تمارين تدريبية في الحساب مع الحلول

التمرين 01 :

نعتبر a عدد طبيعي غير معدوم.

1) أ) بين أن العدد $A=a\left(a^2-1\right)$ يقبل القسمة على 6 .

ب) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون العدد $A_n=a\left(a^{2n}-1\right)$ قابلا للقسمة على 6 .

2) من أجل كل عدد طبيعي n نضع : $S=a_1+a_2+........+a_n$ و $S_n=a_1^{2n+1}+a_2^{2n+1}+......+a_n^{2n+1}$

حيث : a_1 ، a_2 ، ...... و a_n أعداد طبيعية غير معدومة.

أ) برهن أن S و S_n لهما نفس الباقي في القسمة على 6 .

ب) عين باقي قسمة المجموع : $\left(2002^{1443}+2003^{1443}+......+2022^{1443}\right)$ على 6 .

3) ليكن N عدد طبيعي مكتوب في النظام الخماسي (ذي الأساس 5) على الشكل : $N=\overline{abab}^{5}$.

أ) برهن أن N يقبل القسمة على 6 إذا وافقط إذا كان : $a\equiv b[3]$.

ب) إستنتج أكبر قيمة للعدد N الذي يقبل القسمة على 6 .

التمرين 02 :

نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $a_n=2\times5^n+7$.

1) أ ـ بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون : a_n فردي.

ب ـ عين حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 5^n على 8 .

جـ ـ إستنتج أنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ يكون : $a_n\equiv1[8]$.

2) أ ـ برهن أنه إذا كان : $\begin{cases}x\equiv1[8]\\x\equiv7[125]\end{cases}$ فإن : $x\equiv257[1000]$.

ب ـ بين أنه من أجل كل $n\geq3$ يكون : $a_n\equiv257[1000]$.

جـ ـ ما هي الأرقام الثلاث الأخيرة للعدد $\left(2\times5^{2020}+7\right)\left(2\times5^{2021}+7\right)$ ؟ .

3) أ ـ تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون : $5a_{2n}-a_{2n+1}=28$.

ب ـ نعتبر $PGCD\left(a_{2n};a_{2n+1}\right)=d$ ، بين أن d يختلف عن 7 .

جـ ـ جـد عندئذ d .

التمرين 03 :

1) أ ـ عين تبعا لقيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 7 .

ب ـ حدد الأعداد الطبيعية n بحيث يكون : $\left(2020^{1962}\times n+4\times1441^{1954}\right)\equiv0[7]$.

2) نعتبر العدد الطبيعي N_p المكتوب في النظام العشري على الشكل : $N_p=\underbrace{\overline{111.....1}}_{p\ fois}$.

أ ـ بين أن : $N_p\equiv p[3]$.

ب ـ إستنتج باقي قسمة العدد N_{2020} على 3 .

جـ ـ برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون العدد $\left(3^n-1\right)$ قابلا للقسمة على 2 .

د ـ بين أن العدد N_p يقبل القسمة على 7 إذا وافقط إذا كان العدد $\left(3^p-1\right)$ يقبل القسمة على 7 أيضا .

هـ ـ إستنتج باقي قسمة العدد N_{2020} على 7 .

3) أ ـ حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $3x-7y=4$.

ب- إستنتج الأعداد الصحيحة a التي تحقق الجملة : $\begin{cases} a \equiv 1[3] \\ 2a \equiv 3[7] \end{cases}$.

جـ- عين باقي قسمة العدد N_{2020} على 21 .

4) نعتبر العدد الطبيعي M المكتوب في النظام ذي الأساس 4 على الشكل : $M = \overline{abb2a0}^{4}$.

أ- عين قيم a و b علما أن : $M - 4 \equiv 0[7]$.

ب- إستنتج قيم M و مكتوبة في النظام العشري .

التمرين 04 :

الجزء الأول :

1) أ- عين تبعا لقيم العدد الطبيعي n باقي قسمة العدد 4^n على 7 .

ب- إستنتج باقي قسمة العدد $\left(2019^{2020} + 2020^{1441} + 1441^{1962}\right)$ على 7 .

جـ- عين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون : $2020^{6n+5} + 1441^{6n+6} + 5n \equiv 0[7]$.

2) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $U_n = 1 + 4 + 4^2 + ... + 4^{n-1}$.

أ- بين أن U_n يكون مضاعفا لـ 7 إذا وافقط إذا كان $\left(4^n - 1\right)$ مضاعفا لـ 7 .

ب- إستنتج قيم n حتى يكون U_n قابلا للقسمة على 7 .

الجزء الثاني :

1) أ- باستعمال خوارزمية إقليدس عين العددين الصحيحين u و v حيث : $101u - 72v = 1$.

ب- إشرح لماذا المعادلة $2020x - 1440y = 60.....(E)$ تقبل حلولا في $\mathbb{Z}^2$.

جـ- عين حلا خاصا للمعادلة (E) ، ثم استنتج جميع حلول هذه المعادلة.

