الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
Université Abou Bekr Belkaid
Tlemcen Algérie
جامعة أبي بكر بلقايد
تلمسان الجزائر

***Faculté des sciences – Département de Mathématiques.***

***Module : Algèbre 1 / EPREUVE FINALE (examen de remplacement).***

***1ère Année MI 2021-2022. (Durée : 1H30 mn).***

N.B. L'USAGE DE LA CALCULATRICE EST STRICTEMENT INTERDIT.

## *EXERCICE 01 :* (07 POINTS)

Soit $\Phi$ une relation binaire définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$(x, y)\ \Phi\ (x', y') \Leftrightarrow (x < x')\ ou\ (x = x' et\ y \leq y')\ .$$

**Remarque :** ***Ecrire les définitions pour chaque réponse.***

**(1)** **(2.5 points)** Montrer que $\Phi$ est une relation d'ordre.

**(2)** **(1.5 point)** Cet ordre est-il total ?

**(3)** **(3 points)** Soit l'ensemble $A = (\{(-4,3); (1,2)\}$. Déterminer s'ils existent, l'ensemble des majorants, l'ensemble des minorants, $supA, inf A, maxA\ et\ minA$ pour l'ordre $\Phi$.

## *EXERCICE 02 :* (03 POINTS)

On définit dans $\mathbb{R}^*$ la relation d'équivalence $\Re$ par :

$$x\ \Re\ y\ \Leftrightarrow x^2 - \frac{1}{x^2} = y^2 - \frac{1}{y^2}.$$

**(1)** **(2 points)** Déterminer la classe d'équivalence de $\beta \in \mathbb{R}^*$.

**(2)** **(1 point)** Déterminer l'ensemble quotient.

***EXERCICE 03 :*** **(04 POINTS)** Soit $f$ une application définie de

$]-\infty,-\sqrt{2}[\cup]\sqrt{2},+\infty[$ vers $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\frac{4x}{\sqrt{x^2-2}}$$

En utilisant la méthode de la définition (pour la 1ère question).

**(1)** **(1 point + 1 point)** $f$ est-elle injective ? Surjective ? Justifier.

**(2)** **(2 points)** Indiquer d'après la première question les cas les plus généraux où la fonction est bijective et donner la fonction inverse. (Vous pouvez ici utiliser le tableau des variations).

***EXERCICE 04 :*** **(06 POINTS)** Soit $f$ définie par :

$$f:E\rightarrow\mathbb{R}$$

$$x\mapsto f(x)=\frac{x+2}{\sqrt{x^2+2x-3}}.$$

**(1)** **(0.75 point)** Trouver $E$ pour que $f$ soit une application (N'oubliez pas d'écrire la définition d'une application).

**(2)** **(2 points)** Calculer la dérivée et tracer le tableau des variations de la fonction $f$.

**(3)** **(1.5 point)** $f$ est-elle injective ? Surjective ? Justifier.

**(4)** **(0.75 point)** Soit $g$ une application définie par :

$$g:H\rightarrow K$$

$$x\mapsto g(x)=\frac{x+2}{\sqrt{x^2+2x-3}}.$$

Donner un cas (des intervalles $H$ $et$ $K$) à partir du tableau des variations où $g$ est bijective (Justifier votre réponse).

**(5)** **(1 point)** Trouver dans ce cas l'application inverse.

BON COURAGE

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

Université Abou Bekr Belkaid — جامعة أبي بكر بلقايد
Tlemcen Algérie — تلمسان الجزائر

**Epreuve Finale Algèbre 1 - MI - 2021-2022. Durée : 1H30mn.**

Exercice 01 : (7 points) On définit dans $\mathbb{R}^2$ la relation d'ordre $\Phi$ par :

$$(x,y)\,\Phi\,(x',y') \Leftrightarrow (x<x') \text{ ou } (x=x' \text{ et } y\Phi y').$$

(1) Montrer que $\Phi$ est une relation d'ordre.

(2) L'ordre est-il total ? Justifer.

(3) Soit $A=\{(-4,3),(1,2)\}$ ,Déterminer, s'ils existent, l'ensemble des majorants, l'ensemble des minorants, $\sup A$, $\inf A$, $\max A$ et $\min A$ pour l'ordre $\Phi$.

*__Solution :__* Soit dans $\mathbb{R}^2$ la relation d'ordre définie par :

$$(x,y)\,\Phi\,(x',y') \Leftrightarrow (x<x') \text{ ou } (x=x'\text{et } y\leq y').$$

(1) Montrons que $\Phi$ est une relation d'ordre.

a) $\Phi$ est-elle réflexive **? (0.25+0.25 point)**

$\Phi$ est réflexive $\Leftrightarrow \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2, (x,y)\,\Phi\,(x,y)$.

