Exercice 01 :

Déterminer les tensions des câbles dans les figures suivantes :

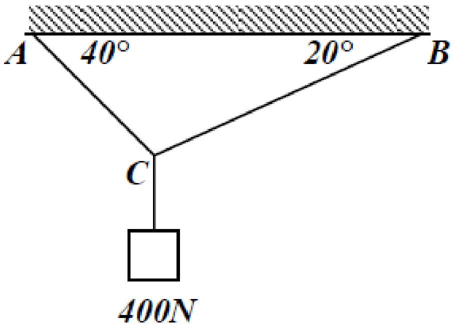


figure: 1

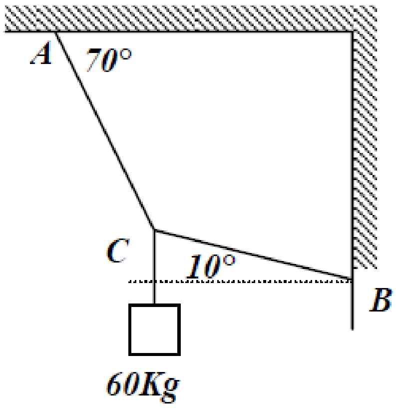


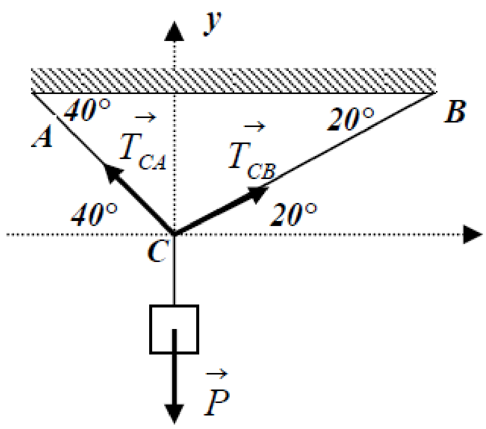
figure : 2

Solution :

Figure 1 :

Au point C nous avons :

$$\vec{T}_{CA} + \vec{T}_{CB} + \vec{P} = \vec{0}$$



La projection sur les axes donne :

$$-T_{CA}\cos 40° + T_{CB}\cos 20° = 0$$

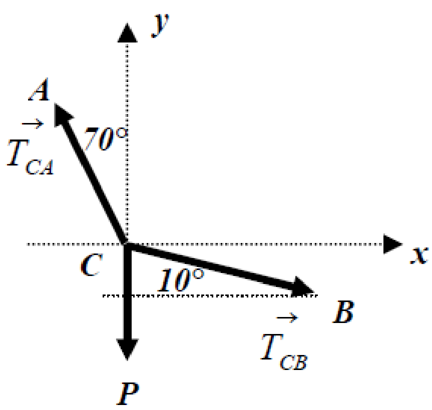
$$T_{CA}\sin 40° + T_{CB}\sin 20° - P = 0$$

d'où : $T_{CA} = 354\ N$. $T_{CB} = 288{,}5\ N$

Figure 2 :

Au point C nous avons :

$$\vec{T}_{CA} + \vec{T}_{CB} + \vec{P} = \vec{0}$$



La projection sur les axes donne :

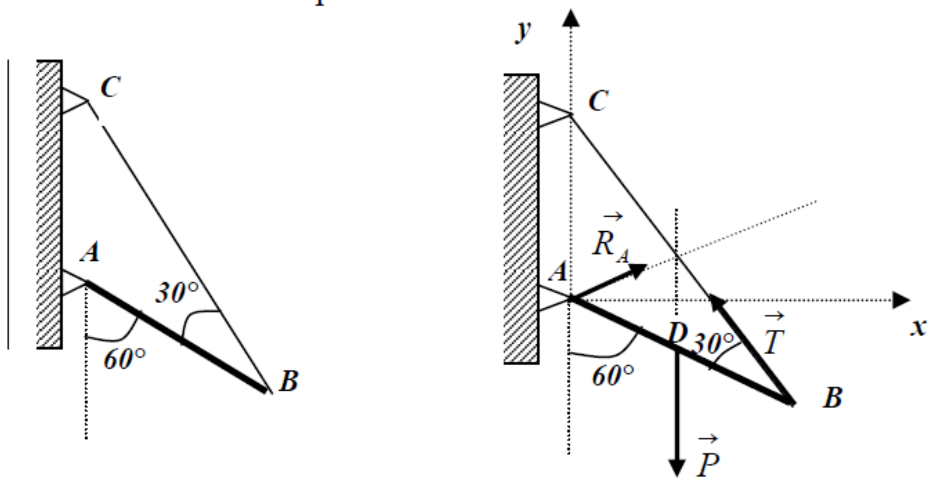
$$-T_{CA}\sin 70° + T_{CB}\cos 10° = 0$$

$$T_{CA}\cos 70° - T_{CB}\sin 10° - P = 0$$

d'où : $T_{CA} = 3390\ N$; $T_{CB} = 3234\ N$

Exercice 02 :

Une barre homogène pesant ***80 N*** est liée par une articulation cylindrique en son extrémité ***A*** à un mur. Elle est retenue sous un angle de ***60°*** avec la verticale par un câble inextensible de masse négligeable à l'autre extrémité ***B***. Le câble fait un angle de ***30°*** avec la barre. Déterminer la tension dans le câble et la réaction au point ***A***.



Solution :

Le système est en équilibre statique dans le plan *(xoy)*, nous avons alors :

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{R}_A + \vec{T} + \vec{P} = \vec{0} \qquad \textit{(1)}$$

$$\sum_i \overrightarrow{M}_{i/A} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AB} \wedge \vec{T} + \overrightarrow{AD} \wedge \vec{P} = \vec{0} \qquad \textit{(2)}$$

$$\overrightarrow{AB}\begin{cases} L\cos 30° \\ L\sin 30° \end{cases} \; ; \quad \overrightarrow{AD}\begin{cases} (L/2)\cos 30° \\ (L/2)\sin 30° \end{cases} \; ; \quad \vec{P}\begin{cases} 0 \\ -P \end{cases} \; ; \quad \vec{T}\begin{cases} -T\cos 60° \\ T\sin 60° \end{cases}$$

L'équation ***(1)*** projetée sur les axes donne : $R_{Ax} - T\cos 60° = 0 \qquad \textit{(3)}$

$$R_{Ay} + T\sin 60° - P = 0 \qquad \textit{(4)}$$

L'équation ***(2)*** s'écrira : $\begin{pmatrix} L\cos 30° \\ L\sin 30° \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -T\cos 60° \\ T\sin 60° \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (L/2)\cos 30° \\ (L/2)\sin 30° \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ -P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$LT\cos 30° s\sin 60° + LT\cos 60°\sin 30° - \frac{PL}{2}\cos 30° = 0 \qquad \textit{(5)}$$

