Université Mostefa Benboulaïd Batna 2
Faculté de Technologie
Département d'Electrotechnique
Année universitaire 2017/2018
Promotion : Licence en Electrotechnique
Parcours : Electrotechnique
Module : ELT514

<u>Contrôle de Connaissances</u>

Mercredi 04 Février 2018

Ne pas oublier les unités des différentes grandeurs

Bonus : $\vec{\nabla}.\vec{V}(r,\theta,\varphi) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 V_r)$

Exercice n°1

1.1. Donner les noms et le sens physique des expressions suivantes : $\vec{\nabla}V$, $\vec{\nabla}.\vec{V}$, $\vec{\nabla}\Lambda\vec{V}$

1.2. Terminer les expressions suivantes est donner leur sens physique : $\vec{\nabla}.\vec{B} =$, $\vec{\nabla}.\vec{D} =$, $\int \vec{E}.\vec{dl} =$, $\vec{\nabla}\Lambda\vec{A} =$, $\vec{\nabla}\Lambda\vec{E} =$

1.3. Quelles sont les propriétés d'un vecteur $\vec{V}$ pour qu'il soit un champ de gradient ?

1.4. Rappeler le théorème d'Ampère et la loi de Biot et Savart et dire à quoi servent-ils ?

Exercice n°2

On considère un système de 3 charges ponctuelles posées aux sommets(P_1, P_2, P_3) d'un triangle droit isocèle$(q_1 = 2q, q_2 = q_3 = -q)$. Choisir $P_1 = O$ origine du système xOy, P_2 sur l'axe des y et P_3 sur l'axe des x. Les côtés du triangle sont tel que $P_1\,P_2 = P_1\,P_3 = a$.

2.1. Trouver la force sur la charge $q_2 = -q$ à la position P_2.

2.2. Trouver le potentiel électrique, V_1, V_2, V_3, à la position de chacun des trois sommets créés par les autres charges du triangle.

2.3. Trouver l'énergie potentiel électrostatique, E_p, du système.

2.4. Trouver le moment dipolaire du système entier

Exercice n°3

On considère un segment fini rectiligne P_1P_2 de densité linéique homogène $\lambda > 0$. L'axe z est confondu avec l'axe du segment. Les bouts du segment sont respectivement z_1 et z_2 avec $z_1 \neq z_2$ à partir d'une origine O. soit α_1 l'angle entre OM et P_1M et α_2 l'angle entre OM et P_2M. Compte tenu des symétries, on travaille en coordonnées cylindriques. Calculer le champ et le potentiel électriques en un point M à une distance r du segment à partir de l'origine O.

Exercice n°4

Considérons une région possédant une densité de charge volumique $\rho(r)$ (distribution de charge à symétrie sphérique). Le champ électrique produit par cette distribution a la forme : $\vec{E}(r) = (Cr^2/\varepsilon_0)\vec{e}_r$

4.1. Utiliser la forme intégrale du théorème de Gauss afin de calculer la quantité de charges $Q(a)$, contenu dans une sphère de rayon a centrée sur l'origine.

4.2. Utiliser la forme locale (différentielle) du théorème de Gauss afin d'en déduire l´équation de la densité de charge volumique $\rho(r)$.

4.3. Utiliser la densité volumique $\rho(r)$ trouvée en **4.2.** et recalculer $Q(a)$

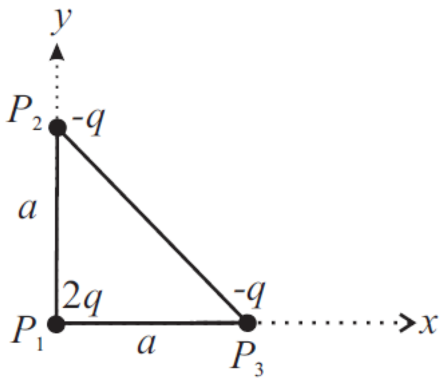
Université Mostefa Benboulaïd Batna 2
Faculté de Technologie
Département d'Electrotechnique
Année universitaire 2017/2018
Promotion : Licence en Electrotechnique
Parcours : Electrotechnique
Module : ELT514

Solution du Contrôle de Connaissance

Mercredi 22 Février 2017

Exercice n°1
Voir cours

Exercice n°2



$$\vec{F}_2 = q_2\vec{E}_1(P_2) + q_2\vec{E}_3(P_2) = \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q_1}{a^2}\vec{e}_y + \frac{q_3}{2a^2}\vec{e}_{P3P2}\right]$$

$$\vec{e}_{P3P2} = -cos\frac{\pi}{4}\vec{e}_x + sin\frac{\pi}{4}\vec{e}_y = -\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{e}_x + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{e}_y$$

$$\vec{F}_2 = \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{2q}{a^2}\vec{e}_y + \frac{\sqrt{2}q}{4a^2}\vec{e}_x - \frac{\sqrt{2}q}{4a^2}\vec{e}_y\right]$$

$$\vec{F}_2 = \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{8q}{4a^2}\vec{e}_y + \frac{\sqrt{2}q}{4a^2}\vec{e}_x - \frac{\sqrt{2}q}{4a^2}\vec{e}_y\right]$$

$$\vec{F}_2 = \frac{q}{16\pi\varepsilon_0 a^2}\left[(\sqrt{2}-8)\vec{e}_y - \sqrt{2}\vec{e}_x\right][N]$$

$$V_1 = \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 a} + \frac{q_3}{4\pi\varepsilon_0 a} = -\frac{2q}{4\pi\varepsilon_0 a}[V]$$

$$V_2 = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 a} + \frac{q_3}{4\pi\varepsilon_0 a\sqrt{2}} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a}\left(\frac{4-\sqrt{2}}{2}\right)[V]$$

