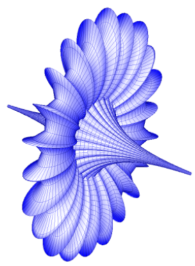
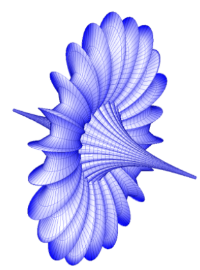
Cours Mathématiques 2



Chapitre 4 : Notion de $\mathbb{K}-$Espaces vectoriels($\mathbb{K}$ étant un Corps Commutatif)



Dr. Imene Medjadj

CHAPITRE 1

Notion de $\mathbb{K}-$ Espaces vectoriels($\mathbb{K}$ étant un Corps Commutatif) avec Exercices Corrigés

1. Espace vectoriel et sous espace vectoriel

Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif (généralement c'est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et soit E un ensemble non vide muni d'une opération interne notée $(+)$:

$$(+) : E \times E \to E$$

$$(x, y) \to x + y$$

et d'une opération externe notée $(\cdot)$:

$$(\cdot) : \mathbb{K} \times E \to E$$

$$(\lambda, x) \to \lambda \cdot x$$

Définition 1.1. *Un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$ ou un $\mathbb{K}-$ espace vectoriel est un triplet $(E, +, \cdot)$ tel que :*

(1) $(E, +)$ *est un groupe commutatif.*
(2) $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x, y \in E, \lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$
(3) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall x \in E, (\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$
(4) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall x \in E, (\lambda \cdot \mu) \cdot x = \lambda(\mu.x)$
(5) $\forall x \in E, 1_{\mathbb{K}} \cdot x = x$

Les éléments de l'espace vectoriel sont appelés des vecteurs et ceux de $\mathbb{K}$ des scalaires.

Proposition 1.2. *Si E est $\mathbb{K}-$ espace vectoriel, alors on a les propriétés suivantes :*

(1) $\forall x \in E, 0_{\mathbb{K}} \cdot x = 0_E$
(2) $\forall x \in E, -1_{\mathbb{K}} \cdot x = -x$
(3) $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda \cdot 0_E = 0_E$
(4) $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x, y \in E, \lambda \cdot (x - y) = \lambda \cdot x - \lambda \cdot y$
(5) $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in E, x \cdot \lambda = 0_E \Leftrightarrow x = 0_E \vee \lambda = 0_{\mathbb{K}}$

Exemple 1.3. (1) $(\mathbb{R}, +, .)$ *est un* $\mathbb{R}-$ *espace vectoriel,* $(\mathbb{C}, +, .)$ *est un* $\mathbb{C}-$*e.v.*

(2) *Si on considère* $\mathbb{R}^2$ *muni des deux opérations suivante*

$$(+) : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \ \ (.) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

$$((x, y), (x', y')) \to (x + x', y + y'), \ \ (\lambda, (x, y)) \to (\lambda \cdot x, \lambda \cdot y)$$

on peut facilement montrer que $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ *est un* $\mathbb{R}-$*e.v.*

Définition 1.4. *Soit* $(E, +, \cdot)$ *un* $\mathbb{K}-$ *espace vectoriel et soit* F *un sous ensemble non vide de* E*, on dit que* F *est sous espace vectoriel si* $(F, +, \cdot)$ *est aussi un* $\mathbb{K}-$ *espace vectoriel.*

Remarque 1.5. *Lorsque* $(F, +, \cdot)$ *est* $\mathbb{K}-$ *sous espace vectoriel de* $(E, +, \cdot)$*, alors* $0_E \in F$.
Si $0_E \notin F$ *alors* $(F, +, \cdot)$ *ne peut pas être un* $\mathbb{K}-$ *sous espace vectoriel de* $(E, +, \cdot)$.

Théorème 1.6. *Soit* $(E, +, \cdot)$ *un* $\mathbb{K}-$ *espace vectoriel et* $F \subset E, F$ *non vide on a les équivalences suivantes :*

(1) F *est un sous espace vectoriel de* E.