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \underbrace{\underbrace{(x<x)}_{\text{Fausse}} \text{ ou } \underbrace{(x=x \text{ et } y\leq y)}_{\text{Vraie}}}_{\text{Vraie}} \Rightarrow (x,y)\,\Phi\,(x,y)$$
$$\Rightarrow \Phi \text{ est réflexive.}$$

b) $\Phi$ est-elle antisymétrique **? (0.25+0.75 point)**

$\Phi$ est antisymétrique $\Leftrightarrow \forall (x,y),(x',y')\in\mathbb{R}^2,$

$$[(x,y)\,\Phi\,(x',y') \text{ et } (x',y')\,\Phi\,(x,y)] \Rightarrow (x,y)=(x',y').$$

Soient $(x,y),(x',y')\in\mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned}
& (x,y)\,\Phi\,(x',y') \text{ et } (x',y')\,\Phi\,(x,y)\,,\\
\Rightarrow\ & (x<x') \text{ ou } (x=x'\text{et } y\leq y') \text{ et } (x'<x) \text{ ou } (x'=x \text{ et } y'\leq y)\\
\Rightarrow\ & \left\{\begin{array}{l} (x<x') \text{ et } (x'<x) \text{ (impossible)}\\ \text{ ou } (x<x') \text{ et } (x'=x \text{ et } y'\leq y) \text{ (impossible)}\\ \text{ou } (x=x'\text{et } y\leq y') \text{ et } (x'<x) \text{ (impossible)}\\ \text{ ou } (x=x'\text{et } y\leq y') \text{ et } (x'=x \text{ et } y'\leq y)\end{array}\right.\\
\Rightarrow\ & x=x'\text{et } y=y'\\
\Rightarrow\ & (x,y)=(x',y')\,,\\
\Rightarrow\ & \Phi \text{ est antisymétrique.}
\end{aligned}$$

c) $\Phi$ est-elle transitive ? **(0.25+0.75 point)**

$\Phi$ est transitive $\Leftrightarrow\forall(x,y),(x',y'),(x'',y'')\in\mathbb{R}^2$,

$$(x,y)\,\Phi\,(x',y') \text{ et } (x',y')\,\Phi\,(x'',y'')\Rightarrow(x,y)\,\Phi\,(x'',y'')\,.$$

Soient $(x,y),(x',y'),(x'',y'')\in\mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned}
& (x,y)\,\Phi\,(x',y') \text{ et } (x',y')\,\Phi\,(x'',y'')\,,\\
\Rightarrow\ & [(x<x') \text{ ou } (x=x'\text{et } y\leq y')] \text{ et } [(x'<x'') \text{ ou } (x'=x''\text{et } y'\leq y'')]\,,\\
\Rightarrow\ & \left\{\begin{array}{l} (x<x') \text{ et } (x'<x') \ \Rightarrow(x<x'')\\ \text{ ou } (x<x') \text{ et } (x'=x''\text{et } y'\leq y'')\Rightarrow(x<x'')\\ \text{ou } (x=x'\text{et } y\leq y') \text{ et } (x'<x'')\Rightarrow(x<x'')\\ \text{ ou } (x=x'\text{et } y\leq y') \text{ et } (x'=x'' \text{ et } y'\leq y'')\Rightarrow(x=x'' \text{ et } y\leq y'')\end{array}\right.\\
\Rightarrow\ & (x<x'') \text{ ou } (x=x'' \text{ et } y\leq y'')\,,\\
\Rightarrow\ & (x,y)\,\Phi\,(x'',y'')\Rightarrow\ \Phi \text{ est transitive.}
\end{aligned}$$

conclusion : $\Phi$ est une relation d'ordre car elle est réflexive, antisymétrique et transitive.

