CHAPITRE 02:

Cinématique

1. Introduction
2. Point matériel
3. Référentiel
   3.1. Repère de l'espace
4. Trajectoire
5. Diagramme des espaces
6. Système de coordonnées
   6.1. Système de coordonnées cartésiennes
   6.2. Système de coordonnées cylindriques
   6.3. Système de coordonnées polaires
   6.4. Système de coordonnées sphériques
   6.5. Abscisse curviligne et base de Fresnel
7. Description du mouvement d'un point matériel
   7.1. Vecteur position
   7.2. Vecteur vitesse
   7.3. Vecteur accélération
8. Etudes de quelques mouvements particuliers
   8.1 Mouvement rectiligne
   8.2 Mouvement circulaire
   8.3 Mouvement sinusoïdal
9. Mouvement relative
   9.1. Composition des vitesses
   9.2. Composition des accélérations
   9.3. Quelques cas particuliers des mouvements du repère relatif par rapport au repère absolu

Chapitre II : Cinématique

1. Introduction

La cinématique fait partie de la mécanique qui est elle-même une branche de la physique. C'est l'étude du mouvement d'un corps sans se soucier de ce qui l'a causé (la force). C'est-à-dire la modification apparente de sa position avec le temps. L'étude du mouvement d'un corps passe par la détermination de sa position au cours du temps, de sa vitesse et accélération, tout en sachant que ce mouvement n'a qu'un sens relatif : par rapport à un repère spatial et une origine temporelle. Par exemple, un objet qui tombe dans un bus en mouvement semble avoir une trajectoire linéaire, vertical par rapport à un passager assis dans le bus, cette trajectoire aura une forme parabolique par rapport à un passage assis à l'arrêt de bus !

2. Point matériel

Un objet en mouvement peut être considéré comme un point matériel lorsque ses dimensions sont négligeables devant les distances étudiées. Dans ce cas, l'objet est assimilé à un point M et sa masse m est concentrée dans son centre de gravité. Par conséquent tout effet de rotation du corps autour de luis même ou son extension spatial sera négligé.

Exemple : une bille en chute libre est considérée comme un point matériel, non pas parce qu'elle est petite mais parce que ses dimension sont négligeables devant la distance parcourue.

La terre peut être considérée comme un point matériel par rapport au système solaire !

3. Référentiel

Le mouvement ou le repos n'ont qu'un sens relatif, autrement dit, on ne peut pas dire qu'un point matériel est en mouvement sans préciser par rapport à quoi ? Par exemple : considérons un train au départ de la gare et qui démarre avec une vitesse faible. Un passager A coure à proximité du train et à la même vitesse pour faire des adieux à un passage B dans le train. Le passager B voit le passager A immobile (au repos). Un troisième passager C attend au quai, vas voir les deux passages A et B en mouvement ! Alors quelle observation est correcte : repos ou mouvement ? Pour répondre à la question il faut préciser un système de référence, ou un référentiel par rapport à quoi on va étudier le mouvement.

Donc on peut définir un référentiel comme étant un objet auquel est associé un observateur fixe muni d'un repère temporel, et le mouvement sera donc étudié par rapport à ce référentiel.

Un référentiel est un repère d'espace (qu'on a défini au chapitre précédent) associé à un repère de temps (origine de temps).

Ce mouvement peut être

- Une translation
- Une rotation
- Une vibration
- Combinaison de ces mouvements

3.1. Repère de l'espace

Pour déterminer la position d'un point matériel au cours du temps, nous avons besoin d'un repère. Ce dernier a été décrit au chapitre précédent, nous nous contentons de rappeler l'essentiel. Nous considérons un repère composé d'un système de trois axes orientés (munis de vecteurs unitaires) afin de déterminer l'échelle, d'une origine à laquelle est solidaire un observateur et une origine de temps. Souvent, nous utilisons un repère cartésien orthonormé direct, muni d'une base $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ plus une origine de temps, le référentiel sera noté :

$$\mathcal{R}\ (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$$

Remarque **:** le temps n'est pas représenté dans la notation du référentiel car il n'est pas propre à un référentiel donné. Ici, nous considérons que le temps a un sens absolu, il est le même dans tout référentiel (c'est un principe dans la mécanique classique).

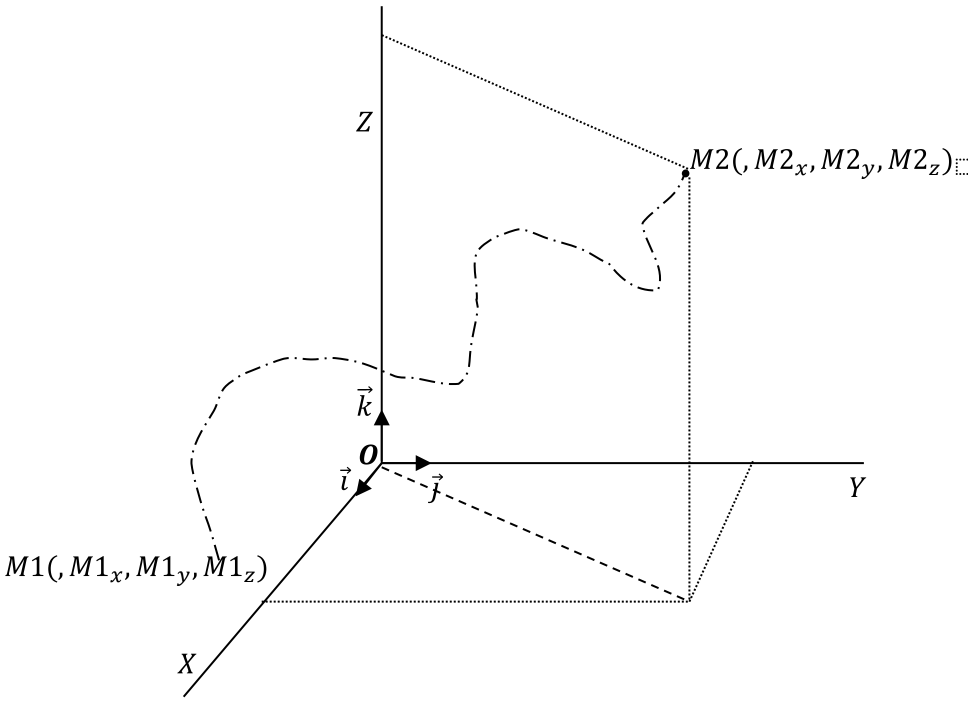


Figure 22 : déplacement du point M dans le référentiel

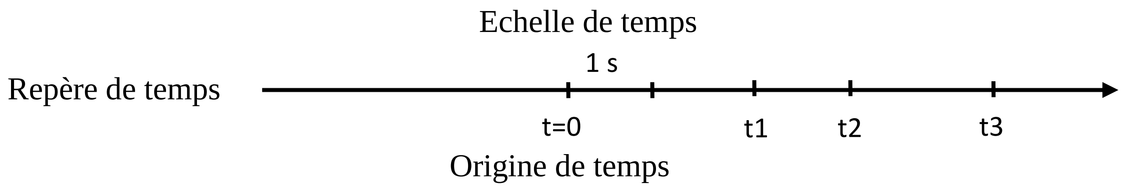


Figure 23 : Repère de temps.

4. Trajectoire

Dans un référentiel donné, si nous relions l'ensemble des points par lesquels un mobil est passé successivement dans le temps, nous obtiendrons une forme géométrique appelée la **trajectoire.** Nous citons quelques trajectoires communes : trajectoires rectiligne, trajectoire circulaire, trajectoire curviligne…etc.

5. Diagramme des espaces

La variation de la position d'un mobile en fonction du temps, dans un référentiel donné est appelé **équation horaire.** La courbe représentante de l'équation horaire est appelée digramme des espaces. Elle n'a pas forcément la même allure que la trajectoire.

Exemple : on considère une masse ponctuelle attachée à l'extrémité d'un ressort fixé par un support. Si on écarte verticalement cette masse par rapport à sa position d'équilibre puis on la relâche, comme schématisé ci-dessous :

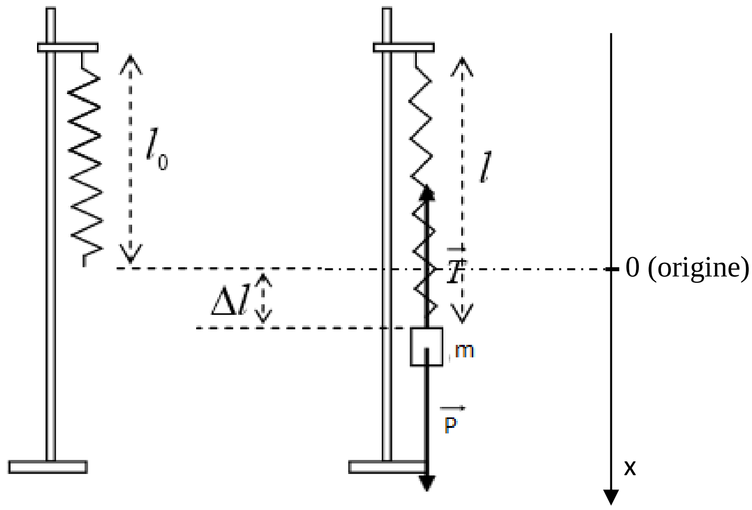


Figure 24 : Mouvement d'une masse attachée à un ressort.

La masse m va décrire une trajectoire rectiligne (une droite). Son équation horaire est : x=acos(wt), sa courbe représentative est sinusoïdale. Donc la trajectoire et le diagramme des espaces ne sont pas les mêmes.

6. Système de coordonnées

Lors du mouvement d'un mobil, nous avons besoin de déterminer à tout un instant, la position de ce point par rapport à un repère. Cette position est définie par un système de coordonnées. Un système de coordonnées cartésiennes est l'un des repères qu'on utilise souvent pour l'étude du mouvement d'un point. Mais, selon le mouvement étudié, il est parfois plus judicieux d'utiliser d'autres systèmes de coordonnées, donc d'autres repères, nous citons quelques-uns : système de coordonnées cylindriques, système de coordonnées polaires, système de coordonnées sphériques, système de coordonnées cartésiennes.

6.1. système de coordonnées cartésiennes

Un repère cartésien est formé par un système de trois axes (x'Ox), (y'Oy) et (z'Oz) perpendiculaires deux à deux. Ces trois axes sont munis de vecteurs unitaires $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ respectivement. On parle alors d'un repère orthonormé direct de base cartésienne $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, avec O comme origine et :

x'Ox est l'axe des abscisses. L'abscisse d'un point est noté x, un scalaire qui peut prendre une valeur réelle de $-\infty$ à $+\infty$

y'Oy est l'axe des ordonnées. L'ordonnée d'un point est noté y, un scalaire qui peut prendre une valeur réelle de -∞ à +∞

z'Oz est l'axe des côtés. La côte d'un point est noté z, un scalaire qui peut prendre une valeur réelle de -∞ à +∞

Le vecteur position d'un point M dans ce repère sera :

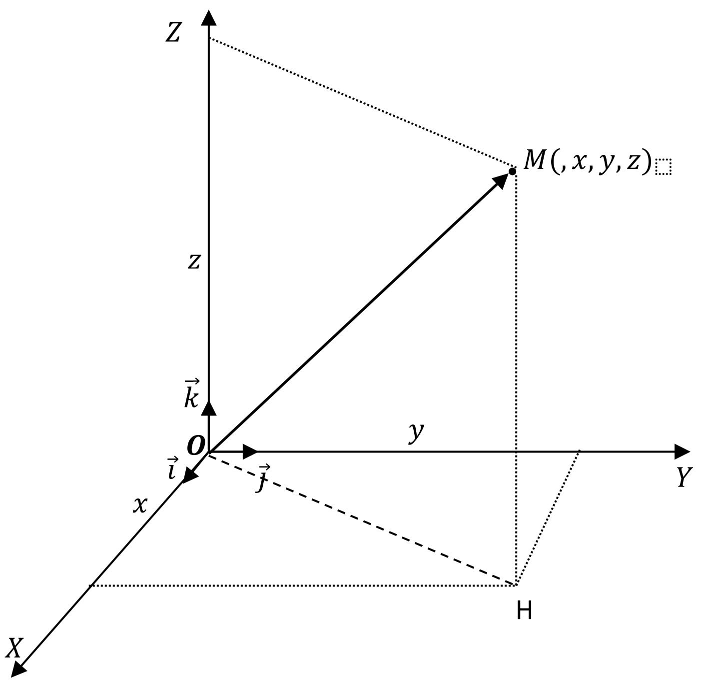


Figure 25 : Coordonnées d'un point M dans un repère cartésien.

