Exercice 01 :

Deux points A et B, ont pour coordonnées cartésiennes dans l'espace : A(2,3,-3), B(5,7,2)

Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}$ ainsi que son module, sa direction et son sens.

Solution :

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est donné par : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA} = 3\,\vec{i} + 4\,\vec{i} + 5\,\vec{i}$

Son module : $AB = \sqrt{3^2 + 4^2 + 5^2} = \sqrt{50}$

Sa direction est déterminée par les angles (α, β, θ) qu'il fait avec chacun des axes du repère.

Ses angles se déduisent par le produit scalaire du vecteur $\overrightarrow{AB}$ par les vecteurs unitaires du repère orthonormé :

$$\alpha = (\overrightarrow{AB}, \vec{i}) : \quad \overrightarrow{AB} \bullet \vec{i} = AB.1.\cos\alpha \quad \Leftrightarrow \quad \cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AB} \bullet \vec{i}}{AB} = \frac{3}{\sqrt{50}} = 0.424 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 64.89°$$

$$\beta = (\overrightarrow{AB}, \vec{j}) : \quad \overrightarrow{AB} \bullet \vec{j} = AB.1.\cos\beta \quad \Leftrightarrow \quad \cos\beta = \frac{\overrightarrow{AB} \bullet \vec{j}}{AB} = \frac{4}{\sqrt{50}} = 0.565 \quad \Rightarrow \quad \beta = 55.54°$$

$$\theta = (\overrightarrow{AB}, \vec{k}) : \quad \overrightarrow{AB} \bullet \vec{k} = AB.1.\cos\theta \quad \Leftrightarrow \quad \cos\theta = \frac{\overrightarrow{AB} \bullet \vec{k}}{AB} = \frac{5}{\sqrt{50}} = 0.707 \quad \Rightarrow \quad \theta = 44.99°$$

son sens : comme le produit scalaire du vecteur $\overrightarrow{AB}$ avec les trois vecteurs unitaires est positif alors, il a un sens positif suivant les trois axes du repère.

Exercice 02 :

Soient les vecteurs suivants : $\vec{U}_1 = A_1\,\vec{i} + A_2\,\vec{j} + A_3\,\vec{k}$ *et* $\vec{U}_2 = B_1\,\vec{i} + B_2\,\vec{j} + B_3\,\vec{k}$

1) Calculer les produits scalaires : $\vec{U}_1 \bullet \vec{U}_2$, $\vec{U}_1 \bullet \vec{U}_1$, $\vec{U}_2 \bullet \vec{U}_2$,

   On donne : $\vec{V}_1 = 2\,\vec{i} - \vec{j} + 5\,\vec{k}$, $\vec{V}_2 = -3\,\vec{i} + 1{,}5\,\vec{j} - 7.5\,\vec{k}$, $\vec{V}_3 = -5\,\vec{i} + 4\,\vec{j} + \vec{k}$

2) Calculer $\vec{V}_1 \bullet \vec{V}_2$ et $\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$;

3) Sans faire de représentation graphique que peut-on dire du sens et de la direction du vecteur $\vec{V}_2$ par rapport à $\vec{V}_1$;

4) Calculer les produits suivants $\vec{V}_1 \bullet (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3)$ et $\vec{V}_1 \wedge (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3)$;

5) Déterminer la surface du triangle formé par les vecteurs $\vec{V}_2$ et $\vec{V}_3$

Solution :

1) $\vec{U}_1 \bullet \vec{U}_2 = A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3$, $\vec{U}_1 \bullet \vec{U}_1 = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2$, $\vec{U}_2 \bullet \vec{U}_2 = B_1^2 + B_2^2 + B_3^2$

2) $\vec{V}_1 \bullet \vec{V}_2 = -6 - 1{,}5 - 37{,}5 = -45$

$$\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \begin{cases} 2 \\ -1{,}5 \\ 5 \end{cases} \wedge \begin{cases} -3 \\ 1{,}5 \\ -7{,}5 \end{cases} = \begin{cases} 7{,}5 - 7{,}5 \\ -1{,}5 + 1{,}5 \\ 3 - 3 \end{cases} = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ 0 \end{cases}$$

3) Comme le produit vectoriel des deux vecteurs est nul, alors ils sont parallèles

$$\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{V}_1 \ // \ \vec{V}_2$$

De plus leur produit scalaire est négatif $\vec{V}_1 \bullet \vec{V}_2 = -45$, alors les vecteurs $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ sont parallèles et de sens opposés

4) $$\vec{V}_1 \bullet (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3) = \begin{cases} 2 \\ -1 \\ 5 \end{cases} \bullet \left(\begin{cases} -3 \\ 1{,}5 \\ -7{,}5 \end{cases} \wedge \begin{cases} -5 \\ 4 \\ 1 \end{cases} \right) = \begin{cases} 2 \\ -1 \\ 5 \end{cases} \bullet \begin{cases} 31{,}5 \\ 40{,}5 \\ -4{,}5 \end{cases} = 63 - 40{,}5 - 22{,}5 = 0$$

on peut retrouver ce résultat par la méthode vectorielle :

