## OSCILLATIONS FORCEES DES SYSTEMES A UN DEGRE DE LIBERTE

THEMES: Courbe de résonance
Etude du déphasage de la réponse
Bande passante et facteur de qualité

### I. Réponse du système mécanique à une excitation extérieure

#### 1. Régime transitoire. Régime permanent

Lorsque la masse m est soumise à une force extérieure F(t) de même direction que l'élongation x, l'équation (1) devient

$$\ddot{x} + 2\delta \dot{x} + \omega_o^2 x = F(t)/m = E(t) \qquad (2)$$

On sait que la solution générale de cette forme d'équation est la superposition de la solution libre $x_T(t)$ (équation sans second membre ou homogène) et d'une solution particulière $x_P(t)$ choisie en fonction de la forme du second membre E(t).

La solution $x_T(t)$, déjà obtenue dans l'étude des oscillations libres, correspond au "régime transitoire". En régime pseudo-périodique, elle s'écrit

$$x_T(t) = X_o \frac{\omega_o}{\omega_a} e^{-\delta t} \cos(\omega_a t + \phi)$$

avec $\omega_a = \sqrt{\omega_o^2 - \delta^2}$ et $\cos \phi = \omega_a / \omega_o$

pour des conditions initiales

$$x_T(0) = X_o \qquad \text{et} \qquad \dot{x}_T(0) = 0$$

Au bout d'un temps suffisamment long (quelques $\delta^{-1}$), $x_T$ devient très faible et la solution générale tend vers la solution particulière $x_P(t)$. Il s'établit alors ce qui est appelé " régime permanent ".

On s'intéressera au cours de cette partie au seul régime permanent, plus particulièrement dans le cas où l'excitation E(t) est sinusoïdale de pulsation ω telle que

$$E(t) = E_o\, e^{j\omega t} = \frac{F_o}{m} e^{j\omega t}$$

## 2. Etude du régime permanent

Le régime permanent est alors sinusoïdal de même pulsation que l'excitation et la réponse du système s'écrit

$$x(t) = A_o(\omega)\, e^{j(\omega t + \phi)}$$

où $A_o(\omega)$ est l'amplitude qui dépend de la pulsation $\omega$ et $\phi$ le déphasage de la réponse par rapport à l'excitation.

---

Montrer qu'on a

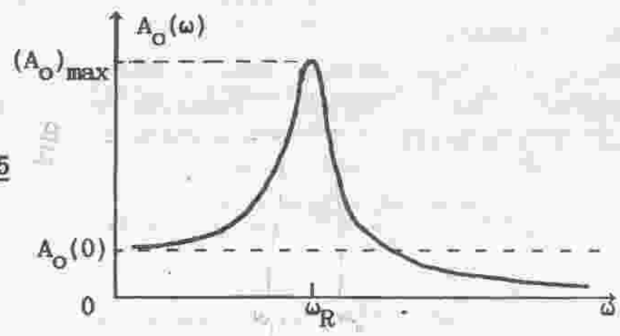
$$A_o(\omega) = \frac{F_o/m}{\sqrt{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + (2\delta\omega)^2}}$$

$$\mathrm{tg}\ \phi = -2\delta\omega \ / \ (\omega_o^2 - \omega^2)$$

---

La courbe donnant la variation de l'amplitude en fonction de $\omega$ est représentée sur la figure 5.

Figure 5




L'amplitude $A_o$ passe par un maximum $(A_o)_{max}$ pour une pulsation $\omega = \omega_R$. C'est le phénomène de résonance. La pulsation $\omega_R = \sqrt{\omega_o^2 - 2\delta^2}$ est la pulsation de résonance.

## 3. Acuité de la résonance. Bande passante

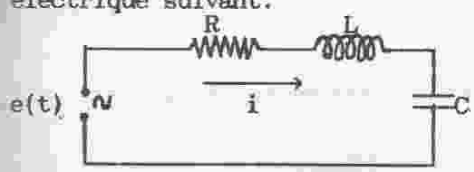
Le phénomène de résonance est d'autant plus prononcé que l'amortissement est faible. On peut caractériser l'acuité de la résonance par la largeur $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ où $\omega_1$ et $\omega_2$ sont les pulsations pour lesquelles l'amplitude de la réponse est égale à $(A_o)_{max}/\sqrt{2}$. C'est la largeur à - 3 dB ou " bande passante ".

