Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université de Relizane

Faculté des Sciences et de la Technologie

Département de MI	Session : Normale
Année universitaire:2023-2024	Date : ....
Enseignant : A. Beddani	Durée : 1h30
Module : Analyse 1	Niveau : 1 ère année MI

Exercice 1:

1) Montrer que $\alpha = \sqrt{7+4\sqrt{3}} + \sqrt{7-4\sqrt{3}}$ est un nombre entier.

2).Si a et b sont des réels strictement positifs, montrer que $\dfrac{1}{\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}} \leq 1$.

Exercice 2:

1) Calculer le module et l'argument du nombre complexe $z_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)^{1000}$.

2) Déterminer les racines cubiques de :$z_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$.

Exercice 3:

Peut-on prolonger par continuité sur $\mathbb{R}$ les fonctions suivantes:

1) $f(x) = \sin x \sin \frac{1}{x}$ 2) $g(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2}$ 3) $h(x) = \frac{1}{x} \ln\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)$.

Exercice 4:

On considère la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \dfrac{7U_n+4}{3U_n+3}, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1.Montrerque:$0 \leq U_n \leq 2; \forall n \in \mathbb{N}$.

2. Etudier la monotonie de $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3.Déduire que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente puis calculer sa limite.

Bon courage

Correction

Exercice 1:

1) Montrons que $\alpha = \sqrt{7+4\sqrt{3}} + \sqrt{7-4\sqrt{3}}$ est un nombre entier.

On a

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{7+4\sqrt{3}}+\sqrt{7-4\sqrt{3}}\right)^2 &= 7+4\sqrt{3}+7-4\sqrt{3}-2+2\left(\sqrt{7+4\sqrt{3}}\sqrt{7-4\sqrt{3}}\right)\\ &= 14+2\sqrt{49-48} \qquad \text{.............} (2,5pts)\\ &= 16\end{aligned}$$

donc $\alpha = 4$.

2) Si a et b sont des réels strictement positifs, montrons que $\dfrac{1}{\frac{b}{a}+\frac{a}{b}} \leq 1$.

$$\begin{aligned}\frac{1}{\frac{b}{a}+\frac{a}{b}} \leq 1 \quad &\Longleftrightarrow ab \leq a^2+b^2 \\ &\Longleftrightarrow 0 \leq a^2+b^2-ab \qquad \text{.............} (2,5pts)\\ &\Longleftrightarrow 0 \leq (a-b)^2 \leq a^2+b^2-ab \text{ est vraie.}\end{aligned}$$

Exercice 2:

1) On a:

$$\begin{aligned}(1+i) &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\\ \text{donc } \left|\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}\right| &= 1 \text{ et} \arg\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{4} \ \ [2\pi] \text{.........} (1pts)\\ \text{alors } (1+i) &= e^{i\frac{\pi}{4}} \text{.........} (0.5pts)\\ \text{d'où } z_1 &= e^{i250\pi} = 1 \text{..........} (0.5pts)\\ \text{alors } |z| &= 1 \text{ et } \arg(z) = 0 \ \ [2\pi] \text{..........} (0.5pts)\end{aligned}$$

2) Déterminer les racines cubiques de:

$$z = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$$

On a

$$|z| = 1$$

et

$$\begin{aligned} z &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} i\right) \\ &= \left(\sin\frac{\pi}{4} + i\cos\frac{\pi}{4}\right) \text{..............} (0.5pts) \end{aligned}$$

Une racine cubique de z est: $z_0 = e^{i\frac{\pi}{12}} = e^{i\frac{\pi}{12}}$.............. $(0.5pts)$

d'où les racines cubiques de z :

$$\begin{aligned} z_k &= z_0.u_k \\ &= e^{i\frac{\pi}{12}} \cdot e^{i\frac{2k\pi}{3}} \\ &= e^{i\left(\frac{\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3}\right)} \\ \text{avec } k &= \{0,1,2\} \text{.................} (1.5pts) \end{aligned}$$

Exercice 3:

1. 1) $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ et $f\ (x) = \sin x\ \sin\frac{1}{x}$

$$\lim_{x\to 0}\ f(x) = \lim_{x\to 0} \sin x \sin\frac{1}{x} = 0 \text{ car } \lim_{x\to 0} \sin x = 0 \text{ et } -1 \leq \sin\frac{1}{x} \leq 1 \text{.............} (1pts)$$

Alors le prolongement par continuité sur $\mathbb{R}$ existe et il est de la forme:

$$\begin{aligned} F &: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x &\mapsto F(x) = \begin{cases} \sin x \sin\frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \text{.......} (1pts) \end{aligned}$$

2) $g : \mathbb{R} - \{1, -1\} \to \mathbb{R}$

$$\lim_{x\to -1}\ g(x) = \lim_{x\to -1} \frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2} = -\infty \text{.............} (0.5pts)$$

Alors le prolongement par continuité n'existe pas...................$(0.5pts)$

3) $h:\mathbb{R}^{*}\to\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} h(x) &= \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\left(\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}\right)-\ln\left(\frac{e^{0}+e^{-0}}{2}\right)}{x-0}\\ &= \left(\frac{e^{0}-e^{-0}}{2}\right)=0 \text{ car: } \left(\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}\right)'=\left(\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}\right)\text{.............}(1pts)\end{aligned}$$

Alors le prolongement par continuité sur $\mathbb{R}$ existe et il est de la forme:

$$\begin{aligned} H &: \mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x &\mapsto H(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}\ln\left(\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}\right) & \text{si } x\neq 0\\ 0 \text{ si } x=0\end{cases}\quad\text{...........}(1pts)\end{aligned}$$

Exercice 4:

1. Par récurrence:

pour $n=0$: on a $0\leq U_0\leq 2$.................... $(0,5)$

On suppose que $0\leq U_n\leq 2$,

d'ou: $U_n\geq 0\Rightarrow\dfrac{7U_n+4}{3U_n+3}\geq 0$.................. $(0.5pts)$

Et

$$\begin{aligned}U_n\leq 2 &\Leftrightarrow 7Un+4\leq 6+6Un\\ &\Leftrightarrow\frac{7U_n+4}{3U_n+3}\leq 2,\end{aligned}\quad\text{..................}(1pts)$$

donc $0\leq U_{n+1}\leq 2$

Et par conséquent : $0\leq U_n\leq 2,\forall n\in\mathbb{N}$.

2. La monotonie de $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$\begin{aligned}U_{n+1}-U_n &= \frac{7U_n+4}{3U_n+3}-U_n\\ &= \frac{4U_n+4-3(U_n)^2}{3U_n+3}\\ &= \frac{(2+3U_n)(2-U_n)}{3U_n+3}\text{..............}(1pts)\end{aligned}$$

commeona $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq Un \leq 2$,

alors $(2+3Un)(2-Un) \geq 0$............... (0.5)

et ona aussi $3Un+3>0$..................... (0.5)

donc$(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

$(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante et majorée alors elle est convergente vers sa borne supèrieure.

Posons $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = l$

et $U_{n+1} = \dfrac{7U_n+4}{3U_n+3}, \forall n \in \mathbb{N}$............................. $(0.25pts)$

donc $l = \frac{7l+4}{3l+3}$ alors $l=2$ ou $l=-\frac{2}{3}$............................. $(0.5pts)$

comme $U_n \geq 0$ alors $l=2$.............................. $(0.25pts)$