Chapitre II : Transformée de Laplace

II.1 Signaux tests

On distingue plusieurs familles de signaux tests : l'impulsion de Dirac, l'échelon, la rampe, la sinusoïde.

II.1.1 Impulsion de Dirac

L'impulsion de Dirac est une impulsion brève, qui vaut zéro en tout point sauf au voisinage de *t*=0.

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & \text{pour} \quad t = 0 \\ 0 & \text{pour} \quad t \neq 0 \end{cases}$$

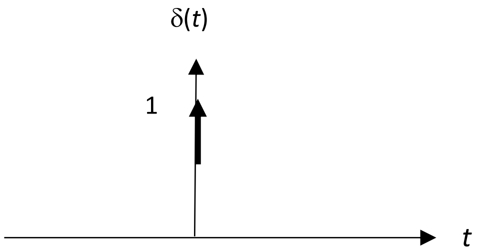

Figure II.1 : Fonction impulsion de Dirac

II.1.2 Fonction échelon

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour} \quad t < 0 \\ 1 & \text{pour} \quad t > 0 \end{cases}$$

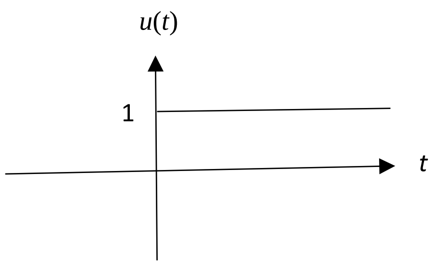

Figure II.2 : Fonction échelon

II.1.3 Fonction rampe

$r(t) = t.u(t)$

$= \int_{-\infty}^{t} u(\tau)d\tau$

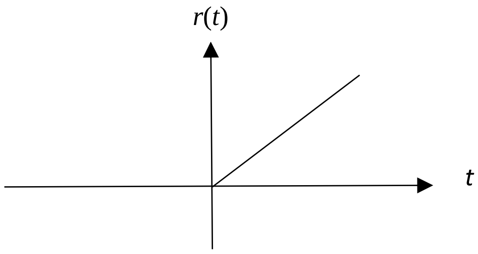

Figure II.3 : Fonction rampe

II.1.4 Sinusoide

$e(t) = E_m \sin(\omega t).$

Si $E_m = 1$: e(t) appelée sinusoîde unitaire.

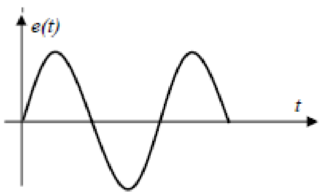

Figure II.4 : Fonction sinusoïde

II.2 Transformée de Laplace

II.2.1 Définition

La transformée de Laplace d'une fonction est donnée par l'expression suivante :

$L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt}dt.$

Où le symbole $L\{f(t)\}$ veut dire *la transformée de Laplace de f* (*t*).

On utilise aussi l'expression *F*(*p*) pour décrire la transformée de Laplace :

$F(p) = L\{f(t)\}$

Où : $p = \sigma + j\omega$ est appelé l'opérateur de Laplace.

La transformée de Laplace permet donc de transformer le problème du domaine du temps au domaine de la fréquence. Lorsqu'on obtient la réponse voulue dans le domaine de la fréquence, on transforme le problème à nouveau dans le domaine du temps, à l'aide de la *transformée inverse de Laplace*. Le diagramme de la figure suivante illustre ce concept

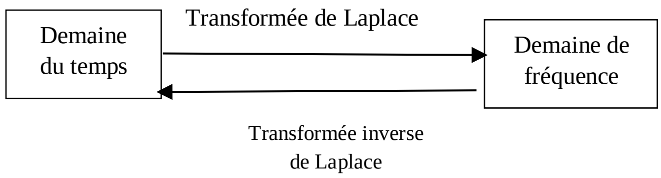

Figure II.5 : Concept de la transformée de Laplace

L'avantage principal d'analyser des systèmes de cette façon est que les calculs sont beaucoup plus simples dans le domaine de Laplace. Dans le domaine de Laplace, les dérivées et intégrales se combinent à l'aide de simples opérations algébriques ; pas besoin d'équations différentielles.

Exemples

Pour la fonction échelon :

$$L\{u(t)\} = \int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt = \int_0^\infty 1e^{-pt}dt = \frac{1}{p}$$

La transformée de Laplace d'un exponentiel décroissant est :

$$L\{e^{-at}\} = \int_0^\infty e^{-at}e^{-pt}dt = \int_0^\infty e^{-(a+p)t}dt = \frac{1}{p+a}$$

Le tableau suivant présente la liste des transformées de Laplace les plus courantes.

