License 2 : Génie Mécanique **Série 04**

Exercice 01:

Si la vitesse angulaire d'un disque qui tourne autour de son centre, le point O, est ω=1000 $tr.min^{-1}$, déterminer les vitesses linéaires des points A et B appartenant à ce disque (OA=1m; OB=0.5m) ainsi que leur accélérations. Dès que le moteur entrainant ce disque est arrêté, le disque fait 50 tours avant de s'immobiliser. Déterminer la décélération angulaire, l'accélération tangentielle en A et le temps que le moteur met pour s'arrêter.

Solution :

a) On a un mouvement angulaire uniforme donc : $\frac{V_A}{OA} = \frac{V_B}{OB} = \omega = \frac{1000\times\pi}{30} = 104.7\,rad\,s^{-1}$
Ainsi $V_A = OA\,.\,\omega = 104.7ms^{-1}$ et $V_B = OB.\,\omega = 52.36\,ms^{-1}$
Du moment que ω est constante, alors l'accélération angulaire est nulle : α=0 $rad\,s^{-2}$. D'où l'accélération tangentielle des points A et B est nulle aussi : $a_t = 0\,m.\,s^{-2}$. Par contre, l'accélération normale est constante et vaut : $a_n = \omega^2 R$. Pour A on a : $a_{A_n} = 10962{,}09m.\,s^{-2}$ et pour le point B, on a $a_{B_n} = 5481{,}045m.\,s^{-2}$

b) Dès que le moteur est arrêté, le disque effectue un mouvement décéléré jusqu'à l'arrêt.
En appliquant la relation $\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0)$ on peut déduire la décélération angulaire α, soit :
$0 = 104.7^2 + 2\alpha(50\times 2\pi)$ d'où $\alpha = -\frac{104.7^2}{200\pi} = -17.45rads^{-2}$.
L'accélération tangentielle (αR) au point A est = $-17.45ms^{-2}$ et au point B est $8.72ms^{-2}$.

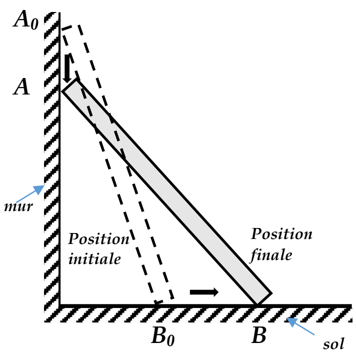
L'équation du mouvement du disque est donc :

$$\theta(t) = -8.73t^2 + 104.7t, \quad \text{avec} \quad \omega(t) = -17.45t^2 + 104.7$$

Exercice 02:

Considérons le cas d'une barre AB, de longueur $1\,m$, posée en B sur le sol et elle s'appuie en A sur un mur vertical. La barre glisse et décrit un mouvement plan par rapport à l'ensemble (mur+sol). La barre glisse en A vers le bas à la vitesse de 0,1 m/s.

- Déterminer la vitesse de glissement en B sachant que l'angle en A est de 30°.
- Déterminer la vitesse de rotation de la barre
- Déterminer le CIR
- Déterminer la quantité de mouvement et le moment cinétique

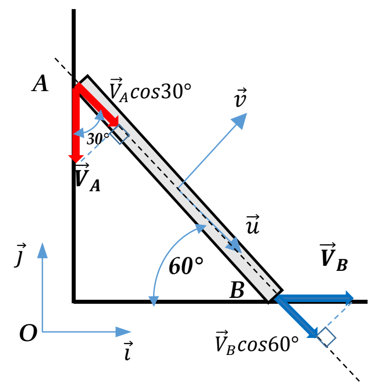


Solution :

