Université Badji Mokhtar **Probabilités – Statistiques**
2ème année S.T. (Durée 1h 30m) **2010/2011**

Examen de probabilité - Statistique

Exercice 1. Soit donner une série statistique X dont les modalités sont $x_1, x_2, \ldots, x_k$, avec les effectifs $n_1, n_2, \ldots, n_k$, tel que $\sum_{i=1}^{k} n_i = N$. On définit une autre série statistique Y avec les modalités $y_1, y_2, \ldots, y_k$, et les mêmes effectifs, où $y_i = a\,x_i + b$; pour tout $i = 1, \ldots, k$ (a, b sont des constantes).

1- Montrer que $\overline{y} = a\overline{x} + b$ et $\sigma_y{}^2 = a^2\,\sigma_x{}^2$.

2- Donner les valeurs de $\overline{y}$ et de $\sigma_y{}^2$, si les modalités de Y sont données par $y_i = \dfrac{x_i - \overline{x}}{\sigma_x}$, $i = 1, \ldots, k$.

www.espace-etudiant.net

Exercice 2. Les résultats suivants représentent la production mensuelle de lait en litres, d'un échantillon de 120 vaches laitières.

La production mensuelle de lait	Les centres des classes x_i	Le nombre de vaches laitières
[30, 60[	45	6
[60, 90[	75	10
[90, 120[	105	14
[120, 150[	135	26
[150, 180[	165	20
[180, 210[	195	14
[210, 240[	225	14
[240, 270[	255	10
[270, 300[	285	4
[300, 330[	315	2
Total		120

1. Compléter le tableau statistique par les fréquences relatives et les fréquences absolues et relatives cumulées.
2. Tracer l'histogramme et le polygone des fréquences de cette série statistique.
3. Tracer le polygone des effectifs cumulés.
4. Calculer la moyenne, la médiane et le mode de cette série statistique.
5. Calculer la variance, le coefficient de variation et l'écart interquartile de cette série statistique.

Exercice 3. On roule un dé truqué et on observe la face supérieure. On pose : $p_i = P(\{i\})$, $i = 1, \ldots, 6$.

1. Calculer les p_i sachant que : $p_1 = p_3 = p_5 = p$, $p_2 = p_4 = p_6 = q$ et $p_2 = 2p_1$.
2. Calculer les probabilités d'obtenir un nombre: (a) impair (b) pair (c) premier.

Exercice 4 Une épreuve sportive consiste à atteindre une cible partagée en trois cases, notée 1, 2 et 3. Deux concurrents A et B sont en présence, on admet qu'à tout coup chacun d'eux atteint une case et une seule. Pour le concurrent A, les probabilités d'atteindre les cases 1, 2 et 3 sont respectivement 1/4, 1/2 et 1/4. Pour le concurrent B les trois éventualités sont équiprobables. On choisit au hasard un des deux concurrents qui va atteindre une case.

1. Quelle est la probabilité que la case atteinte soit la case 3?
2. Sachant que la case 2 est atteinte, qu'elle est la probabilité d'avoir choisi le concurrent A?

BONNE CHANCE.

S.T. 2ème année : Corrigé de l'examen de Probabilités - Statistiques.

Exo 1 : (3,5 points)

1) Comme $y_i = a x_i + b$, alors :

$$\bar{y} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} n_i y_i = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} n_i (a x_i + b) = \frac{1}{N}\left[\sum_{i=1}^{k} a n_i x_i + \sum_{i=1}^{k} b n_i\right]$$ 0,25 0,25

$$= \frac{1}{N}\left[a \cdot \sum_{i=1}^{k} n_i x_i + b \sum_{i=1}^{k} n_i\right]$$ 0,25

$$= a \cdot \left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i\right) + \frac{b}{N}\sum_{i=1}^{k} n_i = \boxed{a\bar{x} + b = \bar{y}}$$ 0,25 0,25

Car : $\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i$ et $\sum_{i=1}^{k} n_i = N$.