(5) $\Rightarrow$ $T = \dfrac{P}{2}\cos 30° = 34{,}64N$

(3) $\Rightarrow$ $R_{AX} = T\cos 60° = 17{,}32N$

(4) $\Rightarrow$ $R_{Ay} = P - T\sin 60° = 30N$

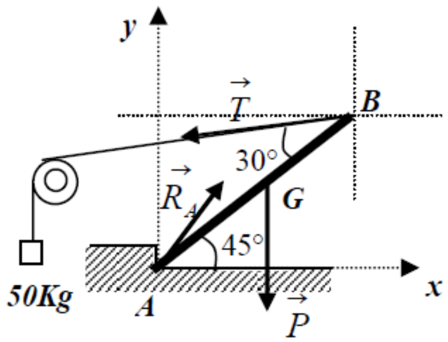
d'où $R_A = \sqrt{R_{Ax}^2 + R_{AY}^2} = 34.64N$ et l'angle que fait la réaction avec l'axe ***ox*** est donné par :

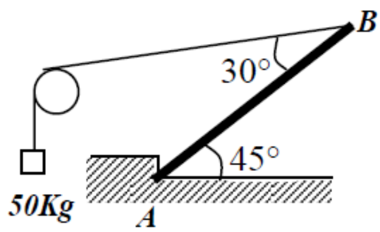
$$\cos\theta = \frac{R_{Ax}}{R_A} = 0{,}5 \qquad \Rightarrow \qquad \theta = 60°$$

Exercice 03 :

On maintient une poutre en équilibre statique à l'aide d'une charge ***P*** suspendue à un câble inextensible de masse négligeable, passant par une poulie comme indiqué sur la figure. La poutre a une longueur de ***8m*** et une masse de ***50 Kg*** et fait un angle de ***45°*** avec l'horizontale et ***30°*** avec le câble.

Déterminer la tension dans le câble ainsi que la grandeur de la réaction en ***A*** ainsi que sa direction par rapport à l'horizontale.





Solution :

Toutes les forces agissant sur la poutre sont dans le plan *(xoy)* . Le système est en équilibre statique d'où

$$\sum_i \vec{F_i} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{R_A} + \vec{T} + \vec{P} = \vec{0} \qquad \textbf{(1)}$$

$$\sum_i \overrightarrow{M}_{i/A} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AB} \wedge \vec{T} + \overrightarrow{AG} \wedge \vec{P} = \vec{0} \qquad \textbf{(2)}$$

Nous avons $T = P$, et $\overrightarrow{AB}\begin{cases}4\sqrt{2}\\4\sqrt{2}\end{cases}$; $\overrightarrow{AG}\begin{cases}2\sqrt{2}\\2\sqrt{2}\end{cases}$; $\vec{P}\begin{cases}0\\-P\end{cases}$; $\vec{T}\begin{cases}-T\cos 15°\\-T\sin 15°\end{cases}$; $\vec{R}_A\begin{cases}R_{Ax}\\R_{Ay}\end{cases}$

L'équation ***(1)*** projetée sur les axes donne : $R_{Ax} - T\cos 15° = 0$ ***(3)***

$R_{Ay} - T\sin 15° - P = 0$ ***(4)***

L'équation ***(2)*** s'écrira : $\begin{pmatrix}4\sqrt{2}\\4\sqrt{2}\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}-T\cos 15°\\-T\sin 15°\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\sqrt{2}\\2\sqrt{2}\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}0\\-P\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

$$-4T\sqrt{2}\sin 15° + 4T\sqrt{2}\cos 15° - 2P\sqrt{2} = 0 \qquad \textbf{\textit{(5)}}$$

$$T = \frac{2P\sqrt{2}}{4\sqrt{2}(\cos 15° - \sin 15°)} \quad \Rightarrow \quad T = 353{,}55N$$

(3) $\Rightarrow$ $R_{Ax} = 341{,}50N$ et ***(4)*** $\Rightarrow$ $R_{Ay} = 591{,}50N$

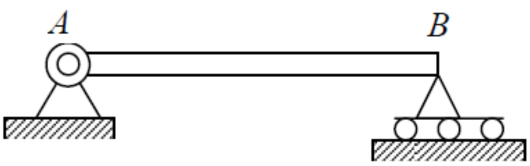
d'où $R_A = \sqrt{R_{Ax}^2 + R_{AY}^2} = 683N$ et l'angle que fait la réaction avec l'axe ***ox*** est donné par :

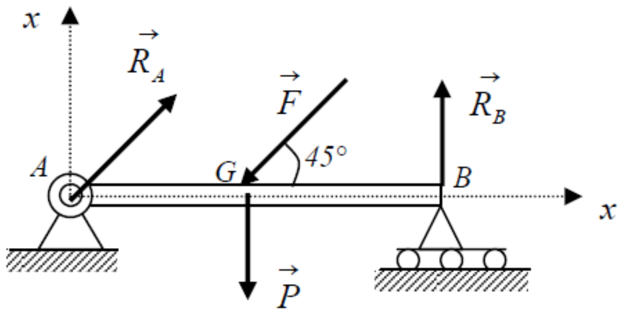
$$\cos\theta = \frac{R_{Ax}}{R_A} = 0{,}577 \qquad \Rightarrow \qquad \theta = 54{,}76°$$

Exercice 04 :

La barre ***AB=L*** est liée en ***A*** par une articulation cylindrique et à son extrémité ***B***, elle repose sur un appui rouleau. Une force de ***200 N*** agit en son milieu sous un angle de ***45°*** dans le plan vertical. La barre a un poids de ***50 N***.

Déterminer les réactions aux extrémités ***A*** et ***B***.





Solution :

Toutes les forces agissant sur la poutre sont situées dans le plan *(xoy)* . Le système est en équilibre statique, nous avons alors :

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{R}_A + \vec{R}_B + \vec{F} + \vec{P} = \vec{0} \qquad \textbf{(1)}$$

$$\sum_i \overrightarrow{M}_{i/A} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AB} \wedge \vec{R}_B + \overrightarrow{AG} \wedge \vec{F} + \overrightarrow{AG} \wedge \vec{P} = \vec{0} \qquad \textbf{(2)}$$

La projection de l'équation ***(1)*** sur les axes donne :

$$R_{Ax} - F\cos 45° = 0 \qquad \textbf{(3)}$$

$$R_{Ay} + R_B - F\sin 45° - P = 0 \qquad \textbf{(4)}$$

En développant l'équation ***(2)*** on aboutit à :

$$\begin{pmatrix} L \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ R_B \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} L/2 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -F\cos 45° \\ -F\sin 45° \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} L/2 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ -P \end{pmatrix} = 0$$

$$LR_B - \frac{L}{2}F\cos 45° - \frac{L}{2}P = 0 \quad \Leftrightarrow \quad R_B - \frac{F\sqrt{2}}{4} - \frac{P}{2} = 0 \qquad \textbf{(5)}$$

