Université A/ Mira de Béjaia
Faculté de Technologie
Département de Technologie
1ère année ST

Juin 2019

Examen de remplacement de Maths II

(Durée 2h)

Les calculatrices programmables ne sont pas autorisées

Exercice 1. (4 points)
On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 6 \\ 3 & -1 & 5 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -2 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a. Calculer le déterminant de la matrice A et déduire que la matrice A est inversible.

b. Calculer la matrice $A \times (B - 2I_3)$ puis déduire la matrice inverse de A.

Exercice 2. (6 points)

1. Déterminer les constantes réelles a, b et c qui vérifient : $\dfrac{2x+1}{x^2(x+1)} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x^2} + \dfrac{c}{x+1}$.
2. Soit $x > 0$, calculer la primitive $F(x) = \int \dfrac{1}{x^2} \ln(x^2 + x)dx$ à l'aide d'une intégration par parties.
3. Résoudre l'équation différentielle $y' - \dfrac{2}{x}y = \ln(x^2 + x), \qquad x > 0$.

Exercice 3. (5 points)
Soit l'équation différentielle suivante :

$$y'' + 3y = xe^{2x} \qquad\qquad (E)$$

1. Résoudre l'équation homogène associée a (E).
2. Trouver les constantes réelles a et b pour que $y_p = (ax + b)e^{2x}$ soit une solution particulière de (E).
3. Déduire la solution génerale de (E).

Exercice 4. (5 points)
Soit

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{e^x} dx, \qquad n \in \mathbb{N}^*$$

1. En utilisant une intégration par parties,
   i) Calculer I_1.
   ii) Montrer que $I_{n+1} = -\dfrac{1}{e} + (n+1)I_n$.
2. Calculer I_2 et I_3
3. En déduire la valeur de

$$I = \int_0^1 \frac{-x^3 + 2x^2 - x}{e^x} dx$$

Bon Courage

Dép.

Université A/ Mira de Béjaia
Faculté de Technologie
Département de Technologie
$1^{ère}$ année ST

Juin 2019

Corrigé de l'examen de MathsII

Exercice 1. (4 points)
Considérons la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 6 \\ 3 & -1 & 5 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

a. Calculons le déterminant de la matrice A. Il vient, en développant par rapport à la deuxième ligne.

$$det(A) = 4\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} 2 \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} + 6 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -4$$

1,5

La matrice A est inversible si et seulement si son déterminant est différent de 0, On a $det(A) = -4 \neq 0$, donc A est inversible. 0,5

b. Calculons la matrice $A \times (B - 2I_3)$.

on a

$$A \times (B - 2I_3) = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 6 \\ 3 & -1 & 5 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -2 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right).$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & -2 & 6 \\ 3 & -1 & 5 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I_3$$

1

En déduire la matrica inverse de A.

On a

$$A \times (B - 2I_3) = 2I_3 \Longrightarrow \frac{A \times (B - 2I_3)}{2} = I_3$$

$$\Longrightarrow A\frac{(B - 2I_3)}{2} = I_3 \text{ on a de l'autre coté } A \times A^{-1} = I_3$$

$$\text{donc } A^{-1} = \frac{(B - 2I_3)}{2} = \tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ -1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

1

Exercice 2. (6 points)

1. Déterminons les constantes réelles a, b et c qui vérifient :
$\frac{1}{(x-1)(x-2)^2} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2} + \frac{c}{(x-2)^2}$.
On a $\frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2} + \frac{c}{(x-2)^2} = \frac{(a+b)x^2+(-4a-3b+c)x+(4a-2b-c)}{(x-1)(x-2)^2}$
En identifiant, on obtient : $a = 1$, $b = -1$, $c = 1$
donc $\frac{1}{(x-1)(x-2)^2} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-2} + \frac{1}{(x-2)^2}$. 1,5

2. Trouver les primitives des fonctions $\frac{a}{x-1}$, $\frac{b}{x-2}$ et $\frac{c}{(x-2)^2}$;
$\int \frac{1}{x-1}dx = ln|x-1| + c_1$ avec $c_1 \in \mathbb{R}$.
$\int \frac{1}{x-2}dx = ln|x-2| + c_2$ avec $c_2 \in \mathbb{R}$. 1
et
$\int \frac{1}{(x-2)^2}dx = -\frac{1}{(x-2)} + c_3$ avec $c_3 \in \mathbb{R}$.
On déduire la primitive de la fonction $\frac{1}{(x-1)(x-2)^2}$.
$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(x-1)(x-2)^2}dx &= ln|x-1| + c_1 - ln|x-2|c_2 - \frac{1}{(x-2)} + c_3 \\ &= ln|x-1| - ln|x-2| - \frac{1}{(x-2)} + K \quad \text{avec} K = c_1 + c_2 + c_3 \in \mathbb{R} \\ &= ln|\tfrac{x-1}{x-2}| - \frac{1}{(x-2)} + K\end{aligned}$$
0,5