Nous avons $\vec{V}_1 \ // \ \vec{V}_2$ soit $\vec{W} = \vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \vec{V}_2 \perp \vec{W} \\ \vec{V}_3 \perp \vec{W} \end{cases}$, calculons $\vec{V}_1 \bullet \vec{W}$

$$\vec{V}_2 \perp \vec{W} \text{ et } \vec{V}_1 \ // \ \vec{V}_2 \ \Rightarrow \ \vec{V}_1 \perp \vec{W} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{V}_1 \bullet \vec{W} = 0$$

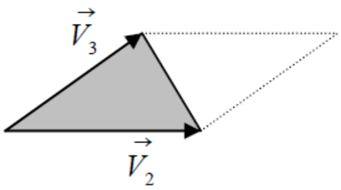
$$\vec{V}_1 \wedge (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3) = \begin{cases} 2 \\ -1 \\ 5 \end{cases} \wedge \left(\begin{cases} -3 \\ 1{,}5 \\ -7{,}5 \end{cases} \wedge \begin{cases} -5 \\ 4 \\ 1 \end{cases} \right) = \begin{cases} 2 \\ -1 \\ 5 \end{cases} \wedge \begin{cases} 31{,}5 \\ 40{,}5 \\ -4{,}5 \end{cases} = \begin{cases} -198 \\ 166{,}5 \\ 112{,}5 \end{cases}$$

$$\vec{V}_1 \wedge (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3) = -198\,\vec{i} + 166\,\vec{j} + 112{,}5\,\vec{k}$$

5) La surface du triangle formé par les vecteurs $\vec{V}_2$ et $\vec{V}_3$ est donnée par la moitié du module du produit vectoriel des deux vecteurs :

Nous avons : $\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3 = 31{,}5\,\vec{i} + 40{,}5\,\vec{j} - 4{,}5\,\vec{k}$ alors :

$$\left| \vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3 \right| = \sqrt{31{,}5^2 + 40{,}5^2 + (-4{,}5)^2} = 51{,}50$$



$$S = \frac{\left| \vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3 \right|}{2} = \frac{51{,}50}{2} = 25{,}75$$

c'est la demi surface du parallélogramme :

Exercice 03 :

Soient les vecteurs :

$\vec{U} = 2\vec{i} + 6\vec{k}$, $\vec{V} = 8\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, $\vec{P} = 3\vec{i} - 4\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{Q} = -2\vec{i} + y\vec{j} + 12\vec{k}$

1) *Déterminer* y *et* z *pour que les vecteurs* $\vec{U}$ et $\vec{V}$ *soient colinéaires ;*

2) *Déterminer la valeur de* y *pour que les vecteurs* $\vec{P}$ et $\vec{Q}$ *soient perpendiculaires;*

Solution :

1) Si $\vec{U}$ et $\vec{V}$ sont colinéaires alors: $\vec{U} \wedge \vec{V} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \\ 0 \\ 6 \end{cases} \wedge \begin{cases} 8 \\ y \\ z \end{cases} = \begin{cases} -6y \\ -2z + 48 \\ 2y \end{cases} = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ z = 24 \end{cases}$

2) Si $\vec{P}$ et $\vec{Q}$ sont perpendiculaires alors : $\vec{P} \bullet \vec{Q} = 0$

$$\vec{P} \bullet \vec{Q} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \\ -4 \\ 2 \end{cases} \bullet \begin{cases} -2 \\ y \\ 12 \end{cases} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -6 - 4y + 24 = 0 \quad y = \frac{9}{2}$$

Exercice 04:

Trouvez le volume d'un parallélépipède dont les cotés sont les vecteurs : $\vec{U}$, $\vec{P}$, $\vec{Q}$, *tel que :*

$\vec{U} = 2\vec{i} + 6\vec{j}$, $\vec{P} = 3\vec{j} + 5\vec{k}$, $\vec{Q} = \vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}$,

Solution :

Le volume d'un parallélépipède est un scalaire positif. On doit utiliser une opération vectorielle dont le résultat est un scalaire positif : c'est le module du produit mixte des trois vecteurs : $v = \left| \vec{U} \bullet (\vec{P} \wedge \vec{Q}) \right|$

$$\vec{U} \bullet (\vec{P} \wedge \vec{Q}) = \begin{cases} 2 \\ 6 \\ 0 \end{cases} \bullet \left(\begin{cases} 0 \\ 3 \\ 5 \end{cases} \wedge \begin{cases} 1 \\ 4 \\ -2 \end{cases} \right) = \begin{cases} 2 \\ 6 \\ 0 \end{cases} \bullet \begin{cases} -26 \\ 5 \\ -3 \end{cases} = -52 + 30 = -22 \ ; \ \Rightarrow$$

$$v = \left| \vec{U} \bullet (\vec{P} \wedge \vec{Q}) \right| = |-22| = 22$$

Exercice 05 :

Résoudre l'équation vectorielle : $\vec{a} \wedge \vec{x} = \vec{b}$ où $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont deux vecteurs non nuls.

