OSCILLATIONS LIBRES DES SYSTEMES A DEUX DEGRES DE LIBERTE

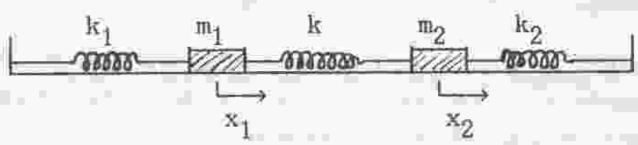
THEMES: Systèmes symétriques couplés.
Observation des battements.
Observation des modes propres.
Mesures des fréquences propres.
Mesures du coefficient de couplage.

I. Etude d'un système mécanique à deux degrés de liberté:

1. Les pulsations propres.

Soit le système mécanique représenté sur la figure 1 et composé de deux oscillateurs harmoniques (m_1, k_1) et (m_2, k_2) couplés par un ressort de raideur k. Les deux masses sont supposées se déplacer sans frottement sur un plan horizontal et leurs élongations par rapport à leurs positions d'équilibre sont repérées par x_1 et x_2 .

Figure 1



Lorsque ce système est écarté de sa position d'équilibre puis abandonné à lui même, il effectue un mouvement vibratoire libre. Les équations décrivant la variation des élongations x_1 et x_2 en fonction du temps, s'écrivent comme suit:

$$(1) \qquad \begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + k_1x_1 + k(x_1 - x_2) = 0 \\ m_2\ddot{x}_2 + k_2x_2 + k(x_2 - x_1) = 0 \end{cases}$$

Les solutions $x_1(t)$ et $x_2(t)$ sont des combinaisons linéaires des deux modes propres $X_1(t)$ et $X_2(t)$, harmoniques de pulsations propres Ω_1 et Ω_2 . Ces dernières sont les racines de l'équation suivante :

$$m_1m_2\Omega^4 - \Omega^2\left[m_2(k_1 + k) + m_1(k_2 + k)\right] + (k_1 + k)(k_2 + k) - k^2 = 0$$

En posant

$$\omega_1^2 = (k_1 + k)/m_1 \ ; \quad \omega_2^2 = (k_2 + k)/m_2 \ ; \quad K^2 = \frac{k^2}{(k_1 + k)(k_2 + k)}$$

l'équation aux pulsations propres se met sous la forme

$$\Omega^4 - \Omega^2\,(\omega_1^2 + \omega_2^2) + \omega_1^2\,\omega_2^2\,(1 - K^2) = 0$$

et les racines sont données par

$$(2) \qquad \Omega_1^2 = \frac{1}{2}\left\{(\omega_1^2 + \omega_2^2) - \sqrt{(\omega_2^2 - \omega_1^2)^2 + 4\,K^2\omega_1^2\,\omega_2^2}\right\}$$

$$\Omega_2^2 = \frac{1}{2}\left\{(\omega_1^2 + \omega_2^2) + \sqrt{(\omega_2^2 - \omega_1^2)^2 + 4\,K^2\omega_1^2\,\omega_2^2}\right\}$$

Le nombre K, compris entre 0 et 1, est appelé coefficient de couplage entre les deux oscillateurs.
Dans le cas d'un système symétrique ($m_1 = m_2 = m$, $k_1 = k_2$), les relations (2) deviennent

$$(3) \qquad \Omega_1^2 = \omega^2(1 - K) \qquad \Omega_2^2 = \omega^2(1 + K)$$

avec $\omega^2 = (k_1 + k)/m_1 = (k_2 + k)/m_2$

et $K = k/(k_1 + k) = k/(k_2 + k)$

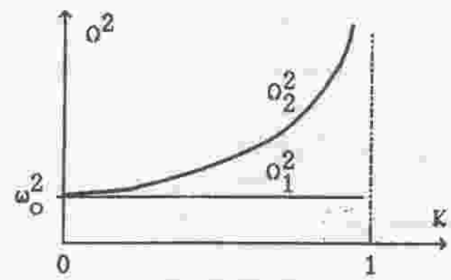
En déduire les expressions des fréquences propres suivantes :

$$\Omega_1^2 = \omega_o^2 \quad \text{et} \quad \Omega_2^2 = \omega_o^2\,(1 + K)/(1 - K)$$

avec $\omega_o^2 = k_1/m_1 = k_2/m_2$ (ω_o = pulsation propre de chacun des deux oscillateurs harmoniques seul).

La figure 2 représente la variation des pulsations propres en fonction du coefficient de couplage K dans le cas d'un système symétrique).