$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{HM}$

Avec, $\overrightarrow{OH}=x.\vec{\imath}+y.\vec{\jmath}$

$\overrightarrow{HM}=z.\vec{k}$

D'où, $\overrightarrow{OM}=x.\vec{\imath}+y.\vec{\jmath}+z.\vec{k}$

Son module $\|\overrightarrow{OM}\|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

II.6.2. Système de coordonnées cylindriques

Si la trajectoire d'un mobile M prend une forme cylindrique, il sera plus judicieux de choisir un repère cylindrique pour l'étude de ce mouvement.

Considérons un mobil M dans un repère cartésien de base $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$. La base cylindrique $(\vec{u}_\rho$, $\vec{u}_\theta,, \vec{k})$ s'obtient par rotation de la base $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ d'un angle θ autour de l'axe oz.

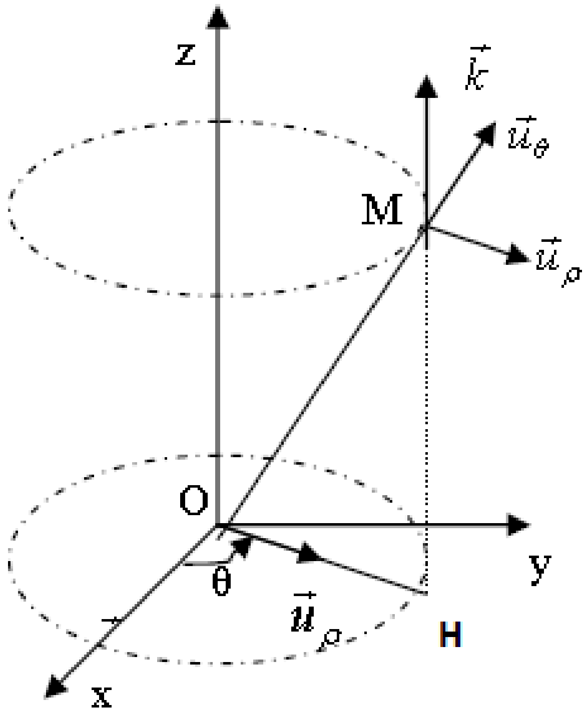


Figure 26 : Coordonnées d'un point M dans un repère cylindrique.

Le système de coordonnées cylindriques est défini donc par :

- ρ : le rayon polaire, il représente le module du vecteur $\overrightarrow{OH}$, H étant la projection du point M sur le plan (Oxy). $\rho=\|\overrightarrow{OH}\|=\sqrt{x^2+y^2}$
- θ : l'angle polaire, c'est l'angle entre l'axe (Ox) et le vecteur $\overrightarrow{OH}$
  $\theta=\text{Arctan}(\frac{y}{x})$
- z = z

On retrouve les coordonnées cartésiennes à partir des coordonnées cylindriques suivant les relations :

$x=\rho\cos\theta$
$y=\rho\sin\theta$
$z=z$

6.2.1. Différentielle du vecteur position dans le système de coordonnées cylindriques

Considérons un point mobil dans un repère orthonormé direct de base cartésienne (O, $\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}$)
Rappelons que : $d\overrightarrow{OM}=dx.\vec{\imath}+dy.\vec{\jmath}+dz.\vec{k}$
Sachant que
$x=\rho\cos\theta \;\rightarrow\; dx=-\rho.\sin\theta.d\theta+\cos\theta.d.\rho$
$y=\rho\sin\theta \rightarrow dy=\rho.\cos\theta.d\theta+\sin\theta.d\rho$
$z=z \rightarrow dz=dz$

donc, $d\overrightarrow{OM} = (-\rho.\sin\theta.d\theta + \cos\theta.d\rho)\vec{\imath} + (\rho.\cos\theta.d\theta + \sin\theta.d\rho)\vec{\jmath} + dz.\vec{k}$

$$\underbrace{(\cos\theta.\vec{\imath} + \sin\theta.\vec{\jmath})}_{\vec{u}_\rho} d\rho + \rho \underbrace{(-.\sin\theta.\vec{\imath} + \cos\theta.\vec{\jmath})}_{\vec{u}_\theta} d\theta + \underbrace{\vec{k}.dz}_{\vec{u}_z}$$

Donc, $d\overrightarrow{OM} = \vec{u}_\rho\, d\rho + \rho\, \vec{u}_\theta\, d\theta + \vec{u}_z\, dz$

Avec,

$\vec{u}_\rho = \cos\theta.\vec{\imath} + \sin\theta.\vec{\jmath}$

$\vec{u}_\theta = -\sin\theta.\vec{\imath} + \cos\theta.\vec{\jmath}$

$\vec{u}_z = \vec{k}$

D'où, le vecteur position $\overrightarrow{OM} = x.\vec{\imath} + y.\vec{\jmath} + z.\vec{k} = \rho\cos\theta\,\vec{\imath} + \rho\sin\theta\,\vec{\jmath} + z.\vec{k}$

$= \rho(\cos\theta\,\vec{\imath} + \sin\theta\,\vec{\jmath}) + z.\vec{k}$

$= \rho.\vec{u}_\rho + z.\vec{k}$

$\|\overrightarrow{OM}\| = \sqrt{\rho^2 + z^2}$

***Remarque* :**

$\vec{u}_\rho = \cos\theta\,\vec{\imath} + \sin\theta\,\vec{\jmath}$

$\frac{d\vec{u}_\rho}{d\theta} = -\sin\theta\,\vec{\imath} + \cos\theta\,\vec{\jmath}$,

Connaissant les relations trigonométriques suivantes : $\cos(\theta + \frac{\pi}{2}) = -\sin\theta$ et $\sin(\theta + \frac{\pi}{2}) = \cos\theta$

$\frac{d\vec{u}_\rho}{d\theta} = \cos(\theta + \frac{\pi}{2})\,\vec{\imath} + \sin(\theta + \frac{\pi}{2})\,\vec{\jmath}$: c'est un vecteur obtenu par la rotation de $\vec{u}_\rho$ d'un angle de $\frac{\pi}{2}$

D'où, on peut écrire : $\frac{d\vec{u}_\rho}{d\theta} = \vec{u}_\theta$

On peut vérifier facilement que : $\frac{d\vec{u}_\theta}{d\theta} = -\vec{u}_\rho$

6.3. Système de coordonnées polaires

Si le mobile effectue une rotation dans un plan (O,x,y) alors le system de coordonnées cylindriques se réduit à un système de coordonnées polaires, où z n'intervient pas.

Le système de coordonnées polaires est défini par (ρ,θ), où ρ et θ se définissent de la même manière comme en coordonnées cylindriques.

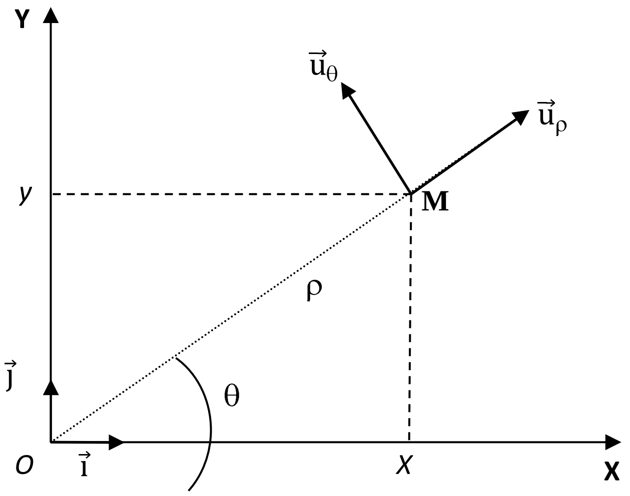


Figure 27 : Coordonnées d'un point M dans un repère polaire.

$\overrightarrow{OM}$=ρcosθ $\vec{\imath}$ +ρsinθ $\vec{\jmath}$ = ρ $\vec{u}_\rho$
Où, $\vec{u}_\rho$= =cosθ $\vec{\imath}$ +sinθ $\vec{\jmath}$ et, $\vec{u}_\theta$ = -sinθ $\vec{\imath}$ +cosθ $\vec{\jmath}$
$\rho=\sqrt{x^2+y^2}$ et $\theta=\mathrm{Arctan}(\frac{y}{x})$
On retrouve facilement les coordonnées cartésiennes à partir des coordonnées polaires :
x=ρcosθ
y=ρsinθ

6.4. Système de coordonnées sphériques

Considérons un point mobil dans un repère orthonormé direct de base cartésienne (O, $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$) et que ce point se déplace suivant une symétrie sphérique. Le repère le mieux adapté est un repère de coordonnées sphériques défini par les coordonnées suivantes (r,θ,φ) avec :

r = $\|\overrightarrow{OM}\|$: la coordonnée radiale, elle correspond à la distance de l'origine O du repère au point M

$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

θ : la coordonnée angulaire ; c'est l'angle que fait OM avec l'axe Oz, appelé colatitude ou zénith. Il est compris entre 0 et π.

$\theta = \mathrm{Arccos}\,(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}})$

φ : la coordonnée angulaire. Cette angle, compris entre 0 et 2π, appelé la longitude ou l'azimut est l'angle formé par l'axe (Ox) et l'axe (OH), où H est la projection du point M sur la plan (xOy).

$\theta = \mathrm{Arctan}\,(\frac{y}{x})$

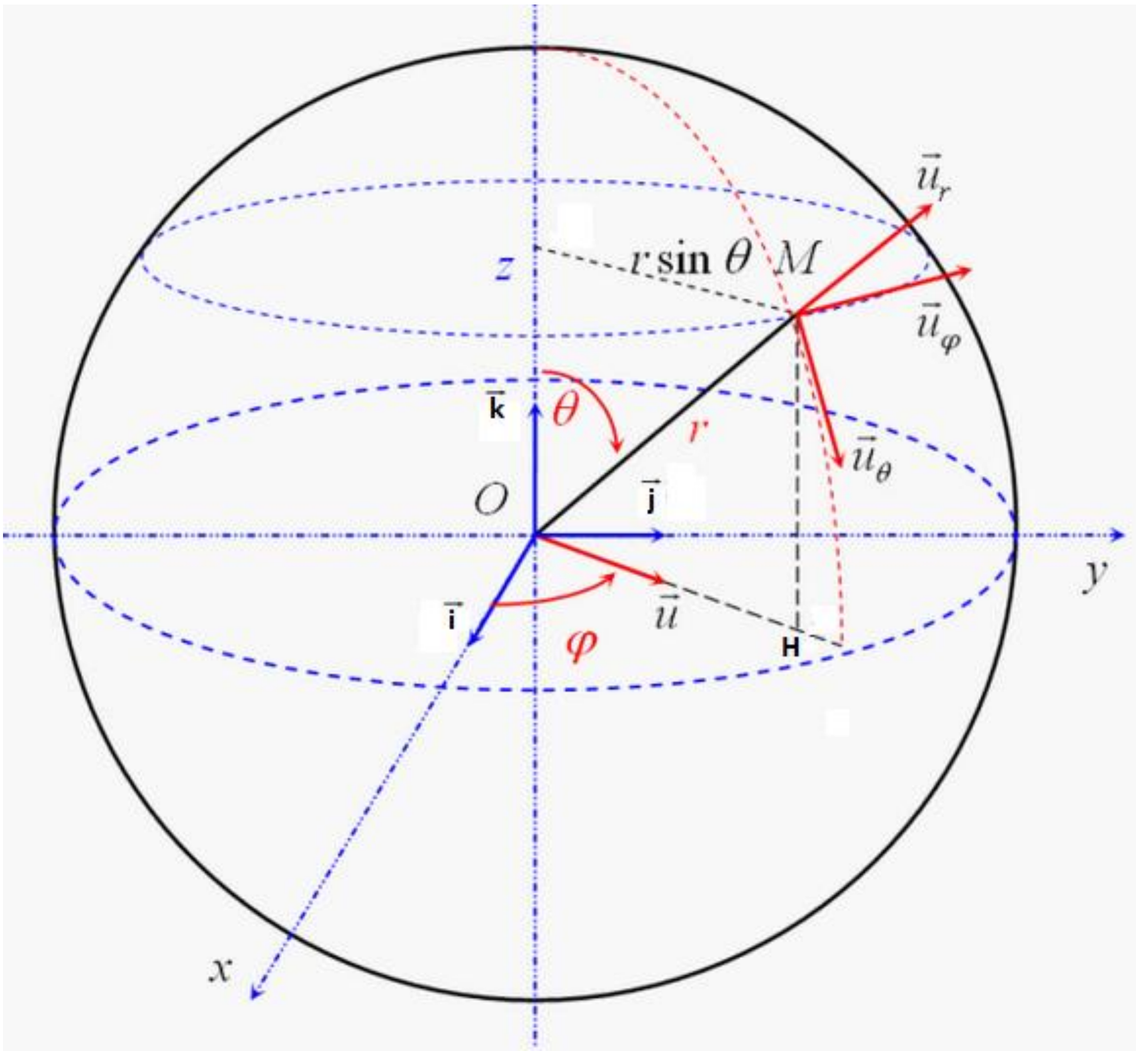


Figure 28 : Coordonnées d'un point M dans un repère sphérique.

