Exercice 1 (6pts)

Un mobile M, assimilé à un point matériel, est animé d'un mouvement rectiligne le long d'un axe (x'ox). Son diagramme des vitesses est donné par la figure 1. Sachant qu'à $t = 0\ s,\ x(0) = 0\ m$.

1. Tracer le diagramme des accélérations du mobile M.
2. Donner la nature et le sens du mouvement du mobile M entre les instants $t = 0\ s$ et $t = 8\ s$?
3. Déterminer la position du mobile aux instants **t = 2s**, **t = 3s** et **t= 8s**.
4. Etablir l'équation horaire du mobile M pour les deux premières phases.
5. Tracer le diagramme des espaces du mobile M.

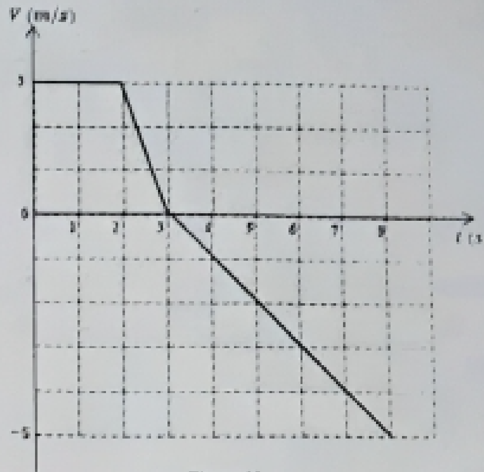


Figure 01

Exercice 2 (6pts)

Dans le repère orthonormé $R(O, \vec{i}, \vec{j})$ les équations paramétriques du mouvement d'un mobile M sont :

$$\begin{cases} x = A\cos\omega t \\ y = A\sin\omega t \end{cases} \qquad \text{avec } A = 10\ \text{cm et } \omega = 10\ \text{rad/s}$$

1- Déterminer l'équation de la trajectoire et donner sa forme.

2- Ecrire les vecteurs position $\overrightarrow{OM}$, vitesse $\vec{v}$ et accélération $\vec{a}$.

3- Déterminer les composantes, tangentielle et normale de l'accélération. Déduire le rayon de courbure.

4- Calculer le produit $\vec{v}.\vec{a}$ et déduire l'angle entre le vecteur vitesse et le vecteur accélération.

5- Calculer et représenter les vecteurs vitesse $\vec{v}$ et accélération $\vec{a}$ à **t = π/20 s**. Préciser l'échelle choisie.

Exercice 3 (8pts)

Une masse **m=1kg** est posée sur une autre masse **M=2kg**. L'ensemble est posé sur un plan incliné. (Voire figure 2A). Les frottements entre la masse M et le plan incliné sont caractérisés par les coefficients de frottement, statique $\mu_{s1} = 0.4$ et dynamique $\mu_{g1} = 0.3$. Ceux entre les deux masses **m** et **M** sont $\mu_{s2} = 0.6$ et $\mu_{g2} = 0.5$. On prend **g=10 m/s²**.

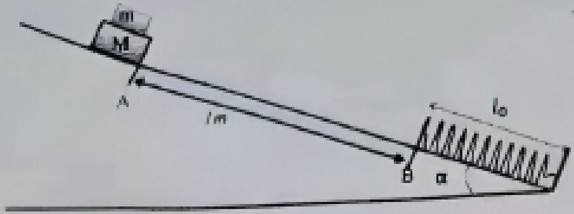


Figure 2A

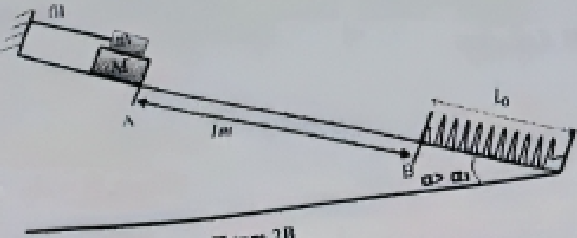


Figure 2B

1) Représenter les forces qui agissent sur la masse **m** et sur la masse **M** dans la figure 2A.

2) On augmente graduellement l'angle α. Quelle est la valeur minimale α_1 que doit prendre α pour rompre l'équilibre.

3) Calculer l'accélération **a** du système pour cet angle ($\alpha = \alpha_1$).

