Cordes Vibrantes

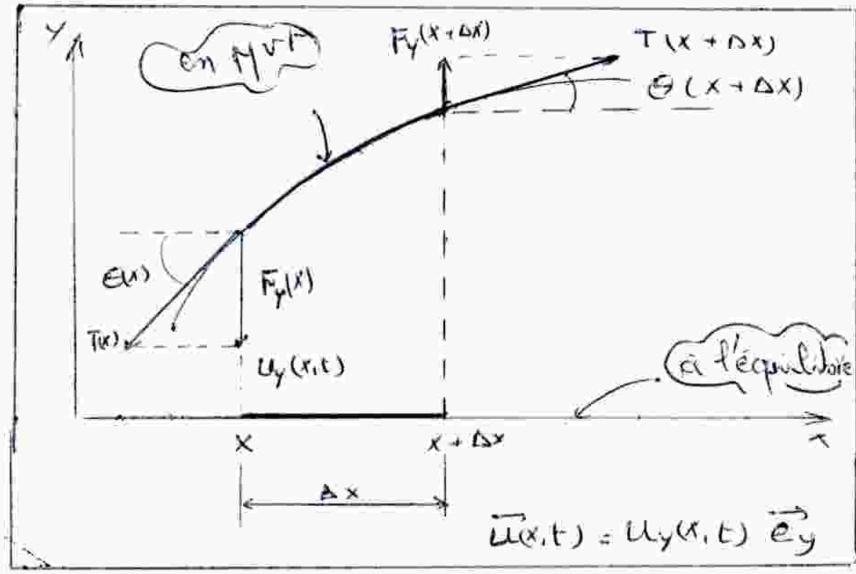
Equation de propagation

Considérons une corde tendue, rectiligne selon la coordonnée x, et de longueur infinie. Nous allons étudier la propagation d'un faible ébranlement le long de la corde. Supposons que cet ébranlement se produise suivant l'axe oy.

Hypothèses

1- Corde homogène de masse linéaire μ.
2- Tension T constante le long de la corde.
3- Oscillations de faible amplitude.
4- Vibrations transversales à polarisation rectiligne.

Equation de propagation



Solution générale de l'équation de l'ondes à une dimension.

$$u(x,t) = F\left(t - \frac{x}{v}\right) + G\left(t + \frac{x}{v}\right)$$

La solution est la somme

1- d'une onde qui se propage sans déformation dans le sens des x positifs :

$$F\left(t - \frac{x}{v}\right)$$

2- d'une onde qui se propage sans déformation dans le sens des x négatifs :

$$G\left(t + \frac{x}{v}\right)$$

Ondes progressives harmoniques

Elle est définie par :

$$u_y(x,t) = U_0 e^{j(\omega t - kx)}$$

où k est le module du vecteur d'onde

La vitesse de particules est :

$$\dot{u}_y(x,t) = \frac{\partial u_y}{\partial t} = j\omega u_y$$

$$= j\omega U_0 e^{j(\omega t - kx)}$$

Impédance

Force en un point.

La projection selon Oy de la force exercée par la partie gauche de la corde sur la partie droite.

$$F_y = -T \frac{\partial u_y}{\partial x}$$

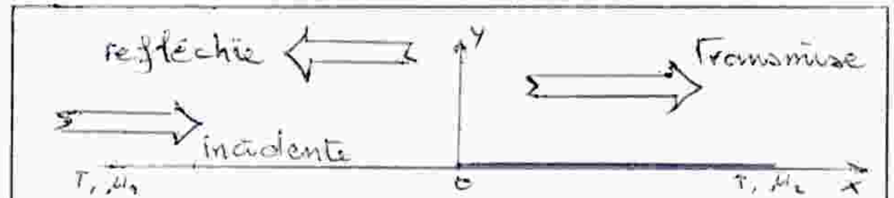
On définit l'impédance en un point par $Z(x) = \dfrac{F_y}{\dot{u}_y}$ où F_y et $\dot{u}_y$ sont exprimées en notation complexe

Dans le cas d'une onde progressive

$$Z(x) = \sqrt{\mu T} \quad \forall x$$

$$Z_0 = \sqrt{\mu T} = \mu V \quad \text{. Impédance caractéristique.}$$

Reflexion et Transmission entre deux cordes semi-infinies



$V_1 = \sqrt{T/\mu_1}$ $\qquad$ $V_2 = \sqrt{T/\mu_2}$

$Z_1 = \sqrt{\mu_1 T}$ $\qquad$ $Z_2 = \sqrt{\mu_2 T}$

Calcul des coefficients de reflexion et de transmission

Corde 1 : $x \leq 0$

$$u_1(x,t) = U_i e^{j(\omega t - k_1 x)} + U_R e^{j(\omega t + k_1 x)}$$

$$F_1(x,t) = -\frac{\partial u_1}{\partial x} =$$

$$= j k_1 T \left[U_i e^{j(\omega t - k_1 x)} - U_R e^{j(\omega t + k_1 x)}\right.$$

