Corrigé Examen Final PST (L3)

(10/02/2022)

Exercice 1 : **(5 pts)**

Soit X la variable aléatoire dont la fonction de densité est :

$$f(x) = \begin{cases} c(1-x^2)\,; & si\ -1 < x < 1 \\ 0\ ; & sinon \end{cases}$$

a) Calculer la valeur de c.
b) Calculer la fonction de répartition de X.
c) Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

Solution :

a) Comme f est une densité, elle vérifie : $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$; d'où :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{-1} f(x)dx + \int_{-1}^{+1} f(x)dx + \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-1}^{+1} f(x)dx = 1$$

Or,

$$\int_{-1}^{+1} f(x)dx = \int_{-1}^{+1} c(1-x^2)dx = \left[cx - \frac{cx^3}{3}\right]_{-1}^{+1} = \left(c - \frac{c}{3}\right) - \left(-c + \frac{c}{3}\right) = 2c - \frac{2c}{3} = \frac{4c}{3}.$$

On en tire que : $c = \frac{3}{4}$. **(1,5)**

b) Calcul de la fonction de répartition :

$$F_X(x) = P(X \le x)$$

$$= \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \begin{cases} 0\ ; & si\ x \le -1 \\ \frac{3}{4}\int_{-1}^{x}(1-t^2)dt = \frac{3}{4}\left[t - \frac{t^3}{3}\right]_{-1}^{x} = \frac{3}{4}\left(x - \frac{x^3}{3}\right) + \frac{1}{2}\,; & si\ -1 < x < 1 \quad (2) \\ 1\ ; & si\ x \ge 1 \end{cases}$$

c) Calcul de l'espérance et de la variance :

- $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_{-1}^{+1} xf(x)dx = \frac{3}{4}\int_{-1}^{+1} \underbrace{x(1-x^2)}_{fonction\ impaire}\, dx = \frac{3}{4}\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{+1} = 0.\ (0,75)$
- $V(X) = E(X^2) - \underbrace{E^2(X)}_{0} = E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx$

$$= \int_{-1}^{+1} x^2 f(x)dx = \frac{3}{4}\int_{-1}^{+1} x^2(1-x^2)dx = \frac{3}{4}\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right]_{-1}^{+1} = \frac{1}{5}.\ (0,75)$$

Exercice 2 : (5)

Soit k un entier naturel et X une variable aléatoire uniforme sur les nombres pairs entre 0 et $2k$.

a) Déterminer la loi de X puis calculer $E(X)$ et $V(X)$.

b) On pose $Y = \frac{X}{2} + 1$, montrer que Y suit une loi usuelle et retrouver ainsi $E(X)$ et $V(X)$.

(rappel : $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$; $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$).

Solution :

a) Loi de X et calcul de $E(X)$ et $V(X)$:

- Loi de X : Comme X suit la loi uniforme sur le nombre pairs entre 0 et $2k$ qui sont au nombre de $k+1$, alors $P(X = 2i) = \frac{1}{k+1}, i = 0, \dots k$.
- $E(X) = \sum_{i=0}^{k} 2i.P(X = 2i) = \sum_{i=0}^{k} 2i.\frac{1}{k+1} = \frac{2}{k+1}\sum_{i=0}^{k} i = \frac{2}{k+1}\frac{k(k+1)}{2} = k$. (2)
- $V(X) = E(X^2) - E^2(X) = E(X^2) - k^2$.

$$E(X^2) = \sum_{i=0}^{k} (2i)^2.P(X = 2i) = \sum_{i=0}^{k} 4i^2.\frac{1}{k+1} = \frac{4}{k+1}\sum_{i=0}^{k} i^2 = \frac{4}{k+1}\frac{k(k+1)(2k+1)}{6} = \frac{2k(2k+1)}{3}$$

D'où :

$$V(X) = E(X^2) - k^2 = \frac{2k(2k+1)}{3} - k^2 = \frac{k^2+2k}{3}.\ (2)$$

b) $Y = \frac{X}{2} + 1 \Longrightarrow Y(\Omega) = \{1, 2, \dots, k+1\}$. D'autre part,

$P(Y = i) = P(X = 2i - 2) = \frac{1}{k+1}, \forall i = 1, \dots, k+1$; ce qui montre que $Y \hookrightarrow \mathcal{U}[\![1, k+1]\!]$. Ainsi,

$E(Y) = \frac{1+(k+1)}{2} = \frac{k+2}{2}$ et $V(Y) = \frac{(k+1)^2-1}{12} = \frac{k^2+2k}{12}$ (voir le cours sur la loi uniforme).

Comme $E(X) = 2E(Y) - 2$, alors $E(X) = 2.\frac{k+2}{2} - 2 = k$ et $V(X) = 4V(Y) = 4.\frac{k^2+2k}{12} = \frac{k^2+2k}{3}$.

