Département de Mathématiques
Faculté des Sciences

Documents, portable, tablette et calculatrice sont NON AUTORISES

Contrôle continu — ALGEBRE 1 — 24-Nov-2016 — Durée : 01H:30'

Exercice 1: *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On considère les assertions suivantes:*
P : "$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$"
Q : "$(\forall x \in \mathbb{R}, f(x) > 0)$ *ou* $(\forall x \in \mathbb{R}, f(x) < 0)$"
1- *Donner la négation de* **P** *et de* **Q**.
2- *Montrer que* $\overline{\mathbf{P}} \Rightarrow \overline{\mathbf{Q}}$ *est une assertion fausse. (Raisonnez par contraposition)*

Exercice 2: *Soit $(u_n)_n$ une suite de réels convergente vers une limite l. Raisonnez par l'absurde pour montrer que:*
Si $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n > a$ (respectivement $u_n \geq a$) alors $l \geq a$.

Exercice 3: *Soit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une fonction strictement croissante. Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$ $\varphi(n) \geq n$.*

Exercice 4: *Soient A, B et C trois ensembles.*
(Ne pas utiliser de table de vérité).
1- *Montrer que:* $(A \cap B) \cap (\overline{A \cap C}) = A \cap B \cap \overline{C}$ *et que* $(A \cap C) \cap (\overline{A \cap B}) = A \cap C \cap \overline{B}$.
2- *En déduire que:* $(A \cap B)\Delta(A \cap C) = A \cap (B \Delta C)$.

Exercice 5: *Soit f l'application* $\left\{ \begin{array}{c} \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ z \mapsto \dfrac{z}{1+|z|} \end{array} \right.$ *, $|z|$ est le module de z.*
1- *Montrer que si $f(z_1) = f(z_2)$ alors $|z_1| = |z_2|$. Déduire que $z_1 = z_2$.*
2- On note $D = \{z \in \mathbb{C} \ / \ |z| < 1\}$. *Montrer que $f(\mathbb{C}) \subset D$.*
3- *Donner $f^{-1}(\{i\})$.*
4- **(cours)** *f est-elle bijective de $\mathbb{C}$ sur D?*

Département de Mathématiques
Faculté des Sciences

Corrigé du contrôle continu — ALGEBRE 1 — 24-Nov-2016

Exo 1 (2 points) : *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue.*
On considère les assertions suivantes:
P : "$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$"
Q : "$(\forall x \in \mathbb{R}, f(x) > 0)$ *ou* $(\forall x \in \mathbb{R}, f(x) < 0)$"
Question 1- *Donner la négation de* **P** *et de* **Q**.

Réponse: (1 point)
$\overline{\mathbf{P}}$: "$\exists x \in \mathbb{R}$ *tel que* $f(x) \neq 0$"
$\overline{\mathbf{Q}}$: "$(\exists x \in \mathbb{R},$ *tel que* $f(x) \leq 0)$ *et* $(\exists x \in \mathbb{R},$ *tel que* $f(x) \geq 0)$"

Question 2- *Montrer que* $\overline{\mathbf{P}} \Rightarrow \overline{\mathbf{Q}}$ *est une assertion fausse.*
(Raisonnez par contraposition)

Réponse: (1 point)
La contraposée de $\overline{\mathbf{P}} \Rightarrow \overline{\mathbf{Q}}$ *est* $\mathbf{Q} \Rightarrow \mathbf{P}$. *On a* $(\overline{\mathbf{P}} \Rightarrow \overline{\mathbf{Q}}) \Leftrightarrow (\mathbf{Q} \Rightarrow \mathbf{P})$.
$\mathbf{Q} \Rightarrow \mathbf{P}$ *est fausse. En effet: On suppose que l'assertion*
Q : "$(\forall x \in \mathbb{R}, f(x) > 0)$ *ou* $(\forall x \in \mathbb{R}, f(x) < 0)$" *est vraie, donc une des deux assertions*
$(\forall x \in \mathbb{R}, f(x) > 0)$ OU $(\forall x \in \mathbb{R}, f(x) < 0)$ est vraie. *(Elles ne peuvent pas être vraies à la fois). Cependant il n'existe aucune valeur réelle de x pour laquelle $f(x)$ est nulle.*

Exo 2 (4 points) : *Soit $(u_n)_n$ une suite de réels convergente vers une limite l.*
Question - *Raisonnez par l'absurde pour montrer que:*
Si $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n > a$ (respectivement $u_n \geq a$) alors $l \geq a$.