Montrer que, lorsque l'amortissement est faible, on a les relations utiles suivantes:

$$Q = \frac{\omega_o}{2\delta} = \frac{\omega_o}{\Delta\omega} = \frac{1}{\alpha}\sqrt{mk} = \frac{m\omega_o}{\alpha}$$

## II. Etude d'un circuit RLC forcé

Les résultats précédents peuvent être appliqués au circuit électrique suivant:




dans lequel e(t) est un signal sinusoïdal $e_o \exp(j\omega t)$. L'équation différentielle décrivant l'évolution de la charge q(t) devient

$$\ddot{q} + 2\delta\,\dot{q} + \omega_o^2 q = E_o\, e^{j\omega t}$$

en posant

$$\delta = R/2L \;; \qquad \omega_o^2 = 1/LC \;; \qquad E_o = e_o/L$$

La réponse du circuit en régime permanent est alors donnée par

$$q(t) = Q_o(\omega)\, e^{j(\omega t + \phi_t)}$$

$$Q_o(\omega) = \frac{e_o/L}{\sqrt{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + (2\delta\omega)^2}}$$

$$\mathrm{tg}\, \phi_t = - \frac{2\delta\omega}{\omega_o^2 - \omega^2}$$

### 1. Etude de l'amplitude

La tension $v_c(t)$ aux bornes du condensateur et le courant i(t) dans le circuit auront pour amplitudes respectives :

$$V_o(\omega) = \frac{e_o\, \omega_o^2}{\sqrt{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + (2\delta\omega)^2}}$$

$$I_o(\omega) = \frac{e_o\, \omega}{L\sqrt{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + (2\delta\omega)^2}}$$

Etablir la relation

$$(V_o)_{max} = e_o \frac{Q}{\sqrt{1 - 1/4Q^2}}$$

où Q est le facteur de qualité du circuit.
Montrer que, pour $\omega = \omega_o$, on a:

$$V_o = Q\, e_o$$

Cette dernière relation signifie que lorsque la pulsation de l'excitation est égale à la pulsation propre $\omega_o$ du circuit, la réponse aux bornes du condensateur est égale à l'excitation amplifiée d'un facteur Q. C'est pour cette raison que le coefficient Q est souvent appelé "facteur de surtension". On peut ainsi compléter la série de relations utiles permettant la mesure de Q:

$$Q = \frac{\omega_o}{2\delta} = \frac{\omega_o}{\Delta\omega} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{L\omega_o}{R} = \frac{V_o(\omega_o)}{e_o} = R_c/2R$$

2. Etude du déphasage.

L'angle $\phi_t$ représente le déphasage de la réponse en tension aux bornes du condensateur ( du déplacement pour le système mécanique )par rapport à l'excitation E(t). Il est toujours négatif, ce qui signifie que la réponse est en retard par rapport à l'excitation. On obtient la variation suivante pour le déphasage $\phi_t$ correspondant à un amortissement $\delta$ donné (figure 6).

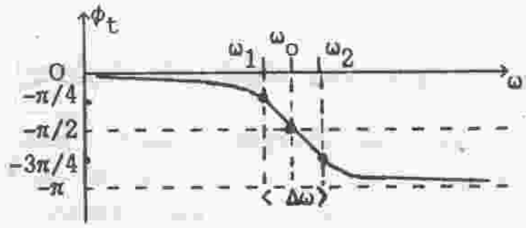



Figure 6

Montrer que l'écart entre les deux pulsations $\omega_1$ et $\omega_2$ pour lesquelles $\phi_t$ est égal respectivement à $-\pi/4$ et $-3\pi/4$ est égal à la bande passante $\Delta\omega$.

## III. Réalisation pratique

### 1. Dispositif expérimental

Le dispositif expérimental est identique à celui qui a été utilisé dans la partie " Oscillations libres ", le GBF délivrant cette fois-ci un signal sinusoïdal. La fréquence du signal peut être mesurée à l'aide d'un fréquencemètre, à l'oscilloscope ou lue directement sur le cadran du GBF.

