Université Dr. Yahia Farès de Médéa
Faculté de la Technologie
Département de TCT

Année universitaire 2017-2018
Matière : Maths 3
10/01/2018

Epreuve de Fin de Semestre

Exercice 1 : (4 points 2+2)

Calculer les intégrales doubles suivantes :

1. $\iint\limits_D \cos(x+y)\,dxdy$ où D est le triangle de sommets $A(0,0)$, $B(\pi,0)$, $C(\pi,\pi)$.
2. $\iint\limits_D \dfrac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ où $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \text{ avec } x^2+y^2\leq 3\sqrt{x^2+y^2}-3x,\ x+y\geq 0\right\}$.

Exercice 2 : (6 points 1+1+2+2)

1. Ennoncer le critère de comparaison d'une série numérique avec une intégrale impropre.
2. Etudier la nature de la série numérique $\sum\limits_{n\geq 2}\frac{1}{n\ln^{\beta} n}$, $\beta\in\mathbb{R}$.
3. Ennoncer le critère d'équivalence pour les intégrales impropres.
4. Etudier la convergence de l'intégrale $\int\limits_0^{+\infty}\dfrac{\sin 5x-\sin 3x}{x^{\frac{5}{3}}}dx$.

Exercice 3 : (4 points 2+2)

1. Résoudre l'équation différentielle : $\left(x^2+1\right)y'+2xy=3x^2+1$
2. Résoudre l'équation différentielle : $y''+y=2\left(1+\cos 2x\right)$.

Exercice 4 : (6 points 1+1+1+1,5+1,5)

On considère la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 1} ne^{-nx}$, $x\geq 0$.

1. Etudier la convergence simple sur :
   1) $[0,\ +\infty[$. 2) $]0,\ +\infty[$
2. Donner la définition de la convergence normale d'une série de fonctions.
3. Etudier la convergence uniforme sur $[a,\ +\infty[$, $a>0$.
4. Calculer $\sum\limits_{n=1}^{n=+\infty} ne^{-nx}$.

Bon Courage

Université Dr. Yahia Farès de Médéa
Faculté des Sciences et de la Technologie
Département de Génie Eléctrique & Informatique

Année universitaire 2016-20017
Matière : Maths 3
08/01/2017

Corrigé de l' Epreuve de Fin de Semestre

Exercice 1 : (4 points 2+2)

1. $\iint\limits_D \dfrac{1}{(1+x^2)(1+y^2)}dxdy$ où $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \text{ avec } 0\leq x\leq 1,\ y\geq 0,\ 0\leq y\leq x\right\}$

   $\iint\limits_D \dfrac{1}{(1+x^2)(1+y^2)}dxdy = \int\limits_0^1\left(\int\limits_0^x \dfrac{1}{(1+x^2)(1+y^2)}dy\right)dx.$

   On a $\int\limits_0^x \dfrac{1}{(1+x^2)(1+y^2)}dy = \dfrac{1}{1+x^2}\int\limits_0^x \dfrac{1}{(1+y^2)}dy = \dfrac{1}{1+x^2}\left[\arctan y\right]_{y=0}^{y=x} = \dfrac{1}{1+x^2}\arctan x$

   . Par suite, $\iint\limits_D \dfrac{1}{(1+x^2)(1+y^2)}dxdy = \int\limits_0^1 \dfrac{1}{1+x^2}\arctan x dx$. On pose $u=\arctan x$ $du = \dfrac{1}{1+x^2}dx$. Ceci implique que $\iint\limits_D \dfrac{1}{(1+x^2)(1+y^2)}dxdy = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} udu = \left[\frac{u^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi^2}{32}$ **(2 point)**.

2. $\iint\limits_D \frac{y^3}{x^2+y^2}dxdy$ où $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \text{ avec } x\geq 0,\ y\leq x,\ 1\leq x^2+y^2\leq 4\right\}$.

   On passe aux coordonnées polaires. On pose $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta \Rightarrow r=\sqrt{x^2+y^2}$.

   $D=\left\{(r,\theta)\in\mathbb{R}^2 \text{ avec } \cos\theta\geq 0,\ \sin\theta\leq\cos\theta,\ 1\leq r^2\leq 4\right\} = \left\{(r,\theta)\in\mathbb{R}^2 \text{ avec } \dfrac{-\pi}{2}\leq\theta\leq\dfrac{\pi}{4},\ 1\leq r\leq 2\right\}$.