Figure 2



2. Le phénomène de battements.

Les solutions générales sont alors données par:

$$x_1(t) = A_1 \cos(\Omega_1 t + \phi_1) + A_2 \cos(\Omega_2 t + \phi_2)$$
$$x_2(t) = A_1 \cos(\Omega_1 t + \phi_1) - A_2 \cos(\Omega_2 t + \phi_2)$$

Pour des conditions initiales bien choisies, on peut écrire

$$(3) \quad \begin{aligned} x_1(t) &= A\ (\cos \Omega_1 t + \cos \Omega_2 t\ ) = 2\ A \cos \frac{\Omega_1 - \Omega_2}{2}\, t \cdot \cos \frac{\Omega_1 + \Omega_2}{2}\, t \\ x_2(t) &= A\ (\cos \Omega_1 t - \cos \Omega_2 t\ ) = 2\ A \sin \frac{\Omega_1 - \Omega_2}{2}\, t\ \ \sin \frac{\Omega_1 + \Omega_2}{2}\, t \end{aligned}$$

On observe ainsi deux sinusoïdes de pulsation égale à $(\Omega_1 + \Omega_2)/ 2$, en quadrature de phase, modulées par deux sinusoïdes de pulsation $(\Omega_1 - \Omega_2)/ 2$, également en quadrature de phase. C'est le phénomène de battements (figure 3). En principe donc, la mesure des périodes de battements T_B et d'oscillation T_O permet d'accéder aux pulsations propres du système puis au coefficient de couplage K.

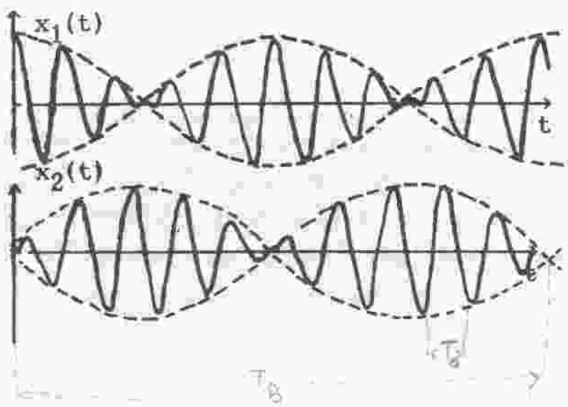
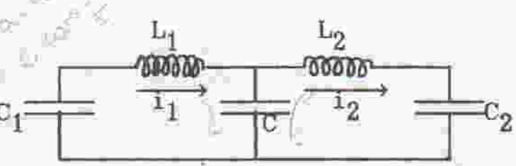


Figure 3

On se propose au cours de cette manipulation de mesurer les pulsations propres et le coefficient de couplage par l'observation des battements et des modes propres d'un système électrique (circuits RLC couplés par capacité). Cela sera éventuellement complété par des mesures analogues sur un système mécanique à deux degrés de liberté (pendules simples couplés par ressort).

II. Etude de deux circuits électriques couplés

Figure 4



Les équations régissant les courants dans les circuits couplés représentés sur la figure 4 s'écrivent comme suit:

$$(5) \quad \begin{cases} L_1 \dfrac{di_1}{dt} + \dfrac{1}{C_1} \int i_1 dt + \dfrac{1}{C} \int (i_1 - i_2)\, dt = 0 \\ L_2 \dfrac{di_2}{dt} + \dfrac{1}{C_2} \int i_2 dt + \dfrac{1}{C} \int (i_2 - i_1)\, dt = 0 \end{cases}$$

ou bien, en introduisant les charges électriques $q_1(t)$ et $q_2(t)$,

$$(6) \quad \begin{aligned} L_1\ddot{q}_1 + q_1/C_1 + (q_1 - q_2)/C = 0 \\ L_2\ddot{q}_2 + q_2/C_2 + (q_2 - q_1)/C = 0 \end{aligned}$$

On obtient donc un système analogue au système (1). Les solutions $q_1(t)$ et $q_2(t)$ seront de la même forme que $x_1(t)$ et $x_2(t)$. Pour étudier les battements de x_1 et de x_2, il suffit alors d'observer ceux des tensions aux bornes des capacités C_1 et C_2, ces tensions étant proportionnelles à q_1 et q_2.

III. Les modes propres.

Le système d'équations couplées (6) peut être mis, dans le cas symétrique (L_1=L_2=L et C_1=C_2=C), sous la forme découplée suivante:

$$(7) \quad \begin{aligned} \ddot{Q}_1 + \Omega_1^2\, Q_1 = 0 \qquad & \text{avec } \Omega_1^2 = \omega_o^2 = 1/LC \\ \ddot{Q}_2 + \Omega_2^2\, Q_2 = 0 \qquad & \text{avec } \Omega_2^2 = \omega_o^2\,(1+2C/C_o) \end{aligned}$$

où on a posé $Q_1 = q_1 + q_2$ et $Q_2 = q_1 - q_2$.