2) عين الحل (x, y) للمعادلة (E) الذي يحقق : $\begin{cases} PGCD(x, y) = 3 \\ PPCM(x, y) = 24948 \end{cases}$.

التمرين 05 :

1) عين مجموعة الأعداد الصحيحة x حيث : $4x \equiv 33[5]$.

2) أ- حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة ذات المجهول (x, y) التالية : $4x - 5y = 33 .....(E)$.

ب- إستنتج حلول الجملة : $\begin{cases} \lambda \equiv 55[5] \\ \lambda \equiv 22[4] \end{cases}$ مع $(\lambda \in \mathbb{Z})$.

جـ- عين كل الثنائيات (x, y) حلول المعادلة (E) و التي تحقق : $|x + y + 3| < 27$.

3) أ- أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العدد 5^n على 11 .

ب- برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n يكون : $10^{10n} + 16^{5n-4} + 27^{5n+2} + 38^{5n+3} + 49^{5n-1} \equiv 0[11]$.

جـ- عين مجموعة قيم العدد الطبيعي n التي تحقق الجملة : $\begin{cases} n - 5^n \equiv 0[11] \\ n \equiv 2[5] \end{cases}$.

4) نعتبر N عدد طبيعي يكتب $N = \overline{\alpha\beta\beta\alpha\beta\alpha}$ في نظام التعداد ذو الأساس 4 حيث : $\alpha \neq 0$.

- عين α و β بحيث يكون N قابلا للقسمة على 33 ، ثم أكتب العدد N في النظام العشري .

حلول مقترحة للتمارين

حل مقترح للتمرين 01 :

1) أ) لدينا : $A=a\left(a^2-1\right)$ أي تصبح : $A=a(a-1)(a+1)$.

ملاحظة : الأعداد الطبيعية : $a-1$ ، a و $a+1$ متتابعة و نعلم أن : جداء عددين طبيعيين متتاليين يكون زوجيا و أيضا جداء ثلاث أعداد طبيعية متتالية يكون مضاعفا لــ 3 .

إذن : العدد A يقبل القسمة على 2 و على 3 و بالتالي يقبل القسمة على 6 لأن : 2 و 3 أوليان فيما بينهما .

تنبيـــــه : يمكن إستعمال جدول الموافقة بترديد 6 و نجد أن العدد A يقبل القسمة على 6 .

ب) أولا نذكر أنه من أجل كل عدد a يكون : $a^n-1=(a-1)\left(a^{n-1}+a^{n-2}+......+1\right)$.

لدينا : $A_n=a\left(a^{2n}-1\right)$ أي : $A_n=a\left[\left(a^2\right)^n-1\right]$ و منه : $A_n=a\left(a^2-1\right)\left[\left(a^2\right)^{n-1}+\left(a^2\right)^{n-2}+....+1\right]$.

نعلم أن : A يقبل القسمة على 6 أي : $a\left(a^2-1\right)=6k$ و بالتالي فالعدد A_n يقبل القسمة على 6 .

2) لدينا : $S=a_1+a_2+........+a_n$ و $S_n=a_1^{2n+1}+a_2^{2n+1}+......+a_n^{2n+1}$.

أ) لإثبات أن S و S_n لهما نفس الباقي على 6 يكفي أن نبين أن : الفرق S_n-S مضاعف لــ 6 .

*) لنحسب الفرق : $S_n-S=a_1^{2n+1}+a_2^{2n+1}+....+a_n^{2n+1}-\left(a_1+a_2+.....+a_n\right)$ أي نتحصل على :

$S_n-S=\left(a_1^{2n+1}-a_1\right)+\left(a_2^{2n+1}-a_2\right)+.....+\left(a_n^{2n+1}-a_n\right)$ أي : $S_n-S=a_1\left(a_1^{2n}-1\right)+a_2\left(a_2^{2n}-1\right)+.....+a_n\left(a_n^{2n}-1\right)$

حسب السؤال السابق وجدنا أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم a العدد $a\left(a^{2n}-1\right)$ يقبل القسمة على 6

و منه : الفرق S_n-S هو عبارة عن مجموع لمضاعفات 6 إذن : فهو يقبل القسمة على 6 .

و بالتالي فإن : S و S_n لهما نفس الباقي على 6 .

ب) المجموعين : $\left(2002^{1443}+2003^{1443}+.....+2022^{1443}\right)$ و $(2002+2003+.....+2022)$ لهما نفس الباقي على 6

لأن : الأس 1443 يكتب على الشكل $2n+1$ و من جهة أخرى نعلم أن : $(2002+2003+.....+2022)$ هو مجموع متتالية حسابية أساسها 1 أي : $(2002+2003+.....+2022)=\dfrac{21(2002+2022)}{2}$

و منه : $(2002+2003+.....+2022)=42252$.

العدد 42252 يقبل القسمة على 2 (عدد زوجي) و يقبل القسمة على 3 (مجموع أرقامه مضاعف لــ 3)

إذن هو يقبل القسمة على 6 .

و بالتالي باقي قسمة المجموع $\left(2002^{1443}+2003^{1443}+.....+2022^{1443}\right)$ على 6 هو 0 .