- Vitesse en B

L'angle en B est 60°. On associe au système (mur+sol) le repère de référence
$(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Alors : $\overrightarrow{V_A} = -0.1\vec{\jmath}\,[ms^{-1}]$ $\overrightarrow{V_B} = V_B\vec{\imath}$
Par application de la propriété d'équiprojectivité dans la barre :

$$\overrightarrow{V_A}\,\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{V_B}\,\overrightarrow{AB} \quad \text{d'où} \quad V_A \cos 30° = V_B cos60°$$
$$\Rightarrow 0.1\times 0.866 = 0.5V_B$$
$$V_B = 0{,}1732\;ms^{-1}$$

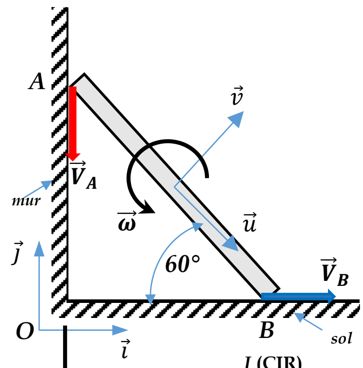


- Vitesse de rotation

Définissons d'abord les coordonnées de vecteurs de la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{k})$ attachée à la barre

$$\vec{u} = cos60°\vec{\imath} - sin60°\vec{\jmath} = 0.5\vec{\imath} - 0.866\vec{\jmath}$$

$$\vec{v} = sin60°\vec{\imath} + cos60°\vec{\jmath} = 0.866\vec{\imath} + 0.5\vec{\jmath}$$



Les points A et B appartiennent au même corps donc,

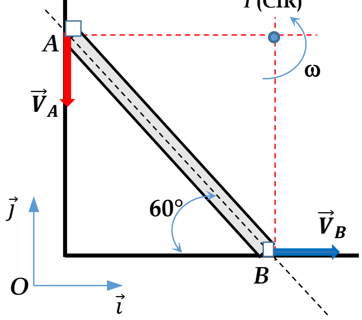
$$\vec{V_A} = \vec{V_B} + \overrightarrow{AB} \wedge \vec{\omega} \quad \text{Avec :} \ \vec{V_A} = -0.1\vec{\jmath} \quad \vec{V_B} = 0{,}1732\,\vec{\imath}$$

Donc, on doit avoir l'égalité suivante vérifiée :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -0.1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.173 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 1. \begin{pmatrix} 0.5 \\ -0.866 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix}$$

D'où : $\vec{\omega} = 0.2\vec{k}$

- le CIR I est situé à l'intersection des perpendiculaires en A à $\vec{V_A}$ et en B à $\vec{V_B}$.



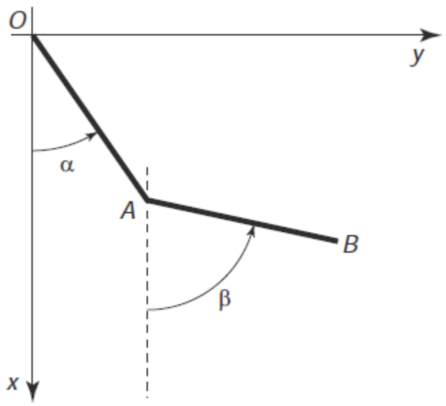
On a ainsi : $\frac{V_A}{IA} = \frac{V_B}{IB} = \omega$

Avec IA= ABcos30°=0.5m, IB=ABsin60°=0.866m

D'où : $\frac{0.1}{0.5} = \omega = 0.2 rad.s^{-1}$ et $V_B = IB\ \omega = 0{,}1732\ ms^{-1}$

Exercice 03

On considère le système ci-dessous, formé de deux barres articulées OA et AB de mêmes longueurs et se déplaçant dans le plan (Oxy).



1. Donner l'expression du vecteur rotation instantané de la barre $[OA]$ en fonction de α.

2. De même, donner l'expression du vecteur rotation instantané de la barre $[AB]$ en fonction de l'angle β.

3. Quelle est la relation entre la vitesse en O et celle de A ?

4. Quelle est la relation entre la vitesse en A et celle de B ?

5. Peut-on écrire le même type de relation simple sur les vitesses en O et en B ?

Solution

1 **1.** La barre $[OA]$ a un mouvement de rotation autour de l'axe (Oz). Sa vitesse angulaire est $\dot{\alpha}$. Ainsi, le vecteur rotation instantanée de la barre $[OA]$ est $\boxed{\dot{\alpha}\vec{e}_z}$.