Les solutions (harmoniques) de ce système sont les modes propres

$$Q_1(t) = A_1 \exp(j(\Omega_1 t+\Phi_1) \quad \text{et} \quad Q_2(t) = A_2 \exp(j(\Omega_2 t+\Phi_2)$$

Les grandeurs A_1 ,A_2, Φ_1, Φ_2 sont des constantes d'intégration dépendant des conditions initiales.

Les charges $q_1(t)$ et $q_2(t)$ se déduisent alors sans peine:

$$q_1(t)= \frac{1}{2}\,(Q_1(t)+Q_2(t)) = \frac{A_1}{2} \exp(j(\Omega_1 t+\Phi_1)) + \frac{A_2}{2} \exp(j(\Omega_2 t+\Phi_2)$$

$$q_2(t)= \frac{1}{2}\,(Q_1(t)-Q_2(t)) = \frac{A_1}{2} \exp(j(\Omega_1 t+\Phi_1)) - \frac{A_2}{2} \exp(j(\Omega_2 t+\Phi_2)$$

Si on observe des tensions proportionnelles à $q_1+ q_2$ et $q_1- q_2$, on mettra en évidence, en principe, les vibrations sinusoïdales correspondant aux deux modes propres. La mesure de leurs périodes respectives T_1 et T_2 permettra alors de déduire les pulsations propres du système, $\Omega_1=2\pi/T_1$ et $\Omega_2=2\pi/T_2$.

III. Réalisation pratique

On utilise le montage représenté sur la figure 5. Comme dans le cas de l'oscillateur à un degré de liberté, l'élongation initiale est apportée par un signal carré e(t) de période relativement grande devant celles des oscillations propres du circuit (cf TP n°1). Dans ce cas, bien que le régime soit forcé, les oscillations peuvent être alors considérées comme libres sur chaque demi-période du signal carré.

En effet, le système (6) s'écrit alors, pour un signal carré alterné $\pm e_o$

$$(8) \quad \begin{cases} L\ddot{q}_1 + q_1/C + (q_1 - q_2)/C_o = \pm\, e_o \\ L\ddot{q}_2 + q_2/C + (q_2 - q_1)/C_o = 0 \end{cases}$$

En effectuant le changement de variables

$$q_1 = p_1 + a_1 \quad \text{et} \quad q_2 = p_2 + a_2$$

où a_1 et a_2 sont des constantes, on obtient le système suivant:

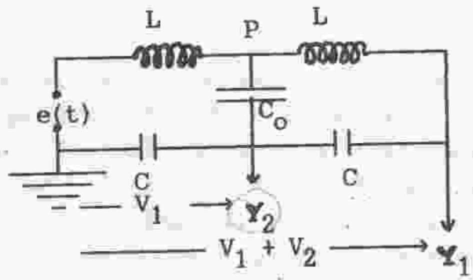
$$(9) \quad \begin{cases} L\ddot{p}_1 + p_1/C + (p_1 - p_2)/C_o = 0 \\ L\ddot{p}_2 + p_2/C + (p_2 - p_1)/C_o = 0 \end{cases}$$

dont les solutions $p_1(t)$ et $p_2(t)$ sont celles du régime libre, telles qu'exprimées par les équations (3) et représentées sur la figure 3.

Les charges observées, $q_1(t)$ et $q_2(t)$, se déduisent de $p_1(t)$ et de $p_2(t)$ par un décalage égal à a_1 et a_2 respectivement. Pour chaque demi-période du signal carré donc, les oscillations s'effectuent autour de la valeur a_1 pour $q_1(t)$ et a_2 pour $q_2(t)$.

Montrer que les tensions $V_1(t) = \frac{1}{C}\, q_1(t)$ et $V_2(t) = \frac{1}{C}\, q_2(t)$ oscillent autour de leurs valeurs moyennes respectives $\pm e_o \frac{1}{1+K}$ et $\pm e_o \frac{K}{1+K}$ et qu'il est possible de déduire la valeur du coefficient de couplage par simple comparaison de ces dernières.

Figure 5



On prendra C_o=0.22 μF et C = 0.047 μF. On utilisera pour L les deux bobines disponibles sur les tables. Comme pour les manipulations précédentes, le signal e(t) est délivré par un GBF à travers un diviseur de tension.

1. Etude des battements:

a. Observation

On choisira la fréquence du signal d'entrée suffisamment faible (environ 100 Hz) afin d'obtenir plusieurs oscillations de battement sur l'écran de l'oscilloscope.