On peut retrouver facilement les coordonnées cartésiennes à partir des coordonnées sphériques :

$x = r\sin\theta\cos\varphi$

$y = r\sin\theta\sin\varphi$

$z = r\cos\theta$

6.4.1. La base de coordonnées sphériques

La base de coordonnées sphériques est composée d'un système de trois vecteurs unitaires $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$ se définissant comme suit :

$\vec{\mathbf{u}}_\mathbf{r}$: le vecteur unitaire radial dont la droite support est (OM), et le sens est de O vers M.

$\vec{\mathbf{u}}_\theta$: Lorsque le point M se déplace sans faire varier l'angle φ, donc seul l'angle θ varie, alors le point M va décrire un demi-cercle, appelé (méridien) de rayon r. Le vecteur unitaire $\vec{u}_\theta$ est tangentiel à ce demi-cercle au méridien.

$\vec{\mathbf{u}}_\varphi$: Lorsque, lors du déplacement du point M, l'angle θ est constant, alors ce point va décrire un cercle de rayon rsinθ. Le vecteur unitaire $\vec{u}_\varphi$ sera la tangente à ce cercle (suivant un parallèle) orienté comme φ.

6.4.2. Expressions de $\vec{\mathbf{u}}_r$ $\vec{\mathbf{u}}_\theta$ et $\vec{\mathbf{u}}_\varphi$ dans la base cartésienne

Rappelons que : $\overrightarrow{OM} = x.\vec{\imath} + y.\vec{\jmath} + z.\vec{k}$ = r . $\vec{\mathbf{u}}_r$

Or, x = rsinθcosφ
y = rsinθsinφ
z = rcosθ

On déduit : $\vec{\mathbf{u}}_r$ = sinθcos$\varphi\vec{\imath}$+ sinθsin$\varphi\vec{\jmath}$ + cos$\theta\vec{k}$

Pour $\vec{u}_\theta$ et $\vec{u}_\varphi$ nous utilisons la différentielle $d\overrightarrow{OM} = dx.\vec{\imath} + dy.\vec{\jmath} + dz.\vec{k}$

Or, dx= sinθcosφ dr + rcosθcosφ dθ - rsinθsinφ dφ
dy= sinθsinφ dr+ rcosθsinφ dθ+ rsinθcosφ dφ
dz= cosθdr - rsinθdθ

Nous obtenons : $d\overrightarrow{OM} = dr.\vec{\mathbf{u}}_r + rd\theta.\vec{\mathbf{u}}_\theta + rsin\theta d\varphi.\vec{\mathbf{u}}_\varphi$

Avec : $\vec{\mathbf{u}}_\theta$ = cosθcos$\varphi.\vec{\imath}$ + cosθsin$\varphi.\vec{\jmath} - sin\theta.\vec{k}$
$\vec{\mathbf{u}}_\varphi = -\sin\varphi.\vec{\imath} + \cos\varphi.\vec{\jmath}$

Remarque

- La base ($\vec{u}_r$, $\vec{u}_\theta$, $\vec{u}_\varphi$) est une base orthonormé direct
- $\vec{\mathbf{u}}_\varphi = \frac{1}{sin\theta}\frac{\partial\vec{\mathbf{u}}_r}{\partial\varphi}$
- $\vec{\mathbf{u}}_\theta = \frac{\partial\vec{\mathbf{u}}_r}{\partial\theta}$

6.5. Abscisse curviligne et base de Frenet

Considérons un point mobil effectuant un mouvement curviligne dans le plan. Lorsque la trajectoire de M est connue, on peut le repérer sur la trajectoire orientée par une abscisse curviligne S comme dans la figure ci-dessous :

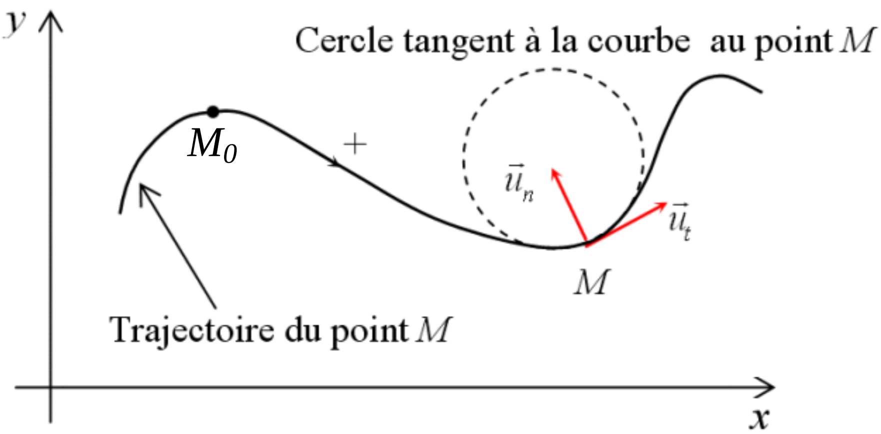


Figure 29 : Abscisse curviligne et base de Frenet.

Pour mesurer l'abscisse curviligne S(t) à tout instant, nous avons besoin d'un point origine (M_0) ; c'est la position de M l'instant t=0 et d'un sens.

S(t)=$\widehat{M_0M}$; c'est la longueur de l'arc (M_0M) : une valeur algébrique.

La base de Frenet est définie par les deux vecteurs :
$\vec{u}_T$: Vecteur unitaire tangent à la courbe en M et orienté dans le sens du mouvement
$\vec{u}_N$: Vecteur perpendiculaire à $\vec{u}_t$ orienté vers la concavité de la trajectoire. Il est orienté vers le centre d'un cercle (cercle osculateur) de rayon ρ et qui tangente la courbe en M.

Pour compléter un trièdre, on choisit un troisième vecteur $\vec{u}_B$ tel que :
$\vec{u}_B = \vec{u}_T \wedge \vec{u}_N$

La base de Frenet sera donc défini par le trièdre direct ($\vec{u}_N$, $\vec{u}_T$, $\vec{u}_B$)

Considérons deux positions successives M et M' très proches l'une de l'autre correspondant aux instants t et t' respectivement.
MM' = ds
t' = t + dt ; (dt est un laps de temps infiniment petit)
Donc, $\overrightarrow{MM'} = ds.\vec{u}_T$
D'où $\vec{u}_T = \frac{\overrightarrow{MM'}}{ds}$
Comme les points M et M' sont très proches, on note $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{dr}$
$\vec{u}_T = \frac{\overrightarrow{dr'}}{ds}$
Comme pour la base polaire, on a $\vec{u}_N = \frac{d\vec{u}_T}{d\theta}$
Or, ds = ρ.dθ → $\vec{u}_N = \rho\,\frac{d\vec{u}_T}{ds}$

7. Description du mouvement d'un point matériel

7.1. Vecteur position

Soit un mobil dans un référentiel donné (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$,). La position de ce point à l'instant t est définie par le vecteur position $\vec{r}$ (t) reliant l'origine au point M.

$\vec{r}(t) = \overrightarrow{OM}(t)$

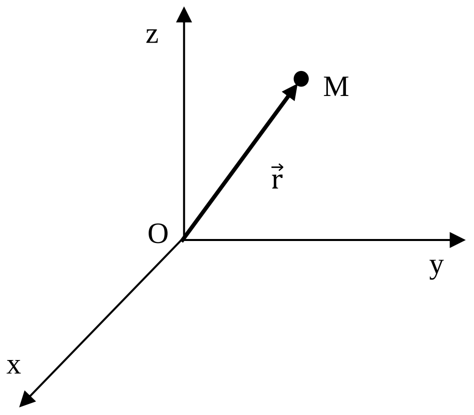


Figure 30 : vecteur position dans un repère.

Le déplacement de ce point au cours du temps sera défini par un vecteur déplacement : $\overrightarrow{\Delta r}(t) = \vec{r}(t_f) - \vec{r}(t_i)$, où $\vec{r}(t_f)$ est le vecteur position à l'instant t_f, et $\vec{r}(t_i)$ est le vecteur position à l'instant t_i.

7.1.1. Vecteur position avec les coordonnées cartésiennes

Dans un repère orthonormé directe $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k},)$. Les composantes du vecteur position d'un point mobil M sont :

$\vec{r}(t) = \overrightarrow{OM}(t) = x(t).\vec{\imath} + y(t).\vec{\jmath} + z(t).\vec{k}$

Son module $\|\overrightarrow{OM}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

x, y et z sont les composantes du vecteur $\overrightarrow{OM}$, ou encore les coordonnées du point M.

7.1.2. Vecteur position avec les coordonnées cylindriques

Considérons un repère à base cylindrique orthonormée directe $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta, \vec{k})$, cette base est mobile. Les coordonnées d'un point M sont (ρ,θ,z)

Le vecteur position est : $\overrightarrow{OM}(t) = \rho(t).\vec{u}_\rho + z(t).\vec{k}$

$$\|\overrightarrow{OM}\| = \sqrt{\rho^2 + z^2}$$

Si z ne varie pas en fonction du temps, alors le repère précédent se réduit à un repère bidimensionnel de base $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta)$, cette base est mobile. Les coordonnées du point M sont (ρ,θ)

Le vecteur position est : $\overrightarrow{OM}(t) = \rho(t).\vec{u}_\rho$

$$\|\overrightarrow{OM}\| = \rho(t)$$

7.1.4. Vecteur position avec les coordonnées sphériques

Soit un repère à base sphérique orthonormée directe $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$, cette base est mobile. Les coordonnées du point M sont (r,θ,φ).

Le vecteur position est : $\overrightarrow{OM}(t) = r(t).\vec{u}_r$

$$\|\overrightarrow{OM}\| = r(t)$$

Remarque : les composantes du vecteur position sont $(\rho,0,0)$, or les coordonnées du point M sont (ρ,θ,φ)

7.2. Vecteur vitesse

Pour faciliter la compréhension de la notion de la vitesse, nous considérons le cas le plus simple : mouvement rectiligne où la trajectoire est une droite et le repère est réduit à une dimension : une origine et un axe (Ox)

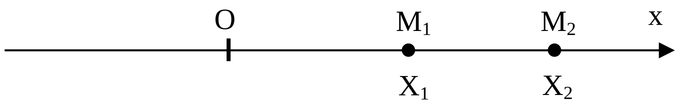


Figure 31 : Repérage d'un point sur un axe.

M_1 et M_2 sont deux positions d'un mobile sur l'axe (Ox) aux instants t_1 et t_2.

Le rapport de la distance parcourue ($d = x_2 - x_1$) sur la durée ($\Delta t = t_2 - t_1$) mise pour la parcourir est appelée ***vitesse moyenne*** :

$V_m = \frac{d}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$

Et l'expression vectorielle sera : $\vec{V}_m = \frac{\overrightarrow{OM}_2 - \overrightarrow{OM}_1}{t_2 - t_1}$

Rappelons que $\overrightarrow{OM}_2 - \overrightarrow{OM}_1$ est le vecteur déplacement $\Delta\vec{r}$

$\vec{V}_m = \frac{\overrightarrow{\Delta r}}{\Delta t}$, avec $\Delta t = t_2 - t_1$

Lorsque l'écart entre les deux instant t_2 et t_1 infiniment petit, on écrit :

$\partial t = t_2 - t_1$ et la vitesse moyenne devient une ***vitesse instantanée.***

$$\vec{V}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t) - \vec{r}(t + \Delta t)}{\Delta t}$$

La vitesse instantanée correspond alors à la dérivée par rapport au temps du vecteur position.

$$\vec{V}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}$$

Remarques

- Le vecteur vitesse est la tangente à la trajectoire au point M.
- Son sens est celui du déplacement. Autrement dit, si $x_2 > x_1$ alors $v > 0$

  si $x_2 < x_1$ alors $v < 0$

- Son unité $m.s^{-1}$

Le vecteur vitesse peut avoir différentes expressions selon le système de coordonnées choisi.

7.2.1. Vecteur vitesse avec les coordonnées cartésiennes

Considérons un repère orthonormé directe de base (O, $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$),
Le vecteur position $\overrightarrow{OM}(t) = \vec{r}(t) = x(t).\vec{\imath} + y(t).\vec{\jmath} + z(t).\vec{k}$
Où, x(t), y(t) et z(t) sont les composantes du vecteur position $\overrightarrow{OM}$, ou encore : les coordonnées du points M. Ces composantes dépendent du temps.