4) En utilisant le théorème de l'énergie totale, calculer la vitesse du bloc (**M+m**) au point B. Sachant que **AB= 1m.**

5) Calculer la compression maximale du ressort, on donne **K=1000 N/m.**

6) Maintenant, on relie la masse **m** au mur avec un fil (inextensible, sans masse et bien tendu) et on refait l'expérience (Voire figure 2B).

a) Représenter les forces qui agissent sur la masse **m** et sur la masse **M** (bien évidement quand $\alpha > \alpha_1$).

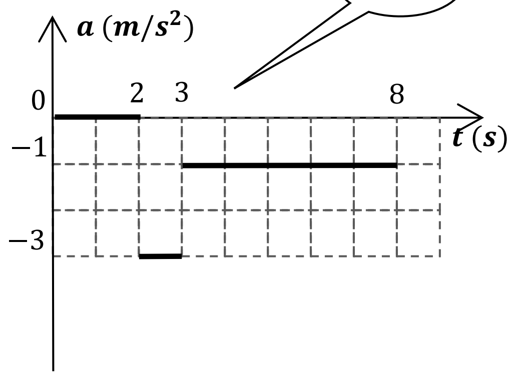
b) Quelle est la valeur minimale α_2 que doit prendre α pour rompre l'équilibre.

Exercice 1 (06 *points*)

1.

$0 \leq t \leq 2\,s$	$a_1 = \dfrac{\Delta V}{\Delta t} = 0\ m/s^2$
$2 \leq t \leq 3\,s$	$a_2 = \dfrac{\Delta V}{\Delta t} = \dfrac{0-3}{3-2} = -3\ m/s^2$
$3 \leq t \leq 8\,s$	$a_3 = \dfrac{\Delta V}{\Delta t} = \dfrac{-5-0}{8-3} = -1\ m/s^2$

0.75



0.75

2. Nature du mouvement.

$0 \leq t \leq 2\,s$	$V = \text{Cte}$	Mouvement rectiligne uniforme
$2 \leq t \leq 3\,s$	$V.a < 0$	Mouvement rectiligne uniformément retardé
$3 \leq t \leq 8\,s$	$V.a > 0$	Mouvement rectiligne uniformément accéléré

0.25

Le sens du mouvement.

$0 \leq t \leq 3\,s$	$V > 0$	Mouvement vers le sens positif (x croissants)
$3 \leq t \leq 8\,s$	$V < 0$	Mouvement vers le sens négatif (x décroissants)

0.25

3. La position du mobile : 0.5

$x(2s) = 2 \times 3 = 6m$

0.5

$x(3s) = x(2s) + \frac{3\times(3-2)}{2} = 6 + 1.5 = 7.5m$

0.5

$x(8s) = x(3s) + \frac{-5\times(8-3)}{2} = 7.5 - 12.5 = -5m$

0.25 0.5

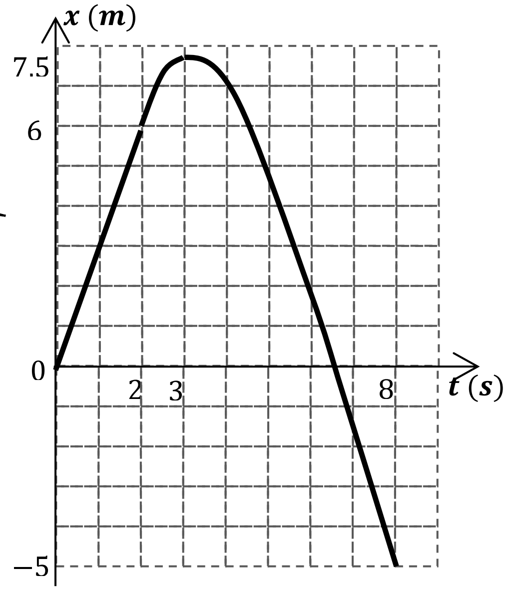
4. Les équations horaires pour les deux premières phases

$0 \leq t \leq 2\,s$	$V_1 = 3m/s$	$x_1(t) = 3.t$
$2 \leq t \leq 3\,s$	$v_2(t) = -3t + 9$	$x_2(t) = -1{,}5.t^2 + 9t - 6$

0.5 0.5

5. Diagramme des espaces

0.75



Exercice 2 (06 *points*)

1- $\begin{cases} x = A\cos\omega t \\ y = A\sin\omega t \end{cases}$ $\quad x^2 + y^2 = (A\cos\omega t)^2 + (A\sin\omega t)^2 = A^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = A^2$ 0.25

La trajectoire est un cercle de centre **O(0, 0)** et de rayon ***A***. 0.25

2- Vecteur position $\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath} = A\cos\omega t\,\vec{\imath} + A\sin\omega t\,\vec{\jmath}$ 0.5