3. Résolution de l'équation différentielle suivante : $(x-2)y' - y = \frac{1}{(x-1)}$.
on a $(x-2)y' - y = \frac{1}{(x-1)} \Longrightarrow (x-2)(x-1)y' - (x-1)y = 1....(I)$ est une équation différentielle non homogène (ou avec second membre). Résolution de l'équation homogène $(x-2)(x-1)y' - (x-1)y = 0$
$$(x-2)(x-1)y' - (x-1)y = 0 \Longrightarrow \frac{dy}{y} = \frac{1}{(x-2)}dx$$
1
et par suite
$ln|y| = ln|x-2| + C_1$ où $C_1 \in \mathbb{R}$
D'où $y(x) = C(x-2)$, $C = \mp exp(C1)$.
Résolution de l'équation avec second membre ($(x-2)(x-1)y' - (x-1)y = 1$)
Méthode de la variation de la constante : Soit $y(x) = C(x-2)$ la solution générale de l'équation homogène. On fait varier la constante C, et la solution générale de l'éqution avec le second membre (I) sera : $y(x) = C(x)(x-2)$. On a
$y'(x) = C'(x)(x-2) + C(x)$. En remplaçant y et y' dans l'équation (I), on obtient 1,5
$C'(x) = \frac{1}{(x-1)(x-2)^2}$
par conséquent $C(x) = ln|\frac{x-1}{x-2}| - \frac{1}{(x-2)} + K$
Finalement la solution générale de l'équation (I) est
$y(x) = (ln|\frac{x-1}{x-2}| - \frac{1}{(x-2)} + K)(x-2)$. 0,5

Exercice 3. (5 points)
Soit l'équation différentielle suivante :
$$y'' + 3y = 7xe^{2x} \qquad (E)$$

1. Résoudre l'équation homogène associée a (E).
Résolution de l'équation homogène
$$y'' + 3y = 0 \qquad (E_0)$$

L'équation caractéristique associée à (E_0).

$$r^2 + 3 = 0$$

0,5

admet deux racines complexes distinctes $r_1 = 0 + i\sqrt{3}$ et $r_2 = 0 - i\sqrt{3}$. Ainsi, la solution générale de (E) est

0,5

$$y_0 = e^{0x}(C_1 \cos\sqrt{3}x + C_2 \sin\sqrt{3}x),$$

1

où $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

2. Trouvons les constantes réelles $\cancel{a, b}$ pour que $y_p = (ax+b)e^{2x}$ soit une solution particulière de (E). 0,5
   on a $y_p' = 2ae^{2x} + 2(ax+b)e^{2x}$,
   et
   $y_p'' = 2ae^{2x} + 2ae^{2x} + 4(ax+b)e^{2x}$, 0,5
   En remplaçant y_p' et y_p'' dans (E) on obtient :
   $2ae^{2x} + 3(2ax+b)e^{2x} + 3(2ax+b)e^{2x} + 9(ax^2+bx)e^{2x} - 4(2ax+b)e^{2x} - 12(ax^2 + bx)e^{2x} + 3(ax^2+bx)e^{2x} = (8x+1)e^{2x}$
   qui donne $\qquad 7ax + 4b + 7a = 7x$ 1
   En identifiant, on trouve $\cancel{a = 1}$ et $b = \frac{-4}{7}$. D'où
   $y_p = (x^2 - \frac{4}{7}x)e^{2x}$. 0,5
3. Déduire la solution générale de (E). On a $y_G = y_0 + y_p$
   donc
   $y_G = C_1 \cos\sqrt{3}x + C_2 \sin\sqrt{3}x + (x - \frac{4}{7})e^{2x}$, où $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. 0,5

Exercice 4. (5 points)
Soit

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{e^x} dx, \qquad n \in \mathbb{N}^*$$

1. En utilisant une intégration par parties,

   i) Calculons $I_1 = \int_0^1 \frac{x^1}{e^x} dx$.
   On pose
   $U'(x) = e^{-x} \quad \Rightarrow \quad U(x) = -e^{-x}$
   $V(x) = x \quad \Rightarrow \quad V'(x) = 1$
   $I_1 = \int_0^1 \frac{x^1}{e^x} dx = -xe^{-x}|_0^1 + \int_0^1 e^{-x} dx$
   $= -xe^{-x} - e^{-x}|_0^1$
   $= -\frac{1}{e} - \frac{1}{e} + 1$
   $= 1 - \frac{2}{e}$ 1

   ii) Montrons que $I_{n+1} = -\frac{1}{e} + (n+1)I_n$.
   posons
   $U'(x) = e^{-x} \quad \Rightarrow \quad U(x) = -e^{-x}$
   $V(x) = x^{n+1} \quad \Rightarrow \quad V'(x) = (n+1)x^n$
   $I_{n+1} = -x^{n+1}e^{-x}|_0^1 + (n+1)\int_0^1 x^1 e^{-x} dx$ 1
   $= -\frac{1}{e} + (n+1)I_n$.

2. Calculons I_2 et I_3

$I_2 = \int_0^1 x^2 e^{-x} dx = -\frac{1}{e} + 2I_1$

$= 2 - \frac{5}{e}$

1

$I_3 = \int_0^1 x^3 e^{-x} dx = -\frac{1}{e} + 3I_2$

$= 6 - \frac{16}{e}$

1

3. En déduire la valeur de

$$I = \int_0^1 \frac{-x^3 + 2x^2 - x}{e^x} dx$$

$I = \int_0^1 \frac{-x^3+2x^2-x}{e^x} dx = -\int_0^1 x^3 e^{-x} + 2\int_0^1 x^2 e^{-x} - \int_0^1 x e^{-x} dx$

$I = -I_3 + 2I_2 - I_1 = \frac{8}{e} - 3$

1