Université de Jijel | Faculté SEI | Département d'informatique

Module : Analyse1 | 17/01/2024

EXAMEN

Exercice 1:(6 pts)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ soient les trois suites réelles suivantes :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \quad , \quad v_n = \frac{u_n}{\sqrt{n}} \quad , \quad w_n = u_n - 2\sqrt{n}$$

1) Montrer par récurrence pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la propriété :

$$2\sqrt{n+1} - 2 \leq u_n \leq \sqrt{n-1} + \sqrt{n}$$

2) En utilisant le théorème d'encadrement, calculer : $\lim_{n\to+\infty} v_n$.

3) Montrer que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante, puis montrer qu'elle est convergente.

Exercice 2:(4.5 pts)

Soit la fonction suivante :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

1) Utiliser la suite $x_n = \frac{1}{2n\pi}$ pour montrer que : $\lim_{x\to 0} \cos\left(\frac{1}{x}\right) \neq 0$.

2) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$?

3) Est-ce qu'elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$?

4) Montrer que la fonction g ne possède pas de dérivée seconde au point « 0 »:

$$g(x) = xf(x)$$

Exercice 3: (4.5 pts)

1) Ecrire la formule de MacLaurin-Young à l'ordre 2 pour une fonction quelconque.

2) Trouver la formule de MacLaurin-Young à l'ordre 2 des fonctions suivantes :

$$h(x) = \ln(1+x^2) \quad , \quad \varphi(x) = \sin x$$

3) En utilisant deux méthodes, calculer la limite suivante :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2) - \sin x}{x}$$

Exercice 4: (5 pts)

1) Montrer pour $a, b \in [0,1[$ l'égalité:

$$\arctan a + \arctan b = \arctan \frac{a+b}{1-ab}$$

Indication : $\tan(\theta + \varphi) = \frac{\tan\theta + \tan\varphi}{1 - \tan\theta \ \tan\varphi}$

2) Déduire la valeur de :

$$S = 5 \arctan \frac{1}{8} + 2 \arctan \frac{1}{18} + 3 \arctan \frac{1}{57}$$

3) Appliquer le TAFG (voir le rappel) sur les fonctions $f \ et \ g$ pour retrouver le résultat de la question (1) :

$$f(x) = \arctan \frac{a+x}{1-ax} \quad , \quad g(x) = \arctan x$$

<u>Rappel :</u> Théorème des accroissements finis généralisés (TAFG**)**

Si f, g sont deux fonctions **continues** sur un intervalle $[0, b]$ et **dérivables** sur $]0, b[$, telles que $g'(x) \neq 0$ pour $x \in [0, b]$ et $g(0) \neq g(b)$. Alors :

$$\exists c \in]0, b[\quad tel \ que \quad (f(b) - f(0))g'(c) = (g(b) - g(0))f'(c)$$

بالتوفيق

CORRIGÉ TYPE DE L'EXAMEN

Exercice 1: (6 pts)

1) **Montrer par récurrence pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la propriété :**

✓ Pour montrer l'inégalité de droite, soit la propriété

$P_n : u_n \leq \sqrt{n-1} + \sqrt{n}$, pour $n \in \mathbb{N}^*$. ....(0.25)

- Pour $n = 1$, on a $u_1 = 1$ donc $P_1 : u_1 \leq 1$ est vraie. ....(0.25)
- Supposons P_n est vraie, i.e. $u_n \leq \sqrt{n-1} + \sqrt{n}$.

  On va montrer que P_{n+1} est vraie, i.e. $u_{n+1} \leq \sqrt{n} + \sqrt{n+1}$. ....(0.25)

On a : ....(0.5)

$$u_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} = u_n + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq \sqrt{n-1} + \sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

Donc pour montrer que P_{n+1} est vraie, il suffit de vérifier que :

$$\sqrt{n-1} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq \sqrt{n+1}$$

Autrement dit, il suffit de vérifier que :

$$\frac{\sqrt{n^2-1}+1}{\sqrt{n+1}} \leq \sqrt{n+1}$$

En effet, on a :

$$n^2 - 1 \leq n^2 \Leftrightarrow \sqrt{n^2-1} \leq n \Leftrightarrow \sqrt{n^2-1} + 1 \leq n + 1 = \sqrt{n+1}\sqrt{n+1}$$

D'où le résultat.