Fonction	***f*(t)**	***F*(*p*)**
Impulsion	$\delta(t)$	1
Echelon	u(t)	$\frac{1}{p}$
Rampe	tu(t)	$\frac{1}{p^2}$
Polynôme (général)	$t^n u$(t)	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
Exponentiel	$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{p+a}$

Cosinus	$\cos(\omega t)\, u(t)$	$\dfrac{p}{p^2+\omega^2}$
Sinus	$\sin(\omega t)\, u(t)$	$\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$
Cosinus amorti	$e^{-at}\cos(\omega t)$	$\dfrac{(p+a)}{(p+a)^2+\omega^2}$
Sinus amorti	$e^{-at}\sin(\omega t)$	$\dfrac{\omega}{(p+a)^2+\omega^2}$

Tableau II.1 : Transformées de Laplace des fonctions les plus courantes

II.2.2 Propriétés

La transformée de Laplace a plusieurs propriétés intéressantes qui rendent le calcul de fonctions complexes plus simple. On note entre autre la linéarité, dérivée et les théorèmes de valeurs finales et initiales. Le tableau suivant montre ces propriétés.

Propriétés	**Théorème**	**Nom**
1	$L[f(t)] = F(p) = \int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt$	Définition
2	$L[kf(t)] = kF(p)$	Linéarité
3	$L[f_1(t) + f_2(t)] = F_1(p) + F_2(p)$	Linéarité
4	$L[e^{-at}f(t)] = F(p+a)$	Translation
5	$L[f(t-\tau)] = e^{-\tau p}F(p)$	Retard temporelle
7	$L\left[\dfrac{d^n f}{dt^n}\right] = p^n F(p)$	Dérivée
8	$L\left[\int_0^t f(\tau)d\tau\right] = \dfrac{F(p)}{p}$	Intégration
9	$f(\infty) = \lim_{p\to 0} pF(p)$	Valeur finale
10	$f(0) = \lim_{p\to\infty} pF(p)$	Valeur initiale

Tableau II.2 : Propriétés

Convolution

La convolution est plus simple dans le domaine de Laplace :

$L\{h(t) * x(t)\} = H(p)X(p)$

II.2.3 Transformées inverses

Après avoir multiplié les transformées de Laplace de $h(t)$ et $x(t)$, pour obtenir la réponse finale dans le domaine du temps, il faut faire la transformée inverse. L'expression obtenue est souvent une fonction rationnelle de p : c'est le rapport de deux polynômes de p. Pour la plupart des systèmes physiques, l'expression obtenue est une fonction rationnelle de p. Si on peut inverser n'importe quelle fonction rationnelle de p, on peut résoudre les problèmes de convolution.

De façon générale, il faut trouver la transformée inverse d'une fonction qui a la forme

$$F(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \cdots + a_1 p + a_0}{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \cdots + b_1 p + b_0}$$

On peut écrire l'expression de $F(p)$ sous une autre forme :

$$F(p) = k \frac{(p + z_1)(p + z_2) \dots (p + z_n)}{(p + p_1)(p + p_2) \dots (p + p_n)}$$

Où z_i est appelé un *zéro* de $F(p)$: ce sont les racines du numérateur, et p_i est appelé un *pôle* de $F(p)$: ce sont les racines du dénominateur. De façon générale, $F(p)$ est appelée la *fonction de transfert.*

II.2.3.1 Cas où les pôles de $F(p)$ sont tous simples

Dans le cas où le degré du polynôme numérateur de $F(p)$ est inférieur strictement à celui de son polynôme dénominateur, $F(p)$ peut être mise sous la forme :

$$F(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{R_i}{p - p_i}$$

$N(p)$ et $D(p)$ sont respectivement les polynômes numérateur et dénominateur de $F(p)$. n est l'ordre de $D(p)$. p_i sont les racines $D(p)$, ils sont appelés les pôles et R_i sont des nombres réels ou complexes, ils sont appelés les résidus.

Sachant que la transformation de Laplace inverse de $\frac{R_i}{p-p_i}$ est donnée par :

$$L^{-1}\left[\frac{R_i}{p-p_i}\right] = R_i e^{p_i t}$$

La transformation de Laplace inverse est donnée par :

$$f(t) = \sum_{i=1}^{n} R_i e^{p_i t}$$

Les résidus R_i de $F(p)$ sont simplement calculés par l'expression :

$$R_i = \lim_{p \to p_i} (p - p_i)F(p)$$

<u>Exemple</u>

$$F(p) = \frac{2}{(p+1)(p+2)}$$

On peut écrire :

$$F(p) = \frac{2}{(p+1)(p+2)} = \frac{K_1}{(p+1)} + \frac{K_2}{(p+2)}$$

$$K_1 = 2$$

Pour trouver K_2, on fait le même processus, sauf qu'on multiplie par $(p + 2)$ cette fois.

$$K_2 = -2$$

Donc,

$$F(p) = \frac{2}{p+1} + \frac{-2}{p+2}$$

Qui donne la transformée inverse suivante :

$$f(t) = (2e^{-t} - 2e^{-2t})u(t)$$

Note : La fonction $u(t)$ doit être appliquée à toute transformée inverse. Cependant, pour alléger le texte, on n'écrira plus le $u(t)$.

