Université de Dr Yahia Farès de Médéa. **Département** de T.C.T.
Module: Maths03 -2èmeAnnée ST. **Durée**: 1h.

Rattrapage.N°1: **Maths 03**

Exercice 1. **(4 points):.** Pour les deux cas suivants, tracer D, puis calculer l'intégrale I :

1. $I = \iint\limits_D 2x^2 y dx dy$ où $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ y \geq 0, \text{et } y + x \leq 1\ \}$..

Exercice 2. **(7 points)**

1. Donner l'énoncé du théorème de comparaison, puis étudier la convergence de intégrale suivant

$$(a) \quad \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx.$$

2. Donner l'énoncé de la condition néccéssaire et non suffisante de la convergence d'une série numérique.

3. Etudier la convergence des séries numériques suivantes

$$(a) \quad \sum_{n\geq 0} \frac{n^3}{n^2+1} \qquad (b) \quad \sum_{n\geq 1} \frac{2}{\sqrt{n}}$$

Exercice 3. **(4 points)**.

1. Montrer que la solution de l'équation différentielle homogène $y' + y \tan x = 0$ est donnée par $y = \lambda \cos x$, $\lambda \in R$

2. Endéduire la solution générale de l'équation différentielle $y' + y \tan(x) = \cos(x) \sin(x)$

Exercice 4. **(5 points):** Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ la suite de fonctions définie par $f_n(x) = \frac{1}{(1+x^2)^n}$.

- Étudier la convergence simple et la convergence uniforme sur $I = [0, +\infty[$.
  Étudier la convergence simple et la convergence uniforme sur I $=$ [a;+ 1 [: a>0

SOLUTION DÉTAILÉE DE RATTRAPAGE F.S. N 1: MATHS 03

Exercice 1. **(4 points: 2+2)** :pour les deux cas suivants, tracer D, puis calculer $\iint\limits_{D} f(x,y)\,dxdy$:

1. $\iint\limits_{D} 2x^2y\,dxdy$ où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ y \geq 0, \text{et } y + x \leq 1\ \}$...............(02 pts)

Solution.

1. Fixons x entre 0 et 1. Le nombre y varie de 0 à $1 - x$. Donc

$$\begin{aligned}
\iint\limits_{D_1} 2x^2y\,dxdy &= \int\limits_{x=0}^{x=1}\left[\int\limits_{0}^{1-x} 2x^2y\,dy\right]dx = \int\limits_{x=0}^{x=1} x^2\left[\int\limits_{0}^{1-x} 2y\,dy\right]dx = \int\limits_{x=0}^{x=1} x^2(1-x)^2\,dx = \int\limits_{x=0}^{x=1} x^2(1-x)^2\,dx \\
&= \int\limits_{x=0}^{x=1}\left(x^4 - 2x^3 + x^2\right)dx = \left[\frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{2} + \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{30}.
\end{aligned}$$

Exercice 2. **(6 points:2+2+2)**.

1. Donner l'énoncé du théorème de comparaison, puis étudier la convergence de l'intégrale $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx$. ....(02 pts)

2. Donner l'énoncer de la nécéssaire et non suffisante de convergence d'une série numérique.et étudier la convergence des séries numériques suivantes. ....(02 pts)

$$(a)\ \sum_{n\geq 0} \frac{n^3}{n^2+1} \qquad (b)\ \sum_{n\geq 1} \frac{2}{\sqrt{n}} \qquad (c)\ \sum_{n\geq 1} \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$$

Solution.

1. **Théorème de comparaison.** Soient f et g deux fonctions positives et continues sur $[a, +\infty[$. Supposons que f soit majorée par g au voisinage de $+\infty$: *i.e.* $\exists A \geq a$ tq $\forall x \geq A :\ f(x) \leq g(x)$

   si $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx$ converge alors $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$. Et si $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ diverge alors $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx$ diverge.

- On a pour tout $x \in [1, +\infty[$: $\left|\frac{\sin x}{x^2}\right| \leq \frac{1}{x^2}$. Or l'intégrale de Riemann $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ est convergente alors d'après le théorème de comparaison l'intégrale $\int\limits_1^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x^2}\right| dx$ est convergente$\Longrightarrow$ $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx$ est absolument convergente $\Longrightarrow$ $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx$ est convergente.

2. **Théorème d'Abel.** Soit f une fonction dérivable sur $[a, +\infty[$, positive, décroissante, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Soit g une fonction continue sur $[a, +\infty[$, telle que $\left|\int\limits_a^b g(x)\,dx\right| \leq M$.

   Alors l'intégrale $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,g(x)\,dx$ converge.

- Avec $f(x) = \frac{1}{x}$ et $g(x) = \sin x$. On a sur $[1, +\infty[$ f est positive, dérivable et décroissante car $f'(x) = \frac{-1}{x^2} < 0$ et de plus $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Ainsi pour tout $[a, b] \subset [1, +\infty[$,

$$\left|\int\limits_a^b g(x)\,dx\right| = \left|\int\limits_a^b \sin x dx\right| = \left|[-\cos x]_a^b\right| = |\cos b| + |\cos a| \leq 2 = M.$$

D'après le théorème d'Abel, l'intégrale $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ est convergente.

