TD N°4

Réponses temporelles des systèmes

Exercice N°1

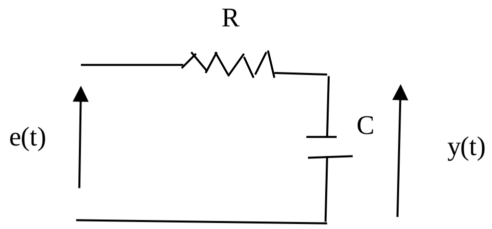
Calculer la réponse indicielle et la réponse impulsionnelle des deux systèmes définie par les fonctions de transfert suivantes:

$$G_1(p) = \frac{2(p+1)}{p(p+3)^2}$$

$$G_2(p) = \frac{p+4}{(p+1)(p^2-4p+4)}$$

Exercice N°2

Considérons le circuit RC présenté sur la figure suivante:



Le signal d'entrée injecté est $e(t) = 3t$.

Donner l'expression de y(t).

Exercice N°3

On considère un système du second ordre d'équation :

$\ddot{y} + 0.4\dot{y} + 0.25y = e$.

1. Ecrire la fonction de transfert selon la forme.
2. Donner la valeur de K, la fréquence propre f_0 et du facteur d'amortissement ξ.

Exercice N°4

Pour chacun des systèmes suivants du 2ème ordre, calculez ξ, ω_0, t_p, t_r, t_s, à 5% et d% :

$$G_1(p) = \frac{120}{p^2+12p+120}$$

$$G_2(p) = \frac{0.01}{p^2+0.002p+0.01}$$

Solution de TD N°4

Exercice N°1

- $G_1(p) = \frac{2(p+1)}{p(p+3)^2}$

La réponse indicielle :

$e(t) = 1 \Rightarrow E(p) = \frac{1}{p}$

$$Y(p) = \frac{2(p+1)}{p^2(p+3)^2} = \frac{2/9}{p^2} + \frac{2/27}{p} - \frac{4/9}{(P+3)^2} - \frac{2/27}{p+3}$$

$y(t) = L^{-1}(Y(p))$

$$y(t) = \left[\frac{2}{9}t + \frac{2}{27} - \frac{4}{9}te^{-3t} - \frac{2}{27}e^{-3t}\right]u(t)$$

La réponse impulsionnelle :

$g(t) = \frac{dy(t)}{dt} = \frac{2}{9} + \frac{4}{3}te^{-3t} - \frac{2}{9}e^{-3t}$

- $G_2(p) = \frac{p+4}{(p+1)(p^2+p+1)}$

La réponse indicielle :

$$e(t) = 1 \Rightarrow E(p) = \frac{1}{p}$$

$$Y(p) = \frac{4}{p} - \frac{3}{p+1} + \frac{2.1 \times e^{76j}}{p - \left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} + \frac{2.1 \times e^{-76j}}{p - \left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$$

$$y(t) = 4 - 3e^{-t} + 4.2e^{-\frac{t}{2}}\cos\left(76 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)t$$

La réponse impulsionnelle

$$g(t) = \frac{dy(t)}{dt} = 3e^{-t} - 2.1e^{\frac{-t}{2}}\cos\left(76 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)t + 4.2e^{-\frac{t}{2}}\left(76 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\sin\left(76 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)t$$

Exercice N°2

L'équation différentielle de circuit :

$e(t) = Ri(t) + s(t)$

$$i(t) = C\frac{ds(t)}{dt}$$

On obtient : $RC\frac{ds}{dt} + s(t) = e(t)$

La fonction de transfert :

$G(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{1}{1+RCp}$

$e(t) = 3t \quad \Rightarrow E(p) = \frac{3}{p^2}$

$S(p) = \frac{3}{p^2(RCp+1)}$

$s(t) = 3RC\left(e^{-\frac{t}{RC}} + \frac{t}{RC} - 1\right)u(t)$

Exercice N°3

$p^2Y(p) + 0.4pY(p) + 0.25Y(p) = E(p)$

$[p^2 + 0.4p + 0.25]Y(p) = E(p) \Rightarrow G(p) = \frac{Y(p)}{E(p)} = \frac{1}{p^2 + 0.4p + 0.25} = \frac{4}{1 + \frac{0.4}{0.25}p + \frac{p^2}{(0.25)^2}}$

K=4 ; $\omega_n = 0.5\, rad/s$; $\xi = 0.4$

Exercice N°4

- $G_1(p) = \frac{120}{p^2+12p+120} = \frac{1}{1+\frac{1}{10}p+\frac{1}{120}p^2}$

$$\begin{cases} \xi = 0.548 \\ \omega_0 = 10.95\, rad/s \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_m = 0.235\, s \\ t_p = 0.343\, s \\ t_s = 0.5\, s \\ d\% = 12.78\% \end{cases}$$

- $G_2(p) = \frac{0.01}{p^2+0.002p+0.01} = \frac{1}{1+0.2p+100p^2}$

$$\begin{cases} \xi = 0.01 \\ \omega_0 = 0.1\, rad/s \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_m = 15.8\, s \\ t_p = 31.4\, s \\ t_s = 3 \times 10^3 s = 50\, mn \\ d\% = 96.9\% \end{cases}$$