Le GBF et l'oscilloscope ayant des masses électriques communes, il n'est pas possible d'observer simultanément les tensions $V_1(t) = q_1(t)/C$ et $V_2(t) = q_2(t)/C$. Le montage proposé permettant d'observer les tensions $V_1(t)$ sur la voie Y_2 et $V_1(t) + V_2(t)$ sur la voie Y_1, on peut, en utilisant les fonctions inversion de la voie 2, "INV Y_2" ou (- Y_2) et addition "ADD" ou ($Y_1 + Y_2$) de l'oscilloscope, obtenir les signaux $V_2(t)$ (voie 1 moins voie 2) et $V_1(t)$ (directement sur la voie 2) successivement sans modification de connexions.

Observer les signaux V_1 et V_2 et comparer avec les prévisions théoriques (allures, déphasages ... etc...). Pour l'observation correcte de V_1, il est nécessaire que les calibres des voies 1 et 2 soient les mêmes.

b. Mesures à effectuer:

Utiliser la base de temps pour mesurer les périodes des oscillations T_o et des battements T_B. En déduire les valeurs des pulsations propres Ω_1 et Ω_2 puis celles du coefficient de couplage K et de la pulsation propre ω_o des oscillateurs découplés.

Effectuer une mesure directe de la pulsation propre ω_o (voir manipulations sur les systèmes à un degré de liberté) et comparer à la valeur calculée précédemment.

Mesurer les valeurs moyennes autour desquelles oscillent $V_1(t)$ et $V_2(t)$. En déduire la valeur du coefficient de couplage K.

2. Etude des modes propres:

La tension adressée sur la voie 1 de l'oscilloscope est, comme signalé précédement, proportionnelle au premier mode propre $q_1+ q_2$ dont l'observation ne soulève aucune difficulté. Comparer l'allure de l'oscillation observée avec les prévisions. Mesurer sa période T_1 à l'aide de l'oscilloscope.

On relie ensuite le point P à l'entrée Y_1 de l'oscilloscope. La tension observée sur cette voie est ainsi la somme $V_o+ V_1$ des tensions V_o aux bornes de C_o et V_1 aux bornes du condensateur de la première maille. La tension V_o étant égale à $(q_1- q_2)/C_o$, l'opération "voie 1 moins voie 2" permet l'observation de V_o, tension proportionnelle au deuxième mode propre $q_1- q_2$. Observer celui-ci et comparer son allure avec les prévisions. Mesurer sa période T_2 à l'aide de l'oscilloscope.

Déduire de ces mesures les fréquences propres puis le coefficient de couplage K du système.

3. Comparaison des différentes méthodes:

Calculer la valeur théorique du coefficient de couplage K en utilisant les valeurs données pour les capacités C et C_o.

Dresser un tableau comparatif résumant les résultats obtenus par les différentes méthodes et discuter.

12,5

Module : Vibrations et ondes mécaniques

TP N°3

Oscillations libres des systèmes à deux degrés de liberté

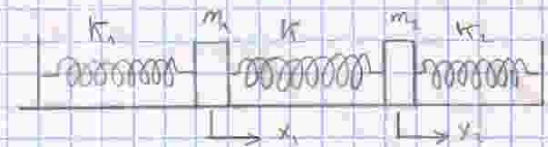
but :

Systèmes symétriques couplés.
Observation des battements.
Observation des modes propres.
Mesures des fréquences propres.
Mesures du coefficient de couplage.

Nom	Prénom	Matricule	Section/Group

I Etude d'un système mécanique à deux degrés de liberté :

1- Les pulsations propres



Equations du mouvement

$T = T_{m_1} + T_{m_2} = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2$

$U = U_{K_1} + U_{K_2} + U_K = \frac{1}{2} K x_1^2 + \frac{1}{2} K x_2^2 + \frac{1}{2} K (x_2 - x_1)^2$ / $L = T - U$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + K_1 x_1 + K(x_1 - x_2) = 0 \\ m_2 \ddot{x}_2 + K_2 x_2 + K(x_2 - x_1) = 0 \end{cases}$$

on a : $\Rightarrow \begin{cases} x_1(t) = A_1 \cos(\Omega t + \varphi) \\ x_2(t) = B \cos(\Omega t + \varphi) \end{cases}$ donc $\begin{cases} \ddot{x}_1 = -\Omega^2 x_1 \\ \ddot{x}_2 = -\Omega^2 x_2 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} -m_1 \Omega^2 x_1 + (K_1 + K) x_1 - K x_2 = 0 \\ -m_2 \Omega^2 x_2 + (K_2 + K) x_2 - K x_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (K_1 + K - m_1 \Omega^2) x_1 - K x_2 = 0 \\ (K_2 + K - m_2 \Omega^2) x_2 - K x_1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} (K_1 + K) - m_1 \Omega^2 & -K \\ -K & (K_2 + K) - m_2 \Omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\det(\text{Matrice}) = 0 \Rightarrow m_1 m_2 \Omega^4 - \Omega^2 [(K_1 + K) m_2 + (K_2 + K) m_1] + (K_1 + K)(K_2 + K) - K^2 = 0$