3) أ) لدينا : $N=\overline{abab}^5$ أي : $N=a\times5^3+b\times5^2+a\times5+b$ مع $(0<a<5)$ و $(0\le b<5)$.

نعلم أن : $5\equiv-1[6]$ أي يصبح : $N\equiv a\times(-1)^3+b\times(-1)^2+a\times(-1)+b[6]$ أي : $N\equiv-a+b-a+b[6]$

و منه : $N\equiv-2a+2b[6]$ إذن : العدد N يقبل القسمة على 6 معناه : $-2a+2b\equiv0[6]$ أي : $2b\equiv2a[6]$

إذن : $\boxed{a\equiv b[3]}$.

ب) لدينا : $a\equiv b[3]$ أي أن : $a-b=3k$ و نعلم أن : $a\in\{1,2,3,4\}$ و $b\in\{0,1,2,3,4\}$ أي : الثنائيات (a,b) التي تحقق $a-b=3k$ هي : $(1,1)$ ، $(1,4)$ ، $(2,2)$ ، $(3,0)$ ، $(3,3)$ ، $(4,1)$ و $(4,4)$.

لإيجاد أكبر قيمة لــ N نختار أكبر قيمة لــ a و هي 4 كذلك أكبر قيمة لــ b هي 4 .

إذن : $\overline{4444}^5$ و يكتب في النظام العشري : $\boxed{N=624}$.

حل مقترح للتمرين 02 :

لدينا من أجل كل $n\in\mathbb{N}$: $a_n=2\times5^n+7$.

1) أ – نلاحظ أن a_n هو عبارة عن مجموع عددين أحدهما زوجي (2×5^n) و الآخر فردي (7) إذن : هو فردي .

أو كطريقة أخرى لدينا : $a_n=2\times5^n+7$ أي : $a_n=2\times5^n+2\times3+1$ و منه : $a_n=2(5^n+3)+1$ و هذا ما يدل على أن a_n فردي .

ب – نجد : $5^0\equiv1[8]$ ، $5^1\equiv5[8]$ ، $5^2\equiv1[8]$.

إذن : من أجل $n=2k$ يكون : $\boxed{5^n\equiv1[8]}$ و من أجل $n=2k+1$ يكون : $\boxed{5^n\equiv5[8]}$.

ج – نميز حالتين :

حالة : $n=2k$ (زوجي) فإن : $5^n\equiv1[8]$ أي : $2\times5^n\equiv2[8]$ أي : $2\times5^n+7\equiv9[8]$ و منه : $\boxed{a_n\equiv1[8]}$.

حالة : $n=2k+1$ (فردي) فإن : $5^n\equiv5[8]$ أي : $2\times5^n\equiv10[8]$ أي : $2\times5^n+7\equiv17[8]$ و منه : $\boxed{a_n\equiv1[8]}$.

من الحاتين السابقتين نستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $\boxed{a_n\equiv1[8]}$.

2) أ ـ لنبرهن أنه إذا كان : $\begin{cases}x\equiv1[8]\\x\equiv7[125]\end{cases}$ فإن : $x\equiv257[1000]$.

لدينا : $\begin{cases}x\equiv1[8] & \times125\\x\equiv7[125] & \times8\end{cases}$ أي : $\begin{cases}125x\equiv125[1000]\\8x\equiv56[1000] & \times16\end{cases}$ نجد : $\begin{cases}125x\equiv125[1000]\\128x\equiv896[1000]\end{cases}$ بالطرح نجد : $3x\equiv771[1000]$

بضرب هذه الأخيرة في 3 نجد : $9x\equiv2313[1000]$ و نعلم أن : $2313\equiv313[1000]$ أي : $9x\equiv313[1000]$

و منه تصبح : $\begin{cases}9x\equiv313[1000]\\8x\equiv56[1000]\end{cases}$ بالطرح نتحصل على : $\boxed{x\equiv257[1000]}$ هو المطلوب .

أو كطريقة أخرى :

لدينا : $\begin{cases}x\equiv1[8]\\x\equiv7[125]\end{cases}$ أي : $\begin{cases}x=8\alpha+1\\x=125\beta+1\end{cases}$ و منه : $8\alpha+1=125\beta+7$ أي : $8\alpha=125\beta+6$ أي : $8\alpha\equiv6[125]$

و منه : $4\alpha\equiv3[125]$ أي : $124\alpha\equiv93[125]$ و نعلم أن : $125\alpha\equiv0[125]$ بالطرح نجد : $\alpha\equiv-93[125]$ و منه :

$\alpha\equiv32[125]$ أي : $\boxed{\alpha=125k+32}$ نعوض قيمة α في : $x=8\alpha+1$ نجد : $x=8(125k+32)+1$ أي :

$x=1000k+257$ و هذا ما يدل على أن : $\boxed{x\equiv257[1000]}$.

ب – لدينا من أجل $n\geq3$ يكون : 5^n مضاعفا لـ 125 مثلا $(5^3=125)$.