Corde 2 : $x \geq 0$

$$u_2(x,t) = U_T\, e^{j(\omega t - k_2 x)}$$

$$F_2(x,t) = -T \frac{\partial u_2}{\partial x} = j k_2 T U_T\, e^{j(\omega t - k_2 x)}$$

Relations de continuité à l'interface $x = 0$

Continuité du déplacement :

$$u_1(0,t) = u_2(0,t) \quad \forall t$$

$$\Rightarrow U_i + U_R = U_T$$

Continuité de la force :

$$F_1(0,t) = F_2(0,t) \quad \forall t$$

$$\Rightarrow Z_1(U_i - U_R) = Z_2 U_T$$

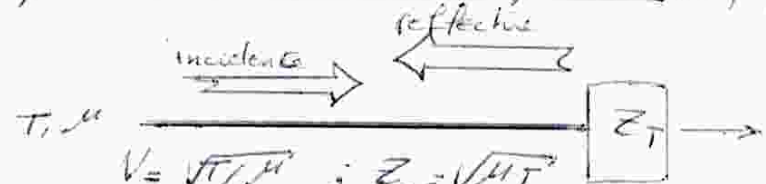
$$\begin{cases} 1 + \rho = \tau \\ 1 - \rho = \dfrac{Z_2}{Z_1}\tau \end{cases} \quad \text{avec} \quad \rho = \frac{U_R}{U_i}, \quad \tau = \frac{U_T}{U_i}$$

Coefficients de réflexion et de transmission

$$\rho = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{\sqrt{\mu_1} - \sqrt{\mu_2}}{\sqrt{\mu_1} + \sqrt{\mu_2}}$$

$$\tau = \frac{2 Z_1}{Z_1 + Z_2} = \frac{2\sqrt{\mu_1}}{\sqrt{\mu_1} + \sqrt{\mu_2}}$$

Réflexion sur une impédance qcq



$$V = \sqrt{T/\mu} \; ; \; Z_c = \sqrt{\mu T}$$

Calcul du coefficient de réflexion

$$u(x,t) = U_i\, e^{j(\omega t - kx)} + U_R\, e^{j(\omega t + kx)}$$

$$\dot{u} = \frac{\partial u}{\partial t} = i\omega\left[U_i\, e^{i(\omega t - kx)} + U_R\, e^{i(\omega t + kx)}\right]$$

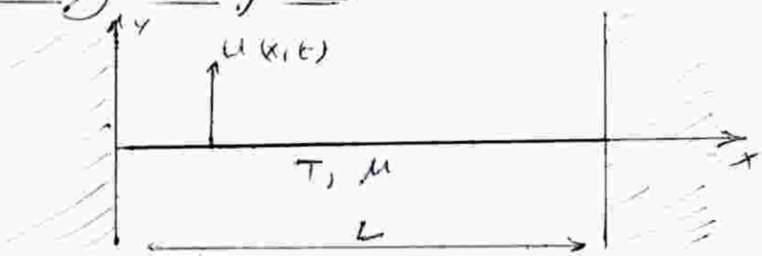
$$F = -T\frac{\partial u}{\partial x} = ikT\left[U_i\, e^{i(\omega t - kx)} - U_R\, e^{i(\omega t + kx)}\right]$$

En $x = 0$, les conditions aux limites s'écrivent : $Z_T = \dfrac{F(0,t)}{\dot{u}(0,t)}$

$$\Rightarrow \rho = \frac{U_R}{U_i} = \frac{Z_c - Z_T}{Z_c + Z_T}$$

c'est le coefficient de réflexion.

Oscillations libres d'une corde de longueur finie.



Soit une corde de longueur L, de masse linéique μ, tendue horizontalement entre deux bâtis fixes avec une tension T

Conditions initiales:

- la forme initiale de la corde : $U(x,0) = U_0(x)$
- la vitesse initiale de la corde : $\dot{U}(x,0) = V_0(x)$

Problème : Trouver $U(x,t)$

Formulation du problème

$U(x,t)$ est solution de l'équation aux dérivées partielles :
$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{1}{V^2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0$$

$U(x,t)$ doit satisfaire les conditions aux limites :
$$\begin{cases} U(0,t) = 0 \\ U(L,t) = 0 \end{cases}$$

et les conditions initiales
$$\begin{cases} U(x,0) = U_0(x) \\ \dot{U}(x,0) = V_0(x) \end{cases}$$

Résolution par la méthode de Fourier (dite de séparation des variables)

Recherchons une solution de l'équation d'onde sous la forme : $U(x,t) = g(x) f(x)$

En remplaçant dans l'équation de propagation, on obtient :
$$\frac{1}{g}\frac{d^2 g}{dx^2} = \frac{1}{V^2}\frac{1}{f}\frac{d^2 f}{dt^2}$$

Méthode de Fourier (2)

$$\frac{1}{g}\frac{d^2 g}{dx^2} = \frac{1}{V^2}\frac{1}{f}\frac{d^2 f}{dt^2}$$

Le mbre de gauche de cette équation ne dépend que de x, tandis que le membre de droite ne dépend que de t. Les deux expressions sont donc égales à une cte qui doit être un nombre réel négatif que nous posons égal à $-K^2$ car la solution ne doit pas tendre vers l'infini lorsque t tend vers l'infini.