On pose que : $\omega_1^2 = \frac{K_1 + K}{m_1}$; $\omega_2^2 = \frac{K_2 + K}{m_2}$; $K^2 = \frac{K^2}{(K_1 + K)(K_2 + K)}$

l'équation devient $\Omega^4 - \Omega^2 (\omega_1^2 + \omega_2^2) + \omega_1^2 \omega_2^2 (1 - K^2) = 0$

et les Ω_1, Ω_2 sont données par :

$$\Omega_1^2 = \frac{1}{2}\left((\omega_1^2 + \omega_2^2) - \sqrt{(\omega_2^2 - \omega_1^2)^2 + 4 K^2 \omega_1^2 \omega_2^2} \right)$$

$$\Omega_2^2 = \frac{1}{2}\left((\omega_1^2 + \omega_2^2) + \sqrt{(\omega_2^2 - \omega_1^2)^2 + 4 K^2 \omega_1^2 \omega_2^2} \right)$$

Le cas d'un système symétrique $m_1 = m_2 = m$ et $K_1 = K_2$

$\Omega_1^2 = \omega^2 (1 - K)$; $\Omega_2^2 = \omega^2 (1 + K)$

avec : $\begin{cases} \omega^2 = \frac{K_1 + K}{m_1} = \frac{K_2 + K}{m_2} \\ K = \frac{K}{K_1 + K} = \frac{K}{K_2 + K} \end{cases}$

$$\Omega_1^2 = \omega^2(1-K) = \frac{K_1+k}{m_1}\left(1-\frac{k}{K_1+k}\right) = \frac{K_1+k}{m_1} - \frac{k}{m_1} = \frac{K_1}{m_1}$$

$$\Omega_1^2 = \frac{K_1}{m_1} = \omega_0^2$$

$$\Omega_2^2 = \omega^2(1+K) = \frac{K_2+k}{m_2}(1+K) = \left(\frac{K_2}{m_2}+\frac{k}{m_2}\right)(1+K)$$

$$K = \frac{k}{K_2+k} \Rightarrow K(K_2+k) = k \Rightarrow k = \frac{K K_2}{(1-K)}$$

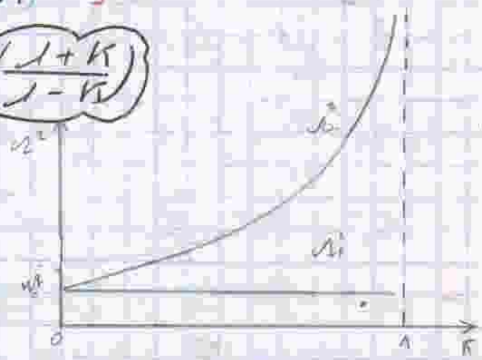
$$\Omega_2^2 = \left[\frac{K_2}{m_2} + \frac{K K_2}{m_2(1-K)}\right](1+K) = \left[\frac{(1-K)K_2 + K K_2}{m_2(1-K)}\right](1+K)$$