2. La barre $[AB]$ a un mouvement de rotation autour d'un axe de direction fixe (Az). Son vecteur rotation instantané est $\boxed{\dot{\beta}\vec{e}_z}$.

3. La formule de Varignon appliquée au solide $[OA]$ conduit à :

$$\boxed{\vec{v}(A) = \vec{v}(O) + \dot{\alpha}\vec{e}_z \wedge \overrightarrow{OA}}$$

4. De même, la formule de Varignon appliquée au solide $[AB]$ conduit à :

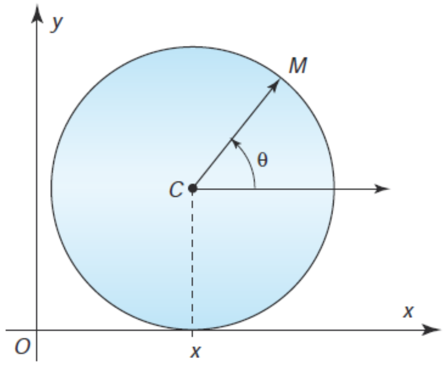
$$\boxed{\vec{v}(B) = \vec{v}(A) + \dot{\beta}\vec{e}_z \wedge \overrightarrow{AB}}$$

5. On ne peut pas écrire de formule de Varignon portant sur les points O et B car ils n'appartiennent pas au même solide.

Exercice 04

On considère un disque de rayon R dont le centre C est repéré par la coordonnée cartésienne x. La position d'un point M à la périphérie du disque est repérée par un angle θ par rapport à un axe de direction fixe. Le disque roule sans glisser sur un plan horizontal. Déterminer la relation entre x et θ.

Que devient la relation précédente si le sol horizontal est remplacé par un tapis roulant se déplaçant à la vitesse $v_0\vec{e}_x$?



Solution

4 Une roue cylindrique de rayon R roulant sans glisser sur un plan supposé fixe a, a priori, deux degrés de liberté : l'un de translation décrit par $\vec{v}_G = \frac{\mathrm{d}x_G}{\mathrm{d}t}\vec{e}_x$ (G centre d'inertie de la roue), l'autre de rotation décrit par un vecteur instantané de rotation $\vec{\Omega} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\vec{e}_z$. On détermine la vitesse du point I appartenant au disque et en contact à l'instant t avec le sol (notons bien qu'il ne s'agit généralement pas du même point du disque en $t + \mathrm{d}t$). D'après la formule de Varignon :

$$\vec{v}_I = \vec{v}_G + \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\vec{e}_z \wedge \overrightarrow{GI}$$
$$= \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + R\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)\vec{e}_x$$

La vitesse du point coïncident appartenant au sol est nulle. La condition de roulement sans glissement est ainsi :

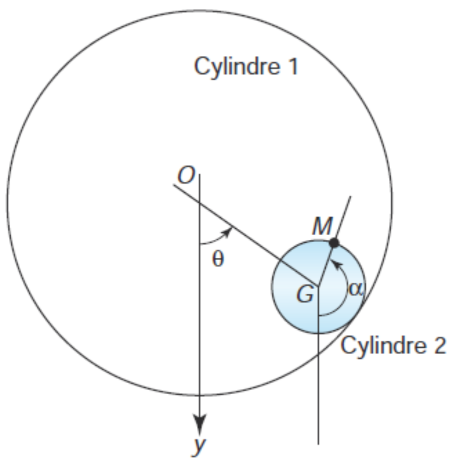
$$\boxed{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + R\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = 0}$$