On retrouve ainsi les résultats établis en b). (1)

Exercice 3 : (6)

Une classe compte 30 élèves dont 20 sont des filles. A chaque cours de Mathématiques, le professeur interroge au hasard un(e) élève de la classe sans se rappeler quels élèves il a déjà interrogés. On considère un entier $n \geq 0$ et on note X la variable aléatoire qui correspond au nombre de filles interrogées au cours de n jours consécutifs.

a) Déterminer la loi de X puis calculer $E(X)$ et $V(X)$.

b) Quelle est la probabilité que sur 10 jours consécutifs soit interrogées 4 filles exactement ? au moins 4 filles ?

c) Quel doit être le nombre minimal de cours consécutifs pour que la probabilité qu'aucune fille ne soit interrogée soit inférieure à 0,001 ?

Solution :

a) La variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres n et $p = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$. Autrement dit $X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \frac{2}{3}\right)$. De ce fait ;

$P(X = k) = C_{n}^{k}.\left(\frac{2}{3}\right)^{k}.\left(\frac{1}{3}\right)^{n-k}, k = 0, 1, \dots n$ **(2)** ; $E(X) = n.\frac{2}{3} = \frac{2n}{3}$ **(0,5)** et

$V(X) = n.\frac{2}{3}.\frac{1}{3} = \frac{2n}{9}$. **(0,5)**

b) Pour $n = 10$ et $k = 4$, on a : $P(X = 4) = C_{10}^{4}.\left(\frac{2}{3}\right)^{4}.\left(\frac{1}{3}\right)^{6} = 210.\frac{16}{81}.\frac{1}{729} = 0,057.$ **(1)**

$$P(X \geq 4) = 1 - P(X < 4) = 1 - \big(P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)\big)$$

$$= C_{10}^{0}.\left(\frac{2}{3}\right)^{0}.\left(\frac{1}{3}\right)^{10} + C_{10}^{1}.\left(\frac{2}{3}\right)^{1}.\left(\frac{1}{3}\right)^{9} + C_{10}^{2}.\left(\frac{2}{3}\right)^{2}.\left(\frac{1}{3}\right)^{8} + C_{10}^{3}.\left(\frac{2}{3}\right)^{3}.\left(\frac{1}{3}\right)^{7}$$

$= 1 - (0.000 + 0,000 + 0,003 + 0.016) = 0.981.$ **(1)**

c) On cherche n de telle façon que :

$$P(X = 0) = C_{n}^{0}.\left(\frac{2}{3}\right)^{0}.\left(\frac{1}{3}\right)^{n} < 10^{-3} \Leftrightarrow 3^{n} > 10^{3} \Leftrightarrow n > 6,286.$$

Le nombre de jours consécutifs minimal répondant à la question est égal à 7. **(1)**

Exercice 4 : **(4)**

Soit X la variable aléatoire comptant le nombre d'occurrences de « Pile » dans une série de 40 jets d'une pièce de monnaie équilibrée. Calculer la valeur exacte de $P(X = 20)$ puis par approximation normale (justifier). Comparer les deux résultats.

Solution :

La variable aléatoire X comptant le nombre d'occurrences de « Pile » suit la loi binomiale de paramètres $n = 40$ et $p = \frac{1}{2}$. Autrement dit, $X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(40,\ \frac{1}{2}\right)$.

- **Calcul de la valeur exacte de $P(X = 20)$:**

$$P(X = 20) = C_{40}^{20}.\left(\frac{1}{2}\right)^{20}.\left(\frac{1}{2}\right)^{40-20} = \frac{137846528820}{1099511627776} = 0,1254.\ (2)$$

- **Par approximation normale :**

Justification : $n = 40 \geq 30,\ np = 40.\frac{1}{2} = 20 \geq 5$ et $nq = 40.\frac{1}{2} = 20 \geq 5$.

$P(X = 20) \cong P(19,5 < Y < 20,5)$, où $Y \hookrightarrow \mathcal{N}(20,\ \sqrt{10})$; d'où :

$$P(X = 20) \cong P(19,5 < Y < 20,5) = P\left(\frac{19,5 - 20}{\sqrt{10}} < \frac{Y - 20}{\sqrt{10}} < \frac{20,5 - 20}{\sqrt{10}}\right)$$

$$= P\left(\frac{-0,5}{\sqrt{10}} < Y^* < \frac{0,5}{\sqrt{10}}\right) = P(-0,16 < Y^* < 0,16),\ \text{où}\ Y^* \hookrightarrow \mathcal{N}(0,\ 1)$$

$$= F_{Y^*}(0,16) - F_{Y^*}(-0,16)$$

$$= F_{Y^*}(0,16) - \left(1 - F_{Y^*}(0,16)\right)$$

$$= 2F_{Y^*}(0,16) - 1$$

$$= 2.\underbrace{(0,5636)}_{voir\ table} - 1 = 0,1272$$

Les deux résultats sont sensiblement égaux (à 2 millièmes prés), l'approximation est bonne. (2)

Fin.