جامعة بجاية
Tasdawit n Bgayet
Université de Béjaïa

Université A. Mira de Béjaia
Faculté des Sciences Exactes
Département d'informatique

Informatique - LMD
Année universitaire
2023/2024

EXAMEN D'ANALYSE I (DURÉE : 1H:30)

Appareils électroniques et documents sont interdits.
Il est conseillé de lire l'intégralité du sujet avant de commencer à répondre.

Exercice 1. (5 pts) *Déterminer la borne supérieure, la borne inferieure, le maximum et le minimum s'ils existent de l'ensemble suivant :*

$$A = \left\{1 + \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right),\ n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Exercice 2. (07 pts) *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *une suite récurrente définie par*

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2} + \dfrac{3}{2u_n}, \quad n \geqslant 1. \end{cases}$$

1) *Montrer que* $\forall n \geqslant 2,\ u_n > \sqrt{3}$.
2) *Etudier la monotonie de la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
3) *En déduire que* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *converge et calculer sa limite.*
4) *Soit* $E = \{u_n,\ n \geqslant 1\}$. *Déterminer* $\sup E$ *et* $\inf E$.

Exercice 3. (4 pts) *Soient* a *et* b *deux réels. Soit* $f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \longrightarrow \mathbb{R}$, *la fonction définie par*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x\cos\frac{x}{2}}{\sin x} & si\ x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right[\bigcup \left]0, \pi\right[\bigcup \left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right], \\ a & si\ x = 0, \\ b & si\ = \pi. \end{cases}$$

Déterminer a *et* b *pour que* f *soit continue sur* $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$.

Indication ☞ : $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{x\cos\frac{x}{2}}{\sin x} = \dfrac{\pi}{2}$.

Exercice 4. (4 pts) *En utilisant le théorème des valeurs intermédiaires, Montrer que L'équation*

$$1 + \sin x = x,$$

admet une solution unique dans l'intervalle $]0, \pi[$.

Tasdawit n Bgayet
Université de Béjaïa

Université A. Mira de Béjaia
Faculté des Sciences Exactes
Département d'Informatique

Informatique LMD
Année universitaire
2023/2024

BARÈME ET CORRIGÉ DÉTAILLÉ D'ANALYSE 1

Solution 1.

On a $A \neq \emptyset$ *(car* $1 \in A$*).* $\longleftarrow \boxed{0.5\text{ pt}}$

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant 1 + \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) \leqslant 2, \longleftarrow \boxed{0.5\text{ pt}}$$

donc l'ensemble A *est borné.*

$A \neq \emptyset$. *A est borné* $\Longrightarrow$ $\sup A$ *et* $\inf A$ *existent.* $\longleftarrow \boxed{0.5\text{ pt}}$

Comme $x \longmapsto \sin\left(\frac{\pi}{3}x\right)$ *est périodique sa période* $T = 6$. *Donc l'ensemble* A *est fini.* $\longleftarrow \boxed{0.5\text{ pt}}$

$$A = \left\{1, 1 + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right), 1 + \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right), 1 + \sin(\pi), 1 + \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right), 1 + \sin\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right\} \longleftarrow \boxed{0.5\text{ pt}}$$

Comme

$$\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2},\ \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{5\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Donc

$$A = \left\{1,\ 1 + \frac{\sqrt{3}}{2},\ 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right\}. \longleftarrow \boxed{0.5\text{ pt}}$$

$\boxed{0.5\text{ pt}} \longrightarrow$

$\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ *est le plus grand élément de* A, *donc* $\max A = \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ *et* $\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ *est le plus petit élément de* A, *donc* $\min A = \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. $\longleftarrow \boxed{0.5\text{ pt}}$

$$\max A = \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Longrightarrow \sup A = \max A = \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right). \qquad \boxed{0.5\text{ pt}}$$

$$\min A = \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Longrightarrow \inf A = \min A = \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right). \qquad \boxed{0.5\text{ pt}}$$

Solution 2.