5 La vitesse du point coïncident appartenant au tapis roulant est à présent $v_0\vec{e}_x$. La condition de roulement sans glissement s'écrit donc :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + R\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = v_0}$$

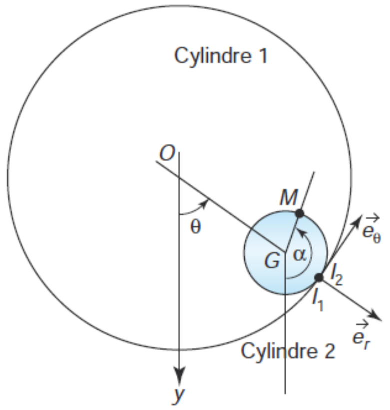
Exercice 05

Un cylindre 2 de rayon R_2 roule sans glisser à l'intérieur d'un cylindre creux 1 de rayon R_1. Le cylindre 1 est fixe. La position du cylindre 2 est repérée par deux angles. L'un, θ, correspond à l'angle entre la verticale descendante et (OG) où O désigne un point de l'axe du cylindre creux et G le centre du cylindre 2. Le second, α, correspond à l'angle entre la verticale descendante passant par G et (GM) où M est un point fixe sur le cylindre 2. Établir la condition de roulement sans glissement.



Solution

6 On détermine la vitesse de I_2, point du cylindre 2 en contact avec le point I_1 du cylindre 1, le cylindre 1 étant immobile.



$$\vec{v}(I_2) = \vec{v}(I_1) = \vec{0}$$

$$\begin{aligned}\vec{v}(I_2) &= \vec{v}(G) + \overrightarrow{I_2G} \wedge \vec{\Omega} \\ &= (R_1 - R_2)\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\vec{e}_\theta - R_2\vec{e}_r \wedge \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}\vec{e}_z \\ &= \left(R_2\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} + (R_1 - R_2)\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)\vec{e}_\theta\end{aligned}$$

On en déduit la condition de roulement sans glissement du cylindre en mouvement dans le cylindre creux :

$$\boxed{R_2\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} + (R_1 - R_2)\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = 0}$$

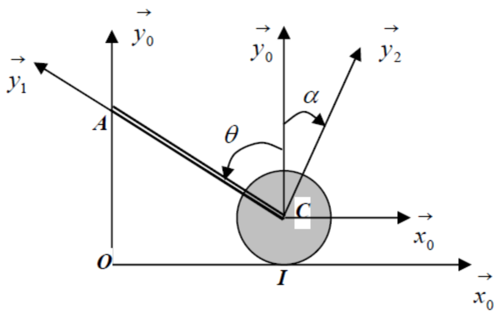
Exercice 06

Soit un système constitué de deux solides ***(S₁)*** lié au repère $R_1(C,\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1)$ et ***(S2)*** lié au repère $R_2(C,\vec{x}_2,\vec{y}_2,\vec{z}_2)$ en mouvement par rapport à un repère fixe $R_0(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$

(S_1) : est une barre de longueur ***L***, de masse ***m*** dont l'extrémité ***A*** glisse sur un mur et l'autre extrémité ***B*** est articulée au disque ;

(S_2) : est un disque de masse ***M*** et de rayon ***R*** qui roule sans glisser sur un plan horizontal tel que représenté sur la figure ci-dessous.

1. Déterminer la relation exprimant le non glissement du disque sur le plan au point ***I*** ;
2. Déterminer le centre instantané de rotation (C.I.R.) de la barre :
   a) Géométriquement
   b) Analytiquement.



