Université A/ Mira de Béjaia
Faculté de Technologie
Département de Technologie
1ère année ST

M^{me} Younsi

Septembre 2019

Examen de rattrapage Maths II

(Durée 2h)

Exercice 1. (6 points)
On considère la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} \alpha - 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2\alpha \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

où α est un paramètre réel.

a. Calculer le déterminant de la matrice A.

b. Pour quelles valeurs de α la matrice A est-elle inversible ?

c. Si $\alpha = 0$, calculer l'inverse de A.

Exercice 2. (8 points)

I) Soit l'équation différentielle du premier ordre suivante :

$$y' = -y + x............(1)$$

1. Résoudre l'équation différentielle (1).
2. Déterminer la solution générale de (1) vérifiant $y(0) = 0$.

II) Résoudre l'équation différentielle du second ordre

$$y'' - y' - 6y = (10x + 1)e^{-2x}$$

Exercice 3. (6 points)
Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$$

$$g(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1}$$

a) Calculer $I_1 = \int_1^e f(x)dx$

b) Soit $I_2 = \int_1^e g(x)dx$. Calculer $I_1 + I_2$ et déduire la valeur de I_2.

Bon Courage

Université A/ Mira de Béjaia
Faculté de Technologie
Département de Technologie
$1^{ère}$ année ST

Septembre 2019

Corrigé de l'examen de rattrapage de Maths II

Exercice 1. (6 points)

I. Considérons la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} \alpha-1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2\alpha \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

où α est un paramètre réel.

a. Calculons le déterminant de la matrice A.

$$det(A) = (\alpha-1)\begin{vmatrix} 1 & 2\,\alpha \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 2\,\alpha \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -4\alpha^2 + 3\alpha + 1$$

2

b. Les valeurs de α pour que la matrice A soit inversible.

La matrice A est inversible si et seulement si son déterminant est différent de 0.
On a
A est inversible $\Longleftrightarrow det(A) \neq 0.$
$\Longleftrightarrow -4(\alpha-1)(\alpha+\frac{1}{4} \neq 0.$
$\Longleftrightarrow \alpha \in \mathbb{R}\backslash\{1, \frac{-1}{4}\}.$

1,5

c. Si $\alpha = 0$, calculons l'inverse de A.

on a pour $\alpha = 0$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

et $det(A) = 1$
Alors

$$comA = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad donc \quad {}^t(comA) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

2,5

d'où

$$A^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Exercice 2. (8 points)

I) Soit l'équation différentielle du premier ordre suivante :

$$y' = -y + x............(1)$$

1. Résoulution de l'équation différentielle (1).
   On a $y' + y = x$ est une équation différentielle avec second membre.

   a Résoulution de l'équation homogène associée à (1)
   Si $y \neq 0$
   $y' + y = 0 \Longrightarrow \frac{1}{y}dy = -dx$ En intégrant
   $\int \frac{1}{y}dy = -\int dx \Longrightarrow ln|y| = -x + c, \qquad c \in \mathbb{R}$
   $\Longrightarrow |y| = e^{-x+c}, \qquad c \in \mathbb{R}$
   $\Longrightarrow |y| = e^{c}e^{-x}, \qquad c \in \mathbb{R}$
   $\Longrightarrow y = k_1 e^{-x}, \qquad k_1 \in \mathbb{R}^*$
   $y = 0$ st une solution évidente de y'+y=0. Donc la solution générale de l'équation homogène est $y_0 = ke^{-x}, \qquad k \in \mathbb{R}$.

   1

   b Résoulution de l'équation non homogène.
   On fait varier la constante k et la solution générale de (1) sera $y(x) = k(x)e^{-x}$.
   $y' = k'(x)e^{-x} - k(x)e^{-x}$
   En remplaçant y' dans (1) on obtient :
   $k'(x)e^{-x} - k(x)e^{-x} + k(x)e^{-x} = x \Longrightarrow k'(x)e^{-x} = x$
   $\Longrightarrow k'(x) = xe^{x}$
   $\Longrightarrow k(x) = \int xe^{x}dx$

   0,5

   En utilisant une intégration par parties, calculer $\int xe^{x}dx$.
   On pose
   $U'(x) = e^{x} \quad \Rightarrow \quad U(x) = e^{+x}$
   $V(x) = x \quad \Rightarrow \quad V'(x) = 1$
   $\int xe^{x}dx = xe^{x} - \int e^{x}dx$
   $= xe^{x} - e^{x} + c \qquad c \in \mathbb{R}$
   $= e^{x}(x-1) + c \qquad c \in \mathbb{R}$
   Donc $k(x) = e^{x}(x-1) + c \qquad c \in \mathbb{R}$