(5) $\Rightarrow$ $R_B = 95{,}71\ N$

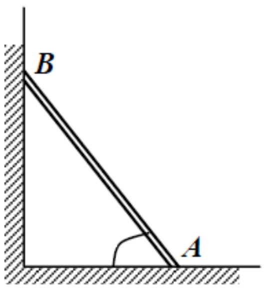
(3) $\Rightarrow$ $R_{Ax} = 141{,}42\ N$

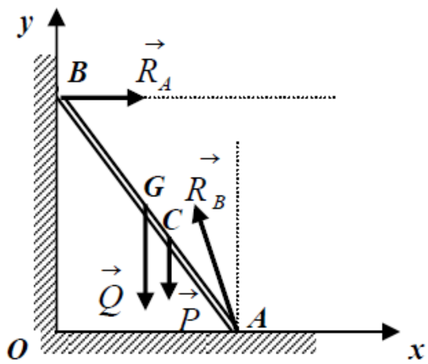
(4) $\Rightarrow$ $R_{Ay} = 95{,}71\ N$; d'où $R_A = \sqrt{R_{Ax}^2 + R_{Ay}^2} = 170{,}76N$

Exercice 05 :

Une échelle de longueur ***20 m*** pesant ***400 N*** est appuyée contre un mur parfaitement lisse en un point situé à ***16 m*** du sol. Son centre de gravité est situé à ***1/3*** de sa longueur à partir du bas. Un homme pesant ***700 N*** grimpe jusqu'au milieu de l'échelle et s'arrête. On suppose que le sol est rugueux et que le système reste en équilibre statique.

Déterminer les réactions aux points de contact de l'échelle avec le mur et le sol.





Solution :

$AB = L = 20\ m$, $OB = 16\ m$, $Q = 700\ N$, $P = 400\ N$, $\sin\alpha = \dfrac{OB}{AB} = \dfrac{16}{20} = 0{,}8 \quad \Rightarrow \alpha = 53{,}13°$

L'échelle est en équilibre statique. La résultante des forces est nulle. Le moment résultant par rapport au point A est aussi nul.

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{0} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{R}_A + \vec{R}_B + \vec{Q} + \vec{P} = \vec{0} \qquad \textbf{(1)}$$

$$\sum_i \overrightarrow{M}_{i/A} = \vec{0} \qquad \Rightarrow \qquad \overrightarrow{AB} \wedge \vec{R}_B + \overrightarrow{AG} \wedge \vec{Q} + \overrightarrow{AC} \wedge \vec{P} = \vec{0} \qquad \textbf{(2)}$$

Nous avons aussi :

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -L\cos\alpha \\ L\sin\alpha \end{pmatrix};\ \overrightarrow{AG}\begin{pmatrix} -(L/2)\cos\alpha \\ (L/2)\sin\alpha \end{pmatrix};\ \overrightarrow{AG}\begin{pmatrix} -(L/3)\cos\alpha \\ (L/3)\sin\alpha \end{pmatrix};\ \vec{R}_B\begin{pmatrix} R_B \\ 0 \end{pmatrix};\ \vec{Q}\begin{pmatrix} 0 \\ -Q \end{pmatrix};\ \vec{P}\begin{pmatrix} 0 \\ -P \end{pmatrix}$$

La projection de l'équation ***(1)*** sur les axes donne les équations scalaires :

$$-R_{Ax} + R_B = 0 \qquad \textbf{(3)}$$

$$R_{Ay} - Q - P = 0 \qquad \textbf{(4)}$$

En développant l'équation (2), on aboutit à :

$$\begin{pmatrix} -L\cos\alpha \\ L\sin\alpha \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} R_B \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -(L/2)\cos\alpha \\ (L/2)\sin\alpha \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ -Q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -(L/3)\cos\alpha \\ (L/3)\sin\alpha \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ -P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$-R_B L\sin\alpha + Q\frac{L}{2}\cos\alpha + P\frac{L}{3}\cos\alpha = 0 \qquad \textbf{(5)}$$

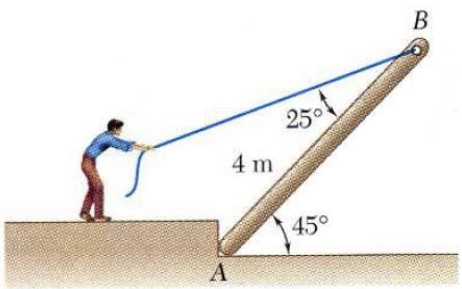
$$\textbf{(5)} \quad \Rightarrow \quad R_B = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\left(\frac{Q}{2} + \frac{P}{3}\right) \qquad \text{d'où} \quad R_B = 362{,}5N$$

$$\textbf{(3)} \quad \Rightarrow \quad R_{Ax} = R_B = 362{,}5N$$

$$\textbf{(4)} \quad \Rightarrow \quad R_{Ay} = 1100N \quad ; \text{ on déduit : } \quad R_A = 1158{,}34N$$

Exercice 06 :

Un homme essaye de soulever une barre métallique **AB** d'une longueur de 4 m et de masse 10 kg, en la tirant par une corde attachée en B. Trouver la tension dans la corde ainsi que la réaction au point A.

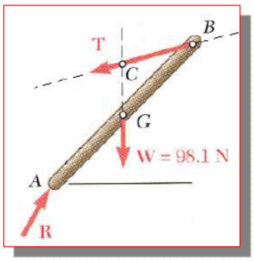


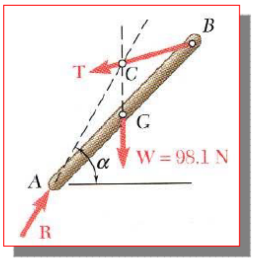
Solution

□ Créer le polygone des forces. Noter que la barre représente un solide soumis à trois glisseurs: la tension, le poids et la réaction en A.

□ Les 3 forces doivent être concourantes pour vérifier l'équilibre statique PFS. Ainsi, la réaction ***R*** doit passer par le point d'intersection des lignes d'actions des deux autres forces : tension et poids. Déterminer la direction de la réaction ***R***.

□ Utiliser la règle des sinus pour déterminer les normes de la réaction ***R*** et de la tension ***T***.





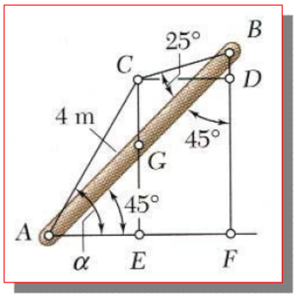
❑ Isoler la barre, lister les efforts extérieurs qui lui sont appliqués ?

❑ Représenter les efforts connus (tension en A et poids en G) sur le solide en prolongeant leurs lignes d'actions afin de trouver le point d'intersection (point C).