Solution :

$R_0(\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$: repère fixe ; $\overrightarrow{OC} = \begin{cases} L\sin\theta \\ R \\ 0 \end{cases}_{R_0}$; $\overrightarrow{OI} = \begin{cases} L\sin\theta \\ 0 \\ 0 \end{cases}_{R_0}$

$R_1(C,\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1)$: lié à la barre; tel que : $\theta = (\vec{x}_0,\vec{x}_1) = (\vec{y}_0,\vec{y}_1)$ et $\vec{\Omega}_1^0 = \dot{\theta}\,\vec{z}_1 = \dot{\theta}\,\vec{z}_0$

$R_2(C,\vec{x}_2,\vec{y}_2,\vec{z}_2)$: lié au disque ; tel que : $\alpha = (\vec{x}_0,\vec{x}_2) = (\vec{y}_0,\vec{y}_2)$ et $\vec{\Omega}_2^0 = -\dot{\alpha}\,\vec{z}_1 = -\dot{\alpha}\,\vec{z}_0$

1. Condition de roulement sans glissement

La condition de non glissement du disque sur le plan est vérifiée si, la vitesse du point I appartenant au disque est nulle : $\vec{V}(I \in disque) = \vec{0}$ par la cinématique du solide écrire :

$$\vec{V}^0(I) = \vec{V}^0(C) + \vec{\Omega}_2^0 \wedge \vec{CI} = \vec{0} \quad \text{avec :} \quad \vec{V}^0(C) = \frac{d^0 \vec{OC}}{dt} = \left\{\begin{array}{l} L\dot{\theta}\cos\theta \\ 0 \\ 0 \end{array}\right._{R_0}$$

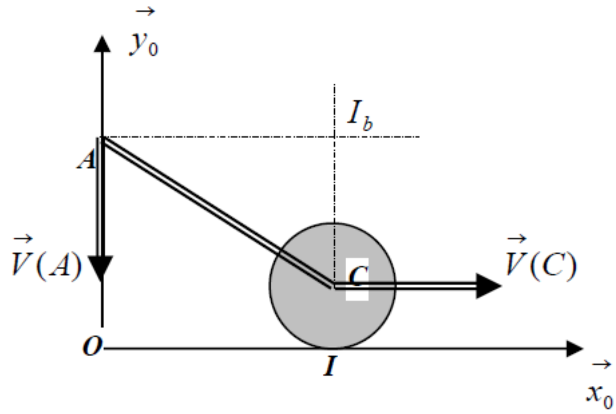
$$\left\{\begin{array}{l} L\dot{\theta}\cos\theta \\ 0 \\ 0 \end{array}\right._{R_0} + \left\{\begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ -\dot{\alpha} \end{array}\right._{R_0} \wedge \left\{\begin{array}{l} 0 \\ -R \\ 0 \end{array}\right._{R_0} = \left\{\begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right._{R_0} \quad \Leftrightarrow \quad L\dot{\theta}\cos\theta - R\dot{\alpha} = 0$$

2. Centre instantané de rotation de la barre

a) Gométriquement

Soit I_b le centre de rotation instantanée *(C.I.R.)* de la barre .

Sa position est repéré en traçant deux droites, l'une perpendiculaire à la vitesse $\vec{V}^0(A)$ au point A et l'autre perpendiculaire à $\vec{V}^0(C)$ au point C. Le point d'intersection de ces deux droites est le *(C.I.R.)* de la barre.



En effet nous avons :

$$\vec{V}^0(I_b) = \vec{V}^0(A) + \vec{\Omega}_1^0 \wedge \vec{AI_b} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{V}^0(A) = \vec{\Omega}_1^0 \wedge \vec{I_bA} \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} \vec{V}^0(A) \perp \vec{\Omega}_1^0 \\ \vec{V}^0(A) \perp \vec{I_bA} \end{array}\right.$$

$$\vec{V}^0(I_b) = \vec{V}^0(C) + \vec{\Omega}_1^0 \wedge \vec{CI_b} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{V}^0(C) = \vec{\Omega}_1^0 \wedge \vec{I_bC} \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} \vec{V}^0(C) \perp \vec{\Omega}_1^0 \\ \vec{V}^0(C) \perp \vec{I_bC} \end{array}\right.$$

a) Analytiquement

$$\text{Soit } \overrightarrow{OI_b} = \begin{cases} x \\ y \\ z \end{cases}_{R_0} \Rightarrow \overrightarrow{CI_b} = \begin{cases} x - L\sin\theta \\ y - R \\ z \end{cases}_{R_0}$$

