Université de Jijel
Faculté des Sciences et de la Technologie
Département d'Electrotechnique
Systèmes Asservis, L3, TD N° 1

EXO : 1

On alimente le circuit R-C série de la figure : 1 par une tension e(t).

1) Etablir la relation entre l'entrée e(t) et la sortie s(t).
2) Etablir la fonction de transfert à partir de l'équation différentielle sachant que s(0)=0.
3) On applique, à t=0 S, un échelon unité à entrée du circuit initialement au repos s(0)=0. Calculer S(p) puis s(t). Tracez l'allure de la réponse indicielle.
4) Trouvez sa réponse impulsionnelle, tracez son allure et vérifiez que c'est la dérivée de la réponse indicielle.

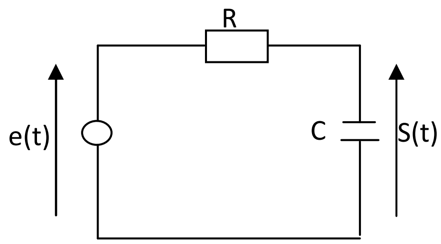


Figure : 1

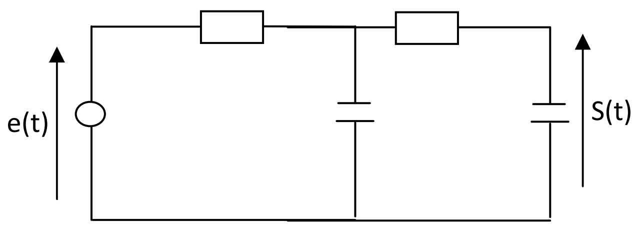


Figure : 2

EXO : 2

On met en cascade deux circuits R-C comme il est indiqué sur la figure 2.

1) Etablir la relation entre l'entrée e(t) et la sortie s(t).
2) Etablir la fonction de transfert à partir de l'équation différentielle sachant que s(0)=s'(0)=0.
3) Montrez qu'elle est celle d'un système de second ordre en la mettant sous une forme standard.
4) Déterminer le gain statique K ; La pulsation naturelle ω_n et Le facteur d'amortissement ξ.
5) Etablir l'équation caractéristique.
6) Déterminer les racines de cette équation caractéristiques (ou les pôles de H(p)).
7) Déterminer S(p) puis s(t) pour une entrée en échelon unitaire. Tracez l'allure de la réponse indicielle et déterminez pour (R=10 KΩ, C=2.2nF) le temps de montée à 90 % et le temps de réponse à ± 5 %.

EXO : 3

On considère un système linéaire continu dont l'équation différentielle de transfert est :

$$\frac{d^2s(t)}{dt^2} + 3\frac{ds(t)}{dt} + 2\,s(t) = 5\,u(t)$$

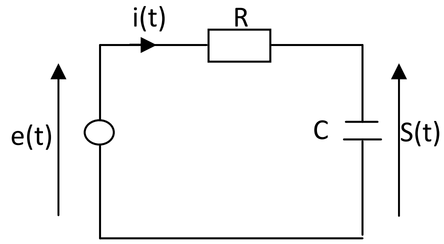
L'état initial étant défini par : s(0)=0 et s'(0)=1. On s'intéresse à la réponse de ce système soumis à un échelon unitaire

1) Donner la solution de l'équation homogène $S_h(t)$.
2) Donner une solution particulière de l'équation avec second membre $S_p(t)$
3) Donner la solution générale
4) La réponse libre du système est définie comme étant la solution de l'équation homogène, qui doit satisfaire aux conditions initiales, donner cette réponse $S_l(t)$.
5) La contribution du régime forcé est définie comme étant la solution générale, mais avec des conditions initiales nulles, donner cette réponse $S_f(t)$.
6) Vérifier que Sl(t)+Sf(t)=Sg(t)
7) Retrouvez ce résultat en utilisant le calcul opérationnel.