❑ Déterminer la direction de la réaction ***R*** en utilisant la règle d'un solide soumis à 3 glisseurs (ligne d'action de ***R*** doit passer par C)

❑ Appliquer le PFS pour chercher les inconnues : ***T***, ***R*** et α

$$\tan\alpha = \frac{CE}{AE} = ?$$



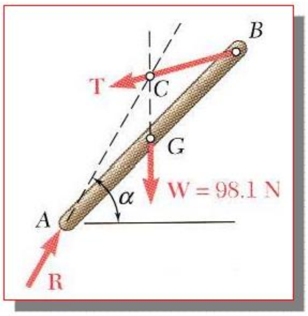
$$AF = AB\cos 45 = (4\,\text{m})\cos 45 = 2.828\,\text{m}$$

$$CD = AE = \tfrac{1}{2}AF = 1.414\ \text{m}$$

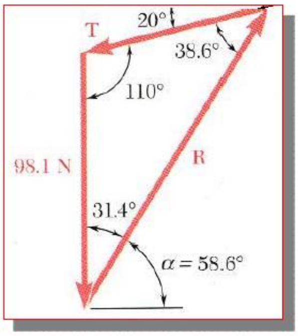
$$BD = CD\cot(45+25) = (1.414\ \text{m})\tan 20 = 0.515\ \text{m}$$

$$CE = BF - BD = (2.828 - 0.515)\ \text{m} = 2.313\ \text{m}$$

$$\tan\alpha = \frac{CE}{AE} = \frac{2.313}{1.414} = 1.636 \Rightarrow \boxed{\alpha = 58.6^\circ}$$



❑ Représenter le polygone des forces (triangle fermé).



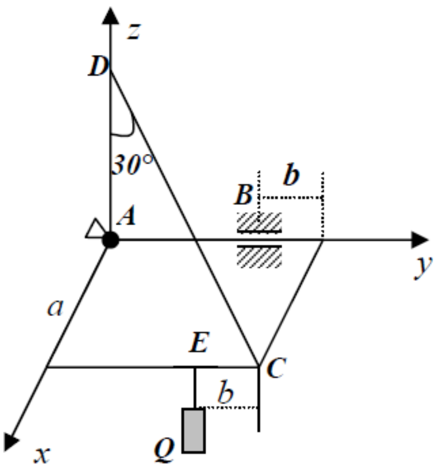
❑ Déterminer les modules (normes) de la réaction ***R*** au point A et de la tension ***T*** en B (triangle fermé : règle des sinus voir cours 2).

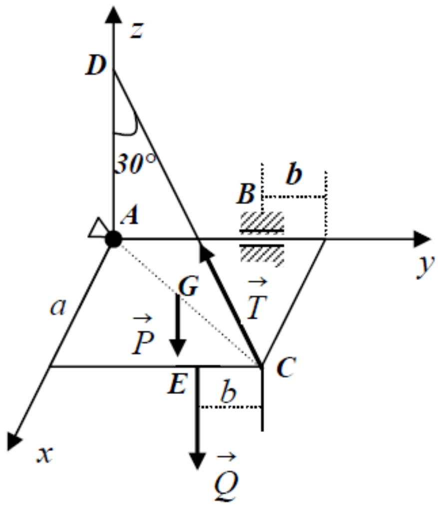
$$\frac{T}{\sin 31.4^\circ} = \frac{R}{\sin 110^\circ} = \frac{98.1\,\text{N}}{\sin 38.6^\circ} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} T = 81.9\,\text{N} \\ R = 147.8\,\text{N} \end{array}}$$

Exercice 07 :

Un plaque carrée de coté **a**, de poids **P** est fixée à un mur à l'aide d'une articulation sphérique au point **A** et d'une articulation cylindrique au point **B**. Un câble **CD** inextensible et de masse négligeable maintient la plaque en position horizontale. Une charge **$Q = 2P$** est suspendue au point **E** de la plaque. Les données sont : $b = \frac{a}{3}$; $\alpha = 30°$

Déterminer les réactions des articulations en **A** et **B** ainsi que la tension dans le câble en fonction de **a** et **P**





Solution :

La plaque est en équilibre statique dans le plan horizontale, nous pouvons écrire :

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{R}_A + \vec{R}_B + \vec{T} + \vec{Q} + \vec{P} = \vec{0} \qquad \textbf{(1)}$$

$$\sum_i \overrightarrow{M}_{i/A} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{AB} \wedge \vec{R}_B + \overrightarrow{AC} \wedge \vec{T} + \overrightarrow{AE} \wedge \vec{Q} + \overrightarrow{AG} \wedge \vec{P} = \vec{0} \qquad \textbf{(2)}$$

Articulation sphérique en **A** : R_{Ax}, R_{Ay}, R_{Az}

Articulation cylindrique en **B** et d'axe **y**: $R_{Bx}, 0, R_{Bz}$

Le triangle **ACD** est rectangle en **A** , et l'angle ***(DA,DC) = 30°*** alors l'angle ***(CA,CD)=60°***

La tension aura pour composantes : $\vec{T} = \begin{pmatrix} -T\cos 60 \cos 45 \\ -T\cos 60 \sin 45 \\ T\sin 60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(T\sqrt{2})/4 \\ -(T\sqrt{2})/4 \\ (T\sqrt{3})/2 \end{pmatrix}$

$$\vec{Q}\begin{pmatrix}0\\0\\-2P\end{pmatrix};\ \vec{P}\begin{pmatrix}0\\0\\-P\end{pmatrix};\ \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0\\2a/3\\0\end{pmatrix};\ \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}a\\a\\0\end{pmatrix};\ \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}a\\2a/3\\0\end{pmatrix};\ \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}a/2\\a/2\\0\end{pmatrix}$$

Projetons l'équation ***(1)*** sur les axes du repère :

$$R_{Ax}+R_{Bx}-(T\sqrt{2})/4=0 \qquad \textbf{(3)}$$

$$R_{Ay}-(T\sqrt{2})/4=0 \qquad \textbf{(4)}$$

$$R_{Az}+R_{Bz}-(T\sqrt{3})/2-2P-P=0 \qquad \textbf{(5)}$$

L'équation ***(2)*** se traduira par :

$$\begin{pmatrix}0\\2a/3\\0\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}R_{Bx}\\0\\R_{Bz}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a\\a\\0\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}-(T\sqrt{2})/4\\-(T\sqrt{2})/4\\(T\sqrt{3})/2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a\\2a/3\\0\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}0\\0\\-2P\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a/2\\a/2\\0\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}0\\0\\-P\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

Le développement de ce produit vectoriel donnera trois équations :

$$\frac{2a}{3}R_{Bz}+aT\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{4aP}{3}-\frac{aP}{2}=0 \qquad \textbf{(6)}$$

$$-aT\frac{\sqrt{3}}{2}+2aP+\frac{aP}{2}=0 \qquad \textbf{(7)}$$

$$-\frac{2a}{3}R_{Bx}=0 \qquad \textbf{(8)}$$

La résolution de ce système d'équations donne :

