Les suites numérique

⇒ Les suite Majorée / Minorée / bornées:

$\exists M \in \mathbb{R}$

Si $U_n \leqslant M$: Majorée

Si $U_n \geqslant M$: Minorée

Si $m \leqslant U_n \leqslant M$: bornée

⇒ Suite Monotones

croissante

$U_n - U_{n+1} \leqslant 0$

décroissante

$U_n - U_{n+1} \geqslant 0$

⇒ cas particulier de $U_n > 0$ (suite Terme positif)

On peut compare $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ à 1

Si $\frac{U_{n+1}}{U_n} \geqslant 1$

donc $U_{n+1} \geqslant U_n$

(U_n croissante)

$\frac{U_{n+1}}{U_n} \leqslant 1$

$U_{n+1} \leqslant U_n$

(U_n décroissante)

La convergent des suites numérique:

$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$

$\forall n \geqslant N \Rightarrow |U_n - \ell| < \varepsilon$

$\left\{ \begin{array}{l} \text{Suite } (U_n) \text{ est croissante et Majorée} \\ \text{Suite } (U_n) \text{ est décroissante et Minorée} \end{array} \right.$ → convergent

Théorème de gendarme:

$\forall n \in \mathbb{N} \quad (W_n)_n \leq (U_n)_n \; , (V_n)_n$

$$\lim_{n \to +\infty} W_n = \lim_{n \to +\infty} U_n = \lim_{n \to +\infty} V_n = \ell$$

Les suites Adjacentes:

On a (U_n) et (V_n) deux suites adjacente

Si : l'une croissante, et l'autre décroissante

$(U_n)\nearrow$ et $(V_n)\searrow$

et $\lim_{n \to +\infty} (U_n - V_n) = 0$

Suites Récurentes :

$\Rightarrow \begin{cases} U_0 \in D \\ U_{n+1} = f(U_n) \ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

Ex : $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \sqrt{1+U_n} \end{cases}$

(U_n) est suit récurence définie par f.

$f = [-1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ Si $U_0 < U_1$: U_n Croissante

$\Rightarrow$ Si $U_0 \geqslant U_1$: U_n décroissante

Suite de Réferences

Suites Arithmétique

$\Rightarrow$ terme générale :

$$U_n = U_0 + r n$$

$\Rightarrow$ la somme :

$$U_0 + U_1 \cdots + U_n = \frac{U_0 + U_n}{2}(n+1)$$

Suite géométrique

$\Rightarrow$ terme générale.

$$V_n = V_0 q^n$$

$\Rightarrow$ la somme :

$$S_n = V_0 \cdot \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Suite de cauchy :

$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, tel que

$\forall m, n > N \cdot |U_{m} - U_n| < \varepsilon$

$(U_n)_n$ convergent $\Leftrightarrow$ $(U_n)_n$ de cauchy

Les fonctions Numérique

Fonctions paires et fonction Impaires:

$\Rightarrow$ Paire : $f(-x) = f(x)$

$\Rightarrow$ Impaire : $f(-x) = -f(x)$

fonction périodiques:

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\exists \alpha > 0$ telque : $f(x+\alpha) = f(x)$

Ex $f(x) = \cos(x)$

- $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$
- $\cos(x + 2k\pi) = \cos(x)$

$\Rightarrow$ $x \mapsto \cos(x)$ périodique de période $T = 2\pi$

$\Rightarrow$ $\sin(x)$ est un fonction périodique de période $T = 2\pi$

$\Rightarrow$ $f(x) = \tan(x)$ périodique de période $T = \pi$

- $\tan(x+\pi) = \dfrac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \dfrac{-\sin(x)}{-\cos(x)} = \tan(x)$

fonction Monotones

Soit $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, une fonction et on dit f est strictement croissante sur D :

$\forall x, y \in D, x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$

$x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$

fonctions Bornées

$f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On dit que f est bornée sur D s'il existe $M > 0$ tel que :

$|f(x)| \leq M \quad \forall x \in D$

Limites d'une fonction

On dit que f admet $\ell \in \mathbb{R}$ comme limite lorsque x tend vers x_0 et on not $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$

si On a :

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D$

$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(\ell)| < \varepsilon$

* propriété :

pour que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$, il faut et il suffit que $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ existant et son égales à ℓ

Limites infinies :

soit f une fonction définit sur D on dit que f tend vers lorsque x tende vers x_0 :

$\forall A > 0, \exists \delta > 0$ tq $\forall x \in D$

$|x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > A$

Les fonctions continues

soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$

On dit que f est continue en x_0 si

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

⚠ f est continue en x_0, si et seulement si f est continue à droite et à gauche ;

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} = f(x_0)$$

fonctions dérivables

$f : I \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$, on dit que f est dérivable en x_0 :

si il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l$$

On note $l = f'(x_0)$ le dérivé de f en x_0

⚠ f est dérivable au point x_0 si et seulement si elle est dérivable à droite et à gauche de x_0

Remarques

=> Si f est dérivable au point x_0, elle est continue en x_0

Mais la réciproque n'est pas vraie

Propositions

soient $\left.\begin{array}{l} f : I \to J \\ g : J \to \mathbb{R} \end{array}\right\}$ deux fonctions

