Université de A.MIRA de Béjaïa
Faculté de la Technologie
Départements 2ème Année L_2 : GP–GM

Prob-Stat

Durée : 01H30

® 2021-2022

✠–Examen Final de Probabilités et Statistiques–✠

Exercice 1 : (06.00 Points) Une urne contient 10 boules indiscernables au toucher : 2 noires, 3 blanches et 5 rouges. On tire simultanément et au hasard 3 boules de cette urne.

1. Donner le nombre de tirages possibles.
2. Donner le nombre de tirages possibles pour les événements suivants :
   - A : "Avoir 3 boules blanches",
   - B : "Avoir 3 boules de couleurs différentes",
   - C : "Avoir 3 boules de la même couleur".
3. Calculer les probabilités suivantes $P(A)$, $P(B)$ et $P(C)$.

Exercice 2 : (07.00 Points) Une compagnie d'aéronautique s'approvisionne chez trois fournisseurs afin d'obtenir un certain type de réacteurs. 40% de ces réacteurs sont commandés chez le fournisseur A, 35% sont commandés chez le fournisseur B et 25% sont commandés chez le fournisseur C. Les contrôles effectués par la compagnie ont révélé que seulement 2% des réacteurs fabriqués par le fournisseur A sont défectueux tandis que les pourcentages correspondants pour les fournisseurs B et C s'élèvent respectivement à 5% et 6%. On s'apprête à vérifier l'état d'un réacteur prélevé au hasard dans l'ensemble des réacteurs en stock chez la compagnie.

1. Quelle est la probabilité pour que le réacteur examiné soit défectueux ? Quelle est la probabilité pour qu'il ne soit pas défectueux ?
2. Si le réacteur est défectueux, quelle est la probabilité qu'il provienne :
   a) du fournisseur A ? b) du fournisseur B ? c) du fournisseur C ?
3. Si l'examen du réacteur révèle que celui-ci n'est pas défectueux, que deviennent la probabilité pour qu'il provienne du fournisseur A ?

Exercice 3 : (07.00 Points) Soit X une variable aléatoire dont la loi de probabilité est définie par :

x	-3	0	3	6
$P(X=x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	k	$\frac{1}{8}$

1. Déterminer la valeur de k.
2. Déterminer la fonction de répartition et tracer son graphe.
3. Calculer $P(X \geq 3)$ et $P(0 \leq X \leq 3)$.
4. Calculer l'espérance $(E(X))$ et la variance $(V(X))$ de la variable aléatoire X.

Bonne Chance

© Boualem & Bensaid

✠– Corrigé de l'Examen Final– Probabilités et Statistiques–✠

Exercice 1 (**Corrigé de l'Exercice 1–(06.00 Points)**) :
Un tirage simultané de 3 boules parmi 10 est une combinaison sans répétition de 3 éléments parmi 10. **(00.50 pts)**

1. Le nombre de tirages possibles est

$$\begin{aligned} |\Omega| = C_{10}^3 &= \frac{10!}{3!(10-3)!} \\ &= 120 \text{ tirages.} \quad \textbf{(01.00 pts)} \end{aligned}$$

2. • Le nombre de tirages de 3 boules blanches est :

$$|A| = C_3^3 = 1 \text{ tirages.} \quad \textbf{(01.00 pts)}$$

   • Un tirage de trois boules de couleurs différentes (une boule blanche, une boule rouge et une boule noire). Le nombre de tirages possibles est :

$$\begin{aligned} |B| &= C_2^1 \times C_3^1 \times C_5^1 = 2 \times 3 \times 5 \\ &= 30 \text{ tirages.} \quad \textbf{(01.00 pts)} \end{aligned}$$

   • Le nombre de tirages de 3 boules de la même couleur est :

$$\begin{aligned} |C| &= C_3^3 + C_5^3 = 1 + 10 \\ &= 11 \text{ tirages.} \quad \textbf{(01.00 pts)} \end{aligned}$$

3. Calcul des probabilités $P(A)$, $P(B)$ et $P(C)$:

$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{1}{120}. \quad \textbf{(00.50 pts)} \\ P(B) &= \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{30}{120}. \quad \textbf{(00.50 pts)} \\ P(C) &= \frac{|C|}{|\Omega|} = \frac{11}{120}. \quad \textbf{(00.50 pts)} \end{aligned}$$

Exercice 2 (**Corrigé de l'Exercice 2–(07.00 Points)**) :
On commence par définir les événements suivants :