Alors la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. ....(0.25)

✓ Pour montrer l'inégalité de gauche, soit la propriété

$Q_n : 2\sqrt{n+1} - 2 \leq u_n$, pour $n \in \mathbb{N}^*$. ....(0.25)

- Pour $n = 1$, on a

$u_1 = 1$ et $2\sqrt{2} - 2 \leq \frac{3}{2}$ donc $Q_1 : 2\sqrt{2} - 2 \leq u_1$ est vraie. ....(0.25)

- Supposons Q_n est vraie, i.e. $2\sqrt{n+1} - 2 \leq u_n$.

  On va montrer que Q_{n+1} est vraie, i.e. $2\sqrt{n+2} - 2 \leq u_{n+1}$. ....(0.25)

On a : ....(0.5)

$$u_{n+1}=\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{\sqrt{k}}=u_n+\frac{1}{\sqrt{n+1}}\geq\ 2\sqrt{n+1}-2+\frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

Donc pour montrer que Q_{n+1} est vraie, il suffit de vérifier que :

$$2\sqrt{n+1}-2+\frac{1}{\sqrt{n+1}}\geq 2\sqrt{n+2}-2$$

Autrement dit, il suffit de vérifier que :

$$2n+3\geq 2\sqrt{(n+1)(n+2)}$$

En effet, on a :

$$4n^2+12n+8\leq 4n^2+12n+9 \Leftrightarrow 4(n+1)(n+2)\leq(2n+3)^2$$

D'où le résultat.

Alors la propriété est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}^*$. ....(0.25)

Donc pour tout $n\in\mathbb{N}^*$

$$2\sqrt{n+1}-2\leq u_n\leq\ \sqrt{n-1}+\ \sqrt{n}$$

2) En utilisant le théorème d'encadrement, calculer : $\lim_{n\to+\infty}v_n$

D'après la question (1), on a pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: ....(0.25)

$$2\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}-\frac{2}{\sqrt{n}}\leq\frac{u_n}{\sqrt{n}}\leq\frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{n}}+\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}}$$

Alors ....(0.25)

$$2\sqrt{\frac{n+1}{n}}-\frac{2}{\sqrt{n}}\leq v_n\leq\sqrt{\frac{n-1}{n}}+\ 1$$

Donc, d'après le théorème des gendarmes : ....(0.25)

$$\lim_{n\to+\infty}\left(2\sqrt{\frac{n+1}{n}}-\frac{2}{\sqrt{n}}\right)\leq\ \lim_{n\to+\infty}v_n\leq\ \lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{\frac{n-1}{n}}+\ 1\right)$$

D'où ....(0.25)

$$2\leq\ \lim_{n\to+\infty}v_n\leq\ 2$$

Enfin : $\lim_{n\to+\infty}v_n=2$ . ...(0.25)

3) Montrer que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante :

Nous avons ....(0.5)

$$w_{n+1}-w_n=u_{n+1}-2\sqrt{n+1}-u_n+2\sqrt{n}$$

$$=2\sqrt{n}-2\sqrt{n+1}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}=\frac{2\sqrt{n(n+1)}-(2n+1)}{\sqrt{n+1}}$$

Pour montrer que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante il suffit de montrer que ....(0.5)

$$2\sqrt{n(n+1)} - (2n+1) \leq 0$$

Autrement dit :

$$4n(n+1) \leq (2n+1)^2$$

En effet, on a :

$$4n^2 + 4n \leq 4n^2 + 4n + 1 \Leftrightarrow 4n(n+1) \leq (2n+1)^2$$

D'où le résultat. Alors $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante .

- **Montrer qu'elle est convergente.**

On a ....(0.25)

$$w_n = u_n - 2\sqrt{n} \geq 2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} - 2 \geq -2$$

La suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et minorée par -2 donc elle est convergente. ....(0.5)

Exercice 2: **(4.5 pts)**

1) **Montrer que $\lim_{x\to 0} \cos\left(\frac{1}{x}\right) \neq 0$.**

On a $\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2n\pi} = 0$ . ...(0.25)

Par contre : ....(0.5)

$$\lim_{n\to+\infty} \cos\left(\frac{1}{x_n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \cos(2n\pi) = 1 \neq 0$$

Donc d'après les propriétés des limites : $\lim_{x\to 0} \cos\left(\frac{1}{x}\right) \neq 0.$ ....(0.25)

2) **Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$?**

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, puisque c'est le produit et la composition des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^*$ . ...(0.25)

De plus, on a pour $x \in \mathbb{R}^*$: $f'(x) = 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ . ...(0.5)

La fonction dérivée est continue sur $\mathbb{R}^*$ (comme produit et composition des fonctions continues sur $\mathbb{R}^*$) . ...(0.25)

Donc la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.

3) **Est-ce qu'elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$?**

- **Au point « 0 » :**

Nous avons par définition ....(0.5)

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

Donc f est dérivable en « 0 » et la dérivée est $f'(0) = 0$ . ...(0.25)

Il reste à vérifier si f' est continue au point « 0 ».

On a : $\lim_{x \to 0} 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ . ...(0.25)

D'après la question (1) : $\lim_{x \to 0} \cos\left(\frac{1}{x}\right) \neq 0$, ...(0.25)

alors $\lim_{x \to 0} f'(x) \neq 0 = f'(0)$ . ...(0.25)

Ce qui veut dire que f' n'est pas continue au point « 0 ». ....(0.25)

Alors la fonction f n'est pas de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. ....(0.25)

4) **Montrer que g ne possède pas de dérivée seconde au point « 0 ».** ....(0.5)

Puisque f' n'est pas continue au point « 0 », donc elle n'est pas dérivable au point « 0 » ce qui veut dire que f ne possède pas de dérivée seconde au point « 0 ».
Alors g (qui est le produit de f et $h(x) = x$) ne possède pas de dérivée seconde au point « 0 ».

Exercice 3: (4.5 pts)

1) **La formule de MacLaurin-Young à l'ordre 2:** ....(0.5)

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f^{(2)}(0) + x^2 \varepsilon(x)$$

Avec $\lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$.

2) Trouver la formule de MacLaurin-Young à l'ordre 2 des fonctions suivantes :

On doit calculer les dérivées successives en « 0 » de h et φ :

✓ **Pour h , on a :** ....(0.5)

$$h'(x) = \frac{2x}{1+x^2} \quad , \quad h''(x) = \frac{2(1-x^2)}{1+x^2}$$

D'où

$$h(0) = 0 \quad , \quad h'(0) = 0 \quad , \quad h''(0) = 2$$

Alors ....(0.5)

$$h(x) = x^2 + x^2 \varepsilon_1(x)$$

Avec $\lim_{x \to 0} \varepsilon_1(x) = 0$.

✓ **Pour φ , on a :** ....(0.5)

$$\varphi'(x) = \cos x \quad , \quad \varphi''(x) = -\sin x$$

D'où

$$\varphi(0) = 0 \quad , \quad \varphi'(0) = 1 \quad , \quad \varphi''(0) = 0$$

Alors ....(0.5)

$$\varphi(x) = x + x^2 \varepsilon_2(x)$$

Avec $\lim_{x\to 0} \varepsilon_2(x) = 0$.

3) En utilisant deux méthodes, calculer la limite :

Méthode 1 : d'après la formule de Mac Laurin-Young, on a ....(1)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2) - \sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 + x^2\varepsilon_1(x) - x - x^2\varepsilon_2(x)}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \left(-1 + x + x^2\varepsilon(x)\right) = -1$$

Méthode 2 : d'après la règle de L'Hôpital, on a :

$f(x) = \ln(1+x^2) - \sin x$, $g(x) = x$ sont **dérivables** sur $\mathbb{R}^*$, ...(0.5)

et $g'(x) = 1 \neq 0$ pour $x \in \mathbb{R}^*$

et il y a une indétermination de la forme $\frac{0}{0}$.

et on a : ....(0.5)

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2x}{1+x^2} - \cos x}{1} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{2x}{1+x^2} - \cos x\right) = -1$$

Alors

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2) - \sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = -1$$

Exercice 4: (5 pts)

1) Montrer l'égalité:

On pose : $\theta = \arctan a$, $\lambda = \arctan b$ . ...(0.25)

