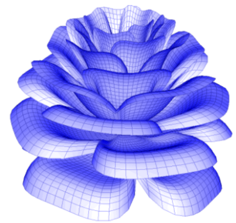
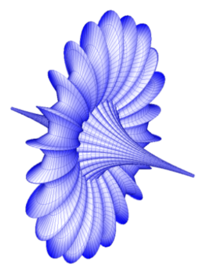
Chapitre 5 : Notion de Matrice Associée à



une Application Linéaire"
Module : Mathématiques 2 (ST/L1 2019/2020)



Dr. Imene Medjadj

CHAPITRE 1

Notion de Matrice Associée à une Application Linéaire

Définition 0.1. *On appelle une matrice dans* $\mathbb{K}$ *de type* (n,p) *un tableau rectangulaire* A *d'éléments de* $\mathbb{K}$ *ayant* n *lignes et* p *colonnes.*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{np} \end{pmatrix}$$

On note a_{ij} l'élément qui se trouve à la ligne numéro i et la colonne j et on note la matrice A par $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$. L'ensemble des matrices de type (n,p) est noté $\mathcal{M}_{(n,p)}(\mathbb{K})$.

(1) Pour $n = 1$, on dit que A est une matrice ligne, $A = (a_{11}, a_{12}, ..., a_{1p})$.

(2) Pour $p = 1$ on dit que A est une matrice ligne, $A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ .. \\ a_{1p} \end{pmatrix}$.

(3) Pour $n = p$, on dit que A est une matrice carrée d'ordre n et on note $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Exemple 0.2. (1) $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, A_1 *est une matrice de type* $(4,3)$.

(2) $A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 7 \\ 5 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, A_2 *est une matrice de type* $(2,4)$.

(3) $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}$, A_3 *est une matrice carrée d'ordre* 2.

Définition 0.3. *Soit* $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$ *et* $B = (b_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$ *deux matrices de types* (n,p),

(1) *On dit que* $A = B$ *si* $\forall i = 1, ..., n, \forall j = 1, ..., p; a_{ij} = b_{ij}$.

(2) *La transposée de la matrice* A *est une matrice notée* A^t *définie par*

$$A^t = (a_{ji})_{1 \leq j \leq p, 1 \leq i \leq n},$$

autrement dit A^t *c'est la matrice de type* (p,n) *obtenue en remplaçant les lignes par les colonnes et les colonnes par les lignes et on a :* $(A^t)^t = A$.

Exemple 0.4. (1) $A_1=\begin{pmatrix}1&4&0\\2&3&0\\3&2&0\\4&1&3\end{pmatrix}\Rightarrow A_1^t=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\\0&0&0&3\end{pmatrix}$.

(2) $A_2=\begin{pmatrix}-1&0&0&-5\\1&2&1&8\end{pmatrix}\Rightarrow A_2^t=\begin{pmatrix}-1&1\\0&2\\0&1\\-5&8\end{pmatrix}$

(3) $A_3=\begin{pmatrix}1&0\\5&-5\end{pmatrix}\Rightarrow A_3^t=\begin{pmatrix}1&5\\0&-5\end{pmatrix}$.

Théorème 0.5. *En munissant l'ensemble $\mathcal{M}_{(n,p)}(\mathbb{K})$ par les opération suivantes :*