$$\Omega_2^2 = \frac{K_2}{m_2}\cdot\frac{1+K}{1-K}$$

$$\Omega_2^2 = \omega_0^2\left(\frac{1+K}{1-K}\right)$$

La variation des pulsations propres en fonction du coefficients de couplage K

K	0	$\frac{1}{2}$	1
Ω_1^2	ω_0^2	ω_0^2	ω_0^2
Ω_2^2	ω_0^2	$3\omega_0^2$	∞



2 - Le phénomène de battements

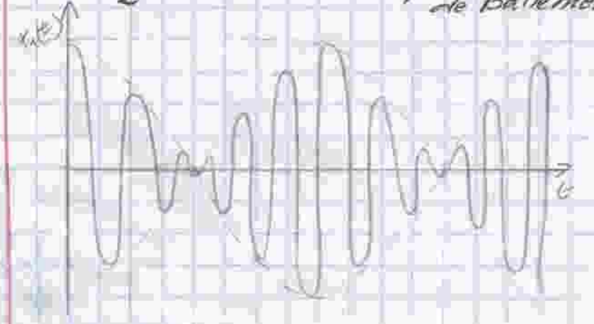
Les solutions générales

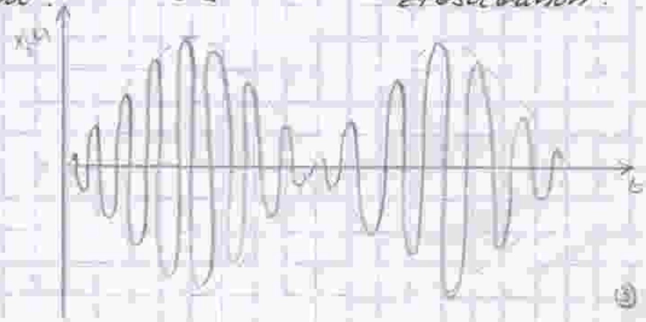
$$x_1(t) = A_1\cos(\Omega_1 t+\varphi_1) + A_2\cos(\Omega_2 t+\varphi_2)$$
$$x_2(t) = A_1\cos(\Omega_1 t+\varphi_1) - A_2\cos(\Omega_2 t+\varphi_2)$$

Pour les conditions initiales bien choisies

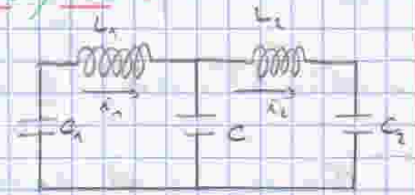
$$x_1(t) = A(\cos\Omega_1 t + \cos\Omega_2 t) = 2A\cos\frac{\Omega_1-\Omega_2}{2}\cos\frac{\Omega_1+\Omega_2}{2}t$$
$$x_2(t) = A(\cos\Omega_1 t - \cos\Omega_2 t) = 2A\sin\frac{\Omega_1-\Omega_2}{2}\sin\frac{\Omega_1+\Omega_2}{2}t$$

$\frac{\Omega_1-\Omega_2}{2} = \Omega_B$: pulsation de battement. $\frac{\Omega_1+\Omega_2}{2} = \Omega_{os}$: pulsation d'oscillation.





II Etude de deux circuits électriques couplés :



$$\begin{cases} L_1 \dfrac{di_1}{dt} + \dfrac{1}{C_1}\displaystyle\int i_1\, dt + \dfrac{1}{C}\int (i_1 - i_2)\, dt = 0 \\ L_2 \dfrac{di_2}{dt} + \dfrac{1}{C_2}\displaystyle\int i_2\, dt + \dfrac{1}{C}\int (i_2 - i_1)\, dt = 0 \end{cases}$$

$$i = \frac{dq}{dt} = \dot{q} \quad ; \quad \frac{di}{dt} = \ddot{q} \qquad \int i\, dt = q$$

$$\begin{cases} L_1 \ddot{q}_1 + \dfrac{q_1}{C_1} + \dfrac{1}{C}(q_1 - q_2) = 0 \\ L_2 \ddot{q}_2 + \dfrac{q_2}{C_2} + \dfrac{1}{C}(q_2 - q_1) = 0 \end{cases}$$

Les solutions $q_1(t)$ et $q_2(t)$ sont de la même forme que $x_1(t)$ et $x_2(t)$.

$$\Omega_1^2 = \omega_0^2 = \frac{1}{LC} \quad \text{et} \quad \Omega_2^2 = \omega_0^2\left(\frac{1+K}{1-K}\right) = \omega_0^2\left(1 + \frac{2C}{C_1}\right)$$

car $K = \dfrac{C}{C_1 + C}$

III Les Modes propres.

On a posé que $Q_1 = q_1 + q_2$ et $Q_2 = q_1 - q_2$

Les solutions harmonique de ce système sont les modes propres

$$Q_1(t) = A_1 e^{j(\Omega_1 t + \varphi_1)} \quad \text{et} \quad Q_2(t) = A_2 e^{j(\Omega_2 t + \varphi_2)}$$

$$q_1(t) = \frac{1}{2}\left(Q_1(t) + Q_2(t)\right) = \frac{A_1}{2} e^{j(\Omega_1 t + \varphi_1)} + \frac{A_2}{2} e^{j(\Omega_2 t + \varphi_2)}$$

$$q_2(t) = \frac{1}{2}\left(Q_1(t) - Q_2(t)\right) = \frac{A_1}{2} e^{j(\Omega_1 t + \varphi_1)} - \frac{A_2}{2} e^{j(\Omega_2 t + \varphi_2)}$$

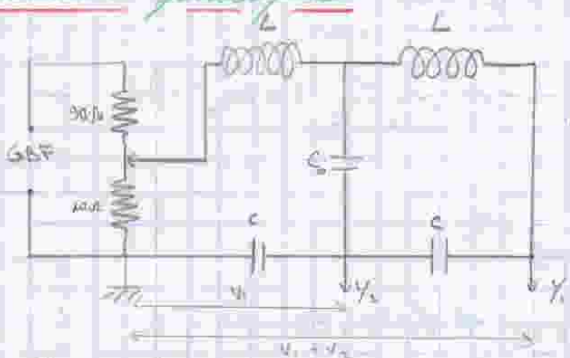
T_1 et T_2 ?