On sait que : $\vec{V}^0(I_b) = \vec{V}^0(C) + \vec{\Omega}_1^0 \wedge \overrightarrow{CI_b} = \vec{0}$

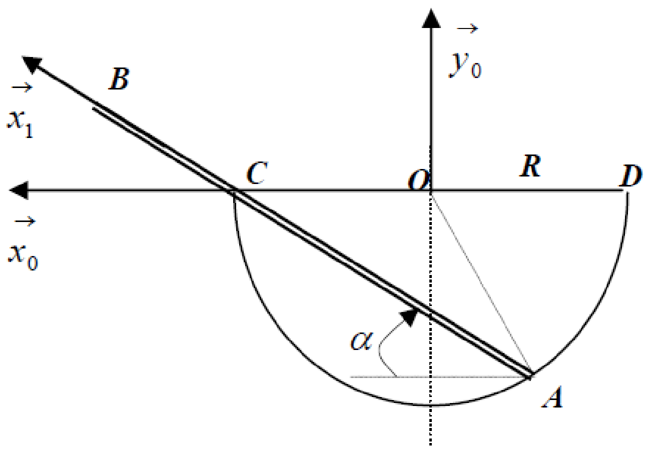
$$\vec{V}^0(C) + \vec{\Omega}_2^0 \wedge \overrightarrow{CI_b} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} L\dot{\theta}\cos\theta \\ 0 \\ 0 \end{cases}_{R_0} + \begin{cases} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{cases}_{R_0} \wedge \begin{cases} x - L\sin\theta \\ y - R \\ z \end{cases}_{R_0} = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ 0 \end{cases}_{R_0}$$

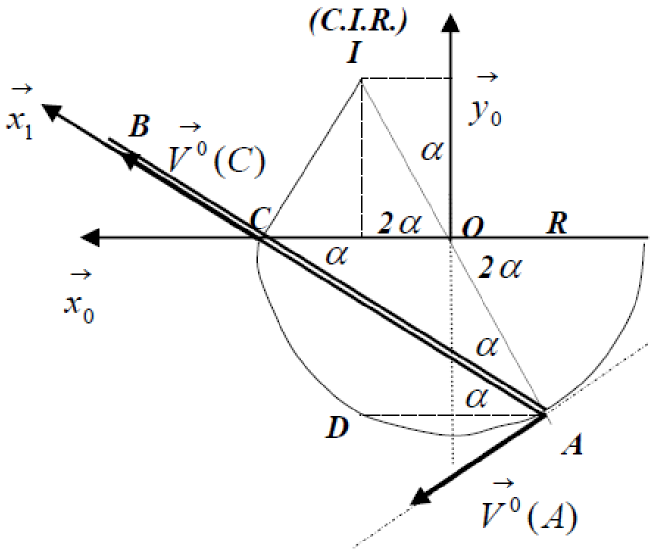
$$\begin{cases} L\dot{\theta}\cos\theta - (y-R)\dot{\theta} = 0 \\ (x - L\sin\theta)\dot{\theta} = 0 \\ z = 0 \end{cases}_{R_0} \Leftrightarrow \begin{cases} y = R + L\cos\theta \\ x = L\sin\theta \\ z = 0 \end{cases}_{R_0}$$

Exercice 07

Soit $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ un repère fixe lié à un demi cylindre creux de rayon R, sur lequel se déplace une barre de longueur $2L$. Le mouvement se fait dans le plan vertical ***(xOy)***. La barre est en contact permanent avec le demi cylindre en deux points, l'extrémité A en contact avec la surface du cylindre et le point C avec son bord.

