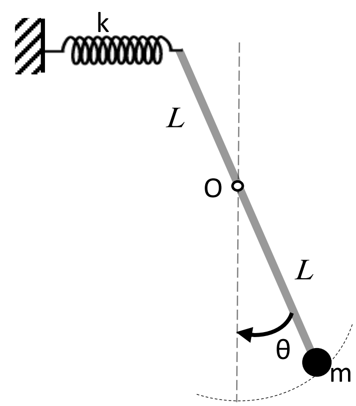
Contrôle continu N° 1

Exercice 1 : Système libre non amorti

7 pts



On considère un système composé d'une tige sans masse de longueur 2L
Qui peut pivoter dans le plan vertical autour du point O. L'extrémité du bas attachée à une masse ponctuelle m et l'autre extrémité est connectée à une ressort de raideur k d'un côté et à un amortisseur de l'autre.
A l'équilibre la tige est verticale et le ressort est au repos.

La tige est écartée de son état d'équilibre puis relâchée sans vitesse initiale pour osciller librement. La période des oscillations mesuré est de 1 s.

1- Calculer l'énergie cinétique E_c du système en fonction de θ.

$$E_c = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2$$

2- Calculer l'énergie potentielle E_p du système en fonction de θ.

$$E_c = \frac{1}{2}kl^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mgl\theta^2 - mgl \quad \text{par rapport au niveau du point } O$$

3- Etablir l'équation de mouvement du système et donner l'expression de la pulsation propre ω_0.

$$ml^2\ddot{\theta} + (mgl + kl^2)\theta = 0 \rightarrow \ddot{\theta} + \left(\frac{k}{m} + \frac{g}{l}\right)\theta = 0$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m} + \frac{g}{l}}$$

4- Si la longueur L=1 m et la masse m=0.5 kg calculer la constante de raideur k.

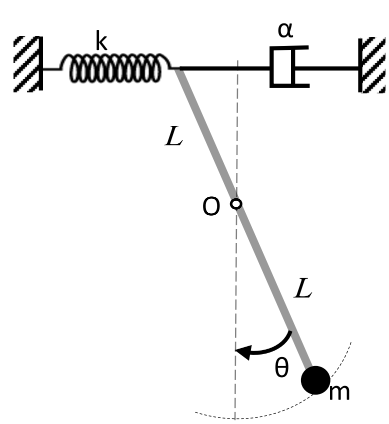
$$T = 1s \ \boxed{\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 6.28\, rad\,/s}$$

$$k = \left(\omega_0^2 - \frac{g}{l}\right)m = 14.81\, kg.m.s^{-2}$$

Remarque : on prend g=9.81 m/s² et π=3.14.

Exercice 2 : Système libre amorti

7 pts



On reprend le système de l'exercice 1 et on introduit un amortisseur de constante α.

1. Ecrire l'équation de mouvement et donner l'expression du facteur d'amortissement.

$$\ddot{\theta} + \frac{\alpha}{2m}\dot{\theta} + \left(\frac{k}{m} + \frac{g}{l}\right)\theta = 0 \ \ d'ou \ \ \delta = \frac{\alpha}{2m}$$

2. On écarte le système d'un angle θ(0) =10° et on laisse le système évoluer librement. On constate que l'amplitude des oscillations est diminuée de moitié au bout de 5 oscillations. En déduire la constante d'amortissement α.

$$D = \frac{1}{5}\ln\left(\frac{\theta_0}{0.5\theta_0}\right) = 0.14 = \delta T_a = \frac{2\pi\delta}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}$$

$$\delta = \frac{D\omega_0}{\sqrt{4\pi^2 + D^2}} = 0.14\, s^{-1}$$

Contrôle continu N° 1

$$\delta = \frac{\alpha}{2m} = 0.14\,kg.s^{-1} \rightarrow \boxed{\alpha = 0.14\,kg.s^{-1}}$$

2- Pour la suite, on choisit pour l'amortisseur la valeur de α=6.28 kg.m/s. Ecrire l'expression de la réponse du système θ(t) dans ce cas.

