Université Med Boudiaf de M'sila
Faculté de Technologie
Département de Génie-Électrique
Année : 3ème Licence ELT+ELM - Matière : S.A.L.C.

جامعة محمد بوضياف - المسيلة
Université Mohamed Boudiaf - M'sila

M'sial, le 02/02/2022

Enseignant : Mr Y. LAAMARI

NOM :............................ **PRENOM** : .... **OPTION** :............................Groupe :...............

E.F.S (Semestre 5) — Durée: 01H30mn

Questions de cours : (05 pts)

1- *On considère un système régi par l'équation différentielle :* $\tau_{BO} \cdot \frac{ds}{dt} + s(t) = k_{BO} \cdot e(t)$ — ①

Où : $e(t)$ *et* $s(t)$ *sont respectivement les signaux d'entrée et de sortie ;*
τ_{BO} *et* k_{BO} *sont des constantes positives.*

1.1/ Etude en boucle ouverte :

a) Indiquer l'ordre du système : système de 1er ordre ✓ (0,25)

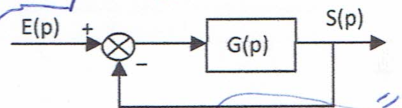
b) Déterminer la fonction de transfert G(p) du système : L'application de la T. Laplace à l'éqt diff ① nous donne

$p\tau_{BO} S(p) + S(p) = K_{BO} E(p)$

$\Rightarrow \boxed{\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K_{BO}}{\tau_{BO} p + 1}}$ ✓ (1)

1.2/ Etude en boucle fermée :

On asservit le système précédent come indiqué ci-contre (figure 1):



a) Déterminer la fonction du transfert du système bouclé:

$$F(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{G(p)}{1+G(p)} = \frac{\frac{K_{BO}}{\tau_{BO}p+1}}{1+\frac{K_{BO}}{\tau_{BO}p+1}} = \frac{K_{BO}}{\tau_{BO}p+1+K_{BO}} = \frac{\overbrace{K_{BO}/1+K_{BO}}^{=K_{BF}}}{\underbrace{\frac{\tau_{BO}}{1+K_{BO}}}_{=\tau_{BF}} p + 1}$$

✓ (1)

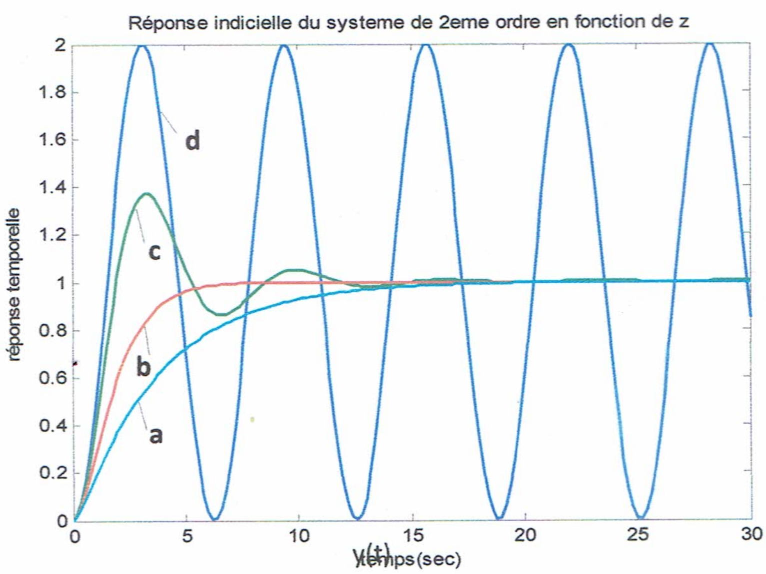
b) Quel est l'ordre du système bouclé ? 1er ordre ✓ (0,25)

c) Déterminer les nouvelles valeurs en fonction de τ_{BO} et k_{BO}:

✓ du gain statique : K_{BF}= $K_{BO}/1+K_{BO}$ ✓ (0,25)

✓ de la constante du temps : τ_{BF}= $\tau_{BO}/1+K_{BO}$ ✓ (0,25)

2. *Etant donné la réponse indicielle d'un système de 2ème ordre (Figure 2 ci-dessous) tracée pour quatre valeurs différentes de coefficient d'amortissement « ξ ». Fait correspondre à chaque courbe la valeur de ξ adéquate « >1, <1,=1,=0 » en indiquant pour chaque cas la nature et le type de la réponse.*



Réponse :

- Courbe (a) : valeurs de ξ : >1 ✓ Il s'agit d'une réponse apériodique, hyperamortie (0,5)
- Courbe (b) : valeur de ξ : = 1 ✓ Il s'agit d'une réponse apériodique, à amortissement critique. (0,5)
- Courbe (c) : valeurs de ξ : 0< ξ < 1 ✓ Il s'agit d'une réponse Oscillatoire amortie (pseudo-périodique) (0,5)
- Courbe (d) : valeur de ξ : = 0 ✓ Il s'agit d'une réponse Oscillatoire Non amortie (périodique). (0,5)

NOM :.. PRENOM : .... OPTION :.................................Groupe :...............

Partie 1. (15 pts)

1) Déterminer la transformée de Laplace inverse de la fonction: $Y(p)=\dfrac{2p}{(p+1)(p+2)} = \dfrac{a_1}{P+1} + \dfrac{a_2}{P+2}$ 0,25

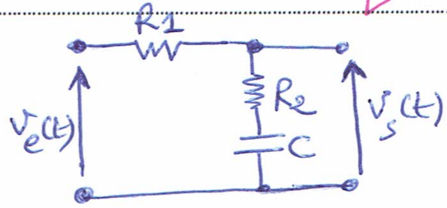
où $a_1 = (P+1)\,Y(P)\big|_{P=-1} = -2$ 0,5

$a_2 = (P+2)\,Y(P)\big|_{P=-2} = -4$

$\Rightarrow Y(P) = \dfrac{-2}{P+1} - \dfrac{4}{P+2}$ 1

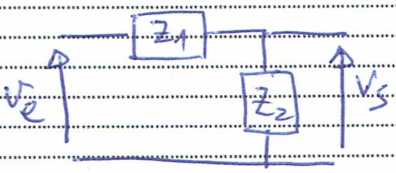
d'où $y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(P)] = (-2e^{-t} + (-4e^{-2t}))u(t) = (-2e^{-t} - 4e^{-2t})u(t)$

2) On donne le circuit électrique ci-contre.
Déterminer la fonction du transfert **S(p)/E(p)** en fonction de R_1, R_2 et C :
(Indication : Utiliser la notion des impédances complexes)



Selon le Th. de diviseur de tension

$V_s = \dfrac{Z_2}{Z_1+Z_2} \cdot V_e$



0,5 $Z_1 = R_1$

$Z_2 = R_2 + \dfrac{1}{CP} = \dfrac{R_2CP+1}{CP}$

$\Rightarrow \dfrac{V_s}{V_e} = \dfrac{S}{E} = \dfrac{Z_2}{Z_1+Z_2} = \dfrac{(R_2CP+1)/CP}{R_1 + \dfrac{R_2CP+1}{CP}}$ 1

$$\Rightarrow \boxed{\frac{V_s}{V_e} = \frac{R_2CP+1}{R_1CP+R_2CP+1}}$$

3) *Étant donnée la transformée de Laplace:* $Y(p)=\dfrac{2p+1}{(p+1+j)(p+1-j)} = \dfrac{2P+1}{(P+1)^2+1}$

a) Déterminer sa fonction originale y(t)

$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{2P+1}{(P+1)^2+1}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{2P}{(P+1)^2+1} + \dfrac{1}{(P+1)^2+1}\right]$

$= \mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{2P+2-2}{(P+1)^2+1}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{(P+1)^2+1}\right] = 2\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{P+1}{(P+1)^2+1}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{(P+1)^2+1}\right]$

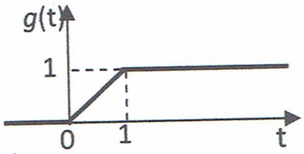
$\Rightarrow y(t) = (2e^{-t}\cos t - e^{-t}\sin t)\,u(t)$ 1

*b) Déterminer la valeur initiale de y(t) en utilisant le **théorème de la valeur initiale***

$y(0) = \lim_{P\to\infty} P\,Y(P) = \lim_{P\to\infty} P\cdot\dfrac{(2P+1)}{(P+1)^2+1} = 2$ 0,75

NOM : .... PRENOM : .... OPTION : .... Groupe : ....