Solution :

L'équation n'admet de solution que si $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont orthogonaux. Soit (π) un plan contenant les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{x}$, alors le vecteurs $\vec{b}$ est perpendiculaire à ce plan (π).

On cherche d'abord une solution particulière avec un vecteur $\vec{x_0}$ tel que : $\vec{a}$ et $\vec{x_0}$ soient deux vecteurs perpendiculaires entre eux : $\vec{a} \perp \vec{x_0} \Rightarrow \vec{a} \bullet \vec{x_0} = 0$

Alors on a aussi : $\vec{a} \wedge \vec{x_0} = \vec{b}$ Multiplions vectoriellement à gauche cette équation par le vecteur $\vec{a}$, on obtient : $\vec{a} \wedge \left(\vec{a} \wedge \vec{x_0} \right) = \vec{a} \wedge \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}\left(\vec{a} \bullet \vec{x_0} \right) - \vec{x_0}\left(\vec{a} \bullet \vec{a} \right) = \vec{a} \wedge \vec{b}$

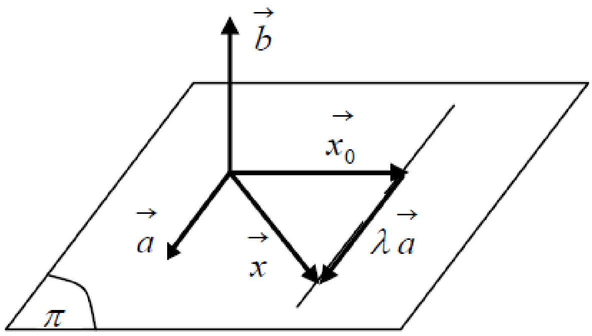
$-\vec{x_0}\left(\vec{a} \bullet \vec{a} \right) = \vec{a} \wedge \vec{b} \Rightarrow \vec{x_0} = \dfrac{\vec{b} \wedge \vec{a}}{a^2}$

nous avons ainsi : $\begin{cases} \vec{a} \wedge \vec{x_0} = \vec{b} \\ \vec{a} \wedge \vec{x} = \vec{b} \end{cases}$ en faisant la différence entre ces deux équations, nous obtenons la solution générale $\vec{x}$: $\vec{a} \wedge \vec{x} - \vec{a} \wedge \vec{x_0} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a} \wedge \left(\vec{x} - \vec{x_0} \right) = \vec{0}$

Comme le produit vectoriel est nul alors alors $\vec{a} \; // \left(\vec{x} - \vec{x_0} \right)$ d'où : $\vec{x} - \vec{x_0} = \lambda \vec{a}$

On a finalement : $\vec{x} = \vec{x_0} + \lambda \vec{a} \Rightarrow \vec{x} = \dfrac{\vec{b} \wedge \vec{a}}{a^2} + \lambda \vec{a}$

Représentation géométrique :



Exercice 06 :

Dans un repère orthonormé $R(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ on donne trois points *A, B, C* de l'espace ayant pour coordonnées : $A(1,3,4)$, $B(-1,4,-2)$, $C(0,1,1)$. Soit (π) un plan défini par ces trois points et la normale $\vec{n}$ à celui-ci.

Déterminer les composantes du vecteur $\vec{V}=3\vec{i}+\vec{j}-4\vec{k}$ dans le plan (π) et suivant la normale à ce plan.

Solution :

Le vecteur $\vec{V}$ s'écrirait : $\vec{V}=\vec{V}_n+\vec{V}_\pi$

Où $\vec{V}_n \perp (\pi)$ et $\vec{V}_\pi \in (\pi)$

Le vecteur unitaire $\vec{n}$ est perpendiculaire au plan et aussi aux vecteurs $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BC}$

Alors : $\vec{n}\bullet\overrightarrow{AB}=0$, $\vec{n}\bullet\overrightarrow{AC}=0$, $\vec{n}\bullet\overrightarrow{BC}=0$

Nous avons : $\overrightarrow{AB}=-2\vec{i}+\vec{j}-6\vec{k}$, $\overrightarrow{AC}=-\vec{i}-2\vec{j}-3\vec{k}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{i}-3\vec{j}+3\vec{k}$

Soit $\overrightarrow{W}=\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}-2\\1\\-6\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}-1\\-2\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-15\\0\\5\end{pmatrix}=-15\vec{i}+5\vec{k}$

Le vecteur $\overrightarrow{W}$ est perpendiculaire au deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ donc aussi au vecteur $\overrightarrow{BC}$, alors il est perpendiculaire au plan (π) formé par ces trois vecteurs. On déduit le vecteur unitaire normal au plan (π) par : $\vec{n}=\dfrac{\overrightarrow{W}}{W}=\dfrac{-15\vec{i}+5\vec{k}}{\sqrt{106}}$