   $\iint\limits_D \frac{y^3}{x^2+y^2}dxdy = \iint\limits_{D'} \frac{r^3\sin^3\theta}{r^2}rdrd\theta = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}}\left(\int\limits_1^2 r^2\sin^3\theta dr\right)d\theta$. On a $\int\limits_1^2 r^2\sin^3\theta dr = \sin^3\theta\int\limits_1^2 r^2dr =$ $\sin^3\theta\left[\frac{r^3}{3}\right]_{r=1}^{r=2} = \frac{7}{3}\sin^3\theta$ **(1 point)**. Par suite, $\iint\limits_D \frac{y^3}{x^2+y^2}dxdy = \frac{7}{3}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}}\sin^3\theta d\theta = \frac{7}{3}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}}\sin\theta\left(1-\cos^2\theta\right)d\theta =$

   $\frac{7}{3}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}}\sin\theta d\theta - \frac{7}{3}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}}\sin\theta\cos^2\theta d\theta =$

   $\frac{7}{3}\left[-\cos\theta\right]_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\theta=\frac{\pi}{4}} + \frac{7}{3}\left[\frac{1}{3}\cos^3\theta\right]_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\theta=\frac{\pi}{4}} = -\frac{7}{3}.\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{7}{9}\frac{1}{\sqrt{2}^3} = -\frac{35}{18\sqrt{2}}$ **(2 point)**.

Exercice 2 : (5 points 2+2+1)

1. a) $\int\limits_0^{+\infty}\dfrac{dx}{x^2+3} = \int\limits_2^{+\infty}\dfrac{1}{x(\ln x)^2}dx$. Soit $t>0$. $\int\limits_0^t\dfrac{dx}{x^2+3}dx = \frac{1}{\sqrt{3}}\int\limits_0^t\dfrac{\frac{1}{\sqrt{3}}dx}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^t =$ $\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)$. On a donc $\lim\limits_{t\to+\infty}\int\limits_0^t\dfrac{dx}{x^2+3}dx = \lim\limits_{t\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right) = \dfrac{\pi}{2\sqrt{3}}$ et donc l'intégrale $\int\limits_2^{+\infty}\dfrac{1}{x(\ln x)^2}dx$ est convergente (**1,5 points**).

   b) $\int\limits_2^{+\infty}\dfrac{xdx}{x^3+\sqrt{x}-1}$. On $\forall x\geq 2$, la fonction $\dfrac{x}{x^3+\sqrt{x}-1}\geq 0$ et $\dfrac{x}{x^3+\sqrt{x}-1} = \frac{1}{x^2+\frac{\sqrt{x}}{x}-\frac{1}{x}}\sim_{+\infty}$ $\frac{1}{x^2}$. Comme l'intégrale $\int\limits_2^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx$ converge, l'intégrale $\int\limits_2^{+\infty}\dfrac{xdx}{x^3+\sqrt{x}-1}$ converge (**1,5 points**)

$\int_1^{+\infty} \frac{\sin 5x}{x^\alpha}dx$, $\alpha \in \mathbb{R}^+$. On pour tout $x \geq 1$, $\left|\frac{\sin 5x}{x^\alpha}\right| = \frac{|\sin 5x|}{x^\alpha} \leq \frac{|\sin 5x|}{x^\alpha} \leq \frac{1}{x^\alpha}$. Si $\alpha > 1$, alors comme l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}dx$ converge, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \left|\frac{\sin 5x}{x^\alpha}\right| dx$ converge. Ceci implique que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin 5x}{x^\alpha}dx$ est absolument convergente et donc convergente **(1 point)**. Si $\alpha \leq 1$, alors $\left|\frac{\sin 5x}{x^\alpha}\right| = \frac{|\sin 5x|}{x^\alpha} \geq \frac{\sin^2 5x}{x^\alpha} = \frac{1-\cos 10x}{2x^\alpha} = \frac{1}{2x^\alpha} - \frac{\cos 10x}{2x^\alpha}$. L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{2x^\alpha}dx$ est divergente. L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\cos 10x}{2x^\alpha}dx$ converge. En vertu le Théorème d'Abel Diriclet, L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\cos 10x}{2x^\alpha}dx$ converge. Ceci implique que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 5x}{x^\alpha}dx$ est divergente. D'après le critère de comparaison, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \left|\frac{\sin 5x}{x^\alpha}\right| dx$ est divergente et donc l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin 5x}{x^\alpha}dx$ n'est pas absolument convergente. Pour la convergence on utilise le Théorème d'Abel Diriclet. On a $\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)' = \frac{-\alpha}{x^{\alpha+1}}$ et donc la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$ est positive et décroissante vers 0 sur l'intervalle $[1, +\infty[$. Pour tout $c, d \in [1, +\infty[$, on a $\left|\int_c^d \sin 5x dx\right| = \left|\left[-\frac{1}{5}\cos 5x\right]_c^d\right| = \frac{1}{5}|\cos 5c - \cos 5d| \leq \frac{1}{5}(|\cos 5c| + |\cos 5d|) \leq \frac{2}{5}$. D'après le Théorème d'Abel Diriclet, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin 5x}{x^\alpha}dx$ est convergente. **(1 points)**.