Vecteur vitesse $\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{\imath} + \frac{dy}{dt}\vec{\jmath} = A\omega(-\sin\omega t\,\vec{\imath} + \cos\omega t\,\vec{\jmath})$, $|\vec{v}| = A\omega$ 0.25 0.5

Vecteur accélération $\vec{a} = -A\omega^2(\cos\omega t\,\vec{\imath} + \sin\omega t\,\vec{\jmath})$, $|\vec{a}| = A\omega^2$ 0.25

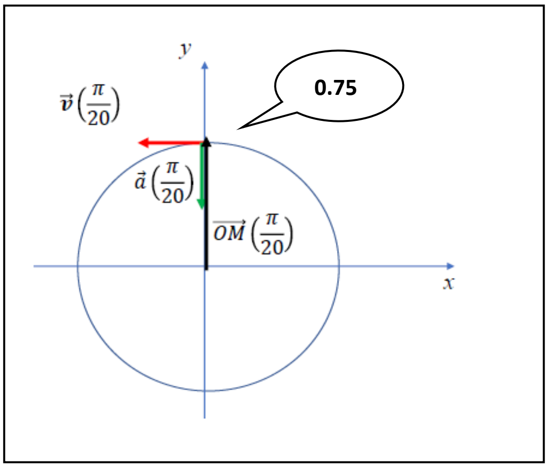
3- 0.5 $a_T = \frac{dv}{dt} = 0$

0.5 $\vec{a} = \vec{a}_T + \vec{a}_N \Rightarrow \vec{a} = \vec{a}_N = A\omega^2\,\vec{u}_N$ 0.5

Rayon de courbure : $a_N = \frac{v^2}{\rho} \Rightarrow \rho = \frac{v^2}{a_N} = \frac{(A\omega)^2}{A\omega^2} = A$ 0.5 0.5

4- $\vec{v}.\vec{a} = 0$, la vitesse est perpendiculaire à l'accélération, alors l'angle entre les deux vecteurs est $\frac{\pi}{2}$.

5- $t = \frac{\pi}{20}$, A = 10 cm et ω = 10 rad/s



0.25

$$\overrightarrow{OM}\left(\frac{\pi}{20}\right) = A\left(\cos\frac{\pi}{2}\,\vec{\imath} + \sin\frac{\pi}{2}\,\vec{\jmath}\right) = 0.1\,\vec{\jmath}$$

0.25

$$\vec{v}\left(\frac{\pi}{20}\right) = A\omega\left(-\sin\frac{\pi}{2}\,\vec{\imath} + \cos\frac{\pi}{2}\,\vec{\jmath}\right) = -\vec{\imath}$$

0.25

$$\vec{a}\left(\frac{\pi}{20}\right) = -A\omega^2\left(\cos\frac{\pi}{2}\,\vec{\imath} + \sin\frac{\pi}{2}\,\vec{\jmath}\right) = -10\,\vec{\jmath}$$

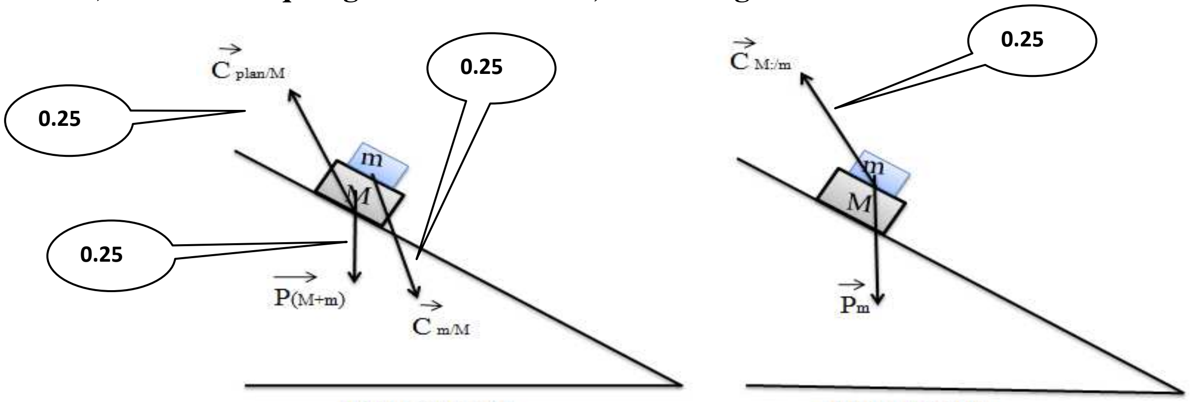
Echelle : **Position** : $1\ cm \to 0.025\ cm$,

vitesse: $1cm \to 0.5\ m.s^{-1}$, **accélération**: $1cm \to 5\ m.s^{-2}$

$\left|\overrightarrow{OM}\left(\frac{\pi}{20}\right)\right| = 4\ cm,$ $\quad \left|\vec{v}\left(\frac{\pi}{20}\right)\right| = 2\ cm,$ $\quad \left|\vec{a}\left(\frac{\pi}{20}\right)\right| = 2\ cm$

