Centre Universitaire Ahmed ZABANA Relizane

Maths 3 -2017/2018

2 année LMD-Sciences et Techniques

Fiche TD 1

Exercice 1: Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction définie par

$$f(x) = 2x + 1 \text{ sur } [a, b]$$

Montrer que la fonction f est intégrable en sens de Riemann.

Exercice 2

Soit la fonction f définie pour tout $x \in [0, 1]$ par:

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Vérifier que la fonction f est non intégrable en sens de Riemann.

Exercice 3: Calculer les intégrales suivantes

$$\begin{aligned} I_1(x) &= \int \frac{x}{(x^2+1)^6} dx, \; I_2(x) = \int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx, \\ I_3(x) &= \int \frac{\cos x}{\sin x + 1} dx. \end{aligned}$$

Exercice 4:

1) Calculer l'intégrale suivante

$$I_1(x) = \int x \operatorname{arctg}(x)\, dx,$$

sachant que $\operatorname{arctg}'(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$.

2) Montrer que, pour tous les entiers strictement positifs, on a l'égalité suivante:

$$\int_0^1 \frac{x^n}{(x^n+1)}dx = \frac{\ln 2}{n} - \frac{1}{n}\int_0^1 \ln(x^n+1)\,dx.$$

Exercice 5: Calculer les intégrales suivantes

$$1)\int_0^1 \frac{x^2-1}{x^2+1}dx\ ,\ \ 2)\int_0^1 \frac{2x+5}{x^3-x}dx.$$

Correction Fiche TD 1

Exercice 1:

1) On a $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ et $f(x)=2x+1$ sur $[a,b]$

On choisit $\triangle = \left\{x_i = a + \dfrac{i(b-a)}{n}, i=0,...,n\right\}$ une subdivision de l'intervalle $[a,b]$

et $I_i = [x_i, x_{i+1}[\,,\,, i=0,...,n.$

Calculons maintenant les deux sommes de Darboux

$S(\triangle,f) = \sum\limits_{i=0}^{n-1} M_i(x_{i+1}-x_i)$ tel que $M_i = \sup\limits_{x\in I_i} f(x) = 2\left(a + \dfrac{(i+1)(b-a)}{n}\right)+1$

$s(\triangle,f) = \sum\limits_{i=0}^{n-1} m_i(x_{i+1}-x_i)$ tel que $m_i = \inf\limits_{x\in I_i} f(x) = 2\left(a + \dfrac{i(b-a)}{n}\right)+1$

on remarque que $x_{i+1}-x_i = \dfrac{(b-a)}{n}$

Donc

$$\begin{aligned} S(\triangle,f) &= \sum_{i=0}^{n-1}\left[\left(2\left(a+\frac{(i+1)(b-a)}{n}\right)+1\right)\frac{(b-a)}{n}\right] \\ &= \frac{(b-a)}{n}\left[2a\sum_{i=0}^{n-1}1 + 2\frac{(b-a)}{n}\sum_{i=0}^{n-1}(i+1) + \sum_{i=0}^{n-1}1\right] \\ &= \frac{(b-a)}{n}\left[2a.n + 2\frac{(b-a)}{n}\frac{n(n+1)}{2} + n\right] \end{aligned}$$

$$=2a\left(b-a\right)+\left(b-a\right)^{2}\frac{n\left(n+1\right)}{n^{2}}+\left(b-a\right)$$

alors

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}S\left(\triangle,f\right) &= 2a\left(b-a\right)+\left(b-a\right)^{2}+\left(b-a\right)\\ &= b^{2}-a^{2}++\left(b-a\right)\end{aligned}$$

