**IUT Digne** | Année 2007-2008
DUT Génie biologique | TD Proba-Stat **feuille n° 3**

# Probabilités conditionnelles

**Exercice 1** Dans une université, une enquête sur le tabagisme a donné les résultats suivants :

| | Hommes | Femmes |
|---|---|---|
| Fumeurs | 420 | 75 |
| Non fumeurs | 280 | 225 |

On choisit au hasard l'une des 1000 personnes interrogées. On note $A$ l'événement "en réponse à l'enquête, la personne a déclaré fumer" et on note $B$ l'événement "en réponse à l'enquête, la personne a déclaré être du sexe féminin".

1. $A$ et $B$ sont-ils indépendants pour l'équiprobabilité $\mathbf{P}$ définie sur l'ensemble des 1000 personnes interrogées ?
2. Même question pour la même enquête dans une autre université ou les résultats sont consignés dans le tableau suivant :

| | Hommes | Femmes |
|---|---|---|
| Fumeurs | 440 | 360 |
| Non fumeurs | 110 | 90 |

**Exercice 2** Dans une usine, on utilise conjointement deux machines $M_1$ et $M_2$ pour fabriquer des pièces cylindriques en série. Pour une période donnée, leurs probabilités de tomber en panne sont respectivement $0,01$ et $0,008$. De plus la probabilité de l'événement "la machine M2 est en panne sachant que M1 est en panne" est égale à $0,4$.

1. Quelle est la probabilité d'avoir les deux machines en panne au même moment ?
2. Quelle est la probabilité d'avoir au moins une machine qui fonctionne ?

**Exercice 3** À l'IUT de Digne, 40% de garçons et 15% des filles mesurent plus de $1,80$m. De plus, 60% des élèves sont des filles. Sachant qu'un élève, choisi au hasard, mesure plus de $1,80$m, quelle est la probabilité que ce soit une fille ?

**Exercice 4** Au cours de la fabrication d'un certain type de lentilles, chacune de ces lentilles doit subir deux traitements notés $T_1$ et $T_2$. On prélève au hasard une lentille dans la production.
On désigne par $A$ l'événement : "la lentille présente un défaut pour le traitement $T_1$".
On désigne par $B$ l'événement : "la lentille présente un défaut pour le traitement $T_2$".
Une étude a montré que :

- la probabilité qu'une lentille présente un défaut pour le traitement $T_1$ est $\mathbf{P}(A) = 0,10$ ;
- la probabilité qu'une lentille présente un défaut pour le traitement $T_2$ est $\mathbf{P}(B) = 0,20$ ;
- la probabilité qu'une lentille présente aucun des deux défauts est $0,75$.

1. Calculer la probabilité qu'une lentille, prélevée au hasard dans la production, présente un défaut pour au moins un des deux traitements $T_1$ ou $T_2$.
2. Calculer la probabilité qu'une lentille, prélevée au hasard dans la production, présente un défaut pour les deux traitements $T_1$ et $T_2$.
3. Les événements $T_1$ et $T_2$ sont ils indépendants ?

4. Calculer la probabilité qu'une lentille, prélevée au hasard dans la production, présente un défaut pour un seul des deux traitements.
5. Calculer la probabilité qu'une lentille, prélevée au hasard dans la production, présente un défaut pour le traitement $T_2$, sachant qu'il présente un défaut pour le traitement $T_2$.

**Exercice 5** Dans une population $\Omega$, deux maladies $M_1$ et $M_2$ sont présentes respectivement chez 10% et 20%. On suppose que le nombre de ceux qui souffrent des deux maladies est négligeable. On entreprend un dépistage systématique des maladies $M_1$ et $M_2$. Pour cela, on applique un test qui réagit sur 90% des malades de $M_1$, sur 70% des malades $M_2$, et sur 10% des individus qui n'ont aucune de ces deux affections.

1. Quand on choisit au hasard un individu $\omega$ dans $\Omega$, quelle est la probabilité pour que le test réagisse ?
2. Sachant que pour un individu $\omega$, le test a réagi, donner les probabitités :
   - pour que le test ait réagi à cause de la maladie $M_1$.
   - pour que le test ait réagi à cause de la maladie $M_2$.
   - pour que le test ait réagi alors que l'individu n'est infecté par qu'aucune des deux maladies $M_1$ et $M_2$ .

**Exercice 6** Un laboratoire a mis au point un alcootest. On sait que 2% des personnes contrôlées par la police sont réellement en état d'ébriété. Les premiers essais ont conduit aux résultats suivants :
- lorsqu'une personne est réellement en état d'ébriété, 95 fois sur 100 l'alcootest se révèle positif ;
- lorsqu'une personne n'est pas en état d'ébriété, 96 fois sur 100 l'alcootest se révèle négatif.