$$\begin{aligned}(+):\mathcal{M}_{(n,p)}(\mathbb{K})\times\mathcal{M}_{(n,p)}(\mathbb{K}) &\to \mathcal{M}_{(n,p)}(\mathbb{K})\\ \left(\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&...&a_{1p}\\a_{21}&a_{22}&...&a_{2p}\\ \vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&...&a_{np}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}&...&b_{1p}\\b_{21}&b_{22}&...&b_{2p}\\ \vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\b_{n1}&b_{n2}&...&b_{np}\end{pmatrix}\right) &\to \begin{pmatrix}a_{11}+b_{11}&a_{12}+b_{12}&...&a_{1p}+b_{1p}\\a_{21}+b_{21}&a_{22}+b_{22}&...&a_{2p}+b_{2p}\\ \vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\a_{n1}+b_{n1}&a_{n2}+b_{n2}&...&a_{np}+b_{np}\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}(\cdot):\mathbb{K}\times\mathcal{M}_{(n,p)}(\mathbb{K}) &\to \mathcal{M}_{(n,p)}(\mathbb{K})\\ \left(\lambda.\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&...&a_{1p}\\a_{21}&a_{22}&...&a_{2p}\\ \vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&...&a_{np}\end{pmatrix}\right), &\to \begin{pmatrix}\lambda a_{11}&\lambda a_{12}&...&\lambda a_{1p}\\ \lambda a_{21}&\lambda a_{22}&...&\lambda a_{2p}\\ \vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\ \lambda a_{n1}&\lambda a_{n2}&...&\lambda a_{np}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Alors $(\mathcal{M}_{(n,p)}(\mathbb{K}),+,\cdot)$ est $\mathbb{K}-$ espace vectoriel de dimension $n\times p$, sachant que l'élément neutre de l'addition est la matrice nulle $\begin{pmatrix}0&0&..&0\\0&0&..&0\\.&.&..&.\\0&0&..&0\end{pmatrix}$

1. Produit de deux matrices

Définition 1.1. *Soit $A\in\mathcal{M}_{(n,p)}(\mathbb{K})$ et $B\in\mathcal{M}_{(p,m)}(\mathbb{K})$, on définit le produit de la matrice A par B comme étant une matrice $C=(c_{ij})_{1\leq i\leq,1\leq j\leq m}\in\mathcal{M}_{(n,m)}(\mathbb{K})$, avec $c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+a_{31}b_{3j}+...+a_{ip}b_{pj}$.*

Remarque 1.2. (1) *L'élément C_{ij} de la matrice C se calcule en additionnant le produit des éléments de la ligne i de la matrice A par la les éléments de la colonne j de la matrice B.*

(2) *Le produit de deux matrice ne peut se faire que si le nombre de colonnes de la matrice A correspond au nombre de lignes dela matrice B.*

EXEMPLE 1.3.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

A est de type $(2, \boldsymbol{3})$ et B de type $(\boldsymbol{3}, 4)$ ainsi C sera de type $(2, 4)$.

$$C = A.B = \begin{pmatrix} 1.1 + 1.2 + 0.1 & 1.2 + 1.0 + 0.1 & 1.0 + 1.1 + 0.0 & 1.1 + 1.1 + 0.0 \\ 2.1 + 2.2 + 0.1 & 2.2 + 2.0 + 0.1 & 2.0 + 2.1 + 0.0 & 2.1 + 2.1 + 0.0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 6 & 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

REMARQUE 1.4. *Le produit deux matrice n'est pas commutatif voiçi un exemple :*

$$A.B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \neq B.A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

2. Matrices carrées

DÉFINITION 2.1. *Soit A une matrice carrée d'ordre n, $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$,*

(1) *La suite des éléments $\{a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}\}$ est appelée la diagonale principle de A.*
(2) *La trace de A est le nombre $Tr(A) = a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn}$.*
(3) *A est dite matrice diagonale si $a_{ij} = 0, \forall i \neq j$ c'est à dire que les éléments de A sont tous nuls sauf la diagonale principale.*
(4) *A est dite matice triangulaire supérieure (resp inférieure) si $a_{ij} = 0, \forall i > j$, (resp $i < j$), c'est à dire les éléments qui sont au dessous(resp au dessus) de la diagonale sont nuls).*
(5) *A st dite symétrique si $A = A^t$.*

EXEMPLE 2.2. (1) $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, *$A_1$ est une matrice diagonale.*

(2) $A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 0 \\ 6 & 3 & 9 \end{pmatrix}$, *$A_2$ est une matrice triangulaire inférieure.*

(3) $A_3 = \begin{pmatrix} 7 & 40 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, *$A_3$ est une matrice triangulaire supérieure .*

(4) $A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 12 & 1 \\ -2 & 1 & 10 \end{pmatrix} = A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 12 & 1 \\ -2 & 1 & 10 \end{pmatrix}$, *$A_4$ est une matrice symétrique.*

Proposition 2.3. *Le produit des matrices est une opération interne dans $\mathcal{M}_{(n,n)}(\mathbb{K})$ et il admet un élément neutre la matrice nommée matrice identitée notée I_n définie par :*