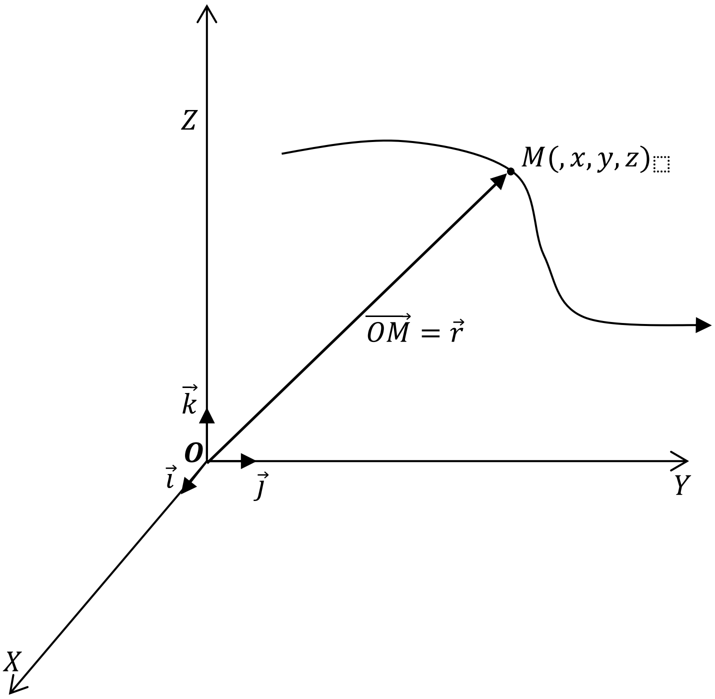


Figure 32 : Mouvement d'un point dans un repère.

$\vec{v}$(t) = $\frac{d\overrightarrow{OM}(t)}{dt}$ = $\frac{d}{dt}$($x(t).\vec{\imath} + y(t).\vec{\jmath} + z(t).\vec{k}$)

Sachant que $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$, et $\vec{k}$ sont constants, ne dépendent pas du temps, alors :

$\vec{v}(t) = \frac{dx(t)}{dt}\vec{\imath} + \frac{dy(t)}{dt}\vec{\jmath} + \frac{dz(t)}{dt}\vec{k}$

Pour simplifier l'expression, souvent on note :

$\vec{v}$(t) = $\dot{x}\vec{\imath} + \dot{y}\vec{\jmath} + \dot{z}\vec{k}$

Avec, $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$, $\dot{y} = \frac{dy}{dt}$, $\dot{z} = \frac{dy}{dt}$

Donc, les composantes du vecteur vitesse : $\vec{v}$(t) $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix}$

Son module : $\|\vec{v}\|$ = $\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$

De l'expression de la vitesse instantanée, on peut déduire le déplacement élémentaire $d\vec{r}$ qu'on note souvent d$\vec{l}$:

d$\vec{l}$=$\vec{v}$(t).dt = $dx.\vec{\imath} + dy.\vec{\jmath} + dz.\vec{k}$

dx, dy et dz sont les déplacements élémentaires suivantes les axes (Ox), (Oy) et (Oz) respectivement.

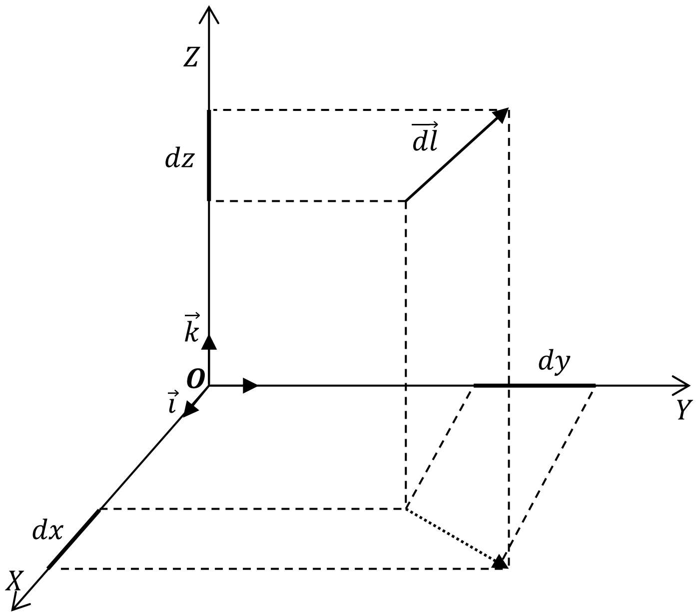


Figure 33 : déplacement élémentaire dans un repère.

7.2.2. Vecteur vitesse avec les coordonnées cylindriques

Considérons un repère de coordonnées cylindriques (ρ,θ,z) muni d'une base mobile orthonormé direct ($\vec{u}_\rho$, $\vec{u}_\theta$, $\vec{k}$).

Rappelons que les vecteurs unitaires $\vec{u}_\rho$, $\vec{u}_\theta$ tournent au cous du temps mais leurs modules sont constants. Le vecteur unitaire $\vec{k}$ ne varie pas au cours du temps, ni de sens ni de module.

Rappelons l'expression du vecteur position en coordonnées cylindriques :

$\overrightarrow{OM}$= ρ.$\vec{u}_\rho$ + z. $\vec{k}$

$\vec{v}(t) = \frac{d\overrightarrow{OM}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\rho.\vec{u}_\rho + z.\vec{k}\right) = \frac{d\rho}{dt}\vec{u}_\rho + \rho.\frac{d\vec{u}_\rho}{dt} + \frac{dz}{dt}\vec{k} + z.\frac{d\vec{k}}{dt}$

$\frac{d\vec{k}}{dt} = \vec{0}$, car le vecteur unitaire $\vec{k}$ ne change pas au cours du temps

$\frac{dz}{dt} = \dot{z}$ et $\frac{d\rho}{dt} = \dot{\rho}$

Déterminons $\frac{d\vec{u}_\rho}{dt}$:

Rappelons que $\vec{u}_\rho$ est une fonction de θ ($\vec{u}_\rho$= cosθ.$\vec{\imath}$+ sinθ.$\vec{\jmath}$) qui elle-même fonction du temps au cours du mouvement. Donc, $\vec{u}_\rho$ est une fonction composée. La dérivation d'une fonction composée permet d'écrire :

$\frac{d\vec{u}_\rho}{dt} = \frac{d\vec{u}_\rho}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}\,\frac{d\vec{u}_\rho}{d\theta}$

$\dot{\theta}$ est appelée vitesse angulaire, notée souvent ω

Nous avons déjà montré que $\frac{d\vec{u}_\rho}{d\theta} = \vec{u}_\theta$ (***la dérivée d'un vecteur unitaire $\vec{u}$ (qui ne dépend que de l'angle θ) par rapport à l'angle polaire θ est un vecteur unitaire qui lui est directement perpendiculaire (rotation de π/2 dans le sens inverse des aiguilles d'une montre : sens positif***)

$\frac{d\vec{u}_\rho}{dt} = \dot{\theta}\,\vec{u}_\theta$

Il en résulte : $\vec{v}(t) = \dot{\rho}\,\vec{u}_\rho + \rho\,\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta + \dot{z}\,\vec{k}$

Les composantes du vecteur vitesse : $\vec{v}(t)\begin{pmatrix}\dot{\rho}\\ \rho\dot{\theta}\\ \dot{z}\end{pmatrix}$

Son module est : $\|\vec{v}\| = \sqrt{\dot{\rho}^2 + (\rho\,\dot{\theta})^2 + \dot{z}^2}$

De l'expression de la vitesse instantanée, on peut déduire le déplacement élémentaire $d\vec{r}$ qu'on note souvent $d\vec{l}$:

$d\vec{l}=\vec{v}(t).dt = \left(\frac{d\rho}{dt}\vec{u}_\rho + \rho.\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta + \frac{dz}{dt}\vec{k} \right).dt$

$d\vec{l} = d\rho.\vec{u}_\rho + \rho.\,d\theta.\vec{u}_\theta + dz.\vec{k}$

Avec, $d\rho$, $\rho.d\theta$ et dz sont les déplacements élémentaires suivant les directions de $\vec{u}_\rho$ (déplacement radial), $\vec{u}_\theta$ (déplacement orthoradial) et $\vec{k}$ (déplacement suivant l'axe Oz) respectivement.

7.2.3. Vecteur vitesse avec les coordonnées polaires

Pour obtenir l'expression du vecteur vitesse, il suffit d'enlever la composante suivant l'axe (Oz) au système de coordonnées cylindriques :

$\vec{v}(t) = \frac{d\overrightarrow{OM}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\rho.\vec{u}_\rho\right) = \frac{d\rho}{dt}\vec{u}_\rho + \rho.\frac{d\vec{u}_\rho}{dt}$

$\vec{v}(t) = \dot{\rho}\,\vec{u}_\rho + \rho\,\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta$

Les composantes du vecteur vitesse : $\vec{v}(t)\begin{pmatrix}\dot{\rho}\\ \rho\dot{\theta}\end{pmatrix}$

Son module est : $\|\vec{v}\| = \sqrt{\dot{\rho}^2 + (\rho\,\dot{\theta})^2}$

Le vecteur déplacement élémentaire est :

$d\vec{l}=\vec{v}(t).dt = \left(\frac{d\rho}{dt}\vec{u}_\rho + \rho.\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta \right).dt$

$d\vec{l} = d\rho.\vec{u}_\rho + \rho.\,d\theta.\vec{u}_\theta$

$d\rho$: déplacement radial

$\rho.\,d\theta$: replacement orthoradial

7.2.4. Vecteur vitesse avec les coordonnées sphériques

Considérons un repère de coordonnées sphériques (r,θ,φ) muni d'une base mobile orthonormé direct $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$.

Rappelons que les vecteurs unitaires $\vec{u}_r$, $\vec{u}_\theta$ et $\vec{u}_\varphi$ tournent au cours du temps mais leurs modules sont constants.

Rappelons l'expression du vecteur déplacement en coordonnées sphériques :

$d\overrightarrow{OM} = dr.\vec{\mathbf{u}}_\mathbf{r} + r d\theta.\vec{\mathbf{u}}_\theta + r\sin\theta d\varphi.\vec{\mathbf{u}}_\varphi$

La vitesse instantanée sera :

$\vec{v}(t) = \frac{d\overrightarrow{OM}(t)}{dt} = \frac{dr}{dt}.\vec{\mathbf{u}}_\mathbf{r} + r\frac{d\theta}{dt}.\vec{\mathbf{u}}_\theta + r\sin\theta\frac{d\varphi}{dt}.\vec{\mathbf{u}}_\varphi$

$\frac{dr}{dt} = \dot{r}$, $\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}$, $\frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}$

Nous obtenons :

$\vec{v}(t) = \frac{d\overrightarrow{OM}(t)}{dt} = \dot{r}.\vec{\mathbf{u}}_\mathbf{r} + r\dot{\theta}.\vec{\mathbf{u}}_\theta + r\sin\theta\,\dot{\varphi}.\vec{\mathbf{u}}_\varphi$

Les composantes du vecteur vitesse : $\vec{v}(t)\begin{pmatrix}\dot{r}\\ r\dot{\theta}\\ r\sin\theta\dot{\varphi}\end{pmatrix}$

Son module est : $\|\vec{v}\| = \sqrt{\dot{r}^2 + (r\,\dot{\theta})^2 + (r\sin\theta\dot{\varphi})^2}$

Le vecteur déplacement élémentaire est :

$d\overrightarrow{OM} = d\vec{l} = dr.\vec{\mathbf{u}}_{\mathbf{r}} + rd\theta.\vec{\mathbf{u}}_{\theta} + rsin\theta d\varphi.\vec{\mathbf{u}}_{\varphi}$

dr : déplacement élémentaire radial suivant $\vec{\mathbf{u}}_{\mathbf{r}}$

$rd\theta$: déplacement élémentaire suivant le méridien

$rsin\theta d\varphi$: déplacement élémentaire suivant $\vec{\mathbf{u}}_{\varphi}$ (le parallèle)

7.2.5. Vecteur vitesse dans la base de Frenet

Rappelons l'expression du déplacement élémentaire dans la base de Frenet :

$d\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{MM'} = ds.\,\vec{u}_T$

Donc, la vitesse instantanée sera :

$\vec{v}(t) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{ds}{dt}.\,\vec{u}_T = \dot{s}.\,\vec{u}_T = v.\,\vec{u}_T$

Où, v est la valeur algébrique de la vitesse.

7.3. Vecteur accélération

Si le vecteur vitesse exprime la variation du vecteur position par rapport au temps, le vecteur accélération exprime la variation du vecteur vitesse par rapport au temps. Cette variation peut concerner la direction de la vitesse, son module ou les. Son unité, dans le système international est $m.s^{-2}$.

