

CHAPITRE III

Oscillations forcées amorties : Systèmes à un degré de liberté

Introduction : On a vu que l'amortissement des oscillations était dû à une diminution de l'énergie mécanique sous forme de chaleur dissipée. Pour **compenser** ces pertes d'énergies et **entretenir** (conserver) les oscillations, il faut une source d'énergie à travers une force extérieure. On va donc rajouter une force extérieure souvent dite **excitatrice**.

Il va donc y avoir une force supplémentaire qu'il vaut mieux qu'elle soit colinéaire au mouvement et qu'elle soit le plus possible dans le sens du mouvement.

Dans ce chapitre, on étudie la réponse d'un système amorti à 1 ddl à une excitation harmonique sinusoïdale produite par une force extérieure au système. Ce type d'excitation se rencontre fréquemment dans l'industrie (machines tournantes, ventilateurs, moteurs, pompes ...).

III.1 Equation différentielle du mouvement

a) Pour un mouvement de translation, on écrit : $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = - \frac{\partial D}{\partial \dot{q}} + F_{ext}$

b) Pour un mouvement de rotation avec un angle θ , on écrit $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = - \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} + \mathbb{M}(F_{ext})$

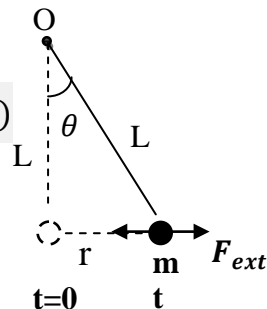
Tel que : $\mathbb{M}(F_{ext}) = F_{ext} \cdot L = \left| \frac{\partial r}{\partial \theta} \right| F_{ext}$

$\mathbb{M}(F_{ext})$: Est le moment de la force appliquée [N.m].

Le moment : caractérise la capacité d'une force à faire tourner un objet autour d'un point.

L : Le bras du levier : est la distance droite d'action de la force.

r : La distance parcourue par la masse dans la direction de l'action de la force.



III.1.1 Exemple : système masse-ressort-amortisseur

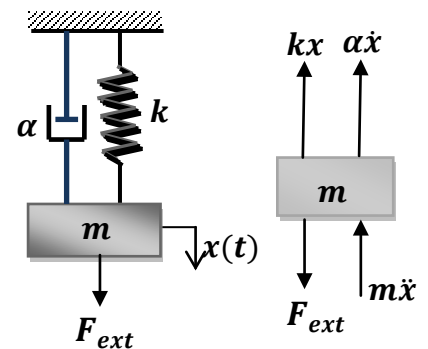
Reprenons le cas du pendule élastique (vertical par exemple).

L'étude de l'oscillateur amorti se fait de la même façon que précédemment mais en ajoutant une force extérieure (F_{ext}).

A une dimension, l'équation de Lagrange s'écrit :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = - \frac{\partial D}{\partial \dot{x}} + F_{ext}$$

Prenons une force sinusoïdale appliquée à la masse m : $F_{ext} = F_0 \sin \omega t$.



L'énergie cinétique du système : c'est l'énergie cinétique de la masse m : $T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$

L'énergie potentielle du système : c'est l'énergie emmagasinée dans le ressort : $U = \frac{1}{2} k x^2$

La fonction de dissipation : $D = \frac{1}{2} \alpha \dot{x}^2$

La fonction de Lagrange : $L = T - U = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} k x^2$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = m \ddot{x} \\ \frac{\partial L}{\partial x} = -kx \\ \frac{\partial D}{\partial \dot{x}} = \alpha \dot{x} \end{cases}$$

En remplaçant dans l'équation de Lagrange on aura : $m \ddot{x} + kx = -\alpha \dot{x} + F_0 \sin \omega t$

On divise alors par m et on trouve : $\ddot{x} + \frac{\alpha}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} x = \frac{F_0}{m} \sin \omega t$

Souvent l'équation différentielle est écrite sous la forme réduite : $\ddot{x} + 2\delta \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \sin \omega t$

Tels que : $\left\{ \begin{array}{l} \delta = \frac{\alpha}{2m} [1/S] : \text{Facteur d'amortissement.} \\ \xi = \frac{\delta}{\omega_0} \text{ (Sans unité) : Rapport d'amortissement.} \end{array} \right.$

Nous obtenons donc une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants avec second membre.