إذن : من أجل $n\geq3$ فإن : $5^n\equiv0[125]$ أي : $2\times5^n+7\equiv7[125]$ و بالتالي يكون : $\boxed{a_n\equiv7[125]}$.

لدينا مما سبق أن : $a_n\equiv1[8]$ و $a_n\equiv7[125]$ إذن حسب السؤال (أ) فإن : $\boxed{a_n\equiv257[1000]}$ هو المطلوب .

ج – لدينا : $a_{2020}\times a_{2021}=(2\times5^{2020}+7)(2\times5^{2021}+7)$.

حسب ما سبق لدينا : $\begin{cases}a_{2020}\equiv257[1000]\\a_{2021}\equiv257[1000]\end{cases}$ أي : $a_{2020}\times a_{2021}\equiv257^2[1000]$ و منه : $a_{2020}\times a_{2021}\equiv66049[1000]$

إذن : $\boxed{a_{2020}\times a_{2021}\equiv49[1000]}$ و هذا ما يدل على أن آخر ثلاث أرقام للعدد $(2\times5^{2020}+7)(2\times5^{2021}+7)$ هي : $\boxed{049}$

3) أ – لدينا : $5a_{2n}-a_{2n+1}=5(2\times5^{2n}+7)-(2\times5^{2n+1}+7)$ أي : $5a_{2n}-a_{2n+1}=2\times5^{2n+1}+35-2\times5^{2n+1}-7$

إذن : $\boxed{5a_{2n}-a_{2n+1}=28}$.

ب – لدينا : $PGCD(a_{2n},a_{2n+1})=d$ أي أن : d/a_{2n} و d/a_{2n+1} ، لكن : $a_{2n}=2\times5^{2n}+7$ و نعلم أن : (2×5^{2n})

ليس مضاعفا لـ 7 إذن : a_{2n} فردي و لا يقبل القسمة على 7 إذن : $\boxed{d\neq7}$.

ج – إيجاد قيم d :

لدينا : $PGCD(a_{2n},a_{2n+1})=d$ أي أن : d/a_{2n} و d/a_{2n+1} إذن : $d/5a_{2n}-a_{2n+1}$ و منه : $\boxed{d/28}$.

و بالتالي قيم d الممكنة هي : $28,14,7,4,2,1$ لكن $d\neq 7$ و أيضا حسب السؤال (1) (أ) فإن : a_n فردي

بالتالي فحسب الشروط السابقة نستنتج أن : $\boxed{d=1}$.

حل مقترح للتمرين 03 :

1) أ) بواقي قسمة العدد 3^n على 7 .

نجد : $3^0\equiv1[7]$ ، $3^1\equiv3[7]$ ، $3^2\equiv2[7]$ ، $3^3\equiv6[7]$ ، $3^4\equiv4[7]$ ، $3^5\equiv5[7]$ و $3^6\equiv1[7]$

و نلخصها في الجدول التالي :

قيم العدد الطبيعي n	$6k$	$6k+1$	$6k+2$	$6k+3$	$6k+4$	$6k+5$
بواقي قسمة العدد 3^n على 7	1	3	2	6	4	5

ب) نعلم أن : $2020\equiv4[7]$ أي : $2020\equiv-3[7]$ و $1441\equiv6[7]$ أي : $1441\equiv-1[7]$.

إذن : $2020^{1962}\times n+4\times1441^{1954}\equiv0[7]$ معناه : $(-3)^{1962}\times n+4\times(-1)^{1954}\equiv0[7]$ أي : $3^{1962}\times n+4\times1\equiv0[7]$

و منه : $3^{6k}\times n+4\equiv0[7]$ أي : $1\times n+4\equiv0[7]$ أي : $n\equiv-4[7]$ و منه : $n\equiv3[7]$.

إذن : $\boxed{n=7k+3}$ مع $(k\in\mathbb{Z})$.

2) أ) لدينا : $N_p=\underbrace{11.....1}_{p\ fois}$ إذن : $N_p=10^{p-1}+10^{p-2}+.....+10^0$ و نعلم أيضا : $10\equiv1[3]$ و منه :

$N_p\equiv\underbrace{1+1+....+1}_{p\ fois}[3]$ إذن يكون : $\boxed{N_p\equiv p[3]}$ هو المطلوب .

ب) حسب السؤال (أ) لدينا : $N_p\equiv p[3]$ و منه يكون : $N_{2020}\equiv2020[3]$ أي : $\boxed{N_{2020}\equiv1[3]}$.

و بالتالي باقي قسمة العدد N_p على 3 هو 1 .

ج) نعلم أن : $3\equiv1[2]$ أي : $3^n\equiv1[2]$ و منه : $\boxed{3^n-1\equiv0[2]}$ و بالتالي فإن العدد (3^n-1) يقبل القسمة على 2 .

د) نعلم أن : $N_p=10^{p-1}+10^{p-2}+.....+10^0$ و $10\equiv3[7]$ إذن : $N_p\equiv(3^{p-1}+3^{p-2}+.....+1)[7]$.

