Examen final : Maths3 | **Durée : 1h30mn** | 29 janvier 2019

Les documents, ordinateurs et téléphones sont interdits

► Il est recommandé aux étudiants de répondre aux questions avec clarté et concision.

EXERCICE 1. [7 pts]

1. Calculer l'intégrale suivante :

$$I = \iint_D (x+y)e^{-(x+y)}dxdy$$

avec, D est limité par le triangle de sommets $\{(1,0),(0,1),(0,0)\}$.

2. En utilisant le changement de variable, calculer

$$J = \iiint_V \frac{1}{1+x^2+y^2}dxdydz$$

avec, $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, 4 \leq x^2+y^2 \leq 9 \; et \; 1 \leq z \leq 2\}$

EXERCICE 2. [6 pts]

1. Résoudre l'équation suivante : $x^3y' + 4(1-x^2)y = 0$
2. **(a)** Résoudre l'équation homogène suivante : $x^2y' + xy = x^2 + y^2$

   (b) Vérifier que x est une solution de cette équation.

EXERCICE 3. [7 pts]

1. Etudier la nature des séries suivantes :

$$\sum \frac{a^n(n-1)}{2^{n+1}}, \; où \; a > 0, \quad \sum \frac{(n+1)sin(2n)}{\sqrt[3]{n^7+3n+4}}.$$

2. Etudier la convergence normale sur $\mathbb{R}$ de la série de fonction suivante :

$$\sum \frac{cos(nx)}{n(n+1)}$$

   (a) Déduire est ce que cette série converge uniformément, absolument et simplement sur $\mathbb{R}$? **Justifier** chaque réponse.

   (b) On désigne la somme de cette série par $S(x)$, Calculer $S(0)$.

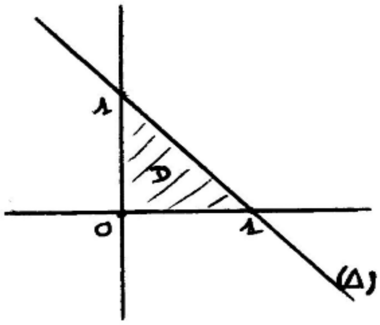
BONNE CHANCE

2 ^{ème} année ST

Correction de l'Examen Maths3

Exercice 1 (7 points)

1/ $I = \iint\limits_{D} (x+y)\, e^{-(x+y)} dxdy$



D'aprèe le graphe, on remarque que $0 \leq x \leq 1$ et $0 \leq y \leq \alpha x + \beta$, où $y = \alpha x + \beta$ est l'équation de la droite (Δ)

* On chercher l'équation de la droite (Δ) sous la forme $y = \alpha x + \beta$:

on a (Δ) passe par les points $(0,1)$ et $(1,0)$ alors

$$\begin{cases} 1 = \alpha.0 + \beta \\ 0 = \alpha.1 + \beta \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \boxed{\beta = 1} \\ \alpha + \beta = 0 \Longrightarrow \boxed{\alpha = -1} \end{cases}$$

d'où $(\Delta) : y = -x + 1$ $\quad$ **(0, 50)**

$$I = \int_0^1 \underbrace{\int_0^{-x+1} (x+y)\, e^{-(x+y)} dydx}_{(*)}$$

les bornes de x **(0, 50)**, les bornes de y **(0, 50)**

$(*) = \int_0^{-x+1} (x+y)\, e^{-(x+y)} dy = \int_0^{-x+1} xe^{-x-y} dy + \int_0^{-x+1} ye^{-x-y} dy$

$= \int_0^{-x+1} xe^{-x}e^{-y} dy + \int_0^{-x+1} ye^{-x}e^{-y} dy = xe^{-x} \int_0^{-x+1} e^{-y} dy + e^{-x} \int_0^{-x+1} ye^{-y} dy$

on fait intégration par parties pour la deuxième $\begin{pmatrix} u = y & u' = 1 \\ v' = e^{-y} & v = -e^{-y} \end{pmatrix}$