Exercice 3

1) Les forces qui agissent sur M et m, dans la figure 2A



Forces sur M   Forces sur m

2) La valeur minimale α_1 que doit prendre α pour rompre l'équilibre.

(μ_{s1} = 0.4) < (μ_{s2} = 0.6), $\Rightarrow$ il est évident que si l'équilibre est rompu, il doit se produire entre la masse M et le plan incliné, (M+m) se comportera comme un seul bloc.

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{P}_{(M+m)} + \vec{C_1} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ox : P\sin\alpha - C_{1x} = 0 \\ oy : -P\cos\alpha_1 + C_{1y} = 0 \quad \Rightarrow C_{1y} = (M+m)g\cos\alpha \end{cases}$$

0.25   0.25

$$\mu_{s1} = \frac{|C_{1x}|}{|C_{1y}|} \Rightarrow C_{1x} = \mu_{s1}C_{1y} = \mu_{s1}(M+m)g\cos\alpha$$

0.25

$$\Rightarrow (M+m)g\sin\alpha = \mu_{s1}(M+m)g\cos\alpha \Rightarrow \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan(\alpha) = \mu_{s1} \Rightarrow \alpha_1 = 21{,}80°$$

0.25   0.25

3) Calcul de l'accélération 'a' du système à $\alpha = \alpha_1$ (la limite ou l'équilibre est rompu).

$$\sum \vec{F} = M\vec{a} \Leftrightarrow \vec{P}_{(M+m)} + \vec{C_1} = (M+m)\vec{a} \Rightarrow \begin{cases} ox : p\sin\alpha_1 - C_{1x} = (M+m)a \\ oy : -p\cos\alpha_1 + C_{1y} = 0 \quad \Rightarrow C_{1y} = (M+m)g\cos\alpha_1 \end{cases}$$

0.25

$$\mu_{g1} = \frac{|C_{1x}|}{|C_{1y}|} \Rightarrow C_{1x} = \mu_{g1}C_{1y} = \mu_{g1}(M+m)g\cos\alpha_1$$

0.25

$$(M+m)g\sin\alpha_1 - \mu_{g1}(M+m)g\cos\alpha_1 = (M+m)a$$

$$a = g(\sin\alpha_1 - \mu_{g1}\cos\alpha_1) \text{ ; AN} : a = 0{,}96 m/s^2 \approx 1 m/s^2$$

0.25

0.5

4) La vitesse du bloc (M+m) au point B

$$\Delta E_T\Big|_A^B = w(\vec{C}_x)\Big|_B^A = \vec{C}_{1x}.\overrightarrow{AB} = -\mu_g Mg\cos\alpha_1.AB$$

0.25

$$E_T(A) = Mgh_A$$

0.25

$$E_T(B) = \frac{1}{2}Mv_B{}^2 + Mgh_B$$

0.25

On a :

$$h_A = [(AB) + l_0]\sin\alpha_1$$

$$h_B = l_0 \sin\alpha_1$$

0.5

$$\Delta E_T\Big|_A^B = \frac{1}{2}(M+m)v_B{}^2 + (M+m)gh_B - (M+m)gh_A = -\mu_{g1}(M+m)g\cos\alpha_1.(AB)$$

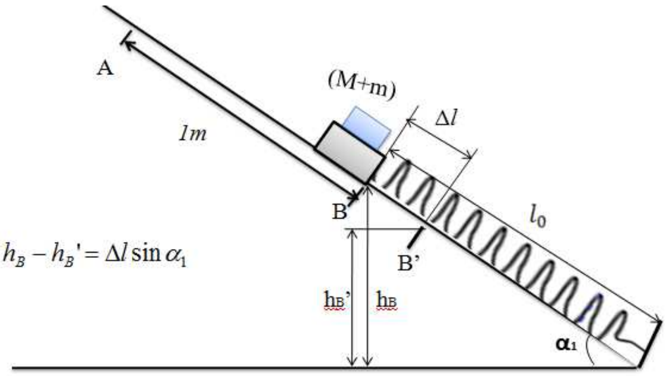


Figure 2A

$$\Delta E_T\Big|_A^B = \frac{1}{2}(M+m)v_B{}^2 - (M+m)g(AB)\sin\alpha_1 = -\mu_{g1}(M+m)g\cos\alpha_1.(AB)$$

