Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Année Universitaire 2019-2020

Date : 19/12/2019

1ère Année LMD MI

Durée : 01H30.

Contrôle continu : Algèbre 1

Les calculatrices et téléphones portables sont strictement interdits.

Exercice 1 : (08 points)

Notons E l'ensemble des étudiants de La Rocade, et S l'ensemble des jours de la semaine. Pour l'étudiant $x \in E$, on note $h_j(x)$ son heure de réveil le jour $j \in S$. Ecrivez avec des quantificateurs les propositions suivantes et donner ensuite leurs négations :

1. Tout étudiant se réveille au moins un jour de la semaine avant 8h.
2. Il y a au moins un jour dans lequel tout les étudiants se réveillent avant 8h.
3. Il y a au moins un jour dans lequel un étudiant ne se réveille pas avant 8h.
4. Il y a au moins un étudiant qui se réveille pas au moins un jour de la semaine avant 8h.
5. Tout les jours de la semaine chaque étudiant se réveille avant 8h.

Exercice 2 : (06 points)

1. Donnez la définition de deux ensembles disjoints.
2. Soient E un ensemble, A et B deux parties de E. On suppose que

$$A \cap B \neq \emptyset \text{ et } A \cup B \neq E.$$

On pose : $A_1 = A \cap B$ et $A_2 = C_E(A \cup B)$.
1. Montrer que A_1 et A_2 sont disjoints.
2. Montrer que si $A \subset B$ alors $C_E(B) \subset C_E(A)$.

Exercice 3 : (06 points)

1. Pour chaque $y \in \mathbb{R}$, résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^2 - x - 1 - y = 0$.
2. Etudier l'injectivité et la surjectivité de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = x^2 - x - 1.$$

3. Soit $g : [\frac{1}{2}; +\infty[\to [-\frac{5}{4}; +\infty[$ définie par $g(x) = f(x)$. Montrer que g est bijective.

Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Année Universitaire 2019-2020

Date : 19/12/2019

1ère Année LMD MI — Durée : 01H30.

Corrigé du Contrôle continu : Algèbre 1

Les calculatrices et téléphones portables sont strictement interdits.

Exercice 1 : (08 points)

Notons E l'ensemble des étudiants de La Rocade, et S l'ensemble des jours de la semaine. Pour l'étudiant $x \in E$, on note $h_j(x)$ son heure de réveil le jour $j \in S$. Ecrivez avec des quantificateurs les propositions suivantes et donner ensuite leurs négations :

1. Tout étudiant se réveille au moins un jour de la semaine avant 8h.
2. Il y a au moins un jour dans lequel tout les étudiants se réveillent avant 8h.
3. Il y a au moins un jour dans lequel un étudiant ne se réveille pas avant 8h.
4. Il y a au moins un étudiant qui se réveille pas au moins un jour de la semaine avant 8h.
5. Tout les jours de la semaine chaque étudiant se réveille avant 8h.

Solution :

1.

$$\forall x \in E \boxed{0{,}25pt}, \exists j \in S \boxed{0{,}25pt} : h_j(x) < 8. \boxed{0{,}25pt}$$

Sa négation est : $\exists x \in E \boxed{0{,}25pt}, \forall j \in S \boxed{0{,}25pt} : h_j(x) \geqslant 8. \boxed{0{,}25pt}$

2.

$$\exists j \in S \boxed{0{,}25pt}, \forall x \in E \boxed{0{,}25pt} : h_j(x) < 8. \boxed{0{,}25pt}$$

Sa négation est : $\forall j \in S \boxed{0{,}25pt}, \exists x \in E \boxed{0{,}25pt} : h_j(x) \geqslant 8. \boxed{0{,}25pt}$

3.

$$\exists j \in S \boxed{0{,}25pt}, \exists! x_0 \in E \boxed{0{,}5pt} : h_j(x_0) \geqslant 8. \boxed{0{,}25pt}$$

Sa négation est :

$$\forall j \in S \boxed{0{,}25pt}, (\nexists x \in E) \vee (\forall x \neq x_0 \in E) \boxed{0{,}5pt} : h_j(x) < 8. \boxed{0{,}25pt}$$

4.

$$\exists x \in E \boxed{0{,}25pt}, \exists j \in S \boxed{0{,}25pt} : h_j(x) \geqslant 8. \boxed{0{,}25pt}$$

Sa négation est : $\forall x \in E \boxed{0{,}25pt}, \forall j \in S \boxed{0{,}25pt} : h_j(x) < 8. \boxed{0{,}25pt}$

5.

$$\forall j \in S \boxed{0{,}25pt}, \forall x \in E \boxed{0{,}25pt} : h_j(x) < 8. \boxed{0{,}25pt}$$

Sa négation est : $\exists j \in S \boxed{0{,}25pt}, \exists x \in E \boxed{0{,}25pt} : h_j(x) \geqslant 8. \boxed{0{,}25pt}$

Exercice 2 : (06 points)
1. Donnez la définition de deux ensembles disjoints.
2. Soient E un ensemble, A et B deux parties de E. On suppose que

$$A \cap B \neq \emptyset \text{ et } A \cup B \neq E.$$

On pose : $A_1 = A \cap B$ et $A_2 = C_E(A \cup B)$.
1. Montrer que A_1 et A_2 sont disjoints.
2. Montrer que si $A \subset B$ alors $C_E(B) \subset C_E(A)$.