(2) F *est stable par l'addition et par la multiplication c'est à dire :*

$$\forall x, y \in F, \forall \lambda \in \mathbb{K}, x + y \in F, \lambda.x \in F.$$

(3) $\forall x, y \in F, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \lambda.x + \mu.y \in F$, *d'où :*

$$F \text{ est s.e.v} \Leftrightarrow \begin{cases} F \neq \emptyset, \\ \forall x, y \in F, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \quad \lambda.x + \mu.y \in F \end{cases}$$

(4) $\forall x, y \in F, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \lambda.x + \mu.y \in F$, *d'où :*

$$F \text{ est s.e.v} \Leftrightarrow \begin{cases} 0_E \in F, \\ \forall x, y \in F, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \quad \lambda.x + \mu.y \in F \end{cases}$$

Exemple 1.7. (1) $\{0_E\}, E$ *sont des sous espace vectoriel de* E.

(2) $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x + y = 0\}$ *est un sous espace vectoriel car ;*
- $0_E = 0_{\mathbb{R}^2} = (0, 0) \in F \Rightarrow F \neq \emptyset$.
- $\forall (x, y), (x', y') \in F, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ *montrons que* $\lambda(x, y) + \mu(x', y') \in^? F$ *; c'est à dire* $(\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y') \in^? F$

$$\lambda x + \mu x' + \lambda y + \mu y' = \lambda(x + y) + \mu(x' + y') = \lambda.0 + \mu.0 = 0,$$

car $(x, y) \in F \Rightarrow x + y = 0, et (x', y') \in F \Rightarrow x' + y' = 0$.
Ainsi $\lambda(x, y) + \mu(x', y') \in F$, F *est sous espace vectoriel de* $\mathbb{R}^2$.

(3) $F = \{(x + y + z, x - y, z) / x, y, z \in \mathbb{R}\}$ *est un s.e.v de* $\mathbb{R}^3$*, en effet,*
- $0^3_{\mathbb{R}} = (0, 0, 0) \in F$ *car* $(0, 0, 0) = (0 + 0 + 0, 0 - 0, 0) \Rightarrow F \neq \emptyset$.
- $\forall X, Y \in F, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ *montrons que* $\lambda X + \mu Y \in^? F$ *; on a :*

$$X \in F \Leftrightarrow \exists (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / X = (x + y + z, x - y, z),$$

$$Y \in F \Leftrightarrow \exists (x', y', z') \in \mathbb{R}^3 / Y = (x' + y' + z', x' - y', z'),$$

$$\lambda X + \mu Y = (\lambda x + \lambda y + \lambda z, \lambda x - \lambda y, \lambda z) + (\mu x' + \mu y' + \mu z', \mu x' - \mu y', \mu z')$$

$$\lambda X + \mu Y = ((\lambda x + \mu x') + (\lambda y + \mu y') + (\lambda z + \mu z'), (\lambda x + \mu x') - (\lambda y + \mu y'), \lambda z + \mu z)$$

d'où $\exists x'' = \lambda x + \mu x' \in \mathbb{R}, \exists y'' = \lambda y + \mu y' \in \mathbb{R}, \exists z'' = \lambda z + \mu z' \in \mathbb{R}$, *ainsi*

$$\lambda X + \mu Y = (x'' + y'' + z'', x'' - y'', z'') \in F.$$

Théorème 1.8. *L'intersection d'une famille non vide de s.e.v est un sous espace vectoriel.*

Remarque 1.9. *La réunion de deux s.e.v n'est pas forcément un s.e.v.*

Exemple 1.10. $E_1 = \{(x,0) \in \mathbb{R}^2\}, E_2 = \{(0,y) \in \mathbb{R}^2\}, E_1 \cup E_2$ *n'est un s.e.v car* $U_1 = (1,0), U_2 = (0,1) \in E_2$ *et* $U_1 + U_2 = (1,1) \notin E_1 \cup E_2$, *car* $(1,1) \notin E_1 \wedge (1,1) \notin E_2$.

