Université A/ Mira de Béjaia
Faculté des Sciences de la Nature et de la Vie
$1^{ère}$ année L.M.D

06/2/2013

Examen de remplacement de mathématiques (S I)

Durée : 1h30

NB : Aucun document pédagogique n'est autorisé.

Exercice n° 1.

Soit la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{x^2 - \sin x}{\ln(1+x)}$$

- Calculer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ en utilisant deux méthodes différentes.
- Etudier la continuité de f.
- Déterminer $\hat{f}$, le prolongement de la fonction f au point 0 puis étudier la dérivabilité de $\hat{f}$.

Exercice n° 2. Calculer les limites suivantes en utilisant les développements limités

$$l_1 = \lim_{x\to 0^+} \frac{(\sin x)^x - 1}{x^2 - 1}, \quad l_2 = \lim_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{\tan^2 x}}$$

$$l_3 = \lim_{x\to 1} (x^2 + x - 2)\tan(\frac{\pi}{2}x)$$

Exercice n° 3. Calculer l'intégrale suivantes :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2x)}{\sin^2 x - 5\sin x + 6}\, dx$$

On donne ici les développements limités de quelques fonctions au voisinage de 0

$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + R_{2n+1}$

$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + R_8$

$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + R_n$

$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + R_n$

$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{1.3.5\ldots(2n-3)}{2^n n!} + R_n$

Bonne Chance

Corrigé de l'examen de remplacement.

06-02-2013

$\boxed{\text{EX01}}$ $f(x) = \dfrac{x^2 - \sin x}{\ln(1+x)}$.

7

(1) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = $ f.I de type $\frac{0}{0}$.

(1) $M_1)$ $\lim\limits_{x\to 0} f(x) \overset{(\text{L'Hopital})}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x - \cos x}{\frac{1}{1+x}} = -1$

(1) $M_2)$ $\lim\limits_{x\to 0} f(x) \overset{(\text{DL})}{=} \lim \dfrac{x^2 - x}{x - \frac{x^2}{2}} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-1}{1-\frac{x}{2}} = -1$

(2) • $D_f = \{x \in \mathbb{R} : 1+x > 0 \text{ et } \ln(1+x) \neq 0\} =]-1,+\infty[- \{0\}$

(1) $=]-1,0[\cup]0,+\infty[$.

(1) • f est continue sur $]-1,0[$ et continue sur $]0,+\infty[$ comme quotient de deux fcts conts sur ces intervalles.

• Puisque $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -1$, alors f est prolongeable par

(1) continuité au pt $x=0$ et $\hat{f}(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - \sin x}{\ln(1+x)} & x \in D_f. \\ -1 & x = 0. \end{cases}$

• $D_{\hat{f}} =]-1,+\infty[$.

(1) • $\hat{f}$ est dérivable sur $]-1,0[$ et sur $]0,+\infty[$ comme quotient de 2 fcts dérivables.

au pt $x=0$:

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\hat{f}(x) - \hat{f}(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{x^2 - \sin x}{\ln(1+x)} + 1}{x}$

(1) $= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 - x + x - \frac{x^2}{2}}{x(x - \frac{x^2}{2})} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{x^2}{2}}{x^2 - \frac{x^3}{2}} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{x}{2}} = \dfrac{1}{2}$.

Donc $\hat{f}$ est dérivable en 0 et $\hat{f}'(0) = \frac{1}{2}$.

7 **Exo 2 /**

$$\ell_1 = \lim_{x\to 0^+} \frac{(\sin x)^x - 1}{x^2 - 1} \qquad \sin x \simeq x .$$

$$\ell_1 = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{x\ln(\sin x)} - 1}{x^2-1} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{x\ln x} - 1}{x^2-1} = \frac{0}{-1} = 0 .$$

1 $\qquad$ 1

$$\ell_2 = \lim_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{\tan^2 x}}$$

1 $$= \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{\tan^2 x}\ln(\cos x)} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{\tan^2 x}\ln\left(1-\frac{x^2}{2}\right)} \quad 0{,}5$$

$$= \lim_{x\to 0} e^{\frac{\ln\left(1-\frac{x^2}{2}\right)}{x^2}} = \lim e^{\frac{-\frac{x^2}{2}}{x^2}} = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}} .$$

0,5 $\qquad$ 0,5

$$\ell_3 = \lim_{x\to 1} (x^2+x-2)\tan\left(\frac{\pi}{2}x\right) =$$

$$= \lim_{x\to 1} (x-1)(x-2)\left(\tan \frac{\pi}{2}x\right) \quad \text{on pose } y = x-1, \; x = y+1 \quad 0{,}1$$

$$= \lim y(y-1)\,\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}y + \frac{\pi}{2}\right).$$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{y(y-1)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}y\right)} = \lim_{y\to 0} \frac{y(y-1)}{\frac{\pi}{2}y} = \lim_{y\to 0} \frac{y-1}{\frac{\pi}{2}} = -\frac{2}{\pi} .$$

0,5 $\qquad$ 0,5 $\qquad$ 0,5

5 **Exo 3**

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{\sin^2 x - 5\sin x + 6}\, dx .$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\sin x \cos x}{\sin^2 x - 5\sin x + 6}\, dx . \quad 1$$

On pose $t = \sin x \qquad dt = \cos x\, dx$ 1

1 $$I = \int_0^1 \frac{2t}{t^2 - 5t + 6}\, dt \qquad \begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow t = 0 \\ t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1 . \end{array}$$

Décomposition: 1 $\qquad$ 1 intégration

$$I = 2\int_0^1 \left(\frac{3}{t-3} - \frac{2}{t-2}\right) dt = 6\ln|t-3|\Big]_0^1 - 4\Big[\ln|t-2|\Big]_0^1$$

$$= 6(\ln 2 - \ln 3) - 4(-\ln 2) = \ln\left(\frac{2^{10}}{3^6}\right) .$$

1