   1

   Alors
   $y_p = -x - 1$ d'ou
   $y_G(x) = y_0 + y_p = ke^{-x} + x - 1 \qquad k \in \mathbb{R}$

   0,5

2. Déterminer la solution générale de (1) vérifiant *****
   On a
   $y(0) = 0 \Longrightarrow ke^{0} + 0 - 1 = 0$
   $\Longrightarrow k = 1$
   Finalement,
   $y_G = e^{-x} + x - 1$

   1

II) Résoulution de l'équation différentielle du second ordre

$$y'' - y' - 6y = (10x + 1)e^{-2x}.......(E)$$

* Résoudre l'équation homogène associée a (E).

Résolution de l'équation homogène

$$y'' - y' - 6y == 0 \qquad (E_0)$$ — 0,5

L'équation caractéristique associée à (E_0).

$$r^2 - r - 6 = 0$$ 0,5

admet deux racines réelles distinctes $r_1 = -2$ et $r_2 = 3$. Ainsi, la solution générale de (E) est

$$y_0 = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{3x},$$ 1

où $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

** Trouvons la solution particulière de (E).

on a

$y_p = (ax^2 + bx)e^{-2x}$ 0,5

$y_p' = (-2ax^2 - 2bx + 2ax + b)e^{-2x}$,

et

$y_p'' = (-4ax - 2b + 2a + 4ax^2 + 4bx - 4ax - 2b)e^{-2x}$,

$= (4ax^2 - 8ax + 4bx - 4b + 2a)e^{-2x}$

En remplaçant y_p' et y_p'' dans (E) on obtient :

$(-10ax - 4b + 2a - b)e^{-2x} = (10x + 1)e^{-2x}$

qui donne $\qquad -10ax - 4b + 2a - b = 10x + 1$ 1,5

En identifiant, on trouve $a = -1$ et $b = -\frac{3}{5}$. D'où

$y_p = (-x^2 - \frac{3}{5}x)e^{-2x}$.

La solution génerale de (E).

On a $y_G = y_0 + y_p$

donc

$C_1 e^{-2x} + C_2 e^{3x}$, où $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. $y_G = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{3x} + (-x^2 - \frac{3}{5}x)e^{-2x}$, où $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

$y_G = (C_1 + -x^2 - \frac{3}{5}x)e^{-2x} + C_2 e^{3x}$, où $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Exercice 3. (6 points)

Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{x}{x^2+1}.$$

$$g(x) = \frac{x^3}{x^2+1}.$$

a) Calculons $I_1 = \int_1^e f(x)dx$

$$\begin{aligned} \int_1^e f(x)dx &= \int_1^e \frac{x}{x^2+1}dx \\ &= \tfrac{1}{2}\ln(x^2+1)|_1^e \\ &= \tfrac{1}{2}(\ln(e^2+1) - \ln 2) \\ &= \tfrac{1}{2}(\ln(\tfrac{e^2+1}{2}) \end{aligned}$$ 2

b) Soit $I_2 = \int_1^e g(x)dx$. Calculons $I_1 + I_2$

$$
\begin{aligned}
I_1 + I_2 &= \int_1^e f(x)dx + \int_1^e g(x)dx. \\
&= \int_1^e (f(x) + g(x))dx. \\
&= \int_1^e \left(\frac{x}{x^2+1} + \frac{x^3}{x^2+1}\right)dx. \\
&= \int_1^e \frac{x+x^3}{x^2+1}dx. \\
&= \int_1^e \frac{x(1+x^2)}{x^2+1}dx. \\
&= \int_1^e x dx. \\
&= \frac{1}{2}x^2|_1^e. \\
&= \frac{1}{2}(e^2-1). \\
&= \frac{e^2-1}{2}.
\end{aligned}
$$

2

en déduire la valeur de I_2.

On a

$I_1 + I_2 = \frac{e^2-1}{2}$

$$
\begin{aligned}
\text{donc } I_2 &= \frac{e^2-1}{2} - I_1 \\
&= \frac{e^2-1}{2} - \frac{1}{2}\ln\frac{e^2+1}{2} \\
&= \frac{1}{2}(e^2 - 1 - \ln\frac{e^2+1}{2}
\end{aligned}
$$

2