Fonctions dérivables

H. Benhassine

Octobre 2021

Table des Matières

Chapitre 1

Fonctions dérivables

1.1 Définitions et propriètés

Définition 1.1.1 *Soit la fonction réelle $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On dit que:*

1. *f est dérivable au point $x_0 \in D$, si et seulement si, la limite : $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existe. On parlera alors de dérivée de f au point x_0 que l'on notera :$f'(x_0)$, $\frac{df}{dx}(x_0)$ ou $Df(x_0)$.*

2. *f est dérivable à droite (respectivement à gauche) du point $x_0 \in D$, si et seulement si, la limite : $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ (respectivement $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$) existe. On notera alors:*
   - *$f'(x_0+0)$ la dérivée à droite du point x_0.*
   - *$f'(x_0-0)$ la dérivée à gauche du point x_0.*

3. *f est dérivable sur tout l'intervalle D, si et seulement si, elle est dérivable sur tout point $x_0 \in D$.*

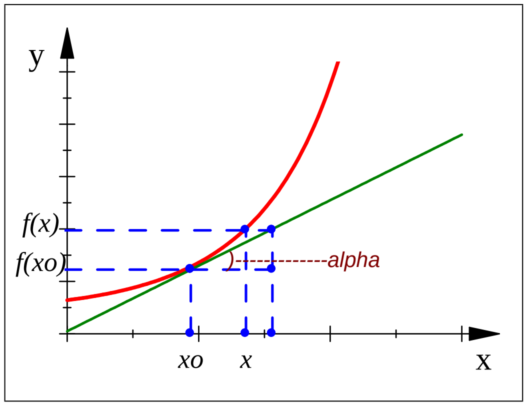
Remarque 1.1.2

1. D'aprés la définition de la dérivée d'une fonction au point x_0 introduite ci-dessus, on peut écrire:
$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0) + \varepsilon(x), \text{ avec: } \lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0.$$

2. On peut aussi définir la dérivée d'une fonction par la relation:
$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

3. On a l'équivalence suivante: f est dérivable au point $x_0 \Leftrightarrow f'(x_0+0) = f'(x_0-0)$.

4. Géométriquement, la dérivée d'une fonction représente l'inclinaison de la droite tangente à la courbe $y = f(x)$ au point x_0 (quand $x \to x_0$) comme illustré dans la figure ci-aprés:



$$f'(x_0) = \tan\alpha \simeq \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

- La dérivée de la fonction: $f(x) = \sqrt{x}$ définie sur $\mathbb{R}_+$ au point $x_0 = 1$ est: $f'(1) = 1/2$.

  En effet: $\lim\limits_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{1}}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{1})(\sqrt{x}+\sqrt{1})}{(x-1)(\sqrt{x}+\sqrt{1})} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{1}{(\sqrt{x}+\sqrt{1})} = \frac{1}{2}$.

- La fonction: $f(x) = |x|$ définie sur $\mathbb{R}$ n'admet pas de dérivée au point $x_0 = 0$. En effet, les dérivées à droite et à gauche du point $x_0 = 0$ ne sont pas égales:

$$f'(+0) = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{|x|}{x} = 1.$$
$$f'(-0) = \lim_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{|x|}{x} = -1.$$

- La fonction: $f(x) = \frac{1}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$ admet une dérivée en tout point x_0 de son domaine de définition avec: $f'(x) = \frac{-1}{x^2}$.

  En effet: $\forall x_0 \in \mathbb{R}^*$: $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0}}{x-x_0} = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{-1}{x x_0} = \frac{-1}{x_0^2}$.

Théorème 1.1.3 *f est dérivable au point x_0 $\Longrightarrow$ f est continue au point x_0.*

Démonstration. *Soit f une fonction dérivable au point x_0, alors d'aprés la remarque précédente:*

$$\exists \varepsilon(x) : \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0) + \varepsilon(x) \quad \textit{avec: } \lim_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0.$$

par passage à la limite on a:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0} f(x) - f(x_0) &= \lim_{x\to x_0} \left((x-x_0)\left(f'(x_0)+\varepsilon(x)\right)\right) \\ &= \lim_{x\to x_0} (x-x_0) f'(x_0) + \lim_{x\to x_0} (x-x_0)\varepsilon(x) \\ &= 0\left(f'(x_0)+0\right) = 0.\end{aligned}$$

