INTÉGRALES ET PRIMITIVES

I. Primitives :

1°) Définition :

Définition :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. On appelle primitive de f sur I, toute fonction F dérivable sur I, dont la dérivée est f.

On note $F' = f$ ou $F'(x) = f(x)$

Exemple :

La fonction f définie sur ℝ par $f(x) = 2x$ a pour primitive F définie sur ℝ par $F(x) = x^2$.

En effet F est dérivable sur ℝ et on a $F'(x) = 2x = f(x)$.

On aurait pu choisir F définie sur ℝ par $F(x) = x^2 + 5$ ou $F(x) = x^2 - \frac{1}{3}$ ou plus généralement, si k est une constante réelle, $F(x) = x^2 + k$. Une fonction n'a pas une seule primitive.

2°) Propriétés :

Théorème :

Si f est une fonction continue sur un intervalle I et si a appartient à I, alors la fonction $\varphi : x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est une primitive de f sur I. (pour tout x de I, $\varphi'(x) = f(x)$)

Preuve : (**ROC** : on démontre le théorème précédent dans le cas où f est continue et croissante sur I.)

Soit x_0 un réel de I et h un réel tel que $x_0 + h$ est dans I.

$$\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0) = \int_a^{x_0+h} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^{x_0} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{x_0}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^{x_0+h} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,\mathrm{d}t$$

- si $h > 0$; $f(x_0) \leqslant f(t) \leqslant f(x_0 + h)$ car f est croissante)

  donc, d'après l'inégalité de la moyenne $f(x_0) \times h \leqslant \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(x_0 + h) \times h$

- Si $h < 0$; $f(x_0 + h) \leqslant f(t) \leqslant f(x_0)$ car f est croissante)

  donc, d'après l'inégalité de la moyenne $f(x_0 + h) \times h \leqslant \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(x_0) \times h$

or, comme f est continue en x_0, $\lim_{h\to 0} f(x_0+h) = f(x_0)$,

donc $f(x_0) \leqslant \frac{\varphi(x_0+h)-\varphi(x_0)}{h} \leqslant f(x_0+h)$ ou $f(x_0+h) \leqslant \frac{\varphi(x_0+h)-\varphi(x_0)}{h} \leqslant f(x_0)$ suivant le signe de h.

D'après le théorème des gendarmes on arrive à $\lim_{h\to 0} \frac{\varphi(x_0+h)-\varphi(x_0)}{h} = f(x_0)$

On en déduit alors que φ est dérivable en x_0 et que $\varphi'(x_0) = f(x_0)$.

Théorème :

- Toute fonction continue sur I admet une infinité de primitives sur I.

- Si F est l'une d'elles, alors l'ensemble des primitives de f sur I est l'ensemble des fonctions G telles que $G = F + k$ (où k est une constante).

Démonstration :

Soit F est une primitive de f, on peut vérifier que $(F + k)' = F' + k' = F' + 0 = F' = f$ donc $F + k$ est une primitive de f.

Soit G est une autre primitive de f. On définit $H = G - F$; on a sans problème $H' = G' - F' = f - f = 0$. H' est nulle sur I donc H est constante, c'est à dire $G - F = k$, ou encore $G = F + k$.

Théorème :

Si f est une fonction continue sur un intervalle I, et si $a \in I$, la fonction F définie sur I par : $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est l'unique primitive de f s'annulant en a.

Preuve :

<u>**Existence**</u> : Le théorème précèdent prouve bien que $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est une primitive de f.

De plus $F(a) = \int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

<u>**Unicité**</u> : Supposons qu'il existe une autre fonction G, primitive de f s'annulant en a. On a $F' = f$ et $G' = f$ donc $(F - G)' = 0$ donc $F - G = k$ donc $F = G + k$. Comme $F(a) = G(a) = 0$, on trouve $k = 0$ donc $F = G$ d'où l'unicité.

Remarque :

En fait, on pourrait énoncer le théorème comme ceci :

Si f est une fonction **continue** sur un intervalle I, α un réel de I et β un réel, alors il existe une unique primitive F de f sur I telle que $F(\alpha) = \beta$.

Il suffit en effet de prendre $F(x) = \int_\alpha^x f(t)\,\mathrm{d}t + \beta$.

Exemple :

Sur $\mathbb{R}$, l'ensemble des primitives de f telle que $f(x) = \sin(x)$ est l'ensemble des fonctions de la forme $F(x) = -\cos(x) + C$ où C est une constante réelle. Pour déterminer la primitive F de f telle que $F(\pi) = 2$ il suffit d'écrire $F(\pi) = -\cos(\pi) + C = 2$, ce qui nous permet de déduire que $C = 1$. L'unique primitive F de f telle que $F(\pi) = 2$ est donc $F(x) = -\cos(x) + 1$.

II. Intégrales et primitives :

Propriété :

Si f est une fonction continue sur un intervalle I, alors pour tous réels a et b dans I, on a : $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$ où F est une primitive de f sur I.

Preuve :

Nous avons vu que $\varphi : x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est une primitive de f. $\varphi(b) - \varphi(a) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$. De plus, nous avons vu que les primitives de f différent entre elles d'une constante, donc quelle que soit F une autre primitive de f, $F = \varphi + k$ où k est un réel.

Donc $F(b) - F(a) = (\varphi(b) + \mathrm{k}) - (\varphi(a) + \mathrm{k}) = \varphi(b) - \varphi(a) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

Nous avons donc bien $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$ quelle que soit F primitive de f.