1. Déterminer les coordonnées du centre instantané de rotation (C.I.R.) géométriquement ;
2. Retrouver les coordonnées du centre instantané de rotation (C.I.R.) analytiquement ;
3. En déduire la vitesse du point C de la barre.





Solution :

1. Coordonnées du C.I.R. géométriquement :

La vitesse du point A est tangente au cercle de rayon *R*. On trace la perpendiculaire à $\vec{V}^0(A)$, elle passe par le point *O* et elle rencontre la perpendiculaire à $\vec{V}^0(C)$ au point *I*. La vitesse du point *C* est portée par la barre.

Le triangle *CAI* est rectangle en *C* car il est inscrit à l'intérieur d'un cercle de diamètre *CI*.

Le triangle *COA* est isocèle : $OC = OA = R$, les angles $(CO, CA) = (AO, AC) = (AD, AC) = \alpha$

Le triangle *COI* est isocèle : $OC = OI = R$, les angles $(CO, CI) = (IO, IC) = 2\alpha$

On déduit facilement les coordonnées du point *I* tel que : $\overrightarrow{OI} = \underset{R_0}{\begin{cases} x_I = R\cos 2\alpha \\ y_I = R\sin 2\alpha \end{cases}}$

2. Coordonnées du C.I.R. analytiquement :

On sait que la vitesse du centre instantané de rotation *(C.I.R.)* de la barre est nul :

$\vec{V}^0(I) = \vec{V}^0(A) + \vec{\Omega}_1^0 \wedge \overrightarrow{AI} = \vec{0}$; Déterminons d'abord la vitesse du point ***A*** :

Nous avons : $\overrightarrow{OA} = \underset{R_0}{\begin{cases} -R\cos 2\alpha \\ -R\sin 2\alpha \\ 0 \end{cases}} \Rightarrow \vec{V}^0(A) = \underset{R_0}{\begin{cases} 2R\dot{\alpha}\sin 2\alpha \\ -2R\dot{\alpha}\cos 2\alpha \\ 0 \end{cases}}$ et $\overrightarrow{AI} = \underset{R_0}{\begin{cases} x_I + R\cos 2\alpha \\ y_I + R\sin 2\alpha \\ 0 \end{cases}}$

$$\underset{R_0}{\begin{cases} 2R\dot{\alpha}\sin 2\alpha \\ -2R\dot{\alpha}\cos 2\alpha \\ 0 \end{cases}} + \underset{R_0}{\begin{cases} 0 \\ 0 \\ \dot{\alpha} \end{cases}} \wedge \underset{R_0}{\begin{cases} x_I + R\cos 2\alpha \\ y_I + R\sin 2\alpha \\ 0 \end{cases}} = \underset{R_0}{\begin{cases} 0 \\ 0 \\ 0 \end{cases}}$$

$$2R\dot{\alpha}\sin 2\alpha - \dot{\alpha}(y_I + R\sin 2\alpha) = 0 \quad \Rightarrow \quad y_I = R\sin 2\alpha$$

$$-2R\dot{\alpha}\cos 2\alpha + \dot{\alpha}(x_I + R\cos 2\alpha) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_I = R\cos 2\alpha$$

3. Vitesse du point C de la barre

Nous avons : $\vec{V}^0(C) = \vec{V}^0(I) + \vec{\Omega}_1^0 \wedge \overrightarrow{IC}$; or : $\vec{V}^0(I) = \vec{0}$

$$\vec{V}^0(C) = \vec{\Omega}_1^0 \wedge \overrightarrow{IC} = \underset{R_0}{\begin{cases} 0 \\ 0 \\ \dot{\alpha} \end{cases}} \wedge \underset{R_0}{\begin{cases} R - R\cos 2\alpha \\ -R\sin 2\alpha \\ 0 \end{cases}} = \underset{R_0}{\begin{cases} R\dot{\alpha}\sin 2\alpha \\ R\dot{\alpha}(1 - \cos 2\alpha) \\ 0 \end{cases}}$$