$$v_B{}^2 = \sqrt{2gAB(\sin\alpha_1 - \mu_{g1}\cos\alpha_1)}$$ 0.25

$$v_B = 1{,}36 m/s$$ 0.25

5) La compression maximale du ressort

Le bloc de masse s'arrêtera en un point situé en (l_0-Δl), appelant le B' et appliquant le théorème de l'énergie totale entre B et B'

0.25

$$\Delta E_T\Big|_{B'}^B = w(\vec{C}_x)\Big|_{\mathbf{B'}}^B = \vec{C}_x.\overrightarrow{BB'} = -\mu_{g1}(M+m)g\cos\alpha_1.BB' = -\mu_{g1}(M+m)g\cos\alpha_1.\Delta l$$

$$v_{B'} = 0$$

$$\Rightarrow \Delta E_T\Big|_{B'}^B = \frac{1}{2}k(\Delta l)^2 + (M+m)gh_{B'} - (\frac{1}{2}(M+m)v_B{}^2 + (M+m)gh_B) = -\mu_{g1}(M+m)g\cos\alpha_1.\Delta l$$

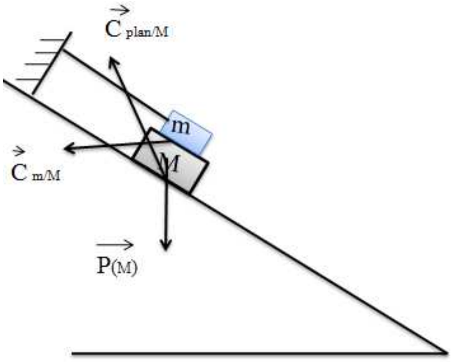
$$\frac{1}{2}k(\Delta l)^2 + (-(M+m)g\sin\alpha_1 + \mu_{g1}(M+m)g\cos\alpha_1).\Delta l - \frac{1}{2}(M+m)v_B{}^2 = 0$$ 0.5

0.25 $$500(\Delta l)^2 - 2;78.\Delta l - 2{,}77 = 0 \Rightarrow \Delta l = 7{,}72cm$$

6) La petite masse étant reliée au mur

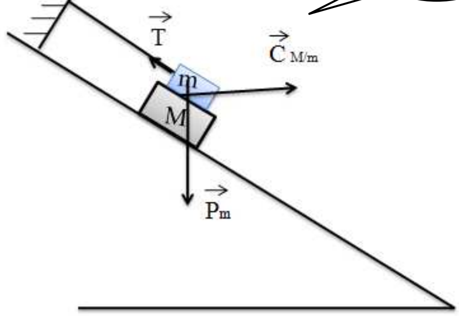
6.a) Les forces qui agissent sur M et sur m

0.5



Forces sur M

0.25



Forces sur m

6.b) La valeur minimale *α₂* que doit prendre *α* pour rompre l'équilibre

Sur M

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{P}_{(M)} + \vec{C_1} + \vec{C_2} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ox : Mg \sin\alpha - C_{1x} - C_{2x} = 0 \\ oy : -Mg \cos\alpha - C_{2y} + C_{1y} = 0 \end{cases}$$

0.25

Sur m

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{p}_{(M)} + \vec{T} + \vec{C_2} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ox : mg \sin\alpha - T + C_{2x} = 0 \\ oy : -mg \cos\alpha + C_{2y} = 0 \end{cases}$$

0.25

Des deux système d'equations, on tire :

$$C_{1y} = (M+m) g \cos\alpha$$

$$C_{2y} = mg \cos\alpha$$

$$\mu_{s1} = \frac{|C_{1x}|}{|C_{1y}|}$$

$$C_{1x} = \mu_{s1}(M+m) g \cos\alpha$$

$$C_{2x} = \mu_{s2} mg \cos\alpha$$

$$\Rightarrow Mg \sin\alpha + \mu_{s1}(M+m) g \cos\alpha + \mu_{s2} mg \cos\alpha = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha = \frac{\mu_{s1}(M+m)g + \mu_{s2} mg}{Mg}$$

0.25

$$\Rightarrow \alpha = \alpha_2 = 41{,}98° \approx 42°$$

0.25