
 ✠–Examen de Rattrapage de Probabilités et Statistiques–✠

Exercice 1 (07.00 points) :

On lance 10 fois un dé et on prend note des résultats successivement obtenus.

1. Combien y a-t-il de résultats possibles ?
 2. Combien y a-t-il de résultats avec 6 nombres pairs et 4 nombres impairs ?
 3. Combien y a-t-il de résultats contenant une fois le chiffre 1, deux fois le chiffre 2, trois fois le chiffre 3 et quatre fois le chiffre 4 ?
 4. Combien y a-t-il de résultats avec au moins deux fois le chiffre 6 ?
 5. Combien y a-t-il de résultats dont la somme des points vaut 12 ?
-

Exercice 2 (07.00 points) :

Dans une usine, trois machines M_1 , M_2 et M_3 fabriquent des boulons de même type. La machine M_1 produit en moyenne 0.3% boulons défectueux, la machine M_2 produit en moyenne 0.8% boulons défectueux et la machine M_3 produit en moyenne 1% boulons défectueux. On mélange 1000 boulons dans une caisse et on remarque que 500 boulons proviennent de la machine M_1 , 350 boulons de la machine M_2 et 150 boulons de la machine M_3 . On tire un boulon au hasard dans la caisse.

1. Quelle est la probabilité pour que le boulon examiné soit défectueux ? Quelle est la probabilité pour qu'il ne soit pas défectueux ?
 2. Si l'examen du boulon révèle que celui-ci est défectueux. Quelle est la probabilité qu'il ait été fabriqué par :
 - a) La machine M_1 .
 - b) La machine M_2 .
 - c) La machine M_3 .
 3. Si l'examen du boulon révèle que celui-ci n'est pas défectueux, quelle est la probabilité qu'il ait été fabriqué par la machine M_3 ?
-

Exercice 3 (06.00 points) :

Soit X une variable aléatoire réelle définie par la fonction suivante :

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in]-\infty, 0] \cup]3, +\infty[; \\ \frac{1}{2}x, & \text{si } x \in]0, 1]; \\ \frac{1}{2}, & \text{si } x \in]1, 2]; \\ \frac{3}{2} - \frac{1}{2}x, & \text{si } x \in]2, 3]. \end{cases}$$

1. Vérifier que f est une densité de probabilité de la variable aléatoire X .
 2. Tracer le graphe de f .
 3. Calculer $E(X)$ et $V(X)$.
 4. Calculer $P(1 \leq X \leq 2.5)$.
-

Corrige de l'examen de Rattrapage Probabilités

Exercice N°1 :

① - $6^{10} = 60\ 466\ 176$ ① pt résultats possibles.

② - $3^6 \times 3^4 \times C_{10}^6 = 210 \times 3^{10}$ ①,5 pt
 $= 12\ 400\ 290$ résultats possibles.

③ - $C_{10}^1 \times C_9^2 \times C_7^3 \times C_4^4 = 10 \times 36 \times 35 \times 1$ ② pt
 $= 12\ 600$ résultats possibles

④ * $\left[\text{tout les résultats possibles} \right] - \left[\text{tout les résultats avec les chiffres différents de 6} \right] - \left[\text{tout les résultats avec 1 fois le chiffre 6 et les 5 autres chiffres différents de 6} \right]$

$6^{10} - 5^{10} - 1 \cdot 5^9 \cdot C_{10}^1$ ①,5 pt

$= 6^{10} - 5^{10} - 1 \cdot 5^9 \cdot 10 = 31169\ 301$ résultats possibles

⑤ [tout les résultats
avec 9 fois le
chiffre 1 et 1 fois
le chiffre 3.

+

[tout les résultats
avec 8 fois le
chiffre 1 et 2 fois
le chiffre 2.

$$= 1^9 \times 1 \times C_{10}^1$$

+

$$1^8 \times 1 \times C_{10}^2$$

$$= 10 + 45 = 55 \text{ résultats possibles.}$$

①
pt

Exercice N° 2 :

on a les événements suivants :

M_1 : "le boulon provient de la machine M_1 ".

M_2 : "le boulon provient de la machine M_2 ".

M_3 : "le boulon provient de la machine M_3 ".

D : "le boulon est défectueux".