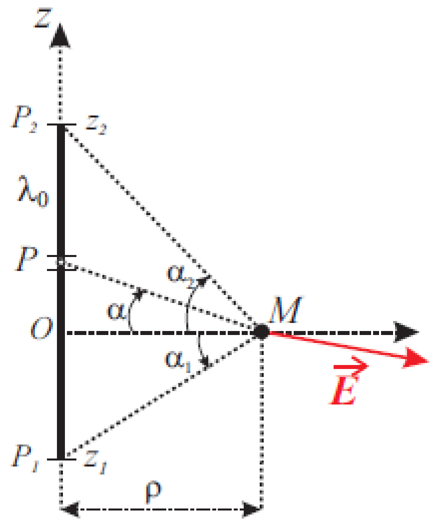
$$V_3 = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 a} + \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 a\sqrt{2}} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a}\left(\frac{4-\sqrt{2}}{2}\right)[V]$$

$$E_p = \frac{1}{2}(q_1V_1 + q_2V_2 + q_3V_3) = -\frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 a}\left[4 + 2\left(\frac{4-\sqrt{2}}{2}\right)\right] = -\frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 a}[8-\sqrt{2}][J]$$

On se rappelle que $\vec{p}$ ne dépend pas du choix d'origine - puisque la charge totale du système est nulle).On place O à l'origine du dessein et on trouve :

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^{3} q_i\vec{\delta}_i = \sum_{i=1}^{3} q_i\overrightarrow{OP}_i = q_1\overrightarrow{OP}_1 + q_2\overrightarrow{OP}_2 + q_3\overrightarrow{OP}_3 = -qa(\vec{e}_x + \vec{e}_y)[C.m]$$

Exercice n°3



On choisit un point P dans un élément dz. On obtient le champ $\vec{E}$ en appliquant l'expression intégrale :

$$\vec{E}(M) = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{z_1}^{z_2}\frac{dz}{r_{PM}^2}\vec{u}_{PM}$$

$$\vec{u}_{PM} = \frac{\overrightarrow{PM}}{r_{PM}} = \frac{r\vec{e}_r - z\vec{e}_z}{r_{PM}}$$

$$\vec{E}(M) = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{z_1}^{z_2}\frac{r\vec{e}_r - z\vec{e}_z}{r_{PM}^3}dz = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{z_1}^{z_2}\frac{r\vec{e}_r - z\vec{e}_z}{(r^2+z^2)^{3/2}}dz$$

$$\vec{E}(M) = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{z_1}^{z_2}\frac{rdz}{(r^2+z^2)^{3/2}}\vec{e}_r - \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{z_1}^{z_2}\frac{zdz}{(r^2+z^2)^{3/2}}\vec{e}_z$$

$$\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{z_1}^{z_2}\frac{rdz}{(r^2+z^2)^{3/2}}\vec{e}_r = ?$$

Pour cette intégrale, il convient de faire un changement de variables vers l'angle entre ***OM*** et ***PM*** et on peut ainsi écrire,

$$z = rtang\alpha = r\frac{sin\alpha}{cos\alpha} \Rightarrow dz = r\frac{1}{cos^2\alpha}d\alpha$$

Ensuite $r^2 + z^2 = \frac{r^2}{cos^2\alpha}$

A $z = z_1$ on a $\alpha = \alpha_1$ et à $z = z_2$ on a $\alpha = \alpha_2$

$$\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\frac{rdz}{(r^2+z^2)^{3/2}} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\frac{cos^3\alpha}{r^2}\,r\frac{1}{cos^2\alpha}d\alpha = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r}\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}cos\alpha\,d\alpha$$
$$= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r}(sin\alpha_2 - sin\alpha_1)$$

$$\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{z_1}^{z_2}\frac{zdz}{(r^2+z^2)^{3/2}}\vec{e}_z = ?$$

Posons $u^2 = r^2 + z^2 \Rightarrow udu = zdz$

Les bornes de l'intégrale sont :