III.2 Solution de l'équation différentielle du mouvement

La solution générale de cette équation différentielle est la somme de deux termes :

- Une solution de l'équation **sans** second membre : solution homogène $x_H(t)$,
- Une solution de l'équation **avec** second membre : solution particulière $x_P(t)$.

La solution totale de l'équation du mouvement sera donc : $x(t) = x_H(t) + x_P(t)$

III.2.1 Solution homogène :

La solution homogène correspond à la solution de l'équation différentielle sans second membre :

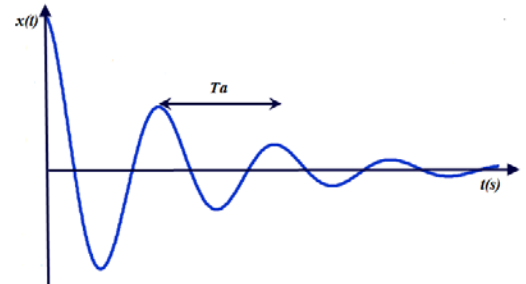
$$\ddot{x} + 2\delta x + \omega_0^2 x = 0$$

Il apparaît que la solution de l'équation différentielle homogène est tout simplement la solution trouvée pour l'oscillateur harmonique amorti en régime libre dans le cas des oscillations faiblement amorties :

$$x_H(t) = C e^{-\delta t} \sin(\omega_a t + \phi) \text{ avec } \omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$

Remarque :

- La solution générale de l'équation sans second membre correspond à un régime **transitoire** (qui ne dure qu'un certain temps).



III.2.2 Solution particulière:

Lorsque la composante $x_H(t)$ devient vraiment négligeable, il ne reste plus que la solution particulière, qui est la solution imposée par la fonction d'excitation. Nous disons que nous sommes en régime forcé ou régime permanent.

La force excitatrice oblige le système mécanique à suivre une évolution temporelle équivalente à la sienne. Donc si F_{ext} est une fonction sinusoïdale de pulsation ω ; alors la solution particulière $x_P(t)$ sera une fonction sinusoïdale de même pulsation ω .

Les oscillations de la masse ne sont pas forcément en phase avec la force excitatrice et présente un déphasage noté ϕ . La solution particulière correspondant au régime permanent s'écrit donc :

$$x_P(t) = A \sin(\omega t + \phi)$$

Pour des raisons pratiques, il est commode d'utiliser la notation complexe. La grandeur complexe associée à $x(t)$ s'écrit :

$$\mathfrak{z}_P(t) = A e^{j(\omega t + \phi)} \text{ et } F_{ext} = F_0 e^{j\omega t}$$

Déterminer les grandeurs A et ϕ revient à chercher le module de l'amplitude complexe.

III.2.2.1 Calcul de l'amplitude A

$\mathfrak{z}_P(t)$ Vérifie l'équation différentielle avec second membre : $\ddot{\mathfrak{z}}_P + 2\delta \dot{\mathfrak{z}}_P + \omega_0^2 \mathfrak{z}_P = \frac{F_0}{m} e^{j\omega t} = B e^{j\omega t} (*)$

Calculons la dérivée première puis le dérivé second :

$$\mathfrak{z}_P(t) = A e^{j(\omega t + \phi)} \Rightarrow \begin{cases} \dot{\mathfrak{z}}_P(t) = A j\omega e^{j(\omega t + \phi)} = j\omega \mathfrak{z}_P(t) \\ \ddot{\mathfrak{z}}_P(t) = A j^2 \omega^2 e^{j(\omega t + \phi)} = -\omega^2 \mathfrak{z}_P(t) \end{cases}$$

On remplace dans (*) et on trouve : $-\omega^2 z_p(t) + 2\delta j\omega z_p(t) + \omega_0^2 z_p(t) = B e^{j\omega t}$

$$\Rightarrow [(\omega_0^2 - \omega^2) + 2\delta\omega j] z_p(t) = [(\omega_0^2 - \omega^2) + 2\delta\omega j] A e^{j(\omega t + \varphi)} = B e^{j\omega t}$$

$$\Rightarrow [(\omega_0^2 - \omega^2) + 2\delta\omega j] A e^{j\varphi} = B$$

On divise sur " $e^{j\varphi}$ " et on trouve: $[(\omega_0^2 - \omega^2) + 2\delta\omega j] A = B e^{-j\varphi} \dots \dots \dots (1)$

