Les suites numériques

H. Benhassine

Octobre 2021

Contents

Chapter 1

Les suites numériques

1.1 Définitions

Définition 1.1.1 *On appelle suite numérique toute application U définie de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}$:*

$$\begin{array}{rccc} U: & \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & n & \longmapsto & U(n) = u_n \end{array}.$$

On notera par u_n le terme général de la suite et par $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique en elle même.

Le terme général de la suite peut être défini d'une manière explicite ou d'une manière récurrente.

- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de terme général: $u_n = \frac{1}{3n}$, est définie de manière explicite et l'on a:

$$u_1 = \frac{1}{3}, u_2 = \frac{1}{6}, u_3 = \frac{1}{9}, \cdots$$

- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général: $u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n}$, avec $u_0 = 1$ est définie de manière récurrente et l'on a:

$$u_1 = 2, u_2 = \frac{3}{2}, u_3 = \frac{5}{2}, \cdots$$

- La suite arithmétique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de base $a = 2$ dont le premier terme est $u_0 = 3$, peut être définie:
  - d'une manière explicite avec: $u_n = 2n + 3, \forall n \geq 1$,
  - d'une manière récurrente avec: $u_{n+1} = u_n + 2, \forall n \geq 0$.

  et l'on aura: $u_1 = 5, u_2 = 7, u_3 = 9, \cdots$

- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général: $u_n = (-1)^n$, est une suite alternée et l'on a:

$$u_0 = 1, u_1 = -1, u_2 = 1, \cdots$$

Définition 1.1.2

1. Soient deux suites numériques $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On peut alors définir:
   - la somme de ces deux suites comme étant la suite de terme général: $u_n + v_n$.
   - le produit de ces deux suites comme étant la suite de terme général: $u_n v_n$.
   - le produit de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par le scalair λ comme étant la suite de terme général: λu_n.
2. On dit de deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qu'elles sont égales, si et seulement si:

$$u_n = v_n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Définition 1.1.3 *On dit d'une suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qu'elle est:*
- *minorée, si et seulement si: $\exists m \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N} : m \leq u_n$.*
- *majorée, si et seulement si: $\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N} : u_n \leq M$.*
- *bornée, si et seulement si: $\exists m, M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N} : m \leq u_n \leq M$.*

(On peut écrire aussi pour $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée: $\exists A > 0, \forall n \in \mathbb{N} : |u_n| \leq A$).

Exemple 1.1.4

- La suite de terme général: $u_n = \frac{-1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$, est une suite bornée car: $-1 \leq u_n < 0$.
- La suite alternée $u_n = (-1)^n$ l'est aussi car: $|u_n| \leq 1$.

Définition 1.1.5 *On dit d'une suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qu'elle est:*
- *croissante, si et seulement si: $\forall n \in \mathbb{N} : u_n \leq u_{n+1}$.*
- *décroissante, si et seulement si: $\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} \leq u_n$.*
- *constante, si et seulement si: $\forall n \in \mathbb{N} : u_n = u_{n+1}$.*

On dit de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que c'est une suite monotone si elle est croissante ou bien décroissante pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Remarque 1.1.6 *Pour étudier la monotonie d'une suite, soit on étudie le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$, soit si les termes de la suite sont positifs on compare le ratio $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ avec 1.*

Exemple 1.1.7

- La suite de terme général:

$$u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}, \forall n \in \mathbb{N}$$

  est strictement croissante, car: $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0 \Rightarrow u_{n+1} > u_n$.

- La suite de terme général:

$$u_n = \frac{n!}{n^n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

  est strictement décroissante car:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{(n+1)}}}{\frac{n!}{n^n}} = (n+1)\frac{n^n}{(n+1)^{(n+1)}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n < 1 \Rightarrow u_{n+1} < u_n.$$

1.2 Les suites convergentes

1.2.1 Définition de la convergence d'une suite

Définition 1.2.1 *On dit d'une suite numérique* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *qu'elle est convergente et que sa limite est le réel* l*, et l'on écrit* $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$*, si et seulement si:*

$$\forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} : n > N \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon.$$

C'est à dire qu'à partir d'un certain rang $N + 1$*, tous les termes de la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *se trouvent dans un voisinage de* l *(*$u_n \in]l - \varepsilon, l + \varepsilon[$*).*

Dans le cas contraire, on parle de suite divergente.

Approche concrète imagée: Imaginez un tireur de fléchettes sur une cible circulaire. Ses premiers lancés u_n sont incertains, mais au bout d'un cetain nombre d'essaies (N), il devient plus habile et tous ces futures lancés ($n > N$) vont être très proche du centre de la cible (la limite l): $|u_n - l| \simeq 0$.

Exemple 1.2.2

- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général: $u_n = \frac{n+1}{2n+1}$ est convergente avec: $\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{2}$. En effet:

$$\begin{aligned} \left|u_n - \tfrac{1}{2}\right| < \varepsilon \quad &\Leftrightarrow \quad \left|\tfrac{n+1}{2n+1} - \tfrac{1}{2}\right| < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow \quad \tfrac{1}{4n+2} < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow \quad \tfrac{1-2\varepsilon}{4\varepsilon} < n. \end{aligned}$$

  C'est à dire que pour tout $\varepsilon > 0$, il suffirait de choisir un entier naturel $N = E(\frac{1-2\varepsilon}{4\varepsilon}) + 1$ pour avoir:

$$\forall n \in \mathbb{N} : n > N \Rightarrow n > \frac{1-2\varepsilon}{4\varepsilon} \Leftrightarrow \left|u_n - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon.$$

  (qui n'est autre que l'écriture mathèmatique de la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$).

- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général: $u_n = (-1)^n$ est divergente car elle oscille toujours (même quand n $\to +\infty$) entre deux valeurs: ± 1.

- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général: $u_n = 3n + 1$ est divergente car $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Remarque 1.2.3

1. Il est possible d'utiliser dans la définition mathèmatique de la convergence des suites les inégalités larges:

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = l \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} : n \geq N \Rightarrow |u_n - l| \leq \varepsilon.$$

2. Quand on parle d'étudier "la nature" d'une suite, cela revient à voir si elle est convergente ou bien divergente.

1.2.2 Propriètès des suites convergentes

Nous allons aborder dans cette sous-section cinq théorèmes relatifs à la convergence des suites. Ces propriètès de convergence permetterons de juger de la convergence ou de la divergence d'une suite donnée.

Théorème 1.2.4 *(unicité de la limite)*
Si la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, alors sa limite est unique.

Démonstration. Supposons que le suite convergente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède deux limites l_1 et l_2. C'est à dire d'aprés la définition mathèmatique de la limite:

$$\forall\varepsilon > 0, \exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} : n > N_1 \Rightarrow |u_n - l_1| < \frac{\varepsilon}{2}$$

et:

$$\forall\varepsilon > 0, \exists N_2 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} : n > N_2 \Rightarrow |u_n - l_2| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

En posant: $N = Max(N_1, N_2)$ on peut écrire:

$$\forall n \in \mathbb{N} : n > N \Rightarrow |u_n - l_1| < \frac{\varepsilon}{2} \;\text{ et }\; |u_n - l_2| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

On a alors, d'aprés l'inégalité triangulaire de la valeur absolue, pour tout $n > N$:

$$\begin{aligned} |l_2 - l_1| &= |l_2 - u_n + u_n - l_1| \\ &\leq |l_2 - u_n| + |u_n - l_1| \\ &\leq |u_n - l_2| + |u_n - l_1| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

C'est à dire: $\forall\varepsilon > 0 : 0 \leq |l_2 - l_1| < \varepsilon$.
Ceci implique que: $|l_2 - l_1| = 0$
et donc: $l_2 = l_1$.(on a l'unicité de la limite). ■

Théorème 1.2.5 *Toute suite convergente est bornée.*

Démonstration. Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$, c'est à dire que:

$$\forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} : n > N \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon.$$