4) Déterminer la transformée de Laplace de la fonction g(t)suivante:



$$g(t) = \begin{cases} t & \text{si } 0 \le t \le 1 \\ 1 & \text{si } t \ge 1 \\ 0 & \text{ailleurs.} (t<0) \end{cases} \quad \text{(causale)}$$ 0,5

$$\mathcal{L}[g(t)] = \int_0^{+\infty} g(t)e^{-pt}dt = \int_0^1 te^{-pt}dt + \int_1^{+\infty} e^{-pt}dt$$ 0,5

$\int_0^1 te^{-pt}dt = ?$ Selon l'intégration par parties on pose : $u = t \Rightarrow u' = dt$

et $v' = e^{-pt}dt \Rightarrow v = -\frac{1}{p}e^{-pt}$

donc $\int_0^1 te^{-pt}dt = t\left(-\frac{1}{p}e^{-pt}\right)_0^1 - \int_0^1 \left(-\frac{1}{p}e^{-pt}\right)dt = -\frac{1}{p}e^{-p} - \frac{1}{p^2}e^{-p} + \frac{1}{p^2}$

et on a ; $\int_1^{+\infty} e^{-pt}dt = -\frac{1}{p}e^{-pt}\Big|_1^{+\infty} = \frac{1}{p}e^{-p}$ 1

d'où $\mathcal{L}[g(t)] = -\frac{1}{p^2}e^{-p} + \frac{1}{p^2} = \frac{1}{p^2}\left[1 - e^{-p}\right]$

5) Déterminer l'expression de la solution y(t) de l'équation différentielle suivante :

T.L $\underbrace{\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + 2y(t) = 4}$ avec $y(0)=0$, $\dot{y}(0)=0$

$$p^2 Y(p) + 3p\,Y(p) + 2\,Y(p) = \frac{4}{p}$$

$$Y(p)(p^2 + 3p + 2) = \frac{4}{p} \Rightarrow Y(p) = \frac{4}{p(p^2+3p+2)} = \frac{4}{p(p+1)(p+2)}$$

$= \frac{a_1}{p} + \frac{a_2}{p+1} + \frac{a_3}{p+2}$ où $a_1 = p\,Y(p)\big|_{p=0} = 2$ 1

$a_2 = (p+1)\,Y(p)\big|_{p=-1} = \frac{4}{p(p+2)}\Big|_{p=-1} = -4$; $a_3 = (p+2)\,Y(p)\big|_{p=-2} = 2$

d'où $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{p}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-4}{p+1}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{p+2}\right] = \left(2 - 4e^{-t} + 2e^{-2t}\right).u(t)$ 1

6) Soit un système dont la réponse indicielle est donnée par : $s(t) = \frac{d}{dt}\left[t\,.e^{-3t}\right]$ e (t) → G(p)= ? → s (t)

Déterminer la fonction de transfert G(p) du système. Où e(t) est un échelon unitaire.

Réponse :

$\mathcal{L}[s(t)] = \mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}(te^{-3t})\right] = p\,\mathcal{L}[te^{-3t}] - (te^{-3t})_{t=0}$ $\to 0$ (selon le Th de dérivation) 0,5

et selon le th. de décalage fréquentielle on a :

$\mathcal{L}[t.e^{-3t}] = F(p+3)$ où $F(p) = \mathcal{L}[t] = \frac{1}{p^2}$ 0,5

donc $\mathcal{L}[te^{-3t}] = \frac{1}{(p+3)^2}$ 0,5

d'où $\mathcal{L}[s(t)] = p\,\mathcal{L}[te^{-3t}] = \frac{p}{(p+3)^2}$ 0,5

Nom :………………………………………… Prénom(s) :……………………………Option :………………….Groupe :……………

7) Etant donné que : $L[f(t)] = F(p)$, montrer que : $L[f(t-T)u(t-T)] = e^{-pT}.F(p)$