Et on a aussi

$$\begin{aligned}s\left(\triangle,f\right) &= \sum_{i=0}^{n-1}\left[\left(2\left(a+\frac{i\left(b-a\right)}{n}\right)+1\right)\frac{\left(b-a\right)}{n}\right]\\ &= \frac{\left(b-a\right)}{n}\left[2a\sum_{i=0}^{n-1}1+2\frac{\left(b-a\right)}{n}\sum_{i=0}^{n-1}i+\sum_{i=0}^{n-1}1\right]\\ &= \frac{\left(b-a\right)}{n}\left[2a.n+2\frac{\left(b-a\right)}{n}\frac{n\left(n-1\right)}{2}+n\right]\\ &= 2a\left(b-a\right)+\left(b-a\right)^{2}\frac{n\left(n-1\right)}{n^{2}}+\left(b-a\right)\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}s\left(\triangle,f\right) &= 2a\left(b-a\right)+\left(b-a\right)^{2}+\left(b-a\right)\\ &= b^{2}-a^{2}++\left(b-a\right)\end{aligned}$$

finalement $\lim_{n\to+\infty}S\left(\triangle,f\right)=\lim_{n\to+\infty}s\left(\triangle,f\right)$
c'est a dire intégrable en sens de Riemann.

Exercice 2

Soit la fonction f définie pour tout $x\in[0,1]$ par :

$$f\left(x\right)=\begin{cases}1 \text{ si } x\in\mathbb{Q}\\ 0 \text{ sinon}\end{cases}$$

Vérifions que la f non intégrable en sens de Riemann

On choisit $\triangle=\left\{x_{i}=\frac{i}{n},i=0,...,n\right\}$ une subdivision de l'intervalle $[0,1]$
et $I_{i}=\left[x_{i},x_{i+1}\right[,,i=0,...,n$.

Calculons maintenant les deux sommes de Darboux

$S(\triangle, f) = \sum_{i=0}^{n-1} M_i (x_{i+1} - x_i)$ tel que $M_i = \sup_{x \in I_i} f(x) = 1$

$s(\triangle, f) = \sum_{i=0}^{n-1} m_i (x_{i+1} - x_i)$ tel que $m_i = \inf_{x \in I_i} f(x) = 0$

donc

$S(\triangle, f) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n} = 1$

$s(\triangle, f) = \sum_{i=0}^{n-1} 0 = 0$

C'est a dire f est non intégrable en sens de Riemann

Exercice 3: Calculer les intégrales suivantes

1) Calculons $I_1(x) = \int \frac{x}{(x^2+1)^6} dx$

$I_1(x) = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{(x^2+1)^6} dx$

on choisit $u(x) = x^2 + 1$ alors $u'(x) = 2x$

donc $I_1(x) = \frac{1}{2} \int \frac{u'(x)}{(u(x))^6} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{u^6} du = \frac{1}{-10} u^{-5} + c, c \in \mathbb{R}$

finalement $I_1(x) = \frac{1}{-10} (x^2+1)^{-5} + c, c \in \mathbb{R}$

2) On calcule $I_2(x) = \int \frac{x^2}{\sqrt{x^3+1}} dx,$

$I_2(x) = \int \frac{x^2}{\sqrt{x^3+1}} dx = \frac{1}{3} \int \frac{3x^2}{\sqrt{x^3+1}} dx$

on choisit $u(x) = x^3 + 1$ alors $u'(x) = 3x^2$

donc $I_2(x) = \frac{1}{3} \int \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}} dx = \frac{1}{3} \int \frac{1}{\sqrt{u}} du = \frac{2}{3} u^{\frac{1}{2}} + c, c \in \mathbb{R}$

$I_2(x) = \frac{2}{3} \sqrt{x^3+1} + c, c \in \mathbb{R}$

nous utilisons meme methode pour trouver:

$I_3(x) = \int \frac{\cos x}{\sin x + 1} dx = \ln |\sin x + 1| + c, c \in \mathbb{R}$

Exercice 4:

1) On calcule

$$I(x) = \int x \operatorname{arctg}(x) dx,$$

sachant que $\operatorname{arctg}'(x) = \frac{1}{x^2+1}$

on utilise l'intégrale par partie

$u(x) = \text{arctg}(x), v'(x) = x \Longrightarrow u'(x) = \dfrac{1}{x^2+1}, v(x) = \frac{x^2}{2}$

donc

$I(x) = \frac{x^2}{2}\text{arctg}(x) - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{x^2+1}\ dx$

et $\int \frac{x^2}{x^2+1}\ dx = \int 1 + \frac{1}{x^2+1}\ dx = x + \text{arctg}(x)$

.....