Remarque :

On note aussi $F(b) - F(a) = [F(t)]_a^b$ qui se lit : « $F(t)$ pris entre a et b ».

Exemples :

$$\int_0^4 t+4\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^2}{2}+4t\right]_0^4 = \frac{4^2}{2}+4\times 4-\frac{0^2}{2}-4\times 0 = 24$$

$$\int_2^{-1} 3x^3\,\mathrm{d}x = \left[\frac{3}{4}x^4\right]_2^{-1} = \frac{3}{4}(-1)^4-\frac{3}{4}(2)^4 = \frac{3}{4}-\frac{3}{4}\times 16 = -\frac{45}{4}$$

III. Formulaires :

1°) Tableau des primitives usuelles :

On déduit du tableau des dérivées usuelles le tableau suivant :

Fonction f	***Une primitive F***
$f(x) = k$ (constante)	$F(x) = kx$
$f(x) = x$	$F(x) = \frac{1}{2}x^2$
$f(x) = x^2$	$F(x) = \frac{1}{3}x^3$
$f(x) = x^n$ ($n \in \mathbb{N}$)	$F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$
$f(x) = \frac{1}{x^n}$ ($n \in \mathbb{N}$, $n > 1$)	$F(x) = -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln x$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x}$
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x$
$f(x) = \cos(x)$	$F(x) = \sin(x)$
$f(x) = \sin(x)$	$F(x) = -\cos(x)$

Ces deux lignes peuvent se résumer en une seule :

Fonction f	***Une primitive F***
$f(x) = x^n$ ($n \in \mathbb{Z}\backslash\{-1\}$)	$F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$

Attention toutefois au domaine de définition, si $n \leqslant -2$, f et F ne sont définies que sur $\mathbb{R}^*$.

2°) Primitives de fonctions composées usuelles :

On déduit des dérivées des fonctions composées usuelles le tableau suivant :

Si f est de la forme …	**avec u dérivable sur I telle que …**	**alors une primitive F est de la forme …**
$u^n u'$ ($n \in \mathbb{Z}\backslash\{-1\}$)	u ne s'annule pas sur I quand n $\leqslant -2$	$\frac{1}{n+1}u^{n+1}$
$\frac{u'}{u^2}$	u ne s'annule pas sur I	$-\frac{1}{u}$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$u > 0$ sur I	$2\sqrt{u}$
$\frac{u'}{u}$	(i) $u > 0$ sur I (ii) $u < 0$ sur I	**(i) ln u** **(ii) ln $(-u)$** **Dans tous les cas ln $\|u\|$**
$u' e^u$		e^u
$u' \sin(u)$		$-\cos(u)$
$u' \cos(u)$		$\sin(u)$

III. Intégration par parties :

Propriété :

Si u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I ($a \in I$, $b \in I$), telles que u' et v' soient continues sur I, alors :

$$\int_a^b u(t)\times v'(t)\,\mathrm{d}t = [u(t)\times v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)\times v(t)\,\mathrm{d}t$$

Preuve :

D'après la formule : $(uv)' = u'v + uv'$ donc : $uv' = (uv)' - u'v$

En intégrant terme à terme : $\int_a^b u(t)\times v'(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \left(u(t)\times v(t)\right)'\,\mathrm{d}t - \int_a^b u'(t)\times v(t)\,\mathrm{d}t$

Remarque :

On n'utilise cette méthode de calcul que lorsque la primitive de $u'v$ est plus facile à trouver que celle de uv'.

Exemple :

$\int_0^\pi t\sin t\,\mathrm{d}t = \int_a^b u(t)\times v'(t)\,\mathrm{d}t$ avec $u(t) = t$ et $v'(t) = \sin t$; donc $u'(t) = 1$ et $v(t) = -\cos t$.

On a donc $\int_0^\pi t\sin t\,\mathrm{d}t = \int_0^\pi u(t)\times v'(t)\,\mathrm{d}t = [u(t)\times v(t)]_0^\pi - \int_0^\pi u'(t)\times v(t)\,\mathrm{d}t$

$$= [-t\times\cos t]_0^\pi - \int_0^\pi -\cos t\,\mathrm{d}t$$

$$= [-t\times\cos t]_0^\pi + \int_0^\pi \cos t\,\mathrm{d}t$$

$$= [-t\times\cos t]_0^\pi + [\sin t]_0^\pi$$

$$= -\pi\cos\pi + 0\times\cos 0 + \sin\pi - \sin 0 = \pi$$

IV. Applications :

1°) Aire d'un domaine compris entre deux courbes :

Soient f et g deux fonctions continues telles que $f(x) \leqslant g(x)$ sur l'intervalle $[a ; b]$.

L'aire algébrique du domaine délimité par les courbes C_f et C_g et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est $A = \int_a^b \left(g(x) - f(x)\right) dx$.

2°) Calcul de volumes :

Dans l'espace muni du repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, l'unité de volume est le volume du pavé droit construit à partir des points O, I, J et K avec $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$, $\overrightarrow{OJ} = \vec{j}$ et $\overrightarrow{OK} = \vec{k}$. Soit Σ un solide limité par les plans d'équations $z = a$ et $z = b$ avec $a < b$.

Si l'intersection de Σ avec un plan de côte z est une surface dont l'aire est donnée par $S(z)$, alors le volume de Σ est $V = \int_a^b S(z) dz$.