En fixant ε, les termes de la suite pour $n > N$, appartiennent tous à l'intervalle: $]l - \varepsilon, l + \varepsilon[$.
En définissant alors le maximum et le minumum suivants:

$$M = \max(u_0, u_1, \cdots, u_N, l + \varepsilon) \;\text{ et }\; m = \min(u_0, u_1, \cdots, u_N, l - \varepsilon),$$

il est claire que tous les termes de la suite vérifient:

$$m \leq u_n \leq M, \forall n \in \mathbb{N}.$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bel et bien bornée. ■

Remarque 1.2.6 *L'inverse de la proposition précédente n'est pas toujours vraie (prendre par exemple la suite de terme général:* $u_n = (-1)^n$*, elle est bornée mais ne converge pas).*

Théorème 1.2.7 *(convergence des suites monotones)*

Si la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est:*

- *croissante et majorée, alors elle est convergente et l'on a:* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l = \sup (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *.*
- *décroissante et minorée, alors elle est convergente et l'on a:* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l = \inf (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$*.*

Approche concrète imagée: Imaginez un enfant dans l'amphithéatre qui subitement lâche le ballon gonflable qu'il avait à la main. Le ballon va monter (c'est la suite croissante) inéxorablement jusqu'à s'arréter (convergence de la suite) lorsqu'il touchera le plafond de l'amphithéatre (la borne supérieure). Si on refesait l'expérience en plein air (c'est à dire qu'on enlève l'hypothèse que la suite soit majorée), est ce que le ballon va s'arréter de monter?.

Démonstration. Démontrons la première proposition, la preuve de la deuxième se fera de manière similaire.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante et majorée. La suite étant majorée et non vide elle admet une borne supérieure. Notons celle-ci par:

$$l = \sup (u_n)_{n\in\mathbb{N}} .$$

En utilisant la définition mathèmatique de la borne supérieure on peut écrire:

$$\begin{aligned}
&\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N} : u_n \leq l \\ \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : l - \varepsilon < u_N \end{cases} \\
\Rightarrow\ &\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N} : u_n \leq l \\ \forall \varepsilon > 0, \forall n > N : l - \varepsilon < u_n \text{ (car } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante)} \end{cases} \\
\Rightarrow\ & \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n > N : l - \varepsilon < u_n \leq l < l + \varepsilon \\
\Rightarrow\ & \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n > N : |u_n - l| < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Cette dernière écriture n'est autre que la définition mathèmatique de: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l.$ ■

Exemple 1.2.8

- La suite de terme général: $u_n = \frac{3n-1}{2n+3}, \forall n \in \mathbb{N}$ est croissante et convergente avec: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{3}{2}$ (à démontrer en utilisant la définition). Alors on peut déduire que:

$$\sup (u_n)_{n\in\mathbb{N}} = \frac{3}{2}.$$

- La suite de terme général: $u_n = \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ est décroissante avec $\inf (u_n)_{n\in\mathbb{N}} = 0$ (à démontrer en utilisant la définition). Alors on peut déduire que:

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0.$$

Théorème 1.2.9 *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites numériques convergentes telles que:*

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = l_1 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} v_n = l_2.$$

Alors:

- *la suite somme $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et sa limite est: $l_1 + l_2$.*
- *la suite produit $(u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et sa limite est: $l_1 l_2$.*
- *pour tout scalaire λ, la suite $(\lambda u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et sa limite est: λl_1.*
- *la suite quotient $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour $v_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$ est convergente et sa limite est: $\frac{l_1}{l_2}$ (si $l_2 \neq 0$).*
- *la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et sa limite est: $|l_1|$.*
- *si $u_n \leq v_n$, à partir d'un certain rang, on a: $l_1 \leq l_2$.*

Démonstration. *(voir le livre de K.Allab Ref[1] p.105-106 ou bien celui de B.Calvo Ref[2] p.29).* ■

Théorème 1.2.10 *(théorème des gendarmes)*

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites numériques convergeant vers la même limite l. Alors toute suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant pour un $N_0 \in \mathbb{N}$ donné:

$$u_n \leq w_n \leq v_n, \forall n > N_0$$

est forcément convergente avec: $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = l$.