Solution :
1. On dit que deux ensembles A et B sont disjoints si $A \cap B = \emptyset$. $\boxed{\text{1pt}}$
2. Montrons que A_1 et A_2 sont disjoints. Il suffit de vérifier que $A_1 \cap A_2 = \emptyset$.

$$A_1 \cap A_2 = (A \cap B) \cap C_E(A \cup B).$$

$$= (A \cap B) \cap (C_E(A) \cap C_E(B)). \boxed{\text{0.5pt}}$$

$$= A \cap B \cap C_E(A) \cap C_E(B).$$

$$= A \cap (B \cap C_E(B)) \cap C_E(A). \boxed{\text{0.5pt}}$$

Puisque $B \cap C_E(B) = \emptyset$ $\boxed{\text{0.5pt}}$ et $A \cap C_E(A) = \emptyset$ $\boxed{\text{0.5pt}}$, on obtient

$$A_1 \cap A_2 = \emptyset. \boxed{\text{0.5pt}}$$

3. Montrons que si $A \subset B$ alors $C_E(B) \subset C_E(A)$.
Soit $x \in C_E(B)$ $\boxed{\text{0.5pt}}$. Ceci implique que $x \notin B$. $\boxed{\text{0.5pt}}$ Par conséquent $x \notin A$ car $A \subset B$ $\boxed{\text{0.5pt}}$. Donc $x \in C_E(A)$ $\boxed{\text{0.5pt}}$.
Conclusion : $C_E(B) \subset C_E(A)$. $\boxed{\text{0.5pt}}$

Exercice 3 : (06 points)
1. Pour chaque $y \in \mathbb{R}$, résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^2 - x - 1 - y = 0$.
2. Etudier l'injectivité et la surjectivité de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = x^2 - x - 1.$$

3. Soit $g : [\frac{1}{2}; +\infty[\to [-\frac{5}{4}; +\infty[$ définie par $g(x) = f(x)$. Montrer que g est bijective.

Solution :

1. $x^2 - x - 1 - y = 0$: une équation du second ordre. Calculons son discréminant : $\Delta = 1 - 4(-1-y) = 5 + 4y$. $\boxed{0.5\text{pt}}$

– Si $y < -\frac{5}{4}$, $\Delta < 0$ donc y'a pas de solutions dans $\mathbb{R} \Rightarrow S = \emptyset$. $\boxed{0.5\text{pt}}$
– Si $y = -\frac{5}{4}$, $\Delta = 0$ donc racine double $x = \frac{1}{2} \Rightarrow S = \{\frac{1}{2}\}$. $\boxed{0.5\text{pt}}$
– Si $y > -\frac{5}{4}$, $\Delta > 0$ donc deux racines distinctes

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{5+4y}}{2} \vee x_2 = \frac{1-\sqrt{5+4y}}{2}.$$

$$\Rightarrow S = \Big\{\frac{1+\sqrt{5+4y}}{2}, \frac{1-\sqrt{5+4y}}{2}\Big\}. \boxed{0.5\text{pt}}$$

2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2 - x - 1$.
Concernant la surjectivité, et d'après la question 1, on peut voir que pour $y < -\frac{5}{4}$ $\boxed{0.5\text{pt}}$ l'équation $y = f(x)$ n'admet pas de solutions i.e pour un tel y il n'y a pas d'antécédents donc f n'est pas surjective. $\boxed{0.5\text{pt}}$
Pour l'injectivité, et si on cherche les racines de l'équation $f(x) = 0$ (en prend $y = 0$ dans la question 1) on trouve $z_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $z_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, i.e $f(z_1) = f(z_2)$ mais $z_1 \neq z_2$ donc f n'est pas injective. $\boxed{0.5\text{pt}}$
3. Soit $g : [\frac{1}{2}; +\infty[\to [-\frac{5}{4}; +\infty[$ définie par $g(x) = f(x)$.
D'après la question 1, l'equation $y = f(x)$ admet au moins une solution si $y \geqslant -\frac{5}{4}$. $\boxed{0.5\text{pt}}$
Pour que g soit bijective, il faut une et une seule solution $\boxed{0.5\text{pt}}$ de l'équation $y = g(x)$ puisque $g(x) = f(x)$.
Les solutions sont

$$x_1 = \frac{1-\sqrt{5+4y}}{2}, x_2 = \frac{1+\sqrt{5+4y}}{2}.$$

On peut vérifier que $x_2 - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5+4y}}{2} \geqslant 0 \Rightarrow x_2 \geqslant \frac{1}{2}$, $\boxed{0.5\text{pt}}$ et que $x_1 - \frac{1}{2} = \frac{-\sqrt{5+4y}}{2} \leqslant 0 \Rightarrow x_1 \leqslant \frac{1}{2}$ $\boxed{0.5\text{pt}}$. Ce dernier est exclu $\boxed{0.5\text{pt}}$ car il n'est pas dans $[\frac{1}{2}; +\infty[$. Donc g est bijective.