx = \dfrac{[f(x)]^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \quad \alpha \neq -1$

ⓑ $\int f'(x) [f(x)]^{-1} dx = \int \dfrac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + c$

ⓒ $\int f'(x) e^{f(x)} dx = e^{f(x)} + c.$

ⓓ $\int \dfrac{f'(x)}{1+[f(x)]^2} dx = \arctan(f(x)) + c$

$\arctan = \tan^{-1}$

$\dfrac{1}{a^2+x^2} = \dfrac{1}{a} \times \arctan\left(\dfrac{x}{a}\right)$

ⓔ $\int f'(x) \cos f(x)\, dx = \sin(f(x)) + c$

$\int f'(x) \sin(f(x))\, dx = -\cos(f(x)) + c$

$\int \cos(ax+b)\, dx = \dfrac{1}{a} \sin(ax+b) + c$

$\int \sin(ax+b)\, dx = -\dfrac{1}{a} \cos(ax+b) + c$

Primitive pour les fonction à 2 deux variables

بالنسبة للدوال لي عندها متغيرين

- $\int 1\,dx = x + c$
- $\int 1\,dy = y + c$
- $\int y\,dx = y\int 1\,dx = yx + c$ (y ثابت بالنسبة ل x / y constant par rapport à x)
- $\int x\,dy = x\int 1\,dy = xy + c$ (x ثابت بالنسبة ل y)
- $\int x^n\,dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c$

$$\int y^n\,dy = \frac{y^{n+1}}{n+1} + c.$$

Integral défini

$$I = \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

F primitive de f

الدالة الأصلية ل f.

Integration par partie:

$$\int_a^b u(x)\,v'(x) = \left[u(x)\,v(x)\right]_a^b - \int_a^b u'(x)\,v(x)\,dx.$$

rappel

$\tan^{-1} = \arctan(0) = 0$

$\arctan(1) = \dfrac{\pi}{4}$

$\arctan(+\infty) = \dfrac{\pi}{2}$

$\sin(n\pi) = 0$

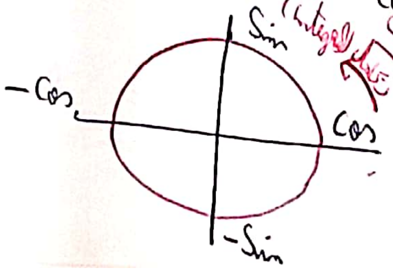
$\cos(n\pi) = (-1)^n$

$\cos 0 = 1$

$\cos\pi = -1$

$\cos\dfrac{\pi}{2} = 0$

$\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$



Integral double

(1)

$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \quad a\leq x\leq b \quad c\leq y\leq d\}$

يا حدود المتغير x و y ثوابت

$$I=\int_c^d\int_a^b f(x,y)\,dx\,dy=\int_a^b\int_c^d f(x,y)\,dy\,dx.$$

لنا الحق في الإختيار سواء نبدأ بالتكامل بالنسبة لـ x وبعدها بالنسبة لـ y أو العكس

(2)

المتغير x مجال التكامل تاعو مرتبط بـ y أي أنه عبارة عن دالة بدلالة y.

$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \quad g_1(y)\leq x\leq g_2(y) \quad c\leq y\leq d\}$

يا يجب البدء التكامل بـ x وبعدها y.

$$I=\int_c^d\left[\int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x,y)\,dx\right]dy$$

و يحق العكس.

(3)

مجال التكامل تاع y مرتبط بـ x يجب بدء المكاملة بالنسبة لـ y وبعدها بالنسبة لـ x و يحق العكس.

$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \quad a\leq x\leq b \quad h_1(x)\leq y\leq h_2(x)\}$

$$I=\int_a^b\left[\int_{h_1(x)}^{h_2(x)} f(x,y)\,dx\right]dy$$

إذا كان D لا يشبه (1) و (2) ، (3) نستخدم إستبدال المتغير ندرس ومقرر عليكم فقط الثنائيات القطبية

(les cordonnées polaires) (4)

$$I=\iint_D f(x,y)\,dx\,dy.$$

$$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \quad a^2\leq(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\leq b^2\}$$

(3)

$$a^2 \leq (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 \leq b^2$$

تكتب D ، $f(x,y)$ و $dxdy$ بدلالة r ، θ ، dr و $d\theta$.

① $dxdy = r\,dr\,d\theta$ (نتيجة ثابتة هكذا دون الحاجة للإثبات)

② $\begin{cases} x = x_0 + r\cos\theta \\ y = y_0 + r\sin\theta \end{cases}$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} \cancel{\neq 0}$$

$$\boxed{\det J \neq 0} \quad \det J = r$$

③ $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / a^2 \leq (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 \leq b^2\}$