Si f est dérivable au point $x_0 \in I$

et g est dérivable au point $y_0 = f(x_0) \in J$

Alors $g \circ f$ est dérivable au point x_0, on a

$$(g \circ f)'(x_0) = f'(x_0) \times g'(f(x_0))$$

Propriété :

soit $f : I \mapsto J$ une fonction bijective et

$x_0 \in I$ et $f'(x_0) = 0$

donc f^{-1} est dérivable en $y_0 = f(x)$

de plus

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

"T.A.F" Théorème d'accroissement fini

soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$

f est continue et dérivable sur $[a,b]$

Alors il existe $c \in \mathbb{R}\ ]a,b[$

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$$

Règle de l'Hôpital

soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonction dérivable et $x_0 \in I$. Alors on a :

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

formules de Taylor Dévlepement Limités

formule de Taylor-young :

$$f(x) = f(x_0) + \frac{x - x_0}{1!} f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} f''(x_0)$$

$$+ \cdots + \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + (x - x_0)^n \varepsilon(x)$$

⇒ Dévéleppement limite usuels au voisinage 0

- $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x)^n$
- $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + o(x^n)$
- $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$
- $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \cdots + (-1)^{n-1} \times \frac{1 \times 3 \times 5 \times \cdots (2n-3)}{2^n n!} + o(x^n)$
- $\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3}{8} x^2 + \cdots (-1)^n \times \frac{1 \times 3 \times 5 \cdots (2n-1)}{2^n n!}$
- $\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{n} + o(x^n)$
- $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} \cdots$
  $\cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^n)$
- $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots (-1)^n \times \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^n)$

Opération sur les dévelopement Limitée

$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots a_n x^n + x^n \varepsilon(x)$

$g(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots b_n x^n + x^n \varepsilon(x)$

↳ L'addition : $f + g$:

$(f+g)x = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + \cdots (a_n + b_n)x^n + x^n \varepsilon(x)$

↳ Le produit :

$f \cdot g = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + b_1 a_0)x + \cdots (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots a_n b_0) x^n + o(x^n)$

↳ le Quotient : $b \neq 0$, $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)}$ existe

La division au euclidien de f par g suivant la puissance croissante

↳ La composition $f\circ g$:

$$f\circ g(x) = f(g(x))$$

$$= a_0 + a_1 g(x) + a_2 (g(x))^2 + \dots a_n (g(x))^n + x^n \varepsilon(x)$$

fonctions circulaire Réciproques

Fonction Arcsin :

$$\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$$

⇒ La fonction sin est continue de strictement croissante sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ est Alors d'après la théorème de la fonction réciproque, il admet une fonction réciproque qui bijection de $[-1, 1]$ sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

On appel fonction Arcsin.

$\mathrm{Arcsin}(-x) = -\mathrm{Arcsin}(x)$ impair $[-1, 1]$

Arcsin est dérivable sur $]-1, 1[$

$$(\mathrm{Arcsin}(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \forall x \in]-1, 1[$$

Ex :

$\mathrm{Arcsin}(-1) = -\frac{\pi}{2}$ $\quad \mathrm{Arcsin}(0) = 0$ $\quad \mathrm{Arcsin}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$

$\mathrm{Arcsin}(1) = \frac{\pi}{2}$ $\quad \mathrm{Arcsin}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$

fonction Arccos :

la f cos est continue et strictement décroissante sur $[0, \pi]$

donc il admet une réciproque de $[-1, 1]$ dans $[0, \pi]$

On appelle la fonction Arccos.

$$\begin{cases} y = \mathrm{Arccos}(x) \\ x \in [-1, 1] \end{cases} \iff \begin{cases} x = \cos(y) \\ y \in [0, \pi] \end{cases}$$

Ex : $\mathrm{Arccos}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$, $\mathrm{Arccos}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$

Arccos est dérivable sur $]-1, 1[$

$$(\mathrm{Arccos}(x))' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

fonction Arctang

la fonction tangent est continue et strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, Donc il est bijective de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ sur $]-\infty, +\infty[$

$\lim_{x \to -\infty} \mathrm{Arctg}(x) = -\frac{\pi}{2}$; $\lim_{x \to +\infty} \mathrm{Arctan}(x) = \frac{\pi}{2}$

$\mathrm{Arctang}(0) = 0$; $\mathrm{Arctang}(1) = \frac{\pi}{4}$

→ Arctg : impair

Arctg est dérivable sur $]-\infty, +\infty[$

$$(\mathrm{Arctg}(x))' = \frac{1}{1+x^2}$$

Les fonctions Hyperbolique

→ cosinus hyperbolique ch

$$ch(x) = \frac{e^{x}+e^{-x}}{2}$$

→ Sinus hyperbolique : sh

$$sh(x) = \frac{e^{x}-e^{-x}}{2}$$

→ tangente hyperbolique : th

$$th(x) = \frac{sh(x)}{ch(x)} = \frac{\frac{e^{x}-e^{x}}{2}}{\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}}$$

$$th = \frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}$$

- $ch(x) + sh(x) = e^{x}$
- $ch'(x) = sh(x)$
- $sh'(x) = ch(x)$
- $ch^{2}(x) - sh^{2} = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Les Branches infinies

* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$

"(Cf) admet un asymptote verticale d'équation $x = a$"

* $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = b$

"(Cf) admet une asymptote horizontale d'équation $y = b$ au voisinage de $\pm\infty$

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$

(Cf) admet une branche parabolique à direction de l'axe des abscisses

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$

(Cf) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a \neq 0$

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) - ax = \pm\infty$

(Cf) admet une branche parabolique à la direction de l'axe $y = ax$

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) - ax = b$

(Cf) admet une asymptote oblique d'équation $y = ax + b$