C'est à dire: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

On conclut que f est continue au point x_0. ■

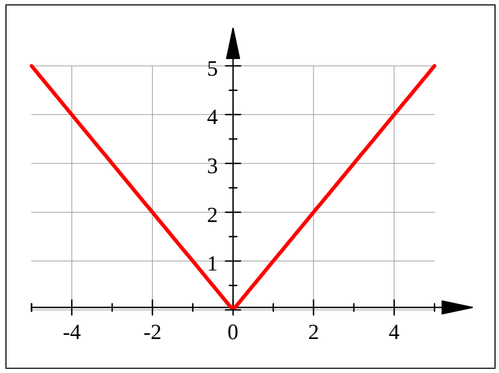
Remarque 1.1.4

1. f est dérivable à droite (respectivement à gauche) du point $x_0 \in D$ $\Longrightarrow$ f est continue à droite (respectivement à gauche) du point x_0.

2. L'implication inverse du théorème précédent n'est pas forcément vraie.

Exemple 1.1.5

- La fonction $f(x) = \frac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^* \implies f$ est continue sur $\mathbb{R}^*$.
- La fonction $f(x) = |x|$ est est continue au point $x_0 = 0$ (voir le tracé de la courbe de $|x|$) mais elle n'est pas dérivable en ce point (voir exemple précédent).



Non dérivabilité de $|x|$ à l'origine.

1.1.1 Dérivées n-ièmes

Définition 1.1.6

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle D. On définie alors la dérivée d'ordre n de la fonction f si elle existe, par la relation de récurrence:

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)^{'},$$

telle que: $f^{(0)}(x) = f(x)$, $f^{(1)}(x) = f^{'}(x)$, $f^{(2)}(x) = f^{''}(x)$, $f^{(3)}(x) = \left(f^{''}(x)\right)^{'}$, ...ect.

On dira que f est de classe $C^n(D)$ si et seulement si:

- f est dérivable n fois sur l'intervalle D,
- $f^{(n)}$ est continue sur l'intervalle D.

Remarque 1.1.7

1. Il faut bien faire le distinguo entre les deux écritures: $f^{(n)}$ et f^n(la première représente la dérivée n-ième et la deuxième représente la puissance).
2. A noter que $C^\infty(D)$ représente les fonctions indéfiniment dérivables sur D et que $C^0(D)$ représente les fonctions continues sur D.

Exemple 1.1.8

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{-1\}$ par: $f(x) = \frac{1}{1+x}$. Cette fonction est de classe C^n sur son intervalle de définition et l'on a:

$f^{(1)}(x) = f'(x) = \frac{-1}{(x+1)^2} = -(x+1)^{-2}$,

$f^{(2)}(x) = \left(-(x+1)^{-2}\right)' = 2(x+1)^{-3}$,
$f^{(3)}(x) = \left(-(x+1)^{-3}\right)' = -2 \cdot 3 \cdot (x+1)^{-4}$,
$f^{(4)}(x) = \left(-(x+1)^{-4}\right)' = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot (x+1)^{-5}$.

Il est aisé alors de vérifier par récurrence que l'on a la forme de la dérivée n-ième suivante:

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \cdot n! \cdot (x+1)^{-(n+1)} = \frac{(-1)^n \, n!}{(x+1)^{(n+1)}}.$$

1.1.2 Opération sur les fonctions dérivables

- Soient f et g deux fonctions définies et dérivables au point $x_0 \in D$. Alors il est aisé de vérifier en utilisant la définition de la dérivée que l'on a les relations suivantes:

$$\begin{aligned} (f \cdot g)'(x_0) &= f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0), \\ \left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) &= \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{g^2(x_0)}, \text{ pour } g(x_0) \neq 0. \end{aligned}$$

- Si $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : D_g \longrightarrow \mathbb{R}$ sont deux fonctions réelles telles que:
  - f est dérivable au point $x_0 \in D_f$,
  - g est dérivable au point $f(x_0)$ avec $f(x_0) \subseteq D_g$,

  alors la fonction composée $g \circ f$ est dérivable au point x_0 avec:

$$(g \circ f)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g'(f(x_0)).$$

- **Formule Leibniz**

  Si les deux fonctions f et g admettent des dérivées d'ordre n au point x_0, alors la fonction produit fg admet une dérivée d'ordre n en ce point dont l'expression est donnée par la relation suivante:

$$\begin{aligned} (f \cdot g)^{(n)}(x_0) &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)}(x_0) g^{(n-k)}(x_0) \\ &= f(x_0)g^{(n)}(x_0) + C_n^1 f^{(1)}(x_0) g^{(n-1)}(x_0) + \cdots + C_n^{n-1} f^{(n-1)}(x_0) g^{(1)}(x_0) + f^{(n)}(x_0) g(x_0). \end{aligned}$$