2. Somme de deux sous espaces vectoriels

Soit E_1, E_2 deux sous espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}-$e.v E, on appelle somme de deux espaces vectoriels, E_1 et E_2 et on note $E_1 + E_2$ l'ensemble suivant :

$$E_1 + E_2 = \{U \in E / \exists U_1 \in E_1, \exists U_2 \in E_2 / U = U_1 + U_2\}.$$

Proposition 2.1. *La somme de deux s.e.v de E_1 et E_2 (d'un même $\mathbb{K}$-e.v) est un s.e.v de E contenant $E_1 \cup E_2$, i.e., $E_1 \cup E_2 \subset E_1 + E_2$.*

3. Somme directe de deux sous espaces vectoriels

On dira que la somme $E_1 + E_2$ est directe si $\forall U = U_1 + U_2$, il existe un unique vecteur $U_1 \in E_1$, un unique vecteur $U_2 \in E_2$, $U = U_1 + U_2$, on note $E_1 \bigoplus E_2$.

Théorème 3.1. *Soit E_1, E_2 deux s.e.v d'un même $\mathbb{K}-$e.v E la somme $E_1 + E_2$ est directe si $E_1 \cap E_2 = \{0_E\}$.*

3.1. Sous espace supplémentaires. Soient E_1 et E_2 deux s.e.v d'un même $\mathbb{K}-$e.v E, on dit que E_1 et E_2 sont supplémentaires si $E_1 \bigoplus E_2 = E$

Exemple 3.2. $E_1 = \{(x,0) \in \mathbb{R}^2\}, E_2 = \{(0,y) \in \mathbb{R}^2\}, E_1 \bigoplus E_2 = \mathbb{R}^2$, *$E_1$ et E_2 sont supplémentaires.*

4. Familles génératrices, familles libres et bases

Dans la suite, on désignera l'espace vectoriel $(E, +, \cdot)$ par E.

Définitions 4.1. *Soit E un e.v et $e_1, e_2 ..., e_n$ des éléments de E,*

(1) *On dit que $\{e_1, e_2 ..., e_n\}$ sont libres ou linéairement independents, si $\forall \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \mathbb{K}$:*

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + ... + \lambda_n e_n = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0, \textit{solution unique.}$$

Dans le cas contraire, on dit qu'ils sont liés.

(2) *On dit que $\{e_1, e_2 ..., e_n\}$ est une famille génératrice de E, ou que E est engendré par $\{e_1, e_2 ..., e_n\}$ si $\forall x \in E, \exists \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \mathbb{K}/$*

$$x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + ... + \lambda_n e_n.$$

(3) *Si* $\{e_1, e_2..., e_n\}$ *est une famille libre et génératrice de* E*, alors* $\{e_1, e_2..., e_n\}$ *est appelée une base de* E*.*

Remarque 4.2. *Dans un espace vectoriel* E*, tout vecteur non nul est libre.*

Théorème 4.3. *Si* $\{e_1, e_2..., e_n\}$ *et* $\{e_1^{'}, e_2^{'}..., e_m^{'}\}$ *sont deux bases de l'espace vectoriel* E*, alors* $n = m$*. En d'autre termes, si un espace vectoriel admet une base alors toutes les bases de* E *ont le même nombre d'éléments (ou même cardinal), ce nombre la ne dépend pas de la base mais il dépend seulement de l'espace* E*. D'où la définition suivante.*

Définition 4.4. *Soit* E *un* $\mathbb{K}-$ *espace vectoriel de base* $B = \{e_1, e_2..., e_n\}$*, alors* $dim(E) = Card(B)$*.*
où $dim(E)$ *: est la dimension de* E *et* $Card(B)$ *: est le cardinal de* B*.*

Remarque 4.5. *donc chercher une base pour un espace vectoriel c'est trouver une famille de vecteurs dans* E*, qui forment un famille libre et génératrice de* E*, le nombre d'éléments de cette famille représente* $dimE$*.*

Exemple 4.6. (1) *Cherchons une base de* $\mathbb{R}^3$*, il faut trouver une famille de vecteurs dans* $\mathbb{R}^3$ *qui engendre* $\mathbb{R}^3$ *et qui soit libre :*