(2) L'ordre est total si et seulement si :

$\forall(x,y),(x',y')\in\mathbb{R}^2$ on a : $(x,y)\,\Phi\,(x',y')$ ou $(x',y')\,\Phi\,(x,y)$. **(0.5 point)**

Soient $(x,y),(x',y')\in\mathbb{R}^2$ on a :

$$\begin{aligned}
& [x<x'\text{ou } (x=x' \text{ et } y\leq y')] \text{ ou } [x'<x \text{ ou } (x'=x \text{ et } y'\leq y)]\,,\\
& \Rightarrow(x,y)\,\Phi\,(x',y') \text{ ou } (x',y')\,\Phi\,(x,y)\,,\textbf{(0.75 point)}
\end{aligned}$$

ce qui donne que l'ordre est total.**(0.25 point)**

(2)

Puisque l'ordre est total, alors pour les éléments de $A$ :

$(-4,3)\,\Phi\,(1,2)\,,$
$\Rightarrow \sup A = \max A = (1,2)$ et $\inf A = \min A = (-4,3)\,.$ **(4 × 0.25 point)**

a) Pour les majorants : $(M_1, M_2)$ est un majorants $\Leftrightarrow$

$$\forall\,(x,y) \in A, (x,y)\,\Phi\,(M_1,M_2)\,, \textbf{(0.25 point)}$$

donc :

$$\begin{cases} (-4,3)\,\Phi\,(M_1,M_2) \Leftrightarrow (-4 < M_1) \text{ ou } (-4 = M_1 \text{ et } 3 \le M_2) \\ \text{et} \\ (1,2)\,\Phi\,(M_1,M_2) \Leftrightarrow (1 < M_1) \text{ ou } (1 = M_1 \text{ et } 2 \le M_2) \end{cases}$$

Conclusion : l'ensemble des majorants est :

$$\{(M_1,M_2)\,/\,(1 < M_1) \text{ ou } (1 = M_1 \text{ et } 2 \le M_2)\}\,.\textbf{(0.75 point)}$$

b) Pour l'ensemble de minorants :
$(m_1,m_2)$ est un minorant de $A \Leftrightarrow \forall\,(x,y) \in A, (m_1,m_2)\,\Phi\,(x,y)\,,$**(0.25 point)**
Donc :

$$\begin{cases} (m_1,m_2)\,\Phi\,(-4,3) \Leftrightarrow (m_1 < -4) \text{ ou } (m_1 = -4 \text{ et } m_2 \le 3)\,, \\ (m_1,m_2)\,\Phi\,(1,2) \Leftrightarrow (m_1 < 1) \text{ ou } (m_1 = 1 \text{ et } m_2 \le 2)\,, \end{cases}$$

Conclusion : l'ensemble des minorants est :

$$\{(m_1,m_2)\,/\,(m_1 < 1) \text{ ou } (m_1 = -4 \text{ et } m_2 \le 3)\}\,.\textbf{(0.75 point)}$$

Exercice 02 : (3 points) On définit dans $\mathbb{R}^*$ la relation $\Re$ par :

$$x \Re y \Longleftrightarrow x^2 - \frac{1}{x^2} = y^2 - \frac{1}{y^2}.$$

(1) (2 points) Déterminer la classe d'équivalence de $\beta \in \mathbb{R}^*$.

(2) (1 point) Déterminer l'ensemble quotient.

<u>*Solution :*</u>

(1) Déterminons la classe d'équivalence de $\beta \in \mathbb{R}^*$.

$$cl(\beta) = \{x \in \mathbb{R}^* / x \Re \beta\}\,. \textbf{(0.5 point)}$$

On a :

$$
\begin{aligned}
x\Re\beta &\Leftrightarrow x^2-\frac{1}{x^2}=\beta^2-\frac{1}{\beta^2},\\
&\Rightarrow x^2-\beta^2=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\beta^2}=\frac{\beta^2-x^2}{x^2\beta^2},\\
&\Rightarrow \left(x^2-\beta^2\right)\left(1+\frac{1}{x^2\beta^2}\right)=0,\\
&\Rightarrow x^2-\beta^2=0,\text{ car } 1+\frac{1}{x^2\beta^2}\neq 0,\\
&\Rightarrow x=\pm\beta\Rightarrow cl(\beta)=\{\beta,-\beta\}\,.\ \textbf{(1.5 point)}
\end{aligned}
$$

(2) (1 point) Déterminons l'ensemble quotient (L'ensemble des classes d'équivalences).

$$\Re/\mathbb{R}^*=\underset{\alpha}{\cup}cl(\alpha),\alpha>0=\underset{\alpha}{\cup}cl(\alpha),\alpha<0.$$

Exercice 03 : (4 points) Soit $f$ une application définie de $\left]-\infty,-\sqrt{2}\right[\cup\left]\sqrt{2},+\infty\right[$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$f(x)=\frac{4x}{\sqrt{x^2-2}}.$$

**Utiliser la méthode de la définition.**

(1) (1 + 1 point) $f$ est-elle injective? surjective?