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0.. & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0.. & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0.. & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.. & 0 \\ . & . & . & .. & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ..0 & 1 \end{pmatrix}$$

Définition 2.4. *Soit $A \in \mathcal{M}_{(n,n)}(\mathbb{K})$ on dit que A est invesible s'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_{(n,n)}(\mathbb{K})$ telle que $A.B = B.A = I_n$.*

Exemple 2.5. *Montrons que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ est inversible et ceci en cherchant la matice $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telle que*

$$A.B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = B.A$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ -c & -d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 2a-b \\ c & 2c-d \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

3. Les Déterminants

Définition 3.1. *Soit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ une matrice dans $\mathcal{M}_{(2,2)}(\mathbb{K})$, on appelle déterminant de A le nombre réel donné par : $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$. On le note $det(A)$ ou $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$,*

Exemple 3.2. *Calculons le $det(A)$,*

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1(-1) - 0.(2) = -1.$$

Définition 3.3. *De même, on définit le déterminant d'une matrice*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K}),$$

par

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

EXEMPLE 3.4.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 12 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}.1 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}0. \begin{vmatrix} 12 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}(-1) \begin{vmatrix} 12 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\Leftrightarrow |A| = -1 + 0 - 12 = -13$$

PROPOSITION 3.5. *Pour calculer le déterminant d'une matrice A on peut développer A suivant n'importe quelle ligne ou colonne.*

Suivant cette proposition il vaut mieux choisir la ligne ou colonne contenant le plus de zéros.

EXEMPLE 3.6. *On reprend la même matrice de l'exemple pécédent mais calculer suivant la troisième ligne on aura :*

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 12 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{3+1}.0 \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{3+2}.1 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 12 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{3+3}.0 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 12 & -1 \end{vmatrix}$$

$$det(A) = 0 - 13 + 0 = -13$$

on calcule juste un déterminant au lieu de trois.

DÉFINITION 3.7. *De même, on définit le déterminant d'une matrice*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{K}),$$

par

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$+(-1)^{1+3} a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} + (-1)^{1+4} a_{14} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}.$$

DÉFINITION 3.8. *Soit $A = (a_{ij})_{1 \le i \le n, 1 \le j \le n}$,*
le déterminant suivant la j-ème colone est :

$$det(A) = (-1)^{1+j} a_{1j} D_{1j} + (-1)^{2+j} a_{2j} D_{2j} + ... + (-1)^{n+j} a_{nj} D_{nj}, j = 1, ..., n.$$

Le déterminant suivant la i-ème ligne est :

$$det(A) = (-1)^{i+1} a_{i1} D_{i1} + (-1)^{i+2} a_{i2} D_{i2} + ... + (-1)^{i+n} a_{in} D_{in}, i = 1, ..., n.$$

Où A_{ij} représent ce que nous appelons le déterminant mineur du terma a_{ij}, le déterminant d'ordre $n-1$ obtenu de $det(A)$ en supprimant la i-ème ligne et la j-ème colonne.

Proposition 3.9. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ on a :*

(1) $det(A) = det(A^t)$.

(2) $det(A) = 0$ *si deux lignes de A sont égales (ou deux colonnes).*

(3) $det(A) = 0$ *si deux lignes de A sont proportinnelles (ou deux colonnes le sont).*

(4) $det(A) = 0$ *si une ligne est combinaison linéaires de deux autres lignes de A (même chôse pour les colonnes).*

(5) $det(A)$ *ne change pas si on ajoute à une ligne une combinaison linéaires d'autres lignes (même chôse pour les colonnes).*

(6) *Si $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors $det(A.B) = det(A).det(B)$.*

Exemple 3.10. (1) $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 0 & -5 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & -5 \end{vmatrix} = 0$, *car la ligne 1 est égale à la ligne 3, $L_1 = L_3$.*

(2) $|B| = \begin{vmatrix} 9 & 0 & -15 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 4 \\ 3 & 0 & -5 & 1 \end{vmatrix} = 0$, *car* $L_1 = 3 * L_4$.

(3) $|C| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 20 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & -10 & 2 \end{vmatrix} = 0$, *car* $C_1 = C_2$.

