Corrigé de la série 3 : dynamique des fluides parfaits –notions sur la cinématique

Exercice 1

1) OUI, l'écoulement est permanent car les composantes du champ de vitesse ne dépendent pas du temps

2) Composantes de l'accélération

$\vec{Y} = \partial\vec{V}/\partial t + \vec{V}\Delta\vec{V}$

$Y_x = \partial v_x/\partial t + (v_x.\ \partial v_x/\partial x) + (v_y\ .\ \partial v_x/\partial y) = 0 + (cx^2).2cx + 0 = 2c^2x^3$

$Y_y = \partial v_y/\partial t + (v_x.\ \partial v_y/\partial x) + (v_y\ .\ \partial v_y/\partial y) = 0 + 0 + (cy^2).\ 2cy = 2c^2y^3$

3) Points d'accélération nulle

L'accélération est nulle lorsque : $\gamma_x = 0$ et $\gamma_y = 0$; c-à-d : $2c^2x^3 = 0$ et $2c^2y^3 = 0$

Donc pour $(x,y) = (0,0)$.

Exercice 2

Pour déterminer la composante de vitesse suivant x, utilisons l'équation de continuité.

Pour un écoulement permanent et incompressible, l'équation de continuité s'écrit :

$\mathrm{div}\ \vec{v} = 0 \Longrightarrow \partial v_x/\partial x + \partial v_y/\partial y = 0 \Longrightarrow \partial v_x/\partial x + (3x - x^2) = 0 \Longrightarrow \partial v_x = (x^2 - 3x)\partial x$

En intégrant on a : $v_x = x^3/3 - 3x^2/2 + f(y)$

Où f(y) est fonction arbitraire de y.

Exercice 3

1) Elévation maximale Z_B

Appliquons l'équation de Bernoulli entre les points A et B en prenant le niveau d'eau dans le réservoir

comme niveau de référence :

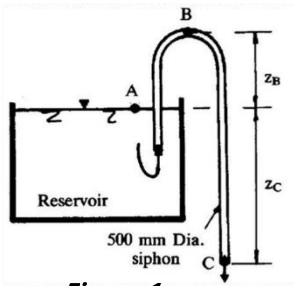


Figure 1

$Z_A + P_A/\rho.g + V_A^2/2g = Z_B + P_B/\rho.g + V_B^2/2g$

$Z_A = 0$ (niveau de référence)

$V_A = 0$ (grand réservoir)

(P_A)réelle = 0 (pression atmosphérique)

(P_B)réelle = (P_B)absolue – P_{atm} = $20.10^3 - 1.10^5$ = - 80 000 N/m² (pression d'aspiration donc négative)

$V_B = Q/S = 4Q/(\pi D^2) = 4x2,15/(3,14x0,5^2) = 10,96$ m/s.

D'où $Z_B = 80/9,81 - 10,96^2/2.\ 9,81$

$\Longrightarrow Z_B = 2,03$ m

2) Elévation Z_C

Appliquons l'équation de Bernoulli entre les points A et C en prenant le niveau d'eau dans le réservoir comme niveau de référence :

$Z_A + P_A/\rho.g + V_A^2/2g = Zc + Pc/\rho.g + Vc^2/2g$

avec ZC négatif (par rapport au niveau de référence adopté).

Comme précédemment, $Z_A = 0$, $V_A = 0$, (P_A)réelle = 0.

(P_C)réelle = 0 (tuyau ouvert en C, donc pression atmosphérique)

$V_C = V_B = 10{,}96$ m/s (tuyau de même débit et de même section en B et en C).

D'où $Z_C = -10{,}96^2/2.\ 9{,}81$

$\Longrightarrow Z_C = -6{,}12$ m ; donc en terme absolu $Z_C = 6{,}12$ m.

Exercice 4

Appliquons l'équation de Bernoulli entre les points (1) et (2) :

$Z_1 + P_1/\rho.g + V_1^2/2g = Z_2 + P_2/\rho.g + V_2^2/2g$

$Z_1 = Z_2$ (même niveau)

$V_2 = 0$ (point d'arrêt)

Donc, $P_1/\rho.g + V_1^2/2g = P_2/\rho.g$ (1)

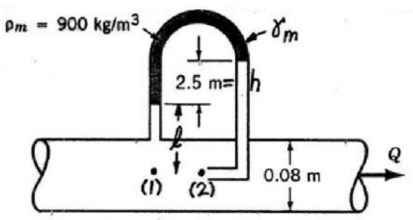


Figure 2

Pour déterminer $(P_2 - P_1)$, utilisons les équations de la statique des fluides (CH 2 du cours).

$P_1 - \rho_e g l - \rho_m g h + \rho_e g(l + h) = P_2 \Longrightarrow P_2 - P_1 = (\rho_e - \rho_m).gh$ (2)

(2) dans (1) $\Longrightarrow V_1 = (2.\ (\rho_e - \rho_m).gh/\ \rho_e)^{0.5}$

$V1 = (2.(1000\text{-}900).9{,}81.2{,}5\ /1000)^{0.5} = 2{,}21$m/s

Le débit Q peut être déterminé par : $Q = V_1.S = V_1\ .\pi D^2/4$

$Q = 2{,}21.\ \pi.\ 0{,}08^2/4 = 0{,}011 m^3/s$

Exercice 5

- *Détermination du débit Q*

Appliquons l'équation de Bernoulli entre les points (1) et (2) :