$$\delta = \omega_0 \rightarrow \ \theta(t) = (c_1 + c_2 t)e^{-\delta t}$$

3- A l'instant t=0, lorsque le système est au repos θ(0)=0, on communique une vitesse initiale angulaire quelconque au système θ(0)= $\dot{\theta}_0$ le système évolue vers une position maximale puis rebrousse chemin. A quel instant t_{max} le déplacement angulaire θ(t) atteint sa valeur maximale.

$$\theta(0) = 0 \rightarrow \ c_1 = 0$$

$$\dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0$$

$$\dot{\theta} = c_2 e^{-\delta t} - \delta c_2 t e^{-\delta t}$$

$$\dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0 \rightarrow c_2 = \dot{\theta}_0$$

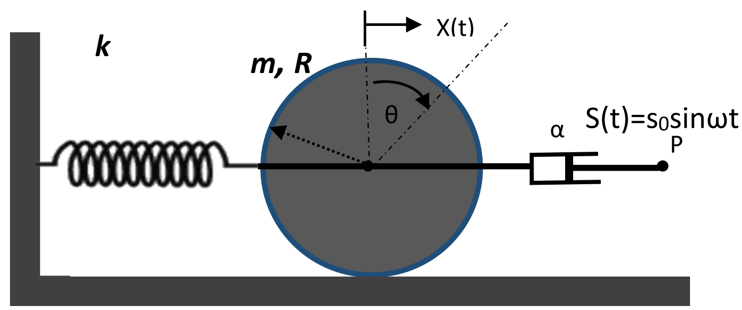
$$\dot{\theta}(t_{max}) = 0 \rightarrow t_m = \frac{1}{\delta} = 1.47\,s$$

4- L'amortissement est proportionnel à la vitesse

Exercice 3 : Système forcé (fréquence forcée)

6 pts

Un cylindre homogène de masse M et de rayon R roule sans glisser sur un plan horizontal. Son mouvement est repéré par le déplacement x(t) de son centre de masse par rapport à sa position d'équilibre. Un déplacement s(t)=S_0cosωt est imposé au point P.



1- Etablir l'équation différentielle du mouvement du système et préciser les expressions du facteur d'amortissement ô et de la pulsation propre ω_0.

$$E_c = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2, \quad Or \quad x = R\dot{\theta} \quad d'ou \ \boxed{E_c = \frac{3}{4}m\dot{x}^2}$$

$$\boxed{E_p = \tfrac{1}{2}kx^2}$$

$$\boxed{D = \frac{1}{2}\alpha(\dot{x} - \dot{s})^2 = \frac{1}{2}\alpha(\dot{x} - s_0\omega\cos(\omega t))^2}$$

3

$$L'\acute{e}qt\ de\ mvt:\ \frac{3}{2}m\ddot{x} + kx = -\alpha(\dot{x} - s_0\omega\cos(\omega t))$$

$$\ddot{x} + \frac{2\alpha}{3m}\dot{x} + \frac{2k}{3m}x = \frac{2\alpha}{3m}(s_0\omega\cos(\omega t))$$

$$\delta = \frac{\alpha}{3m} = 60 s^{-1}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{3m}} = 18{,}97\,rad.s^{-1}$$

$$A_0 = \frac{2\alpha s_0\omega}{3m}$$

2- Donner la réponse totale du système correspondant aux valeurs calculées de δ et de ω_0.

Contrôle continu N° 1

$$\delta > \omega_0 \ donc \quad x_H = C_1 e^{r_1} + C_2 e^{r_2}$$

1.5

La solution complète qui est la réponse totale du système

$$x(t) = C_1 e^{r_1} + C_2 e^{r_2} + Xsin(\omega t + \Phi)$$

$$r_1 \ et \ r_2 \ sont \ les \ solutions \ de \ l'équation \ caractéristique \ et \ sont \ négatifs$$

$$r_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} < 0$$

3- En régime permanent, donner l'expression de l'amplitude des vibrations en fonction de S_o, δ, ω_0 et ω.

La solution devient x= x_p $= Xsin(\omega t + \Phi)$

$$avec \quad X = \frac{2\alpha s_0 \omega}{3m} \cdot \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}}$$

1.5

$$\Phi = Arctan\left(-\frac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)$$

On donne M = 10kg, α = 1800 kg/s, k = 5400N/m., R=0.05 m

Exo1: