

CHAPITRE IV

Oscillations libres des systèmes à plusieurs degrés de liberté

Introduction : Dans ce chapitre, nous examinons les systèmes qui se composent de deux ou plusieurs oscillateurs qui sont couplés dans une certaine façon et qui ont plus d'une pulsation d'oscillation. Nous allons voir que ce couplage produit de nouveaux et d'importants effets physiques. Chacune des pulsations correspondent à une manière différente dans laquelle le système peut osciller. Ces différentes façons sont appelés « modes normaux ». Les modes normaux d'un système sont caractérisés par le fait que toutes les parties du système oscillent avec la même pulsation. Les oscillateurs sont couplés parce qu'ils se trouvent rarement dans un isolement complet et sont généralement capables d'osciller avec de différentes façons. Les oscillateurs couplés sont également importants car ils ouvrent la voie à la compréhension des ondes dans les milieux continus. Le mouvement des ondes dépend des systèmes voisins qui vibrent et qui sont couplées entre elles et peuvent donc transmettre de l'énergie entre elles.

Définition :

Un système est à plusieurs degrés de liberté (ddl) si plusieurs coordonnées indépendantes sont nécessaires pour décrire son mouvement. Il y a autant d'équations de Lagrange que de degrés de liberté ou de coordonnées généralisées.

IV.1 Systèmes à 2 degrés de liberté

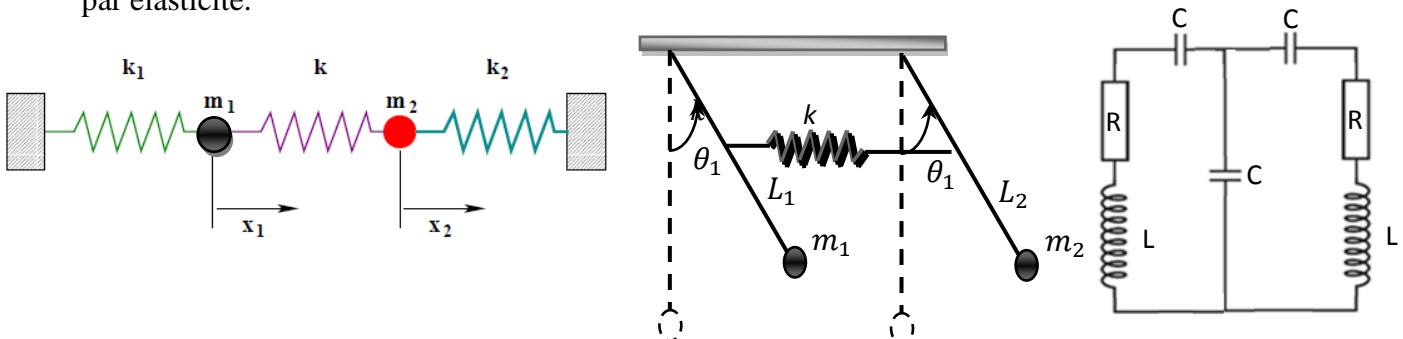
Pour l'étude des systèmes à deux degrés de liberté, il est nécessaire d'écrire deux équations différentielles du mouvement que l'on peut obtenir à partir des équations de Lagrange :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial q_1} \right) = 0 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial q_2} \right) = 0 \end{cases}$$

Un système à 2 degrés de liberté possède 02 coordonnées généralisées, 02 équations différentielles et 02 pulsations propres (ω_1, ω_2).

IV.1.1 Les type de couplages

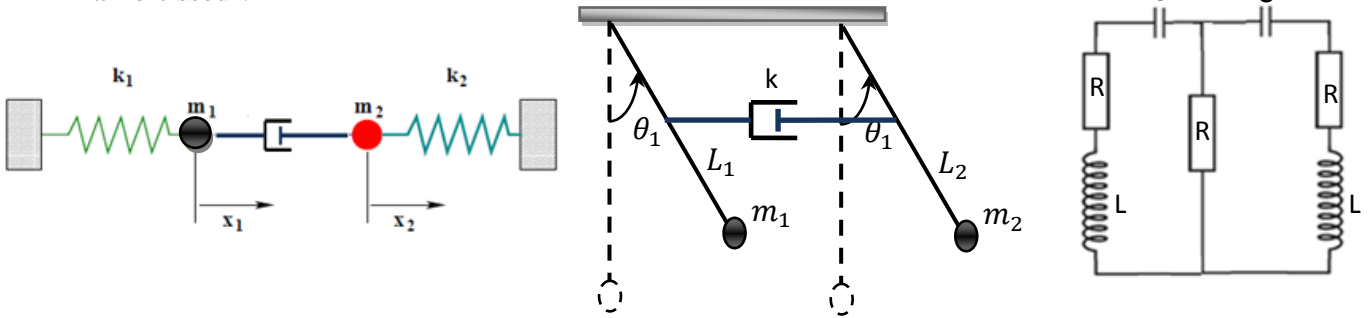
- a) **Couplage Elastique :** Le couplage dans les systèmes mécaniques est assuré par élasticité. Dans les systèmes électriques, on trouve les circuits couplés par capacité, ce qui est équivalent au couplage par élasticité.



Les équations différentielles correspondantes sont :

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + 2\delta_1 \dot{x}_1 + \omega^2 x_1 = a_1 x_2 \\ \ddot{x}_2 + 2\delta_2 \dot{x}_2 + \omega^2 x_2 = a_2 x_1 \end{cases} \quad \text{Tels que : } a_1 x_2 \text{ et } a_2 x_1 \text{ sont les termes de couplage. } a_1 \text{ et } a_2 \text{ sont des constantes.}$$

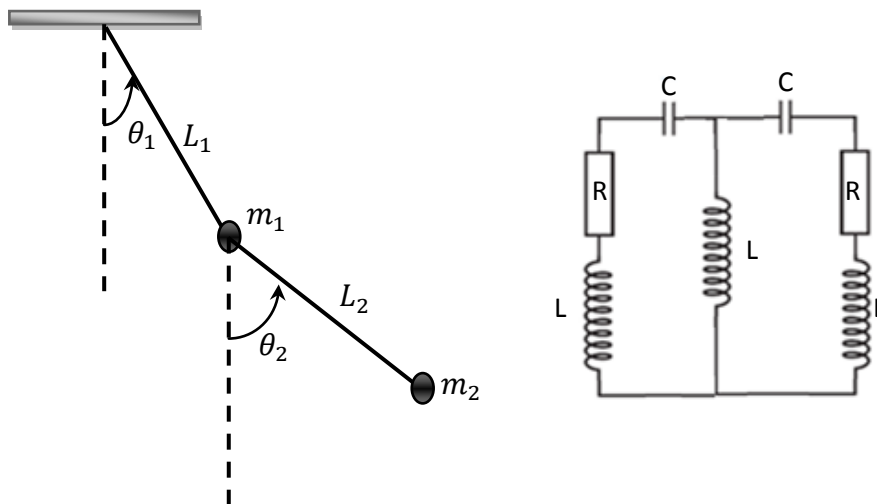
- b) **Couplage Visqueux :** Le couplage dans les systèmes mécaniques est assuré par amortisseur. Dans les systèmes électriques, on trouve les circuits couplés par résistance, équivalents au couplage par amortisseur.



Les équations différentielles correspondantes sont :

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + 2\delta_1 \dot{x}_1 + \omega^2 x_1 = b_1 \dot{x}_2 \\ \ddot{x}_2 + 2\delta_2 \dot{x}_2 + \omega^2 x_2 = b_2 \dot{x}_1 \end{cases} \quad \text{Tels que : } b_1 \dot{x}_2 \text{ et } b_2 \dot{x}_1 \text{ sont les termes de couplage. } b_1 \text{ et } b_2 \text{ sont des constantes.}$$

- c) **Couplage Inertiel :** Le couplage dans les systèmes mécaniques est assuré par inertie. Dans les systèmes électriques, on trouve les circuits couplés par inductance, équivalents au couplage par inertie.



Les équations différentielles correspondantes sont :

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + 2\delta_1 \dot{x}_1 + \omega^2 x_1 = c_1 \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_2 + 2\delta_2 \dot{x}_2 + \omega^2 x_2 = c_2 \ddot{x}_1 \end{cases} \quad \text{Tels que : } c_1 \ddot{x}_2 \text{ et } c_2 \ddot{x}_1 \text{ sont les termes de couplage. } c_1 \text{ et } c_2 \text{ sont des constantes.}$$

IV.1.2 Méthode générale de résolution des équations de mouvement.

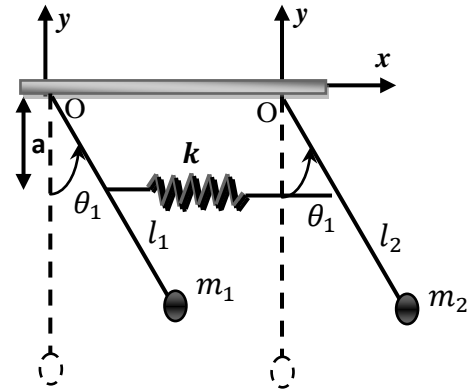
Pour un système mécanique, la mise en équation du système couplé passe par la méthode à suivre suivante :

- 1 – On écrit les 2 équations différentielles en fonction des coordonnées généralisées.
- 2 – On fait l'hypothèse que le système admet des solutions harmoniques. Ce qui signifie que le système peut osciller avec la même pulsation pour tous les oscillateurs.
- 3 – La résolution des systèmes d'équations permet d'obtenir 2 pulsations particulières ω_1 et ω_2 ; ce sont les pulsations propres.
- 4 – On substitue ensuite ω_1 dans l'une des 2 équations et l'on obtient le 1^{er} mode propre. On substitue ensuite ω_2 dans l'une des 2 équations et l'on obtient le 2^{ème} mode propre.
- 5 – On écrit les 2 solutions générales des équations différentielles du mouvement.

IV.1.3 Exemples de systèmes à 2 DDL

IV.1.3.1 Pendules couplés : (Couplage Elastique)

Considérons deux pendules qui sont couplés par un ressort horizontal de constante de raideur k à une distance a de l'axe de rotation.



1. Equations différentielles du mouvement :

❖ Les coordonnées des éléments du système :

La masse m_1 se trouve à une distance l_1 de O.

$$m_1 \begin{cases} x_{m_1} = l_1 \cdot \sin \theta_1 \\ y_{m_1} = -l_1 \cdot \cos \theta_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_{m_1} = l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 \\ \dot{y}_{m_1} = l_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 \end{cases} \Rightarrow v_{m_1}^2 = l_1^2 \dot{\theta}_1^2$$

La masse m_2 se trouve à une distance l_2 de O.

$$m_2 \begin{cases} x_{m_2} = l_2 \cdot \sin \theta_2 \\ y_{m_2} = -l_2 \cdot \cos \theta_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_{m_2} = l_2 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 \\ \dot{y}_{m_2} = l_2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 \end{cases} \Rightarrow v_{m_2}^2 = l_2^2 \dot{\theta}_2^2$$

$$k = \{a \cdot \sin \theta_1 - a \cdot \sin \theta_2 = a(\sin \theta_1 - \sin \theta_2)\}$$

❖ L'énergie cinétique du système : $T = T_{m_1} + T_{m_2} = \frac{1}{2} m v_{m_1}^2 + \frac{1}{2} m v_{m_2}^2$

$$\begin{aligned} \blacksquare T_{m_1} &= \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_{m_1}^2 + \dot{y}_{m_1}^2) = \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 (\cos^2 \theta_1 + \sin^2 \theta_1) \\ &\Rightarrow T_{m_1} = \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 \\ \blacksquare T_{m_2} &= \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_{m_2}^2 + \dot{y}_{m_2}^2) = \frac{1}{2} m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2^2 (\cos^2 \theta_2 + \sin^2 \theta_2) \\ &\Rightarrow T_{m_2} = \frac{1}{2} m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2} (m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2^2)$$

❖ L'énergie potentielle du système : $U = U_k + U_{m_1} + U_{m_2}$

Si on choisi comme origine des énergies potentielles l'axe (Ox) on a pour les deux masses :

$U_{m_1} + U_{m_2} = -m_1 g l_1 \cdot \cos \theta_1 - m_2 g l_2 \cdot \cos \theta_2$ (Le signe moins vient du fait que la masse m est inférieure à l'axe choisi).

$$U = \frac{1}{2} k a^2 (\sin \theta_1 - \sin \theta_2)^2 - m_1 g l_1 \cdot \cos \theta_1 - m_2 g l_2 \cdot \cos \theta_2$$

■ La fonction de Lagrange sera donc :

$$L = T - U = \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2^2 - \frac{1}{2} k a^2 (\sin \theta_1 - \sin \theta_2)^2 + m_1 g l_1 \cdot \cos \theta_1 + m_2 g l_2 \cdot \cos \theta_2$$

On remarque bien deux coordonnées généralisées qui décrivent le mouvement donc on aura deux équations de Lagrange :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial \theta_1} \right) = 0 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial \theta_2} \right) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) = m_1 l_1^2 \ddot{\theta}_1 \\ \left(\frac{\partial L}{\partial \theta_1} \right) = -k a^2 \cos \theta_1 (\sin \theta_1 - \sin \theta_2) - m_1 g l_1 \sin \theta_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow m_1 l_1^2 \ddot{\theta}_1 + k a^2 \cos \theta_1 (\sin \theta_1 - \sin \theta_2) + m_1 g l_1 \sin \theta_1 = 0$$

Dans le cas des faibles oscillations, les angles sont très petits on a : $\begin{cases} \sin \theta \approx \theta \\ \cos \theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2} \approx 1 \end{cases}$

$$\Rightarrow m_1 l_1^2 \ddot{\theta}_1 + ka^2(\theta_1 - \theta_2) + m_1 gl_1 \theta_1 = 0$$

Donc les 02 équations différentielles du mouvement sont :

$$\begin{cases} m_1 l_1^2 \ddot{\theta}_1 + (ka^2 + m_1 gl_1) \theta_1 = ka^2 \theta_2 \dots \dots \dots (1) \\ m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 + (ka^2 + m_2 gl_2) \theta_2 = ka^2 \theta_1 \dots \dots \dots (2) \end{cases}$$

Remarques :

- Le terme de couplage ka^2 est en fonction de k donc le couplage est élastique.
- Si $a = 0$ ou $k = 0 \Rightarrow$ couplage nul : les deux systèmes sont indépendants.
- Les deux équations différentielles possèdent 02 solutions $\theta_1(t)$ et $\theta_2(t)$.



2. On fait l'hypothèse que le système admet des solutions harmoniques :

Donc : $\theta_1(t) = A_1 \sin(\omega t + \varphi)$ et $\theta_2(t) = A_2 \sin(\omega t + \varphi)$

Tels que : A_1, A_2, φ et φ', ω est l'une des pulsations propres du système.

$$\begin{cases} \theta_1(t) = A_1 \sin(\omega t + \varphi) \Rightarrow \ddot{\theta}_1 = -\omega^2 \theta_1 \\ \theta_2(t) = A_2 \sin(\omega t + \varphi) \Rightarrow \ddot{\theta}_2 = -\omega^2 \theta_2 \end{cases}$$

On remplace dans les équations (1) et (2) donc :

$$\begin{cases} (ka^2 + m_1 gl_1 - m_1 l_1^2 \omega^2) \theta_1 - ka^2 \theta_2 = 0 \dots \dots \dots (3) \\ -ka^2 \theta_1 + (ka^2 + m_2 gl_2 - m_2 l_2^2 \omega^2) \theta_2 = 0 \dots \dots \dots (4) \end{cases}$$



3. Calcul des pulsations propres : On suppose que $m_1 = m_2 = m, l_1 = l_2 = l$

$$\begin{pmatrix} ka^2 + mgl - ml^2 \omega^2 & -ka^2 \\ -ka^2 & ka^2 + mgl - ml^2 \omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ces deux équations accepteront une solution si le déterminant = 0

$$\begin{vmatrix} ka^2 + mgl - ml^2 \omega^2 & -ka^2 \\ -ka^2 & ka^2 + mgl - ml^2 \omega^2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (ka^2 + mgl - ml^2 \omega^2)^2 - (ka^2)^2 = 0$$

$$(ka^2 + mgl - ml^2 \omega^2)^2 - (ka^2)^2 = 0 \Rightarrow ka^2 + mgl - ml^2 \omega^2 = \begin{cases} +ka^2 \\ -ka^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \omega_1^2 = \frac{g}{l} + 2 \left(\frac{k}{m} \right) \left(\frac{a}{l} \right)^2 \\ \omega_2^2 = \frac{g}{l} \end{cases} \text{ tels que : } \begin{cases} \omega_1 : \text{la 1ère pulsation propre} \\ \omega_2 : \text{la 2ème pulsation propre} \end{cases}$$

Remarques

- Si $a = 0$ ou 0 , le couplage est nul $\Rightarrow \omega_1^2 = \omega_2^2 = \frac{g}{l}$
- Lorsque le système oscille avec une de ses 02 pulsations on dit que le système oscille dans un de ses deux modes.