Méthode de Fourier (3)

Posons $\omega = KV$. On en déduit que :

$$\frac{d^2 g}{dx^2} = -K^2 g \quad ; \quad \frac{d^2 f}{dt^2} = -\omega^2 f$$

Les solutions de ces deux équations différentielles sont de la forme :

$$f = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$$

$$g = C\cos(kx) + D\sin(kx)$$

Méthode de Fourier (4)

La solution de l'équation d'onde peut alors s'écrire sous la forme :

$$u(x,t) = [A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)] \times [C\cos(kx) + D\sin(kx)]$$

Conditions aux limites en $x=0$: $u(0,t)=0$

$u(0,t) = [A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)]C = 0 \quad \forall t \Rightarrow C=0$

D'où $u(x,t) = [a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)]\sin(kx)$

Méthode de Fourier (5)

$u(x,t) = [a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)]\sin(kx)$

Condition aux limites en $x=L$: $u(L,t)=0$

$u(L,t) = [a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)]\sin(KL) \ldots \forall t$

$\sin(KL) = 0 \Rightarrow KL = n\pi$

$K_n = \frac{n\pi}{L}$ et $\omega_n = n\frac{\pi V}{L}$

ω_n : pulsations propres

Méthode de Fourier (6)

La solution de l'équation d'onde qui satisfait ces conditions aux limites est donc la somme d'une infinité de termes :

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} [a_n\cos(\omega_n t) + b_n\sin(\omega_n t)]\sin(k_n x)$$

avec : $k_n = n\frac{\pi}{L}$ et $\omega_n = k_n V = n\frac{\pi V}{L}$

Les coefficients a_n et b_n sont déterminés par les conditions initiales du mvt

Méthode de Fourier (7)

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} [a_n\cos(\omega_n t) + b_n\sin(\omega_n t)]\sin(k_n x)$$

Conditions initiales:

1- forme initiales : $u(x,0) = U_0(x)$

2- vitesse initiales : $\dot{u}(x,0) = V_0(x)$

$$U_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sin(k_n x)$$

$$V_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} -\omega_n b_n \sin(k_n x)$$

Méthode de Fourier (8)

Calcul des a_n :

$$U_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sin(k_n x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sin\left(n\frac{\pi x}{L}\right)$$

$$U_0(x) \sin\left(m\frac{\pi x}{L}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sin\left(n\frac{\pi x}{L}\right) \sin\left(m\frac{\pi x}{L}\right)$$

$$\int_0^L U_0(x) \sin\left(m\frac{\pi x}{L}\right) dx = \int_0 \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sin\left(n\frac{\pi x}{L}\right) \times \sin\left(m\frac{\pi x}{L}\right) dx$$

Méthode de Fourier (9)

$$\int_0^L U_0(x) \sin\left(m\frac{\pi x}{L}\right) dx = \int_0^L \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sin\left(n\frac{\pi x}{L}\right) \times \sin\left(m\frac{\pi x}{L}\right) dx$$

$$\int_0^L U_0(x) \sin\left(m\frac{\pi x}{L}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^L \sin\left(n\frac{\pi x}{L}\right) \sin\left(m\frac{\pi x}{L}\right) dx$$

$$\int_0^L \sin\left(n\frac{\pi x}{L}\right) \sin\left(m\frac{\pi x}{L}\right) dx = \begin{cases} L/2 & \text{si } m = n \\ 0 & \text{si } m \neq n \end{cases}$$

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L U_0(x) \sin\left(n\frac{\pi x}{L}\right) dx$$

Méthode de Fourier (10)

Calcul des b_n :

$$V_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n b_n \sin\left(n\frac{\pi x}{L}\right)$$

$$b_n = \frac{2}{\omega_n L} \int_0^L V_0(x) \sin\left(n\frac{\pi x}{L}\right) dx$$

Méthode de Fourier (Fin)

$$U(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t)\right] \sin(k_n x)$$

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L U_0(x) \sin\left(n\frac{\pi x}{L}\right) dx$$

$$b_n = \frac{2}{\omega_n L} \int_0^L V_0(x) \sin\left(n\frac{\pi x}{L}\right) dx$$