L'accélération moyenne d'un mobile entre deux instants t_1 et t_2 est donnée par :

$\vec{\gamma}_m = \frac{\vec{V}_2 - \vec{V}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t}$

Avec $\Delta t = t_2 - t_1$

Lorsque l'écart entre les deux instant t_2 et t_1 infiniment petit, on écrit :

$\partial t = t_2 - t_1$ et l'accélération moyenne devient une ***accélération instantanée***

$$\vec{\gamma}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{V}(t) - \vec{V}(t + \Delta t)}{\Delta t}$$

L'accélération instantanée correspond alors à la dérivée par rapport au temps du vecteur vitesse.

$$\vec{\gamma}(t) = \frac{d\vec{V}(t)}{dt}$$

Remarques

- L'accélération est la dérivée premier du vecteur vitesse.
- L'accélération est la dérivée seconde du vecteur position, en effet :

  $\vec{\gamma}(t) = \frac{d\vec{V}(t)}{dt}$, or $\vec{V}(t) = \frac{d\overrightarrow{OM}(t)}{dt}$, donc $\vec{\gamma}(t) = \frac{d^2\overrightarrow{OM}(t)}{dt^2}$

- $\vec{\gamma}(t)$ à la même direction et le même sens que $d\vec{V}$
- Le vecteur accélération est dans le sens du déplacement si le mobile accélère, et dans le sens inverse si le mobile ralentit.
- Le vecteur accélération est dirigé vers l'intérieur de la concavité de la trajectoire

7.3.1. Vecteur cccélération avec les coordonnées cartésiennes

Considérons un repère orthonormé directe de base (O, $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$),

Rappelons l'expression de la vitesse instantanée avec les coordonnées cartésiennes :

$\vec{v}(t) = \dot{x}.\vec{\imath} + \dot{y}.\vec{\jmath} + \dot{z}.\vec{k}$ Avec, $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$, $\dot{y} = \frac{dy}{dt}$, $\dot{z} = \frac{dy}{dt}$

$\vec{\gamma}(t) = \frac{d\vec{V}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(\ \dot{x}.\vec{\imath} + \dot{y}.\vec{\jmath} + \dot{z}.\vec{k}) = \frac{d\dot{x}}{dt}.\vec{\imath} + \frac{d\dot{y}}{dt}.\vec{\jmath} + \frac{d\dot{z}}{dt}.\vec{k}) = \ddot{x}.\vec{\imath} + \ddot{y}.\vec{\jmath} + \ddot{z}.\vec{k}$

Ses composantes sont : $\vec{\gamma}\begin{pmatrix}\ddot{x}\\ \ddot{y}\\ \ddot{z}\end{pmatrix}$

Son module : $\|\vec{\gamma}\| = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}$

7.3.2. Vecteur accélération avec les coordonnées cylindriques

Rappelons l'expression de la vitesse instantanée avec les coordonnées cylindriques :

$\vec{v}(\mathrm{t}) = \dot{\rho}\,\vec{u}_\rho + \rho\,\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta + \dot{z}\,\vec{k}$

L'accélération est : $\vec{\gamma}(t) = \frac{d\vec{V}(t)}{dt} = \vec{\gamma}(t) = \frac{d}{dt}(\dot{\rho}\,\vec{u}_\rho + \rho\,\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta + \dot{z}\,\vec{k})$

Rappelons que les vecteurs unitaires $\vec{u}_\rho$ et $\vec{u}_\theta$ tournent au cours du temps (base mobile), par contre le vecteur unitaire $\vec{k}$ est constant.

$\vec{\gamma}(t) = \ddot{\rho}.\vec{u}_\rho + \dot{\rho}\,.\frac{d\vec{u}_\rho}{dt} + \rho.\,\ddot{\theta}.\,\vec{u}_\theta + \dot{\rho}.\dot{\theta}.\,\vec{u}_\theta + \rho.\,\dot{\theta}.\,\frac{d\vec{u}_\theta}{dt} + \ddot{z}.\vec{k}$

Rappelons que : $\frac{d\vec{u}_\rho}{dt} = \dot{\theta}.\,\vec{u}_\theta$

$\frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = -\dot{\theta}.\,\vec{u}_\rho$

Donc, $\vec{\gamma}(t) = \ddot{\rho}.\vec{u}_\rho + \dot{\rho}\,.\dot{\theta}.\,\vec{u}_\theta + \rho.\,\ddot{\theta}.\,\vec{u}_\theta + \dot{\rho}.\dot{\theta}.\,\vec{u}_\theta - \rho.\,\dot{\theta}.\,\dot{\theta}.\vec{u}_\rho + \ddot{z}.\vec{k}$

$= (\ddot{\rho} - \rho.\,\dot{\theta}^2)\,\vec{u}_\rho + (2\dot{\rho}.\dot{\theta} + \rho.\,\ddot{\theta})\,\vec{u}_\theta + \ddot{z}.\vec{k}$

Ses composantes : $(\ddot{\rho} - \rho.\,\dot{\theta}^2,\ 2\dot{\rho}.\dot{\theta} + \rho.\,\ddot{\theta},\ \ddot{z})$

Son module : $\|\vec{\gamma}\| = \sqrt{(\ddot{\rho} - \rho.\dot{\theta}^2)^2 + (2\dot{\rho}.\dot{\theta} + \rho.\ddot{\theta})^2 + \ddot{z}^2}$

7.3.3. Vecteur accélération avec les coordonnées polaires

Pour obtenir l'expression du vecteur accélération, il suffit d'enlever la composante suivant l'axe (Oz) au système de coordonnées cylindriques :

$\vec{\gamma}(t) = (\ddot{\rho} - \rho.\,\dot{\theta}^2)\,\vec{u}_\rho + (2\dot{\rho}.\dot{\theta} + \rho.\,\ddot{\theta})\,\vec{u}_\theta$

Ses composantes : $(\ddot{\rho} - \rho.\,\dot{\theta}^2,\ 2\dot{\rho}.\dot{\theta} + \rho.\,\ddot{\theta})$

Son module : $\|\vec{\gamma}\| = \sqrt{(\ddot{\rho} - \rho.\dot{\theta}^2)^2 + (2\dot{\rho}.\dot{\theta} + \rho.\ddot{\theta})^2}$

7.3.4. Vecteur accélération avec les coordonnées sphériques

Considérant un repère de coordonnées sphériques (r,θ,φ) muni d'une base mobile orthonormé direct $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$.

Rappelons que les vecteurs unitaires $\vec{u}_r$, $\vec{u}_\theta$ et $\vec{u}_\varphi$ tournent au cous du temps mais leurs modules sont constants.

Rappelons l'expression du vecteur vitesse en coordonnées sphériques :

$\vec{v}(\mathrm{t}) = \dot{r}.\vec{\mathbf{u}}_\mathbf{r} + r.\dot{\theta}.\vec{\mathbf{u}}_\theta + r.sin\theta.\,\dot{\varphi}\,.\vec{\mathbf{u}}_\varphi$

$\vec{\gamma}(t) = \frac{d\vec{V}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot{r}.\vec{\mathbf{u}}_\mathbf{r} + r.\dot{\theta}.\vec{\mathbf{u}}_\theta + r.sin\theta.\,\dot{\varphi}\,.\vec{\mathbf{u}}_\varphi\ )$

$\vec{\gamma}(t) = \dot{r}\frac{d\vec{\mathbf{u}}_\mathbf{r}}{dt} + \ddot{r}.\vec{\mathbf{u}}_\mathbf{r} + \dot{r}.\dot{\theta}.\vec{\mathbf{u}}_\theta + r.\ddot{\theta}.\vec{\mathbf{u}}_\theta + r.\dot{\theta}.\frac{d\vec{\mathbf{u}}_\theta}{dt} + \dot{r}.sin\theta.\,\dot{\varphi}\,.\vec{\mathbf{u}}_\varphi +$

$r.\ddot{\varphi}.\,sin\theta.\vec{\mathbf{u}}_\varphi + r.\dot{\theta}.\,cos\theta.\,\dot{\varphi}\,.\vec{\mathbf{u}}_\varphi + r.\dot{\varphi}.\,sin\theta.\frac{d\vec{\mathbf{u}}_\varphi}{dt}$

On se servant des expressions de $\vec{\mathbf{u}}_\mathbf{r}$ **,** $\vec{\mathbf{u}}_\theta$ et $\vec{\mathbf{u}}_\varphi$ en fonction de leurs coordonnées cartésiennes et de la dérivée d'une fonction composée, on peut vérifier facilement que :

$\frac{d\vec{\mathbf{u}}_\mathbf{r}}{dt} = \dot{\theta}.\,\vec{\mathbf{u}}_\theta + \dot{\varphi}.\sin\theta.\vec{\mathbf{u}}_\varphi$

$\frac{d\vec{\mathbf{u}}_\theta}{dt} = -\dot{\theta}.\,\vec{\mathbf{u}}_\mathbf{r} + \dot{\varphi}.\cos\theta.\vec{\mathbf{u}}_\varphi$
$\frac{d\vec{\mathbf{u}}_\varphi}{dt} = -\dot{\varphi}.\,(\cos\theta.\,\vec{\mathbf{u}}_\theta + .\sin\theta.\vec{\mathbf{u}}_\mathbf{r}\,)$
Donc,
$\vec{\gamma}(t) = (\ddot{r} - r.\dot{\theta}^2 - r.\dot{\varphi}^2.\sin\theta^2).\,\vec{\mathbf{u}}_\mathbf{r} + (2\dot{r}.\dot{\theta} + r.\ddot{\theta} - r.\dot{\varphi}^2\sin\theta..\cos\theta\,).\,\vec{\mathbf{u}}_\theta + (2\dot{r}.\dot{\varphi}.\sin\theta +$
$2r.\dot{\theta}.\dot{\varphi}.\cos\ + r.\ddot{\varphi}.\sin\theta).\,\vec{\mathbf{u}}_\varphi$

7.7.5. Vecteur accélération dans la base de Frenet
Rappelons l'expression de la vitesse dans la base de Frenet :
$\vec{v}(t) = \dot{s}.\,\vec{u}_T = v.\,\vec{u}_T$
L'accélération sera :
$\vec{\gamma}(t) = \frac{d\vec{V}(t)}{dt} = \ddot{s}.\vec{u}_T + \dot{s}.\,\frac{d\vec{u}_T}{dt}$

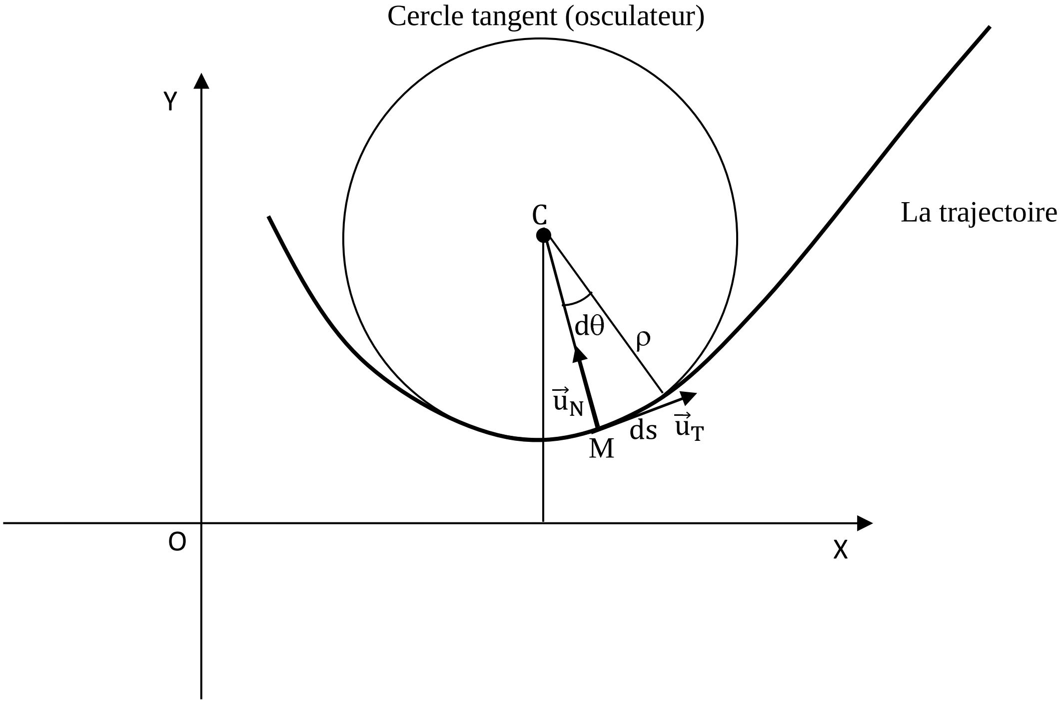


Figure 34 : déplacement d'un point en fonction de l'abscisse curviligne et base de Frenet.