4. Les modes d'oscillations

Le mode c'est l'état dans lequel les éléments dynamiques du système effectuent une oscillation harmonique avec la même pulsation qui correspond à une de ses deux pulsations.

4.1 Calcul des modes d'oscillations :

Dans chaque mode les deux masses effectuent des mouvements harmoniques simples avec la même pulsation (ω_1 ou ω_2) et les deux pendules passent par la position d'équilibre au même instant.

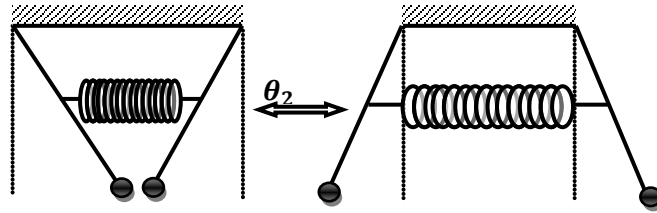
Premier mode : on remplace dans (3) ou (4) par $\omega_1^2 = \frac{g}{l} + 2 \left(\frac{k}{m} \right) \left(\frac{a}{l} \right)^2$:

On obtient après calcul : $\theta_2 = -\theta_1$

Remarques :

- Dans le premier mode les deux pendules ont la même pulsation ω_1 , la même amplitude et un déphasage π .
- Les deux pendules ont des mouvements opposés.

- Elongation et compression du ressort chaque période sauf au point du milieu du ressort.



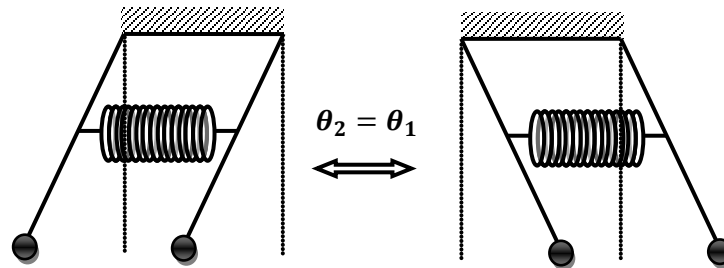
Deuxième mode :

on remplace dans (3) ou (4) par $\omega_2^2 = \frac{g}{l}$:

On obtient après calcul : $\theta_2 = \theta_1$

Remarque :

- Les deux pendules se déplacent dans le même sens.
- Le ressort ne subit aucune variation de sa longueur.



5. Calcul des solutions des équations différentielles :

Chacune des mouvements θ_1 et θ_2 possède deux composantes harmoniques de pulsations ω_1 ou ω_2 . Comme les équations différentielles sont linéaires, toute combinaison de solutions reste solution du système.

La solution générale s'écrit alors comme une combinaison linéaire des deux solutions.

$$\begin{cases} \theta_1(t) = A_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + B_1 \sin(\omega_2 t + \varphi_2) \\ \theta_2(t) = A_2 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + B_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2) \end{cases}$$

Dans le premier mode : $\omega = \omega_1 \Rightarrow \theta_2 = -\theta_1 \Rightarrow A_1 = -A_2 \Rightarrow \vec{V}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, \vec{V}_1 est le 1^{er} vecteur propre

Dans le deuxième mode : $\omega = \omega_2 \Rightarrow \theta_2 = \theta_1 \Rightarrow B_1 = B_2 \Rightarrow \vec{V}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, \vec{V}_2 est le 2^{ème} vecteur propre

Donc :

$$\begin{cases} \theta_1(t) = A \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + B \sin(\omega_2 t + \varphi_2) \\ \theta_2(t) = -A \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + B \sin(\omega_2 t + \varphi_2) \end{cases}$$



6. Calcul des constantes A, B, φ_1 et φ_2

Supposons que : $\begin{cases} \theta_1(t) = \theta_0, \dot{\theta}_1(t) = 0 \\ \theta_2(t) = 0, \dot{\theta}_2(t) = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} \dot{\theta}_1(t) = A\omega_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + B\omega_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \\ \dot{\theta}_2(t) = -A\omega_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + B\omega_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \theta_1(0) = A \sin(\varphi_1) + B \sin(\varphi_2) = \theta_0 \\ \theta_2(0) = -A \sin(\varphi_1) + B \sin(\varphi_2) = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \dot{\theta}_1(0) = A\omega_1 \cos(\varphi_1) + B\omega_2 \cos(\varphi_2) \\ \dot{\theta}_2(0) = -A\omega_1 \cos(\varphi_1) + B\omega_2 \cos(\varphi_2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \varphi_1 = \varphi_2 = \pm \frac{\pi}{2} \\ A = B = \frac{\theta_0}{2} \end{cases}$$