نلاحظ أن $(3^{p-1}+3^{p-2}+.....+1)$ هو عبارة عن مجموع لمتتالية هندسية أساسها 3 و حدها الأول 1 .

و منه : $N_p\equiv\left(\frac{3^p-1}{3-1}\right)[7]$ أي : $N_p\equiv\left(\frac{3^p-1}{2}\right)[7]$ أي : $2N_p\equiv(3^p-1)[7]$.

- نفرض : 3^p-1 يقبل القسمة على 7 و نعلم أن : 3^p-1 يقبل القسمة على 2 إذن : 3^p-1 يقبل القسمة على 14

أي يكون : $3^p-1=14\alpha$ بالقسمة على 2 نجد : $\frac{3^p-1}{2}=7\alpha$ و منه : $\boxed{N_p=7\alpha}$.

و بالتالي فإن العدد N_p يقبل القسمة على 7 .

- و بالعكس نفرض : N_p يقبل القسمة على 7 أي : $N_p=7\beta$ أي : $\frac{3^p-1}{2}=7\beta$ و منه : $3^p-1=14\beta$

إذن : العدد 3^p-1 يقبل القسمة على 7 .

<u>النتيجة</u>: العدد N_p يقبل القسمة على 7 إذا وافقط إذا كان العدد 3^p-1 يقبل القسمة على 7 .

ه) مما سبق لدينا : $N_{2020}\equiv\left(\frac{3^{2020}-1}{2}\right)[7]$ أي : $2N_{2020}\equiv(3^{2020}-1)[7]$ و منه : $2N_{2020}\equiv(3^{6k+1}-1)[7]$

أي : $2N_{2020}\equiv(4-1)[7]$ أي : $2N_{2020}\equiv3[7]$ و منه يكون : $8N_{2020}\equiv12[7]$ إذن نجد : $\boxed{N_{2020}\equiv5[7]}$.

و بالتالي باقي قسمة العدد N_{2020} على 7 هو 5 .

3) أ) لدينا : $3x-7y=4$ ، نلاحظ أن الثنائية $(6,2)$ هي حل خاص للمعادلة أي : $\begin{cases}3x-7y=4\\3(6)-7(2)=4\end{cases}$ بالطرح نجد :

$3(x-6)=7(y-2)$ ، لدينا : 7 يقسم $3(x-6)$ و 7 أولي مع 3 إذن حسب مبرهنة غوص فإن : 7 يقسم $(x-6)$

أي يكون : $x-6=7k$ و منه : $\boxed{x=7k+6}$ بالتعويض نجد : $\boxed{y=3k+2}$.

إذن حلول المعادلة هي : $\boxed{(x,y)=\{(7k+6,3k+2)\}}$ مع $(k\in\mathbb{Z})$.

ب) لدينا الجملة : $\begin{cases}a\equiv1[3]\\2a\equiv3[7]\end{cases}$ أي : $\begin{cases}a\equiv1[3]\\8a\equiv12[7]\end{cases}$ و منه : $\begin{cases}a\equiv1[3]\\a\equiv5[7]\end{cases}$ إذن : $\begin{cases}a=3u+1\\a=7v+5\end{cases}$ أي : $3u+1=7v+5$

و بالتالي نجد : $3u-7v=4$ و منه : $\boxed{u=x=7k+6}$ أي : $a=3(7k+6)+1$ إذن : $\boxed{a=21k+19}$ مع $(k\in\mathbb{Z})$

ج) لدينا : $\begin{cases}N_{2020}\equiv1[3]\\N_{2020}\equiv5[7]\end{cases}$ و حسب السؤال السابق يكون : $\boxed{N_{2020}=21k+19}$.

إذن باقي قسمة العدد N_{2020} على 21 هو 19 .

4) لدينا : $M=\overline{abb2a0}$ حيث : $0<a<4$ و $0\le b<4$ إذن : $M=a\times4^5+b\times4^4+b\times4^3+2\times4^2+a\times4$

أ) لدينا : $M-4\equiv0[7]$ أي : $\left(a\times4^5+b\times4^4+b\times4^3+2\times4^2+4a\right)-4\equiv0[7]$ نعلم أن : $4\equiv-3[7]$

أي يكون : $\left(a\times(-3)^5+b\times(-3)^4+b\times(-3)^3+2\times(-3)^2+4a\right)-4\equiv0[7]$ و منه نجد :

$-a\times5+4b-6b+4+4a-4\equiv0[7]$ أي : $-a-2b\equiv0[7]$ أو $\boxed{a+2b\equiv0[7]}$.

نستعين بالجدول التالي لتعيين قيم a و b :

a \ b	0	1	2	3
1	1	3	5	0
2	2	4	6	1
3	3	5	0	2

إذن يكون $a+2b\equiv0[7]$ إذا كان :

$\begin{cases}a=1\\b=3\end{cases}$ أو $\begin{cases}a=3\\b=2\end{cases}$.

ب) يكون لدينا : $M=\overline{133210}^4$ أو $M=\overline{322230}^4$.

بعد الحساب نجد : $\boxed{M=2020}$ أو $\boxed{M=3756}$.