$(*) = xe^{-x} \left[-e^{-y}\right]_0^{-x+1} + e^{-x} \left[\left[-ye^{-y}\right]_0^{-x+1} + \int_0^{-x+1} e^{-y} dy\right]$

$= xe^{-x} \left[-e^{-y}\right]_0^{-x+1} + e^{-x} \left[-ye^{-y} - e^{-y}\right]_0^{-x+1}$

$= xe^{-x} \left[-e^{x-1} + 1\right] + e^{-x} \left[(x-1)\, e^{x-1} - e^{x-1} + 1\right]$

$= -xe^{-1} + xe^{-x} + (x-1)\, e^{-1} - e^{-1} + e^{-x}$

$= -xe^{-1} + xe^{-x} + xe^{-1} - e^{-1} - e^{-1} + e^{-x} = \boxed{xe^{-x} + e^{-x} - 2e^{-1}}$ $\quad$ **(1)**

$I=\int_0^1\left(xe^{-x}+e^{-x}-2e^{-1}\right)dx=\int_0^1 xe^{-x}dx+\int_0^1 e^{-x}dx-\int_0^1 2e^{-1}dx$

on fait intégration par parties pour la première $\begin{pmatrix} u=x & u'=1 \\ v'=e^{-x} & v=-e^{-x}\end{pmatrix}$

$I=\left[-xe^{-x}\right]_0^1+\int_0^1 e^{-x}dx+\left[-e^{-x}-2e^{-1}x\right]_0^1=\left[-xe^{-x}-e^{-x}-e^{-x}-2e^{-1}x\right]_0^1$

$$\boxed{I=2-5e^{-1}=0.160\,6027941\simeq 0.16} \qquad \textbf{(1)}$$

2/ $J=\int\int\int \dfrac{1}{1+x^2+y^2}dxdydz$

on utilise les coordonnées cylindriques $\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \\ z=z\end{cases}$ **(0.50)**

on a $x^2+y^2=r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta=r^2\left(\underbrace{\cos^2\theta+\sin^2\theta}_{=1}\right)=r^2$

d'où d'après les données $4\leq r^2\leq 9\Longrightarrow 2\leq r\leq 3$ **(0.50)**
on a aussi d'après les données $1\leq z\leq 2$
puisque le volume V se trouve enrte les deux cylindres de rayon 2 et 3, alors $0\leq\theta\leq 2\pi$ **(0.50)**

$J=\int_1^2\int_0^{2\pi}\int_2^3 \dfrac{1}{1+r^2}rdrd\theta dz=\left(\int_2^3\dfrac{r}{1+r^2}dr\right)\left(\int_0^{2\pi}d\theta\right)\left(\int_1^2 dz\right)$

$=\left[\dfrac{1}{2}\ln\left(1+r^2\right)\right]_2^3.\left[\theta\right]_0^2.\left[z\right]_1^2=\dfrac{1}{2}\left[\ln 10-\ln 5\right]\left[2\pi\right]\left[1\right]$ **(1.50)**

$$\boxed{J=\pi\left[\ln 10-\ln 5\right]=2.1775860903\simeq 2.18} \qquad \textbf{(0.50)}$$

<u>**Exercice 2**</u> (6 points)

1/ $x^3y'+4\left(1-x^2\right)y=0$ c'est une équation à variables sparables

$x^3\dfrac{dy}{dx}+4\left(1-x^2\right)y=0\Longrightarrow x^3dy+4\left(1-x^2\right)ydx=0$

on divise par $x^3y\Longrightarrow\dfrac{dy}{y}+4\dfrac{\left(1-x^2\right)}{x^3}dx=0\Longrightarrow\dfrac{dy}{y}+4\left(\dfrac{1}{x^3}-\dfrac{1}{x}\right)dx=0$ **(1)**

après intégration, on trouve $\ln|y|+4\left[\dfrac{-1}{2x^2}-\ln|x|\right]=\ln c$ **(1)**