(1) on a les données suivantes :

1,5 pt

$$P(M_1) = 0,5 \quad P(M_2) = 0,35 \quad P(M_3) = 0,15$$

$$P(D/M_1) = 0,003 \quad P(D/M_2) = 0,008 \quad P(D/M_3) = 0,01$$

On a M_1, M_2 et M_3 forment un système complet d'événements.

$$P(D) = \sum_{i=1}^3 P(D/M_i) P(M_i) \quad \left. \vphantom{\sum_{i=1}^3} \right\} \begin{array}{l} \text{Formule des probabilités} \\ \text{Totales} \end{array}$$

$$= P(D/M_1) P(M_1) + P(D/M_2) P(M_2) + P(D/M_3) P(M_3)$$

$$= 0,003 \times 0,5 + 0,008 \times 0,35 + 0,01 \times 0,15$$

$$= 0,0058$$

$$P(D) = 0,0058$$

1 pt

on a l'événement :

\bar{D} : "Le boulon n'est pas défectueux"

$$P(\bar{D}) = 1 - P(D) = 1 - 0,0058 = 0,9942$$

$$P(\bar{D}) = 0,9942 \cdot (0,5) \text{ pt}$$

② On sait que le boulon est défectueux.

a) $P(M_1/D) = ?$

$$P(M_1/D) = \frac{P(D/M_1)P(M_1)}{P(D)} \quad \left. \vphantom{\frac{P(D/M_1)P(M_1)}{P(D)}} \right\} \text{Formule de Bayes.}$$

$$= \frac{0,003 \times 0,5}{0,0058} = 0,2586$$

$$P(M_1/D) = 0,2586 \quad (1) \text{ pt}$$

$$b) P(M_2/D) = \frac{P(D/M_2)P(M_2)}{P(D)} = \frac{0,008 \times 0,35}{0,0058} = 0,4827 \quad (1) \text{ pt}$$

$$c) P(M_3/D) = \frac{P(D/M_3)P(M_3)}{P(D)} = \frac{0,01 \times 0,15}{0,0058} = 0,2586 \quad (1) \text{ pt}$$

③. on sait que le boulon n'est pas défectueux

$$P(M_3/\bar{D}) = \frac{P(\bar{D}/M_3)P(M_3)}{P(\bar{D})}.$$

$$P(\bar{D}/M_3) = 1 - P(D/M_3) = 1 - 0,01 = 0,99. \quad (0,5) \quad \text{pt}$$

$$P(M_3/\bar{D}) = \frac{0,99 \times 0,15}{0,9942} = 0,1493$$

$$P(M_3/\bar{D}) = 0,1493 \quad (0,5) \quad \text{pt}$$

Exercice N° 3

1- f est une densité si $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx &= \int_{-\infty}^0 f(x) dx + \int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx + \int_2^3 f(x) dx + \int_3^{+\infty} f(x) dx \\
 &= \int_0^1 0,5x dx + \int_1^2 0,5 dx + \int_2^3 (1,5 - 0,5x) dx + \int_3^{+\infty} 0 dx \\
 &= \frac{1}{4} [x^2]_0^1 + \frac{1}{2} [x]_1^2 + 1,5[x]_2^3 - \frac{1}{4} [x^2]_2^3 \\
 &= \frac{1}{4} + 1 - \frac{1}{2} + \frac{9}{2} - 3 - \frac{9}{4} + 1 \\
 &= \frac{1+4-2+18-12-9+4}{4} = \frac{4}{4} = 1
 \end{aligned}$$