On peut vérifier facilement :

$$\vec{n}\bullet\overrightarrow{AB}=\left(\frac{-15\,\vec{i}+5\,\vec{k}}{\sqrt{106}}\right)\bullet\left(-2\,\vec{i}+\vec{j}-6\,\vec{k}\right)=30-30=0$$

$$\vec{n}\bullet\overrightarrow{AC}=\left(\frac{-15\,\vec{i}+5\,\vec{k}}{\sqrt{106}}\right)\bullet\left(-\vec{i}-2\,\vec{j}-3\,\vec{k}\right)=15-15=0$$

$$\vec{n}\bullet\overrightarrow{BC}=\left(\frac{-15\,\vec{i}+5\,\vec{k}}{\sqrt{106}}\right)\bullet\left(\vec{i}-3\,\vec{j}+3\,\vec{k}\right)=-15+15=0$$

La composante, du vecteur, suivant la normale au plan s'écrirait :

$$\vec{V}_n=\left(\vec{V}\bullet\vec{n}\right)\vec{n}=\left(\left(3\,\vec{i}+\vec{j}-4\,\vec{k}\right)\bullet\frac{1}{\sqrt{106}}\left(-15\,\vec{i}+5\,\vec{k}\right)\right)\vec{n}=-\frac{65}{\sqrt{106}}\vec{n}$$

$$\vec{V}_n=-\frac{65}{\sqrt{106}}\vec{n}=-\frac{65}{\sqrt{106}}\left(\frac{-15\,\vec{i}+5\,\vec{k}}{\sqrt{106}}\right)=\frac{1}{106}\left(975\,\vec{i}-325\,\vec{k}\right)$$

La composante dans le plan (π) se déduit par :

$$\vec{V}_\pi=\vec{V}-\vec{V}_n=\left(3\,\vec{i}+\vec{j}-4\,\vec{k}\right)-\frac{1}{106}\left(975\,\vec{i}-325\,\vec{k}\right)=\frac{1}{106}\left(-657\,\vec{i}+\vec{j}-99\,\vec{k}\right)$$

Exercice 07 :

Soient trois vecteurs libres $\vec{U},\ \vec{V},\ \vec{W}$; montrer qu'il vérifient la relation suivante :

$$\vec{U}\wedge\left(\vec{V}\wedge\vec{W}\right)+\vec{W}\wedge\left(\vec{U}\wedge\vec{V}\right)+\vec{V}\wedge\left(\vec{W}\wedge\vec{U}\right)=\vec{0}$$

Solution :

On utilise la formule de développement du double produit vectoriel.

$$\vec{U}\wedge\left(\vec{V}\wedge\vec{W}\right)=\vec{V}\left(\vec{U}\bullet\vec{W}\right)-\vec{W}\left(\vec{U}\bullet\vec{V}\right)$$

$$\vec{W}\wedge\left(\vec{U}\wedge\vec{V}\right)=\vec{U}\left(\vec{W}\bullet\vec{V}\right)-\vec{V}\left(\vec{W}\wedge\vec{U}\right)$$

$$\vec{V}\wedge\left(\vec{W}\wedge\vec{U}\right)=\vec{W}\left(\vec{V}\bullet\vec{U}\right)-\vec{U}\left(\vec{V}\bullet\vec{W}\right)$$

La somme des trois termes donne :

$$\vec{V}\left(\vec{U}\bullet\vec{W}\right)-\vec{W}\left(\vec{U}\bullet\vec{V}\right)+\vec{U}\left(\vec{W}\bullet\vec{V}\right)-\vec{V}\left(\vec{W}\bullet\vec{U}\right)+\vec{W}\left(\vec{V}\bullet\vec{U}\right)-\vec{U}\left(\vec{V}\bullet\vec{W}\right)=$$

$$\vec{V}\left(\vec{U}\bullet\vec{W}\right)-\vec{V}\left(\vec{W}\bullet\vec{U}\right)-\vec{W}\left(\vec{U}\bullet\vec{V}\right)+\vec{W}\left(\vec{V}\bullet\vec{U}\right)+\vec{U}\left(\vec{W}\bullet\vec{V}\right)-\vec{U}\left(\vec{V}\bullet\vec{W}\right)=\vec{0}$$

Comme le produit scalaire est commutatif alors :

$$\left(\vec{V}-\vec{V}\right)\left(\vec{W}\bullet\vec{U}\right)+\left(\vec{W}-\vec{W}\right)\left(\vec{V}\bullet\vec{U}\right)+\left(\vec{U}-\vec{U}\right)\left(\vec{V}\bullet\vec{W}\right)=\vec{0}$$

Exercice 08 :

Dans un repère orthonormé $R(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, deux points A et B ont pour coordonnées : *A(2, 2, -3)* et *B(5, 3, 2)* ; Déterminer :

1) Le moment du vecteur glissant $\overrightarrow{AB}$ par rapport au centre O du repère ;

2) Le moment du vecteur glissant $\overrightarrow{AB}$ par rapport à la droite (Δ) passant par le point O et le point *C(2, 2, 1)*

Solution :

1) Le moment du vecteur $\overrightarrow{AB}$ par rapport au point O est donné par :

$$\overrightarrow{M_O}=\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}2\\2\\-3\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}3\\1\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13\\-19\\-4\end{pmatrix}=13\,\vec{i}-19\,\vec{j}-4\,\vec{k}\ ;$$