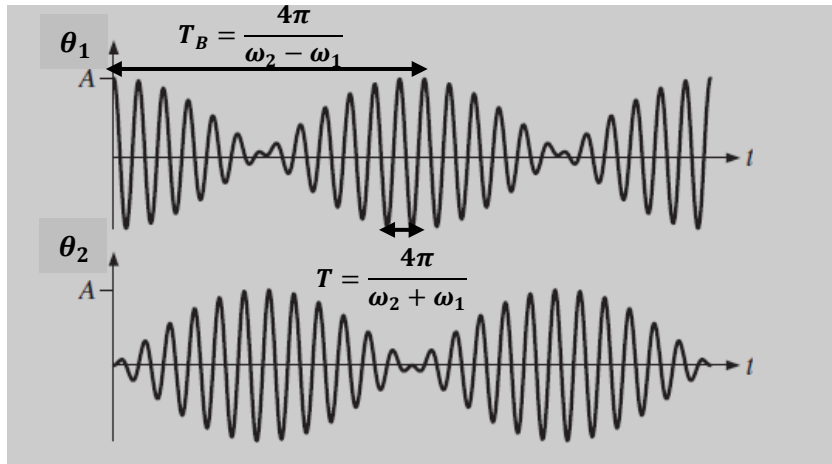
Donc : $\begin{cases} \theta_1(t) = \frac{\theta_0}{2} \left[\sin\left(\omega_1 t + \frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(\omega_2 t + \frac{\pi}{2}\right) \right] \\ \theta_2(t) = \frac{\theta_0}{2} \left[-\sin\left(\omega_1 t + \frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(\omega_2 t + \frac{\pi}{2}\right) \right] \end{cases}$ avec : $\begin{cases} \cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \\ \cos \alpha - \cos \beta = 2 \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \\ \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \cos \alpha \end{cases}$

$$\text{On obtient : } \begin{cases} \theta_1(t) = \theta_0 \cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t\right) \cos\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t\right) \\ \theta_2(t) = -\theta_0 \sin\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t\right) \sin\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t\right) \end{cases}$$



7. Phénomène de battement :

Lorsque le couplage est faible (k faible), les pulsations propres des 2 oscillateurs (ω_1 et ω_2) sont voisines ($\omega_1 \approx \omega_2 \Rightarrow \Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ est faible), il se produit un phénomène de battement. Les 2 oscillateurs se transmettent de l'énergie entre eux et vibrent avec une pulsation ω égal à la moyenne des deux pulsations propres $\omega = \frac{1}{2}(\omega_2 + \omega_1)$ avec une période égale à $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{4\pi}{\omega_2 + \omega_1}$ Tandis que la pulsation du battement est égale à $\omega_B = \frac{1}{2}(\omega_2 - \omega_1)$, avec une période $T_B = \frac{4\pi}{\omega_2 - \omega_1}$



IV.1.3.2 Pendules couplés : (Couplage inertiel)

Considérons deux pendules qui sont couplés par une masse m_1 qui se trouve à une distance l_1 de l'axe de rotation.



1. Equations différentielles du mouvement :

❖ Les coordonnées des éléments du système :

La masse m_1 se trouve à une distance l_1 de O.

$$m_1 \begin{cases} x_{m_1} = l_1 \sin \theta_1 \\ y_{m_1} = -l_1 \cos \theta_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_{m_1} = l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 \\ \dot{y}_{m_1} = l_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 \end{cases} \Rightarrow v_{m_1}^2 = l_1^2 \dot{\theta}_1^2$$

La masse m_2 se trouve à une distance $(l_1 + l_2)$ de O.

$$m_2 \begin{cases} x_{m_2} = l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin \theta_2 \\ y_{m_2} = -l_1 \cos \theta_1 - l_2 \cos \theta_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_{m_2} = l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + l_2 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 \\ \dot{y}_{m_2} = l_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 + l_2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 \end{cases}$$

Calcul de v_{m_2}

$$v_{m_2}^2 = (l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + l_2 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2)^2 + (l_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 + l_2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2)^2$$

$$v_{m_2}^2 = l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + 2l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 \cdot l_2 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 + 2l_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 \cdot l_2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2$$

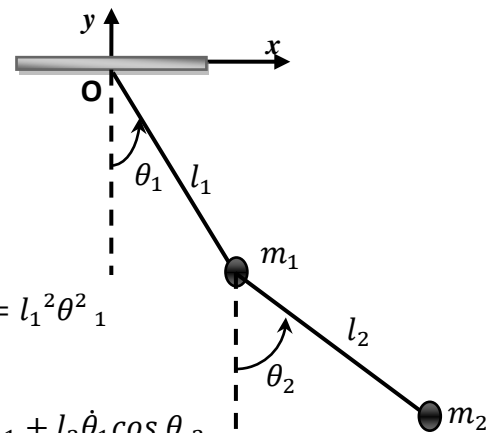
$$v_{m_2}^2 = l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + 2l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 (\cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2)$$

$$\text{Or : } \cos(\theta_1 - \theta_2) = \cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2 \Rightarrow v_{m_2}^2 = l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + 2l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)$$