حل مقترح للتمرين 04 :

حل الجزء الأول:

1) أ) **تعيين تبعا لقيم العدد الطبيعي** n **بواقي قسمة العدد** 4^n على 7 :

نجد : $4^0\equiv1[7]$ ، $4^1\equiv4[7]$ ، $4^2\equiv2[7]$ ، $4^3\equiv1[7]$ و منه الدور هو : 3 .

إذن : $4^{3k}\equiv1[7]$ و $4^{3k+1}\equiv4[7]$ و $4^{3k+2}\equiv2[7]$ مع $k\in\mathbb{Z}$.

ب) **الإستنتاج:**

لدينا : $2019\equiv3[7]$ أي : $2019\equiv-4[7]$ و $2020\equiv4[7]$ و $1441\equiv6[7]$ أي : $1441\equiv-1[7]$.

إذن : $2019^{2020}+2020^{1441}+1441^{1962}\equiv(-4)^{2020}+4^{1441}+(-1)^{1962}[7]$ ، $(2020=3k+1)$ و $(1441=3k'+1)$

أي : $2019^{2020}+2020^{1441}+1441^{1962}\equiv\left(4^{3k+1}+4^{3k'+1}+1\right)[7]$

و منه : $2019^{2020}+2020^{1441}+1441^{1962}\equiv(4+4+1)[7]$ أي : $2019^{2020}+2020^{1441}+1441^{1962}\equiv9[7]$

إذن : $2019^{2020}+2020^{1441}+1441^{1962}\equiv2[7]$.

و عليه باقي قسمة العدد $\left(2019^{2020}+2020^{1441}+1441^{1962}\right)$ على 7 هو : 2 .

ج) **تعيين قيم العدد الطبيعي** n :

لدينا : $2020^{6n+5}+1441^{6n+6}+5n\equiv0[7]$ أي : $4^{6n+5}+(-4)^{6n+6}+5n\equiv0[7]$ و نعلم أن : $(6n+6)$ زوجي

إذن : $4^{6n+5}+4^{6n+6}+5n\equiv 0[7]$ ، لدينا : $6n+5=3\times 2n+3+2=3(2n+1)+2=3k+2$ أي تصبح :

$4^{3k+2}+4^{3k}+5n\equiv 0[7]$ و منه : $2+1+5n\equiv 0[7]$ أي : $5n\equiv -3[7]$ أي : $5n\equiv 4[7]$ أي : $15n\equiv 12[7]$

و عليه : $\boxed{n=7k+5}$ مع $k\in\mathbb{N}$.

2) لدينا من أجل كل عدد طبيعي n : $U_n=1+4+4^2+.......+4^{n-1}$

نلاحظ أن U_n هو مجموع لحدود متتالية هندسية أساسها 4 و عدد الحدود n حدا

أي نجد : $U_n=1\times\frac{4^n-1}{4-1}$ و منه : $\boxed{U_n=\frac{4^n-1}{3}}$.

أ) **البرهان** : أولا نبين أنه إذا كان U_n مضاعفا لـ 7 فإن (4^n-1) مضاعف لـ 7 .

نفرض U_n مضاعف لـ 7 أي : $U_n=7k$ أي : $\frac{4^n-1}{3}=7k$ أي : $4^n-1=7k\times 3$

إذن نستنتج أن : (4^n-1) مضاعف لـ 7 ..... (1) .

ثانيا نفرض (4^n-1) مضاعف لـ 7 و نبين أن U_n مضاعف لـ 7 .

بما أن : (4^n-1) مضاعف لـ 7 و نعلم أن : $U_n=\frac{4^n-1}{3}$ أي : $4^n-1=3U_n$ أي : $3U_n$ مضاعف لـ 7

و نعلم أن : $U_n=7U_n-3\times 2U_n$ ، لدينا : $(3\times 2U_n)$ مضاعف لـ 7 و $7U_n$ مضاعف لـ 7 .

و عليه نستنتج أن : U_n مضاعف لـ 7 ...... (2) .

من (1) و (2) نستنتج أن U_n مضاعف لـ 7 إذا وافقط إذا كان (4^n-1) مضاعفا لـ 7 .

ب) **إستنتاج قيم** n : يكون U_n قابلا للقسمة على 7 إذا وافقط إذا كان (4^n-1) قابلا للقسمة 7

أي : $4^n-1\equiv 0[7]$ أي : $4^n\equiv 1[7]$ و منه : $\boxed{n=3k}$ مع $k\in\mathbb{N}$.

حل الجزء الثاني :

1) أ) **إستخدام خوارزمية إقليدس لتعيين العددين الصحيحين** u **و** v :

لدينا : $101=72\times 1+29$ ، $72=29\times 2+14$ ، $29=14\times 2+1$ إذن : $29-2\times 14=1$ أي :

$29-2(72-29\times 2)=1$ أي : $29-2\times 72+4\times 29=1$ و منه : $5\times 29-2\times 72=1$ أي :

$5(101-72)-2\times 72=1$ أي : $5\times 101-5\times 72-2\times 72=1$ و منه : $5\times 101-7\times 72=1$.

