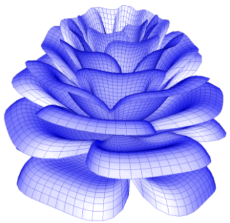
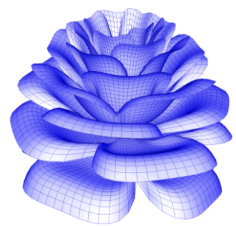
Cours Mathématiques 2



Chapitre 3 : Structures Algébrique



Dr. Imene Medjadj

CHAPITRE 1

Structures Algébriques

1. Lois De Composition Internes

Définition 1.1. *Soit G un ensemble, on appelle loi interne sur G toute application de $G \times G$ dans G, on note souvent une loi interne par $\star$ ou δ.*

Exemple 1.2. (1) *L'addition est une loi interne sur* $\mathbb{R}$

$$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$$

$$(a, b) \longmapsto a + b.$$

(2) *L'application*

$$\star : \mathbb{R} - \{\frac{1}{2}\} \longmapsto \mathbb{R} - \{\frac{1}{2}\}$$
$$(a, b) \longmapsto a + b - 2ab$$

est une loi interne dans $\mathbb{R} - \{\frac{1}{2}\}$, en effet : $\forall a, b \in \mathbb{R} - \{\frac{1}{2}\}$, montrons que $a + b - 2ab \in \mathbb{R} - \{\frac{1}{2}\}$ plus précisement il faut prouver que $a + b - 2ab \neq \frac{1}{2}$ car il est évident que $a + b - 2ab \in R$, on va raisonner par l'absurde on suppose que $a + b - 2ab = \frac{1}{2}$, sachant que $a \neq \frac{1}{2}$, et $b \neq \frac{1}{2}$:

$$a + b - 2ab = \frac{1}{2} \Rightarrow a(1 - 2b) + (b - \frac{1}{2}) = 0 \Rightarrow (\frac{1}{2} - b)(2a - 1) = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{2} \vee b = \frac{1}{2}$$

contradiction, alors ce qu'on a supposé est faux c'est à dire $a + b - 2ab \neq \frac{1}{2}$, d'où $a \star b \in \mathbb{R} - \{\frac{1}{2}\}, \star$ est une loi interne.

Définition 1.3. *Soit G un ensemble et $\star$ une loi interne.*

(1) *$\star$ est dite **commutative** si et seulement si :*

$$\forall x, y \in G, x \star y = y \star x.$$

(2) *$\star$ est dite **associative** si et seulement si :*

$$\forall x, y, z \in G, x \star (y \star z) = (x \star y) \star z.$$

(3) *$\star$ **admet un élement neutre** si et seulement si :*

$$\exists e \in G, \forall x \in G, x \star e = e \star x = x.$$

(4) *Soit $x \in G$ on dit qu'un élément $x' \in G$ est **l'élement symétrique** ou **inverse** de x si et seulement si $x \star x' = x' \star x = e$, où $e \in G$ est l'élément neutre.*

2. Groupes

Définition 2.1. *On appelle groupe un ensemble G muni d'une loi ou opération ineterne $\star$ telle que :*

(1) *$\star$ admet un élément neutre.*

(2) *Tout élément de G admet un élément symétrique dans G.*

(3) *$\star$ est associative.*

Si de plus $\star$ est commutatif, alors $(G, \star)$ est un groupe commutatif ou abélien.

Exemple 2.2. (1) *$(\mathbb{Z}, +)$ est un groupe commutatif.*

(2) *$(\mathrm{I\!R}, \times)$ n'est pas un groupe car 0 n'admet pas d'élément symétrique.*

(3) *$(\mathrm{I\!R}_+^*, \times)$ est un groupe commutatif.*

3. Anneaux

Définition 3.1. *Soit A un ensemble muni de deux lois de composition internes $\star, \delta$, on dit que $(A, \star, \delta)$ est un anneau si :*

(1) *$(A, \star)$ est un groupe commutatif.*

(2) $\forall x, y, z \in A$,

$$x\delta(y \star z) = (x\delta y) \star (x\delta z) \, et \, (x \star y)\delta z = (x\delta z) \star (y\delta z),$$

distributivité à gauche et à droite.