Démonstration. La démonstration se fait par récurrence en utilisant l'égalité du triangle de Pascal: $C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}$. A noter aussi que l'on a: $C_n^n = C_n^0 = 1$. ■

- Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction bijective continue sur son intervalle de définition. Si f est dérivable au point $x_0 \in D$ telle que: $f'(x_0) \neq 0$ alors sa fonction inverse f^{-1} est elle aussi dérivable au point $y = f(x_0)$ et sa dérivée sera donnée par la relation:

$$\left(f^{-1}(y)\right)' = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

  On rappellera que pour toute fonction f possédant une fonction inverse on a la relation:

$$f(x) = y \Longleftrightarrow f^{-1}(y) = x.$$

- La fonction $h : x \mapsto \sin(\ln x)$ composée des deux fonctions $f : x \mapsto \ln x$ et $g : x \mapsto \sin x$ est dérivable sur son domaine de définition $\mathbb{R}_+^*$ et l'expression de sa dérivée est donnée par la relation:

$$h^{'}(x) = (g \circ f)^{'}(x) = f^{'}(x) \cdot g^{'}(f(x)) = \frac{1}{x}\cos(\ln x)$$

- La fonction:

$$\begin{array}{rccc} f : & [-\pi/2, \pi/2] & \longrightarrow & [-1, 1] \\ & x & \longmapsto & \sin x \end{array},$$

admet une fonction inverse, que l'on note arcsin telle que:

$$\begin{array}{rccc} f^{-1} : & [-1, 1] & \longrightarrow & [-\pi/2, \pi/2] \\ & y & \longmapsto & \arcsin y \end{array}.$$

La fonction sin étant dérivable sur l'intervalle $]-\pi/2, \pi/2[$ avec $\sin^{'} x = \cos x \neq 0$, alors la fonction inverse est dérivable sur l'intervalle $]-1, 1[$ et sa dérivée est donnée par:

$$(\arcsin y)^{'} = \frac{1}{(\sin x)^{'}} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

(On notera que $\cos x$ est strictement positif sur l'intervalle $]-\pi/2, \pi/2[$).

Nous allons ci-aprés énoncer quelques théorèmes importants en analyse fonctionnelle relatifs à la dérivabilité des fonctions sur un intervalle.

1.2 Thèorèmes sur les fonctions dérivables sur un intervalle

Théorème 1.2.1 *(de Rolle)*

Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle telle que:

- f est continue sur $[a, b]$
- f est dérivable sur $]a, b[$
- $f(a) = f(b)$

Alors:

$$\exists c \in \,]a, b[\, : f'(c) = 0.$$

Démonstration. Il est clair que si f est une fonction constante sur $[a, b]$, alors:

$$\forall c \in \,]a, b[\, : f'(c) = 0.$$

Maitenant, si f n'est pas une fonction constante sur $[a, b]$. Supposons par exemple que f prenne des valeurs plus grandes que $f(a)$ et donc aussi plus grandes que $f(b)$ (car par hypothèse $f(a) = f(b)$).

Comme f est continue sur $[a, b]$, cela implique, comme on l'a vu au chapitre précédent, que f est bornée et en particulier atteint sa borne supérieure:

$$\exists c \in \,]a, b[\, : f(c) = \underset{[a,b]}{Sup}\, f$$

D'autre part, f étant dérivable sur $]a,b[$ les dérivées à droite et à gauche du point c existent :

$f'(c+0) = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = \frac{\text{négatif}}{\text{positif}} \leq 0,$

$f'(c-0) = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = \frac{\text{négatif}}{\text{negatif}} \geq 0.$

Comme ces deux dérivées doivent être égales, alors forcément elles sont nulles et donc:

$$f'(c) = 0.$$

■

Théorème 1.2.2 *(des accroissements finis)*

Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle telle que:

- f est continue sur $[a,b]$
- f est dérivable sur $]a,b[$

Alors:

$$\exists c \in \,]a,b[\, : \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c).$$

Démonstration. On applique le thèorème de Rolle à la fonction:

$$\phi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$

En effet, ϕ est une fonction continue sur l'intervalle $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. Aussi elle vérifie: $\phi(a) = 0 = \phi(b)$. D'aprés le thèorème de Rolle:

$$\exists c \in \,]a,b[\, : \phi'(c) = 0$$

$$\Rightarrow \exists c \in \,]a,b[\, : f^{'}(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$$

$$\Rightarrow \exists c \in \,]a,b[\, : f^{'}(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

■

Exemple 1.2.3

La fonction $f(x) = \ln x$ est continue sur $[n, n+1]$ et dérivable sur $]n, n+1[$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, alors en appliquant le théorème des accroissements finis on a:

$$\exists c \in \,]n, n+1[\, : \ln(\frac{n+1}{n}) = \frac{1}{c}.$$

Corollaire 1.2.4

Si f est une fonction dérivable sur un intervalle quelconque $D \subseteq \mathbb{R}$, alors on a:

$$\forall x_1, x_2 \in D, \exists c \in \,]x_1, x_2[\, : f(x_1) - f(x_2) = (x_1 - x_2) f^{'}(c).$$

En remarquant que: $c \in \,]x_1, x_2[\, \Leftrightarrow c = x_1 + \theta(x_1 - x_2)$, avec: $0 < \theta < 1$, il est possible d'écrire l'expression précédente de la façon:

$$f(x_1) - f(x_2) = (x_1 - x_2) f^{'}(x_1 + \theta(x_1 - x_2)).$$

Théorème 1.2.5 *(des accroissements finis généralisés)*

Soient f et g deux fonctions réelles définie sur l'intervalle $[a, b]$ telles que:

• f et g sont continues sur $[a, b]$

• f et g sont dérivables sur $]a, b[$ avec $g'(x) \neq 0$ sur $]a, b[$.

Alors:

$$\exists c \in \,]a, b[\, : \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer la règle de Rolle à la fonction:

$$\phi(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g(x).$$

■

Le théorème précédent permet de déduire une régle impotante qui permet, lors du calcul des limites, d'ôter les cas d'indétermination du genre $\frac{0}{0}$.

Théorème 1.2.6 *(Régle de l'Hospital)*

Soient f et g deux fonctions réelles dérivables au voisinage d'un point a telles que : $f(b) = 0 = f(a)$. Si la limite: $\lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$ existe, alors on a:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l.$$

Exemple 1.2.7

• $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{0}{0} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} = 1.$

• $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = \frac{0}{0} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\frac{1}{1+x}}{1} = 1.$

Remarque 1.2.8

1. Il est possible d'appliquer la régle de l'Hospital plusieurs fois successivement lors du calcul de la limite pour enlever le cas d'indermination $\frac{0}{0}$. Par exemple:

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} = \frac{0}{0} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x} = \frac{0}{0} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \frac{0}{0} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = 2.$$

2. Il est possible d'appliquer la régle de l'Hospital lors du calcul de la limite pour enlever le cas d'indermination $\frac{0}{0}$ quand $x \to \infty$. Pour cela il suffit de faire un changement de variable et de se ramener au voisinage du zéro:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sin \frac{k}{x}}{\frac{1}{x}} = \frac{0}{0} = \lim_{y \to 0} k \frac{\sin y}{y} = k \lim_{y \to 0} \frac{\cos y}{1} = k. \quad (\text{avec: } y = \frac{k}{x})$$

1.3 Extremum d'une fonction

Définition 1.3.1

Soit une fonction f définie sur un intervalle I et x_0 un point de I. On dit que f admet sur l'intervalle I une valeur maximale locale (respectivement une valeur minimale locale) au point x_0, si et seulement si, il existe un voisinage $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$ en ce point (avec $\varepsilon > 0$) tel que:

$$\forall x \in]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[: f(x) \leq f(x_0), \quad \text{(respectivement: } f(x) \geq f(x_0)).$$

On désigne par extremum local d'une fonction, toute valeur maximale ou minimanale relative de celle-ci.

Théorème 1.3.2

Si une fonction f posséde un extermum local au point x_0 et si la dérivée en ce point existe, alors forcément on a: $f'(x_0) = 0$.