2) Montrons que, pour tous les entiers strictement positifs, on a l'égalité suivante:

$$\int_0^1 \frac{x^n}{(x^n+1)}dx = \frac{\ln 2}{n} - \frac{1}{n}\int_0^1 \ln(x^n+1)\,dx.$$

on utilise l'intégrale par partie

$\displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{(x^n+1)}dx = \int_0^1 \frac{1}{n}x\frac{nx^{n-1}}{(x^n+1)}dx$

$u(x) = \frac{1}{n}x, v'(x) = \dfrac{nx^{n-1}}{(x^n+1)} \Longrightarrow u'(x) = \frac{1}{n}, v(x) = \ln(x^n+1)$

....

Exercice 5: On calcule les intégrales suivantes

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2-1}{x^2+1}dx &= \int \frac{x^2+1-2}{x^2+1}dx \\ &= \int 1 + \frac{-2}{x^2+1}dx \\ &= x - 2\text{arctg}(x) + c, c \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{2x+5}{x^3-x}dx &= \int \frac{2x+5}{x(x-1)(x+1)}dx. \\ &= \int \frac{-5}{x} + \frac{3,5}{x-1} + \frac{1,5}{x+1}dx. \\ &= -5\ln|x| + 3,5\ln|x-1| + 1,5\ln|x+1|.\end{aligned}$$

Centre Universitaire Ahmed ZABANA Relizane

Maths 3 -2017/2018

2 année LMD-Sciences et Techniques

Fiche TD 2

Exercice 1: Calculer les intégrales suivantes

$$I = \iint_D \frac{x}{y} dxdy, \text{où } D = [1,3] \times [1,5]$$

$$I = \iint_D (x+2y)\, dxdy, \text{où } D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$$

$$I = \iint_D \left(x^2+y^2\right) dxdy, \text{où } D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2+y^2 \leq 25\}$$

Exercice 2: Calculer les intégrales suivantes

$$I = \iint_D (yxz)\, dxdydz, où D = [1,3]^3$$

$$I = \iint_D (x+y+2z)\, dxdydz, \text{où } D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; (x,y) \in [5,7]^2, y \leq z \leq x\}$$

$$I = \iint_D 5dxdydz, \text{où } D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x^2+y^2+z^2 \leq 4\}$$

Exercice 3: Calculer l'aire délimitée par

$$x^2+y^2 \leq 25, x \geq 0, y \geq 0.$$

Exercice 4: Calculer le volume du

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x^2+y^2+z^2 \leq 4\}.$$

Correction Fiche TD 2

Exercice 1:

1)$I = \left[\int\limits_1^3 x dx\right] \times \left[\int\limits_1^5 \frac{1}{y} dy\right] = 4\ln 5.$

2)$I = \int\limits_0^1 \left[\int\limits_0^x (x+2y)\, dy\right] dx = \int\limits_0^1 2x^2 dx = \frac{2}{3}$

3) $I = \iint_D (x^2+y^2)\, dxdy$,où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ; x^2+y^2 \leq 25\}$

$\varphi : (r,\theta) \to (x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$

La matrice jacobien de φ est $J(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$

et $\left|\frac{D(x,y)}{D(r,\theta)}\right| = r$

$\triangle = \{(r,\theta)\, / 0 \leq r \leq 5 \text{ et } 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$

$\varphi(\triangle) = D$, on obtient:

$I = \iint_D (x^2+y^2)\, dxdy = I = \iint_\triangle r^2 r dr d\theta = \left[\int\limits_0^5 r^3 dr\right] \times \left[\int\limits_0^{2\pi} d\theta\right] =$

Exercice 2

1) $I = \iint_D (yxz)\, dxdydz$,où $D = [1,3]^3$

$I = \left[\int\limits_1^3 x dx\right] \times \left[\int\limits_1^3 y dy\right] \times \left[\int\limits_1^3 z dz\right] = 64$

2) $I = \iint_D (x+y+2z)\, dxdydz$,où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ; (x,y) \in [5,7]^2, y \leq z \leq x\}$

$$I = \iint_D (x+y+2z)\, dxdydz = \iint_{[5,7]^2} \left[\int\limits_y^x (x+y+2z)\, dz\right] dxdy$$
$$= \iint_{[5,7]^2} 2(x^2-y^2)\, dxdy$$
$$= 2\int\limits_5^7 \left[\int\limits_5^7 (x^2-y^2)\, dx\right] dy$$
$$=$$

3) $I = \iint_D 5 dxdydz$,où $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 ; x^2+y^2+z^2 \leq 4\}$

$\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, (r,\theta,\beta) \to (x,y,z) = (r\cos\theta\cos\beta, r\sin\theta\cos\beta, r\sin\beta)$

La matrice jacoblien de φ est $j(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\beta & \text{-}r\sin\theta\cos\beta & \text{-}r\cos\theta\sin\beta \\ \sin\theta\cos\beta & r\cos\theta\cos\beta & \text{-}r\sin\theta\sin\beta \\ \sin\beta & 0 & r\cos\beta \end{pmatrix}$

$\det(j(\varphi)) = r^2\cos\beta$

$\triangle = \left\{(r,\theta,z)/0 \leq r \leq 2 \text{ et } 0 \leq \theta \leq 2\pi, \frac{-\pi}{2} \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}\right\}.$

$$\begin{aligned}
\iiint_D f(x,y,z)dxdydz &= \iiint_\triangle r^2 \left|\cos\beta\right| drd\theta d\beta \\
&= \left[\int_0^5 r^2 dr\right] \times \left[\int_0^{2\pi} d\theta\right] \times \left[\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\beta d\beta\right] \\
&= \frac{4}{3}\pi 2^3
\end{aligned}$$

Exercice 3: Calculons l'aire délimitée par

$$x^2 + y^2 \leq 25, x \geq 0, y \geq 0$$

$\iiint_D dxdydz, D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3/x^2 + y^2 \leq 25, x \geq 0, y \geq 0\}$

$\triangle = \left\{(r,\theta,z)/0 \leq r \leq 5 \text{ et } 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right\}$

$\iiint_D dxdydz = \iiint_\triangle rdrd\theta dz = \left[\int_0^5 rdr\right] \times \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\right] = \frac{25}{4}\pi$

Exercice 4: Calculons le volume du

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$$

$\triangle = \left\{(r,\theta,\beta)/0 \leq r \leq 2 \text{ et } 0 \leq \theta \leq 2\pi, \frac{-\pi}{2} \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}\right\}$

$$
\begin{aligned}
\iiint_D f(x,y,z)\,dxdydz &= \iiint_{\triangle} r^2 \left|\cos\beta\right| drd\theta d\beta \\
&= \left[\int_0^2 r^2 dr\right] \times \left[\int_0^{2\pi} d\theta\right] \times \left[\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\beta d\beta\right] \\
&= \frac{4}{3}\pi 2^3
\end{aligned}
$$

Centre Universitaire Ahmed ZABANA Relizane

Maths 3 -2017/2018

2 année LMD-Sciences et Techniques

Fiche TD 3

Exercice 1: Déterminer la nature des intégrales impropres suivantes

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx, I_2 = \int_0^1 \frac{1}{e^x - 1}dx, \\ I_3 &= \int_0^1 \frac{(x^2-1)^2}{(x-1)^2}dx, I_4 = \int_0^3 \frac{\sin x}{x^{\frac{2}{3}}}dx \end{aligned}$$

Exercice 2:

1)Déterminer la nature des intégrales impropres suivantes

$$I_1 = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx,\ \ I_2 = \int_2^{+\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^3}dx;\ \ I_3 = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^3}dx, I_4 = \int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x}dx$$

2) Montrer que l'intégrale suivante $I_1 = \int_1^{+\infty} \frac{\sin x + 2\cos x}{x^2}dx$

est absolument convergente.