Quelle est la probabilité pour qu'une personne soit réellement en état d'ébriété lorsque l'alcootesr est positif ?

**Exercice 7** A l'IUT, parmi les étudiants 40% suivent l'option $A_1$, 30% suivent l'option $A_2$ et 30% suivent l'option $A_3$. Chaque étudiant suive une seule option. La proportion d'étudiants qui n'ont pas la moyenne dans l'option $A_1$ est de 10%, dans l'option $A_2$ de 5% et dans l'option $A_3$ de 5%. On choisit un étudiant au hasard.

1. Calculer la probabilité qu'il n'ait pas la moyenne.
2. Sachant qu'il n'a pas la moyenne, calculer la probabilité a posteriori qu'il ait suivi l'option $A_1$, $A_2$ ou $A_3$.

**Exercice 8** On a volé la Joconde. Deux ans plus tard, en perquisitionnant chez un collectionneur, la police retrouve Mona Lisa. Un doute plane sur l'authenticité de la toile retrouvée. On estime à 80% la probabilité pour que ce soit celle que Léonard a peinte. On consulte alors deux experts en peinture de la Renaissance. Le premier, qui se trompe une fois sur cinq, déclare que le tableau est authentique. Le deuxième, qui se trompe deux fois sur onze, annonce que c'est une copie. Les conclusions des experts sont indépendantes. Calculer la probabilité d'avoir retrouvé la Joconde authentique.

**Exercice défi** Monty Hall propose le jeux télévisé suivant : un candidat doit choisir entre trois portes de garages fermées. Derrière une des portes se trouve une voiture, derrière les autres portes se trouvent une chèvre. Lorsque le candidat a choisi une porte, Monty ouvre une des deux portes restantes pour faire apparaitre une chèvre (ce qui est possible). Il propose ensuite au candidat de rester devant la porte qu'il a choisi, ou bien de changer.

*A votre avis, le candidat doit-il rester ? changer ? cela n'a aucune importance ?*
(Justifier votre réponse)

# Probabilités conditionnelles (Solutions)

***Correction 1*** 1. $\mathbf{P}(A) = 0,495$, $\mathbf{P}(B) = 0,3$ et $\mathbf{P}(A \cap B) = 0,075$. Comme $0,495 \times 0,3 = 0,1485 \neq 0,075$, les événements ne sont pas indépendants.

2. $\mathbf{P}(A) = 0,8$, $\mathbf{P}(B) = 0,45$ et $\mathbf{P}(A \cap B) = 0,36$. Comme $0,8 \times 0,45 = 0,36$, les événements sont indépendants.

***Correction 2*** 1. $\mathbf{P}(M1 \cap M2) = \mathbf{P}(M1)\mathbf{P}(M2/M1) = 0,01 \times 0,4 = 0,004$.

2. $\mathbf{P}(\overline{M1} \cup \overline{M2}) = 1 - \mathbf{P}(M1 \cap M2) = 0,996$

***Correction 3*** $T$ : "événement mesuré plus de $1,80$m"
$F$ : "événement être une fille"
On a $\mathbf{P}(F) = 0,6$, $\mathbf{P}(T/\overline{F}) = 0,4$ et $\mathbf{P}(T/F) = 0,15$. Ainsi :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(F/T) &= \frac{\mathbf{P}(F \cap T)}{\mathbf{P}(T \cap F) + \mathbf{P}(T \cap \overline{F})} \\ &= \frac{\mathbf{P}(F) \times \mathbf{P}(T/F)}{\mathbf{P}(F) \times \mathbf{P}(T/F) + \mathbf{P}(\overline{F}) \times \mathbf{P}(T/\overline{F})} = 0,36.\end{aligned}$$

***Correction 4*** 1. $\mathbf{P}(A \cup B) = 1 - \mathbf{P}(\overline{A \cup B}) = 1 - \mathbf{P}(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - 0,75 = 0,25$

2. $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cup B) = 0,1 + 0,2 - 0,25 = 0,05$
3. Non car $\mathbf{P}(A \cap B) \neq \mathbf{P}(A) \times \mathbf{P}(B)$
4. L'événement "la lentille présente un défaut pour les deux traitements $T_1$ et $T_2$" est représenté par :
$$D = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B) = (A \setminus A \cap B) \cup (B \setminus A \cap B)$$
Ainsi $\mathbf{P}(D) = \mathbf{P}(A \cap \overline{B}) + \mathbf{P}(\overline{A} \cap B) = (\mathbf{P}(A) - \mathbf{P}(A \cap B)) + (\mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B)) = \cdots = 0,2$
5. $\mathbf{P}(B|A) = \frac{\mathbf{P}(B \cap A)}{\mathbf{P}(A)} = \frac{0,05}{0,1} = 0,5$

***Correction 5*** On note :
- $M_1$ ="être atteint par $M_1$",
- $M_2$ ="être atteint par $M_2$",
- $N$ ="être atteint par aucune maladie"
- $R$ ="le test réagit".

Le texte dit : $\mathbf{P}(M_1) = 0,1$, $\mathbf{P}(M_2) = 0,2$, $\mathbf{P}(N) = 0,7$, $\mathbf{P}(R|M_1) = 0,9$, $\mathbf{P}(R|M_2) = 0,7$ et $\mathbf{P}(R|N) = 0,1$,

1. $\mathbf{P}(R) = \mathbf{P}(M_1 \cap R) + \mathbf{P}(M_2 \cap R) + \mathbf{P}(N \cap R) = \mathbf{P}(M_1) \times \mathbf{P}(R|M_1) + \mathbf{P}(M_2) \times \mathbf{P}(R|M_2) + \mathbf{P}(N) \times \mathbf{P}(R|N) = 0,3$.
2. 
   - $\mathbf{P}(M_1|R) = \frac{\mathbf{P}(M_1 \cap R)}{\mathbf{P}(R)} = 0,3$
   - $\mathbf{P}(M_2|R) = \frac{\mathbf{P}(M_2 \cap R)}{\mathbf{P}(R)} = \frac{7}{15} \approx 0,47$
   - $\mathbf{P}(N|R) = \frac{\mathbf{P}(N \cap R)}{\mathbf{P}(R)} = \frac{7}{30} \approx 0,23$

***Correction 6*** Soient $E =$ " la personne contrôlée est en état d'ébriété " et $A =$ "l'alcootest est positif". Les indications fournies peuvent s'écrire : $\mathbf{P}(E) = 0,02$, $\mathbf{P}(A|E) = 0,95$ et $\mathbf{P}(\overline{A}|\overline{E}) = 0,96$. On a :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(E|A) &= \frac{\mathbf{P}(A \cap E)}{\mathbf{P}((A \cap E) \cup (A \cap \overline{E}))} \\ &= \frac{\mathbf{P}(E) \times \mathbf{P}(A|E)}{\mathbf{P}(E) \times \mathbf{P}(A|E) + \mathbf{P}(\overline{E}) \times \mathbf{P}(A|\overline{E})} \approx 0,326 \end{aligned}$$

***Correction 7*** Pour $i \in \{1,2,3\}$, on note $B_i =$ "suivre l'option $A_i$". On note $C$ l'événement ne pas avoir la moyenne. On a

$$\mathbf{P}(A_1) = 0,4 \ \mathbf{P}(A_2) = 0,3 \ \mathbf{P}(A_3) = 0,3 \ \mathbf{P}(C|A_1) = 0,1 \ \mathbf{P}(C|A_2) = 0,5 \ \mathbf{P}(C|A_3) = 0,5.$$

1. $\mathbf{P}(C) = \mathbf{P}(C|A_1) \times \mathbf{P}(A_1) + \mathbf{P}(C|A_2) \times \mathbf{P}(A_2) + \mathbf{P}(C|A_3) \times \mathbf{P}(A_3)$.
2. $\mathbf{P}(A_i|C) = \frac{\mathbf{P}(C|A_i) \times \mathbf{P}(A_i)}{\mathbf{P}(C)}$

***Correction 8*** On note :
- $A =$"le tableau est authentique",
- $B =$"le premier expert déclare le tableau authentique, le deuxième le déclare faux",
- $E_1 =$"le premier expert a raison",
- $E_2 =$"le deuxième expert a raison".

On a $\mathbf{P}(A) = 0,8$, $\mathbf{P}(\overline{A}) = 0,2$, $\mathbf{P}(E_1) = 0,4$, $\mathbf{P}(E_2) = \frac{9}{11}$. On a $\mathbf{P}(B|A) = \mathbf{P}\overline{E_1}\mathbf{P}(E_2)$ et $\mathbf{P}(B|\overline{A}) = \mathbf{P}\overline{E_2}\mathbf{P}(E_1)$.

$$\mathbf{P}(A|B) = \frac{\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B|A)}{\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B|A) + \mathbf{P}(\overline{A})\mathbf{P}(B|\overline{A})} \approx 0,84$$

# Probabilités conditionnelles (Méthodes)

### ☞ Comment calculer des probabilités conditionnelles ?

Soient $A$ et $B$ deux événements d'un univers $\Omega$ et $\mathbf{P}$ une probabilité sur $\Omega$. On cherche à calculer $\mathbf{P}_B(A) = \mathbf{P}(A/B)$.