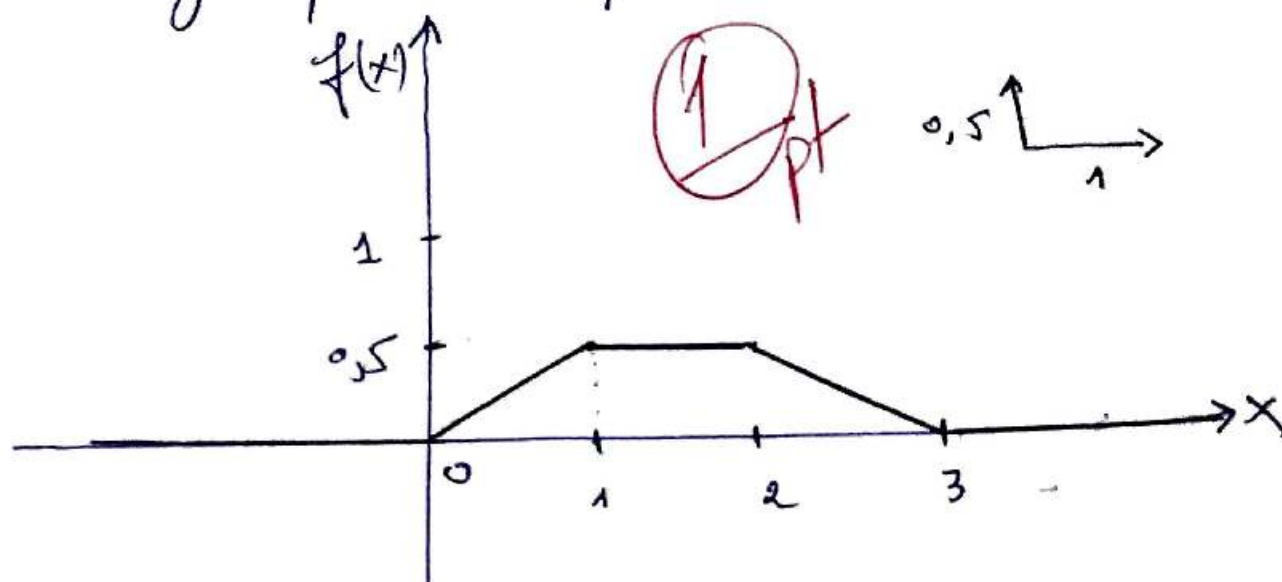
① pt

Et comme $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ et continue

0,5 pt

Donc f est une densité.

2) Le graphe de f



3-A- Calcul de $E(x)$:

$$E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \int_0^1 x^2 dx + \frac{1}{2} \int_1^2 x dx + \frac{3}{2} \int_2^3 x dx - \frac{1}{2} \int_2^3 x^2 dx \\
 &= \frac{1}{6} [x^3]_0^1 + \frac{1}{4} [x^2]_1^2 + \frac{3}{4} [x^2]_2^3 - \frac{1}{6} [x^3]_2^3 \\
 &= \frac{1}{6} + 1 - \frac{1}{4} + \frac{27}{4} - 3 - \frac{27}{6} + \frac{8}{6} = 18/12 = 1,5
 \end{aligned}$$

$$E(x) = 1,5 \quad \textcircled{1} \text{ pt}$$

Calcul de la Variance:

3-B- $V(x) = E(x^2) - E(x)^2$

$$E(x^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \int_0^1 x^3 dx + \frac{1}{2} \int_1^2 x^2 dx + \frac{3}{2} \int_2^3 x^2 dx - \frac{1}{2} \int_2^3 x^3 dx \\
 &= \frac{1}{8} [x^4]_0^1 + \frac{1}{6} [x^3]_1^2 + \frac{3}{6} [x^3]_2^3 - \frac{1}{8} [x^4]_2^3 \\
 &= \frac{1}{8} + \frac{8}{6} - \frac{1}{6} + \frac{81}{6} - \frac{24}{6} - \frac{81}{8} + \frac{16}{8} = 2,666...
 \end{aligned}$$

$$\textcircled{1} \text{ pt}$$

Ce qui donne

$$\begin{aligned} V(x) &= 2,666 - (1,5)^2 \\ &= 2,666 - 2,25 = 0,41. \end{aligned} \quad \textcircled{0,5} \text{ pt}$$

4°) $P(1 \leq X \leq 2,5) = ?$

$$\begin{aligned} P(1 \leq X \leq 2,5) &= \int_1^{2,5} f(t) dt = \int_1^2 \frac{1}{2} dt + \int_2^{2,5} \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}t\right) dt \\ &= \frac{1}{2} \left[t\right]_1^2 + \frac{3}{2} \left[t\right]_2^{2,5} - \frac{1}{4} \left[t^2\right]_2^{2,5} \\ &= 0,6875. \end{aligned} \quad \textcircled{1} \text{ pt}$$