Solution du TD N° 1

Exo : 1

1) Relation entre e(t) et s(t)
L'équation de la maille s'écrie



$e(t) = R\,i(t) + \frac{1}{C}\int i(t)dt$ (1)

$$s(t) = \frac{1}{C}\int i(t)dt \Rightarrow i(t) = C\frac{ds(t)}{dt}$$

On remplace dans l'équation (1)

$e(t) = R\,C\,\frac{ds(t)}{dt} + s(t) = \tau\frac{ds(t)}{dt} + s(t)$ (2)

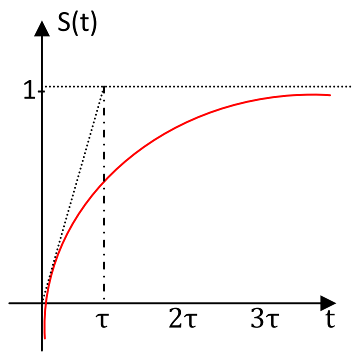
2) Fonction de transfert : La transformée de Laplace de l'équation (2) (avec les conditions initiales nulles) donne

$$E(p) = \tau\,p\,S(p) + s(p) = S(p)[\tau\,p + 1] \Rightarrow H(p) = \frac{s(p)}{E(p)} = \frac{1}{\tau\,p + 1}$$

C'est la fonction de transfert d'un système du 1er ordre avec τ=RC= constante de temps

3) **Réponse indicielle** e(t)=u(t)=échelon unitaire $\Rightarrow$ E(p)=1/p

$$S_e(p) = H(p) * E(p) = H(p) = \frac{1/p}{\tau\,p + 1} = \frac{1/\tau}{p(p + \frac{1}{\tau})} \quad (1)$$



Décomposition en éléments simples

$$\Rightarrow \quad S_e(p) = \frac{A}{p} + \frac{B}{p+\frac{1}{\tau}} = \frac{p(A+B)+\frac{A}{\tau}}{p\left(p+\frac{1}{\tau}\right)} \quad (2)$$

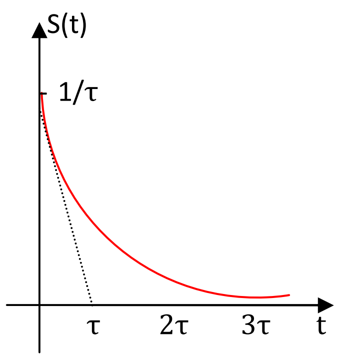
Par identification entre (1) et (2) on trouve A=1 et B=-1

donc $S_e(p) = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+\frac{1}{\tau}} \quad \Rightarrow S_e(t) = 1 - e^{-t/\tau}$

$S_e(0)=0$, $S_e(\infty) = 1$, $\frac{dS_e(t)}{dt} = \frac{1}{\tau}e^{-t/\tau} \Rightarrow \frac{dS_e(0)}{dt} = \frac{1}{\tau}$ = pente à l'origine

4) **Réponse impulsionnelle** e(t)=δ(t)=impulsion de Dirac $\Rightarrow$ E(p)=1

$$S_i(p) = H(p) * E(p) = H(p) = \frac{1}{\tau\,p + 1} = \frac{1/\tau}{p + 1/\tau}$$



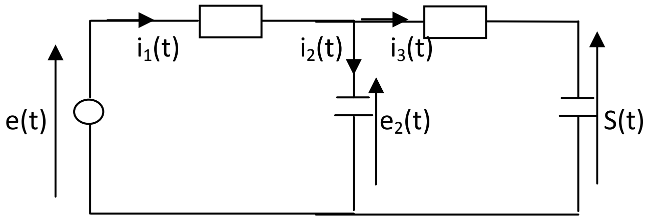
$$\Rightarrow s_i(t) = \frac{1}{\tau}e^{-t/\tau} = \frac{ds_e(t)}{dt}$$

$S_i(0)=1/\tau$, $S_i(\infty) = 0$, $\frac{dS_i(t)}{dt} = -\frac{1}{\tau^2}e^{-t/\tau}$

$$\Rightarrow \frac{dS_i(0)}{dt} = -\frac{1}{\tau^2} \quad = \text{pente à l'origine}$$

Exo : 2

1) Relation entre l'entrée et la sortie :



L'équation de la maille (1) s'écrie

$e(t) = R\, i_1(t) + e_2(t)$ (1)

$e_2(t) = \frac{1}{C}\int i_2(t)dt \Rightarrow i_2(t) = c\frac{de_2(t)}{dt}$ (2)

L'équation du nœud

$i_1(t) = i_3(t) + i_2(t)$ (3)

L'équation de la maille (2) s'écrie

$e_2(t) = R\, i_3(t) + s(t)$ (4) Avec $s(t) = \frac{1}{C}\int i_3(t)dt \Rightarrow i_3(t) = c\frac{ds(t)}{dt}$ (5)