(2) (2 points) Indiquer d'après la première question les cas les plus généraux où la fonction est bijective et donner la fonction inverse (Vous pouvez ici utiliser le tableau des variations).

Solution : Soit $f$ une application définie de $\left]-\infty,-\sqrt{2}\right[\cup\left]\sqrt{2},+\infty\right[$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$f(x)=\frac{4x}{\sqrt{x^2-2}}.$$

(1) $f$ est-elle injective? surjective?

a) $f$ est injective $\Leftrightarrow \forall x_1,x_2\in\mathbb{R}, f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1=x_2$.**(0.25 point)**

Soient $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ :

$$
\begin{aligned}
\frac{4x_1}{\sqrt{x_1^2-2}} &= \frac{4x_2}{\sqrt{x_2^2-2}}\ (x_1 \text{ et } x_2 \text{ ont le même signe})\\
&\Rightarrow \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2-2}}=\frac{x_2}{\sqrt{x_2^2-2}}\Rightarrow\frac{x_1^2}{x_1^2-2}=\frac{x_2^2}{x_2^2-2}\\
&\Rightarrow x_2^2\left(x_1^2-2\right)=x_1^2\left(x_2^2-2\right)\\
&\Rightarrow x_2^2=x_1^2\Rightarrow x_2=x_1 \text{ ou } x_2=-x_1 \text{ (cas qui ne convient pas)}\\
&\Rightarrow x_1=x_2\Rightarrow\ f \text{ est injective.}\textbf{(0.75 point)}
\end{aligned}
$$

b) $f$ est surjective $\Leftrightarrow \forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}$ tel que : $f(x) = y$.**(0.25 point)**

$$\begin{aligned} \text{Pour } y &= 0, \forall x \in \left]-\infty, -\sqrt{2}\right[ \cup \left]\sqrt{2}, +\infty\right[, \ f(x) \neq y \\ &\Rightarrow f \text{ n'est pas surjective } \textbf{(0.75 point)}. \end{aligned}$$

(2) (2 points) Indiquer d'après la première question les cas les plus généraux où la fonction est bijective et donner la fonction inverse (Vous pouvez ici utiliser le tableau des variations).

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{4\sqrt{x^2-2} - \frac{2x}{2\sqrt{x^2-2}}(4x)}{x^2-2} \\ &= \frac{-8}{(x^2-2)\sqrt{x^2-2}} < 0. \end{aligned}$$

| $x$ | $-\infty$ | $-\sqrt{2}$ | | $\sqrt{2}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | | | | $-$ |
| $f(x)$ | $-4 \searrow -\infty$ | | | | $+\infty \searrow 4$ |

(**0.5 point**)

Les cas sont :

**(0.25 point)** (1) $f : \left]-\infty, -\sqrt{2}\right[ \cup \left]\sqrt{2}, +\infty\right[ \to \left]-\infty, -4\right[ \cup \left]4, +\infty\right[$
$x \mapsto f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$.

**(0.25 point)** (2) $f : \left]-\infty, -\sqrt{2}\right[ \to \left]-\infty, -4\right[$
$x \mapsto f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$.

**(0.25 point)** (3) $f : \left]\sqrt{2}, +\infty\right[ \to \left]4, +\infty\right[$
$x \mapsto f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$.

Pour la fonction inverse :

$$\begin{aligned} y &= \frac{4x}{\sqrt{x^2-2}} \Rightarrow y^2 = \frac{16x^2}{x^2-2} \\ &\Rightarrow y^2\left(x^2-2\right) = 16x^2 \\ &\Rightarrow x^2\left(y^2-16\right) = 2y^2 \\ &\Rightarrow x^2 = \frac{2y^2}{y^2-16} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{2y^2}{y^2-16}}, \end{aligned}$$

donc par exemple on a dans le 3ème cas :

$$f^{-1} : \left]4, +\infty\right[ \to \left]\sqrt{2}, +\infty\right[$$
$$x \mapsto \frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{x^2-16}}.\textbf{(0.75 point)}$$

Exercice 04 : (6 points) Soit $f$ une application définie par :

$$\begin{aligned} f &: E \to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = \frac{x+2}{\sqrt{x^2+2x-3}}. \end{aligned}$$

(1) (0.75 point) Trouver $E$ pour que $f$ soit une application (N'oubliez pas d'écrire la définition d'une application).

(2) (2 points) Calculer la dérivée et tracer le tableau des variations de la fonction $f$.

(3) (1.5 point) $f$ est-elle injective? surjective?

