Université de Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Année Universitaire 2019/2020
1ière Année LMD-MI
Durée : 01 h 30mn

ÉPREUVE FINALE DE MECANIQUE

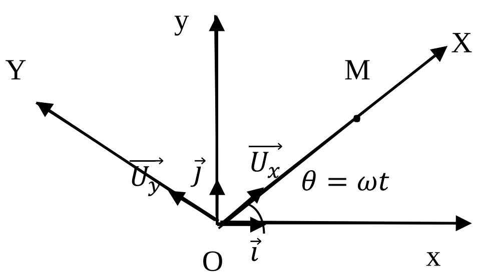
Questions de cours: (5 pts)

1- Enoncer les trois lois de Newton.
2- Vérifier que la force de pesanteur $\vec{p}$ est une force conservative et donner un exemple sur une force non conservative
3- Dans quel cas nous avons une conservation de l'énergie mécanique, et qu'est ce qu'on a dans le cas contraire.
4- Démontrer le théorème de l'énergie cinétique.

Exercice 1 (7 pts) :

Un point M se déplace avec une accélération γ constante sur l'axe (OX), d'un repère (OXYZ) qui tourne avec une vitesse angulaire ω constante autour de (Oz) dans le plan (Oxy)
A l'instant t=0, le point M se trouve en O sans vitesse initiale.
Calculer dans le **repère mobile** :

1- La vitesse relative $\overrightarrow{v_r}$ et la vitesse d'entrainement $\overrightarrow{v_e}$, en déduire la vitesse absolue $\overrightarrow{v_a}$.
2- L'accélération relative $\overrightarrow{a_r}$, l'accélération d'entrainement $\overrightarrow{a_e}$ et l'accélération de Coriolis $\overrightarrow{a_c}$, en déduire l'accélération absolue $\overrightarrow{a_a}$.



Exercice 2 (8 pts) :

A. Une particule de masse m =0.5kg abandonnée sans vitesse initiale du point A, d'un plan incliné faisant un angle α avec l'horizontal, avec un coefficient de frottement 0,8 et g=10 m/s^2

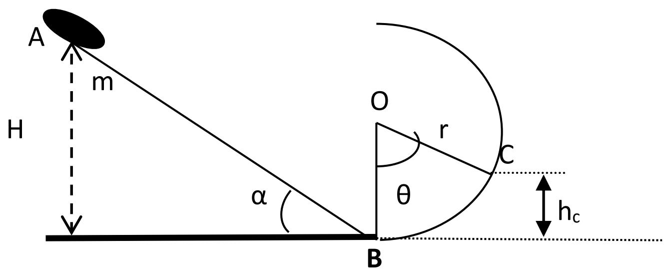
1- Que doit être l'angle d'inclinaison pour que le corps puisse descendre
2- Quelle est la force de frottement maximale

Pour un angle d'inclinaison α =45 et une hauteur H=1m

3- Calculer la force de réaction normale $\vec{N}$ et la vitesse du bloc au point B

B. A partir du point B la particule remonte dans une gouttière sans frottements

1- Exprimer h_c en fonction de r et θ.
2- Calculer la vitesse v_c de la particule au point C en fonction de r et θ.
3- Donner l'expression de la réaction R_N de la gouttière sur la particule, en fonction de m, r, θ et g.



Bon Courage

Corrigé de l'épreuve finale de Mécanique pour première année MI 2018/2019

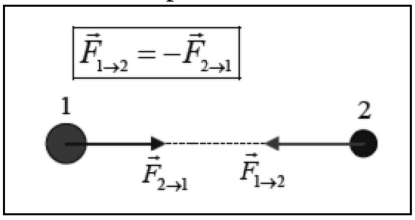
Questions de cours (5 pts)

1- Les trois lois de Newton : 1pts

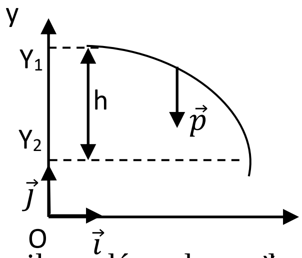
Première loi de Newton ou principe d'inertie: (0.25 pts)
Si le corps matériel n'est soumis à aucune force:
- s'il est au repos, il reste au repos
- s'il est en mouvement, ce mouvement ne peut être que rectiligne uniforme