En plus :

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} n_i y_i^2 - \bar{y}^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} n_i \cdot (a x_i + b)^2 - (a\bar{x} + b)^2$$ 0,25 0,25

$$= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} n_i (a^2 x_i^2 + 2abx_i + b^2) - (a^2\bar{x}^2 + 2ab\bar{x} + b^2)$$ 0,25

$$= \frac{a^2}{N}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i^2 + \frac{2ab}{N}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i + \frac{b^2}{N}\sum_{i=1}^{k} n_i - a^2\bar{x}^2 - 2ab\bar{x} - b^2$$

$$= a^2 \cdot \left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i^2 - \bar{x}^2\right) + 2ab \cdot \left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i - \bar{x}\right] + b^2\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} n_i - 1\right]$$ 0,25

$$= a^2\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i^2 - \bar{x}^2\right] = \boxed{a^2\sigma_x^2 = \sigma_y^2}$$ 0,25 0,25

2)

$$y_i = \frac{x_i - \bar{x}}{\sigma_x} = \frac{1}{\sigma_x} x_i - \frac{\bar{x}}{\sigma_x} \Rightarrow$$

$$a = \frac{1}{\sigma_x} \quad \text{et} \quad b = \frac{\bar{x}}{\sigma_x}$$ 0,25

D'après (1) : $\bar{y} = a\bar{x} + b = \frac{1}{\sigma_x} \cdot \bar{x} - \frac{\bar{x}}{\sigma_x} = \boxed{0 = \bar{y}}$ 0,25

et $\sigma_y^2 = a^2\sigma_x^2 = \left(\frac{1}{\sigma_x}\right)^2 \cdot \sigma_x^2 = \boxed{1 = \sigma_y^2}$ 0,25