$$\Omega_1 = \frac{2\pi}{T_1} \quad \text{et} \quad \Omega_2 = \frac{2\pi}{T_2}$$

$$\Omega_0 = \frac{\Omega_1 + \Omega_2}{2} = \frac{2\pi}{T_0} \qquad \Omega_0 + \Omega_B = \Omega_1 = 2\pi\left(\frac{1}{T_0} + \frac{1}{T_B}\right)$$

$$\Omega_B = \frac{\Omega_1 - \Omega_2}{2} = \frac{2\pi}{T_B} \qquad \Omega_0 - \Omega_B = \Omega_2 = 2\pi\left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T_B}\right)$$

IV Réalisation pratique



Le Montage

un signal carré (⊓⊔)

$C_0 = 0,22\ \mu F$

$C = 0,047\ \mu F$

$$\begin{cases} L\ddot{q}_1 + \dfrac{q_1}{C} + \dfrac{1}{C_0}(q_1 - q_2) = \pm e_0 \\ L\ddot{q}_2 + \dfrac{q_2}{C} + \dfrac{1}{C_0}(q_2 - q_1) = 0 \end{cases}$$

En effectuant le changement de variable :

$q_1 = p_1 + a_1$ et $q_2 = p_2 + a_2$

on obtient : $$\begin{cases} L\ddot{P}_1 + \dfrac{P_1}{C} + (P_1 - P_2)\dfrac{1}{C_0} = 0 \\ L\ddot{P}_2 + \dfrac{P_2}{C} + (P_2 - P_1)\dfrac{1}{C_0} = 0 \end{cases}$$

les solutions $P_1(t)$ et $P_2(t)$ sont celles du régime libre.

$$\begin{cases} \dfrac{1}{C} a_1 + \dfrac{1}{C_0} a_1 - \dfrac{1}{C_0} a_2 = \pm e \\ \dfrac{1}{C} a_2 + \dfrac{1}{C_0} a_2 - \dfrac{1}{C_0} a_1 = 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow a_1\left(\dfrac{1}{C} + \dfrac{1}{C_0}\right) - \dfrac{1}{C_0} a_2 = \pm e_0$

$$a_1 = \frac{1/C_0\, a_2 + e_0}{\frac{1}{C} + 1/C_0} = \frac{1/C_0\, a_2}{1/C + 1/C_0} + \frac{e_0}{1/C + 1/C_0} = \frac{C a_2}{C + C_0} + \frac{C C_0\, e_0}{C + C_0}$$

$$\frac{1}{C} a_2 + \frac{1}{C_0} a_2 + \left(\frac{C a_2}{C + C_0} + \frac{C C_0\, e_0}{C + C_0}\right)\left(-\frac{1}{C_0}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{C} + \frac{1}{C_0} - \frac{C}{C + C_0} \cdot \frac{1}{C_0}\right) a_2 = \frac{1}{C_0}\left(\frac{C C_0\, e_0}{C + C_0}\right)$$

donc : $$a_2 = \frac{C e_0 / (C + C_0)}{\frac{C_0 + C}{C C_0} - \frac{C}{C_0(C + C_0)}} \Rightarrow a_2 = \frac{C^2 e_0}{C_0 + 2C}$$

$$\left(\frac{1}{C} + \frac{1}{C_0}\right) a_2 = \frac{1}{C_0} a_1$$

$$\Rightarrow a_1 = \frac{\left(\frac{1}{C} + \frac{1}{C_0}\right)\left(\frac{C^2 e_0}{C_0 + 2C}\right)}{1/C_0}$$

$$\Rightarrow a_1 = \frac{C (C_0 + C)}{C_0 + 2C} e_0$$

$$V_1(t) = \frac{1}{C} q_1(t) = \frac{1}{C}(P_1(t) - a_1) = \frac{1}{C} P_1(t) - \frac{a_1}{C}$$

$$\langle V_1 \rangle = \frac{a_1}{C} = \frac{C_0 + C}{C_0 + 2C}(\pm e_0) = \frac{1}{\frac{C_0 + 2C}{C_0 + C}}(\pm e_0) = \frac{1}{1 + \frac{C}{C_0 + C}}(\pm e_0)$$