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, (x,y,z) = (x,0,0)+(0,y,0)+(0,0,z) = x(1,0,0)+y(0,1,0)+z(0,0,1).$$

En posant, $e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)$ *on voit bien que* $\{e_1, e_2, e_3\}$ *est une famille génératrice, et aussi libre en effet ; si* $\forall \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{K}$ *:*

$$\lambda_1 e_1+\lambda_2 e_2+\lambda_3 e_3 = (0,0,0) \Rightarrow \lambda_1(1,0,0)+\lambda_2(0,1,0)+\lambda_3(0,0,1) = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0,0,0).$$

$\{e_1, e_2, e_3\}$ *est appelée base canonique de* $\mathbb{R}^3$*.*

(2) *Montrons que les* $f_1 = (1,-1), f_2 = (1,1)$ *il forment une base de* $\mathbb{R}^2$*, montrons que*

(a) $\{f_1, f_2\}$ *est génératrice* $\Leftrightarrow \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R},$

$$(x,y) = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2, (x,y) = (\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_2 - \lambda_1)$$

ainsi

$$\lambda_2 = \frac{x+y}{2}, \lambda_1 = \frac{x-y}{2,}$$

donc $\{f_1, f_2\}$ *est génératrice.*

(b) $\{f_1, f_2\}$ *est libre* $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R},$

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 = 0_{\mathbb{R}^2} \Rightarrow (\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_2 - \lambda_1) = (0,0) \Rightarrow 2\lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_2 = \lambda_1 = 0.$$

Théorème 4.7. *Soit* E *un espace vectoriel de dimension* n *:*

(1) *Si* $\{e_1, e_2..., e_n\}$ *est base de* $E \Leftrightarrow \{e_1, e_2..., e_n\}$ *est génératrice* $\Leftrightarrow \{e_1, e_2..., e_n\}$ *est libre.*

(2) *Si* $\{e_1, e_2..., e_p\}$ *sont* p *vecteur dans* E*, avec* $p > n$*, alors* $\{e_1, e_2..., e_p\}$ *ne peut être libre, de plus si* $\{e_1, e_2..., e_p\}$ *est génératrice, alors il existe* n *vecteurs parmis* $\{e_1, e_2..., e_p\}$ *forment une base* E*.*

(3) *Si* $\{e_1, e_2..., e_p\}$ *sont* p *vecteur dans* E*, avec* $p < n$*, alors* $\{e_1, e_2..., e_p\}$ *ne peut être génératrice de plus si* $\{e_1, e_2..., e_p\}$ *est libre, alors il existe* $(n-p)$ *vecteur parmis* $\{e_{p+1}, e_{p+2}, ..., e_n\}$ *dans* E *tels que* $\{e_1, e_2..., e_p, e_{p+1}, ..., e_n\}$ *est une base pour* E*.*

(4) *Si* F *est un sous espace vectoriel de* E *alors* $dimF \leq n$*, et de plus* $dimF = n \Leftrightarrow E = F$*.*

Exemple 4.8. (1) *Dans l'exemple précédent* $f_1 = (1, -1), f_2 = (2, 1)$ *pour montrer que* $\{f_1, f_2\}$ *forme une base de* $\mathbb{R}^2$*, il suffit de montrer que* $\{f_1, f_2\}$ *est soit libre ou génératrice.(cette propriété est vraie dans le cas des espaces vectoriels de dimensions finies).*

(2) *Pour montrer que* $\{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (0, 1, -1)\}$ *est une base de* $\mathbb{R}^3$*, il suffit de montrer qu'elle est libre ou génératrice car* $dim\mathbb{R}^3 = 3, \{f_1, f_2\}$ *est libre car :*
$\forall \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R},\ \lambda_1(1, 1, 1) + \lambda_2(1, 1, 0) + \lambda_3(0, 1, -1) = (0, 0, 0)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \text{ (solution unique)} \end{cases}$$

donc $\{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (0, 1, -1)\}$ *est une base de* $\mathbb{R}^3$*.*