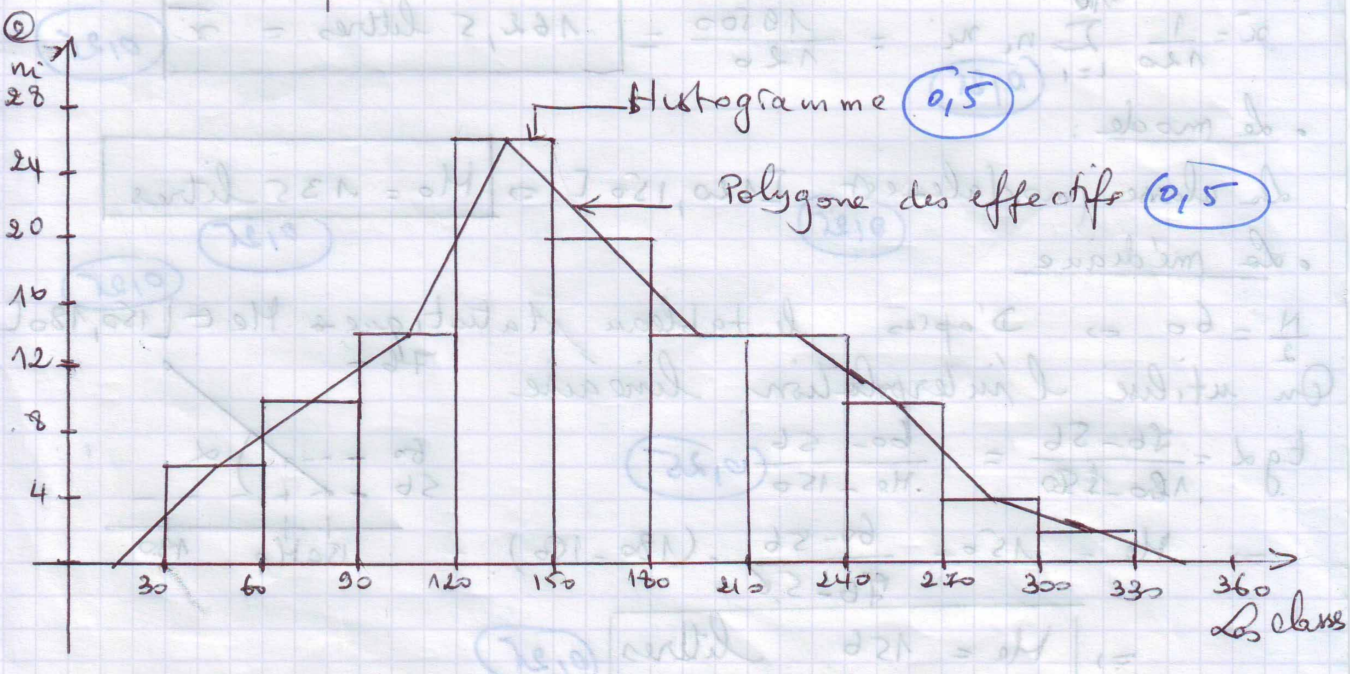
www.espace-etudiant.net

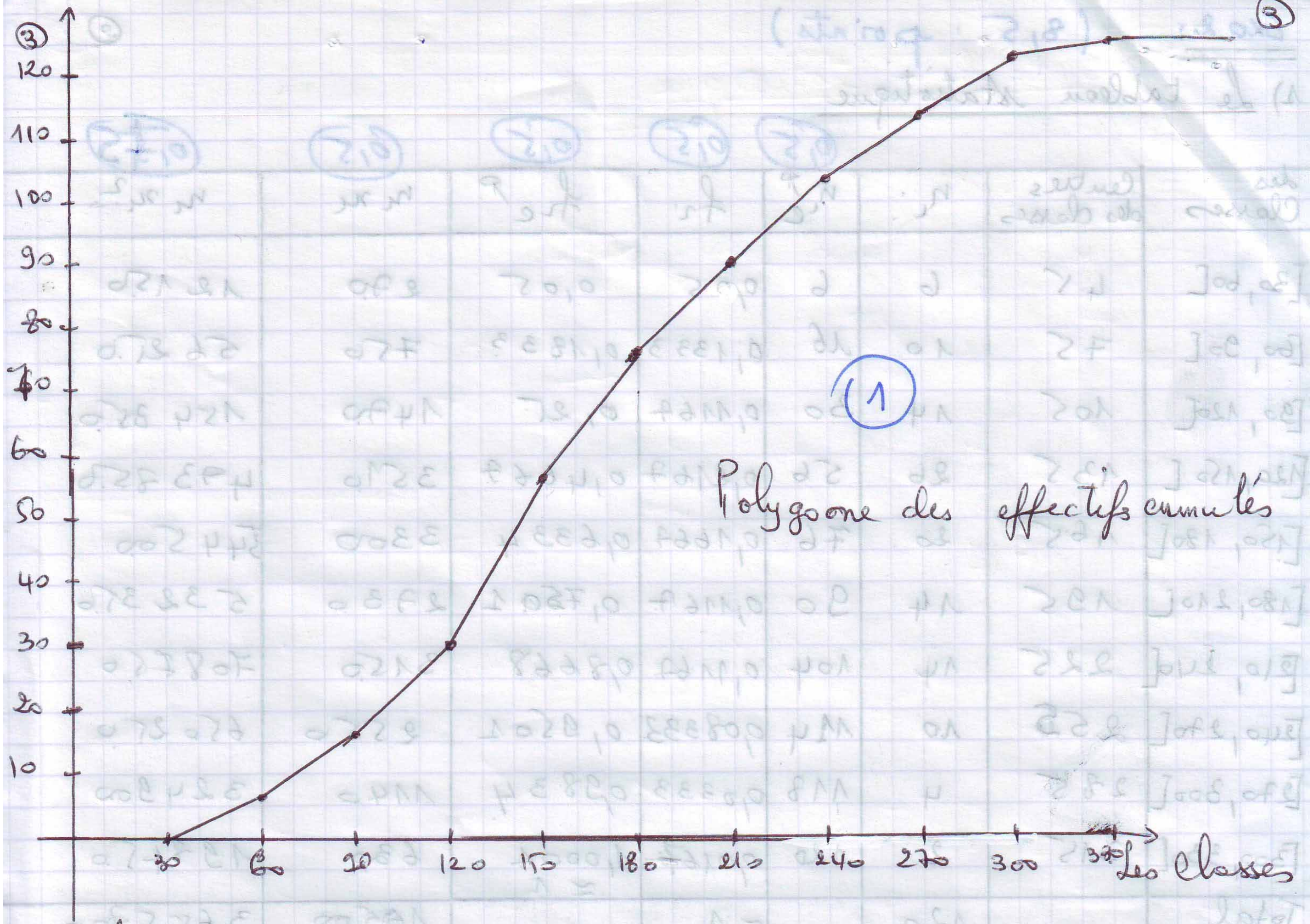
Exo 2 : (8,5 points)