On aura d'après l'indication : ....(0.25)

$$\tan(\theta + \lambda) = \frac{\tan\theta + \tan\lambda}{1 - \tan\theta\ \tan\lambda} = \frac{a+b}{1-ab}$$

D'autre part, puisque $a, b \in [0,1[$ alors :

$\theta, \lambda \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right[$ c'est-à-dire $\theta + \lambda \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right[$. ....(0.25)

Donc ....(0.5)

$$\theta + \lambda = \arctan(\tan(\theta+\lambda)) == \arctan\left(\frac{a+b}{1-ab}\right)$$

D'où le résultat

$$\arctan a + \arctan b = \arctan \frac{a+b}{1-ab}$$

2) Déduire la valeur de S: ....(1.5)

On peut écrire

$$S = 2\left(\arctan\frac{1}{8} + \arctan\frac{1}{18}\right) + 3\left(\arctan\frac{1}{8} + \arctan\frac{1}{57}\right)$$

- D'après l'égalité de la question (1), on a :

$$\arctan\frac{1}{8}+\arctan\frac{1}{18}=\arctan\frac{\frac{1}{8}+\frac{1}{18}}{1-\frac{1}{8}.\frac{1}{18}}=\arctan\frac{2}{11}$$

$$\arctan\frac{1}{8}+\arctan\frac{1}{57}=\arctan\frac{\frac{1}{8}+\frac{1}{57}}{1-\frac{1}{8}.\frac{1}{57}}=\arctan\frac{1}{7}$$

D'où

$$S=2\arctan\frac{2}{11}+3\arctan\frac{1}{7}=2\left(\arctan\frac{2}{11}+\arctan\frac{1}{7}\right)+\arctan\frac{1}{7}$$

- De nouveau, d'après l'égalité de la question (1), on a :

$$\arctan\frac{2}{11}+\arctan\frac{1}{7}=\arctan\frac{\frac{2}{11}+\frac{1}{7}}{1-\frac{2}{11}.\frac{1}{7}}=\arctan\frac{1}{3}$$

D'où

$$S=2\arctan\frac{1}{3}+\arctan\frac{1}{7}=\left(\arctan\frac{1}{3}+\arctan\frac{1}{7}\right)+\arctan\frac{1}{3}$$

- De nouveau, d'après l'égalité de la question (1), on a :

$$\arctan\frac{1}{3}+\arctan\frac{1}{7}=\arctan\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{7}}{1-\frac{1}{3}.\frac{1}{7}}=\arctan\frac{1}{2}$$

D'où

$$S=\arctan\frac{1}{2}+\arctan\frac{1}{3}$$

- Enfin, d'après l'égalité de la question (1), on a :

$$\arctan\frac{1}{2}+\arctan\frac{1}{3}=\arctan\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}.\frac{1}{3}}=\arctan 1=\frac{\pi}{4}$$

Alors $S=\frac{\pi}{4}$.

3) Pour appliquer le TAFG sur f et g on a :

Les deux fonctions sont :

continues sur l'intervalle $[0,b]$ et **dérivables** sur $]0,b[$ . ...(0.25)

D'autre part, la dérivée de g est : ....(0.25)

$$g'(x)=\frac{1}{1+x^2}$$

telles que $g'(x)\neq 0$ pour $x\in[0,b]$ et $g(0)\neq g(b)$. ....(0.25)

Et la dérivée de f est : ....(0.5)

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{a+x}{1-ax}\right)'}{1+\left(\frac{a+x}{1-ax}\right)^2} = \frac{1+a^2}{(1-ax)^2} \cdot \frac{(1-ax)^2}{(1-ax)^2+(a+x)^2} = \frac{1}{1+x^2}$$

Donc les dérivées sont égales : ....(0.25)

$$f'(x) = g'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Alors d'après le TAFG: ....(0.25)

$$\exists c \in]0, b[\quad tel\ que \quad (f(b)-f(0))g'(c) = (g(b)-g(0))f'(c)$$

C'est-à-dire : ....(0.25)

$$\arctan \frac{a+b}{1-ab} - \arctan a = \arctan b - \arctan 0$$

Donc on retrouve le résultat de la question (1) : ....(0.25)

$$\arctan a + \arctan b = \arctan \frac{a+b}{1-ab}$$