$K = \frac{C}{C_0 + C}$ donc $\langle V_1 \rangle = \frac{1}{1 + K}(\pm e_0)$

$$V_2(t) = \frac{1}{C} q_2(t) = \frac{1}{C}(P_2(t) - a_2) = \frac{1}{C} P_2(t) - \frac{a_2}{C}$$

$$\langle V_2 \rangle = \frac{a_2}{C} = \frac{1}{C} \cdot \frac{C^2}{C_0 + 2C}(\pm e_0)$$

$$\frac{\frac{C}{C_0 + C}}{\frac{C_0 + 2C}{C_0 + C}}(\pm e_0) \qquad \langle V_2 \rangle = \frac{K}{K + 1}(\pm e_0)$$

$$K = \frac{V_2 \text{ moy}}{V_1 \text{ moy}}$$

1- Étude de battement

a- Observation

$e(t)$ carré $\quad e_0 = 0{,}4\,V \quad f = 100\,Hz$

$Y_2 \rightarrow V_1(t)$ et $Y_1 \rightarrow V_2(t) + V_1(t)$

Pour avoir $V_2(t)$ on utilise les voies INV Y_2 et ADD de l'oscilloscope, même calibre pour $V_1(t)$ et $V_2(t)$.

On observe donc un phénomène de battement

b- Mesures effectuées

① on a : $K = \frac{C}{C_0 + C} = \frac{0{,}047}{0{,}02 + 0{,}047} \Rightarrow K = 0{,}776$

$T_0 = 0{,}6 \times 0{,}2 \times 10^{-3} = 0{,}14\ s \Rightarrow \Omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{0{,}14}$

$\Rightarrow \Omega_0 = 44{,}88 \cdot 10\ rd/ms$

$T_B = 2{,}8 \times 0{,}5 \times 10^{-3} = 1{,}4 \cdot 10^{-3}\ s \Rightarrow \Omega_B = \frac{2\pi}{T_B} = \frac{2\pi}{1{,}4}$

$\Rightarrow \Omega_B = 4{,}48\ rd/ms$ ⑥

$\Omega_1 = 2\pi\left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T_B}\right) \Rightarrow \Omega_1 = \Omega_0 - \Omega_B = 40{,}39$ rd/ms

$\Omega_2 = 2\pi\left(\frac{1}{T_0} + \frac{1}{T_B}\right) \Rightarrow \Omega_2 = \Omega_0 + \Omega_B = 49{,}36$ rd/ms

d'après le cas d'un système symétrique on a :

$$K = \frac{\Omega_2^2 - \Omega_1^2}{\Omega_1^2 + \Omega_2^2} = \frac{49{,}36^2 - 40{,}39^2}{40{,}39^2 + 49{,}36^2} = 0{,}198$$

Mesures les valeurs moyennes

$V_1 moy = \frac{e_0}{1+K}$ et $V_2 moy = \frac{e_0 K}{1+K}$

et $K = \frac{V_2 moy}{V_1 moy} = \frac{0{,}06 \text{ mV}}{0{,}35 \text{ mV}}$

$K = 0{,}171$

2 - Etude des modes propres

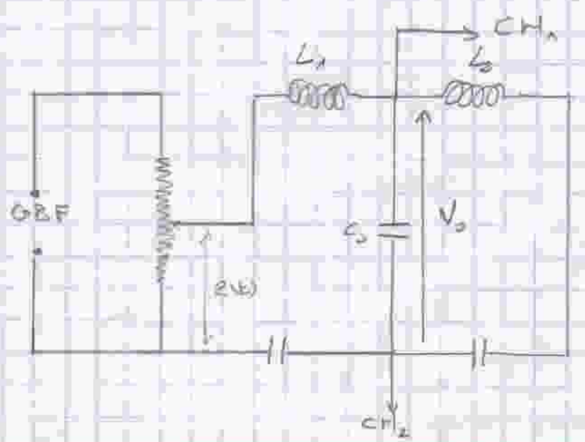
T_1 et T_2 ?

voie $Y_1 \rightarrow V_1(t) + V_2(t)$

$T_1 = 0{,}7 \times 0{,}2 = 0{,}14 \text{ ms} = T_0$

$T_2 = 0{,}68 \times 0{,}2 = 0{,}136 \text{ ms}$

$$K = \frac{T_1^2 - T_2^2}{T_1^2 + T_2^2} = \frac{0{,}14^2 - 0{,}136^2}{0{,}14^2 + 0{,}136^2} = 0{,}179$$



2- Comparaison des différentes méthodes

$$K_{théorique} = \frac{C}{C_0 - C} = \frac{0,047}{0,02 + 0,047} = 0,176$$

Méthodes	K obtenue
1ère (pulsations)	0,197
2ème (moyenne)	0,171
3ème (période fréquence)	0,179
4ème (Théorique)	0,176