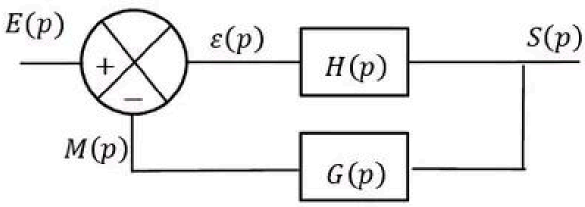
Performances des systèmes asservis

Fiche résumé

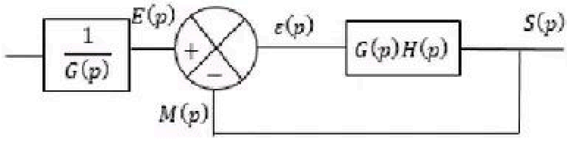
Programme - Compétences		
B226	Modéliser	Systèmes non linéaires · Modèle de non linéarité (hystérésis, saturation, seuil, retard) ; · Linéarisation du comportement des systèmes non linéaires continus.
B227	Modéliser	Modélisation des systèmes asservis · Stabilité : - définition, nature de l'instabilité (apériodique, oscillatoire), - contraintes technologiques engendrées, - interprétation dans le plan des pôles, - critère du revers, - marges de stabilité, - dépassement.
B228	Modéliser	· Pôles dominants et réduction de l'ordre du modèle ; · Performances et réglages ; · Précision d'un système asservi en régime permanent pour une entrée en échelon, une entrée en rampe, une entrée en accélération ; · Rapidité d'un système asservi : - temps de réponse, - bande passante.
B229	Modéliser	· Amélioration des performances d'un système asservi ; - critères graphiques de stabilité dans les plans de Black, Bode, marges de stabilité ; - influence et réglage d'une correction proportionnelle, intégrale, dérivée ; - prise en compte d'une perturbation constante, créneau ou sinusoïdale.

Systèmes asservis

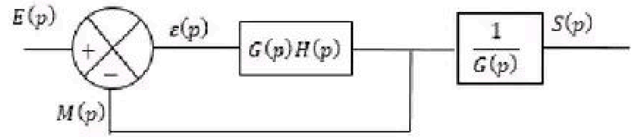


$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$$

$\Leftrightarrow$



$\Leftrightarrow$



	1° ordre	2° ordre
Seul	$H(p) = \frac{K}{1+\tau p}$	$H(p) = \frac{K}{1+\frac{2z}{\omega_0}p+\frac{p^2}{{\omega_0}^2}}$
Bouclé Retour unitaire	$H(p) = \frac{K_{BF}}{1+\tau_{BF}p}$ $K_{BF} = \frac{K_{BO}}{1+K_{BO}}$ $\tau_{BF} = \frac{\tau_{BO}}{1+K_{BO}}$	$H(p) = \frac{K_{BF}}{1+\frac{2z_{BF}}{\omega_{0BF}}p+\frac{p^2}{{\omega_{0BF}}^2}}$ $\omega_{0BF} = \omega_{0BO}\sqrt{1+K_{BO}}$ $K_{BF} = \frac{K_{BO}}{1+K_{BO}}$ $z_{BF} = \frac{z_{BO}}{\sqrt{1+K_{BO}}}$

Performances des systèmes

Stabilité	Rapidité	Précision	Allure de la réponse
Pôles FTBF Revers FTBO $\Delta\varphi$ - ΔG	$tr_{5\%}$ t_m ω_{c_0} - BP_0	ε_s ε_v Influence perturbations	2° ordre z & $D_{\%}$

Stabilité

Définition
Système stable
Entrée bornée ⇒ Sortie bornée
Asymptotiquement stable : converge

Condition fondamentale de stabilité
Système stable
$Re(Pôles\ FTBF) < 0$

Critères de stabilité

Algébrique
Parties réelles des pôles : FTBF

Graphique
Revers : FTBO

Critère graphique du Revers

Bode

Abscisse	Ordonnée
ω	G_{dB} & φ^0

Nyquist

Abscisse	Ordonnée
$Re(\underline{H})$	$Im(\underline{H})$

Black

Abscisse	Ordonnée
φ^0	G_{dB}

Etude de la FTBO → Stabilité de la FTBF

Critère du Revers = Cas particulier du critère de Nyquist
Etude du lieu de la FTBO par rapport au point critique :
$(|H_{j\omega}|, \varphi_{j\omega}) = (1, -180°)\ ou\ (G, \varphi_{j\omega}) = (0, -180°)$
Condition d'application : FTBO stable mais en acceptant au plus 1 pôle nul