(3) *Cherchons une base pour* $F = \{(x + y, x - z, -y - z)/x, y, z \in \mathbb{R}\}$*, comme* $F \subset \mathbb{R}^3$ *alors* $dimF \leq 3$*, donc la base de* F *ne possède pas plus de trois vecteur.*

$$(x + y, x - z, y - z) = x(1, 1, 0) + y(1, 0, -1) + z(0, -1, -1)$$

ainsi $v_1 = (1, 1, 0), v_2 = (1, 0, -1), v_3 = (0, 1, -1)$ *forment une famille génératrice pour* F*, si cette famille est libre, alors elle formera une base pour* F*.*
$\forall \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$,

$$\lambda_1(1, 1, 0) + \lambda_2(1, 0, -1) + \lambda_3(0, -1, -1) = (0, 0, 0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_2 = -\lambda_1 \\ \lambda_3 = \lambda_1 \end{cases}$$

Donc $\{(1, 1, 0), (1, 0, -1), (0, -1, -1)\}$ *n'est pas libre, mais d'après le théorème précédent, on peut extraire de cette famille une base de* F*, pour le faire on doit chercher deux vecteurs de famille qui sont libres, si on les trouve alors il forment une base pour* F*, si on ne trouve pas on prend un vecteur non nul et ce vecteur sera une base pour* F*. Prenons par exemple* $\{v_1, v_2\}$

$$\lambda_1(1, 1, 0) + \lambda_2(1, 0, -1) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \\ -\lambda_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0,$$

ainsi $\{v_1, v_2\}$ *est une base pour* F *et* $dimF = 2$

5. Notion d'Application Linéaire

5.1. Généralités.

Définition 5.1. (1) *Soit $(E,+,\cdot)$ et $(F,+,\cdot)$ deux $\mathbb{K}-$ espaces vectoriels et soit f une application de E dans F, on dit que f est une application linéaire si et seulement si :*

$$\forall x,y \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, f(x+y) = f(x)+f(y) et f(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot f(x),$$

où d'une manière équivalente :

$$\forall x,y \in E, \forall \lambda,\mu \in \mathbb{K}, f(\lambda x+\mu y) = \lambda f(x)+\mu f(y).$$

(2) *Si de plus f est bijective, on dit alors que f est un isomorphisme de E dans F.*

(3) *Une application linéaire de $(E,+,\cdot)$ dans $(E,+,\cdot)$ est dite un endomorphisme.*

(4) *Un isomorphisme de $(E,+,\cdot)$ dans $(E,+,\cdot)$ est aussi appelé un automorphisme de E dans E.*

Exemple 5.2. (1) *L'application*

$$f_1 : \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longmapsto x-y$$

est une application linéaire, car : $\forall (x,y),(x',y') \in \mathbb{R}^2, \forall \lambda,\mu \in \mathbb{R}$,

$$f_1(\lambda(x,y)+\mu(x',y')) = f_1(\lambda x+\mu x', \lambda y+\mu y') = \lambda x+\mu x' - (\lambda y+\mu y')$$
$$\Rightarrow f_1(\lambda(x,y)+\mu(x',y')) = \lambda(x-y)+\mu(x'-y') = \lambda f_1(x,y)+\mu f_1(x',y').$$

(2) *L'application*

$$f_2 : \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}^3$$
$$(x,y,z) \longmapsto (-x+y, x-5z, y)$$

est une application linéaire, car : $\forall (x,y,z),(x',y',z') \in \mathbb{R}^3, \forall \lambda,\mu \in \mathbb{R}$,

$$f_2(\lambda(x,y,z)+\mu(x',y',z')) = f_2(\lambda x+\mu x', \lambda y+\mu y', \lambda z+\mu z')$$
$$\Leftrightarrow f_2(\lambda(x,y,z)+\mu(x',y',z')) = (-\lambda x-\mu x'+\lambda y+\mu y', \mu x'+\mu x'-5\lambda y-5\mu y', \lambda y+\mu y')$$
$$\Leftrightarrow f_2(\lambda(x,y,z)+\mu(x',y',z')) = (-\lambda x+\lambda y, \lambda x-5\lambda z, \lambda y)+(-\mu x'+\mu y', \mu x'-5\mu z', \lambda y').$$
$$\Leftrightarrow f_2(\lambda(x,y,z)+\mu(x',y',z')) = \lambda(-x+y, x-5z, y)+\mu(-x'+y', x'-5z', y') = \lambda f_2(x,y,z)+\mu f_2(x',y',z').$$

