Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université des Sciences et de la Technologie d'Oran Mohammed Boudiaf

---

FACULTÉ CHIMIE L1 UEF Maths2

Fiche de TD 4(2019/2020)

`" Application linéaire et Matrice."`

Exercice 01
Soit les applications $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définies par :

$$f(x, y, z) = (x, x - y, x + z), \quad g(x, y) = (2x + 2y, x + y).$$

1. Montrer que f, g sont linéaires.
2. Déterminer $\ker f, \ker g$ et Imf, Img et donner leurs dimensions, f, g sont-elles bijectives ?

Exercice 02 On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \ D = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \ E = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

1. Quels sont les produits matriciels possibles ? Quelles sont les matrices carrées et les matrices symétriques ?
2. Calculer $\frac{1}{3}C, \quad C + 2C, \quad C.D, \quad D^2$.
3. Calculer le déterminant de D, E.
4. Déterminer D^{-1}, E^{-1}.

Exercice 03
Soit A une matrice définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

1. Calculer A^2, A^3. Calculer $A^3 + A^2 + A$.
2. Exprimer A^{-1} en fonction de A^2, A et I_3. Détreminer A^{-1}.

Exercice 04
Soit A une matrice définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Trouver $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $A^2 = a.I_3 + b.A$.
2. En déduire que A est inverible et donner son inverse.

Bon
courage!

Dr. I.Medjadj

Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique
Université des Sciences et de la Technologie d'Oran Mohammed Boudiaf

---

Faculté de chimie L1 Maths2
Solution de la Fiche de TD 4(2019/2020)L1 Chimie

Exercice 01

1. $f(x, y, z) = (x, x - y, x + z)$ est linéaire si et seulement si

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall (x, y, z), (x', y', z') \in \mathbb{R}^3; f(\alpha(x, y, z) + \beta(x', y', z')) = \alpha f(x, y, z) + \beta f(x', y', z').$$

$$\begin{aligned} f(\alpha(x, y, z) + \beta(x', y', z')) &= f(\alpha x + \beta x', \alpha y + \beta y', \alpha z + \beta z') \\ &= (\alpha x + \beta x', \alpha x + \beta x' - \alpha y - \beta y', \alpha x + \beta x' + \alpha z + \beta z') \\ &= (\alpha x, \alpha x - \alpha y, \alpha x + \alpha z) + (\beta x', \beta x' - \beta y', \beta x' + \beta z') \\ &= \alpha(x, x - y, x + z) + \beta(x', x' - y', x' + z') \\ &= \alpha f(x, y, z) + \beta f(x', y', z') \end{aligned}$$

d'où f est linéaire.

2. Déterminons $\ker f$, et Imf et donner leurs dimensions, f est-elle bijectives ?

$$\begin{aligned} \ker f &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / f(x, y, z) = (0, 0, 0)\} \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = 0 \wedge x - y = 0 \wedge x + z = 0\} \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = y = z = 0\} \\ &= \{(0, 0, 0)\} \end{aligned}$$

ainsi $dim \ker f = 0$, alors est injective.

$$\begin{aligned} Imf &= \{(x, x - y, x + z)/(x, y) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \{x(1, 1, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1)/(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\}. \end{aligned}$$

Ainsi Imf est engendré par trois vecteur qui sont libres car

$$\forall \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}, \lambda_1(1, 1, 0) + \lambda_2(0, 1, 0) + \lambda_3(0, 0, 1) = (0, 0, 0) \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

(A Faire c'est simple).
Ainsi la $dimImf = 3$. ainsi f est surjective.
D'autre par sachant que la dimension de l'ensemble de départ est égale à la dimension de l'ensemble d'arrivée f, alors $\dim \ker f + \dim Imf = \dim \mathbb{R}^3, \Rightarrow \dim Imf = 3 - 0 = 3$.

3. f est bijective car il est injective et surjective.

1. $g(x, y) = (2x + 2y, x + y)$ est linéaire si et seulement si

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall (x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2; g(\alpha(x, y) + \beta(x', y')) = \alpha g(x, y) + \beta g(x', y').$$

$$\begin{aligned} g(\alpha(x, y) + \beta(x', y')) &= g(\alpha x + \beta x', \alpha y + \beta y') \\ &= (2\alpha x + 2\beta x' + 2\alpha y + 2\beta y', \alpha x + \beta x' + \alpha y + \beta y') \\ &= (2\alpha x + 2\alpha y, \alpha x + \alpha y) + (2\beta x' + 2\beta y', \beta x' + \beta y') \\ &= \alpha(2x + 2y, x + y) + \beta(2x' + 2y', x' + y') \\ &= \alpha g(x, y) + \beta g(x', y') \end{aligned}$$

d'où g est linéaire.

2. Déterminons $\ker g$, et Img et donner leurs dimensions, g est-elle bijectives ?

$$\begin{aligned}\ker g &= \{(x,y)\in \mathbb{R}^2/g(x,y)=(0,0)\}\\ &= \{(x,y)\in \mathbb{R}^2/2x+2y=0 \wedge x+y=0\}\\ &= \{(x,y)\in \mathbb{R}^2/y=-x\}\\ &= \{(x,-x)/x\in \mathbb{R}\}=\{(1,-1)x/x\in \mathbb{R}\}.\end{aligned}$$

ainsi le $\ker f$ est engendré par le vecteur $(1,-1)$ non nul, alors $\dim\ker f=1$. D'où g n'est pas injective.