2) Moment du vecteur $\overrightarrow{AB}$ par rapport au point à la droite (Δ) définie par le point O et le vecteur unitaire $\vec{u}$ tel que :

$$\vec{u}=\frac{\overrightarrow{OC}}{OC}=\frac{2\,\vec{i}+2\,\vec{j}+\vec{k}}{\sqrt{4+4+1}}=\frac{1}{3}\left(2\,\vec{i}+2\,\vec{j}+\vec{k}\right)$$

$$\overrightarrow{M_\Delta}=\left(\overrightarrow{M_O}\bullet\vec{u}\right)\vec{u}=\begin{pmatrix}13\\-19\\-4\end{pmatrix}\bullet\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}\vec{u}=\frac{1}{3}(26-38-4)\,\vec{u}=-\frac{16}{3}\vec{u}\ ;$$

Exercice 09 :

Soient les trois vecteurs $\vec{V_1} = -\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$; $\vec{V_2} = \vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{V_3} = \vec{i} - \vec{j}$ définis dans un repère orthonormé $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et liés respectivement au points $A(0,1,2)$, $B(1,0,2)$, $C(1,2,0)$

1) Construire le torseur $[T]_O$ associé au système de vecteurs $\vec{V_1}, \vec{V_2}, \vec{V_3}$;
2) En déduire l'automoment ;
3) Calculer le pas du torseur ;
4) Déterminer l'axe central du torseur vectoriellement et analytiquement.

Solution :

1) Les éléments de réduction du torseur $[T]_O$ sont :

La résultante : $\vec{R} = \vec{V_1} + \vec{V_2} + \vec{V_3} = \vec{j} + 3\vec{k}$

Le moment au point O : $\vec{M_O} = \vec{OA} \wedge \vec{V_1} + \vec{OB} \wedge \vec{V_2} + \vec{OC} \wedge \vec{V_3}$

$$\vec{M_O} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

2) L'automoment : $A = \vec{R} \bullet \vec{M_O} = \left(\vec{j} + 3\vec{k}\right) \bullet \left(-\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}\right) = -2 - 3 = -5$

3) Pas du torseur : $p = \dfrac{\vec{R} \bullet \vec{M_O}}{R^2} = \dfrac{-5}{\sqrt{1^2 + 3^2}} = -\dfrac{5}{\sqrt{10}}$

4) Equation vectorielle de l'axe central :

Si l'axe (Δ) est un axe central alors : $\forall \; P \in (\Delta) \;\; \Rightarrow \;\; \vec{M_P} = \lambda \vec{R}$

Son équation vectorielle est donnée par : $\vec{OP} = \dfrac{\vec{R} \wedge \vec{M_O}}{R^2} + \lambda \vec{R}$ avec $\lambda \in IR$

$$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}-1\\-2\\-1\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix}5\\-3\\1\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\vec{i} + \left(-\frac{3}{10}+\lambda\right)\vec{j} + \left(\frac{1}{10}+3\lambda\right)\vec{k}$$

Si $\overrightarrow{OP} = \begin{cases} x \\ y \\ z \end{cases}_{R_0}$ alors : $x = \frac{1}{2}$; $y = -\frac{3}{10} + \lambda$ et $z = \frac{1}{10} + 3\lambda$

D'où : $z = \frac{1}{10} + 3\left(y + \frac{3}{10}\right) = \frac{1}{10} + 3y + \frac{9}{10} = 3y + 1$

L'axe central est une droite dans un plan parallèle au plan (yOz) situé à $x = \frac{1}{2}$ et d'équation : $z = 3y + 1$

Exercice 10 :

Soit le torseur $[T_1]_O$ défini par les trois vecteurs $\vec{V}_1 = -2\vec{i} + 3\vec{j} - 7\vec{k}$; $\vec{V}_2 = 3\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$, $\vec{V}_3 = -\vec{i} - 2\vec{j} + 8\vec{k}$ définis dans un repère orthonormé $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ respectivement au points $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$, $C(0,0,1)$; et le torseur $[T_2]_O = \begin{cases} \vec{R}_2 \\ \overrightarrow{M}_{20} \end{cases}$ où $\vec{R}_2 = 2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$ et $\overrightarrow{M}_{20} = -3\vec{i} + 2\vec{j} - 7\vec{k}$.

1) Déterminer les éléments de réduction du torseur $[T_1]_O$, conclusion;
2) Déterminer le pas et l'axe central du torseur $[T_2]_O$;
3) Calculer la somme et le produit des deux torseurs ;
4) Calculer l'automoment du torseur somme .