Le conjugué de cette équation est la suivante : $[(\omega_0^2 - \omega^2) - 2\delta\omega j] A = B e^{j\varphi} \dots \dots \dots (2)$

$$(1) \times (2) \Rightarrow A^2 [(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\delta\omega)^2] = B^2 \Rightarrow A = \frac{B}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\delta\omega)^2}} = \text{cte}$$

III.2.2.2 Calcul de φ

$$[(\omega_0^2 - \omega^2) + 2\delta\omega j] A = \begin{cases} B e^{-j\varphi} \\ B (\cos\varphi - j \sin\varphi) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A(\omega_0^2 - \omega^2) = B \cos\varphi \\ 2\delta\omega A = -B \sin\varphi \end{cases} \Rightarrow \tan\varphi = \frac{-2\delta\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)}$$

$$\Rightarrow \varphi = \text{Arctg} \left(\frac{-2\delta\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)} \right)$$

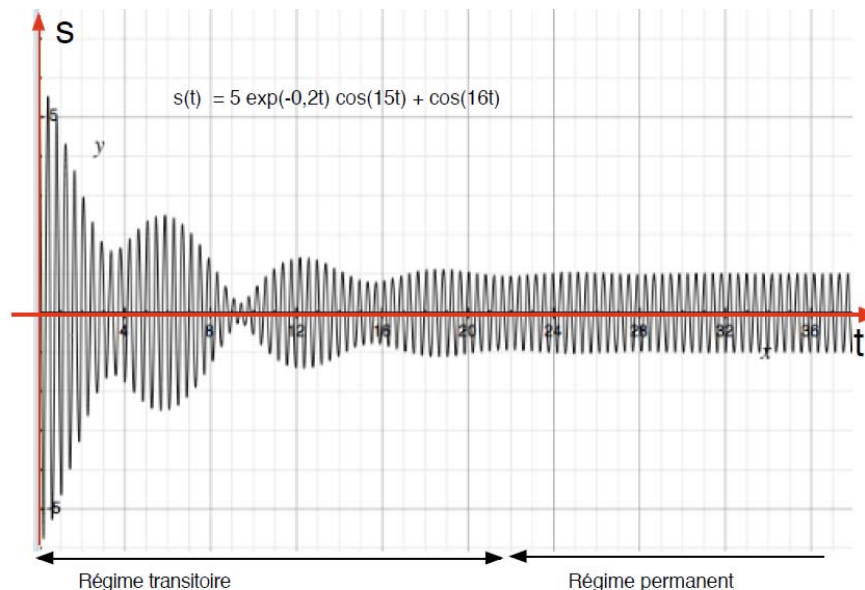
$$\text{Donc : } x_p(t) = \frac{B}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\delta\omega)^2}} \sin \left[\omega t + \text{Arctg} \left(\frac{-2\delta\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)} \right) \right]$$

Remarques:

- La solution générale de l'équation différentielle s'écrit : $x(t) = x_H(t) + x_p(t)$.
- $x_H(t)$ est appelée solution homogène caractérisant un régime transitoire qui disparaît exponentiellement avec le temps. Quand le régime transitoire disparaît : $x(t) \approx x_p(t)$
- $x_p(t)$ est appelée solution particulière d'amplitude $A = \frac{B}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\delta\omega)^2}}$ caractérisant un

régime permanent (stationnaire) car il subsiste aussi longtemps que la force extérieure (F_{ext}) est appliquée. Nous notons la dépendance de l'amplitude A de la pulsation ω .