$\ln|y|-\dfrac{2}{x^2}-4\ln|x|=\ln c\Longrightarrow\ln|y|-\ln e^{\frac{2}{x^2}}-\ln|x|^4=\ln c$

$\ln|y|=\ln e^{\frac{2}{x^2}}+\ln|x|^4+\ln c=\ln ce^{\frac{2}{x^2}}x^4\Longrightarrow\boxed{y=ce^{\frac{2}{x^2}}x^4}$ **(1)**

2/ a/ $x^2y'+xy=x^2+y^2$ c'est une équation homogène

$\Longrightarrow y'+\dfrac{y}{x}=1+\dfrac{y^2}{x^2}\Longrightarrow y'=\dfrac{y^2}{x^2}-\dfrac{y}{x}+1$ (1) **(0.50)** on pose $t = \dfrac{y}{x}$ $\quad (2) \Longrightarrow y = tx \Longrightarrow \dfrac{dy}{dx} = t + x\dfrac{dt}{dx} \quad (3)$

on remplace (2) et (3) dans (1)$\Longrightarrow t + x\dfrac{dt}{dx} = t^2 - t + 1$

$\Longrightarrow x\dfrac{dt}{dx} = t^2 - 2t + 1 = (t-1)^2 \Longrightarrow \dfrac{dt}{(t-1)^2} = \dfrac{dx}{x}$

$\Longrightarrow \int \dfrac{dt}{(t-1)^2} = \int \dfrac{dx}{x} + c \Longrightarrow \dfrac{-1}{t-1} = \ln x + c \Longrightarrow 1 - t = \dfrac{1}{\ln x + c}$ **(1)**

$\boxed{t = 1 - \dfrac{1}{\ln x + c} = \dfrac{\ln x + c - 1}{\ln x + c}}$ **(0.50)**

puisque $t = \dfrac{y}{x}$ $\quad \boxed{y = x\dfrac{\ln x + c - 1}{\ln x + c}}$ **(0.50)**

b/ x est une solution de cette équation :

on pose $y = x \Longrightarrow y' = 1$, on remplace dans l'équation homogène, on trouve:
$x^2y' + xy = x^2(1) + x(x) = x^2 + x^2 = 2x^2$
$x^2 + y^2 = x^2 + x^2 = 2x^2$, d'où x est une solution de cette équation **(0.50)**

<u>Exercice 3</u> (7 points)

1/ $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{a^n(n-1)}{2^{n+1}}, a > 0$ on utilise D'Alembert

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{a^{n+1}n}{2^{n+2}}}{\frac{a^n(n-1)}{2^{n+1}}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a^{n+1}n}{2^{n+2}} \cdot \frac{2^{n+1}}{a^n(n-1)}$$

$= \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a}{2}\dfrac{n}{n-1} = \dfrac{a}{2}$ **(1)**

- Si $\dfrac{a}{2} < 1 \Longrightarrow a < 2$ alors la série converge **(0.25)**
- Si $\dfrac{a}{2} > 1 \Longrightarrow a > 2$ alors la série diverge **(0.25)**
- Si $\dfrac{a}{2} = 1 \Longrightarrow a = 2$ on ne peut rien dire

$\Longrightarrow$on remplace $a = 2$ dans la série, on obtient: $\sum\limits_{n\geq 1} u_n = \sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{2^n(n-1)}{2^{n+1}}$ qui diverge puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2}(n-1) = +\infty \neq 0$ donc la série diverge **(0.50)**

conclusion: la série $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{a^n(n-1)}{2^{n+1}}$ converge seulement pour $a < 2$

* $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{(n+1)\sin 2n}{\sqrt[3]{n^7 + 3n + 4}}$