Solution :

1) Eléments de réduction du torseur: $[T_1]_O = \begin{cases} \vec{R}_1 = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3 \\ \overrightarrow{M}_{1O} = \overrightarrow{OA} \wedge \vec{V}_1 + \overrightarrow{OB} \wedge \vec{V}_2 + \overrightarrow{OC} \wedge \vec{V}_3 \end{cases}$

$$\vec{R}_1 = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3 = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{M}_{1O} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}-2\\3\\-7\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}3\\-1\\-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}-1\\-2\\8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\7\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1\\0\\-3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\6\\0\end{pmatrix} = \vec{i} + 6\vec{j}$$

$$[T_1]_O = \begin{cases} \vec{R}_1 = \vec{0} \\ \overrightarrow{M}_{1O} = \vec{i} + 6\vec{j} \end{cases}$$

2) Pas et axe central du torseur $[T_2]_O$

Pas du torseur : $P_2 = \dfrac{\vec{R}_2 \bullet \overrightarrow{M}_2}{R_2^2} = \dfrac{\left(2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}\right) \bullet \left(-3\vec{i} + 2\vec{j} - 7\vec{k}\right)}{4+1+9} = \dfrac{-3+2-21}{14} = -\dfrac{11}{7}$

Axe central du torseur : $\overrightarrow{OP} = \dfrac{\vec{R}_2 \wedge \overrightarrow{M}_2}{R_2^2} + \lambda \vec{R}_2$

$$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{14}\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}-3\\2\\-7\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} = \frac{1}{14}\begin{pmatrix}-13\\5\\7\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\dfrac{13}{14} + 2\lambda\\ \dfrac{5}{14} + \lambda \\ \dfrac{1}{2} + 3\lambda\end{pmatrix}$$

3) Somme et produit des deux torseurs

a) *Somme des deux torseurs :*

$$[T]_O = [T_1]_O + [T_2]_O = \begin{cases} \vec{R} = \vec{R}_1 + \vec{R}_2 = 2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k} \\ \overrightarrow{M}_O = \overrightarrow{M}_{1O} + \overrightarrow{M}_{2O} = -2\vec{i} + 8\vec{j} - 7\vec{k} \end{cases}$$

b) *Produit des deux torseurs :*

$$[T_1]_O \bullet [T_2]_O = \begin{cases} \vec{R}_1 \\ \overrightarrow{M}_{1O} \end{cases} \bullet \begin{cases} \vec{R}_2 \\ \overrightarrow{M}_{2O} \end{cases} = \vec{R}_1 \bullet \overrightarrow{M}_{2O} + \vec{R}_2 \bullet \overrightarrow{M}_{1O} = \left(2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}\right) \bullet \left(-3\vec{i} + 2\vec{j} - 7\vec{k}\right) = -25$$

4) Automoment du torseur somme :

$$F = \vec{R} \bullet \overrightarrow{M}_O = \left(2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}\right) \bullet \left(-2\vec{i} + 8\vec{j} - 7\vec{k}\right) = -17$$

Exercice 11 :

Soit A un point de l'espace dans un repère orthonormé $R(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, avec $\vec{OA} = -\frac{21}{9}\vec{i} - \frac{4}{9}\vec{j} - \frac{12}{9}\vec{k}$ et un vecteur $\vec{V_1} = -3\,\vec{i} + \vec{j} + 3\,\vec{k}$ dont l'axe passe par le point A .

Soit $[T_2]_0$ un torseur défini au point O par ses éléments de réduction $\vec{R_2}$ et $\vec{M_{20}}$ tel que :

$$[T_2]_0 = \begin{cases} \vec{R_2} = (\alpha - 4)\,\vec{i} + \alpha\,\vec{j} + 3\alpha\,\vec{k} \\ \vec{M_{20}} = (2\alpha + 9)\,\vec{j} + (-3\alpha - \frac{2}{3})\,\vec{k} \end{cases}$$

1) Déterminer les éléments de réduction du torseur $[T_1]_0$ dont la résultante est le vecteur $\vec{V_1}$;
2) Pour quelle valeur de α les deux torseurs sont égaux ;
3) En déduire le pas et l'axe central du torseur $[T_2]_0$ pour cette valeur de α.
4) Calculer le produit des deux torseurs pour $\alpha = 2$

Solution :

1) Eléments de réduction du torseur $[T_1]_0$

$$[T_1]_0 = \begin{cases} \vec{V_1} = -3\,\vec{i} + \vec{j} + 3\,\vec{k} \\ \vec{M_{10}} = \vec{OA} \wedge \vec{V_1} \end{cases} \quad ; \text{ d'où } \quad \vec{M_{10}} = \vec{OA} \wedge \vec{V_1} = \begin{pmatrix} -21/9 \\ -4/9 \\ -12/9 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 11 \\ -11/3 \end{pmatrix}$$

$$[T_1]_0 = \begin{cases} \vec{V_1} = -3\,\vec{i} + \vec{j} + 3\,\vec{k} \\ \vec{M_{10}} = 11\,\vec{j} - (11/3)\,\vec{k} \end{cases}$$

2) Les deux torseurs sont égaux si leurs éléments de réductions sont égaux.

$$[T_1]_0 = [T_2]_0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \vec{V_1} = \vec{R_2} \\ \vec{M_{10}} = \vec{M_{20}} \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} -3\,\vec{i} + \vec{j} + 3\,\vec{k} = (\alpha - 4)\,\vec{i} + \alpha\,\vec{j} + 3\alpha\,\vec{k} \\ 11\,\vec{j} - \frac{11}{3}\vec{k} = (2\alpha + 9)\,\vec{j} + (-3\alpha - \frac{2}{3})\,\vec{k} \end{cases}$$

Cette égalité est vérifiée pour : $\underline{\alpha = 1}$

4) Pas et axe central du torseur $[T_2]_0$ pour $\alpha = 1$.