Démonstration. Supposons que f admette une valeur maximale relative au point x_0. La fonction étant dérivable en ce point alors la dérivée à gauche et à droite sont définies et l'on a:

$f'(x_0 + 0) = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{\text{négatif}}{\text{positif}} \leq 0$

$f'(x_0 - 0) = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{\text{négatif}}{\text{negatif}} \geq 0.$

La fonction étant dérivable en ce point les deux dérivées doivent être égales et donc forcément nulles. Ce qui nous conduit à conclure que: $f'(x_0) = 0$. ■

Remarque 1.3.3

1. Il est possible que f admette un extermum au point x_0 sans que f soit dérivable en ce point (prendre par exemple la fonction $|x|$ au point $x_0 = 0$).

2. Si l'on a $f'(x_0) = 0$, cela n'imlique pas forcément que f possède un extremum en ce point (prendre par exemple la fonction x^3au point $x_0 = 0$).

1.4 Formules de Taylor

D'aprés la définition de la dérivée d'une fonction f au voisinage d'un point a, on vu qu'il était possible d'écrire:

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) + \varepsilon(x), \text{ avec: } \lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0.$$

C'est à dire que l'on a:

$$\begin{aligned} f(x) - f(a) &= (x - a)\left(f'(a) + \varepsilon(x)\right) \\ f(x) &= f(a) + (x - a)f'(a) + R(x), \text{ avec: } R(x) = (x - a)\varepsilon(x). \end{aligned}$$

C'est à dire que pour toute fonction f dérivable au point a, on peut approximer cette fonction au au voisinage du point a par un polynôme de degré 1 ($R(x)$ tendant vers zéro au voisinage de a).

La formule de Taylor que nous allons introduire maintenant, est une généralisation de ce résultat, dans le sens où **il est possible d'approximer toute fonction f possédant des dérivées d'ordre $n+1$ par un polynôme d'ordre n.**

Théorème 1.4.1 *(de Taylor)*

Soit $a < b$ deux nombres réelles et soit la fonction réelle $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ qui est n fois dérivable sur l'intervalle $[a, b]$ telle que:

- $f^{\ (n)}$est continue sur $[a, b]$,
- $f^{(n)}$ est dérivable sur $]a, b[$.

Alors $\exists c \in\ ]a, b[$ tel que:

$$f(b) = f(a) + \frac{f^{'}(a)}{1!}(b-a) + \frac{f^{''}(a)}{2!}(b-a)^2 + \cdots + \frac{f^{^{(n)}}(a)}{n!}(b-a)^n + \frac{f^{^{(n+1)}}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}.$$

Démonstration. La démonstration (voir B. Calvo Ref [2] p.16) est basée sur le thèorème de Rolle appliqué, successivement $n+1$ fois, à la fonction:

$$g(x) = f(x) - p(x) - \frac{f(b) - p(b)}{(b-a)^{n+1}}(x-a)^{n+1},$$

et à ses dérivées jusqu'à l'ordre n, où p est le polynôme de degré n défini par:

$$p(x) = f(a) + \frac{f^{'}(a)}{1!}(x-a) + \frac{f^{''}(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{^{(n)}}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

(On utilisera le fait que: $g(a) = g^{'}(a) = g^{''}(a) = \cdots = g^{^{(n)}}(a) = 0$). ■

L'écriture pratique du théorème de Taylor précèdent nous donne le corollaire suivant:

Corollaire 1.4.2

Soit D un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$ et soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable $(n+1)$ sur D. Soit $a \in D$, alors pour tout $x \neq a$ de l'intervalle D, il existe un élément c strictement compris entre x et a tel que:

$$f(x) = f(a) + \frac{f^{'}(a)}{1!}(x-a) + \frac{f^{''}(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{^{(n)}}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{^{(n+1)}}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Remarque 1.4.3

1. L'écriture précédente de f est dite le développement de Taylor d'ordre n de f au voisinage du point a.

2. On appelle l'expression:

   $$R_n(x) = \frac{f^{^{(n+1)}}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

   le reste de Lagrange.

3. Le développement de Taylor montre qu'il est possible d'approximer au voisiagne du point a les fonctions $(n+1)$ fois dérivables par un pôlyne d'ordre n (car le reste $R_n(x)$ tend vers zéro quand x tend vers a).