1) Le tableau statistique

Les Classes	Centres des classes	n_i	$n_{ic}^{\nearrow}$ (0,5)	f_r (0,5)	$f_{rc}^{\nearrow}$ (0,5)	$n_i x_i$ (0,5)	$n_i x_i^2$ (0,~~7~~5)
[30, 60[	45	6	6	0,05	0,05	270	12150
[60, 90[	75	10	16	0,1333	0,1833	750	56250
[90, 120[	105	14	30	0,1167	0,25	1470	154350
[120, 150[	135	26	56	0,2167	0,4667	3510	473850
[150, 180[	165	20	76	0,1667	0,6334	3300	544500
[180, 210[	195	14	90	0,1167	0,7501	2730	532350
[210, 240[	225	14	104	0,1167	0,8668	3150	708750
[240, 270[	255	10	114	0,08333	0,9501	2550	650250
[270, 300[	285	4	118	0,0333	0,9834	1140	324900
[300, 330[	315	2	120	0,0167	1,0001 ≃ 1	630	198450
Total		120		≃ 1		19500	3655800

②





1). **La moyenne** :

$$\bar{x} = \frac{1}{120}\sum_{i=1}^{10} n_i x_i = \frac{19500}{120} = \boxed{162,5 \text{ litres} = \bar{x}}$$

0,25 0,25

• **Le mode** :

La classe modale est $[120, 150[$ $\Rightarrow$ $\boxed{Mo = 135 \text{ litres}}$

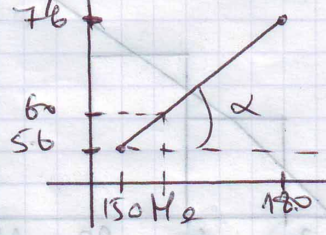
0,25 0,25

• **La médiane**

0,25

$\frac{N}{2} = 60 \Rightarrow$ D'après le tableau statistique : $Me \in [150, 180[$

On utilise l'interpolation linéaire



$$tg\,\alpha = \frac{76-56}{180-150} = \frac{60-56}{Me-150}$$ 0,25

$$\Rightarrow Me = 150 + \frac{60-56}{76-56}\cdot(180-150)$$

$$\Rightarrow \boxed{Me = 156 \text{ litres}}$$ 0,25

5) • La variance

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{120}\sum_{i=1}^{10} n_i x_i^2 - \bar{x}^2 = \frac{3655800}{120} - (162,5)^2$$ 0,25

$$\Rightarrow \boxed{\sigma_x^2 = 4058,75\ l^2}$$ 0,25

• Le coefficient de variation

$$Cv_x = \frac{\sigma x}{\bar{x}} \times 100 = \boxed{39,20\,\% = Cv\,x}$$ 0,25 0,25

• L'écart interquartile : $IQR = Q_3 - Q_1$ 0,25

(*) $Q_1 = ?$

$\frac{N}{4} = 30 \Rightarrow$ D'après le tableau statistique $\boxed{Q_1 = 120\,l}$ 0,25

(*) $Q_3 = ?$

$\frac{3N}{4} = 30 \Rightarrow$ D'après le tableau statistique $\boxed{Q_3 = 210\,l}$ 0,25

donc $IQR = 210 - 120 = \boxed{90 \text{ litres} = IQR}$ 0,25

Exo 3 (4 points)

$p_i = P(\{i\})$; $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \Omega$.