Exercice 3: Résoudre les équations différentielles suivantes

$$xy' = y + 1;\ \ yy' = -2;\ \ xy' = e^y;\ \ y' = y + x^2y^3$$

Exercice 4: Résoudre les équations différentielles suivantes

$$y'' + 2y' + y = x^2e^x$$

Correction

Exercice 1: Déterminons la nature des intégrales impropres suivantes

1) $I_1 = \int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ la fonction $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ n'est pas définie en 0

$F(t) = \int\limits_t^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \int\limits_t^1 x^{-\frac{1}{2}} dx = \left[\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}\right]_t^1 = [2\sqrt{x}]_t^1 = 2\sqrt{1} - 2\sqrt{t}$

$\lim\limits_{t\to 0} F(t) = 2$

donc l'intégrale I_1 est convergente.

2) $I_2 = \int\limits_0^1 \frac{1}{e^x - 1} dx$

la fonction $f(x) = \frac{1}{e^x - 1}$ n'est pas définie en 0

$F(t) = \int\limits_t^1 \frac{1}{e^x - 1} dx$

$y = e^x \Longrightarrow dy = e^x dx = y dx$

c'est à dire $dx = \frac{dy}{y}$

$\int \frac{1}{e^x - 1} dx = \int \frac{1}{y(y-1)} dy = \int \left(\frac{-1}{y} + \frac{1}{y-1}\right) dy = -\ln y + \ln(y-1) = -\ln e^x + \ln(e^x - 1)$

donc $F(t) = \int\limits_t^1 \frac{1}{e^x - 1} dx = [-\ln e^x + \ln(e^x - 1)]_t^1 = -1 + \ln(e-1) + t - \ln(e^t - 1)$

$\lim\limits_{t\to 0} F(t) = +\infty$

donc l'intégrale I_2 divergente.

$I_3 = \int\limits_0^1 \frac{(x^2-1)^2}{(x-1)^2} dx$

$F(t) = \int\limits_t^1 \frac{(x^2-1)(x^2-1)}{(x-1)^2} dx = \int\limits_t^1 (x+1)^2 dx = \left[\frac{(x+1)^3}{3}\right]_t^1 = \frac{8}{3} - \frac{(t+1)^3}{3}$

$\lim\limits_{t\to 0} F(t) = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$

donc l'intégrale I_3 est convergente.

4) $I_4 = \int\limits_0^3 \frac{\sin x}{x^{\frac{2}{3}}} dx$

on a $\int\limits_0^3 \left|\frac{\sin x}{x^{\frac{2}{3}}}\right| dx \leq \int\limits_0^3 \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} dx$

et $F(t) = \int\limits_t^3 \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} dx = \int\limits_0 x^{-\frac{2}{3}} dx = \left[\frac{x^{-\frac{2}{3}+1}}{-\frac{2}{3}+1}\right]_t^3 = 3 \times 3^{\frac{1}{3}} - 3t^{\frac{1}{3}}$

$\lim\limits_{t \to 0} F(t) = 3 \times 3^{\frac{1}{3}}$

donc l'intégrale I_4 est convergente.

Exercice 2:

1)Déterminons la nature des intégrales impropres suivantes

1) $I_1 = \int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$

$F(t) = \int\limits_1^t \frac{1}{x^2} dx = \left[\frac{-1}{x}\right]_1^t = \frac{-1}{t} - \left(\frac{-1}{1}\right) = \frac{-1}{t} + 1$

$\lim\limits_{t \to +\infty} F(t) = 1$

donc l'intégrale I_1 est convergente.