Approche concrète imagée: Imaginez un automobiliste cerné par deux motards de la gendarmerie sur une autoroute: l'un à gauche et l'autre à sa droite. Si ces deux motards convergent vers le même point (une air de repos), alors forcément l'automobiliste ira vers ce même point.

Démonstration. On a:

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = l \quad \Leftrightarrow \quad \forall\varepsilon > 0, \exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} : n > N_1 \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon,$$
$$\lim_{n\to+\infty} v_n = l \quad \Leftrightarrow \quad \varepsilon > 0, \exists N_2 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} : n > N_2 \Rightarrow |v_n - l| < \varepsilon.$$

En posant $N = Max(N_0, N_1, N_2)$ on peut écrire:

$$\forall n \in \mathbb{N} : n > N \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon \text{ et } |v_n - l| < \varepsilon,$$
$$\forall n \in \mathbb{N} : n > N \Rightarrow l - \varepsilon < u_n \text{ et } v_n < l + \varepsilon.$$

Comme: $\forall n \in \mathbb{N} : n > N : u_n \leq w_n \leq v_n$,

On déduit que: $\forall n \in \mathbb{N} : n > N \Rightarrow l - \varepsilon < w_n < l + \varepsilon$.

C'est à dire que:

$$\forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} : n > N \Rightarrow |w_n - l| < \varepsilon.$$

Ce qui équivaut à écrire: $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = l$. ■

Exemple 1.2.11 *Soient les trois suites définies par:*

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : u_n = \frac{1}{n!}, w_n = \frac{1}{2^n}, v_n = \frac{1}{n}.$$

On démontre facilement par récurence que $\forall n \geq 4 : u_n \leq w_n \leq v_n$.

Comme: : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$, on déduit alors grace au théorème précédent que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente avec: $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0$.

1.3 Les suites adjacentes

Définition 1.3.1 *On dit de deux suites numériques $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qu'elle sont adjacentes, si et seulement si, les trois conditions suivantes sont vérifiées:*

- $\forall n \in \mathbb{N} : u_n \leq v_n$,
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est croissante et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est décroissante,*
- $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = 0$.

Approche concrète imagée: Imaginez deux gamins voisins dans un même immeuble. L'un est au dernier étage et descend ($(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est décroissante*) en courant pendant que l'autre qui est au rez de chaussé monte ($(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *croissante*) en courant. Ils finissent par se tomponner ($\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = 0$). C'est le parfait exemple de deux suites adjacentes. Continuent-ils de courir tous les deux?.Tombent-ils au même endroit?.A vous de déduitre l'énoncé du prochain théorème.

Exemple 1.3.2 *Les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par:*

$$\begin{aligned} u_n &= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}, \\ v_n &= u_n + \frac{1}{n!}, \end{aligned}$$

sont adjacentes. En effet:

- *il est claire que :* $\forall n \in \mathbb{N}^* : u_n < v_n$ *(car:* $v_n - u_n = \frac{1}{n!} > 0$).
- $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n!} = 0$.
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est strictement croissante, car:* $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0$.
- $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est décroissante, car* $\forall n \geq 1$:

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \left(u_{n+1} + \frac{1}{(n+1)!}\right) - \left(u_n + \frac{1}{n!}\right) \\ &= u_{n+1} - u_n + \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} \\ &= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} \\ &= \frac{1-n}{(n+1)!} \leq 0. \end{aligned}$$

Théorème 1.3.3 *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites adjacentes, alors forcément elles sont convergentes vers la même limite:*

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} u_n.$$

Démonstration. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites adjacentes. D'aprés la définition des suites adjacentes, on a les inégalités:

$$u_0 \leq u_1 \leq u_2 \leq \cdots \leq u_n \leq v_n \leq \cdots \leq v_2 \leq v_1 \leq v_0.$$

On en déduit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par v_0, donc convergente.