4. Dans le cas où $a = 0$, le développement de Taylor s'écrira :

$$\forall x \neq 0 : f(x) = f(0) + \frac{f^{'}(0)}{1!}x + \frac{f^{''}(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1},$$

avec: $0 < \theta < 1$.

On parlera alors de la formule de Mac-Laurin avec reste de Lagrange.

Exemple 1.4.4

- La fonction exponentielle $f(x) = e^x$ est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que: $f^{(n)}(x) = e^x$.

  En appliquant la fromule de Mac-Laurin avec reste de Lagrange à cette fonction on trouve:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}, \text{ avec: } 0 < \theta < 1.$$

- La fonction trigonométrique $f(x) = \sin x$ est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ avec:

$$\sin^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) \Longrightarrow \sin^{(n)}(0) = \begin{cases} 0, & \text{si } n = 2k \\ (-1)^k, & \text{si } n = 2k+1 \end{cases}.$$

  En appliquant la fromule de Mac-Laurin avec reste de Lagrange à cette fonction on trouve alors:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \frac{\sin^{(2k+3)}(\theta x)}{(2k+3)!}x^{2k+3}.$$

On a vu que pour appliquer le thèorème de Taylor à une fonction f au voisinage d'un point $a \in D$, il faut que cette fonction soit dérivable $(n+1)$ sur tout le domaine D. Nous allons ci-aprés appauvrir cette hypothèse en supposant que f n'est dérivable que n fois sur D avec juste $f^{(n+1)}(a)$ qui existe.

Théorème 1.4.5 *(de Taylor bis)*

Soit D un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$ et soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable n fois sur D. Soit $a \in D$ tel que: $f^{(n+1)}(a)$ existe. Alors pour tout $x \neq a$ de l'intervalle D, on a:

$$f(x) = f(a) + \frac{f^{'}(a)}{1!}(x-a) + \frac{f^{''}(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}\left(f^{(n+1)}(a) + \varepsilon(x)\right),$$

avec: $\lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$.

Remarque 1.4.6

1. On appelle : $R_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}\left(f^{(n+1)}(a) + \varepsilon(x)\right)$ le reste de Young.
2. L'écriture précédente de f est appelée le développement de Taylor de f au voisinage de a avec reste de Young.
3. Lorsque $a = 0$, on parle alors du le développement de Mac-Laurin de f au voisinage de a avec reste de Young.

4. La différence esentielle entre le développement de Mac-Laurin et celui de Taylor réside dans le fait que le premier possède un caratère local (existance de la dérivée $(n+1)$ juste au point a) alors que le second a un cacatère global (existance de la dérivée $(n+1)$ sur l'intervalle D tout entier).

Le développement de Taylor est utilisé parfois lors du calcul des limites pour oter l'indétermination comme le montre l'exercice suivant.

Exercise 1.4.7

1. Ecrire le développement de Mac-Laurin avec reste de Lagrange d'ordre 4 de la fonction $\cos x$.
2. En déduire la limite: $:\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\cos x-2+x^2}{x^4}$.

Solution 1.4.8

1. La fonction trigonométrique $f(x)=\cos x$ étant dérivable $(n+1)$ fois sur $\mathbb{R}$ avec:

$$\cos^{(n)}(x)=\cos\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)\Longrightarrow \cos^{(n)}(0)=\begin{cases} 0, & \text{si } n=2k+1 \\ (-1)^k, & \text{si } n=2k \end{cases}.$$

Et par suite la formule de Mac-Laurin avec reste de Lagrange nous donne:

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}+\frac{\cos^{(2k+1)}(\theta x)}{(2k+1)!}x^{2k+1},$$

avec: $0<\theta<1$. A l'ordre 4 ce développement s'écrira:

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{\sin(\theta x)}{6!}x^6.$$

2 En remplacant l'expression du cosinus dans la limite on trouve:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\tfrac{2\cos x-2+x^2}{x^4} &= \lim_{x\to 0}\tfrac{2(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{\sin(\theta x)}{6!}x^6)-2+x^2}{x^4} \\ &= \lim_{x\to 0}\tfrac{2(\frac{x^4}{4!}+\frac{\sin(\theta x)}{6!}x^6)}{x^4}=\lim_{x\to 0}(\tfrac{1}{12}+2\tfrac{\sin(\theta x)}{6!}x^2)=\tfrac{1}{12}.\end{aligned}$$