1) *On raisonne par récurrence.*

Pour $n = 2, u_2 = 2 > \sqrt{3}$, *on suppose que la propriété est vraie à l'ordre* n $\left(u_n > \sqrt{3}\right)$ *et on montre qu'elle vraie à l'ordre* $n+1$ $\left(u_{n+1} > \sqrt{3}\right)$. *On a*

$$u_{n+1} - \sqrt{3} = \frac{u_n}{2} + \frac{3}{2u_n} - \sqrt{3} = \frac{(u_n)^2 - 2\sqrt{3}u_n + 3}{2u_n} = \frac{\left(u_n - \sqrt{3}\right)^2}{2u_n} > 0 \text{ (l'hypothèse).}$$

$\longleftarrow \boxed{02\text{ pts}}$

Donc

$$\forall n \geqslant 2,\ u_n > \sqrt{3}.$$

2) *La monotonie de la suite* $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

$$u_{n+1} - u_n = -\frac{u_n}{2} + \frac{3}{2u_n} = \frac{3 - (u_n)^2}{2u_n} = \frac{\left(\sqrt{3} - u_n\right)\left(\sqrt{3} + u_n\right)}{2u_n} < 0,\ \forall n \geqslant 2. \longleftarrow \boxed{01\text{ pt}}$$

0.5 pt

D'où $((u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est décroissante* $\forall n \geqslant 2)$.

3) La suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$ *est décroissante, minorée par* $\sqrt{3}$, *donc elle converge. Posons* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$.

On a

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{3}{2u_n} \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{u_n}{2} + \frac{3}{2u_n}\right) \Longrightarrow l = \frac{l}{2} + \frac{3}{2l} \Longrightarrow l^2 = 3 \Longrightarrow l = \pm\sqrt{3}.$$

Comme $u_n > \sqrt{3}$, *donc* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \geqslant \sqrt{3}$. *D'où* $l = \sqrt{3}$. ⟵ 1.5 pts

4) $E = \{u_n,\ n \geqslant 1\}$. *Comme* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est décroissante* $\forall n \geqslant 2$ *et* $u_1 = 1$ *et* $u_2 = 2$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \sqrt{3}$ *donc*

$$\inf E = 1 \text{ et } \sup E = u_2 = 2.$$ ⟵ 02 pts

Solution 3.

1) La fonction f *est continue sur* $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right[\cup \left]0, \pi\right[\cup \left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$ *(car rapport de deux fonctions continues).* ⟵ 01 pt

2) La continuité de f *au point* $x = 0$. *On a*

$$f(0) = a \text{ et } \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x\cos\frac{x}{2}}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} \cdot \lim_{x\to 0} \cos\frac{x}{2} = 1.$$

La fonction f *est continue au point* $x = 0$ *si et seulement si* $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x\cos\frac{x}{2}}{\sin x} = a$. *Donc* $a = 1$. ⟵ 01 pt

3) La continuité de f *au point* $x = \pi$. *On a*

$$f(\pi) = b \text{ et } \lim_{x\to\pi} f(x) = \lim_{x\to\pi} \frac{x\cos\frac{x}{2}}{\sin x} = \frac{\pi}{2}.$$

La fonction f *est continue au point* $x = \pi$ *si et seulement si* $\lim\limits_{x\to\pi} \frac{x\cos\frac{x}{2}}{\sin x} = b$. *Donc* $b = \frac{\pi}{2}$. ⟵ 01 pt

Alors pour $a = 1$ *et* $b = \frac{\pi}{2}$, *la fonction* f *est continue sur* $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$. ⟵ 01 pt

Solution 4.

a) Montrons que l'équation

$$1 + \sin x = x,$$ ⟵ 0.5 pt

admet une solution unique dans l'intervalle $]0, \pi[$. *Posons*

$$f(x) = 1 + \sin x - x.$$

La fonction f *est continue sur* $[0, \pi]$ *(somme de fonctions continues).* ⟵ 0.5 pt

0.5 pt ⟶ $f(0) = 1 > 0$ *et* $f(\pi) = 1 - \pi < 0$. ⟵ 0.5 pt

D'après le théorème des valeurs intermédiaires ⟵ 0.5 pt

$$\exists c \in]0, \pi[, \text{ tel que } f(c) = 0.$$ ⟵ 0.5 pt

0.5 pt

Comme f *est strictement décroissante sur* $[0, \pi]$ *(car* $f'(x) = \cos x - 1 \leqslant 0, \forall x \in [0, \pi]$.*) D'où*

$$\exists! c \in]0, \pi[, \text{ tel que } f(c) = 0.$$ ⟵ 0.5 pt