E_1 : "Le réacteur est commandé chez le fournisseur A"
E_2 : "Le réacteur est commandé chez le fournisseur B"
E_3 : "Le réacteur est commandé chez le fournisseur C"
E : "Le réacteur est défectueux (NON conforme)" **(00.50 pts)**

Les données de l'exercice par rapport aux évènements définis précédemment :
$P(E_1) = 0.4$; $P(E/E_1) = 0.02$; $P(E_2) = 0.35$; $P(E/E_2) = 0.05$; $P(E_3) = 0.25$; $P(E/E_3) = 0.06$. **(00.50 pts)**

1. Probabilité pour que le réacteur soit défectueux (présente un défaut) : (On utilise la formule de cours : Formule des Probabilités Totales (FPT)).

$$\begin{aligned} P(E) &= P(E \cap E_1) + P(E \cap E_2) + P(E \cap E_3) \\ &= P(E/E1)P(E_1) + P(E/E_2)P(E_2) + P(E/E_3)P(E_3) = 0.0405. \quad \textbf{(01.00 pts)} \end{aligned}$$

   • Probabilité pour que le réacteur soit conforme :

$$P(\overline{E}) = 1 - P(E) = 0,9595. \quad \textbf{(01.00 pts)}$$

2. Le réacteur est non conforme, la probabilité pour qu'il provienne : (Ici, on utilise la formule de cours : Formule de Bayes).
   ▷ du fournisseur A :

$$P(E_1/E) = \frac{P(E_1 \cap E)}{P(E)} = \frac{P(E/E_1)P(E_1)}{P(E)} = 0.1975. \quad \textbf{(01.00 pts)}$$

   ▷ du fournisseur B :

$$P(E_2/E) = \frac{P(E_2 \cap E)}{P(E)} = \frac{P(E/E_2)P(E_2)}{P(E)} = 0.4320. \quad \textbf{(01.00 pts)}$$

   ▷ du fournisseur C :

$$P(E_3/E) = \frac{P(E_3 \cap E)}{P(E)} = \frac{P(E/E_3)P(E_3)}{P(E)} = 0.3703. \quad \textbf{(01.00 pts)}$$

3. Si l'examen du réacteur révèle que celui-ci n'est pas défectueux, alors la probabilité pour qu'il provienne :
   ▷ du fournisseur A :

$$P(E_1/\overline{E}) = \frac{P(E_1 \cap \overline{E})}{P(\overline{E})} = \frac{P(\overline{E}/E_1)P(E_1)}{P(\overline{E})} = \frac{[1 - P(E/E_1)]P(E_1)}{P(\overline{E})} = 0.4085. \quad \textbf{(01.00 pts)}$$

Exercice 3 **(Corrigé de l'Exercice 3–(07.00 Points))** :

X	- 3	0	3	6
$P[X = x]$	1/8	3/8	k =3/8	1/8

1. Calcul de la constante k :

$$\sum_{i=1}^{i=4} P(X = x_i) = 1 \Rightarrow k = \frac{3}{8}. \quad \textbf{(01.00 pts)}$$

2. La fonction de répartition :

$$F(x) = P(X \le x) = \begin{cases} 0, & \text{si } \; x < -3, \\ \frac{1}{8}, & \text{si } \; -3 \le x < 0, \\ \frac{4}{8}, & \text{si } \; 0 \le x < 3, \\ \frac{7}{8}, & \text{si } \; 3 \le x < 6, \\ 1, & \text{si } \; x \ge 6. \end{cases} \quad \textbf{(01.00 pts)}$$

   Le graphe de $F(x)$: Voir le Cours (fonction en escaliers). **(01.00 pts)**

3. ▷ $P(X \ge 3) = P(X = 3) + P(X = 6) = \frac{1}{2}$. **(01.00 pts)**
   ▷ $P(0 \le X \le 3) = P(X = 0) + P(X = 3) = \frac{3}{4}$. **(01.00 pts)**

4. Calcul de :
   - ▷ $E(X) = \sum_{i=1}^{i=4} x_i P(X = x_i) = \frac{3}{2}$. **(01.00 pts)**
   - ▷ $E(X^2) = \sum_{i=1}^{i=4} x_i^2 P(X = x_i) = 9$.
   - ▷ $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{27}{4}$. **(01.00 pts)**

Bonne Chance

© Mr Boualem