Exercice 3 : (5 points 2,5+2,5)

1. $y'' - 3y' + 2y = 2x^2 - 5x + 3$. La solution $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$. Soit $y'' - 3y' + 2y = 0$ l'équation homogène. L'equation caractéristique $k^2 - 3k + 2 = 0$ admet deux solutions réelles $k_1 = 1$, $k_2 = 2$ donc $y_h(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$. Comme le second membre est un polynôme de dégrés 2, $y_p(x) = ax^2 + bx + c$. $y_p'(x) = 2ax + b$ et $y_p'(x) = 2a$. On remplace dans l'équation différentielle donnée, on trouve $2ax^2 + (-6a + 2b)x + 2a - 3b + 2c = 2x^2 - 5x + 3$. Par identification, on obtient $\begin{cases} 2a = 2 \\ -6a + 2b = -5 \\ 2a - 3b + 2c = 3 \end{cases}$. D'où, $a = 1$, $b = \frac{1}{2}, c = \frac{5}{4}$ et $y_p(x) = x^2 + \frac{x}{2} + \frac{5}{4}$. La solution $y(x) = y_h(x) + y_p(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + x^2 + \frac{x}{2} + \frac{5}{4}$. **(2,5 points)**
2. Soit l'équation différentielle : $y' - \frac{y}{x} = x\ln(x+1)$. C'est une équation différentielle linéaire du premier ordre avec $p(x) = -\frac{1}{x}$ et $Q(x) = x\ln(x+1)$. La solution $y(x) = u(x)v(x)$. $v(x) = e^{-\int p(x)dx} = e^{\int \frac{1}{x}dx} = x$. $u(x) = \int \frac{Q(x)}{v(x)}dx + c = \int \frac{x\ln(x+1)}{x} + c = \int \ln(x+1)dx + c$. On effectue une intégration par partie. On pose $f(x) = \ln(x+1)$ et $g'(x) = 1$. Ceci implique que $f'(x) = \frac{1}{1+x}$ et $g(x) = x$. Donc $\int \ln(x+1)dx = x\ln(x+1) - \int \frac{x}{x+1}dx$. Comme $\frac{x}{x+1} = 1 - \frac{1}{1+x}$, alors $\int \ln(x+1)dx = x\ln(x+1) - \int dx + \int \frac{1}{1+x}dx = (x+1)\ln(x+1) - x$. Donc $u(x) = (x+1)\ln(x+1) - x + c$. D'où $y(x) = u(x)v(x) = x(x+1)\ln(x+1) - x^2 + cx$. **(2,5 points)**

Exercice 4 : (6 points 2,5+2,5+1)

$f_n(x) = 1 - \frac{1}{nx^2+1}$, sur $[0, +\infty[$

1. a) **La convergence simple sur** $[0, +\infty[$: Pour $x \in [0, 1]$ fixé, on a $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty}\left(1 - \frac{1}{nx^2+1}\right) = \begin{cases} 0 \text{ si } x = 0 \\ 1 \text{ si } x > 0 \end{cases}$ 0 **(1 point)**. D'où, la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ converge

simplement sur $[0, \quad +\infty[$ vers la fonction $f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x = 0 \\ 1 \text{ si } x > 0 \end{cases}$ **(0,5 point)**.

b) **La convergence uniforme sur** $[0, \quad +\infty[$: On a ici une suite de fonctions continues sur $[0, \quad +\infty[$ convergente simplement sur $[0, \quad +\infty[$ vers une fonction discontinue en 0. On a donc pas de convergence uniforme sur $[0, \quad +\infty[$. (**1 point**)

2. a) **La convergence simple sur** $[a, \quad +\infty[$: Pour tout $x \in [a, \quad +\infty[$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 1$ **(0,5 point)**. D'où, la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ converge simplement sur $[a, \quad +\infty[$ vers la fonction $f(x) = 1$ **(0,5 point)**.

   b) **La convergence uniforme sur** $[a, \quad +\infty[$: $|f_n(x) - f(x)| = \left|\dfrac{-1}{nx^2+1}\right| = \dfrac{1}{nx^2+1} = g_n(x)$. On a $g_n'(x) = \frac{-2nx}{(nx^2+1)^2} < 0$.

   La fonction $g_n(x)$ est décroissante et donc $\sup\limits_{x\in[a, \quad +\infty[} |f_n(x) - f(x)| = \sup\limits_{x\in[a, \quad +\infty[} g_n(x) = g_n(a) = \dfrac{1}{na^2+1}$. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sup\limits_{x\in[a, \quad +\infty[} |f_n(x) - f(x)| = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{na^2+1} = 0$. D'où, la suite de fonctions$(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément sur $[a, \quad +\infty[$.**(1,5 point)**.

3. Comme on la convergence uniforme sur $[a, \quad +\infty[$, $a > 0$. On prend $a = 1$ et on a donc $[3, 5] \subset [1, \quad +\infty[$. Ceci implique que $\lim\limits_{n\to+\infty} \int\limits_3^5 \left(1 - \dfrac{1}{nx^2+1}\right) dx = \int\limits_3^5 \lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 - \dfrac{1}{nx^2+1}\right) dx = \int\limits_3^5 dx = [x]_3^5 = 5 - 3 = 2$. **(1 point).**