Définition 3.11. *Soit $V_1, V_2, ..., V_n$, n vecteurs de $\mathbb{R}^n$ on appelle déterminant des vecteurs $(V_1, V_2, ..., V_n)$ et on le note $det(V_1, V_2, ..., V_n)$ le déterminant dont les colonnes sont les vecteurs $V_1, V_2, ..., V_n$.*

Exemple 3.12. *Soit $V_1 = (1, 1, 0), V_2 = (0, -1, 1), V_3 = (0, 0, 1)$, alors*

$$det(V_1, V_2, V_3) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = +1 \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

Proposition 3.13. *Soit $V_1, V_2, ..., V_n$, n vecteurs de $\mathbb{R}^n$ on $(V_1, V_2, ..., V_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n \Leftrightarrow det(V_1, V_2, ..., V_n) \neq 0$*

Exemple 3.14. *Soit $V_1 = (1, 2, 0), V_2 = (0, -1, 1), V_3 = (0, 0, 1)$, forment une base de $\mathbb{R}^3$, car $det(V_1, V_2, V_3) = -1 \neq 0$.*

3.1. Le rang d'un matrice.

Définition 3.15. *Soit $A \in M_{(n,p)}(\mathbb{K})$, on appelle rang de A et on note rgA l'ordre de la plus grande matrice carrée B prise (extraite) dans A telle que $detB \neq 0$.*

Exemple 3.16. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, detA = 2 \neq 0, rgA = 2.$

$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, detA = 0 \neq 0, rgA = 1.$

$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, rgA < 4 (rgA \leq 3)$ *la plus grande matrice carrée contenue dans A est d'ordre 3, dans cet exmple on a : 4 possibilité :*

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, C_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$C_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, C_4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$detC_1 = detC_2 = 0$ *et* $detC_3 = detC_4 = 0$ *donc le* $rgA < 3$ *et on a :*

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow rgA = 2.$$

Théorème 3.17. *le rang d'une matrice est égale au nombre maximale de vecteurs lignes (ou colonnes) linéairement indépendants.*

Définition 3.18. *Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on appelle cofacteur d'indice i et j de A le scalaire*

$$c_{ij} = (-1)^{i+j} detA_{ij}.$$

Avec A_{ij} est la matrice déduite de A par suppression de la ligne i t la colonne j.
La matrice $C = (c_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$ est appelée la matrice des cofacteurs et la matrice C^t est appellée la comatrice de A.

Exemple 3.19. *Soit la matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$. *Calculons les coffacteurs de A*

$$c_{11} = (-1)^{1+1} det(A_{11}) = (-1)^2 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -4.$$

$$c_{12} = (-1)^{1+2} det(A_{12}) = (-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2.$$

$$c_{13} = (-1)^{1+3} det(A_{13}) = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2.$$

$$c_{21} = (-1)^{2+1} det(A_{21}) = (-1)^3 \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 6.$$

$$c_{22} = (-1)^{2+2} det(A_{22}) = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2.$$

$$c_{23} = (-1)^{2+3} det(A_{23}) = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2.$$

$$c_{31} = (-1)^{3+1} det(A_{31}) = (-1)^4 \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3.$$

$$c_{32} = (-1)^{3+2} det(A_{32}) = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2.$$

$$c_{33} = (-1)^{3+3} det(A_{33}) = (-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1.$$

donc la matrice des cofacteurs est donnée par :

$$\begin{pmatrix} -4 & -2 & 2 \\ 6 & 2 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

et la comatrice et

$$C^t = \begin{pmatrix} -4 & 6 & 3 \\ -2 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Théorème 3.20. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a :*

$$A \text{est inversible } \Leftrightarrow det(A) \neq 0,$$

et dans ce cas la matrice inverse de A est donnée par :

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} C^t.$$

Où C^t est la comatrice de A.

Exemple 3.21. *La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $det(A) = 2 \neq 0$ donc elle est inversible, de plus*

$$A^{-1} = \frac{1}{2} C^t = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -4 & 6 & 3 \\ -2 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & \frac{3}{2} \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

On peut vérifier que $A^{-1}A = I_3 = AA^{-1}$.

Bon ☺
courage!

Dr. I.Medjadj