(3) *L'application*

$$f_3 : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto -3x$$

est isomorphisme, en effet,f_3 est linèaire car :

$$\forall x,y \in \mathbb{R}, \forall \lambda,\mu \in \mathbb{R}, f_3(\lambda x+\mu y) = -3\lambda x-3\mu y = \lambda f_3(x)+\mu f_3(y),$$

Remarque 5.3. *On peut montrer facilement la somme de deux applications linéaires est une application linéaire, aussi le produit d'une application linéaire par un scalaire et la composée de deux applications linéaires est une application linéaire.*

PROPOSITION 5.4. *Soit f une application linéaire de E dans F.*

$$1.)f(O_E) = O_F, \quad 2.)\forall x \in E, f(-x) = -f(x).$$

PREUVE. *On a,*

$$1.)f(O_E) = f(O_E + O_E) = f(O_E) + f(O_E) \Rightarrow f(O_E) = O_F.$$

$$2.)f(-x) + f(x) = f(-x + x) = f(O_E) = O_F \Rightarrow f(-x) = -f(x).$$

DÉFINITION 5.5. *Soit f une application linéaire de E dans F.*

(1) *On appelle image de f et on note Imf l'ensemble défini comme suit*

$$Imf = \{y \in F/\exists x \in E : f(x) = y\} = \{f(x)/x \in E\}.$$

(2) *On appelle noyau de f et on note $\ker f$ l'ensemble défini comme suit :*

$$\ker f = \{x \in E/f(x) = O_F\},$$

On note parfois $\ker f$, par $f^{-1}(\{0\})$.

PROPOSITION 5.6. *Si f est une application linéaire de E dans F,alors si $dimImf = n < +\infty$, alors n est appelé rang de f et on note $rg(f)$.*
Imf et $\ker f$ sont des sous espaces vectoriels de E.

EXEMPLE 5.7. (1) *Déterminons le noyau de l'application f_1,*

$$\ker f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2/f(x, y) = 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2/x+2y = 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2/x = -2y\}$$

ainsi

$$\ker f = \{(-2y, y)/y \in \mathbb{R}\} = \{y(-2, 1)/y \in \mathbb{R}\}$$

donc le $\ker f$ est un sous espace vectoriel engendré par $u = (-2, 1)$ donc il est de dimension 1, et sa base est $\{u\}$.

(2) *Cherchons l'image de*

$$f_2 : \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}^3$$

$$(x, y, z) \longmapsto (-x + y, x - z, y)$$

$$Imf_2 = \{f(x, y, z)/(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\} = \{(-x + y, x - z, y)/(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\}$$

$$Imf_2 = \{x(-1, 1, 0) + y(1, 0, 1) + z(0, -1, 0)/(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\}$$

donc Imf_2 est un s.e.v de $\mathbb{R}^3$ engendré par $\{(-1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, -1, 0)\}$ il est facile de montrer que cette famille est libre et donc il forment une base de $\mathbb{R}^3$ donc $dimImf_2 = 3, rg(f_2) = 3, Imf = \mathbb{R}^3$.

PROPOSITION 5.8. *Soit f une application linéaire de E dans F on a les équivalences suivantes :*

(1) *f est **surjective** $\Leftrightarrow Imf = F$.*

(2) *f est **injective** $\Leftrightarrow \ker f = \{0_E\}$.*

Exemple 5.9. *Dans l'exemple* $Imf_2 = \mathbb{R}^3$ *donc* f_2 *est surjective, montrons que* f_2 *est injective*

$$\ker f_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / f_2(x, y, z) = (0, 0, 0)\},$$

$$\Rightarrow \ker f_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / (-x + y, x - z, y) = (0, 0, 0)\} \Rightarrow x = y = z = 0$$

donc $\ker f_2 = \{(0, 0, 0)\}$, *ainsi* f_2 *est bijective.*

5.2. Application Linéaire sur des espace de dimension finies.

Proposition 5.10. *Soit* E *et* F *deux* $\mathbb{K}$ *espace vectoriels et* f, g *deux applications linéaires de* E *dans* F. *Si* E *est de dimension finie* n *et* $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ *une base de* E, *alors* $\forall k \in \{1, 2, .., n\}, f(e_k) = g(e_k) \Leftrightarrow \forall x \in E, f(x) = g(x)$.