إذن : $\boxed{(u,v)=(5,7)}$.

ب) المعادلة (E) تقبل حلولا في $\mathbb{Z}^2$ لأن : $PGCD(2020,1440)=20$ و 20 يقسم 60 .

ج) المعادلة $(E):2020x-1440y=60$ تكافئ : $101x-72y=3$ و لدينا : $101u-72v=1$

إذن الحل الخاص هو : $(3u,3v)$ أي : $\boxed{(15,21)}$.

- **إستنتاج جميع حلول المعادلة** (E) : لدينا : $\begin{cases}101x-72y=3\\101(15)-72(21)=3\end{cases}$ بالطرح نجد :

$101(x-15)-72(y-21)=0$ أي : $101(x-15)=72(y-21)$.

لدينا : 72 يقسم $101(x-15)$ و 72 أولي مع 101 حسب مبرهنة غوص نستنتج أن : 72 يقسم $x-15$

أي : $x-15=27k$ و منه : $x=27k+15$ بالتعويض نجد : $y=101k+21$.

و عليه الحلول هي : $\boxed{S=\{(x,y)=(72k+15,101k+21);k\in\mathbb{Z}\}}$.

لدينا : (x,y) حل لـ (E) و $\begin{cases}PGCD(x,y)=3\\PPCM(x,y)=24948\end{cases}$ بما أن : (x,y) حل لـ (E) أي : $\begin{cases}x=72k+15\\y=101k+21\end{cases}$

و $PGCD(x,y)=3$ أي أن : $\begin{cases}72k+15\equiv 0[3]......(1)\\101k+21\equiv 0[3].......(2)\end{cases}$.

العلاقة (1) محققة دائما ، لنحل (2) أي : $101k+21\equiv 0[3]$ ، بما أن : $21\equiv 0[3]$ فإن : $101k\equiv 0[3]$.

لدينا : 101 أولي مع 3 و منه : $k\equiv 0[3]$ أي : $\boxed{k=3\alpha}$.

إذن : $\begin{cases}x=72k+15\\x=72(3\alpha)+15\\\boxed{x=216\alpha+15}\end{cases}$ و $\begin{cases}y=101k+21\\y=101(3\alpha)+21\\\boxed{y=303\alpha+21}\end{cases}$ و نعلم أن : $PPCM(x,y)=\dfrac{x\times y}{PGCD(x,y)}$

و منه : $\dfrac{x\times y}{3}=24948$ أي : $x\times y=74844$ إذن : $(216\alpha+15)(303\alpha+21)=74844$

أي : $3(72\alpha+5)\times 3(101\alpha+7)=74844$ أي : $(72\alpha+5)(101\alpha+7)=8316$ أي نحصل على :

$7272\alpha^2+504\alpha+505\alpha+35-8316=0$ و منه : $7272\alpha^2+1009\alpha-8281=0$.

نلاحظ أن مجموع المعاملات يساوي 0 إذن : $\alpha=1$ أو $\alpha=-\dfrac{8281}{7272}\notin\mathbb{Z}$ و عليه : $\boxed{\alpha=1}$.

و منه : $\boxed{x=231}$ و $\boxed{y=324}$ ، أي : $\boxed{(x,y)=(231,324)}$.

حل مقترح للتمرين 05 :

1) لدينا : $4x\equiv 33[5]$ و نعلم أن : $4\equiv -1[5]$ و $33\equiv 3[5]$ و منه تصبح : $-x\equiv 3[5]$ أي : $x\equiv -3[5]$

أي : $x\equiv 2[5]$ إذن : $\boxed{x=5k+2}$ مع $(k\in\mathbb{Z})$.

2) أ) المعادلة : $4x-5y=33$ تكافئ $4x-33=5y$ أي يكون : $4x\equiv 33[5]$ و منه : $\boxed{x=5k+2}$.

بالتعويض نجد : $4(5k+2)-5y=33$ أي : $5y=20k-25$ و منه : $\boxed{y=4k-5}$.

إذن حلول المعادلة هي : $\boxed{(x,y)=(5k+2,4k-5)}$ مع $(k\in\mathbb{Z})$.

ب) لدينا : $\begin{cases}\lambda\equiv 55[5]\\\lambda\equiv 22[4]\end{cases}$ أي : $\lambda=5u+55=4v+22$ أي يكون : $5u-4v=-33$ و منه : $4v-5u=33$

لكن حسب (أ) يكون : $v=5k+2$ و $u=4k-5$.

لدينا : $\lambda=5u+55$ أي : $\lambda=5(4k-5)+55$ و منه : $\boxed{\lambda=20k+30}$ مع $(k\in\mathbb{Z})$.

ج) الحلول (x,y) لـ (E) بحيث $|x+y+3|<27$:

لدينا : $\begin{cases}x=5k+2\\y=4k-5\end{cases}$ أي : $|5k+2+4k-5+3|<27$ أي : $|9k|<27$ أي : $|k|<3$ و منه : $-3<k<3$

إذن : $k\in\{-2,-1,0,1,2\}$ و بالتالي : $\boxed{(x,y)=(-8,-13),(-3,-9),(2,-5),(7,-1),(12,3)}$.