Dans le cas des faibles oscillations, les angles sont très petits on a : $\{\cos(\theta_1 - \theta_2) \approx 1\}$

$$\text{Donc : } v_{m_2}^2 = l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + 2l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 = (l_1 \dot{\theta}_1 + l_2 \dot{\theta}_2)^2$$

$$\text{❖ L'énergie cinétique du système : } T = T_{m_1} + T_{m_2} = \frac{1}{2} m v_{m_1}^2 + \frac{1}{2} m v_{m_2}^2$$



$$\begin{aligned}
 \blacksquare \quad Tm_1 &= \frac{1}{2}m_1(\dot{x}_{m_1}^2 + \dot{y}_{m_1}^2) = \frac{1}{2}m_1l_1^2\dot{\theta}_1^2(\cos^2\theta_1 + \sin^2\theta_1) \\
 &\Rightarrow Tm_1 = \frac{1}{2}m_1l_1^2\dot{\theta}_1^2 \\
 \blacksquare \quad Tm_2 &= \frac{1}{2}m_2v_{m_2}^2 = \frac{1}{2}m_2(l_1\dot{\theta}_1 + l_2\dot{\theta}_2)^2 \\
 &\Rightarrow T = \frac{1}{2}m_1l_1^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2(l_1\dot{\theta}_1 + l_2\dot{\theta}_2)^2
 \end{aligned}$$

❖ L'énergie potentielle du système : $U = U_{m_1} + U_{m_2}$

Si on choisit comme origine des énergies potentielles l'axe (Ox) on a pour les deux masses :

$$U_{m_1} + U_{m_2} = -m_1gl_1 \cdot \cos\theta_1 - m_2g(l_1 \cdot \cos\theta_1 + l_2 \cdot \cos\theta_2)$$

(Le signe moins vient du fait que la masse m est inférieure à l'axe choisi).

$$U = -gl_1(m_1 + m_2) \cos\theta_1 - m_2gl_2 \cdot \cos\theta_2$$

▪ La fonction de Lagrange sera donc :

$$L = T - U = \frac{1}{2}m_1l_1^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2(l_1\dot{\theta}_1 + l_2\dot{\theta}_2)^2 + gl_1(m_1 + m_2) \cos\theta_1 + m_2gl_2 \cdot \cos\theta_2$$

On remarque bien deux coordonnées généralisées qui décrivent le mouvement donc on aura deux équations de Lagrange :

$$\begin{aligned}
 &\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial \theta_1} \right) = 0 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial \theta_2} \right) = 0 \end{cases} \\
 &\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) = m_1l_1^2\ddot{\theta}_1 + m_2l_1(l_1\ddot{\theta}_1 + l_2\ddot{\theta}_2) \\ \left(\frac{\partial L}{\partial \theta_1} \right) = -gl_1(m_1 + m_2) \sin\theta_1 \end{cases} \Rightarrow m_1l_1^2\ddot{\theta}_1 + m_2l_1^2\ddot{\theta}_1 + m_2l_1l_2\ddot{\theta}_2 + gl_1(m_1 + m_2) \theta_1 = 0 \\
 &\Rightarrow (m_1 + m_2)l_1^2\ddot{\theta}_1 + gl_1(m_1 + m_2) \theta_1 = -m_2l_1l_2\ddot{\theta}_2
 \end{aligned}$$

On divise sur $(m_1 + m_2)l_1$ et on trouve : $l_1\ddot{\theta}_1 + g\theta_1 = -\frac{m_2l_2}{(m_1 + m_2)l_1}\ddot{\theta}_2$

$$\begin{aligned}
 &\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right) = m_2l_2(l_1\ddot{\theta}_1 + l_2\ddot{\theta}_2) \\ \left(\frac{\partial L}{\partial \theta_2} \right) = -m_2gl_2 \cdot \sin\theta_2 \end{cases} \Rightarrow m_2l_2(l_1\ddot{\theta}_1 + l_2\ddot{\theta}_2) + m_2gl_2 \cdot \theta_2 = 0 \\
 &\Rightarrow m_2l_2^2\ddot{\theta}_2 + m_2gl_2 \cdot \theta_2 = -m_2l_2l_1\ddot{\theta}_1
 \end{aligned}$$

On divise sur m_2l_2 et on trouve : $l_2\ddot{\theta}_2 + g\theta_2 = -l_1\ddot{\theta}_1$

Donc les 02 équations différentielles du mouvement sont :

$$\begin{cases} l_1\ddot{\theta}_1 + g\theta_1 = -\frac{m_2l_2}{(m_1 + m_2)l_1}\ddot{\theta}_2 \dots \dots (1) \\ l_2\ddot{\theta}_2 + g\theta_2 = -l_1\ddot{\theta}_1 \dots \dots (2) \end{cases}$$


2. On fait l'hypothèse que le système admet des solutions harmoniques :

Donc : $\theta_1(t) = A_1 \sin(\omega t + \varphi)$ et $\theta_2(t) = A_2 \sin(\omega t + \varphi)$

Tels que : A_1, A_2, φ et φ' , ω est l'une des pulsations propres du système.

$$\begin{cases} \theta_1(t) = A_1 \sin(\omega t + \varphi) \Rightarrow \ddot{\theta}_1 = -\omega^2 \theta_1 \\ \theta_2(t) = A_2 \sin(\omega t + \varphi) \Rightarrow \ddot{\theta}_2 = -\omega^2 \theta_2 \end{cases}$$

On remplace dans les équations (1) et (2) donc :

$$(g - l_1\omega^2)\theta_1 - \frac{m_2l_2}{(m_1 + m_2)l_1}\omega^2\theta_2 = 0 \dots \dots (3)$$

$$(g - l_2\omega^2)\theta_2 - l_1\omega^2\theta_1 = 0 \dots \dots (4)$$



3. Calcul des pulsations propres : On suppose que $m_1 = m_2 = m, l_1 = l_2 = l$

$$\begin{cases} (g - l\omega^2)\theta_1 - \frac{l}{2}\omega^2\theta_2 = 0 \dots\dots (5) \\ (g - l\omega^2)\theta_2 - l\omega^2\theta_1 = 0 \dots\dots\dots (6) \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} g - l\omega^2 & -\frac{l\omega^2}{2} \\ -l\omega^2 & g - l\omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ces deux équations accepteront une solution si le déterminant = 0

$$\begin{vmatrix} g - l\omega^2 & -\frac{l\omega^2}{2} \\ -l\omega^2 & g - l\omega^2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (g - l\omega^2)^2 - \frac{1}{2}(l\omega^2)^2 = 0 ; \text{ C'est l'équation aux valeurs propres.}$$