- La solution $x(t)$ aura donc souvent une allure caractéristique comme celle présentée sur la figure ci-dessous :



III.3 Etude du régime permanent : phénomène de résonance en amplitude

III.3.1 La variation de l'amplitude en fonction de la pulsation de la force pour différentes valeurs de ξ :

Soit $A(\omega)$ l'amplitude de la solution particulière caractérisant le régime permanent (forcé) :

$$A(\omega) = \frac{B}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\delta\omega)^2}}$$

$$A(\omega) = \frac{B}{\omega_0^2 \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + (2\delta)^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} = \frac{B/\omega_0^2}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + (2\xi)^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} = \frac{A_0}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + (2\xi)^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

Tels que : $A_0 = \frac{B}{\omega_0^2}$ et $\xi = \frac{\delta}{\omega_0}$ avec $B = \frac{F_0}{m} \Rightarrow A_0 = \frac{F_0}{m\omega_0^2} = \frac{F_0}{k}$ Donc : $A_0 = \frac{F_0}{k}$

$$A(\omega) = \frac{A_0}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + (2\xi)^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

Posons $r = \frac{\omega}{\omega_0} \Rightarrow A(r) = \frac{A_0}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}}$ et cherchons la valeur maximale de $A(r)$.

$A(\omega)$ est maximale quand le dénominateur est minimal.

Posons $r = \frac{\omega}{\omega_0} \Rightarrow A(r) = \frac{1}{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}$ et cherchons la valeur maximale de $A(r)$.

$$A(r)_{\max} \Leftrightarrow \frac{dA(r)}{dr} = 0 \Rightarrow [2(1-r)^2(-2r) + 8\xi^2 r] = 0$$

$$\frac{dA(r)}{dr} = 0 \Rightarrow -4r[1-r^2-2\xi^2] = 0 \Rightarrow \begin{cases} r = 0 \\ r = \sqrt{1-2\xi^2} \end{cases}$$

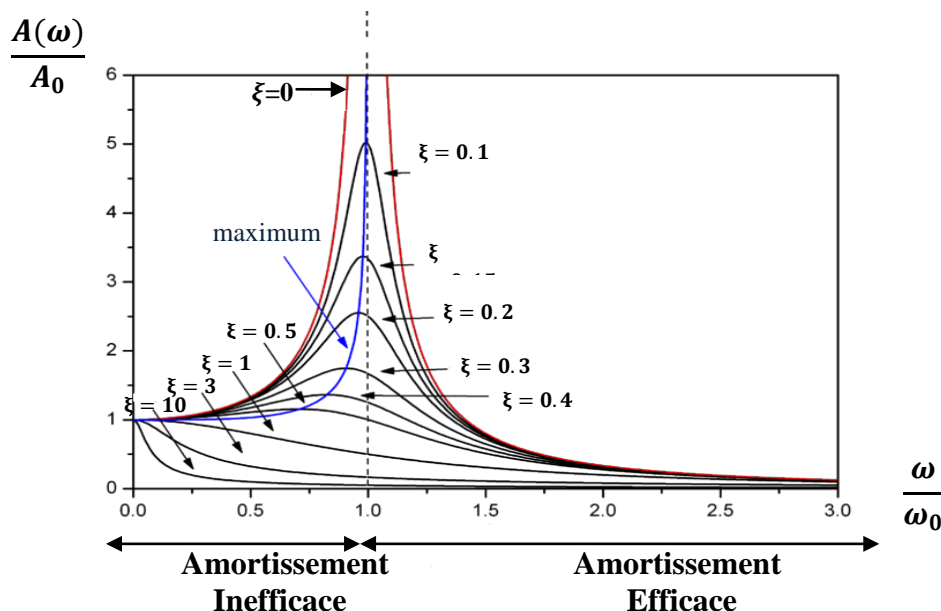
On a un minimum ou un maximum selon le signe du deuxième dérivée :

$$\frac{d^2A(r)}{dr^2} = 12r^2 + 8\xi^2 - 4, \text{ donc : } \begin{cases} r = 0 \Rightarrow \frac{d^2A(r)}{dr^2} = 8\xi^2 - 4 < 0; \text{ car } 0 < \xi < 1 \\ r = \sqrt{1-2\xi^2} \Rightarrow \frac{d^2A(r)}{dr^2} = 8 - 16\xi^2 > 0; \text{ car } 0 < \xi < 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\omega}{\omega_0} = 0 \dots \dots \text{solution refusée} \\ \frac{\omega}{\omega_0} = \sqrt{1-2\xi^2} \end{cases}$$