Critère de Nyquist simplifié
Un système en BF est asymptotiquement stable si le lieu de Nyquist complet de la BO ne fait pas le tour du point critique dans le sens horaire

Critère du Revers
Un système asservi est stable en BF si, en décrivant le lieu de transfert de la BO dans le sens des pulsations ω croissantes dans le plan de

- Bode : à la pulsation
  - Et à $\omega_{c_0}/G_{dB} = 0$, $\varphi > -180°$
  - Et à $\omega/\varphi = -180°, G_{dB} < 0$
- Nyquist : le point critique est à gauche
- Black : le point critique est à droite

Cas particuliers dans Bode : se ramener à Black

FTBO

Marge de gain	Marge de phase	
$\Delta G = -20 \log\lvert H(j\omega_{-180°})\rvert$ $\arg H(j\omega_{-180°}) = -180°$ Marge de gain minimale : 10 à 15 dB	$\Delta\varphi = \arg H(j\omega_{c0}) - (-\pi) = \pi + \arg H(j\omega_{c0})$	
	1° ordre	Second ordre
	Existence de $\omega_{c0} \Leftrightarrow K > 1$	
	$\omega_{c0} = \omega_0\sqrt{K^2 - 1}$	$\omega_{c0} = \omega_0\sqrt{\sqrt{(2z^2 - 1)^2 + (K^2 - 1)} + (1 - 2z^2)}$

FTBO

Conclusions
$\nearrow K_{BO} \Rightarrow \nearrow \omega_{c_0} \Rightarrow \searrow \varphi_{\omega_{c_0}} \Rightarrow \searrow \Delta\varphi \Rightarrow \searrow$ Stabilité

Remarque
Vérifier la stabilité d'un système avant d'utiliser le théorème de la valeur finale

Stabilité 1° et 2° ordre en BF
1° ou 2° ordre en BF : stable en BF grâce aux pôles
1° ou 2° ordre en BO : Stable en BF grâce au Revers

Précision

Systèmes

Ecart des systèmes *Au comparateur*	
Retour non unitaire	Retour unitaire
$\varepsilon(t) = e(t) - m(t)$	$\varepsilon(t) = e(t) - s(t)$

$$\varepsilon(p) = \frac{1}{1 + FTBO(p)} E(p)$$

$$E(p) = \frac{a}{p^{\beta}} \quad ; \quad \beta > 0$$

$$FTBO(p) = K_{BO} \frac{1 + a_1 p + a_2 p^2 + \cdots + a_n p^n}{p^{\alpha}(1 + b_1 p + b_2 p^2 + \cdots + b_m p^m)}$$

$$\alpha > 0 \quad ; \quad \alpha + m > n$$

$e(t)$	$E(p)$	Ecart au comparateur
$au(t)$	$\frac{a}{p}$	ε_s ou « Ecart statique »
$atu(t)$	$\frac{a}{p^2}$	ε_v ou « Ecart de traînage »

α : classe de la FTBO - Nombre d'intégrations

$\alpha + m$: ordre de la FTBO - Degré du dénominateur

Expression générale de l'écart statique

Soit un système quelconque
Fonction de transfert H
Gain statique K

$$H(p) = \frac{K}{p^{\alpha}} \frac{1 + a_1 p + a_2 p^2 + \cdots + a_n p^n}{1 + b_1 p + b_2 p^2 + \cdots + b_m p^m}$$

Système stable $\Rightarrow \alpha = 0$

$\Rightarrow \lim_{p \to 0}\big(H(p)\big) = K$	$\Rightarrow \varepsilon_s = E_0(1 - K)$

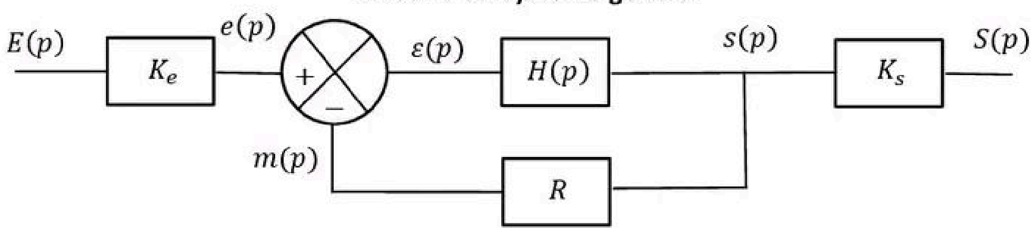
Ecart A (au comparateur) des systèmes bouclés (entrée e /sortie s) et classe de la FTBO