ω_i valeurs propres.

$$(g - l\omega^2)^2 - \frac{1}{2}(l\omega^2)^2 = 0 \Rightarrow g - l\omega^2 = \begin{cases} +\frac{1}{\sqrt{2}}l\omega^2 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}l\omega^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \omega_1^2 = \frac{g}{l(1+\frac{1}{\sqrt{2}})} \\ \omega_2^2 = \frac{g}{l(1-\frac{1}{\sqrt{2}})} \end{cases}$$

Ce sont les valeurs propres.



3. Calcul des modes d'oscillations ou les vecteurs propres :

Premier mode : on remplace dans (5) ou (6) par $\omega_1^2 = \frac{g}{l(1+\frac{1}{\sqrt{2}})}$

$$\begin{cases} \left(g - l\left(\frac{g}{l(1+\frac{1}{\sqrt{2}})}\right) \right) \theta_1 - \frac{l}{2} \left(\frac{g}{l(1+\frac{1}{\sqrt{2}})}\right) \theta_2 = 0 \\ \left(g - l\left(\frac{g}{l(1+\frac{1}{\sqrt{2}})}\right) \right) \theta_2 - l \left(\frac{g}{l(1+\frac{1}{\sqrt{2}})}\right) \theta_1 = 0 \end{cases}$$

$$\left(1 - \frac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}\right) \theta_1 = \frac{1}{2(1+\frac{1}{\sqrt{2}})} \theta_2 \Rightarrow \theta_2 = \sqrt{2} \theta_1 : \text{ c'est le premier mode}$$

Deuxième mode : on remplace dans (5) ou (6) par $\omega_2^2 = \frac{g}{l(1-\frac{1}{\sqrt{2}})}$

On trouve : $\theta_2 = -\sqrt{2} \theta_1$: c'est le deuxième mode.



4. Calcul des solutions des équations différentielles :

Chacune des mouvements θ_1 et θ_2 possède deux composantes harmoniques de pulsations ω_1 ou ω_2 . Comme les équations différentielles sont linéaires, toute combinaison de solutions reste solution du système.

La solution générale s'écrit alors comme une combinaison linéaire des deux solutions.

$$\begin{cases} \theta_1(t) = A \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + B \sin(\omega_2 t + \varphi_2) \\ \theta_2(t) = A \sqrt{2} \sin(\omega_1 t + \varphi_1) - B \sqrt{2} \sin(\omega_2 t + \varphi_2) \end{cases}$$

IV.1.4 Généralisation aux systèmes à n degrés de liberté : Principe des opérateurs

IV.1.4.1 Energie cinétique généralisée (Opérateur associé à l'énergie cinétique)

Un système à n degrés de liberté possède n variables : $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$.

L'énergie cinétique généralisée ; $T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 + \dots + \frac{1}{2} m_n \dot{x}_n^2$

$$\text{Si } m_1 = m_2 = \dots = m_n = m \Rightarrow T = \frac{1}{2} m (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dots + \dot{x}_n^2) \Rightarrow T = \frac{1}{2} m \sum_{i=1}^n \dot{x}_i^2 \dots\dots\dots (1)$$

Soit le vecteur vertical (colonne) : $|x\rangle = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ KET

Soit le vecteur horizontal (ligne) : $\langle x| = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ BRAS

$$\langle x|x\rangle = (x_1, x_2, \dots, x_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n x_i^2 \Leftrightarrow \langle \dot{x}|\dot{x}\rangle = (\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_n) \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n \dot{x}_i^2 \Rightarrow T = \frac{1}{2} m \langle \dot{x}|\dot{x}\rangle$$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2} (\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3, \dots, \dot{x}_n) \begin{pmatrix} m & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & m & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix} \Rightarrow T = \frac{1}{2} \langle \dot{x}|\mathcal{T}|\dot{x}\rangle$$

\mathcal{T} : Matrice carrée (nxn), Opérateur associé à T. Les éléments de \mathcal{T} sont déduits des dérivées $\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i}$

IV.1.4.2 Energie potentielle généralisée (Opérateur associé à l'énergie potentielle)

$$T = \frac{1}{2} k_1 x_1^2 + \frac{1}{2} k_2 x_2^2 + \dots + \frac{1}{2} k_n x_n^2.$$

$$\text{Si } k_1 = k_2 = \dots = k_n = k \Rightarrow U = \frac{1}{2} k (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) \Rightarrow U = \frac{1}{2} k \sum_{i=1}^n x_i^2 \dots \dots \dots (2)$$

$$U = \frac{1}{2} k \langle x|x\rangle \Rightarrow U = \frac{1}{2} \langle x|\mathcal{U}|x\rangle. \text{ Tel que : } \mathcal{U} = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & k \end{pmatrix}$$

\mathcal{U} : Matrice carrée (nxn), Opérateur associé à U. Les éléments de \mathcal{U} sont déduits des dérivées $\frac{\partial U}{\partial x_i}$