On a $\left|\dfrac{(n+1)\sin 2n}{\sqrt[3]{n^7 + 3n + 4}}\right| = \dfrac{(n+1)}{\sqrt[3]{n^7 + 3n + 4}}|\sin 2n| \leq \dfrac{(n+1)}{\sqrt[3]{n^7 + 3n + 4}} = v_n$(puisque $|\sin 2n| \leq 1, \forall n)$ **(0.50)**

on utilise Riemanne pour la série $\sum\limits_{n\geq 1} v_n$, on pose $\alpha = \dfrac{4}{3}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} n^{\alpha}v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} n^{\frac{4}{3}} \dfrac{(n+1)}{\sqrt[3]{n^7+3n+4}} = \lim\limits_{n\to+\infty} n^{\frac{4}{3}} \dfrac{n}{n^{\frac{7}{3}}} = 1 \Longrightarrow$on a $\alpha = \dfrac{4}{3} > 1$ et $l = 1 \neq \infty \Longrightarrow$ la série $\sum\limits_{n\geq 1} v_n$ converge$\Longrightarrow$ la série $\sum\limits_{n\geq 1} \left| \dfrac{(n+1)\sin 2n}{\sqrt[3]{n^7+3n+4}} \right|$ converge par comparaison$\Longrightarrow$ la série $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{(n+1)\sin 2n}{\sqrt[3]{n^7+3n+4}}$ est absolument convergente **(1)**

2/ $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{\cos nx}{n(n+1)}$

On a $\left| \dfrac{\cos nx}{n(n+1)} \right| \leq \dfrac{1}{n(n+1)} = v_n$ (puisque $|\cos nx| \leq 1, \forall n, \forall x \in \mathbb{R}$) **(0.25)**

on utilise Riemann pour la série $\sum\limits_{n\geq 1} v_n$, on prend $\alpha = 2$

$\lim\limits_{n\to+\infty} n^{\alpha}v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} n^2 \dfrac{1}{n(n+1)} = 1 \Longrightarrow$on a $\alpha = 2 > 1$ et $l = 1 \neq \infty \Longrightarrow$ la série $\sum\limits_{n\geq 1} v_n$ converge$\Longrightarrow$ la série $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{\cos nx}{n(n+1)}$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}$ **(0.75)**

a/ cette série converge uniformement sur $\mathbb{R}$ puisque la convergence normale$\Longrightarrow$ la convergence uniforme. **(0.50)**

cette série converge absolument sur $\mathbb{R}$ puisque la convergence normale$\Longrightarrow$ la convergence absolue. **(0.50)**

cette série converge simplement sur $\mathbb{R}$ puisque la convergence normale$\Longrightarrow$ la convergence simple. **(0.50)**

ou bien

Convergence normale $\Longrightarrow$ **Convergence uniforme**

$\Downarrow$ $\Downarrow$

Convergence absolue $\Longrightarrow$ **Convergence simple**

b/ on a $u_n(x) = \dfrac{\cos nx}{n(n+1)} \Longrightarrow u_n(0) = \dfrac{\cos 0}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{\alpha}{n} + \dfrac{\beta}{n+1} = \dfrac{\alpha(n+1)+\beta n}{n(n+1)}$

$= \dfrac{(\alpha+\beta)n+\alpha}{n(n+1)} \Longrightarrow \begin{cases} \alpha+\beta = 0 \\ \alpha = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \beta = -1 \\ \alpha = 1 \end{cases} \Longrightarrow u_n(0) = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$

$S_n(0) = u_1 + u_2 + ... + u_n = \left(1 - \dfrac{1}{2}\right) + \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3}\right) + ... + \left(\dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n}\right) + \left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}\right) = 1 - \dfrac{1}{n+1}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} S_n(0) = \lim\limits_{n\to+\infty} 1 - \dfrac{1}{n+1} = 1 \Longrightarrow S(0) = 1$ **(1)**

$2^{\grave{e}me}$ Méthode

Exercice 1 1/ $(\Delta): y=-x+1 \Longrightarrow x=-y+1$

$$I=\int_0^1 \underbrace{\int_0^{-y+1}(x+y)\,e^{-(x+y)}dxdy}_{(*)}$$

$(*)=\int_0^{-y+1}(x+y)\,e^{-(x+y)}dx=\int_0^{-y+1}xe^{-x-y}dx+\int_0^{-y+1}ye^{-x-y}dx$