Deuxième loi de Newton ou principe fondamentale de la dynamique (P.F.D): (0.5pts)
La résultante des forces exercées sur un corps est égale au produit de sa masse et son accélération. $\sum \vec{F} = m\vec{a}$

Troisième loi de Newton ou principe de l'action et la réaction: (0.25 pts)
Lorsque deux corps interagissent, la force exercée par le premier sur le second est égale et opposée à celle exercée par le second sur le premier



2- (1.5pts) $dw = \vec{p}.\vec{dl}$ (0.25 pts) avec $p = -mg\,\vec{j}$ (0.25 pts)
$\vec{dl} = dx\vec{i} + dy\vec{j}$ (0.25 pts) donc $dw = -mgdy$
$w = -mg\int_{y_1}^{y_2} dy = mg(y_1 - y_2) = mgh$(0.25 pts)



Donc la force de pesanteur $\vec{p}$ est une force conservative car son travail ne dépend pas du chemin suivi et on dit qu'elle dérive d'un potentiel (0.25 pts)
Une force est dite non conservative si son travail dépend du chemin suivi comme le force de frottement. (0.25 pts)

3- (1pts) Nous avons : La conservation de l'énergie mécanique si les forces sont conservatives (0.25 pts). Dans ce cas $E_M = E_C + Ep = Cte$ donc $\Delta EM = 0$ (0.25 pts)
Et entre deux points A et B : $E_M(A) = E_M(B)$
Dans le cas de la présence de frottements (forces non conservatives) (0.25 pts)
$\Delta E_M = \sum Wfrott$ (0.25 pts)

4- **Le théorème de l'énergie cinétique :** 1.5 pts
La variation de l'énergie cinétique d'un point matériel soumis à un ensemble de forces extérieures entre deux positions A et B est égale à la somme des travaux de ces forces entre A et B. $\Delta E_C = E_C(B) - E_C(A) = \sum_i W_i\,(\vec{F}_{ext})$ (0.25 pts)

La démonstration :

Nous avons $dW = F_T dr$. Partant de cette expression on peut déduire ce qui suit :
$dW = F_T\,dr = m\frac{dv}{dt}\,dr$ (0.25 pts); avec $F_T = ma = m\frac{dv}{dt}$ (0.25 pts)
$\Rightarrow dW = m\frac{dr}{dt}\,dv \quad alors \quad dW = mvdv$ (0.25 pts)
Intégrons l'expression du travail élémentaire, et tirons la définition de l'énergie cinétique :
$W = m\int_A^B vdv \quad \Rightarrow W = \frac{1}{2}\,m(v_B^2 - v_A^2)$ (0.25 pts) Où v_A est la vitesse du mobile au point A et v_B sa vitesse au point B .Donc $W = \frac{1}{2}\,mv_B^2 - \frac{1}{2}\,mv_A^2 = E_C(B) - E_C(A)$ (0.25 pts)

Exercice 1 : **(7 pts)**

1- **Les vitesses :** 3.5pts

M se déplace sur l'axe OY avec une accélération constante donc $\overrightarrow{O'M} = Y\,\overrightarrow{u_y}$ et $\gamma = \frac{dv}{dt}$ et à t=0 le point M est en O'

$\gamma = \frac{dv}{dt} \Rightarrow \int_0^v dv = \gamma \int_0^t dt$ donc $v = \gamma t$ (à t=0, v_0 (M)=0)

$v = \gamma t = \frac{dx}{dt} \Rightarrow \int_0^X dx = \gamma \int_0^t t dt$ donc $X = \frac{1}{2}\gamma t^2$ (à t=0, Y_0 (M)=0) Donc

$\overrightarrow{O'M} = \frac{1}{2}\gamma t^2\,\overrightarrow{u_x}$ (0.5pts) et O' se confondu avec O donc $\overrightarrow{OO'} = \vec{0}$ (0.5 pts)