Donc : $\frac{A(\omega)}{A_0}$ est maximale pour $\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^* = \sqrt{1-2\xi^2} < 1 \Rightarrow \xi < \frac{1}{\sqrt{2}}$

La variation de l'amplitude en fonction de la pulsation de la force pour différentes valeurs de ξ est représentée sur la figure suivante :



Remarques :

- L'amplitude A augmente quand le rapport d'amortissement ξ diminue.
- L'amplitude de vibration atteint un maximum quand $\omega \cong \omega_0$: on dit qu'il ya **résonance** : la valeur maximale $\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^*$ (correspondant à la valeur maximale de l'amplitude) n'est pas égale à 1 mais égale à $\sqrt{1 - 2\xi^2} < 1$.

Discussions:

- Au début d'un mouvement résonnant, lorsque la force est appliquée au système, la majeure partie de l'énergie, fournie lors de chaque cycle, est emmagasinée dans le système; une faible partie se dissipe en frottement. L'énergie ainsi emmagasinée par le système fait augmenter progressivement l'amplitude de ses oscillations jusqu'à une valeur maximum. Cette valeur subsiste tant que subsiste l'apport d'énergie par la force extérieure.
- Plus l'amortissement est faible, plus cette courbe est aigue et plus le maximum est grand : en l'absence d'un amortissement suffisant rien ne viendrait limiter les amplitudes des oscillations à s'amplifier, risque de destruction du système : le système entre en résonance. Les conséquences peuvent être graves. On peut citer deux cas connus :
 - 📖 Le 18 avril 1850 à Angers, un régiment traversant au pas cadencé (harmonieux) un pont suspendu enjambant le Maine provoqua sa destruction.
 - 📖 Le 7 novembre 1940, six mois après son inauguration, le pont suspendu de Tacoma (Etats-Unis) était détruit par les effets des rafales de vent qui sans être particulièrement violentes (60 km.h^{-1}) étaient régulières.

III.3 .2 La variation de la phase en fonction de la pulsation de la force pour différentes valeurs de ξ :

Soit φ la phase initiale de la solution particulière caractérisant le régime permanent (forcé) tel que :

$$tg\varphi = \frac{-2\delta\omega}{(\omega^2_0 - \omega^2)}$$

- Nous remarquons que $tg\varphi$ est négatif. Cela paraît normal qu'il y ait un retard de l'oscillateur par rapport à la force qui entretient le mouvement. L'oscillateur harmonique essaie de suivre le mouvement en étant ralenti par les frottements, donc il doit obligatoirement prendre du retard par rapport à l'oscillation excitatrice donc avoir un déphasage négatif. Ce déphasage est dépendant de la pulsation de la force ω .

$$tg\varphi = \frac{-2\delta\omega}{(\omega^2_0 - \omega^2)} = \frac{-2\delta\omega}{\omega^2_0 \left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)} = -\pi$$

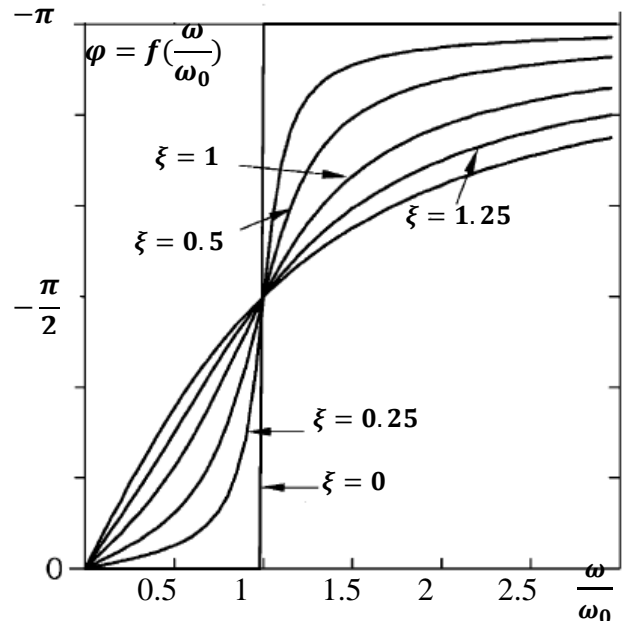
$$\frac{\frac{-2\delta\omega}{\omega^2_0}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} = \frac{-2\left(\frac{\delta}{\omega_0}\right)\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