De même la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par u_0, donc elle aussi est convergente.

Enfin, comme $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n - \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, les deux suites ont forcément la même limite.

■

1.4 Critère de convergence de Cauchy

Définition 1.4.1 *Une suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite de Cauchy, si et seulement si:*

$$\forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p, q \in \mathbb{N} : p > q > N \Rightarrow |u_p - u_q| < \varepsilon.$$

Approche concrète imagée: Imaginez de nouveau le tireur de fléchettes sur une cible circulaire. Ses premiers lancés (u_n) sont incertains, mais au bout d'un cetain nombre d'essais (N), il devient plus habile et tous ces *futures lancés* ($p > q > N$) vont être *trés proches l'un de l'autre* : $|u_p - u_q| \simeq 0$. C'est à dire que tous ces lancés à partir d'un certain rang vont tomber sur un certain point de la cible (pas forcément le centre de la cible s'il est loucheur). Y a t-il convergence des lancés? Si oui, peut-on connaitre la distance du point visé du centre de la cible? Vous pouvez déja déduire l'énoncé des deux thèorème suivants.

Exemple 1.4.2 *La suite de terme général: $u_n = \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ est une suite de Cauhy.*

En effet, on a $\forall p, q \in \mathbb{N}$ tels que $p > q > N$:

$$\begin{aligned} |u_p - u_q| &= \left|\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right| \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \\ &\leq \frac{1}{N} + \frac{1}{N} = \frac{2}{N}. \end{aligned}$$

Donc pour ε donné, pour avoir $|u_p - u_q| < \varepsilon$, il suffirait que:

$$\frac{2}{N} < \varepsilon.$$

C'est à dire on choisit $N \in \mathbb{N}$ de telle sorte que: $\frac{2}{\varepsilon} < N$ (par exemple prendre $N = E(\frac{2}{\varepsilon}) + 1$).

Théorème 1.4.3 *Toute suite convergente est une suite de Cauchy.*

Démonstration. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$. D'aprés la définition on a:

$$\forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} : n > N \Rightarrow |u_n - l| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Alors: $\forall p, q \in \mathbb{N}$ tels que: $p > q > N$ on a:

$$\begin{aligned} |u_p - u_q| &= |u_p - l + l - u_q| \\ &\leq |u_p - l| + |u - l_q| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Donc:

$$\forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p, q \in \mathbb{N} : p > q > N \Rightarrow |u_p - u_q| < \varepsilon.$$

C'est à dire $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy. ■

Théorème 1.4.4 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente dans $\mathbb{R}$.*

Démonstration. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy, i.e:

$$\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbb{N},\forall p,q\in\mathbb{N}:p>q>N\Rightarrow|u_p-u_q|<\frac{\varepsilon}{2}. \qquad (\bigstar)$$

Fixons $\varepsilon=2$ alors:

$$\exists N\in\mathbb{N},\forall p,q\in\mathbb{N}:p>q>N\Rightarrow|u_p-u_q|<1.$$

En choisissant $q=N+1$ on a:

$$\begin{aligned}\exists N\in\mathbb{N},\forall p>N+1 \quad &\Rightarrow \quad |u_p-u_{N+1}|<1\\ &\Rightarrow \quad u_p\in\left]u_{N+1}-1,u_{N+1}+1\right[.\end{aligned}$$

La dérnière écriture permet de dire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

D'aprés le théorème de Bolzano-Weiertrass, que l'on abordera à la fin de ce chapitre, on peut extraire une sous-suite $\left(u_{\rho(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (où l'application ρ est une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{N}$). Il en ressort alors:

$$\lim_{n\to+\infty}u_{\rho(n)}=l\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists N_1\in\mathbb{N},\forall n\in\mathbb{N}:n>N_1\Rightarrow\left|u_{\rho(n)}-l\right|<\frac{\varepsilon}{2}. \qquad (\bigstar\bigstar)$$