(8) $\Rightarrow R_{Bx}=0$; ***(7)*** $\Rightarrow T=\frac{5\sqrt{3}}{3}P$; ***(6)*** $\Rightarrow R_{Bz}=-P$

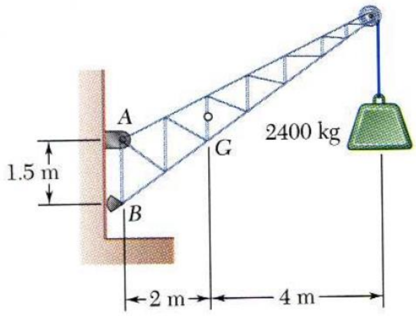
(5) $\Rightarrow R_{Az}=\frac{3}{2}P$; ***(4)*** $\Rightarrow R_{Ay}=\frac{5\sqrt{6}}{12}P$; ***(3)*** $\Rightarrow R_{Ax}=\frac{5\sqrt{6}}{12}P$

$R_A=17{,}39P$ et $R_B=P$

Exercice 08 :

Un treillis de masse 1000 kg fixé à une extrémité et supporte une masse 2400 kg à l'autre. Le centre de gravité du treillis est le point *G*.

Déterminer les composantes des réactions en *A* et *B*.



Solution

• Isoler le système (treillis) et définir un repère d'étude : on a identifié les liaisons:

□ Pivot en A donc, on a deux inconnues, soient Ax et Ay

□ Ponctuelle en B d'où une inconnue en B soit Bx

toutes les A.M. sont représentées sur le solide isolé comme suit :

• Déterminer les réactions aux appuis en appliquant le PFS en un point judicieux!

□ Déterminer la réaction ***B*** en résolvant l'équation somme des moments de toutes les forces / au point A.

$$\sum M_A = 0: \quad +B(1.5\text{m}) - 9.81\,\text{kN}(2\text{m})$$
$$-23.5\,\text{kN}(6\text{m}) = 0$$
$$\Rightarrow \boxed{B = +107.1\,\text{kN}}$$

□ Déterminer les réactions en *A* en résolvant les équations somme de toutes les forces.

$$\sum F_x = 0: \quad A_x + B = 0 \Rightarrow \boxed{A_x = -107.1\,\text{kN}}$$

$$\sum F_y = 0: \quad A_y - 9.81\,\text{kN} - 23.5\,\text{kN} = 0$$
$$\Rightarrow \boxed{A_y = +33.3\,\text{kN}}$$

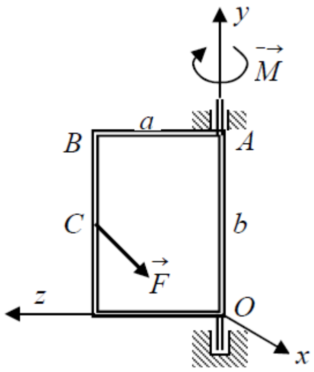
• Vérifier les valeurs des réactions obtenues en appliquant le PFS en n'importe quel point.

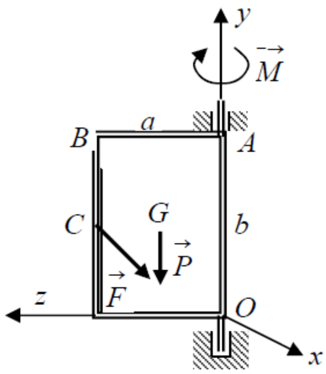
$$\sum F_x = 0: \quad -107.1 + 107.1 = 0$$
$$\sum F_y = 0: \quad +33.3 - 9.81 - 23.5 = 0$$

• Bilan des A.M. extérieures.

Exercice 09 :

Une porte métallique rectangulaire de densité uniforme de dimensions ***a*** x ***b***, de poids ***P***, est maintenue en position verticale par deux articulations, l'une sphérique au point ***O*** et l'autre cylindrique au point ***A***. Une force ***F*** est appliquée perpendiculairement au plan de la porte au point ***C*** milieu de la longueur. Afin de maintenir cette porte en position fermée, on applique un moment $\overrightarrow{M}$ au point ***A***. Déterminer les réactions aux niveau des articulation ***O*** et ***A*** ainsi que la force ***F*** nécessaire pour ouvrir la porte. On donne : ***a = 2m, b = 3m, BC= b/2, M = 400N, P = 800N***





Solution :

Nous avons : $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{OG} = \begin{pmatrix} 0 \\ b/2 \\ a/2 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} 0 \\ b/2 \\ a \end{pmatrix}$

Et aussi : $\overrightarrow{M}=\begin{pmatrix}0\\-M\\0\end{pmatrix}$; $\vec{P}=\begin{pmatrix}0\\-P\\0\end{pmatrix}$; $\vec{F}=\begin{pmatrix}F\\0\\0\end{pmatrix}$; $\vec{R}_O=\begin{pmatrix}R_{Ax}\\R_{Ay}\\R_{Az}\end{pmatrix}$; $\vec{R}_A=\begin{pmatrix}R_{Ax}\\0\\R_{Az}\end{pmatrix}$

La porte est en équilibre statique, nous pouvons écrire :

$$\sum_i \vec{F}_i=\vec{0} \quad\Rightarrow\quad \vec{R}_O+\vec{R}_A+\vec{F}+\vec{P}=\vec{0} \qquad \textbf{(1)}$$

$$\sum_i \overrightarrow{M}_{i/O}=\vec{0} \quad\Rightarrow\quad \overrightarrow{OA}\wedge\vec{R}_B+\overrightarrow{OC}\wedge\vec{F}+\overrightarrow{OG}\wedge\vec{P}=\vec{0} \qquad \textbf{(2)}$$

Projetons l'équation ***(1)*** sur les axes du repère :

$$R_{Ox}+R_{Ax}+F=0 \qquad \textbf{(3)}$$

$$R_{Oy}-P=0 \qquad \textbf{(4)}$$

$$R_{Oz}+R_{Az}=0 \qquad \textbf{(5)}$$

L'équation ***(2)*** se traduira par :

$$\begin{pmatrix}0\\b\\0\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}R_{Ax}\\0\\R_{Az}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\b/2\\a\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}F\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\b/2\\a/2\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}0\\-P\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\-M\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$bR_{Az}+\frac{aP}{2}=0 \qquad \textbf{(6)}$$

$$aF-M=0 \qquad \textbf{(7)}$$

$$-bR_{Ax}-\frac{bF}{2}=0 \qquad \textbf{(8)}$$

la résolution de ce système d'équation nous donne :

(4) $\Rightarrow$ $R_{Oy}=P=800N$; ***(6)*** $\Rightarrow$ $R_{Az}=\dfrac{-aP}{2b}=-266{,}66N$