$\overrightarrow{v_r} = \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt} = \gamma\, t\,\overrightarrow{\mathbf{u_x}}$ (0.5pts)

$\overrightarrow{v_e} = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M}$ (0.25pts) avec $\vec{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix}$ (0.25pts) et $\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} = \vec{0}$ (0.25 pts)

$\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{u_x} & \overrightarrow{u_y} & \overrightarrow{u_z} \\ 0 & 0 & \omega \\ \frac{1}{2}\gamma t^2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\gamma t^2 \omega\,\overrightarrow{u_y}$ (0.5pts) Donc $\overrightarrow{\mathbf{v_e}} = \left(\frac{1}{2}\gamma t^2 \omega\right)\overrightarrow{\mathbf{u_y}}$ (0.25pts)

$\overrightarrow{\mathbf{v_a}} = \overrightarrow{\mathbf{v_r}} + \overrightarrow{\mathbf{v_e}} = \gamma t\,\overrightarrow{\mathbf{u_x}} + \frac{1}{2}\gamma t^2 \omega\,\overrightarrow{\mathbf{u_y}}$ (0.5pts)

2- **Les accélérations :** 3.5pts

$\overrightarrow{\mathbf{a_r}} = \frac{d\overrightarrow{\mathbf{v_r}}}{\mathbf{dt}} = \gamma\overrightarrow{\mathbf{u_x}}$ (1pts)

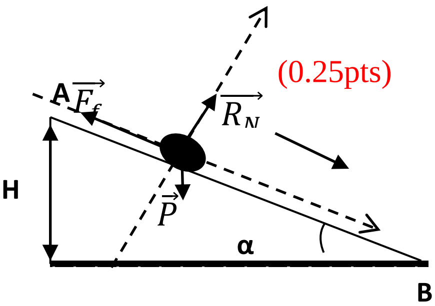
$\overrightarrow{a_e} = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{O'M}\right) + \vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M}\right)$ (0. 5pts) avec $\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} = \vec{0}$ (0.25pts)

$\vec{\omega} \wedge \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{u_x} & \overrightarrow{u_y} & \overrightarrow{u_z} \\ 0 & 0 & \omega \\ 0 & \frac{1}{2}\gamma t^2 \omega & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}\gamma t^2 \omega^2\,\overrightarrow{u_x}$ (0.5pts) Donc $\overrightarrow{a_e} = -\frac{1}{2}\gamma t^2 \omega^2\,\overrightarrow{u_x}$

$\overrightarrow{\mathbf{a_c}} = 2\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{\mathbf{v_r}} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{u_x} & \overrightarrow{u_y} & \overrightarrow{u_z} \\ 0 & 0 & 2\omega \\ \gamma t & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2\gamma t\,\boldsymbol{\omega}\,\overrightarrow{\mathbf{u_y}}$ (0.5pts)

$\overrightarrow{a_a} = \overrightarrow{a_r} + \overrightarrow{a_e} + \overrightarrow{a_c}$ (0.25pts) donc $\overrightarrow{\mathbf{a_a}} = \left(\gamma - \frac{1}{2}\gamma t^2 \omega^2\right)\overrightarrow{u_x} + (2\gamma t\,\omega)\,\overrightarrow{u_y}$ (0.5pts)

Exercice 2: **(07pts)**



A . 1- **L'angle pour lequel le corps peut descendre** (2pts)

A l'équilibre nous avons

$\Sigma\vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \vec{p} + \overrightarrow{R_N} + \vec{f} = \vec{0}$ (0.25pts)

On choisit le repère, tel que l'axe (Ox) est suivant l'axe du mouvement parallèle à $\vec{f}$ et (Oy) est perpendiculaire à (Ox) donc suivant $\overrightarrow{R_N}$.