Réponse: "*u_n convergente vers l*" *si et seulement si*
$(\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ *tel que* $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 \Rightarrow |u_n - l| \leq \epsilon)$. *Ceci veut dire qu'à partir d'un certain rang n_0 tous les termes (la majorité) de la suite (u_n) se trouvent dans l'intervalle $[l - \epsilon, l + \epsilon]$.* **(1 point)**
Supposons par l'absurde que: $(\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n > a$ (resp $u_n \geq a$) et $l < a)$ est vraie. **(1 point)**
Dans ce cas on peut fixer $\epsilon > 0$, par exemple $\epsilon = \frac{a-l}{2}$, de telle manière que a, avec $a > l$, soit en dehors de l'intervalle $[l - \epsilon, l + \epsilon]$. **(1 point)**
Donc l'assertion "$\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n > a$ (resp $u_n \geq a$)" supposée vraie contredit le fait que la majorité des termes de la suite (u_n) se trouvent dans l'intervalle $[l - \epsilon, l + \epsilon]$. **(1 point)**

Remarque (Exo2): *Si* $u_n := \dfrac{1}{n+1}$, *on a* $u_n > 0$ *mais* $\lim u_n = 0$; *on ne peut donc pas garder les inégalités strictes en passant à la limlite.*

Exo 3 (4 points) : *Soit* $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *une fonction strictement croissante.*
Question - *Montrer par récurrence que* $\forall n \in \mathbb{N} \ \ \varphi(n) \geq n$.

Réponse: *Comme* φ *est définie dans* $\mathbb{N}$ *alors* $\varphi(0)$ *existe et comme* φ *est à valeurs dans* $\mathbb{N}$ *alors* $\varphi(0) \in \mathbb{N}$ *donc forcément* $\varphi(0) \geq 0$. **(1 point)**
Fixons n *dans* $\mathbb{N}$ *et supposons que* $\varphi(n) \geq n$. *Montrons alors que pour ce* n *fixé on a* $\varphi(n+1) \geq n+1$. **(1 point)**
Or φ *est strictement croissante. Ceci veut dire que:*
$\forall n, m \in \mathbb{N},\ m > n \Rightarrow \varphi(m) > \varphi(n)$ **(1 point)**
Dans ce cas et puisque $n+1 > n$ *alors on a* $\varphi(n+1) > \varphi(n) \geq n$.
Donc $\varphi(n+1) > n$.
Or $\varphi(n+1) \in \mathbb{N}$ *donc on a forcément* $\varphi(n+1) \geq n+1$.**(1 point)**
Donc: $\forall n \in \mathbb{N} \ \ \varphi(n) \geq n$.

Exo 4 (5 points) : *Soient* A, B *et* C *trois ensembles.*
(Ne pas utiliser de table de vérité).
Question 1- *Montrer que:* $(A \cap B) \cap (\overline{A \cap C}) = A \cap B \cap \overline{C}$ *et que* $(A \cap C) \cap (\overline{A \cap B}) = A \cap C \cap \overline{B}$.

Réponse:
$$\begin{aligned}(A \cap B) \cap (\overline{A \cap C}) &= (A \cap B) \cap (\overline{A} \cup \overline{C})\\ &= (A \cap B \cap \overline{A}) \cup (A \cap B \cap \overline{C})\\ &= \emptyset \cup (A \cap B \cap \overline{C})\\ &= A \cap B \cap \overline{C} \quad \textbf{(2 points)}\end{aligned}$$
Pour la seconde il suffit d'intervertir B *et* C.**(1 point)**

Question 2- *En déduire que:* $(A \cap B)\Delta(A \cap C) = A \cap (B \Delta C)$.