$$tg\varphi = \frac{-2\xi\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

- Si $\frac{\omega}{\omega_0} = 1 (\omega = \omega_0) \Rightarrow tg\varphi = -\infty \Leftrightarrow \varphi = -\frac{\pi}{2}; \forall \xi$.
- Si $\xi = 0 \Rightarrow tg\varphi = 0 \Leftrightarrow \varphi = 0$ ou $\varphi = -\pi$

Remarques :

- L'oscillateur est en résonance de phase quand $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ pour $\omega = \omega_0$.
- L'oscillateur est toujours en retard de phase par rapport à la force et ce retard augmente lorsque la pulsation augmente.



- L'oscillateur et la force sont en phase pour $\omega = 0$

Conclusions :

Selon la valeur de ξ on a 3 cas possibles :

1^{er} cas : Faibles fréquences : $\xi \ll 1$ ($\omega \ll \omega_0$) $\rightarrow \begin{cases} A \approx A_0 = \frac{F_0}{k} \\ \varphi = 0 \end{cases}$

2^{ème} cas : Hautes fréquences : $\xi \gg 1$ ($\omega \gg \omega_0$) $\rightarrow \begin{cases} A \approx 0 \\ \varphi = -\pi \end{cases}$

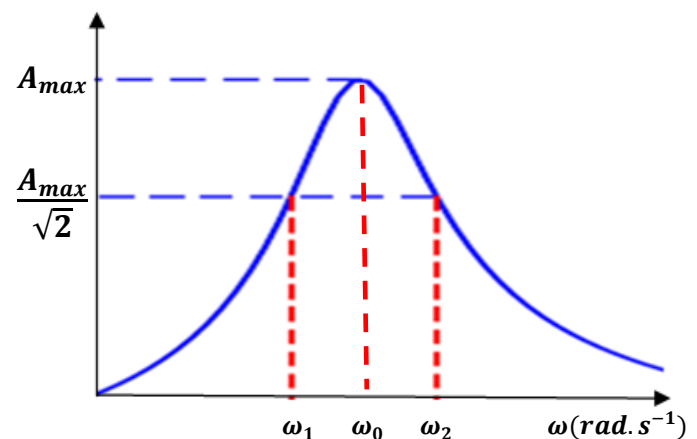
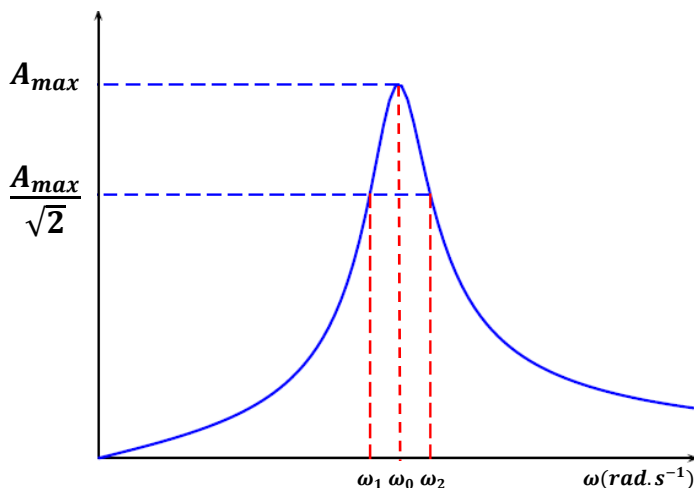
3^{ème} cas : La résonance : $\xi = 1$ ($\omega \approx \omega_0 \approx \omega_r$) $\rightarrow \begin{cases} \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^* = \sqrt{1 - 2\xi^2}, \frac{A_{max}}{A_0} = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}, \\ \varphi = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$

Remarques:

- Si $\xi = 0$ (système non amorti) : l'amplitude tend vers l'infini or en réalité, les systèmes sont tous amortis donc l'amplitude n'est jamais infini.
- Si $\xi \ll 1$ (système faiblement amorti) : $\frac{A_{max}}{A_0} \approx \frac{1}{2\xi}$; ($\omega \approx \omega_0 \approx \omega_r$)