Le torseur s'écrit : $[T_2]_0 = \begin{cases} \vec{R}_2 = -3\,\vec{i} + \vec{j} + 3\,\vec{k} \\ \overrightarrow{M}_{20} = 11\,\vec{j} - (11/3)\,\vec{k} \end{cases}$

Pas du torseur : $P_2 = \dfrac{\vec{R}_2 \bullet \overrightarrow{M}_{20}}{R_2^2} = \dfrac{1}{19}\left(-3\,\vec{i} + \vec{j} + 3\,\vec{k}\right) \bullet \left(11\,\vec{j} - \dfrac{11}{3}\vec{k}\right) = 0$

Axe central du torseur : C'est l'ensemble des point P tel que : $\overrightarrow{OP} = \dfrac{\vec{R}_2 \wedge \overrightarrow{M}_{20}}{R_2^2} + \lambda\,\vec{R}_2$

$$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{19}\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 11 \\ -11/3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{110}{57} - 3\lambda \\ -\dfrac{11}{19} + \lambda \\ -\dfrac{33}{19} + 3\lambda \end{pmatrix}$$

si (x, y, z) sont les coordonnées du point P alors : nous aurons les trois équations scalaires:

$$x = -\frac{110}{57} - 3\lambda \quad , \quad y = -\frac{11}{19} + \lambda \quad , \quad z = -\frac{33}{19} + 3\lambda$$

le point P décrit la courbe : $2x + 3y + z = -\dfrac{385}{57}$

5) Produit des deux torseurs pour $\alpha = 2$

Pour $\alpha = 2$ le torseur $[T_2]_0$ s'écrit : $[T_2]_0 = \begin{cases} \vec{R}_2 = -2\,\vec{i} + 2\,\vec{j} + 6\,\vec{k} \\ \overrightarrow{M}_{20} = 13\,\vec{j} - \dfrac{20}{3}\vec{k} \end{cases}$

$$[T_1]_O \bullet [T_2]_O = \begin{cases} \vec{V}_1 \\ \overrightarrow{M}_{1O} \end{cases} \bullet \begin{cases} \vec{R}_2 \\ \overrightarrow{M}_{2O} \end{cases} = \vec{V}_1 \bullet \overrightarrow{M}_{2O} + \vec{R}_2 \bullet \overrightarrow{M}_{1O} = -7$$

Exercice 12 :

Soient deux torseurs $[T_1]_A$ et $[T_2]_A$ définis au même point A par leurs éléments de réduction dans un repère orthonormé $R(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$:

$$[T_1]_A = \begin{cases} \vec{R_1} = -3\,\vec{i} + 2\,\vec{j} + 2\,\vec{k} \\ \overrightarrow{M_{1A}} = 4\,\vec{i} - \vec{j} - 7\,\vec{k} \end{cases} \quad \text{et} \quad [T_2]_A = \begin{cases} \vec{R_2} = 3\,\vec{i} - 2\,\vec{j} - 2\,\vec{k} \\ \overrightarrow{M_{2A}} = 4\,\vec{i} + \vec{j} + 7\,\vec{k} \end{cases}$$

1) Déterminer l'axe central et le pas du torseur $[T_1]_A$;

2) Déterminer l'automoment du torseur $[T_1]_A$, montrer qu'il est indépendant du point A ;

3) Construire le torseur $[T]_A = a[T_1]_A + b[T_2]_A$ avec a et $b \in IR$;

4) Quelle relation doivent vérifier a et b pour que le torseur $[T]_A$ soit un torseur couple ;

5) Montrer que le torseur couple est indépendant du point ou on le mesure ;

6) Déterminer le système le plus simple de vecteurs glissants associés au torseur somme : $[T_1]_A + [T_2]_A$

Solution :

1) Axe central et Pas du torseur $[T_1]_A$

Axe central : Il est défini par l'ensemble des points P tel que : $\overrightarrow{OP} = \dfrac{\vec{R_1} \wedge \overrightarrow{M_{1A}}}{R_1^2} + \lambda\,\vec{R_1}$

$$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{17}\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -7 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{17}\begin{pmatrix} -12 \\ -13 \\ -5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{12}{17} - 3\lambda \\ -\dfrac{13}{17} + 2\lambda \\ -\dfrac{5}{17} + 2\lambda \end{pmatrix}$$

Pas du torseur $[T_1]_A$: $P_1 = \dfrac{\vec{R_1} \bullet \overrightarrow{M_{1A}}}{R_1^2} = \dfrac{1}{17}\left(-3\,\vec{i} + 2\,\vec{j} + 2\,\vec{k}\right) \bullet \left(4\,\vec{i} - \vec{j} - 7\,\vec{k}\right) = -\dfrac{28}{17}$