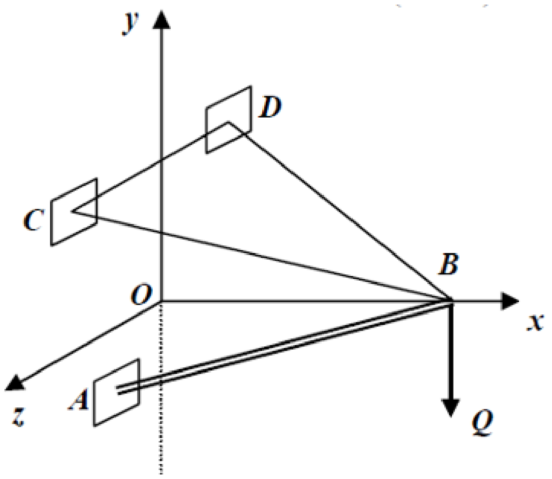
(7) $\Rightarrow$ $F=\dfrac{M}{a}=200N$; ***(8)*** $\Rightarrow$ $R_{Ax}=\dfrac{-F}{2}=-100N$

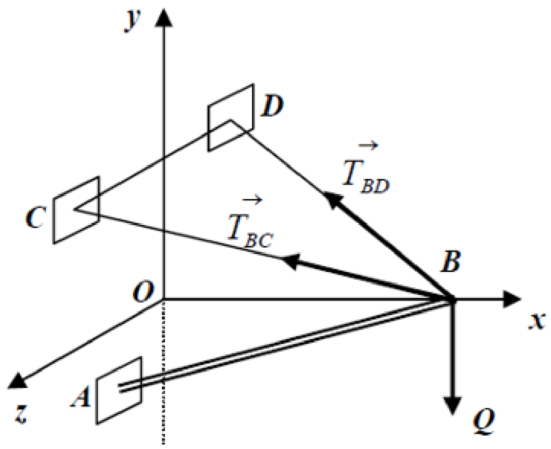
(5) $\Rightarrow$ $R_{Oz}=-R_{Az}=266{,}66N$; ***(3)*** $\Rightarrow$ $R_{Ox}=-R_{Ax}-F=-100N$

on déduit : $R_O=849N$; $R_A=284{,}8N$

Exercice 10 :

Une barre ***AB*** de masse négligeable supporte à son extrémité ***B*** une charge de ***900 N***, comme indiqué sur la figure ci-dessous. Elle est maintenue en ***A*** par une articulation sphérique et en ***B*** par deux câbles attachés aux points ***C*** et ***D***. Déterminer la réaction au point ***A*** et la tension dans chaque câble. Données : $A\begin{pmatrix}0\\-1,,5\\1\end{pmatrix}$; $B\begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix}$; $C\begin{pmatrix}0\\3\\1,5\end{pmatrix}$; $D\begin{pmatrix}0\\3\\-1,5\end{pmatrix}$





Solution :

Le système est en équilibre statique. La résultante des fores est nulle et le moment résultant de toutes les forces par rapport au point A est nul. Nous avons alors :

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{R}_A + \vec{T}_{BC} + \vec{T}_{BD} + \vec{Q} = \vec{0} \qquad \textit{(1)}$$

$$\sum_i \overrightarrow{M}_{i/A} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AB} \wedge \vec{R}_B + \overrightarrow{AB} \wedge \vec{T}_{BC} + \overrightarrow{AB} \wedge \vec{T}_{BD} = \vec{0} \qquad \textit{(2)}$$

Noua avons une articulation sphérique en ***A*** : R_{Ax}, R_{Ay}, R_{Az}

Déterminons les composantes des tensions dans les câbles ***BC*** et ***BD*** :

Les vecteurs unitaires suivant les axes ***BC*** et ***BD*** sont donnés par :

$$\vec{u}_{BC} = \frac{\overrightarrow{BC}}{BC} = \frac{-3\,\vec{i} + 3\,\vec{j} + 1{,}5\,\vec{k}}{\sqrt{3^2 + 3^2 + (1{,}5)^2}} = -0{,}66\,\vec{i} + 0{,}66\,\vec{j} + 0{,}33\,\vec{k}$$

$$\vec{u}_{BD} = \frac{\overrightarrow{BD}}{BD} = \frac{-3\,\vec{i} + 3\,\vec{j} - 1{,}5\,\vec{k}}{\sqrt{3^2 + 3^2 + (1{,}5)^2}} = -0{,}66\,\vec{i} + 0{,}66\,\vec{j} - 0{,}33\,\vec{k}$$

Les tensions dans les deux câbles s'écriront sous la forme :

$$\vec{T}_{BC} = T_{BC}\,\vec{u}_{BC} = -0{,}66T_{BC}\,\vec{i} + 0{,}66T_{BC}\,\vec{j} + 0{,}33T_{BC}\,\vec{k}$$

$$\vec{T}_{BD} = T_{BD}\,\vec{u}_{BD} = -0{,}66T_{BD}\,\vec{i} + 0{,}66T_{BD}\,\vec{j} - 0{,}33T_{BD}\,\vec{k}$$

La projection de l'équation ***(1)*** sur les axes donne les trois équations scalaires :

$$R_{Ax} - 0{,}66T_{BC} - 0{,}66T_{BD} = 0 \qquad \textit{(3)}$$

$$R_{Ay} + 0{,}66T_{BC} + 0{,}66T_{BD} - Q = 0 \qquad \textit{(4)}$$

$$R_{Az} + 0{,}33T_{BC} - 0{,}33T_{BD} = 0 \qquad \textit{(5)}$$

L'équation ***(2)*** s'écrira :

$$\begin{pmatrix}3\\1,5\\-1\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}0\\-Q\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\1,5\\-1\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}-0,66T_{BC}\\0,66T_{BC}\\0,33T_{BC}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\1,5\\-1\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}-0,66T_{BD}\\0,66T_{BD}\\-0,33T_{BD}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

En développant ce produit vectoriel, nous obtenons les trois équations suivantes :

$$-Q+(1,5\times0,33)T_{BC}+0,66T_{BC}-(1,5\times0,33)T_{BD}+0,66T_{BD}=0 \qquad \textbf{(6)}$$

$$(-3\times0,33)T_{BC}+0,66T_{BC}+(3\times0,33)T_{BD}+0,66T_{BD}=0 \qquad \textbf{(7)}$$

$$-3Q+(3\times0,66)T_{BC}+(1,5\times0,66)T_{BC}+(3\times0,66)T_{BD}+(1,5\times0,66)T_{BD}=0 \qquad \textbf{(8)}$$

A partir de l'équation ***(7)*** on déduit que : $T_{BC}=5T_{BD}$

En remplaçant dans l'équation ***(6)*** on obtient : $T_{BD}=\dfrac{Q}{5,61}=160,43N$