3. (a) On a $\underset{n\to+\infty}{lim} \arctan n = \frac{\pi}{2} \neq 0$, la condition nécéssaire de convergence n'est pas vérifiée et donc la série $\sum\limits_{n\geq 0} \arctan n$ est divergente.

(b) On utilise la règle d'Alembert $\underset{n\to+\infty}{lim} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \underset{n\to+\infty}{lim} \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}\frac{(n)!}{(n)^n} = \underset{n\to+\infty}{lim} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \underset{n\to+\infty}{lim} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e > 1$, et donc la série $\sum\limits_{n\geq 0} \arctan n$ est divergente.

Exercice 3. (5 points:2+3). Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. - Montrer que La solution de l'équation homogène $y' + y\tan x = 0$ est donnée par $y_h = \lambda \cos x,\ \lambda \in R$

- Endéduire la solution générale de

1. $y'' - 4y' + 3y = (2x+1)\,e^x$...............(03 pts)

Solution.

1. La solution homogène de l'équation homogène $y' + y\tan x = 0$ est donnée par $y_h = \lambda \cos x,\ \lambda \in R$. On cherche une solution particulière par la méthode de variation de la constante et posant $y_p = \lambda(x)\cos x$. Introduisant cette fonction dans l'équation, on trouve

$$\lambda(x)'\cos x = \sin x \cos x \Longrightarrow \lambda(x)' = \sin x \Longrightarrow \lambda(x) = \int \sin x dx = -\cos x + c$$

Une solution particulière de l'équation différentielle est donc donnée par la fonction $y_p = -2\cos^2 x$. La solution générale est

$$y_g = y_h + y_p = \lambda \cos x + -2\cos^2 x$$

2. On commence par résoudre l'équation homogène $y'' + 3y' - 4y = 0$. Son équation caractéristique est $r^2 + 3r - 4 = 0$, dont les racines sont 1 et -4. Les solutions de l'équation homogène sont donc les fonctions

$$y_h = \lambda e^x + \mu e^{-4x}.$$

Pour la solution particulière de l'équation $y'' + 3y' - 4y = (x+2)e^x$, on remarque cette fois que 1 est racine simple de l'équation caractéristique $r^2 + 3r - 4 = 0$. On cherche donc une solution particulière sous la forme

$$y_p = (ax+b)xe^x.$$

On dérive pour trouver

$$y' = (ax^2 + (2a+b)x + b)e^x \text{ et } y'' = (ax^2 + (4a+b)x + (2a+2b)e^x.$$

Par identification, a et b sont solutions du système : $\begin{cases} -4a = & 1 \\ 2a - 2b = & 2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = & -\frac{1}{4} \\ b = & -\frac{5}{4} \end{cases}$.

La solution particulière est donnée par

$$y_p = (-\frac{1}{4}x^2 - \frac{5}{4}x)e^x.$$

Finalement, la solution générale est

$$y_g = y_h + y_p = \lambda e^x + \mu e^{-4x} + (-\frac{1}{4}x^2 - \frac{5}{4}x)e^x;\ \blacksquare, \mu \in \mathbb{R}.$$

Exercice 4. (5 points:2+3). Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ la suite de fonctions définie par $f_n(x) = \frac{1}{(1+x^2)^n}$.

- Étudier la convergence simple et la convergence uniforme sur $I = \mathbb{R}^+$ puis sur $I = [a, +\infty[$, avec $a > 0$.

Solution.

Étudions la convergence simple et la convergence uniforme sur I $= [0;+1[$:

- **Convergence simple.** Fixons $x \in \mathbb{R}^+$. On a $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ ....(01 pts)

La suite de fonctions (f_n) converge donc simplement vers la fonction $f(x)$.

- **Convergence uniforme.** Puisque chaque fonction f_n est continue sur $\mathbb{R}$ et la fonction f ne l'est pas en 0. La convergence ne peut pas être uniforme sur $\mathbb{R}^+$..............(01 pts)

2. $I = [a, +\infty[$avec $a > 0$.

- **Convergence simple.** Fixons $x \in [a, +\infty[$. On a $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$..............(01 pts)

- **Convergence uniforme.** Sur les intervalles du type $[a, +\infty[$avec $a > 0$, puisque pour tout $x \geq a$, on a

$$\boxed{\|f_n - f\| = \sup_{x\in[a,+\infty[} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[a,+\infty[} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[a,+\infty[} |g(x)|.}$$

Avec

$$g(x) = |f_n(x) - f(x)| = |f_n(x)| = \frac{1}{(1+x^2)^n}.$$

Fixons $n \in \mathbb{N}$. On a pour tout $x \in [a, +\infty[$: $g'(x) = \frac{-2nx}{(1+x^2)^{n+1}} < 0$. Et la fonction g est strictement décroissante sur $[a, +\infty[$, et elle atteinte son sup en $x = a$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n - f\| = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sup\limits_{x\in[a,+\infty[} |g(x)| \right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{(1+a^2)^n} = 0.$

On en déduit que la suite (f_n) converge uniformément vers la fonction nulle sur $[a, +\infty[$avec $a > 0$..............(02 pts)