III.3.3 Phénomène de résonance et Facteur de qualité

- Dans les systèmes électriques, ce phénomène permet de calculer le facteur de qualité Q qui augmente lorsque l'amplitude maximale augmente $Q = \frac{A_{max}}{A_0} \approx \frac{1}{2\xi}$.
- Une autre méthode pratique pour déterminer le facteur de qualité : $Q = \frac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1}$
- Pour caractériser l'acuité (intensité) de la réponse d'un oscillateur en fonction de la pulsation, on définit une **bande passante** : $\omega_2 - \omega_1$



La bande passante est la largeur mesurée en hertz, d'une plage de fréquence, elle peut aussi décrire un signal, tout simplement c'est la différence entre la plus haute fréquence et la plus basse fréquence d'un signal. Exemple : Signal téléphonique 300Hz-3400Hz, Voix : 50Hz-3KHz.....etc

Conclusions :

- Quand ξ augmente $\Rightarrow Q$ diminue $\Rightarrow \omega_2 - \omega_1$ augmente \Rightarrow la courbe de résonance est plus large \Rightarrow diminution de l'amplitude de résonance donc de la qualité aussi.
- Les extrémités de la bande passante correspondent à une amplitude de vitesse $\sqrt{2}$ fois plus petite qu'à la résonance.

**Points clefs****Oscillations forcées amorties****1. Un mouvement unidimensionnel x :**

❖ L'équation de Lagrange :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = - \frac{\partial D}{\partial \dot{x}} + F_{ext} ; \quad D = \frac{1}{2} \alpha \dot{x}^2, F_{ext} = F_0 \sin \omega t$$

❖ l'équation différentielle sous la forme réduite : $\ddot{x} + 2\delta \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \sin \omega t$

❖ Solution de l'équation différentielle du mouvement: $x(t) = x_H(t) + x_P(t)$

❖ La solution homogène: $x_H(t) = C e^{-\delta t} \sin(\omega_a t + \phi)$ avec $\omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$

❖ La solution particulière: $x_P(t) = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\delta\omega)^2}} \sin(\omega t + \text{Arctg}(\frac{-2\delta\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)}))$

❖ La variation de l'amplitude en fonction de la pulsation de la force :

$$\frac{A(\omega)}{A_0} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + (2\xi)^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} \Rightarrow \left\{ \frac{A(\omega)}{A_0} \text{ est maximale pour } \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^* = \sqrt{1 - 2\xi^2} \right.$$

$$\text{tg} \varphi = \frac{-2\xi \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\omega}{\omega_0} = 1 \Rightarrow \text{tg} \varphi = -\infty \Leftrightarrow \varphi = -\frac{\pi}{2}; \forall \xi \\ \xi = 0 \Rightarrow \text{tg} \varphi = 0 \Leftrightarrow \varphi = 0 \text{ ou } \varphi = -\pi \end{cases}$$

➤ **Faibles fréquences** : $\xi \ll 1$ ($\omega \ll \omega_0$) $\rightarrow \begin{cases} A \approx A_0 = \frac{F_0}{k} \\ \varphi = 0 \end{cases}$

➤ **Hautes fréquences** : $\xi \gg 1$ ($\omega \gg \omega_0$) $\rightarrow \begin{cases} A \approx 0 \\ \varphi = -\pi \end{cases}$

➤ **La résonance** : $\xi = 1$ ($\omega \approx \omega_0 \approx \omega_r$) $\rightarrow \begin{cases} \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^* = \sqrt{1 - 2\xi^2}, \frac{A_{max}}{A_0} = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}, \\ \varphi = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$

❖ **Le facteur de qualité** : $Q = \frac{A_{max}}{A_0} \approx \frac{1}{2\xi} = \frac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1}$

2. Un mouvement rotationnel θ :

❖ L'équation de Lagrange :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = - \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} + \left| \frac{\partial r}{\partial \theta} \right| \cdot F_{ext} ; \quad r : \text{est la direction d'action de la force } F_{ext}$$