$Z_1 + P_1/\rho.g + V_1^2/2g = Z_2 + P_2/\rho.g + V_2^2/2g$

Avec : $Z_2 - Z_1 = = 0{,}8$ m ; $P_1 = 85$ kPa ; $P_2 = 0$, $V_1 = s_2/s_1\ .V_2 = (D_2/D_1)^2\ .V_2 = (0{,}05\ /0{,}1)^2\ .V_2 = 0{,}25\ V_2$

Donc, l'équation de Bernoulli devient :

$85.10^3/1000.9{,}81 + 0{,}25^2\ V_2^2/2.9{,}81 = 0{,}8 + V_2^2/2.9{,}81$

$V_2^2/2.9{,}81\ [\ 1\text{-}0{,}25^2] = 85.10^3/1000.9{,}81\ \text{-}0{,}8 \Rightarrow V_2 = [[(85.10^3/1000.9{,}81\ \text{-}0{,}8)\ .2.9{,}81]/[\ 1\text{-}0{,}25^2]\ ]^{0{,}5}$
$V_2 = 12{,}83$m/s

$Q = V_2 .S_2 = V_2.\pi D^2 /4 = 12,83. \pi. 0,05^2/4 = 0,0252 m^3/s$

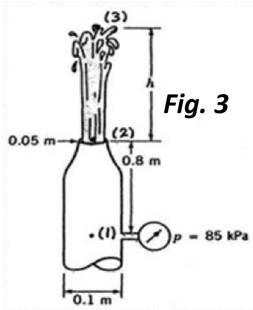


Fig. 3

<u>Détermination de la hauteur h</u>

Appliquons l'équation de Bernoulli entre les points (2) et (3) :

$Z_2 + P_2/\rho.g + V_2^2/2g = Z_3 + P_3/\rho.g + V_3^2/2g$

Avec : $Z_3 - Z_2 = h$; $P_2 = 0$ (P_{atm}) ; $P_3 = 0$ (P_{atm}) et $V_3 = 0$ (point d'arrêt du jet)

Donc : $V_2^2/2g = h \Rightarrow h = 12,83^2/2.9,81 = 8,39 m$

Exercice 6

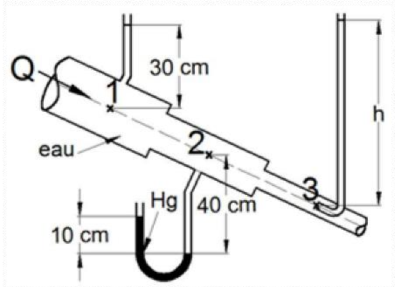


Figure 6

Appliquons l'équation de Bernoulli entre les points 1 et 2 :

$Z_1 + P_1/\rho.g + V_1^2/2g = Z_2 + P_2/\rho.g + V_2^2/2g$

Avec $P_1 = \rho_e. g.0,3 = 10^3x9,81x0,3 = 2943$ Pa

Et $P_2 = \rho_{Hg}.g .0,1 - \rho_e. g.0,4 = 10^3x9,81. (13,6x0,1 - 0,4) = 9417,6$ Pa

D'où : $V_2^2 - V_1^2 /2g = 2-1 + (2943-9417,6)/10^3.9,81 = 0,34N$

D'autre part : $V_2^2 - V_1^2 /2g = (Q/s_2)^2 - (Q/s_1)^2 / 2g = Q^2. (s_1^2 - s_2^2)/ 2g.s_1^2 s_2^2 =$

$= Q^2.(\pi/4)^2[D_1^4 - D_2^4]/2g.(\pi/4)^4 D_1^4 D_2^4$

$V_2^2 - V_1^2 /2g = Q^2.8[D_1^4 - D_2^4]/g\pi^2 D_1^4 D_2^4$

Donc : $Q = [0,34. g\pi^2 D_1^4 D_2^4 / 8[D_1^4 - D_2^4]]^{0,5} = [0,34.9,81.3,14^2.0,3^4.0,2^4/8.(0,3^4-0,2^4)]^{0,5}$ $=0,091 m^3/s$

2. *Détermination de la hauteur h d'eau dans le tube de Pitot*

Bernoulli entre les points 2 et 3 :

$Z_2 + P_2/\rho.g + V_2^2/2g = Z_3 + P_3/\rho.g + V_3^2/2g$

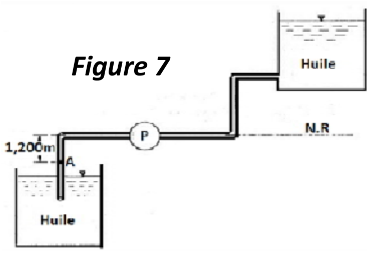
Avec : $V_3 = 0$ (point d'arrêt) ; $P_3/\rho.g = h$ et $V_2 = Q/s_2 = 4Q/\pi D_2^2 = 4.0,091/3,14.0,2^2 = 2,9 m/s$

D'où : $1+(9417,6/10^3.9,81) + (2,9^2/2.9,81) = 0 + h + 0 \Rightarrow h = 2,39$ m

Exercice 7

On cherche la hauteur d'énergie totale H au point A. Bernoulli au point A donne :

Figure 7



$H = Z_A + P_A/\rho_h.g + V_A^2/2g$

$Z_A = -1,2m$; $V_A = Q/s = 4Q / \pi D^2 = 4.0,03/3,14.0,1^2 = 3,82 m/s$; $P_A/\rho_h.g = -180 mmHg$

$P_A/\rho_h.g = -180 .10^{-3} . \rho_{Hg} / \rho_h = -0,18.13,6/0,85 = -2,88$ m d'huile

D'où $H = -1,2 -2,88 + 3,82^2/2.9,81 = -3,34 m$