1) On sait que :

$$\begin{cases} p_1 = p_3 = p_5 = p \\ p_2 = p_4 = p_6 = q \quad (I) \\ p_2 = 2p_1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{q = 2p} \quad 0,5 \quad (1)$$

D'autre part on sait que :

$1 = P(\Omega) = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6$ 0,5

alors d'après (I) on a : $\boxed{3p + 3q = 1}$ 0,5 (2)

(1) et (2) donne le système :

$$\begin{cases} q = 2p \\ 3p + 3q = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p = 2p \\ 9p = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q = 2/9 \\ p = 1/9 \end{cases}$$ 0,25 0,25 0,25 0,25

Donc $\boxed{p_1 = p_3 = p_5 = 1/9}$ et $\boxed{p_2 = p_4 = p_6 = 2/9}$

www.espace-etudiant.net

2 (a) A = obtenir un nbre impair $\Rightarrow A = \{1, 3, 5\}$ 0,25

$\Rightarrow P(A) = p_1 + p_3 + p_5 = 3p = \boxed{1/3 = P(A)}$ 0,25

(b) B = obtenir un nbre pair $\Rightarrow B = \{2, 4, 6\} \Rightarrow$ 0,25

$P(B) = p_2 + p_4 + p_6 = 3q = \boxed{2/3 = P(B)}$ 0,25

(c) C = obtenir un nbre premier $\Rightarrow C = \{2, 3, 5\}$ 0,25

$\Rightarrow P(C) = p_2 + p_3 + p_5 = q + 2p = 2q = \boxed{4/9 = P(C)}$

0,25

Exo 4 (4 points)

Soit les evenements :

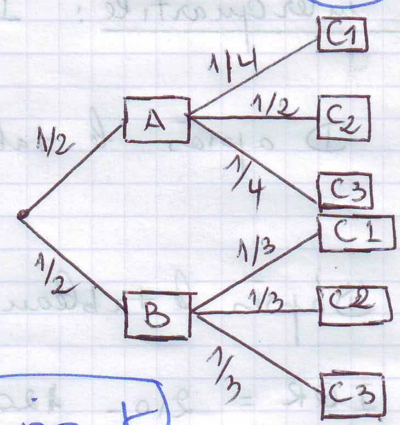
A = Choisir le concurrent A

B = Choisir le concurrent B.

C1 = Atteindre la case 1

C2 = Atteindre la case 2

C3 = Atteindre la case 3.



L'arbre graphique

1 point

1) $P(C3) = ?$ 0,25

Comme $\{A, B\}$ est un système complet alors d'après le théorème de Bayes on a ; 0,5

$P(C3) = P(A) \cdot P(C3/A) + P(B) \cdot P(C3/B)$ 0,5

$= 1/2 \cdot 1/4 + 1/2 \cdot 1/3 = 1/2 \cdot \frac{7}{12} = \frac{7}{24} \Rightarrow$

0,25

$\boxed{P(C3) = 0{,}2917}$

2 $P(A/C_2) = ?$ 0,25

$\{A, B\}$ forme un système complet alors d'après le théoreme de Bayes on peut écrire 0,5

$P(A/C2) = \dfrac{P(A) \cdot P(C2/A)}{P(A) \cdot P(C2/A) + P(B) \cdot P(C2/B)}$ 0,5

$= \dfrac{1/2 \cdot 1/2}{1/2 \cdot 1/2 + 1/2 \cdot 1/3} = \dfrac{1/2}{5/6} = \dfrac{3}{5}$

0,25

$\Rightarrow \boxed{P(A/C2) = 0{,}6}$

www.espace-etudiant.net