Suivant (Ox) : $-f + m\,g\,\sin\alpha = 0$ (0.25pts)

Suivant (Oy): $N - p_y = 0 \Rightarrow N = m\,g\,\cos\alpha$ (0.25pts)

Avec $\mu_s = \mathrm{tg}\varphi = f/N \Rightarrow \mu_s = \frac{f}{N} = 0.8$ Donc f= 0,8 N=0,8 m g cosα (0.25pts)

Pour que le corps peut descendre, il faut que : m g sinα ≥f (0.25 pts)

m g sinα ≥f ⇒ m g sinα ≥0,8 m g cosα donc tg α≥0,8(0.25 pts) Alors que α ≥ 38,65 (0.25 pts)

2 **La force de frottement maximale** ; f= 0,8 N=0,8 m g cosα=3,12 N (0.5 pts)

3- Pour un angle α= 45 ; **La réaction normale** N= m g cosα=$5\frac{\sqrt{2}}{2}$ (0.5 pts)

4- **Vitesse au point B** (2pts)

$v_B^2 - v_A^2 = 2a(AB) \Rightarrow v_B^2 = 2a(AB)$; $v_A=0$ (0.25 pts)

En appliquant le PFD : $\Sigma\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{p} + \vec{N} + \vec{f} = m\vec{a}$ (0.25pts)

Suivant (Ox) $-f + p_x = -f + m\,g\,\sin\alpha = ma$….(1)(0.25pts)

Suivant (Oy) $N - p_y = 0 \Rightarrow N = m\,g\,\cos\alpha$……(2) (0.25pts)

$\mu_d = \mathrm{tg}\varphi = f/N \Rightarrow f = N\,\mathrm{tg}\,\varphi$ donc $f = \mu_d\,m\,g\,\cos\alpha$ (0.25pts)

(1): $-\mu_d\,m\,g\,\cos\alpha + m\,g\,\sin\alpha = ma \Rightarrow a = g(\sin\alpha - \mu_d\cos\alpha) = \sqrt{2}\,m/s^2$ (0.25pts)

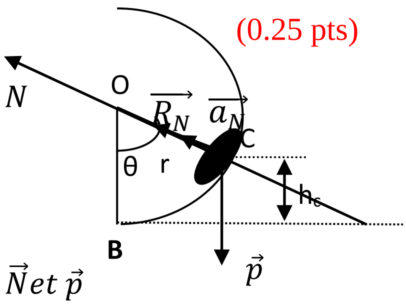
AB=Hsinα=$\frac{\sqrt{2}}{2}$ (0.25pts) Donc $v_B^2 = 2a(AB) = 4$ et $v_B=2$ m/s (0.25 pts)

B.1- **La hauteur h_c** : $h_c = r - r\cos\theta = r(1-\cos\theta)$ (0.5 pts)

2- **La vitesse au point C** (1.25pts)

Puisqu'il n'ya pas de frottements ; il ya une conservation de l'énergie mécanique entre les deux points B et C $E_{M_B} = E_{M_C} \Rightarrow E_{C_B} + E_{P_B} = E_{C_C} + E_{P_C}$ (0.25 pts)Alors $E_{C_B} = E_{C_C} + E_{P_C}$ (0.25 pts) Donc $\frac{1}{2}mv_B^2 = \frac{1}{2}mv_C^2 + mgh_c \Rightarrow v_C^2 = v_B^2 - 2gr(1-\cos\theta)$ (0.25 pts)

Donc $v_c = \sqrt{4 - 2gr(1-\cos\theta)}$ (0.25 pts)



(0.25 pts)

3- **L'expression de la réaction R_N** (1.25pts)

D'après le PFD $\Sigma\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{N} + \vec{p} = m\overrightarrow{a_N}$ (0.25 pts)

On choisit un repère composés de l'axe (T) tangent à la demi sphère et l'axe (N) suivant le rayon et dans le sens de $\vec{N}$ et $\vec{p}$

En faisant la projection sur l'axe (N) : $R_N - m\,g\cos\theta = m\frac{v_C^2}{r}$ (0.5 pts) $\Rightarrow R_N = mg\cos\theta + m\frac{v_C^2}{r}$

$\Rightarrow R_N = mg\cos\theta + \frac{m}{r}\big(4 - 2gr(1-\cos\theta)\big) = 3mg\cos\theta - 2mg + 4\frac{m}{r}$ (0.25 pts)