Nature de l'entrée			Classe du système			
$e(t)$ *Entrée système*	$E(p)$		$\alpha = 0$	$\alpha = 1$	$\alpha = 2$	$\alpha > 2$
Dirac $e(t) = a\delta(t)$	a	$\beta = 0$	0	0	0	0
Echelon $e(t) = Eu(t)$	$\frac{E}{p}$	$\beta = 1$	$\frac{E}{1 + K_{BO}}$	0	0	0
Rampe $e(t) = atu(t)$	$\frac{a}{p^2}$	$\beta = 2$	∞	$\frac{a}{K_{BO}}$	0	0

Conclusions
↗ Classe ⇒ ↗ Précision
Si ε fini, ↗ K_{BO} ⇒ ↗ Précision
Si Classe 0, $\varepsilon_v = \infty$

Remarques
Une intégration
⇒ Ecart statique nul et Ecart de traînage fini

Erreur d'un système général



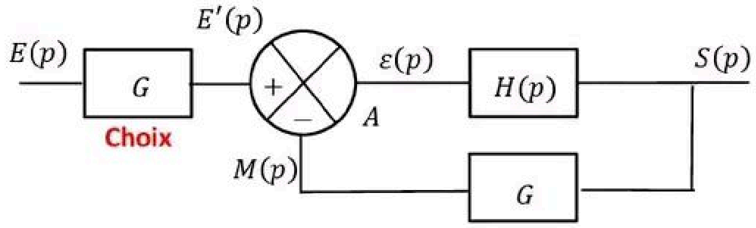
Si système stable

$$\Sigma = \lim_{t\to\infty}\big(E(t) - S(t)\big) \quad ; \quad A = \lim_{t\to\infty}\big(\varepsilon(t)\big)$$

$$\Sigma \propto A \; si \; R = K_e K_s$$

On dit aussi que l'écart est nul si entrée = sortie

Cas généralement traité : Système de classe supérieure ou égale à 1



$\Sigma \propto A$
Attention : entrée de boucle pour le calcul de A multipliée par G

⇔

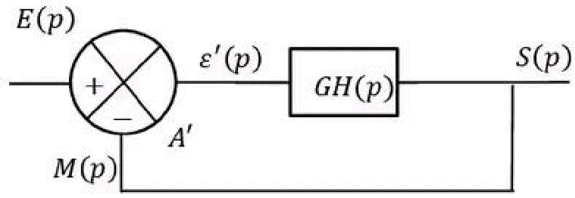


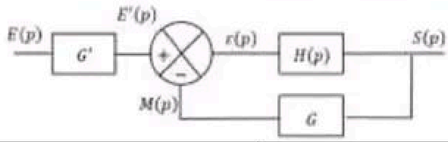
Tableau de A'		
$e(t)$	$\alpha = 1$	$\alpha = n > 2$
Dirac	0	0
Echelon E	0	0
Rampe at	$\frac{a}{K_{BO}}$	0

Expression de K_{BF} – $FTBO$ de classe α

Retour unitaire $K_{CD} = K_{BO}$		Retour non unitaire G $K_{BO} = K_{CD}G$	
$\alpha = 0$	$\alpha \geq 1$	$\alpha = 0$	$\alpha \geq 1$
$K_{BF} = \dfrac{K_{CD}}{1 + K_{BO}}$	$K_{BF} = 1$ & $\varepsilon_s = 0$!	$K_{BF} = \dfrac{K_{CD}}{1 + K_{BO}}$	$K_{BF} = \dfrac{1}{G}$

1 - Classe 1 et retour unitaire : $K_{BF} = 1$ & $\varepsilon_s = 0$
2 - Connaissant K_{BF}, on retrouve $\varepsilon_s = E(1 - K_{BF})$
3 - Dans le cas du système général précédent, le gain statique du système complet s'écrit $K_{Comp} = K_E K_S K_{BF}$ et $\Sigma = E\left(1 - K_{Comp}\right)$