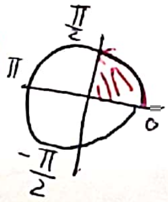
$$a^2 \leq (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 \leq b^2$$

$$a^2 \leq r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta \leq b^2$$

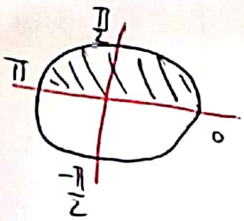
$$a^2 \leq r^2(\underbrace{\cos^2\theta + \sin^2\theta}_{=1}) \leq b^2 \Rightarrow a^2 \leq r^2 \leq b^2$$

$$\boxed{a \leq r \leq b}$$

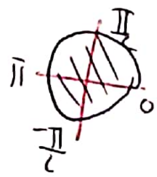
$\begin{cases} x - x_0 \geq 0 \\ y - y_0 \geq 0 \end{cases}$ $\boxed{\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]}$



$\begin{cases} x - x_0 \in \mathbb{R} \\ y - y_0 \geq 0 \end{cases}$ $\boxed{\theta \in [0, \pi]}$



$\begin{cases} x - x_0 \in \mathbb{R} \\ y - y_0 \in \mathbb{R} \end{cases}$ $\theta \in [0, 2\pi[$



$D' = \{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 / a \leq r \leq b$ et $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ou $[0, \pi]$ ou $[0, 2\pi[$ $\}$ {وحدة من الحالات هادو}

(1)

Intégrale généralisée

(1) $\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$

(2) l'une des bornes $\pm\infty$. (قيمة ممنوعة أو $\pm\infty$.)

لدينا أربع حالات :

(1) لدينا مشكل واحد على مستوى إحدى الحدود أو قيمة ممنوعة
Un seul Problème dans les bornes

ملاحظة: كل الحالات نستمر بنفس المثال باه تفهمو.

$f(x) = \frac{1}{x-2}$

$\boxed{1}$ $I = \int_3^{\boxed{+\infty}} f(x)\,dx$ → Problème

$= \lim_{t \to +\infty} \boxed{\int_3^t f(x)\,dx}$

تكامل تكامل بسيط بالطرق لي تعرفوها من قبل وفي الأخير تحسبو النهاية.

$\boxed{2}$ $I = \int_{\boxed{2}}^6 f(x)\,dx$ → Problème car $\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{1}{x-2} = +\infty$.

$\lim_{t \to 2} \boxed{\int_t^6 f(x)\,dx}$.

تكامل بسيط.

2

لا يوجد أي مشكل في الحدود ولكن توجد قيمة ممنوعة تنتمي لمجال التكامل.

Il y a aucune Problème dans les bornes mais il y a autre Problème $\alpha \in [a,b]$

قيمة ممنوعة — مجال التكامل

$$I = \int_1^5 f(x)\,dx$$

$\frac{1}{x-2}$ — 1 et 5 ne sont pas des Problèmes.

mais 2 Problème et $2 \in [1,5]$

donc $I \int_1^5 = I_1 + I_2$

$\int_1^{2} \quad \int_{2}^{5}$

$$I_1 = \lim_{t \to 2} \int_1^t \frac{1}{x-2}\,dx$$

$$I_2 = \lim_{t \to 2} \int_t^5 \frac{1}{x-2}\,dx$$

en général

- Si I_1 et I_2 Converge $\Rightarrow I = I_1 + I_2$ Converge.

  الإثنين متقاربين $\Leftarrow I$ متقارب

- Si l'une de I_1 ou bien I_2 diverge $\Rightarrow I$ diverge

  واحد منهم متباعد $\Leftarrow I$ متباعد

3

يوجد عدة مشاكل في الحدود و قيمة ممنوعة داخل مجال التكامل

I Contient plusieurs Problèmes.

On divise l'intégral I en plusieurs sous intervalles de sorte que chaque sous intervalles contient 1 seul Problème.

EX $I = \displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x-2}\, dx$

2 Problème $[\ _2^{+\infty}$

$I = \displaystyle\int_{1}^{+\infty}$

$\displaystyle\int_{1}^{2} \to I_1$ seul Problème

$\displaystyle\int_{2}^{+\infty}$

$\displaystyle\int_{2}^{3} \to I_2$ seul Problème

$\displaystyle\int_{3}^{+\infty} \to I_3$ seul Problème

عدنا مشكلين نقسم المجال بحيث يكون مشكل
واحد عند الحدود .

$$I = I_1 + I_2 + I_3$$

$$I_1 = \lim_{t \to 2} \int_{1}^{t} \frac{1}{x-2}\, dx$$

$$I_2 = \lim_{t \to 2} \int_{t}^{3} \frac{1}{x-2}\, dx$$

$$I_3 = \lim_{t \to +\infty} \int_{3}^{t} \frac{1}{x-2}\, dx .$$

le choix de 3 est arbitraire, on peut choisir 4, 5, 6 ...

(أي رقم داخل المجال التالي $]2,+\infty[$

Si I_1, I_2, I_3 converge $\Rightarrow$ I converge.

Si l'une diverge $\Rightarrow$ I diverge.

إذا كان واحد منهم متباعد I متباعد .

Scanné avec CamScanner

$\boxed{\text{Si } I \text{ contient } 0 \text{ problème}} \Rightarrow I$ converge. ④

$$I = \int_3^7 \frac{1}{x-2}\,dx$$

2 problème mais $2 \notin [3,7]$

donc I converge

دون اللجوء للحساب إلا إذا طلب Calculer I و ليس حدد طبيعة.