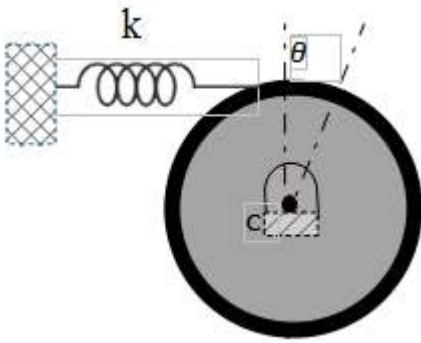


Interrogation

Partie 1 (Système libre à un degré de liberté)



Un disque de masse M et de rayon R peut tourner autour d'un axe fixe passant par son centre de masse. Il est relié à un bâti fixe par l'intermédiaire d'un ressort de

raideur k .

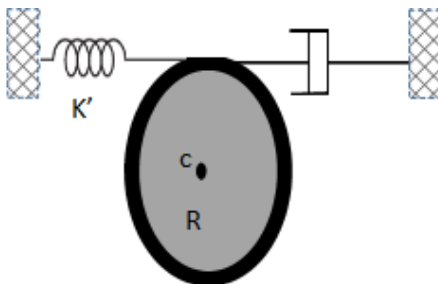
On se propose de déterminer la fréquence propre des oscillations lorsque celui-ci est écarté d'une position d'équilibre puis relâché pour osciller librement.

a)- Trouver l'expression de la fonction de Lagrange.

b)- En déduire l'équation du mouvement en fonction de la variable θ .

c)- En déduire la pulsation propre du système et donner la forme générale de la solution de l'équation

Partie 2 (Système Amorti à un degré de liberté)



Le disque précédent est maintenant relié à un nouveau ressort de raideur k' et il peut également rouler sans glisser sur un tapis. Les frottements avec le tapis sont modélisés par un amortisseur de coefficient d'amortissement α

a)- Trouver l'expression de la fonction de Lagrange.

b)- En déduire l'équation du mouvement en fonction de la variable θ .

c)- En déduire l'expression de la pulsation propre du système ω_0 et celle du facteur d'amortissement

d- Dans le cas où ($\alpha = 200 \text{ kg.s}^{-1}$, $k' = 4000 \text{ N/m}$ et $M = 10 \text{ kg}$) Quel est le régime d'oscillation ? Donner dans ce cas la forme générale de la solution

e)- Comparer la pulsation propre obtenue avec celle de obtenue dans la première partie et trouver une relation entre k' et k dans le cas où les pulsation proposes sont égales

Partie 1

a)- Calcul de la fonction de Lagrange

$$T = \frac{1}{2}J_0\dot{\theta}^2$$

$$\text{Avec } J_0 = \frac{MR^2}{2}$$

$$U = \frac{1}{2}kR^2\theta^2$$

$$L = T - U$$

L'équation du mouvement s'écrit alors $\ddot{\theta} + \frac{2k}{M}\theta = 0$

La pulsation propre du système est donc donnée par $\omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{M}}$

Dans ce cas la solution est donnée par $\theta(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi)$

Partie 2

a)- Calcul des énergies

$$T = \frac{1}{2}(J_0 + MR^2)\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}MR^2\right)\dot{\theta}^2$$

$$U = \frac{1}{2}k'(2R)^2$$

La fonction de dissipation est donnée par $D = \frac{1}{2}4\alpha R^2\dot{\theta}^2$

b,c)- L'équation du mouvement

$$\ddot{\theta} + \frac{8\alpha}{3M}\dot{\theta} + \frac{8k'}{3M}\theta = 0$$

Avec

$$\delta = \frac{4\alpha}{3M} \text{ et } \omega_0 = \sqrt{\frac{8k'}{3M}}$$

d)- Calcul du discriminant de l'équation

$$\Delta = \delta^2 - \omega_0^2$$

$$AN: \Delta < 0$$

On est donc dans le cas d'un régime pseudo-périodique

$$\theta(t) = Ae^{-\delta t}\cos(\omega_A t + \phi)$$

A et ϕ sont des constantes à déterminer en utilisant les conditions initiales

$$\omega_A = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$

e)- En posant les deux pulsation égales on obtient $k' = \frac{6}{8}k$