PREUVE. *L'implication* $(\Leftarrow)$ *est evidente.*
Pour $(\Rightarrow)$ *on a* E *est engendré par* $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$, *donc* $\forall x \in E, \exists \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \mathbb{K}, x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + ... + \lambda_n e_n$, *comme* f *et* g *sont linéaires, alors*

$$f(x) = f(\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + ... + \lambda_n e_n) = \lambda_1 f(e_1) + \lambda_2 f(e_2) + ... + \lambda_n f(e_n),$$

$$g(x) = g(\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + ... + \lambda_n e_n) = \lambda_1 g(e_1) + \lambda_2 g(e_2) + ... + \lambda_n g(e_n),$$

donc si on suppose que $\forall k \in \{1, 2, .., n\}, f(e_k) = g(e_k)$ *donc on déduit que* $\forall x \in E, f(x) = g(x)$.

Remarque 5.11. *Pour que deux applications linéaires* f *et* g *de* E *dans* F *soient égales il suffit qu'elles coincident sur la base du* $\mathbb{K}-$ *espace vectoriel* E.

Exemple 5.12. *Soit* g *une application de* $\mathbb{R}^2$ *dans* $\mathbb{R}^2$ *telle que*

$$g(1, 0) = (2, 1), g(0, 1) = (-1, -1)$$

alors déterminons la valeur de g *en tous points de* $\mathbb{R}^2$, *en effet on a :*

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, (x, y) = x(1, 0) + y(0, 1)$$

$$g(x, y) = g(x(1, 0)+y(0, 1)) = xg(1, 0)+yg(0, 1) = x(2, 1)+y(-1, -1) = (2x-y, x-y)$$

ainsi $g(x, y) = (2x - y, x - y)$.

Théorème 5.13. *Soit* f *une application linéaire de* E *dans* F *avec dimension de* E *est finie, on a :*

$$\boxed{dimE = dim \ker f + dimIm(f)}$$

Exemple 5.14. *On a montré que* $dim \ker f_1 = 1$ *avec* f_1 *définie*

$$f_1 : \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}$$

$$(x, y) \longmapsto x + 2y$$

comme $dim\mathbb{R}^2 = 2 \Rightarrow dimIm(f) = dim\mathbb{R}^2 - dim \ker f_1 = 2 - 1 = 1.$

Proposition 5.15. *Soit f une application linéaire de E dans F avec $dimE = dimF = n$. On a alors les équivalences suivantes :*

$$f \text{ est isomorphisme} \Leftrightarrow f \text{ est surjective} \Leftrightarrow f \text{ est injective}$$
$$\Leftrightarrow dimIm(f) = dimF \Leftrightarrow Imf = F \Leftrightarrow dim \ker f = 0 \Leftrightarrow \ker f = \{0_E\},$$

de cette proposition, on déduit que si f est un isomorphisme de E dans F avec $dimE$ finie alors nécessairement $dimE = dimF$ en d'autres termes si $dimE \neq dimF$ alors f ne peut être un isomorphisme.

Exemple 5.16.

(1) *L'application f_1 n'est pas un isomorphisme car $dim\mathbb{R}^2 \neq dim\mathbb{R}$.*

(2) *Soit $g(x, y) = (2x - y, x - y)$, g définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ on a,$dim\mathbb{R}^2 = dim\mathbb{R}^2$ est un isomorphisme car $dim \ker g = 0$ en effet :*

$$\ker g = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / (2x - y, x - y) = (0, 0)\} = \{(0, 0)\},$$

c'est même un automorphisme.

Bon ☺
courage!

Dr. I.Medjadj