$\frac{d\vec{u}_T}{dt} = \frac{d\vec{u}_T}{ds}\,\frac{ds}{dt}$
Or, ds = ρ.dθ où ρ est le rayon de courbure

Donc, $\frac{d\vec{u}_T}{dt} = \frac{1}{\rho}\frac{d\vec{u}_T}{d\theta}\,\dot{s} = \frac{\dot{s}}{\rho}\,\frac{d\vec{u}_T}{d\theta}$

Rappelons la règle de la dérivation d'un vecteur unitaire tournant d'un angle θ par rapport à cet angle :
$\frac{d\vec{u}_T}{d\theta} = \vec{u}_N$
Il en résulte:
$\frac{d\vec{u}_T}{dt} = \rho.\dot{s}\,\vec{u}_N$

$\vec{\gamma}(t) = \ddot{s}.\vec{u}_T + \frac{\dot{s}^2}{\rho}.\vec{u}_N$ avec $\dot{s} = v$ et $\ddot{s} = \frac{dv}{dt}$

$\vec{\gamma}(t) = \frac{dv}{dt}\,\vec{u}_T + \frac{v^2}{\rho}.\vec{u}_N$

Donc, les composantes de l'accélération sont : $\gamma_T = \frac{dv}{dt}$ et $\gamma_N = \frac{v^2}{\rho}$

Remarque

- γ_T est appelée la composante tangentielle de l'accélération. Elle indique si la valeur de la vitesse change.
- γ_N est appelée la composante normale de l'accélération. Toujours positive, elle indique si la direction de la vitesse change.

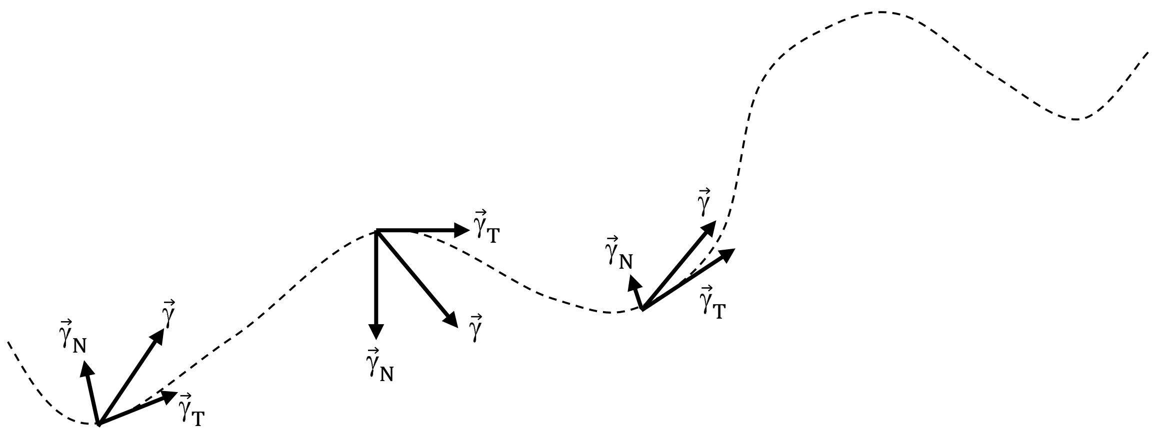


Figure 35 : composantes de l'accélération dans la base de Frenet.

- Le rayon de courbure ρ peut être déterminé comme suit :

$\vec{\gamma}(t) = \frac{dv}{dt}\,\vec{u}_T + \frac{v^2}{\rho}\,\vec{u}_N = \vec{\gamma}_T + \vec{\gamma}_N$

$\gamma^2 = {\gamma_T}^2 + {\gamma_N}^2 \Rightarrow \gamma_N = \sqrt{\gamma^2 - {\gamma_T}^2}$

Or, $\gamma_N = \frac{v^2}{\rho} \Rightarrow \rho = \frac{v^2}{\gamma_N} = \frac{v^2}{\sqrt{\gamma^2 - {\gamma_T}^2}}$

- Le centre de courbure (centre du cercle osculateur) : la droite support du vecteur unitaire $\vec{u}_N$ passe par le centre (C), donc $\overrightarrow{MC} = \rho.\vec{u}_N$

8. Etudes de quelques mouvements particuliers

8.1. Mouvement rectiligne

On parle de mouvement rectiligne lorsque le mobile se déplace suivant une droite. L'étude du mouvement se réduit à une dimension, on choisit un repère composé d'un axe (Ox). Le point M est repéré par son abscisse x. L'origine est souvent choisi pour être confondue avec l'abscisse x_0 correspondant à la position du point M à l'instant t_0, et le sens est défini par un vecteur unitaire $\vec{u}_x$

8.1.1. Mouvement rectiligne uniforme

On parle de mouvement rectiligne uniforme lorsque la vitesse est constante au cours du temps

$v(t) = v_0$

$\gamma = \frac{dv}{dt} = 0$

$v = \frac{dx}{dt} = v_0 \rightarrow dx = v_0 dt \rightarrow x = x_0 + \int_{t_0}^{t} v_0 dt = x_0 + v_0 (t - t_0)$

Si on choisit, à $t_0 = 0$ $x_0 = 0$

$x = v_0 t$

$v(t) = v_0$

$\gamma(t) = 0$

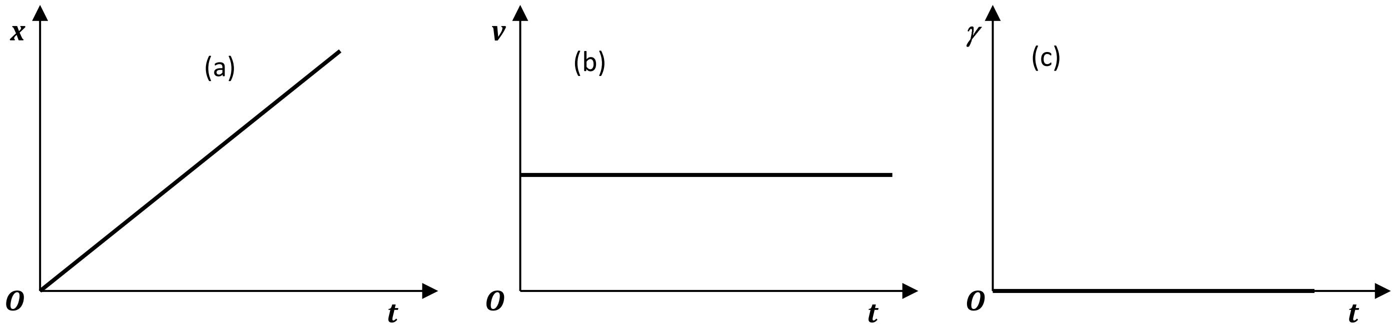


Figure 36 : Variation de, (a) la position, (b) la vitesse et (c) l'accélération en fonction du temps.

8.1.2. Mouvement rectiligne uniformément varié

On dit qu'un mouvement rectiligne est uniformément varié lorsque son accélération est constante au cours du temps

$\gamma(t) = \gamma_0$ est une constante

$\gamma = \frac{dv}{dt} = \gamma_0$

$dv = \gamma_0 dt \rightarrow v = v_0 + \int_0^t \gamma_0 dt = v_0 + \gamma_0 t$

$v = \frac{dx}{dt} \rightarrow dx = vdt \rightarrow x = x_0 + \int_0^t vdt = x_0 + \int_0^t (v_0 + \gamma_0 t) dt = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}\gamma_0 t^2$

Si on choisit, à t = 0 x(0) = 0, et que $v_0 = 0$ alors on obtient:

$x = \frac{1}{2}\gamma_0 t^2$

$v(t) = \gamma_0 t$

$\gamma(t) = \gamma_0$

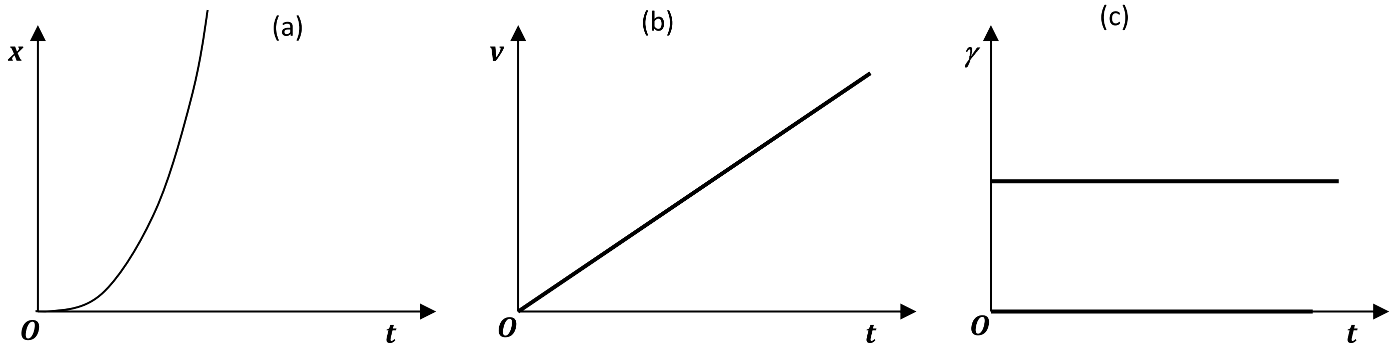


Figure 37 : Variation de, (a) la position, (b) la vitesse et (c) l'accélération en fonction du temps.

Remarque

- Si l'accélération et la vitesse ont même signe, le mouvement est accéléré
- S'ils sont de signes opposés, le mouvement est décéléré
- Reprenons les expressions de x(t) et v(t), nous pouvons obtenir une relation de x en fonction de v :

$v(t) = v_0 + \gamma_0\, t \Rightarrow t = \frac{v - v_0}{\gamma_0}$

$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}\gamma_0 t^2 \Rightarrow x - x_0 = v_0 \frac{v-v_0}{\gamma_0} + \frac{1}{2}\gamma_0 (\frac{v-v_0}{\gamma_0})^2$

$2\gamma_0(x - x_0) = (v - v_0)(v + v_0) = v^2 - {v_0}^2$

Donc, on a $v^2 - {v_0}^2 = 2\gamma_0(x - x_0)$

8.2. Mouvement circulaire

On parle d'un mouvement circulaire si la trajectoire du point est un cercle caractérisé par son centre et son rayon R. Il est plus judicieux de choisir un repère dont l'origine est le centre du cercle et que l'axe (Oz) passe par ce centre perpendiculairement au plan du cercle.

Le système de coordonnées polaires est bien adapté pour ce type de mouvement. Les coordonnées du point M sont : $\rho = R$ et $\theta = \theta(t)$. C'est l'expression $\theta(t)$ qui va définir le type de mouvement circulaire.

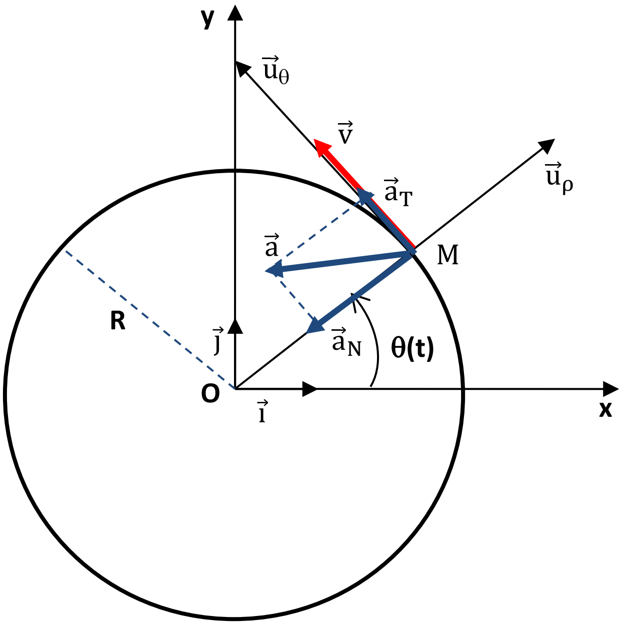


Figure 38 : Mouvement circulaire en coordonnées polaires.

Si $\dot{\theta}$ est constante, on parle de mouvement circulaire uniforme
$\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = w$ est la vitesse angulaire
$d\theta = wdt$ ➔ $\theta(t) = \theta_0 + wt$

Avec, θ_0 est l'angle initiale ; c'est l'angle à t = 0

Lorsque le vecteur position tourne de 2π (un tour) ceci correspond à une période (t=T)
$\theta(0) = \theta_0$
$\theta(T) = \theta_0 + wT$
$\theta(T)$ - $\theta(0)$ = $\theta_0 + wT$ - θ_0= 2π ➔ wT = 2π ➔ $T = \frac{2\pi}{w}$

La fréquence : f = $\frac{1}{T} = \frac{w}{2\pi}$ (en Hertz)

Et le vecteur vitesse : $\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d(R\vec{u}_\rho)}{dt} = R\frac{d\vec{u}_\rho}{dt} = R\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta = Rw\,\vec{u}_\theta$, donc la vitesse linaire est $v = Rw$

Vecteur accélération : $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(Rw\,\vec{u}_\theta)}{dt} = Rw\frac{d\,\vec{u}_\theta}{dt} = -Rw^2\vec{u}_\rho$

L'accélération a une seule composante dirigée vers le centre.