2) Automoment du torseur $[T_1]_A$: $\vec{R_1} \bullet \overrightarrow{M_{1A}} = \left(-3\,\vec{i} + 2\,\vec{j} + 2\,\vec{k}\right) \bullet \left(4\,\vec{i} - \vec{j} - 7\,\vec{k}\right) = -28$

L'automoment est indépendant du point A. En effet, d'après la formule de transport nous pouvons écrire : $\vec{M}_A = \vec{M}_B + \vec{AB} \wedge \vec{R}_1 \quad \Rightarrow \quad \vec{R}_1 \bullet \vec{M}_A = \vec{R}_1 \bullet \vec{M}_B + \vec{R}_1 \bullet \left(\vec{AB} \wedge \vec{R}_1 \right)$

$\vec{R}_1 \bullet \vec{M}_A = \vec{R}_1 \bullet \vec{M}_B$, on voit bien qu'il est indépendant du point A.

3) $[T]_A = a[T_1]_A + b[T_2]_A \quad \Leftrightarrow \quad [T]_A = \begin{cases} R = a\vec{R}_1 + b\vec{R}_2 \\ \vec{M}_A = a\vec{M}_{1A} + b\vec{M}_{2A} \end{cases}$

$$[T]_A = \begin{cases} \vec{R} = -3(a-b)\,\vec{i} + 2(a-b)\,\vec{j} + 2(a-b)\,\vec{k} \\ \vec{M}_{1A} = 4(a+b)\,\vec{i} - (a-b)\,\vec{j} - 7(a-b)\,\vec{k} \end{cases}$$

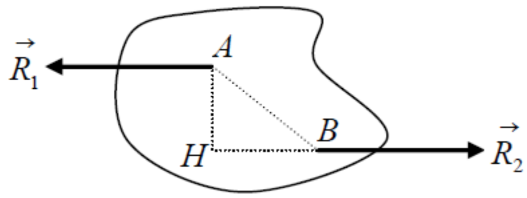
4) Condition pour que $[T]_A$ soit un torseur couple :

il faut que la résultante soit nulle : $\vec{R} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad a = b$

Le moment dans ce cas sera égal à : $\vec{M}_{1A} = 4(a+b)\,\vec{i} = 8a\,\vec{i}$

5) Le moment d'un torseur couple où les résultantes $\vec{R}_1$, $\vec{R}_2$ ont le même module mais de sens opposées et appliquées aux points quelconque A et B s'écrit :

$$\begin{aligned} \vec{M}_A &= \vec{OA} \wedge \vec{R}_1 + \vec{OB} \wedge \vec{R}_2 = \vec{OA} \wedge \vec{R}_1 + \vec{OB} \wedge (-\vec{R}_1) \\ &= \vec{BA} \wedge \vec{R}_1 = \left(\vec{BH} + \vec{HA} \right) \wedge \vec{R}_1 \\ &= \vec{HA} \wedge \vec{R}_1 = -\vec{AH} \wedge \vec{R}_1 = \vec{AH} \wedge \vec{R}_2 \end{aligned}$$

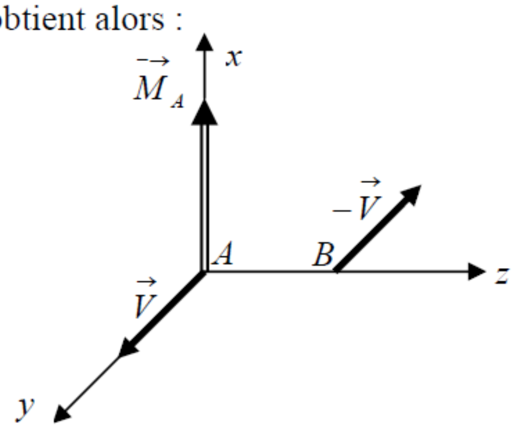


Le moment d'un couple est indépendant de la distance entre les points A et B , il dépend uniquement de la distance qui sépare les deux droites supports des résultantes. Cette distance est appelée bras de levier.

6) Système simple de vecteurs glissants associés au torseur somme : $[T_1]_A + [T_2]_A$

Le torseur somme $[T]_A$ est donné par : $[T]_A = \begin{cases} \vec{R} = \vec{0} \\ \overrightarrow{M_A} = 8\,\vec{i} \end{cases}$

La résultante peut être décomposées en deux vecteurs quelconque de même module et de sens opposé dont l'un des vecteurs est placé au point A, on obtient alors :



$\overrightarrow{M_A} = \overrightarrow{AA} \wedge \vec{V} + \overrightarrow{AB} \wedge -\vec{V} = \overrightarrow{AB} \wedge -\vec{V} = 5\,\vec{i}$

système de deux vecteurs glissants : $\left(A,\ \vec{\mathrm{V}}\right)$

et $\left(B,\ -\vec{\mathrm{V}}\right)$, tel que : $\vec{V} \bullet \overrightarrow{M_A} = 0$