### 2. Observation du phénomène de résonance de tension.

La résistance R étant fixée à 0, le signal d'entrée e(t) est envoyé sur la voie $Y_1$ de l'oscilloscope et la tension aux bornes du condensateur C sur la voie $Y_2$. Ajuster l'amplitude de e(t) (<0.4 V). Faire varier la fréquence du signal d'entrée et observer simultanément la variation des amplitudes des deux signaux. Dire, plus particulièrement, si l'amplitude de e(t) varie. Si oui, à quoi est due cette variation ? Faut-il ou pas, dans ce cas, compenser cette variation? Ces deux possibilités correspondent-elles au même facteur de qualité? D'où proviendrait une éventuelle différence ?

Relever la pulsation de résonance $\omega_R$ et la comparer à la pulsation propre du circuit $\omega_o$.

Fixer R à 100 Ω puis à 500 Ω et effectuer les mêmes opérations. Comparer avec les observations précédentes et interpréter.

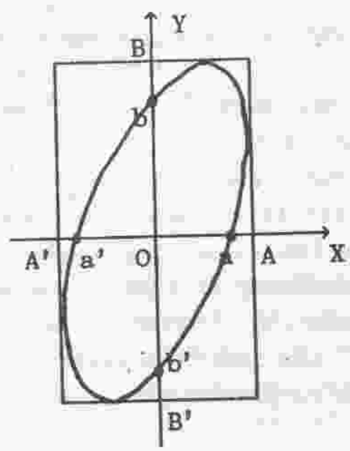
### 3. Etude de la réponse du système (Amplitude et phase)

On se propose de tracer les courbes donnant l'amplitude et la phase de la tension aux bornes de C en fonction de la fréquence du signal d'entrée e(t) et cela pour deux amortissements différents ( R = 0 et R = 100 Ω )

Faire varier la pulsation du signal entre $\omega_o/4$ et $2\omega_o$ en resserrant les intervalles au voisinage de la résonance. Relever à l'oscilloscope l'amplitude de la réponse aux bornes de C ainsi que son déphasage par rapport à e(t). Veiller à ce que l'amplitude du signal d'entrée e(t) reste constante en la réajustant si nécessaire.

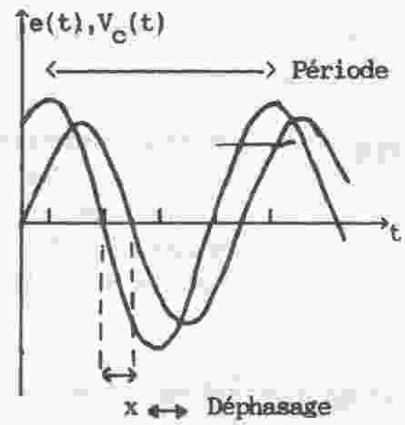
---

Remarque: Pour la mesure simultanée du déphasage et de l'amplitude, il sera plus pratique d'utiliser le décalage entre les deux sinusoïdes $V_c(t)$ et e(t) plutôt que la méthode de l'ellipse. On rappelle toutefois ci-après le principe de ces deux méthodes de mesure.




En mode XY

$\sin \phi = Oa/OA = Ob/OB = aa'/AA' = bb'/BB'$




<u>En mode balayage</u>

$\phi = 2\pi\ x/L$ radians

$\phi = 2\pi \frac{x}{L}$

---

Tracer sur le même repère, en fonction de la fréquence, les variations de l'amplitude de $V_c(t)$ [ou de $V_c/e_o$] obtenues pour R = 0 et R = 100 Ω.

Tracer sur un autre repère les variations du déphasage $\phi_t$ obtenues pour R = 0 et R = 100 Ω.

## 4. Etude de l'acuité de la résonance

Calculer, à partir des courbes d'amplitude et de déphasage, la bande passante à - 3 dB pour chacune des deux résistances et en déduire les facteurs de qualité correspondants.

Comparer avec les valeurs obtenues à l'aide des autres expressions donnant le facteur de qualité, y compris celles utilisant les oscillations libres. Discuter les différents résultats.

## 5. Application à la mesure d'une résistance et d'une capacité inconnues.

Remplacer la résistance AOIP par la résistance $R_x$ et le condensateur C par le condensateur $C_x$. Utiliser les résultats précédents pour déterminer la valeur de $R_x$ et $C_x$ en estimant les incertitudes correspondantes.
Comparer aux valeurs obtenues à partir de l'étude des oscillations libres. Comment peut-on expliquer les écarts éventuels sur la valeur de $R_x$ ?