$$\begin{aligned}Img &= \{(2x+2y,x+y)/(x,y)\in \mathbb{R}^2\}\\ &= \{x(2,1)+y(2,1)/(x,y)\in \mathbb{R}^2\}.\end{aligned}$$

Ainsi Img est engendré par deux vecteur qui ne sont libres c'est claire, alors elle est engendré par le vecteur $(2,1)$ $\dim Img=1$.
Sachant que la dimension de l'ensemble de départ est égale à la dimension de l'ensemble d'arrivée g est bijective si elle est soit injective ou bien surjective or g n'est injective car $dim\ker g=1$ et ni surjective car $\dim \mathbb{R}^2=\dim Img+\dim\ker f=2$

Exercice 02

$$A=\begin{pmatrix}1&1&2\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}1&0\\-2&0\\-1&3\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}-2&1\\1&1\end{pmatrix},\ E=\begin{pmatrix}-2&1&0\\-1&-2&0\\0&1&4\end{pmatrix}.$$

A est de type $(1,3)$ B est de type $(2,1)$ C est de type $(3,2)$ D est de type $(2,2)$ E est de type $(3,3)$

1. On peut effectuer les produits $AC, AE, BA, CB, CD, DB, DD, EC, EE$. Seules les matrices D et E sont carrées, et seule la matrice D est symétrique.
2. $\frac{1}{3}C=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&0\\ \frac{-2}{3}&0\\ \frac{-1}{3}&1\end{pmatrix}, C+2C=\begin{pmatrix}1&0\\-2&0\\-1&3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&0\\-4&0\\-2&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&0\\-6&0\\-3&9\end{pmatrix},$

$$C.D=\begin{pmatrix}1&0\\-2&0\\-1&3\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}-2&1\\1&1\end{pmatrix}, =\begin{pmatrix}1.(-2)+0.1&1.(3)+0.1\\(-2).(-2)+0.1&(-2).1+0.1\\(-1).(-2)+3.(1)&(-1).1+3.1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&3\\4&-2\\5&2\end{pmatrix}$$

$D^2=\begin{pmatrix}-2&1\\1&1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}-2&1\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&-1\\-1&2\end{pmatrix}.$

3. $|D|=\begin{vmatrix}-2&1\\1&1\end{vmatrix}=(-2).1-(1).1=-3$

$|E|=\begin{vmatrix}-2&1&0\\-1&-2&0\\0&1&4\end{vmatrix}=+0.\begin{vmatrix}-1&-2\\0&1\end{vmatrix}-0.\begin{vmatrix}-2&1\\0&1\end{vmatrix}+4\begin{vmatrix}-2&1\\-1&-2\end{vmatrix}=20.$

4. $|D|=-3\neq 0$ ainsi D et inversible. Calculons son inverse : Sachant que :

$$D^{-1}=\frac{1}{det(D)}C^t.$$

Où C^t est la comatrice de D.
$D=\begin{pmatrix}-2&1\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}+&-\\-&+\end{pmatrix}$. Calculons les coffacteurs de D :

$$c_{11}=+.1=1,\quad c_{12}=-(1)=-1,$$

$$c_{21}=-(1)=-1,\quad c_{22}=+(-2)=-2$$

d'où $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, C^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$

$$D^{-1} = \frac{-1}{3}C^t = \frac{-1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

$|E| = 20 \neq 0$ alors E est inversible. Calculons son inverse. Sachant que :

$$E^{-1} = \frac{1}{det(E)}C^t.$$

Où C^t est la comatrice de E.
$E = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$. Calculons les coffacteurs de E

$$c_{11} = +det(E_{11}) = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -8.$$

$$c_{12} = -det(E_{12}) = -\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 4.$$

$$c_{13} = +det(A_{13}) = +\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1.$$

$$c_{21} = -det(A_{21}) = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -4.$$

$$c_{22} = +det(A_{22}) = +\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = -8.$$

$$c_{23} = -det(A_{23}) = -\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2.$$

$$c_{31} = +det(A_{31}) = +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

$$c_{32} = -det(A_{32}) = -\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

$$c_{33} = +det(A_{33}) = +\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 5.$$

donc la matrice des cofacteurs est donnée par :

$$\begin{pmatrix} -8 & 4 & 2 \\ -4 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

et la comatrice et

$$C^t = \begin{pmatrix} -8 & -4 & 0 \\ 4 & -8 & 5 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$E^{-1} = \frac{1}{20}C^t = \frac{1}{20}\begin{pmatrix} -8 & -4 & 0 \\ 4 & -8 & 5 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

On peut vérifier que $E^{-1}E = I_3 = EE^{-1}$.

Exercice 03

1. $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

   $A^3 = A^2A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$

   $A^3 + A^2 + A = \begin{pmatrix} -1 & -4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$

2. $$A^3 + A^2 + A = -2I_3 \Leftrightarrow A(A^2 + A + I_3) = -2I_3 \Leftrightarrow A(\frac{-1}{2}A^2 - \frac{1}{2}A - \frac{1}{2}I_3) = I_3$$

   ce qui montre que A est inversible et que $A^{-1} = \frac{-1}{2}A^2 - \frac{1}{2}A - \frac{1}{2}I_3$.

   $$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -4 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 04

1. Trouvons $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $A^2 = a.I_3 + b.A$.

   $$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   ainsi $a = 2, b = 1$.

2. $$detA = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

   d'où A est inversible.

   $$A^2 - A = 2I_3 \Rightarrow A(A - I_3) = 2I_3 \Rightarrow A(1/2(A - I_3)) = I_3$$

   ainsi $A^{-1} = 1/2(A - I_3)$

   $$A^{-1} = 1/2\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$