En posant $N_2=Max(N,N_1)$ et en utilisant $(\bigstar)$ et $(\bigstar\bigstar)$ on obtient:

$$\begin{aligned}&\forall\varepsilon>0,\exists N_2\in\mathbb{N},\forall n\in\mathbb{N}:\\ &\qquad n>N_2 \quad \Rightarrow \quad |u_n-l|\le\left|u_n-u_{\rho(n)}\right|+\left|u_{\rho(n)}-l\right|\\ &\qquad\qquad\quad \Rightarrow \quad |u_n-l|\le\tfrac{\varepsilon}{2}+\tfrac{\varepsilon}{2}=\varepsilon \text{ (car } \rho(n)>n>N_2>N).\end{aligned}$$

C'est à dire que: $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=l.$ ■

Remarque 1.4.5

1. Les deux théorèmes précédents donnent l'équivalence entre la convergence d'une suite et le fait qu'elle soit de Cauchy. Ce critère de Cauchy est fort utile pour démontrer la convergence d'une suite **sans connaitre au préalable la valeur de sa limite**.
2. Le critère de convergence est valable pour démontrer la convergence dans $\mathbb{R}$ (la limite $l\in\mathbb{R}$). Il n'est pas valable lorsque l'on travaille dans $\mathbb{Q}$ (considérer par exemple la suite $u_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, c'est une suite de Cauhcy dans $\mathbb{Q}$, mais elle est convergente seulement dans $\mathbb{R}$: $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=e\notin\mathbb{Q}$).
3. On dit de l'espace $\mathbb{R}$ qu'il est complet (toute suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$ converge dans cet espace). L'espace $\mathbb{Q}$ n'est pas complet.

1.5 Cas particuliers: les suites récurrentes

Définition 1.5.1 *On dit d'une suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que c'est une suite récurrente si elle est définie par la donnée de son premier terme u_0 et la relation:*

$$\forall n\in\mathbb{N}:u_{n+1}=f\left(u_n\right).$$

où f est une application donnée de $D\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

Etude de la monotonie d'une suite récurrente:

L'étude de la monotonie d'une suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reviendra alors à l'étude de la variation de la fonction f:

• Si f est croissante ($f' > 0$), alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone et:

1. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante si: $u_0 \leq u_1$.

2. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante si: $u_1 \leq u_0$.

• Si f est décroissante ($f' < 0$), alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est n'est pas monotone car le terme $u_{n+1} - u_n$ est de signe alterné et donc forcément la suite ne sera pas convergente.

• Si f est constante ($f' = 0$), alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante et donc forcément convergente.

Exemple 1.5.2 *La suite numérique de terme général:*

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}^* : u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}, \\ u_0 = 2, \end{cases}$$

est strictement décroissante car la fonction: $f(x) = \sqrt{2+x}$ *est croissante* $\forall x \in \left]-2, +\infty\right[$:

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2+x}} > 0,$$

et: $u_1 = \sqrt{2+u_0} = \sqrt{5} > u_0$.

Question: Qu'en est-il de la monotonie de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *si* $u_0 = 1$*?* $u_0 = 2$*?*

Calcul de la limite d'une suite récurrente:

Comme on le verra par la suite au chapitre suivant, pour toute fonction f continue au point x_0 on a:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Et par suite, pour toute suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente vers la limite l on aura:

$$\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f\left(\lim_{x\to+\infty} u_n\right) \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = f\left(\lim_{x\to+\infty} u_n\right) \Rightarrow l = f(l).$$

C'est à dire que pour calculer la valeur de l il suffit de résoudre l'équation:

$$l = f(l).$$

Remarque 1.5.3 *Dans le cas où l'équation:* $l = f(l)$ *posséderait plusieurs racines, le problème reviendrait à déterminer la validité d'une de ces racines.*

Exercise 1.5.4

Considérons la suite numérique de l'exemple précédent:

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}^* : u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}, \\ u_0 = 2, \end{cases}$$

1. Montrer que: $\forall n \in \mathbb{N} : u_n \geq 2$.
2. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et calculer sa limite.