3) أ) بواقي قسمة العدد 5^n على 11 .

نجد : $5^0\equiv 1[11]$ ، $5^1\equiv 5[11]$ ، $5^2\equiv 3[11]$ ، $5^3\equiv 4[11]$ ، $5^4\equiv 9[11]$ و $5^5\equiv 1[11]$.

و نلخصها في الجدول التالي :

قيم العدد الطبيعي n	$5k$	$5k+1$	$5k+2$	$5k+3$	$5k+4$
بواقي قسمة العدد 5^n على 11	1	5	3	4	9

ب) لنبرهن أن : $10^{10n}+16^{5n-4}+27^{5n+2}+38^{5n+3}+49^{5n-1}\equiv 0[11]$.

لدينا : $5n-4=5n-5+5-4$ أي : $5n-4=5(n-1)+1$ و منه : $\boxed{5n-4=5k+1}$.

لدينا : $5n-1=5n-5+5-1$ أي : $5n-1=5(n-1)+4$ و منه : $\boxed{5n-1=5k+4}$.

إذن : $10^{10n}+16^{5n-4}+27^{5n+2}+38^{5n+3}+49^{5n-1}\equiv(-1)^{10n}+5^{5k+1}+5^{5n+2}+5^{5n+3}+5^{5k+4}[11]$

أي : $10^{10n}+16^{5n-4}+27^{5n+2}+38^{5n+3}+49^{5n-1}\equiv1+5+3+4+9[11]$

أي : $10^{10n}+16^{5n-4}+27^{5n+2}+38^{5n+3}+49^{5n-1}\equiv22[11]$.

و منه : $\boxed{10^{10n}+16^{5n-4}+27^{5n+2}+38^{5n+3}+49^{5n-1}\equiv0[11]}$ هو المطلوب .

ج) لدينا : $\begin{cases}n-5^n\equiv0[11]\\n\equiv2[5]\end{cases}$ أي : $\begin{cases}n-5^n\equiv0[11]\\n=5k+2\end{cases}$ و منه : $5k+2-5^{5k+2}\equiv0[11]$ أي : $5k+2-3\equiv0[11]$

أي : $5k\equiv1[11]$ و منه : $10k\equiv2[11]$ أي : $-k\equiv2[11]$ أي : $k\equiv-2[11]$ و منه : $k\equiv9[11]$

إذن : $k=11\alpha+9$ و نعلم أن : $n=5k+2$ أي : $n=5(11\alpha+9)+2$ إذن : $\boxed{n=55\alpha+47}$.

4) لدينا : $N=\overline{\alpha\beta\beta\alpha\beta\alpha}^4$ أي : $(0<\alpha<4)$ و $(0\le\beta<4)$.

لدينا : $N=\alpha\times4^5+\beta\times4^4+\beta\times4^3+\alpha\times4^2+\beta\times4+\alpha$ و نعلم أن : $4\equiv1[3]$

و منه : $N\equiv\alpha+\beta+\beta+\alpha+\beta+\alpha[3]$ أي : $N\equiv3\alpha+3\beta[3]$ و منه : $N\equiv0[3]$.

إذن : N يقبل القسمة على 3 مهما كان α و β و بالتالي يقبل القسمة على 33 إذا قبل القسمة على 11 .

- بواقي قسمة العدد 4^n على 11 : $4^0\equiv1[11]$ ، $4^1\equiv4[11]$ ، $4^2\equiv5[11]$ ، $4^3\equiv9[11]$ ، $4^4\equiv3[11]$ ، $4^5\equiv1[11]$

إذن : $N\equiv\alpha\times1+\beta\times3+\beta\times9+\alpha\times5+\beta\times4+\alpha[11]$ أي : $N\equiv7\alpha+16\beta[11]$ أي : $N\equiv7\alpha+5\beta[11]$

أي : $N\equiv-4\alpha-6\beta[11]$ لأن : $\begin{cases}7\equiv-4[11]\\5\equiv-6[11]\end{cases}$.

إذن : $N\equiv0[11]$ معناه : $-4\alpha-6\beta\equiv0[11]$ أي : $-4\alpha\equiv6\beta[11]$ أي : $-2\alpha\equiv3\beta[11]$ أي : $2\alpha\equiv-3\beta[11]$

و منه : $2\alpha\equiv8\beta[11]$ أي : $\alpha\equiv4\beta[11]$ أي يكون : $\alpha-4\beta\equiv0[11]$.

بواقي القسمة على 11 :

α \ β	0	1	2	3
1	1	8	4	0
2	2	9	5	1
3	3	10	6	2

إذن يكون : $\alpha-4\beta\equiv0[11]$ إذا كان : $\alpha=1$ و $\beta=3$.

و منه بالتعويض نجد أن : $\boxed{N=2013}$.

كتابة الأستاذ : بلقاسم عبدالرزاق