Module : Vibrations et Ondes Mécaniques

12/20

Manipulation N° 2

# Oscillations forcées des systèmes à un degré de liberté.

But de TP :

- Courbe de résonance.
- Etude du déphasage de la réponse.
- Bande passante et facteur de qualité.

## I. Réponse du système mécanique à une excitation extérieure

### 1. Régime Transitoire - Régime permanent.

Une masse est soumise à une force extérieure $F(t)$ a pour une équation différentielle : $\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = F(t)/m$, elle est définie à partir de l'équation de lagrange : $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{x}} + F(t)$

La solution générale est une combinaison de deux solutions l'une $x_H(t)$ homogène / $x_H(t) = x_0 \frac{\omega_0}{\omega_a} e^{-\delta t} \cos(\omega_a t + \varphi)$ dans le régime transitoire et l'autre $x_p(t)$ particulière, avec $F(t) = F_0 e^{j\omega t}$

### 2. Etude du régime permanent

Est un régime sinusoïdal, la réponse s'écrit : $x(t) = A(\omega) e^{j(\omega t + \varphi)}$

L'Amplitude $A(\omega)$ ?

$\dot{x}(t) = j\omega A e^{j(\omega t + \varphi)}$ et $\ddot{x}(t) = -\omega^2 A e^{j(\omega t + \varphi)}$

$\Rightarrow -\omega^2 A e^{j(\omega t + \varphi)} + 2\delta j A e^{j(\omega t + \varphi)} + \omega_0^2 A e^{j(\omega t + \varphi)} = \frac{F_0}{m} e^{j\omega t}$

$\Rightarrow e^{j\varphi}\left[A(\omega_0^2 - \omega^2) + 2\delta j\omega\right] = F_0/m \qquad e^{j\varphi} = \cos\varphi + j\sin\varphi$

$\Rightarrow A(\omega_0^2 - \omega^2) - 2\delta j\omega = F_0/m\,(\cos\varphi - j\sin\varphi)$

$$\Rightarrow \begin{cases} A(\omega_0^2 - \omega^2) = F_0/m \cos\varphi \\ -2\delta\omega = \frac{F_0}{m}\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 = F_0^2/m^2 \cos^2\varphi \quad ① \\ 4\delta^2\omega^2 = F_0^2/m^2 \sin^2\varphi \quad ② \end{cases}$$

$\Rightarrow \operatorname{tg}\varphi = \frac{-2\delta\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)}$ et $① + ② : A^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2 = F_0^2/m^2 \underbrace{(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)}_{1}$

d'où $A(\omega) = \frac{F_0/m}{\left[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2\right]^{1/2}}$

$A_{max}$ ?

$\frac{d}{d\omega^2}\left((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2\right)^{1/2} = 0 \Rightarrow A_{max} = \frac{F_0}{2m\,\delta\,\omega_a}$

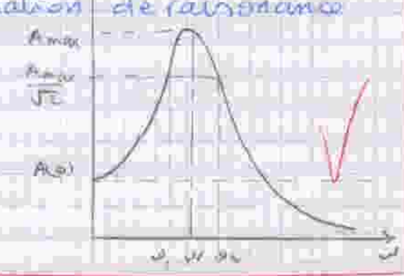
$\omega = 0 \rightarrow A(0) = \frac{F_0}{m\,\omega_0^2}$

$\omega = \infty \rightarrow A(\omega) = 0$

$\omega_r^2 = \omega_0^2 - 2\delta^2$

La pulsation de raisonance

### 3. Bande passante




$B = \Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$, $A(\omega_1) = A(\omega_2) = \frac{A_{max}}{\sqrt{2}}$

$\frac{(F_0/m)^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2} = \frac{A_{max}^2}{2} = \frac{(F_0/m)^2}{8\delta^2\omega_a^2}$

donc : $(\omega_0^2-\omega^2)^2 = 4\delta^2\omega^2 \Rightarrow |\omega_0^2-\omega^2| = 2\delta\omega \Rightarrow \begin{cases} \omega_0^2-\omega_1^2 = 2\delta\omega_1 \\ \omega_2^2-\omega_0^2 = 2\delta\omega_2 \end{cases}$

$\omega_2^2-\omega_1^2 = 2\delta(\omega_2+\omega_1) \Rightarrow B = \omega_2-\omega_1 = 2\delta$