Solution 1.5.5

1. La démonstration se fait par récurrence, en effet:
   - Pour $n = 0 : u_0 = 2 \geq 2$.
   - Supposons: $u_n \geq 2$ alors:

$$\begin{aligned} u_n + 2 &\geq 4 \\ &\Rightarrow \sqrt{u_n+2} \geq \sqrt{4} \\ &\Rightarrow u_{n+1} \geq 2. \end{aligned}$$

   D'où: $\forall n \in \mathbb{N} : u_n \geq 2$.

2. On a vu dans l'exmple précédent que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et d'aprés la question précédente elle est minorée par 2, on déduit d'aprés le thèorème de convergence des suites que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

   Le calcul de la limite $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n = l$ se fera en résolvant l'équation:

$$\begin{aligned} l &= f(l) \\ &\Rightarrow l = \sqrt{l+2} \\ &\Rightarrow l^2 = l + 2 \\ &\Rightarrow l^2 - l - 2 = 0 \\ &\Rightarrow (l-1)(l+2) = 0 \\ &\Rightarrow \begin{cases} l = -1 \\ l = 2 \end{cases}. \end{aligned}$$

   La racine $l = -1$ est rejetée car par définition les termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont tous positifs. Donc: $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n = 2$.

1.6 Les suites qui tendent vers $\pm\infty$

On a vu que parmis les suites divergentes il y a les suites qui convergent vers $\pm\infty$. Nous allons donner ci-aprés la définition mathèmatique de $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n = \pm\infty$.

Définition 1.6.1 *On dit d'une suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qu'elle tend vers $\pm\infty$, si et seulement si:*

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty \Leftrightarrow \forall A > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} : n \geq N \Rightarrow u_n > A.$$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty \Leftrightarrow \forall A > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} : n \geq N \Rightarrow u_n < -A.$$

Exemple 1.6.2 *La suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de terme général* $u_n = 2n^2 + 1$ *tend vers* $+\infty$. *En effet,* $\forall A > 0$ *on a:*

$$\begin{aligned} u_n > A &\Leftrightarrow n^2 + 1 > A \\ &\Leftrightarrow 2n^2 > A - 1 \\ &\Leftrightarrow \tfrac{A-1}{2} < n^2 \end{aligned}$$

C'est à dire que pour tout $A > 0$, *il suffirait de choisir un entier naturel* $N = E\left(\sqrt{\frac{A}{2}}\right) + 1$ *pour avoir:*

$$\forall n \in \mathbb{N} : n > N \Rightarrow n > \sqrt{\frac{A}{2}} \Rightarrow n^2 > \frac{A-1}{2} \Leftrightarrow u_n > A.$$

Quelques propriètès des suites tendant vers $\pm\infty$:

1. Si $\forall n \in \mathbb{N} : u_n \neq 0$ tel que: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, alors on a: $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n} = 0$.
2. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ alors $\forall \lambda \in \mathbb{R} : \lim\limits_{n\to+\infty} (\lambda u_n) = sign(\lambda)\infty$ ($sign(\lambda)$ désigne le signe du scalaire λ).

1.7 Les sous-suites extraites - Théorème de Bolzano-Weierstrass

Définition 1.7.1 *On considère la suite numérique* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et soit une application strictement croissante* $\rho : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. *Il est possible de définir alors une sous-suite* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *à partir de la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *de la façon suivante:*

$$\forall n \in \mathbb{N} : v_n = u_{\rho(n)}.$$

On appelle alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la sous-suite extraite de* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *à l'aide de l'application* ρ.

Approche concrète imagée: Imaginez une mére (*la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$) avec ses deux petites filles (*les sous-suites*) lui tenant les mains. Si les deux filles tirent chacune de son côté (par exemple l'une allant vers l'est et l'autre vers l'ouest), la mére arrivera t-elle à rejoindre la maison familliale? La réponse est non. Maintenant, si je vous dit que la mêre est arrivée à rejoindre sa maison (convergence vers une limite). Les deux filles, sont elles à la maison (les sous-suites convergent-elles elles aussi)? Vous pouvez déja déduire l'énoncé du thèorème suivant.