$(4)\ et\ (5) \Rightarrow e_2(t) = RC\frac{ds(t)}{dt} + s(t)$

$$(1)\ et\ (3) \Rightarrow e(t) = R\, i_1 + e_2 = R(i_2 + i_3) + \left(RC\frac{ds(t)}{dt} + s(t)\right) =$$

$$= R\left(c\frac{de_2(t)}{dt}\right) + R\left(c\frac{ds(t)}{dt}\right) + \left(RC\frac{ds(t)}{dt} + s(t)\right) = 2RC\frac{ds(t)}{dt} + s(t) + RC\frac{d}{dt}\left(RC\frac{ds(t)}{dt} + s(t)\right)$$

$$e(t) = R^2C^2\frac{d^2s(t)}{dt^2} + 3RC\frac{ds(t)}{dt} + s(t)$$

C'est une équation différentielle du second degré donc le système représenté par ce schéma est un système du second degré.

2) Fonction de transfert : La transformée de Laplace avec s(0)=s'(0)=0, donne :

$$E(P) = R^2C^2\, P^2S(P) + 3RC\, PS(P) + S(P) = S(p)(R^2C^2\, \boldsymbol{P^2} + 3RC\, \boldsymbol{P} + 1)$$

$$H(p) = \frac{s(p)}{E(p)} = \frac{1}{R^2C^2\, \boldsymbol{P^2} + 3RC\, \boldsymbol{P} + 1} = \frac{k}{\frac{1}{{\omega_n}^2}\, \boldsymbol{P^2} + \frac{2\xi}{\omega_n}\, \boldsymbol{P} + 1}$$

3) Détermination des caractéristiques

Par identification entre la fonction de transfert du système et la forme standard des systèmes du second degré on trouve :

K=1 =gain statique, $\frac{1}{{\omega_n}^2} = R^2C^2 \Rightarrow \omega_n = \frac{1}{RC} = pulsation\ propre$

ξ=facteur d'amortissement avec $\frac{2\xi}{\omega_n} = 3RC \Rightarrow \xi = \frac{3RC}{2RC} = 1.5 \Rightarrow Régime\ apériodique$

4) Equation caractéristique : de l'équation homogène (sans second membre)

$$\frac{1}{{\omega_n}^2}\frac{d^2s(t)}{dt^2} + \frac{2\xi}{\omega_n}\frac{ds(t)}{dt} + s(t) = 0 = \frac{d^2s(t)}{dt^2} + 2\xi\omega_n\frac{ds(t)}{dt} + {\omega_n}^2 s(t) \quad (6)$$

On suppose que la solution est de la forme Ae^{rt} et on remplace dans l'équation (6)

On remplace cette solution dans l'équation homogène on trouve :

$$Ae^{rt}[r^2 + 2\xi\omega_n r + \omega_n^2] = 0 \Rightarrow \qquad r^2 + 2\xi\omega_n r + \omega_n^2 = 0 = équation\ caractéristique$$

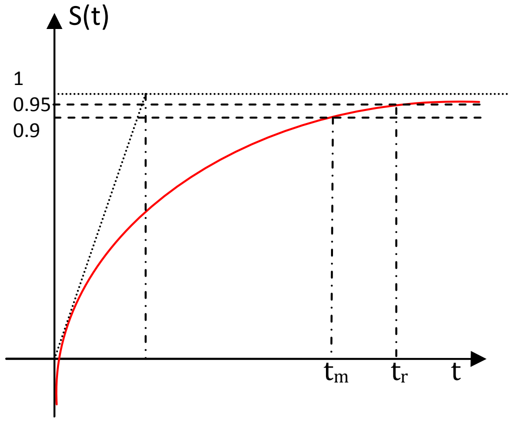
5) Le déterminant $\Delta' = \omega_n^2[\xi^2 - 1]$ Comme ξ=1.5 ⇒ le déterminant est positif, donc on a deux racines réelles distinctes négatives (P_1 et P_2, qu'on appelle pôles de H(p)) :

$$P_{1,2} = \omega_n\left[-\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1}\right] \Rightarrow la\ fonction\ de\ transfert\ peut\ se\ mettre$$

$$H(p) = \frac{s(p)}{E(p)} = \frac{1}{\frac{1}{\omega_n{}^2}\boldsymbol{P^2} + \frac{2\xi}{\omega_n}\boldsymbol{P} + 1} = \frac{\omega_n{}^2}{\boldsymbol{P^2} + 2\xi\omega_n\boldsymbol{P} + \omega_n{}^2} = \frac{\omega_n{}^2}{(P - P_1)(P - P_2)}$$