Réponse:
$$\begin{aligned}(A \cap B)\Delta(A \cap C) &= (A \cap B)\backslash(A \cap C)) \cup ((A \cap C)\backslash(A \cap B))\\ &= ((A \cap B) \cap (\overline{A \cap C})) \cup ((A \cap C) \cap (\overline{A \cap B}))\\ &= (A \cap B \cap \overline{C}) \cup (A \cap C \cap \overline{B})\\ &= A \cap ((B \cap \overline{C}) \cup (C \cap \overline{B}))\\ &= A \cap ((B\backslash C) \cup (C\backslash B))\\ &= A \cap (B \Delta C).\textbf{(2 points)}\end{aligned}$$

Exo 5 (5 points) : *Soit f l'application* $\left\{ \begin{array}{c} \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ z \mapsto \dfrac{z}{1+|z|} \end{array} \right.$

Question 1- *Montrer que si $f(z_1) = f(z_2)$ alors $|z_1| = |z_2|$.*
Déduire que $z_1 = z_2$.

Réponse: *Soient z_1, z_2 dans $\mathbb{C}$.* $f(z_1) = f(z_2) \Rightarrow \dfrac{z_1}{1+|z_1|} = \dfrac{z_2}{1+|z_2|}$

$$\Rightarrow \left|\frac{z_1}{1+|z_1|}\right| = \left|\frac{z_2}{1+|z_2|}\right|$$

$$\Rightarrow \frac{|z_1|}{1+|z_1|} = \frac{|z_2|}{1+|z_2|}$$

$\Rightarrow |z_1| = |z_2|$.**(1point)**

Si $|z_1| = |z_2|$ *alors* $f(z_1) = f(z_2) \Rightarrow \dfrac{z_1}{1+|z_1|} = \dfrac{z_2}{1+|z_1|} \Rightarrow z_1 = z_2$.**(1point)**

Question 2- *On note $D = \{z \in \mathbb{C} \ / \ |z| < 1\}$. Montrer que $f(\mathbb{C}) \subset D$.*

Réponse: *Si $Z \in f(\mathbb{C})$ alors $Z = f(z) = \dfrac{z}{1+|z|}$* avec $z \in \mathbb{C}$. *On remarque que* $|Z| = \left|\dfrac{z}{1+|z|}\right| = \dfrac{|z|}{1+|z|} < 1$, *soit $Z \in D$. Donc $f(\mathbb{C}) \subset D$.***(1 point)**

Question 3- *Donner $f^{-1}(\{i\})$.*

Réponse: *$i \in \mathbb{C}$ (ensemble d'arrivée). Comme les éléments de $f(\mathbb{C})$ ont des modules infrieurs à 1 ($f(\mathbb{C}) \subset D$), alors le complexe i de module 1 n'est pas dans $f(\mathbb{C})$ et par suite $f^{-1}(\{i\}) = \emptyset$.***(1 point)**

Question 4- *f est-elle bijective de $\mathbb{C}$ sur D?*

Réponse: *L'application f est injective puisque pour $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, on a:*
$f(z_1) = f(z_2) \Rightarrow z_1 = z_2$, d'après la réponse 1). **(0.25 point)**
L'application f est surjective de $\mathbb{C}$ sur D. En effet:
Soit $Z \in D$ tel que $Z = \dfrac{z}{1+|z|}$. On pose $Z = \mathrm{R}e^{i\Theta}$ et $z = re^{i\theta}$.

On a $\mathrm{R}e^{i\Theta} = \dfrac{re^{i\theta}}{1+r}$, *soit* $\left\{ \begin{array}{ll} r(1-R) = R, & R < 1 \\ \theta = \Theta + 2kpi, & k \in \mathbb{Z} \end{array} \right.$.

D'ou l'existence de $z = \dfrac{R}{1-R}e^{i\Theta}$.**(0.5 point)**
*En conclusion f est bijective de $\mathbb{C}$ sur D.***(0.25 point)**