IV.1.4.3 Equation différentielle

Le Lagrangien (la fonction de Lagrange) : $L = T - U = \frac{1}{2} \langle \dot{x}|\mathcal{T}|\dot{x}\rangle - \frac{1}{2} \langle x|\mathcal{U}|x\rangle$

Equation de Lagrange : $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial x_i} \right) = 0$

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} \langle \dot{x}|\mathcal{T}|\dot{x}\rangle \\ \frac{\partial L}{\partial x_i} = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} \langle x|\mathcal{U}|x\rangle \end{cases}$$

On a : $\frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} \langle \dot{x}|\mathcal{T}|\dot{x}\rangle = 2 \langle I_i|\mathcal{T}|\dot{x}\rangle$ et $\frac{\partial}{\partial x_i} \langle x|\mathcal{U}|x\rangle = 2 \langle I_i|\mathcal{U}|x\rangle$ avec I_i vecteur unité.

$$\langle I_1| = (1, 0, 0, 0, \dots, 0), \langle I_2| = (0, 1, 0, 0, \dots, 0), \dots \dots \dots \langle I_n| = (0, 0, 0, 0, \dots, 1).$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \langle I_i|\mathcal{T}|\dot{x}\rangle \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) = \langle I_i|\mathcal{T}|\ddot{x}\rangle$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = -\langle I_i|\mathcal{U}|x\rangle \Rightarrow \langle I_i|\mathcal{T}|\ddot{x}\rangle + \langle I_i|\mathcal{U}|x\rangle = 0, \text{ c'est l'équation de Lagrange.}$$

$$\Rightarrow \mathcal{T}|\ddot{x}\rangle + \mathcal{U}|x\rangle = 0 \Rightarrow |\ddot{x}\rangle + \mathcal{T}^{-1}|\mathcal{U}|x\rangle = 0 \Rightarrow \frac{d^2}{dt^2} |x\rangle + \mathcal{L}|x\rangle = 0$$

$\mathcal{L} = \mathcal{T}^{-1} \cdot \mathcal{U}$: Opérateur associé au Lagrangien L, \mathcal{T}^{-1} : Matrice inverse de \mathcal{T} .

IV.1.4.4 Equation aux valeurs propres :

La solution de l'équation $\frac{d^2}{dt^2}|x\rangle + \mathcal{L}|x\rangle = 0$ peut être sous la forme complexe : $Ce^{j\omega t}$

$$\frac{d^2|x\rangle}{dt^2} = -\omega^2|x\rangle \Rightarrow -\omega^2|x\rangle + \mathcal{L}|x\rangle = 0 \Rightarrow (\mathcal{L} - \omega^2)|x\rangle = 0,$$

$(\mathcal{L} - \omega^2)|x\rangle = 0 \Rightarrow \text{Det} [\mathcal{L} - \omega^2 I] = 0$, c'est l'équation aux valeurs propres. ω_i : valeurs propres.

❖ **valeurs propres :**

Exemple : $\mathcal{L} = \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{pmatrix}$,

L'équation aux valeurs propres : $\mathcal{L} - \omega^2 I = \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{pmatrix} - \omega^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{11} - \omega^2 & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} - \omega^2 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} L_{11} - \omega^2 & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} - \omega^2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (L_{11} - \omega^2)(L_{22} - \omega^2) - L_{12} \cdot L_{21} = 0$$

A chaque valeur propre ω_i correspond un vecteur propre \vec{V}_i , $\omega_1 \mapsto \vec{V}_1 \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{pmatrix}$, $\omega_2 \mapsto \vec{V}_2 \begin{pmatrix} x_{21} \\ x_{22} \end{pmatrix}$

❖ Pour : $\omega = \omega_1 : (\mathcal{L} - \omega_1^2) \vec{V}_1 = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} L_{11} - \omega_1^2 & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} - \omega_1^2 \end{vmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{cases} (L_{11} - \omega_1^2)x_{11} + L_{12}x_{12} = 0 \\ L_{21}x_{11} + (L_{22} - \omega_1^2)x_{12} = 0 \end{cases} \Rightarrow x_{11} \text{ et } x_{12}?$$

❖ Pour : $\omega = \omega_2 : (\mathcal{L} - \omega_2^2) \vec{V}_2 = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} L_{11} - \omega_2^2 & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} - \omega_2^2 \end{vmatrix} \begin{pmatrix} x_{21} \\ x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow x_{21} \text{ et } x_{22}?$$

IV.1.4.5 Solution des équations différentielle :

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = A \vec{V}_1 e^{j(\omega_1 t + \varphi_1)} + B \vec{V}_2 e^{j(\omega_2 t + \varphi_2)} = A \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{pmatrix} e^{j(\omega_1 t + \varphi_1)} + B \begin{pmatrix} x_{21} \\ x_{22} \end{pmatrix} e^{j(\omega_2 t + \varphi_2)}$$

$$\begin{cases} x_1(t) = Ax_{11}e^{j(\omega_1 t + \varphi_1)} + Bx_{21}e^{j(\omega_2 t + \varphi_2)} \\ x_2(t) = Ax_{12}e^{j(\omega_1 t + \varphi_1)} + Bx_{22}e^{j(\omega_2 t + \varphi_2)} \end{cases}$$

References:

1. Mini manuel de mécanique du point, Henry, M. Delorme, N.
2. Fundamentals Of Physics Extended 8th Edition By Halliday
3. Vibrations and waves, George C. King
4. The physics of vibrations and waves, Sixth Edition, H. J. Pain
5. Cours de vibrations I, Emmanuel Vient
6. Waves and Oscillations, R.N. Choudhuri