6) **Réponse indicielle** e(t)=u(t)=échelon unitaire ⇒ E(p)=1/p

$$S(p) = H(p)E(p) = \frac{1}{P}\left[\frac{\omega_n{}^2}{(P-P_1)(P-P_2)}\right]$$



$$S(p) = \left[\frac{A}{P} + \frac{B}{P - P_1} + \frac{C}{P - P_2}\right]$$

Tout calcule fait in trouve

$$A = \frac{\omega_n{}^2}{P_1P_2};\quad B = \frac{\omega_n{}^2}{P_1(P_1 - P_2)},\ C = \frac{\omega_n{}^2}{P_2(P_2 - P_1)}$$

$$S(p) = \frac{\omega_n{}^2}{P_1P_2}\left[\frac{1}{P} + \frac{P_2}{(P_1 - P_2)}\left[\frac{1}{P - P_1}\right] + \frac{P_1}{(P_2 - P_1)}\left[\frac{1}{P - P_2}\right]\right]$$

$$= \frac{1}{P} + \frac{P_2}{(P_1 - P_2)}\left[\frac{1}{P - P_1}\right] + \frac{P_1}{(P_2 - P_1)}\left[\frac{1}{P - P_2}\right]\ car\ \omega_n{}^2 = P_1P_2$$

$\Rightarrow s(t) = 1 + \frac{P_2}{(P_1 - P_2)}e^{P_1t} + \frac{P_1}{(P_2 - P_1)}e^{P_2t} \Rightarrow s(0) = 0\ et\ s(\infty) = 1$⇒les limites sont connues

$\frac{ds(t)}{dt} = \frac{P_1P_2}{(P_1 - P_2)}e^{P_1t} + \frac{P_2P_1}{(P_2 - P_1)}e^{P_2t} \Rightarrow s'(0) = 0\ et\ s'(\infty) = 0$⇒les pentes sont connues

Pas de dépassement car la dérivée ne s'annule que pour t=0 et t=∞

$$s(t) = 1 - \frac{(1 + \alpha)}{2}e^{P_1t} - \frac{(1 + \alpha)}{2}e^{P_2t} \qquad avec\ \alpha = \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 - 1}} = 1.341\ si\quad \xi = 1.5$$

Pour (R=10 KΩ, C=2.2nF) on trouve $P_1=-1.734*10^4$ et $P_2=-1.189*10^5$

$$s(t) = 1 - 1.17e^{P_1t} + 0.17e^{P_2t}$$

t (m s)	0	5	10	15	20	40	45
S(t)	0	0.5	0.79	0.91	0.96	0.999	0.999999

⇒t_m=14 ms =temps de montée à 90% et t_r=20 ms=temps de réponse à ∓5%

Exo : 3 $\frac{d^2s(t)}{dt^2}+3\frac{ds(t)}{dt}+2s(t)=5\,u(t) \quad (1) \quad avec\ s(0)=0\ \ et\ s'(0)=1$

1) Solution de l'équation homogène

$$\frac{d^2s(t)}{dt^2}+3\frac{ds(t)}{dt}+2s(t)=0 \quad (2)\ on\ suppose\ que s_h(t)=Ke^{rt}$$

On remplace dans (2), on obtient

$$Ke^{rt}[r^2+3r+2]=0 \Rightarrow \qquad r^2+3\,r+2=0=équation\ caractéristique$$

$$\Delta=1 \Rightarrow r_1=-1\ \ et\ r_2=-2 \ \ \Rightarrow s_h(t)=Ae^{-t}+Be^{-2t}$$

2) Solution particulière de l'équation avec second membre
Elle est de la même forme que le second membre, ici le second membre est une constante, donc on suppose que $s_p(t)$= constante donc on aura

$$2s_p(t)=5\,u(t) \Rightarrow s_p(t)=\frac{5}{2}u(t)=2.5\ pour\ t\geq 0$$

3) Solution générale

$$s_g(t)=s_h(t)+s_p(t)=Ae^{-t}+Be^{-2t}+2.5 \quad (3)$$

$$\frac{ds_g(t)}{dx}=-Ae^{-t}-2Be^{-2t}$$

$$s(0)=0=Ae^{-0}+Be^{-20}+2.5=A+B+2.5=0 \qquad (4)$$

$$s'(0)=1=-A-2B \ \ (5), \qquad (5)et\ (4) \qquad \Rightarrow A=-4\ et\ B=1.5$$

On remplace dans (2) on obtient

$$s_g(t)=s_h(t)+s_p(t)=-4e^{-t}+1.5e^{-2t}+2.5 \qquad (6)$$

4) La réponse libre= solution de l'équation homogène, qui doit satisfaire aux conditions initiales