Le facteur de qualité $Q = \frac{\omega_0}{B} = \frac{\omega_0}{2\delta}$ et on a : $\delta = \frac{\alpha}{2m}$ et $\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}$ dans un système masse - ressort - amortisseur.

d'où $Q = \frac{m\,\omega_0}{\alpha} = \frac{1}{\alpha}\sqrt{mK}$

## II Étude d'un circuit RLC forcé.

$\ddot{q}+2\delta\dot{q}+\omega_0^2 q = \frac{E_0}{m}e^{j\omega t}$ avec : $\alpha \rightarrow R$ ; $m \rightarrow L$ ; $K \rightarrow \frac{1}{C}$

$\delta = R/2L$ , $\omega_0^2 = 1/LC$ ; $E_0 = e_0/L$ $F(t) \rightarrow e(t)$ , $x(t) \rightarrow q(t)$

$q(t) = Q_0(\omega)\,e^{j(\omega t+\varphi)}$ et $Q_0(\omega) = \frac{e_0/L}{[(\omega_0^2-\omega^2)^2+(2\delta\omega)^2]^{1/2}}$

### 1- Étude de l'amplitude

on a $V_c$ aux bornes du condensateur est : $V_c(\omega) = \frac{e_0\,\omega_0^2}{[(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\delta^2\omega^2]^{1/2}}$

pour $\omega = \omega_0$ on a : $V_0 = \frac{e_0\,\omega_0^2}{[(\omega_0^2-\omega_0^2)^2+4\delta^2\omega_0^2]^{1/2}}$

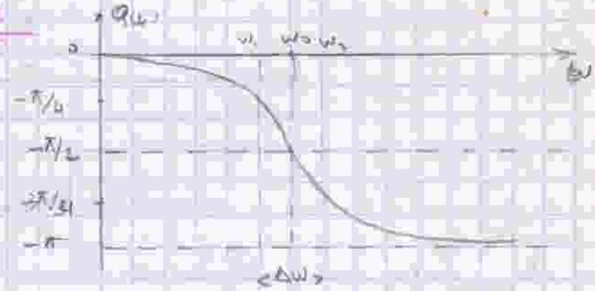
$= e_0\frac{\omega_0}{2\delta} \Rightarrow V_0 = e_0\,Q$

donc : $Q = \frac{V_0}{e_0} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{\omega_0}{2\delta}$

### 2- Étude du déphasage

on a : $tg\,\varphi = \frac{-2\delta\omega}{\omega_0^2-\omega^2}$

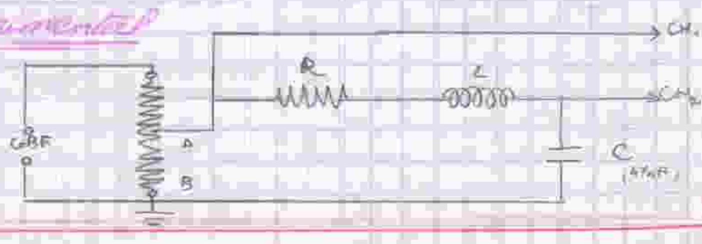
lorsque $\omega$ prend les valeurs on a le Tableau suivant.




| $\omega$ | 0 | $\omega_1$ | $\omega_0$ | $\omega_2$ | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $tg\varphi$ | 0 | -1 | $\infty$ | +1 | 0 |
| $\varphi$ | 0 | $-\frac{\pi}{4}$ | $-\frac{\pi}{2}$ | $-\frac{3\pi}{4}$ | $-\pi$ |

## III Réalisation pratique

### 1- Dispositif expérimental



2. Observation du phénomène de résonance de tension

| f (kHz) | 6,7 | 6,6 | 6,5 | 6,3 | 6,6 | 6 | 5,5 | 7 | 7,3 | 7,5 | 8 |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| V (Volt) | 5 | 4,6 | 3,8 | 2,8 | 1,6 | 1,2 | 0,8 | 3,2 | 1,4 | 0,8 | 0,6 |
| φ (rd) | | | | | | | | | | | |

R = 100 Ω.

| f | 6,5 | 6 | 5,6 | 5,5 | 5 | 4,5 | 7 | 7,5 | 8 | 8,5 | 9 |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| V | 0,8 | 0,48 | 0,56 | 0,5 | 0,4 | 0,35 | 0,7 | 0,56 | 0,4 | 0,3 | 0,2 |

le graphe du déphasage?

Rx? et Cx?