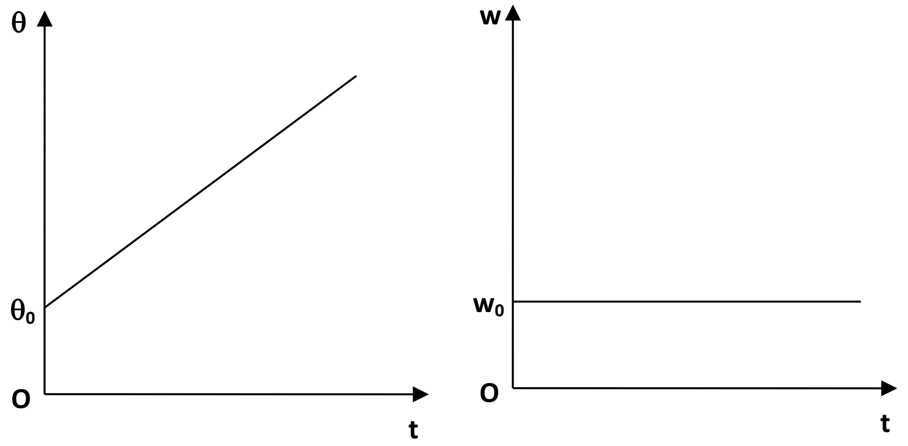


Figure 39 : Variation de, (a) l'angle, (b) la vitesse angulaire.

Propriété :

$\frac{d\vec{u}_\rho}{dt} = w\,\vec{u}_\theta$

Rappelons que $\vec{u}_\theta = \vec{k} \wedge \vec{u}_\rho$

sachant que $\vec{w}$ est le vecteur vitesse angulaire, dirigé suivant $\vec{k}$, donc $\vec{w}$ = w. $\vec{k}$

$\frac{d\vec{u}_\rho}{dt} = w.\vec{k} \wedge \vec{u}_\rho = \vec{w} \wedge \vec{u}_\rho$

Et si nous multiplions les deux membres de l'équation par R, nous obtiendrons :

$\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \vec{w} \wedge \overrightarrow{OM}$

$\vec{v} = \vec{w} \wedge \overrightarrow{OM}$

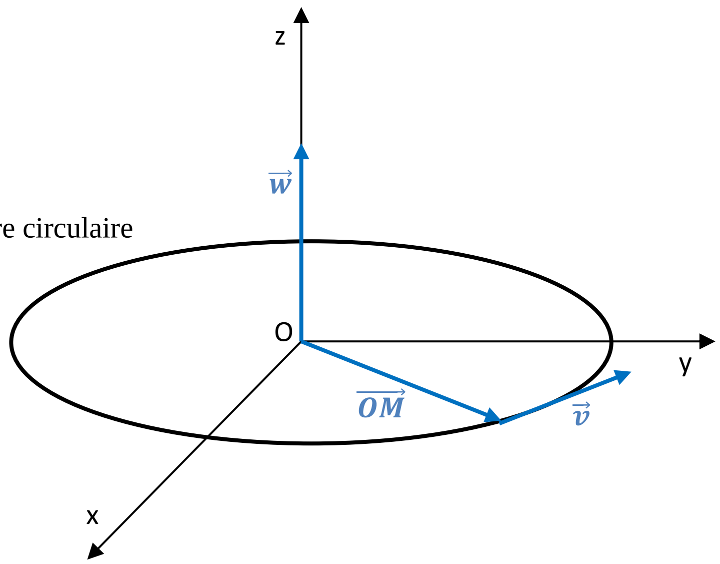


Figure 40 : Représentation du vecteur position, vecteur vitesse linéaire et vecteur vitesse angulaire.

8.2.1. Mouvement circulaire uniformément varié

Lorsque $\dot{w}$ est constante on parle de mouvement circulaire uniformément varié.

$\dot{w} = \frac{dw}{dt} \Rightarrow dw = \dot{w}.dt$

$w = w_0 + \int_0^t \dot{w}.dt = w_0 + \dot{w}t$

Si on choisit : à t=0 $w(0) = 0 = w_0$

$w = \dot{w}t$

$w = \frac{d\theta}{dt}$ ➔ $d\theta = wdt$ ➔ $\theta = \theta_0 + \int_0^t w.dt = \theta_0 + w_0 t + \frac{1}{2}\dot{w}t^2$

θ_0 et w_0 sont déterminés par les conditions initiales.

La vitesse linaire : $v = R.w(t)$

Pour simplifier l'écriture, on va écrire w au lieu de $w(t)$.

Le vecteur vitesse : $\vec{v} = Rw\,\vec{u}_\theta$

L'accélération: $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(Rw\vec{u}_\theta)}{dt} = R\dot{w}\,\vec{u}_\theta + Rw\frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = R\dot{w}\,\vec{u}_\theta - Rww\vec{u}_\rho$

Rappelons que $\frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = -w\vec{u}_\rho$

Donc, $\vec{a} = R\dot{w}\,\vec{u}_\theta - Rw^2\vec{u}_\rho$

$\vec{a} = -Rw^2\vec{u}_\rho + R\dot{w}\,\vec{u}_\theta$

Dans la base de Frenet :

Pour retrouver la base de Frenet, il suffit de remplacer -$\vec{u}_\rho$ par $\vec{u}_N$ et $\vec{u}_\theta$ par $\vec{u}_T$

On trouve:

$\vec{v} = v.\,\vec{u}_T = Rw\,\vec{u}_T$

$\vec{a} = Rw^2\vec{u}_N + R\dot{w}\,\vec{u}_T = \vec{a}_N + \vec{a}_T$

$\vec{a}_T = R\dot{w}\,\vec{u}_T = R\frac{dw}{dt}\,\vec{u}_T = \frac{d(Rw)}{dt}\,\vec{u}_T = \frac{dv}{dt}\,\vec{u}_T$

$\vec{a}_N = Rw^2\vec{u}_N$

La composante normale de l'accélération est dirigée vers le centre. C'est cette composante qu'est responsable de la variation de la direction du vecteur vitesse (c'est elle qui fait tourner).

8.3. Mouvement sinusoïdal

Exemples : une masse attaché à un ressort, pendule simple

L'équation horaire, à une dimension est donnée par :

$X(t) = X_m \cos(wt + \varphi)$,

Avec, X_m : amplitude, w : pulsation, φ : phase à l'instant t = 0

La fonction cosinus est périodique, sa période est 2π, donc

$X(t) = X(t + T)$ ➔ $X_m \cos(wt + \varphi) = X_m \cos(w(t+T) + \varphi)$

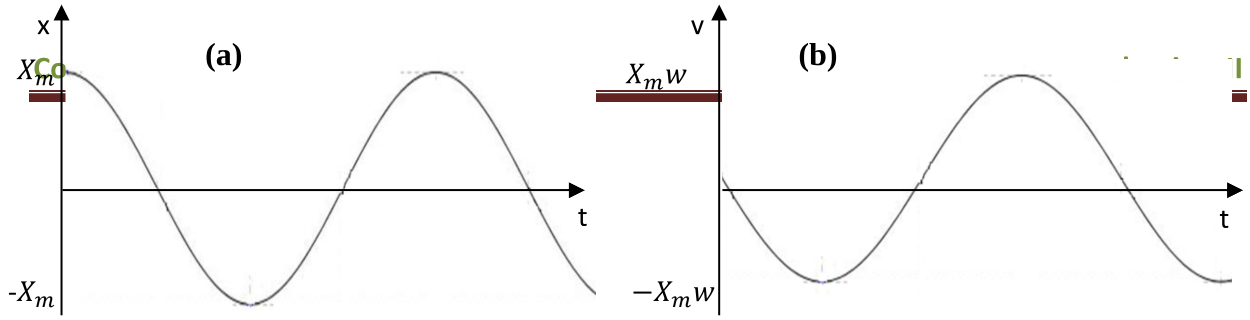
$wT = 2\pi$ ➔ $T = \frac{2\pi}{w}$

Sa fréquence $f = \frac{1}{T} = \frac{w}{2\pi}$

Sa vitesse : $v = \frac{dx}{dt} = -X_m w \sin(wt + \varphi)$

Son accélération : $a = \frac{dv}{dt} = -X_m w^2 \cos(wt + \varphi)$

Ci-dessous les diagrammes représentant l'équation horaire, la vitesse et l'accélération



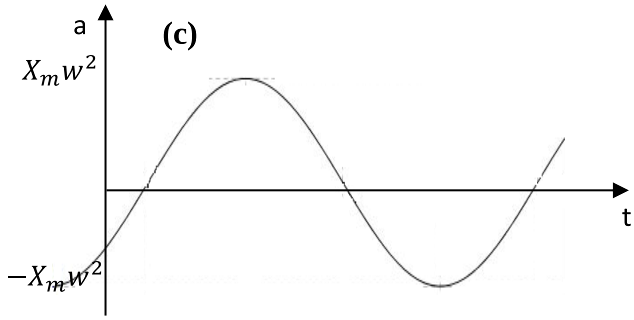


Figure 41 : (a) L'équation horaire, (b) la vitesse et (c) l'accélération d'un mouvement sinusoïdal.

9. Mouvement relative

Rappelons que tout mouvement est relatif au référentiel utilisé. Dans cette partie, nous considérons deux référentiels, l'un est fixe (ℜ) et l'autre est mobile (ℜ'). Un point mobile est en mouvement par rapport aux deux référentiels. Il sera repéré par ses coordonnés (x, y, z) dans le référentiel absolu (ℜ) muni d'une base fixe (O, $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$, $\vec{k}$) et par (x', y', z') dans le référentiel relatif (ℜ') muni d'une base $(O', \vec{\imath'}, \vec{\jmath'}, \vec{k'})$, les paramètres cinématiques du point M ne seront donc pas les mêmes dans les deux référentiels.

On note :

ℜ(O,x,y,z) : repère absolu, supposé fixe. Les paramètres du point M sont $\vec{r}$ (t), $\vec{v}$ (t) et γ

ℜ'(O',x',y',z') : repère relatif, en mouvement par rapport à ℜ. Les paramètres du point M sont $\vec{r'}$ (t), $\vec{v'}$ (t) et γ'

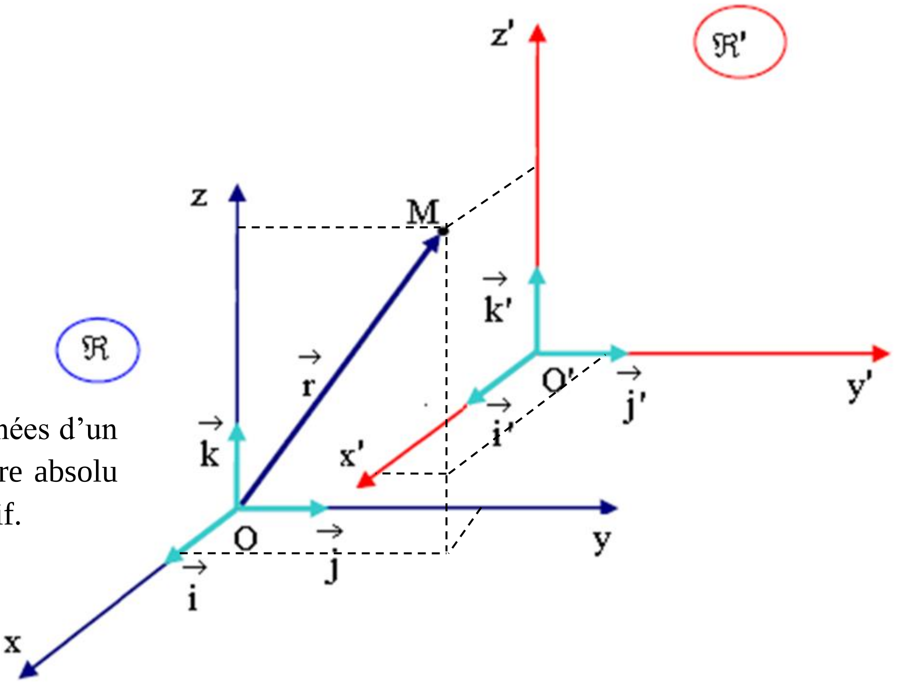


Figure 42 : Coordonnées d'un point M dans le repère absolu et dans le repère relatif.