$$donc\ \ c'est\ \ \ s_l(t)=Ae^{-t}+Be^{-2t}\ avec\ s_l(0)=0\ \ et\ s_l'(0)=1$$

$$\Rightarrow \ \ s_l(0)=0=Ae^{0}+Be^{0}=A+B=0 \qquad et\ \ s_l'(0)=1=-A-2B$$

$$\Rightarrow A=1\ et\ B=-1 \qquad donc\ \ c'est \qquad s_l(t)=1e^{-t}-1e^{-2t}$$

5) La réponse forcée= étant la solution générale, mais avec des conditions initiales nulles c'est-à-dire $s_f(0)=0\ \ et\ s_f'(0)=0$
La solution générale est déjà obtenue, équation (3)

$$s_f(t)=Ae^{-t}+Be^{-2t}+2.5\ \ avec\ s_f(0)=0\ \ et\ s_f'(0)=0$$

$$\Rightarrow \ \ s_f(0)=0=Ae^{0}+Be^{0}+2.5=A+B+2.5=0 \qquad et\ \ s_l'(0)=0=-A-2B$$

$$\Rightarrow A=-5\ et\ B=2.5 \qquad s_f(t)=2.5e^{-t}-5e^{-2t}+2.5$$

6) La réponse totale=réponse libre + réponse forcée

$$s(t) = s_l(t) + s_f(t) = (1e^{-t} - 1e^{-2t}) + (2.5e^{-t} - 5e^{-2t} + 2.5\,)$$
$$= \ -4e^{-t} + 1.5e^{-2t} + 2.5 \quad\quad c'est \quad bien = s_g(t)$$

7) Utilisation du calcul opérationnel

$$\frac{d^2s(t)}{dt^2} + 3\frac{ds(t)}{dt} + 2s(t) = 5\,u(t) \quad\quad (1) \quad avec\ s(0) = 0\ \ et\ s'(0) = 1$$

La transformée de Laplace de cette équation

$$\mathfrak{L}\{5\,u(t)\} = \frac{5}{p}$$
$$\mathfrak{L}\{2\ \ s(t)\} = 2\,S(p)$$
$$\mathfrak{L}\left\{3\ \frac{ds(t)}{dt}\right\} = 3\{S(p) - s(0)\} = 3S(p)$$
$$\mathfrak{L}\left\{\frac{d^2s(t)}{dt^2}\right\} = p^2S(p) - ps(0) - s'(0) = p^2S(p) - 1$$
$$p^2S(p) - 1 + 3pS(p) + 2S(p) = \frac{5}{p} \Rightarrow S(p)\{p^2 + 3p + 2)\} = \frac{5}{p} + 1 = \frac{p+5}{p}$$
$$S(p) = \frac{p+5}{p(p^2+3p+2)} = \frac{p+5}{p(p+1)(p+2)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p+1} + \frac{c}{p+2}\ (7)\ \ trois\ poles\ simples(0,-1,-2)$$
$$A = \lim_{p\to 0} pS(p) = \lim_{p\to 0} p\frac{p+5}{p(p+1)(p+2)} = \lim_{p\to 0}\frac{p+5}{(p+1)(p+2)} = \frac{5}{2} = 2.5$$
$$B = \lim_{p\to -1}(p+1)S(p) = \lim_{p\to -1}(p+1)\frac{p+5}{p(p+1)(p+2)} = \lim_{p\to -1}\frac{p+5}{p(p+2)} = -4$$
$$C = \lim_{p\to -1}(p+2)S(p) = \lim_{p\to -2}(p+2)\frac{p+5}{p(p+1)(p+2)} = \lim_{p\to -2}\frac{p+5}{p(p+1)} = 1.5$$
$$S(p) = \frac{p+5}{p(p^2+3p+2)} = \frac{p+5}{p(p+1)(p+2)} = \frac{2.5}{p} + \frac{-4}{p+1} + \frac{1.5}{p+2}$$
$$\Rightarrow s(t) = \mathfrak{L}^{-1}(S(p)) = 2.5 - 4e^{-t} + 1.5e^{-2t}$$