D'où : $T_{BC}=802,15N$

(3) $R_{Ax}=0,66(T_{BC}+T_{BD})=635,30N$

(4) $R_{Ay}=Q-0,66(T_{BC}+T_{BD})=264,70N$

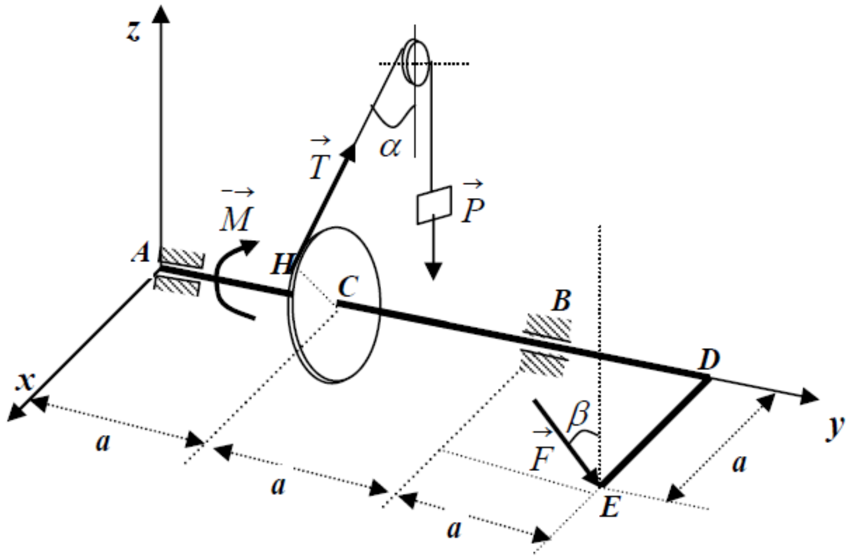
(5) $R_{Az}=0,33(T_{BD}-T_{BD})=-156,70N$

$$R_A=\sqrt{R_{Ax}^2+R_{Ay}^2+R_{Az}^2}=705,85N$$

Exercice 12 :

Un système mécanique composé d'une barre coudée ***ADE*** de masse négligeable et d'un disque de rayon ***R***, de masse négligeable, soudé à celle-ci au point ***C*** comme indiqué sur la figure ci-dessous. La barre est supportée par deux liaisons cylindriques en ***A*** et ***B***. On relie le disque à une poulie fixe par un câble inextensible, de masse négligeable, auquel est suspendue un poids ***P***. Au point ***E***, dans un plan parallèle au plan ***(xAz)***, est appliquée une force $\vec{F}$ inclinée par rapport à la verticale d'un angle $\beta=30°$. Un moment $\vec{M}$ est appliqué à la barre afin de maintenir le système en position d'équilibre statique dans le plan horizontal ***(xAy)***. On donne ***F = 2P***, et $\alpha=60°$.

1. Ecrire les équations scalaires d'équilibre statique ;
2. En déduire les réactions aux points ***A*** et ***B*** ainsi que la valeur du moment ***M*** pour maintenir le système en position d'équilibre statique dans le plan horizontal ***(xAy),***



Solution :

Nous avons $AC = CB = CD = DE = a$; $F = 2P$; $\alpha = 60°$; $\beta = 60°$

La poulie de rayon r est aussi en équilibre statique alors : $\boldsymbol{T\,r = P\,r}$ *d'où :* $\boldsymbol{T = P}$

$$A\begin{cases}0\\0\\0\end{cases};\quad \overrightarrow{AB}\begin{cases}0\\2a\\0\end{cases};\quad \overrightarrow{AH}\begin{cases}R\cos\alpha\\a\\R\sin\alpha\end{cases};\quad \overrightarrow{AE}\begin{cases}a\\3a\\0\end{cases};$$

$$\vec{R}_A\begin{pmatrix}R_{Ax}\\0\\R_{Az}\end{pmatrix};\quad \vec{R}_B\begin{pmatrix}R_{Bx}\\0\\R_{Bz}\end{pmatrix};\quad \vec{T}\begin{pmatrix}-P\sin\alpha\\0\\P\cos\alpha\end{pmatrix};\quad \vec{F}\begin{pmatrix}-2P\sin\beta\\0\\-2P\cos\beta\end{pmatrix};\quad \overrightarrow{M}\begin{pmatrix}0\\-M\\0\end{pmatrix}$$

Le système est en équilibre statique, nous avons alors :

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{0} \quad\Leftrightarrow\quad \vec{R}_A + \vec{R}_B + \vec{T} + \vec{F} = \vec{0} \qquad \textbf{(1)}$$

$$\sum_i \overrightarrow{M}_{i/A} = \vec{0} \quad\Leftrightarrow\quad \overrightarrow{M} + \overrightarrow{AB}\wedge\vec{R}_B + \overrightarrow{AH}\wedge\vec{T} + \overrightarrow{AE}\wedge\vec{F} = \vec{0} \qquad \textbf{(2)}$$

Projetons l'équation ***(1)*** sur les axes :

$R_{Ax} + R_{Bx} - 2P\sin\beta - P\sin\alpha = 0$ ***(3)***

$0 = 0$ ***(4)***

$R_{Az} + R_{Bz} - 2P\cos\beta + P\cos\alpha = 0$ ***(5)***

En développant l'équation vectorielle ***(2),*** nous obtenons trois autres équations scalaires :

$$\begin{pmatrix}0\\-M\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\2a\\0\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}R_{Bx}\\0\\R_{Bz}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}R\cos\alpha\\a\\R\sin\alpha\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}-P\sin\alpha\\0\\P\cos\alpha\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a\\3a\\0\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}-2P\sin\beta\\0\\-2P\cos\beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$2aR_{Bz}+aP\cos\alpha-6aP\cos\beta=0$ ***(6)***

$-M-RP\cos^2\alpha-RP\sin^2\alpha+2aPc\,os\beta=0$ ***(7)***

$-2aR_{Bx}+aP\sin\alpha+6aP\sin\beta=0$ ***(8)***

Le système d'équation permet de trouver toutes les inconnues.