Dans le référentiel absolu $\Re(O,x,y,z)$, les vecteurs unitaires de la base sont fixe, par conséquent, leurs dérivées sont nulles. Le mouvement de M est caractérisé par les grandeurs :

Vecteur position : $\vec{r}(t)_{/\Re} =: \overrightarrow{OM}(t)_{/\Re} = x(t).\vec{\imath} + y(t).\vec{\jmath} + z(t).\vec{k}$

Vecteur vitesse absolue : $\vec{v}(t)_{/\Re} = \frac{d\overrightarrow{OM}(t)}{dt}_{/\Re} = \dot{x}(t).\vec{\imath} + \dot{y}(t).\vec{\jmath} + \dot{z}(t).\vec{k}$

Vecteur accélération absolue : $\vec{\gamma}(t)_{/\Re} =: \frac{d\vec{v}(t)}{dt}_{/\Re} = \ddot{x}(t).\vec{\imath} + \ddot{y}(t).\vec{\jmath} + \ddot{z}(t).\vec{k}$

Dans le référentiel relatif $\Re'(O',x',y',z')$. Le mouvement de M est caractérisé par les grandeurs :

Vecteur position : $\vec{r'}(t)_{/\Re'} =: \overrightarrow{O'M}(t)_{/\Re'} = x'(t).\vec{\imath'} + y'(t).\vec{\jmath'} + z'(t).\vec{k}'$

Vecteur vitesse relative : $\vec{v'}(t)_{/\Re'} = \frac{d\overrightarrow{O'M}(t)}{dt}_{/\Re'} = \dot{x}'(t).\vec{\imath'} + \dot{y}'(t).\vec{\jmath'} + \dot{z}'(t).\vec{k'}$

Vecteur accélération relative : $\vec{\gamma'}(t)_{/\Re'} =: \frac{d\vec{v'}(t)}{dt}_{/\Re'} = \ddot{x}'(t).\vec{\imath'} + \ddot{y}'(t).\vec{\jmath'} + \ddot{z}'(t).\vec{k'}$

9.1. Composition des vitesses

En utilisant la relation de Chasles :

$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$

Où, $\overrightarrow{OO'} = x_O(t)\vec{\imath} + y_O(t)\vec{\jmath} + z_O(t)\vec{k}$: est le vecteur position du point O' (l'origine du référentiel $\Re'$) dans le référentiel $\Re$.

$$\vec{v}(t)_{/\Re} = \frac{d\overrightarrow{OM}(t)}{dt}_{/\Re} = \frac{d\overrightarrow{OO'}(t)}{dt}_{/\Re} + \frac{d\overrightarrow{O'M}(t)}{dt}_{/\Re}$$

$$= \frac{d\overrightarrow{OO'}(t)}{dt}_{/\Re} + \frac{d(x'(t).\vec{\imath'}+y'(t).\vec{\jmath'}+z'(t).\vec{k}')}{dt}_{/\Re} = \frac{d\overrightarrow{OO'}(t)}{dt}_{/\Re} + \dot{x}'(t).\vec{\imath'} + \dot{y}'(t).\vec{\jmath'} + \dot{z}'(t).\vec{k'} + x'\frac{d\vec{\imath'}}{dt}_{/\Re} + y'\frac{d\vec{\jmath'}}{dt}_{/\Re} + z'\frac{d\vec{k'}}{dt}_{/\Re}$$

$$\vec{v}(t)_{/\Re} = \frac{d\overrightarrow{OO'}(t)}{dt}_{/\Re} + x'\frac{d\vec{\imath'}}{dt}_{/\Re} + y'\frac{d\vec{\jmath'}}{dt}_{/\Re} + z'\frac{d\vec{k'}}{dt}_{/\Re} + \dot{x}'(t).\vec{\imath'} + \dot{y}'(t).\vec{\jmath'} + \dot{z}'(t).\vec{k'}$$

$\dot{x}'(t).\vec{\imath'} + \dot{y}'(t).\vec{\jmath'} + \dot{z}'(t).\vec{k'}$ est la ***vitesse relative***, notée $\vec{v}_r$

$\frac{d\overrightarrow{OO'}(t)}{dt}_{/\Re} + x'\frac{d\vec{\imath'}}{dt}_{/\Re} + y'\frac{d\vec{\jmath'}}{dt}_{/\Re} + z'\frac{d\vec{k'}}{dt}_{/\Re}$ est appelée ***vitesse d'entrainement***, notée $\vec{v}_e$, elle représente la vitesse du repère $\Re'$ par rapport au repère $\Re$. Autrement dit, il s'agit de la vitesse absolue d'un point P, fixe dans le référentiel $\Re'$, coïncidant avec la position de M au temps t considéré.

L'expression de $\vec{v}_e$ comprend deux termes:

$\frac{d\overrightarrow{OO'}(t)}{dt}_{/\Re}$: Représente la vitesse de translation de l'origine O' par rapport au référentiel $\Re$.

$x'\frac{d\vec{\imath'}}{dt}_{/\Re} + y'\frac{d\vec{\jmath'}}{dt}_{/\Re} + z'\frac{d\vec{k'}}{dt}_{/\Re}$: représente la rotation du référentiel $\Re'$.

$\vec{v}(t)_{/\Re} = \frac{d\overrightarrow{OM}(t)}{dt}_{/\Re}$ est la vitesse absolue, notée $\vec{v}_a$.

La loi de composition des vitesses s'écrit alors :

$\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r$

9.2. Composition des accélérations

Reprenons l'expression de la vitesse:

$$\vec{v}(t)_{/\Re} = \frac{d\overrightarrow{OO'}(t)}{dt}_{/\Re} + x'\frac{d\vec{\imath'}}{dt}_{/\Re} + y'\frac{d\vec{\jmath'}}{dt}_{/\Re} + z'\frac{d\vec{k'}}{dt}_{/\Re} + \dot{x}'(t).\vec{\imath'} + \dot{y}'(t).\vec{\jmath'} + \dot{z}'(t).\vec{k'}$$

$\vec{\gamma}(t)_{/\Re} = \frac{d\vec{v}(t)}{dt}_{/\Re} = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}(t)}{dt^2}_{/\Re} + x'\frac{d^2\vec{\imath'}}{dt}_{/\Re} + \dot{x}'\frac{d\vec{\imath'}}{dt}_{/\Re} + y'\frac{d^2\vec{\jmath'}}{dt}_{/\Re} + \dot{y}'\frac{d\vec{\jmath'}}{dt}_{/\Re} + z'\frac{d^2\vec{k'}}{dt}_{/\Re} + \dot{z}'\frac{d\vec{k'}}{dt}_{/\Re} + \ddot{x}'(t).\vec{\imath'} + \dot{x}'\frac{d\vec{\imath'}}{dt}_{/\Re} + \ddot{y}'(t).\vec{\jmath'} + \dot{y}'\frac{d\vec{\jmath'}}{dt}_{/\Re} + \ddot{z}'(t).\vec{k'} + \dot{z}'\frac{d\vec{k'}}{dt}_{/\Re}$

$= \frac{d^2\overrightarrow{OO'}(t)}{dt^2}_{/\Re} + x'\frac{d^2\vec{\imath'}}{dt}_{/\Re} + y'\frac{d^2\vec{\jmath'}}{dt}_{/\Re} + z'\frac{d^2\vec{k'}}{dt}_{/\Re} + 2\left(\dot{x}'\frac{d\vec{\imath'}}{dt}_{/\Re} + \dot{y}'\frac{d\vec{\jmath'}}{dt}_{/\Re} + \dot{z}'\frac{d\vec{k'}}{dt}_{/\Re}\right) + \left(\ddot{x}'(t).\vec{\imath'} + \ddot{y}'(t).\vec{\jmath'} + \ddot{z}'(t).\vec{k'}\right)$

Le terme : $\frac{d^2\overrightarrow{OO'}(t)}{dt^2}_{/\Re} + x'\frac{d^2\vec{\imath'}}{dt}_{/\Re} + y'\frac{d^2\vec{\jmath'}}{dt}_{/\Re} + z'\frac{d^2\vec{k'}}{dt}_{/\Re}$ représente ***l'accélération d'entrainement*** $\vec{\gamma}_e$; c'est l'accélération d'un point P, fixe au référentiel$\Re'$et qui coincide avec le point M.

Le terme $2\left(\dot{x}'\frac{d\vec{\imath'}}{dt}_{/\Re} + \dot{y}'\frac{d\vec{\jmath'}}{dt}_{/\Re} + \dot{z}'\frac{d\vec{k'}}{dt}_{/\Re}\right)$ est appelée ***l'accélération complémentaire ou de Coriolis*** $\vec{\gamma}_c$.

Le terme $\left(\ddot{x}'(t).\vec{\imath'} + \ddot{y}'(t).\vec{\jmath'} + \ddot{z}'(t).\vec{k'}\right)$ est l'***accélération relative*** $\vec{\gamma}_r$.

La loi de composition des accélérations s'écrit alors :

$\vec{\gamma}_a = \vec{\gamma}_e + \vec{\gamma}_c + \vec{\gamma}_r$

9.3. Quelques cas particuliers des mouvements du repère relatif par rapport au repère absolu

9.3.1. Translation rectiligne

Le repère $\Re'$ effectue un déplacement suivant une droite mais ne tourne pas. Pour simplifier, nous choisissons un mouvement suivant l'axe (Ox).

La loi de composition des vitesses s'écrit:

$\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r$

Avec, $\vec{v}_e$; c'est la vitesse rectiligne de l'origine O'

$\vec{v}_e = \vec{v}(O')_{/\Re} = v(O')_{/\Re}\vec{\imath} = v(O')_{/\Re}\vec{\imath'}$

La loi de composition des accélérations s'écrit:

$\vec{\gamma}_a = \vec{\gamma}_e + \vec{\gamma}_c + \vec{\gamma}_r$,

Comme les vecteurs unitaires ne tournent pas, alors leurs dérivées première et secondes par rapport au temps sont nulles, d'où $\vec{\gamma}_c = \vec{0}$ et $\vec{\gamma}_e$ se réduit à $\frac{d^2\overrightarrow{OO'}(t)}{dt^2}_{/\Re}$

Donc, $\vec{\gamma}_a = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}(t)}{dt^2}_{/\Re} + \vec{\gamma}_r$

Si la vitesse du repère $\Re'$ est ***rectiligne et uniforme***, alors v_e est constante.

$\vec{v}_e = \vec{v}(O')_{/\Re} = v(O')_{/\Re}\vec{\imath}$

$\vec{v}_e = \frac{d(\overrightarrow{OO'})}{dt}_{/\Re}$ ➔ $\overrightarrow{OO'} = v(O')_{/\Re}t.\vec{\imath} + \vec{C}$, où $\vec{C}$ est le vecteur position du point O' à l'instant t=0

$\vec{\gamma}_a = \vec{\gamma}_r \qquad (\vec{\gamma}_e = \vec{0}, \vec{\gamma}_c = \vec{0})$

9.3.1.1. Translation circulaire uniforme

L'origine O' du repère $\Re'$ décrit un cercle dans le référentiel $\Re$. La vitesse angulaire du repère $\Re'$ est constante (w). Pour simplifier le problème, nous choisissons une rotation autour de la l'axe (Oz) et que les origines O et O' sont confondues.

La loi de composition des vitesses s'écrit :

$\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r$

où $\vec{v}_e = \frac{d\overrightarrow{OO'}(t)}{dt}_{/\Re} + x'\frac{d\vec{\imath}'}{dt}_{/\Re} + y'\frac{d\vec{\jmath}'}{dt}_{/\Re} + z'\frac{d\vec{k}'}{dt}_{/\Re}$

Les deux points O et O' sont confondus, alors $\overrightarrow{OO'} = \vec{0}$, sa derivé est nulle

Rappelons que $\frac{d\vec{\imath}'}{dt} = \vec{w} \wedge \vec{\imath}'$, $\frac{d\vec{\jmath}'}{dt} = \vec{w} \wedge \vec{\jmath}'$, $\frac{d\vec{k}'}{dt} = \vec{w} \wedge \vec{k}'$

Donc, $x'\frac{d\vec{\imath}'}{dt}_{/\Re} + y'\frac{d\vec{\jmath}'}{dt}_{/\Re} + z'\frac{d\vec{k}'}{dt}_{/\Re} = \vec{w} \wedge \overrightarrow{O'M}$

$\vec{v}_a = \vec{w} \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{v}_r$

La loi de compositions des accélérations s'écrit:

$\vec{\gamma}_a = \vec{\gamma}_e + \vec{\gamma}_c + \vec{\gamma}_r$

Avec, $\vec{\gamma}_e =: \frac{d^2\overrightarrow{OO'}(t)}{dt^2}_{/\Re} + x'\frac{d^2\vec{\imath}'}{dt}_{/\Re} + y'\frac{d^2\vec{\jmath}'}{dt}_{/\Re} + z'\frac{d^2\vec{k}'}{dt}_{/\Re} = \vec{w} \wedge (\vec{w} \wedge \overrightarrow{O'M})$

$\vec{\gamma}_c = 2\left(\dot{x}'\frac{d\vec{\imath}'}{dt}_{/\Re} + \dot{y}'\frac{d\vec{\jmath}'}{dt}_{/\Re} + \dot{z}'\frac{d\vec{k}'}{dt}_{/\Re}\right) = 2\vec{w} \wedge \vec{v}_r$

Donc, $\vec{\gamma}_a = \vec{w} \wedge (\vec{w} \wedge \overrightarrow{O'M}) + 2\vec{w} \wedge \vec{v}_r + \vec{\gamma}_r$