$=\int_0^{-y+1}xe^{-x}e^{-y}dx+\int_0^{-y+1}ye^{-x}e^{-y}dx=e^{-y}\int_0^{-y+1}xe^{-x}dx+ye^{-y}\int_0^{-y+1}e^{-x}dy$

on fait intégration par parties pour la première $\begin{pmatrix} u=x & u'=1 \\ v'=e^{-x} & v=-e^{-x}\end{pmatrix}$

$(*)=e^{-y}\left[\left[-xe^{-x}\right]_0^{-y+1}+\int_0^{-y+1}e^{-x}dx\right]+ye^{-y}\left[-e^{-x}\right]_0^{-y+1}$

$=e^{-y}\left[-xe^{-x}-e^{-x}\right]_0^{-y+1}+ye^{-y}\left[-e^{-x}\right]_0^{-y+1}$

$=e^{-y}\left[(y-1)\,e^{y-1}-e^{y-1}+1\right]-ye^{-y}\left[e^{y-1}-1\right]$

$=ye^{-1}-e^{-1}-e^{-1}+e^{-y}+ye^{-1}+ye^{-y}$

$=\boxed{ye^{-y}+e^{-y}-2e^{-1}}$

$I=\int_0^1\left(ye^{-y}+e^{-y}-2e^{-1}\right)dy=\int_0^1 ye^{-y}dy+\int_0^1 e^{-y}dy-\int_0^1 2e^{-1}dy$

on fait intégration par parties pour la première $\begin{pmatrix} u=y & u'=1 \\ v'=e^{-y} & v=-e^{-y}\end{pmatrix}$

$I=\left[-ye^{-y}\right]_0^1+\int_0^1 e^{-y}dy+\left[-e^{-y}-2e^{-1}y\right]_0^1=\left[-ye^{-y}-e^{-y}-e^{-y}-2e^{-1}y\right]_0^1$

$$\boxed{I=2-5e^{-1}=0.160\,6027941\simeq 0.16}$$

Exercice 2 1/ $x^3y'+4\left(1-x^2\right)y=0 \Longrightarrow y'+4\dfrac{(1-x^2)}{x^3}y=0...(1)$ c'est une équation linéaire

on pose $y=uv...(2)$ **(0.25)** $\Longrightarrow \dfrac{dy}{dx}=u\dfrac{dv}{dx}+v\dfrac{du}{dx}...(3)$ **(0.25)**

on remplace 2 et 3 dans 1, on obtient :

$u\dfrac{dv}{dx}+v\dfrac{du}{dx}+4\dfrac{4(1-x^2)}{x^3}uv=0 \Longrightarrow u\left[\dfrac{dv}{dx}+4\dfrac{(1-x^2)}{x^3}v\right]+v\dfrac{du}{dx}=0$ **(0.50)**

$\dfrac{dv}{dx}+4\dfrac{(1-x^2)}{x^3}v=0 \Longrightarrow \dfrac{dv}{dx}=-4\dfrac{(1-x^2)}{x^3}v \Longrightarrow \dfrac{dv}{dx}=-4\left[\dfrac{1}{x^3}-\dfrac{1}{x}\right]dx$

$\Longrightarrow \ln|v|=-4\left[\dfrac{-1}{2x^2}-\ln|x|\right]=\dfrac{2}{x^2}+\ln|x|=\ln e^{\frac{2}{x^2}}+\ln x^4=\ln e^{\frac{2}{x^2}}x^4$

$\boxed{v=x^4e^{\frac{2}{x^2}}}$ **(1)**

$v\dfrac{du}{dx}=0 \Longrightarrow \dfrac{du}{dx}=0 \Longrightarrow \boxed{u=c}$ **(0.50)**

$\Longrightarrow \boxed{y=cx^4e^{\frac{2}{x^2}}}$ **(0.50)**