(7) $\Rightarrow$ $M=2aPc\,os\beta-RP=P(a\sqrt{3}-R)=P(1{,}732a-R)$

(8) $\Rightarrow$ $R_{Bx}=3P\sin\beta+\dfrac{P}{2}\sin\alpha=\dfrac{P}{4}(6+\sqrt{3})=1{,}933P$

(6) $\Rightarrow$ $R_{Bz}=3P\cos\beta-\dfrac{P}{2}\cos\alpha=\dfrac{P}{4}(6\sqrt{3}-1)=2{,}348P$

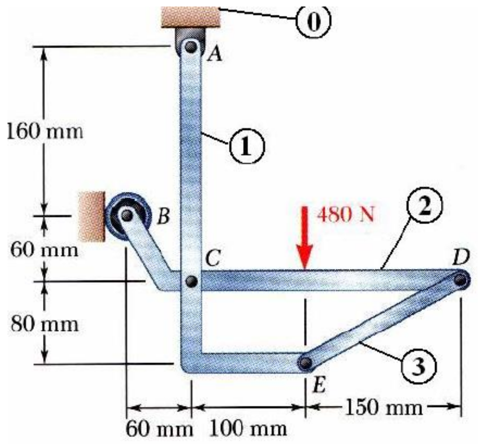
(5) $\Rightarrow R_{Az}=2P\cos\beta-P\cos\alpha-R_{Bz}=-\dfrac{P}{4}(2\sqrt{3}+1)=-1{,}116P$

(4) $\Rightarrow$ $R_{Ay}=R_{By}=0$

(3) $\Rightarrow R_{Ax}=2P\sin\beta+P\sin\alpha-R_{Bx}=\dfrac{P}{4}(\sqrt{3}-2)=0{,}067P$

Exercice 13:

Trouver l'ensemble des A.M. dans les liaisons du mécanisme ci-contre

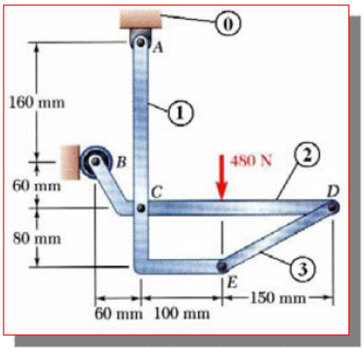


- Identifier l'ensemble des liaisons élémentaires.
- Tracer le graphe de liaisons.
- Compter le nombre d'A.M. inconnues résultant du type d'isolement.
- Appliquer la méthode progressive pour résoudre.

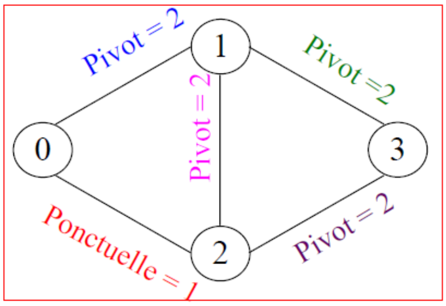
Solution

Identification des inconnues de liaisons

- En A: liaison pivot → 2 inconnues (A_x, A_y)
- En B: liaison ponctuelle → 1 inconnue (B_x)
- En C, D, E: liaisons articulations → 2 inconnues/point (C_x, C_y, D_x, D_y, E_x, E_y)

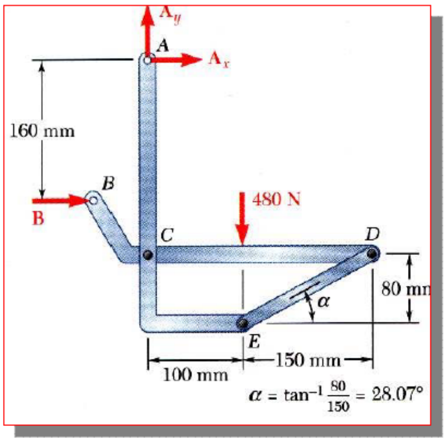


Graphe de liaisons



Choix possibles:

- (1) → 2+2+2 = 6 A.M.
- (2) → 2+2+1 = 5 A.M.
- (3) → 2+2 = 4 A.M.
- (1)+(3) → 2+2+2 = 6 A.M.
- (1)+(2) → 2+2+2+1 = 7 A.M.
- (2)+(3) → 2+2+1 = 5 A.M.
- (1)+(2)+(3) → 2+1 = 3 A.M.



SOLUTION:

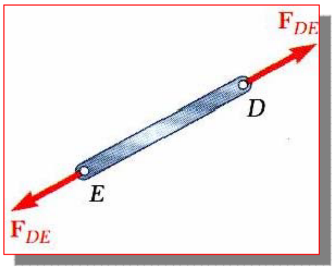
- On isole le système entier dans un premier temps, et nous déterminons les réactions aux supports.

$$\sum F_y = 0 = A_y - 480\text{ N} \quad \Rightarrow \quad \boxed{A_y = 480\text{ N} \uparrow}$$

$$\sum M_A = 0 = -(480\text{ N})(100\text{ mm}) + B(160\text{ mm}) \quad \Rightarrow \quad \boxed{B = 300\text{ N} \rightarrow}$$

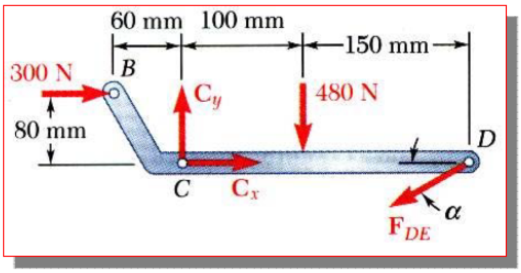
$$\sum F_x = 0 = B + A_x \quad \Rightarrow \quad \boxed{A_x = -300\text{ N} \leftarrow}$$

- On isole le levier 3.



⇒ Solide soumis à 2 glisseurs → direction α

❑ On isole le levier 2.



$$\sum M_C = 0 = (F_{DE} \sin\alpha)(250 \text{ mm}) + (300 \text{ N})(60 \text{ mm}) + $$
$$+ (480 \text{ N})(100 \text{ mm})$$
$$F_{DE} = -561 \text{ N}$$

$$\boxed{F_{DE} = 561 \text{ N}}$$

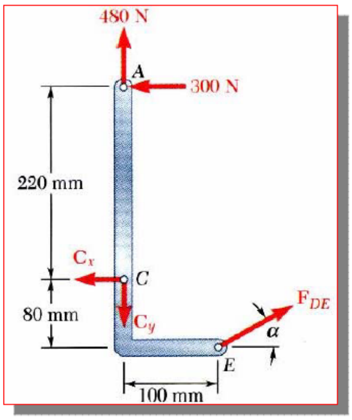
$$\sum F_x = 0 = C_x - F_{DE} \cos\alpha + 300 \text{ N}$$
$$0 = C_x - (-561 \text{ N})\cos\alpha + 300 \text{ N}$$

$$\Rightarrow \boxed{C_x = -795 \text{ N}}$$

$$\sum F_y = 0 = C_y - F_{DE} \sin\alpha - 480 \text{ N}$$
$$0 = C_y - (-561 \text{ N})\sin\alpha - 480 \text{ N}$$

$$\Rightarrow \boxed{C_y = 216 \text{ N}}$$

❑ On isole le levier 1, afin de vérifier son équilibre



$$\sum M_A = (F_{DE} \cos\alpha)(300 \text{ mm}) + $$
$$(F_{DE} \sin\alpha)(100 \text{ mm}) - $$
$$C_x (220 \text{ mm})$$

$$\Rightarrow \sum M_A = (-561\cos\alpha)(300 \text{ mm}) + $$
$$(-561\sin\alpha)(100 \text{ mm}) - $$
$$(-795)(220 \text{ mm}) = 0$$