(3) *δ est associative .*

Si de plus δ est commutative, on dit que $(A, \star, \delta)$ est un anneau commutatif.
Si δ admet un élément neutre, on dit que $(A, \star, \delta)$ est un anneau unitaire.

Exemple 3.2. *$(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ est un anneau commutatif et unitaire.*

4. Corps

Définition 4.1. *Soit $\mathrm{I\!K}$ un ensemble munie de deux lois de composition internes $\star, \delta$, on dit que $(\mathrm{I\!K}, \star, \delta)$ est un corps si :*

(1) *$(\mathrm{I\!K}, \star, \delta)$ est un anneau unitaire.*

(2) *$(\mathrm{I\!K} - \{e\}, \delta)$ est un groupe , où e est l'élément neutre de $\star$.*

Si de plus δ est commutative, On dit que $(\mathrm{I\!K}, \star, \delta)$ est un corps commutatif.

Exemple 4.2. *$(\mathrm{I\!R}, +, \cdot)$ est un corps commutatif.*

5. Exercice Corrigé

EXERCICE 1. *Soit $*$ une loi définie sur $\mathbb{R}$ par :*

$$x * y = xy + (x^2-1)(y^2-1)$$

(1) *Vérifier que $*$ est commutative, non associative et admet un élément neutre.*

SOLUTION. (1) *$*$ est commutative si et seulement si :*
$\forall x, y \in \mathbb{R} / x * y = y * x.$

$$x * y = xy + (x^2-1)(y^2-1) = yx + (y^2-1)(x^2-1) = y * x.$$

Car le produit et la somme sont commutatives.

(2) *$*$ est non associative, on suppose que c'est associative c'est à dire :*

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}, (x * y) * z = x * (y * z).$$

$$\begin{array}{rcl} (x*y)*z & = & [xy + (x^2-1)(y^2-1)] * z \\ & = & (xy + (x^2-1)(y^2-1))z + (z^2-1)([xy + (x^2-1)(y^2-1)]^2 - 1) \\ & = & xyz + (x^2-1)(y^2-1)z + (z^2-1)x^2y^2 + 2(z^2-1)(x^2-1)(y^2-1)(xy) \\ & + & (z^2-1)(x^2-1)^2(y^2-1)^2 - (z^2-1)...(1) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} x*(y*z) & = & x * [yz + (y^2-1)(z^2-1)] \\ & = & x(yz + (y^2-1)(z^2-1)) + (x^2-1)([yz + (y^2-1)(z^2-1)]^2 - 1) \\ & = & xyz + x(y^2-1)(z^2-1) + (x^2-1)y^2z^2 + 2(x^2-1)(y^2-1)(z^2-1)(yz) \\ & + & (x^2-1)(y^2-1)^2(z^2-1)^2 - (x^2-1)...(2) \end{array}$$

contradiction $(1) \neq (2)$ d'où $*$ n'est pas associative

(3) *$*$ admet un élément neutre si et seulement si*

$$\exists e \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R} / x * e = e * x = x.$$

On prend juste une seule équation car la loi est commutative.

$$\begin{array}{rcl} \forall x \in \mathbb{R},\ x * e & = & x \\ \forall x \in \mathbb{R},\ xe + (x^2-1)(e^2-1) & = & x \\ \forall x \in \mathbb{R},\ (e-1)(x + (x^2-1)(e+1)) & = & 0 \end{array}$$

Alors on a

$$\begin{cases} e - 1 = 0 \\ \vee \\ \forall x \in \mathbb{R}, x + (e+1)x^2 - (e+1) = 0 \end{cases}$$

On sait qu'un polynôme est nul $\forall x$ si tous ses coefficients sont tous nuls, et comme le coefficient de x est $1 \neq 0$ on déduit que le polynôme ne peut s'annuler, d'où $e = 1$ est vraie. $e = 1$ est l'élément neutre.