- Vérifier si le texte fournit cette information en langage commun ou non.
- Utiliser la définition : $\mathbf{P}_B(A) = \mathbf{P}(A/B) = \frac{\mathbf{P}(A\cap B)}{\mathbf{P}(B)}$.
- Si on connaît $\mathbf{P}(B/A)$ et $\mathbf{P}(B/\overline{A})$ alors :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(A/B) &= \frac{\mathbf{P}(A\cap B)}{\mathbf{P}(B)} \\
&= \frac{\mathbf{P}(A\cap B)}{\mathbf{P}((A\cap B)\cup(\overline{A}\cap B))} \\
&= \frac{\mathbf{P}(A\cap B)}{\mathbf{P}(A\cap B)+\mathbf{P}(\overline{A}\cap B)} \\
&= \frac{\mathbf{P}(A)\times\mathbf{P}(B/A)}{\mathbf{P}(A)\times\mathbf{P}(B/A)+\mathbf{P}(\overline{A})\times\mathbf{P}(B/\overline{A})}
\end{aligned}$$

On retrouve la formule de Bayes !

### ☞ Comment vérifier que deux événements sont indépendants pour une probabilité ?

Soient $A$ et $B$ deux événements d'un univers $\Omega$ et $\mathbf{P}$ une probabilité sur $\Omega$.

1. Déterminer l'événement représenté par $A\cap B$ et calculer $\mathbf{P}(A\cap B)$.
2. Calculer $\mathbf{P}(A)\times\mathbf{P}(B)$.

Les deux événements sont indépendants si et seulement si $\mathbf{P}(A\cap B) = \mathbf{P}(A)\times\mathbf{P}(B)$.

### ☞ Comment calculer la probabilité d'une conjonction de deux événements ?

Soient $A$ et $B$ deux événements d'un univers $\Omega$ et $\mathbf{P}$ une probabilité sur $\Omega$. On cherche à calculer $\mathbf{P}(A\cap B)$.

- On sait que $A$ et $B$ sont indépendants pour la probabilité $\mathbf{P}$. Utiliser la formule :

$$\mathbf{P}(A\cap B) = \mathbf{P}(A)\times\mathbf{P}(B).$$

- On ignore si $A$ et $B$ sont indépendants pour la probabilité $\mathbf{P}$, alors :
  - si $\mathbf{P}(A)\neq 0$ et $\mathbf{P}(B/A)$ est connue, utiliser la formule :

  $$\mathbf{P}(A\cap B) = \mathbf{P}(A)\times\mathbf{P}(B/A).$$

  - si $\mathbf{P}(B)\neq 0$ et $\mathbf{P}(A/B)$ est connue, utiliser la formule :

  $$\mathbf{P}(A\cap B) = \mathbf{P}(B)\times\mathbf{P}(A/B).$$

  - si $\mathbf{P}(A\cup B)$ est connue, utiliser la formule :

  $$\mathbf{P}(A\cap B) = \mathbf{P}(A)+\mathbf{P}(B)-\mathbf{P}(A\cup B).$$

- si $\mathbf{P}(\overline{A \cap B})$ ou $\mathbf{P}(\overline{A} \cup \overline{B})$ ou $\mathbf{P}(\overline{A} \cap \overline{B})$ sont connues, exprimer $A \cap B$ en fonction de $\overline{A \cap B}$ ou $\overline{A} \cup \overline{B}$ ou $\overline{A} \cap \overline{B}$ et utiliser les formules de probabilité classique. Par exemple on obtient les expressions suivantes :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(A \cap B) &= 1 - \mathbf{P}(\overline{A \cap B}) \\
\mathbf{P}(A \cap B) &= 1 - \mathbf{P}(\overline{A} \cup \overline{B}) \\
\mathbf{P}(A \cap B) &= 1 - \mathbf{P}(\overline{A}) - \mathbf{P}(\overline{B}) + \mathbf{P}(\overline{A} \cap \overline{B})
\end{aligned}$$

- sinon, essayer de trouver un événement $E$ de probabilité connue, incompatible avec $A \cap B$, tel que $(A \cap B) \cup E$ forme un événement de probabilité connue, et utiliser la formule $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}((A \cap B) \cup E) - \mathbf{P}(E)$.