$u_1 = \left(r^2 + z_1^2\right)^{1/2}$ et $u_2 = \left(r^2 + z_2^2\right)^{1/2}$

$$\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{z_1}^{z_2}\frac{zdz}{(r^2+z^2)^{3/2}} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{(r^2+z_1^2)^{1/2}}^{(r^2+z_2^2)^{1/2}}\frac{du}{u^2} = -\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{u}\Bigg|_{(r^2+z_1^2)^{1/2}}^{(r^2+z_2^2)^{1/2}}$$
$$= -\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\left(r^2+z_2^2\right)^{1/2}} - \frac{1}{\left(r^2+z_1^2\right)^{1/2}}\right] = -\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r}(cos\alpha_2 - cos\alpha_1)$$

$$\vec{E}(M) = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{z_1}^{z_2}\frac{rdz}{(r^2+z^2)^{3/2}}\vec{e}_r - \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{z_1}^{z_2}\frac{zdz}{(r^2+z^2)^{3/2}}\vec{e}_z$$
$$= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r}[(sin\alpha_2 - sin\alpha_1)\vec{e}_r + (cos\alpha_2 - cos\alpha_1)\vec{e}_z]$$

$$V(M) = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{z_1}^{z_2}\frac{dz}{r_{PM}} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{z_1}^{z_2}\frac{dz}{(r^2+z^2)^{1/2}}$$
$$z = rtang\alpha = r\frac{sin\alpha}{cos\alpha} \Rightarrow dz = r\frac{1}{cos^2\alpha}d\alpha$$
$$r^2 + z^2 = \frac{r^2}{cos^2\alpha} \Rightarrow (r^2+z^2)^{1/2} = \frac{r}{cos\alpha}$$
$$V(M) = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\frac{cos\alpha}{r}\,r\frac{1}{cos^2\alpha}d\alpha = V(M) = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\frac{d\alpha}{cos\alpha}$$

Il existe plusieurs façons d'évaluer cette intégrale. L'une que nous choisissons est la suivante :

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\frac{d\alpha}{cos\alpha} = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\frac{cos\alpha d\alpha}{1 - sin^2\alpha}$$
$$u = sin\alpha \Rightarrow du = cos\alpha d\alpha$$
$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\frac{cos\alpha d\alpha}{1 - sin^2\alpha} = \int_{u_1}^{u_2}\frac{du}{1 - u^2}$$

$$\frac{1}{1-u^2}=\frac{1}{(1-u)(1+u)}=\frac{A}{1-u}+\frac{B}{1+u}=\frac{A(1+u)+B(1-u)}{(1-u)(1+u)}=\frac{(A-B)u+(A+B)}{(1-u)(1+u)}$$

$$\begin{cases}A-B=0\\A+B=1\end{cases}\Rightarrow A=B=\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{1-u^2}=\frac{1/2}{1-u}+\frac{1/2}{1+u}$$

$$\int_{u_1}^{u_2}\frac{du}{1-u^2}=\frac{1}{2}\int_{u_1}^{u_2}\frac{du}{1-u}+\frac{1}{2}\int_{u_1}^{u_2}\frac{du}{1+u}$$

$$\int_{u_1}^{u_2}\frac{du}{1-u}=?$$

$$v=1-u\Rightarrow dv=-du$$

$$\int_{u_1}^{u_2}\frac{du}{1-u}=-\int_{v_1}^{v_2}\frac{dv}{v}=-lnv|_{v_1}^{v_2}=-ln(1-u)|_{u_1}^{u_2}=-ln(1-sin\alpha)|_{\alpha_1}^{\alpha_2}$$

$$\int_{u_1}^{u_2}\frac{du}{1+u}=?$$

$$w=1+u\Rightarrow dw=du$$

$$\int_{u_1}^{u_2}\frac{du}{1+u}=\int_{w_1}^{w_2}\frac{dw}{w}=lnw|_{w_1}^{w_2}=ln(1+u)|_{u_1}^{u_2}=ln(1+sin\alpha)|_{\alpha_1}^{\alpha_2}$$

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\frac{d\alpha}{cos\alpha}=\frac{1}{2}\,ln(1+sin\alpha)-\frac{1}{2}ln(1-sin\alpha)\Big|_{\alpha_1}^{\alpha_2}=\frac{1}{2}ln\frac{(1+sin\alpha)}{(1-sin\alpha)}\Bigg|_{\alpha_1}^{\alpha_2}$$

$$=\frac{1}{2}ln\frac{(1+sin\alpha_2)(1-sin\alpha_1)}{(1-sin\alpha_2)(1+sin\alpha_1)}$$

$$V(M)=\frac{\lambda}{8\pi\varepsilon_0}ln\frac{(1+sin\alpha_2)(1-sin\alpha_1)}{(1-sin\alpha_2)(1+sin\alpha_1)}$$

Exercice n°4

$$\iint\vec{E}.\overrightarrow{dS}=\frac{Ca^2}{\varepsilon_0}\iint dS=4\pi\frac{Ca^4}{\varepsilon_0}=\frac{Q(a)}{\varepsilon_0}\Rightarrow Q(a)=4\pi Ca^4$$

$$\vec{\nabla}.\vec{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{Cr^2}{\varepsilon_0}\right)=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{Cr^4}{\varepsilon_0}\right)=\frac{C}{\varepsilon_0 r^2}\frac{dr^4}{dr}=\frac{4Cr^3}{\varepsilon_0 r^2}=\frac{4Cr}{\varepsilon_0}\Rightarrow\rho=4Cr$$

$$Q(a)=\iiint\rho(r)d\tau=4\pi\int_0^a 4Cr^3dr=4\pi C[r^4]_0^a=4\pi Ca^4$$