Exemple 1.7.2

- Soit la suite définie par: $\forall n \in \mathbb{N}^* : u_n = \frac{1}{n}$. Il est possible de définir plusieur sous-suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Par exemple:
  - Pour $\rho(n) = 2n$, on peut définir $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ dont les termes sont: $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \cdots, \frac{1}{2n}, \cdots$
  - Pour $\rho(n) = 2n + 1$, on peut définir $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ dont les termes sont: $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \cdots, \frac{1}{2n+1}, \cdots$
  - Pour $\rho(n) = 3n$, on peut définir $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ dont les termes sont: $\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{9}, \cdots, \frac{1}{3n}, \cdots$
- Pour la suite alternée: $\forall n \in \mathbb{N}^* : u_n = (-1)^n$. Il est possible de définir plusieurs sous-suites extraites de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Par exemple:
  - Pour $\rho(n) = 2n$, on peut définir $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ dont les termes sont tous égaux à 1.
  - Pour $\rho(n) = 2n + 1$, on peut définir $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ dont les termes sont tous égaux à -1.

Remarque 1.7.3 *On peut facilement, par récurrence, démontrer que l'application strictement croissante $\rho : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ vérifie la relation:*

$$\forall n \in \mathbb{N} : \rho(n) \geq n.$$

Théorème 1.7.4 *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente vers une limite l, alors toute sous-suite extraite $\left(u_{\rho(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est forcément convergente vers cette même limite.*

Démonstration. Il suffit d'utiliser la définition mathèmatique de la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et le fait que $\forall n \in \mathbb{N} : \rho(n) \geq n$. ■

Exemple 1.7.5 *La suite définie par: $\forall n \in \mathbb{N}^* : u_n = \frac{1}{n}$ est une suite convergente vers 0. Il en est de même de ses sous-suites extraites: $\left(\frac{1}{2n}\right)_{n\in\mathbb{N}}, \left(\frac{1}{2n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}, \left(\frac{1}{3n}\right)_{n\in\mathbb{N}}, \cdots$*

Corollaire 1.7.6 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. Si elle admet une sous-suite divergente, ou bien si elle admet deux sous-suites convergeant vers des limites distinctes, alors elle diverge.*

Théorème 1.7.7 *(de Bolzano Weiertrass)*

*De toute suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **bornée** on peut extraire une sous-suite $\left(u_{\rho(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente dans $\mathbb{R}$.*

Démonstration. La démonstration est basée sur le principe de dichotomie. L'ensemble des valeurs de la suite est par hypothèse ($(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **bornée**) contenue dans un intervalle $[a, b]$, l'idée est alors de construire une sous-suite $\left(u_{\rho(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ dont chaque terme $u_{\rho(n)}$ est inclus dans un intervalle $[a_n, b_n] \subset [a_{n-1}, b_{n-1}]$ tel que:

- $b_n - a_n = \frac{b_{n-1}-a_{n-1}}{2}$,
- $[a_0, b_0] = [a, b]$.

On aura alors de par cette construction: $a_n \leq u_{\rho(n)} \leq b_n, \forall n \in \mathbb{N}$.

Il suffira alors de remarquer que les deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes, donc convergeant vers la même limite et d'utiliser le théorème des gendarmes pour conclure que la sous-suite $\left(u_{\rho(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ convergera vers cette même limite elle aussi. ■

Exemple 1.7.8 *On a vu que la suite alternée $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas convergente. Mais le fait qu'elle soit bornée, nous permet d'en extraire une sous-suite convergente. Par exemple:*

- *La sous-suite de terme : $u_{2n} = (-1)^{2n}$ est une suite constante qui vaut 1, donc convergente.*
- *La sous-suite de terme : $u_{2n+1} = (-1)^{2n+1}$ est une suite constante qui vaut -1, donc convergente.*