Réponse :

$$\mathcal{L}[f(t-T)u(t-T)] = \int_0^{+\infty} f(t-T)\,u(t-T)\,e^{-pt}\,dt = \int_T^{+\infty} f(t-T)\,e^{-pt}\,dt$$

Comme $u(t-T) = \begin{cases} 1 & \text{si } T < t < +\infty \\ 0 & \text{si } t < T \end{cases}$

Si on pose $\alpha = t - T \Rightarrow d\alpha = dt$, $t : T \to +\infty \Rightarrow \alpha : 0 \to +\infty$.

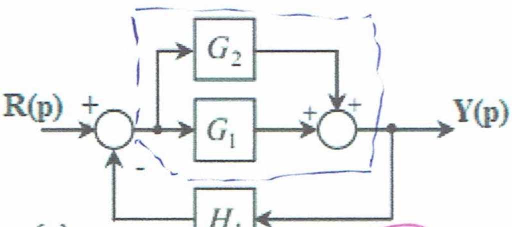
$$\int_T^{+\infty} f(t-T)\,e^{-pt}\,dt = \int_0^{+\infty} f(\alpha)\,e^{-p(\alpha+T)}\,d\alpha = e^{-pT}\underbrace{\int_0^{+\infty} f(\alpha)\,e^{-p\alpha}\,d\alpha} = e^{-pT}.F(p)$$

C.Q.F.D.

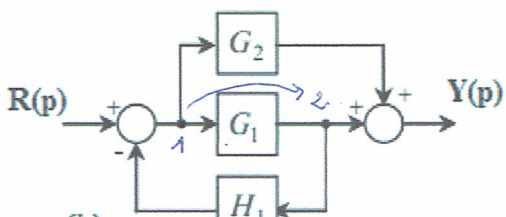
1,5

8) Considérons les schémas blocs des Figures (a) et (b) ci-dessous :

1. Simplifier les schémas –blocs
2. Déterminer Y(p)/R(p) pour chacun des systèmes.



(a)

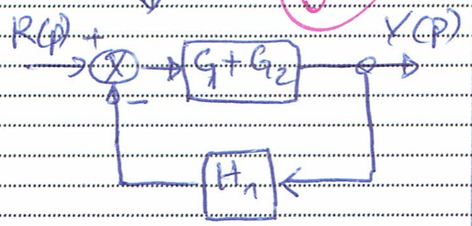


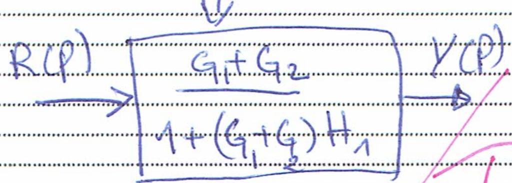
(b)

a)

$G_2 // G_1$

0,5





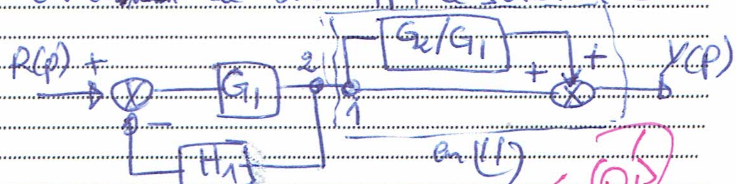
d'où

$$\boxed{\frac{Y(p)}{R(p)} = \frac{G_1+G_2}{1+G_1H_1+G_2H_1}}$$

0,75

b)

On déplace par exemple le pt de branchement (1) en ~~amont~~ aval de Bloc G_1, le schéma devient



0,5

0,5

d'où

$$\boxed{\frac{Y(p)}{R(p)} = \frac{G_1}{1+G_1H_1} \times \frac{(G_1+G_2)}{G_1} = \frac{G_1+G_2}{1+G_1H_1}}$$

0,5