(4) (0.75 point) Soit $g$ une application définie par :

$$\begin{aligned} g &: H \to G \\ x &\mapsto g(x) = \frac{x+2}{\sqrt{x^2+2x-3}}. \end{aligned}$$

Donner un cas (des intervalles $H$ et $G$) à partir du tableau des variation où $g$ est bijective (Justifier votre réponse).

(5) (1 point) Trouver dans ce cas l'application inverse.

Solution : Soit $f$ une application définie par :

$$\begin{aligned} f &: E \to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = \frac{x+2}{\sqrt{x^2+2x-3}}. \end{aligned}$$

(1) Trouvons $E$ pour que $f$ soit une application (N'oubliez pas d'écrire la définition d'une application).

$f$ est une application $\Leftrightarrow \forall x \in E, \exists! y \in \mathbb{R}, f(x) = y$.**(0.25 point)**

$$D_f = \left\{x \in \mathbb{R}/x^2+2x-3 > 0\right\} = ]-\infty,-3[\cup]1,+\infty[.\ \textbf{(0.5 point)}$$

(2) Calculer la dérivée et tracer le tableau des variations de la fonction $f$.

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x^2+2x-3} - \frac{(2x+2)}{2\sqrt{x^2+2x-3}} \times (x+2)}{x^2+2x-3} = \frac{-x-5}{(x^2+2x-3)\sqrt{x^2+2x-3}}.\textbf{(0.5 point)}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x\to-\infty} f(x) &= \lim_{x\to-\infty} \frac{x+2}{\sqrt{x^2+2x-3}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x\left(1+\frac{2}{x}\right)}{|x|\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}}} \\ &= \lim_{x\to-\infty} \frac{x\left(1+\frac{2}{x}\right)}{-x\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\left(1+\frac{2}{x}\right)}{-\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}}} = -1.\textbf{(0.25 point)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{x\to+\infty}\frac{x+2}{\sqrt{x^2+2x-3}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1+\frac{2}{x}\right)}{|x|\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}}}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1+\frac{2}{x}\right)}{x\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\left(1+\frac{2}{x}\right)}{\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}}} = 1.\textbf{(0.25 point)}\end{aligned}$$

| x | $-\infty$ $\quad -5$ | $-3$ | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | | $-$ |
| | $\sqrt{3}/2$ | | | $\infty$ |
| | | | | |
| | | | | |
| | $-1$ | $\infty$ | | |

**(1 point)**

(3) (1.5 point) $f$ est-elle injective? surjective?

a) (0.5 point) D'après le tableau des variations :

$$\exists x_1 \in \left]-\infty,-5\right[ \text{ et } x_2 \in \left]-5,-3\right[, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2),$$

donc elle n'est pas injective.

b) D'après le tableau des variations

1) D'après le tableau des variations l'ensemble des images est $\left]-\infty,-1\right[ \cup \left]1,+\infty\right[$, **(0.5 point)** alors $f$ n'est pas surjective car pour :

$$\text{Pour } y = 0, \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq y\ \textbf{(0.5 point)}.$$

(4) (0.75 point) Soit $g$ une application définie par :

$$\begin{aligned} g &: H \to G\\ x &\mapsto g(x) = \frac{x+2}{\sqrt{x^2+2x-3}}.\end{aligned}$$

Donner un cas (des intervalles $H$ et $G$) à partir du tableau des variation où $g$ est bijective (Justifier votre réponse).

Il suffit de prendre par exemple :

$$H = \left]1,+\infty\right[ \text{ et } G = \left]1,+\infty\right[.$$

(5) (1 point) Trouver dans ce cas l'application inverse.

$$\begin{aligned}
y &= \frac{x+2}{\sqrt{x^2+2x-3}} \Rightarrow y^2 = \frac{x^2+4x+4}{x^2+2x-3} \\
&\Rightarrow y^2(x^2+2x-3) = x^2+4x+4 \Rightarrow x^2(y^2-1)+x(2y^2-4)-3y^2-4=0 \\
&\Rightarrow \triangle = (2y^2-4)^2-4(y^2-1)\left(-3y^2-4\right) \\
&= 4y^2\left(4y^2-3\right) > 0 \\
&\Rightarrow x = \frac{-(2y^2-4)+2y\sqrt{(4y^2-3)}}{2\left(y^2-1\right)}.
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\begin{aligned}
g^{-1} &: \;]1,+\infty[ \to ]1,+\infty[ \\
x &\mapsto g^{-1}(x) = \frac{-(2x^2-4)+2x\sqrt{(4x^2-3)}}{2\left(x^2-1\right)}.
\end{aligned}$$