2)$I_2 = \int\limits_2^{+\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^3} dx$

on pose $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^3}$ et $g(x) = \frac{1}{x^2}$

on a $\lim\limits_{t \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$

alors $\int\limits_2^{+\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^3} dx$ et $I_1 = \int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ de la meme nature.

donc l'intégrale I_2 est convergente.

3)$I_3 = \int\limits_0^{\infty} \frac{1}{x^3} dx$

on a $I_3 = \int\limits_0^{\infty} \frac{3}{x^3} dx$

$F_1(t) = \int\limits_c^t \frac{1}{x^3} dx = \int\limits_c^t x^{-3} dx = \left[\frac{-1}{2x^2}\right]_1^t = \frac{-1}{2t^2} - \left(\frac{-1}{2}\right) = \frac{-1}{2t^2} + \frac{1}{2c^2}$

$\lim\limits_{t \to +\infty} F_1(t) = \frac{1}{2c^2}$

$F_2(t) = \int_t^c \frac{1}{x^3}dx = \int_t^c x^{-3}dx = \left[\frac{-1}{2x^2}\right]_1^t = \frac{-1}{2t^2} - \left(\frac{-1}{2}\right) = -\frac{1}{2c^2} - \frac{-1}{2t^2}$
$\lim_{t \to +\infty} F_2(t) = +\infty$
donc l'intégrale I_3 est divergente.
4) $I_4 = \int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x}dx$
$\int \frac{x}{e^x}dx = \int xe^{-x}dx$
par la méthode de l'intégrale par parties on trouve
$\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = e^{-x} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = -e^{-x} \end{cases}$

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{e^x}dx &= \int xe^{-x}dx = -xe^{-x} - \int -e^{-x}dx \\ &= -xe^{-x} - e^{-x} + c, c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

donc $F(t) = \int_0^t \frac{x}{e^x}dx = \left[-xe^{-x} - e^{-x}\right]_1^t = -te^{-t} - e^{-t} + 1$
$\lim_{t \to +\infty} F(t) = +1$
donc l'intégrale I_4 est convergente.

2) On montre que l'intégrale imprope

$$I_5 = \int_1^{+\infty} \frac{\sin x + 2\cos x}{x^2}dx$$

est absolument convergente.
$\int_1^{+\infty} \left|\frac{\sin x + 2\cos x}{x^2}\right| dx \leq \int_1^{+\infty} \frac{3}{x^2}dx$
et $\int_1^{+\infty} \frac{3}{x^2}dx = 3\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx$ est convergente
donc I_5 est convergente.

Exercice 3: Résoudre les équations différentielles suivantes

1) $xy' = y + 1 \Longrightarrow \frac{y'}{y+1} = \frac{1}{x}$

donc

$$\int \frac{y'}{y+1}dx = \int \frac{1}{x}dx$$

$\ln|y+1| = \ln|x| + c, c \in \mathbb{R}$

alors $\mathrm{e}^{\ln|y+1|} = e^{\ln|x|+c}, c \in \mathbb{R}$

$$y(x) = kx - 1, k \in \mathbb{R}$$

donc $y'(x) = k$ et

$$\begin{aligned} xk &= kx - 1 + 1 \\ xy' &= y + 1 \end{aligned}$$

2)$yy' = -2$

alors $\int yy'dx = \int -2dx$

c'est à dire $\int ydy = \int -2dx$

donc $\frac{y^2}{2} = -2x + c, c \in \mathbb{R}$

$$y^2 = -4x + c, c \in \mathbb{R}$$

3) $xy' = e^y$

On peut écrire cette équation sous la forme

$$\frac{y'}{e^y} = \frac{1}{x}$$

$$\int y'e^{-y}dx = \int \frac{1}{x}dx$$

$$\int e^{-y}dy = \int \frac{1}{x}dx$$

$$-e^{-y} = \ln|x| + c, c \in \mathbb{R}$$

$$e^{-y} = -\left(\ln|x| + c\right), c \in \mathbb{R}$$

dans le cas

$-\left(\ln|x| + c\right) \geq 0$

on a:

$$y\left(x\right) = -\ln\left(-\left(\ln|x| + c\right)\right)$$

4)$y' = y + x^2y^3$

alors$\frac{y'}{y^3} = \frac{y}{y^3} + x^2 \Longrightarrow \frac{y'}{y^3} = \frac{1}{y^2} + x^2$

on pose $z = \frac{1}{y^2} \Longrightarrow z' = -3\frac{y'}{y^3}$

donc

$$\frac{z'}{-3} = z + x^2$$

c'est à dire $z' = -3z - 3x^2 \Longleftrightarrow z' + 3z = -3x^2$

on cherche une solution particulière $z_p = ax^2 + bx + c$

$z_p' = 2ax + b$

$z' + 3z = -3x^2$

$2ax + b + 3\left(ax^2 + bx + c\right) = -3x^2$

$$3ax^2 + \left(2a + 3b\right)x + 3c + b = -3x^2$$

$\begin{cases} 3a = -3 \\ 2a + 3b = 0 \\ 3c + b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = \frac{2}{3} \\ c = \frac{-2}{9} \end{cases}$

donc la solution particulière est

$$z_p(x) = -x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{-2}{9}$$

Résoudre l'équation homogène:

$$z' + 3z = 0$$

c'est à dire

$$\frac{z'}{z} = -3$$

donc

$$\int \frac{z'}{z}dx = \int -3dx$$

$\ln z = -3x + c, c \in \mathbb{R}$ alors

$$z_h(x) = ke^{-3x}, k \in \mathbb{R}$$

la solution générale de l'équation non homogène est

$$z(x) = ke^{-3x} - x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{-2}{9}, k \in \mathbb{R}$$

Exercice 4: Résoudre les équations différentielles suivantes

$$y'' + 2y' + y = x^2e^x$$

l'équation homogéne est

$$y'' + 2y' + y = 0$$

l'équation caractéristique : $r^2 + 2r + 1 = 0$;on a $\triangle = 0$; $r = -1$ racine double donc la solution générale de l'équation homogène est donne par

$$y_h = (c_1 x + c_2)e^{-x}; c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

2) On cherche une solution particulière de l'équation non homogène, comme 1 n'est pas une solution de l'équation caractéristique, alors $y_p(x) = q(x)e^x$ tel que $degq = 2$;

$y_p(x) = (ax^2 + bx + c)e^x$ donc

$y_p'(x) = (2ax + b)e^x + (ax^2 + bx + c)e^x$

$y_p''(x) = 2ae^x + 2(2ax + b)e^x + (ax^2 + bx + c)e^x$

En remplaçant dans (E), on trouve

$2ae^x+2(2ax+b)e^x+(ax^2+bx+c)e^x-4(2ax+b)e^x-4(ax^2+bx+c)e^x+4(ax^2+bx+c)e^x = x^2e^x$

$((a-1)x^2 + (b-4a)x + c + b + 2a)e^x = 0$

$$\begin{cases} a - 1 = 0 \\ b - 4a = 0 \\ c - 2b + 2a = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 4 \\ c = 6 \end{cases}$$

donc la solution particulière $y_p(x) = (x^2 + 4x + 6)e^x$

finalement la solution générale de l'équation non homogène est

$y(x) = y_h = (c_1 x + c_2)e^{-x} + (x^2 + 4x + 6)e^x; c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

Bibliography

[1] Miloudi Yamina; *Analyse 3, Cours Détaillés et Exercices Corrigés,* (2016).

[2] Mustapha. Sadouki; *Cours mathématiques pour la Physique*.