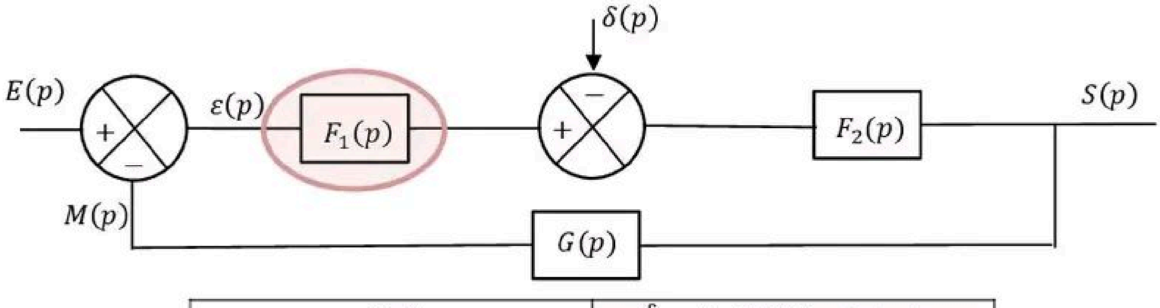
Choix du gain G' - Systèmes à retour G



$\alpha = 0$	$\alpha \geq 1$
$G' = \dfrac{1 + K_{BO}}{K_{CD}}$	$G' = G$

$G = G' : \Sigma \propto A$

Influence des perturbations



$\delta(p)$	${\varepsilon_s}^{\delta} = 0$ si $F_1(p)$ est de classe
Impulsion	≥ 0
Echelon	≥ 1
Rampe	≥ 2

Conclusions

La classe de la partie en amont d'une perturbation influence l'écart qu'elle engendre

Une intégration en amont d'une perturbation de type impulsion ou échelon annule son effet

Si ${\varepsilon_s}^{\delta} \neq 0 : \nearrow K\ de\ F1 \Rightarrow \searrow {\varepsilon_s}^{\delta}$

Rapidité

$$S_\infty = \lim_{t \to +\infty} s(t) \qquad \forall t > tr_{X\%}, \left(1 - \frac{X}{100}\right) S_\infty < s(t) < \left(1 + \frac{X}{100}\right) S_\infty \qquad t_m = \min_i t_i \,/ s(t_i) = S_\infty$$

$$\omega_{c_0} = \omega / |H_{j\omega}| = 1; G_{dB} = 0 \qquad \omega_c = \omega / G_{dB} = G_o - 3$$

$$BP_o = [0; \omega_{c_0}] \; ; \; |H_{j\omega}| > 1 \; ; G_{dB} > 0 \qquad BP = [0; \omega_c]$$

	1° ordre	2° ordre
Seul	$tr_{5\%} = 3\tau$ $\omega_c = \omega_0$ $\omega_{c_0} = \omega_0\sqrt{K^2 - 1}$	$\omega_0 t_m \approx 3$ $tr_{5\%}\omega_0 = k(z)$ $k(0{,}7) = 3$ – Plus rapide $k(1) = 5$ – Plus rapide sans dépassement $\omega_c = \omega_0\sqrt{\sqrt{(2z^2-1)^2+1} - (2z^2-1)}$ $\omega_{c_0} = \omega_0\sqrt{\sqrt{(2z^2-1)^2+(K^2-1)} + (1-2z^2)}$
	$\nearrow \omega_0 \Leftrightarrow \nearrow$ Rapidité	
Bouclé Retour unitaire	$K_{BF} = \frac{K_{BO}}{1+K_{BO}}$ $\tau_{BF} = \frac{1}{\omega_{0_{BF}}} = \frac{\tau_{BO}}{1+K_{BO}}$	$\omega_{0_{BF}} = \omega_{0_{BO}}\sqrt{1+K_{BO}}$ $K_{BF} = \frac{K_{BO}}{1+K_{BO}}$ $z_{BF} = \frac{z_{BO}}{\sqrt{1+K_{BO}}}$
	$\nearrow K_{BO} \Rightarrow \nearrow \omega_{0_{BF}} \Rightarrow \nearrow t_m \Leftrightarrow \nearrow$ Rapidité $\nearrow K_{BO} \Rightarrow \left(\nearrow \omega_{c_{0_{BO}}} \Leftrightarrow \nearrow BP_{o_{BO}}\right)$ $\nearrow K_{BO} \Rightarrow \nearrow \omega_{0_{BF}} \Rightarrow \nearrow \left(\omega_{c_{0_{BF}}} \Leftrightarrow BP_{o_{BF}}\right)$ Attention : $\nearrow K_{BO} \Rightarrow tr_{5\%}$ tant que $z_{BF} \geq 0{,}7$	

Allure de la réponse

Système du second ordre

Si $z < 1$

$$D_{1\%} = e^{\frac{-\pi z}{\sqrt{1-z^2}}}$$

$$t_1 = \frac{\pi}{\omega_0\sqrt{1-z^2}}$$

Bouclage d'un 2° ordre

$$z_{BF} = \frac{z_{BO}}{\sqrt{1+K_{BO}}} < z_{BO}$$

$\Rightarrow$ Diminution d'amortissement

$\Rightarrow$ Apparition ou augmentation du dépassement