II.2.3.2 Cas où le degré du numérateur est égal à celui du dénominateur

Lorsque le degré du numérateur n'est pas inférieur à celui du dénominateur de la fonction, la décomposition en élément simple ne peut pas être effectuée. Pour expliquer comment pouvoir calculer la transformation de Laplace inverse d'une fonction pour laquelle le degré de son numérateur est égal à celui de son dénominateur considérons l'exemple suivant

$$F(p) = \frac{2p^2 + 8p + 5}{p^2 + 3p + 2} = \frac{2p^2 + 8p + 5}{(p+1)(p+2)}$$

Le degré du numérateur de $F(p)$ étant égal à celui de son dénominateur, afin d'effectuer la $f(t)$ décomposition en éléments simples on doit d'abord effectuer une division euclidienne de son numérateur sur on dénominateur. On obtient

$$F(p) = 2 + \frac{2p+1}{p^2+3p+2} = 2 + \frac{2p+1}{(p+1)(p+2)}$$

On peut décomposée en éléments simples comme suit

$$F(s) = 2 - \frac{1}{p+1} + \frac{3}{p+2}$$

La transformé de Laplace inverse est donnée par :

$$f(t) = 2\delta(t) - e^{-t} + 3e^{-2t}$$

$\delta(t)$: La fonction impulsion.

II.2.3.3 Cas où *F*(*p*) admet un pôle multiple

On suppose que l'ordre de multiplicité de ce pôle est égal à m. Dans ce cas, $F(p)$ est écrite sous la forme :

$$F(p) = \sum_{i=1}^{n-m} \frac{R_i}{p-p_i} + \frac{c_0}{(p-p_0)^m} + \frac{c_1}{(p-p_0)^{m-1}} + \cdots + \frac{c_m}{(p-p_0)}$$

Il faut noter que dans ce cas aussi, $F(p)$ est décomposé en n termes puisque le degré de son dénominateur est égal à n. La transformation de Laplace inverse des termes simples est de la forme $R_i e^{p_i t}$. Par contre, La transformation de Laplace inverse des termes dus à la racine multiple est donnée sous la forme

$$L^{-1}\left[\frac{c_i}{(p-p_0)^r}\right] = c_i t^{r-1} e^{p_0 t} \qquad r = 1, \cdots m$$

Les coefficients ci sont calculés comme suit :

$$c_0 = (p-p_0)^m F(p)|_{p=p_0}$$

$$c_1 = \frac{d}{dp}[(p-p_0)^m F(p)]|_{p=p_0}$$

$$c_2 = \frac{1}{2!}\frac{d^2}{dp^2}[(p-p_0)^m F(p)]|_{p=p_0}$$

$$c_2 = \frac{1}{2!}\frac{d^2}{dp^2}[(p-p_0)^m F(p)]|_{p=p_0}$$

$$c_i = \frac{1}{i!}\frac{d^i}{dp^i}[(p-p_0)^m F(p)]|_{p=p_0}$$

Exemple

$$F(p) = \frac{p-2}{p^3+5p^2+8p+4} = \frac{p-2}{(p+1)(p+2)^2}$$

$$F(p) = \frac{R_1}{p+1} + \frac{c_0}{(p+2)^2} + \frac{c_1}{p+2}$$

$$R_1 = (p+1)F(p)|_{p=-1} = -3$$

$$c_0 = (p+2)^2 F(p)|_{p=-2} = 4$$

$$c_1 = \frac{d}{dp}\left[\frac{p-2}{p+1}\right]\bigg|_{p=-2} = 3$$

Sa transformation de Laplace inverse s'écrit alors :

$$f(t) = -3e^{-t} + 4te^{-2t} + 3e^{-2t}$$

II.2.3.4 Cas où *F*(*p*) admet deux pôles complexes

Lorsque la fonction *F*(*p*) possède un pôle complexe, il est évident qu'elle en possède deux pôles complexes conjugués. Dans ce cas, au lieu de la décomposer en éléments simples comme dans le cas de pôles réels simples, il est recommandé de procéder comme suit. Pour illustrer la méthode, considérons l'exemple numérique suivant.

Exemple

Calculer la transformation de Laplace inverse de la fonction *F*(*p*) donnée par :

$$F(p) = \frac{1}{p^2 + p + 1} = \frac{1}{\left(p + \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(p + \frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$$

Au lieu de la décomposer en éléments simples, il est préférable de réécrire *F*(*p*) sous la forme particulière suivante qui fait ressortir la transformation de Laplace de la fonction sinus.

$$F(p) = \frac{1}{\left(p + \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(p + \frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = \frac{1}{\left(p + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

Pour utiliser la transformation de Laplace de la fonction sinus, il faut alors multiplier et diviser *F*(*p*) par le terme $\frac{\sqrt{3}}{2}$ $F(p)$ devient :

$$F(p) = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(p + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

La transformation de Laplace est donnée par

$$f(t) = \frac{2}{\sqrt{3}} e^{-\frac{1}{2}t} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$$