Td calcul propositionnel, section1 2020-2021

Exercice1 :

Construire une table de vérité pour chacune des propositions suivantes :

1. $p \Longrightarrow \bar{q}$ 2. $\bar{p} \Leftrightarrow q$ 3. $(p \Longrightarrow q) \vee (\bar{p} \Longrightarrow q)$ 4. $(p \Leftrightarrow q) \vee (\bar{p} \Leftrightarrow q)$

5 . $p \Longrightarrow (\bar{q} \vee r)$ 6. $\bar{p} \Longrightarrow (q \Longrightarrow r)$

Solution :

p	q	$\bar{q}$	$p \Longrightarrow \bar{q}$
1	1	0	0
1	0	1	1
0	1	0	1
0	0	1	1

p	q	$\bar{p}$	$\bar{p} \Leftrightarrow q$
1	1	0	0
1	0	0	1
0	1	1	1
0	0	1	0

p	q	$\bar{p}$	$p \Longrightarrow q$	$\bar{p} \Longrightarrow q$	$(p \Longrightarrow q) \vee (\bar{p} \Longrightarrow q)$
1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	1	1
0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	0	1

p	q	$\bar{p}$	$p \Leftrightarrow q$	$\bar{p} \Leftrightarrow q$	$(p \Leftrightarrow q) \vee (\bar{p} \Leftrightarrow q)$
1	1	0	1	0	1
1	0	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1
0	0	1	1	0	1

p	q	r	$\bar{q}$	$\bar{q} \vee r$	$p \Longrightarrow (\bar{q} \vee r)$
1	1	1	0	1	1
1	1	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	1	1
0	1	0	0	0	1
0	0	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1

p	q	r	$\bar{p}$	$q \Rightarrow r$	$\bar{p} \Rightarrow (q \Rightarrow r)$
1	1	1	0	1	1
1	1	0	0	0	1
1	0	1	0	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1
0	1	0	1	0	0
0	0	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1

Exercice 3 :

Sans utiliser de table de vérité, et on utilisant l'exercice 2, et la définition logique de l'implication, montrer que :

$$[p \Rightarrow (q \wedge r)] \Leftrightarrow [(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)]$$

Solution :

$$p \Rightarrow (q \wedge r) \overset{def}{\Leftrightarrow} \bar{p} \vee (q \wedge r) \overset{exo2.6}{\Leftrightarrow} (\bar{p} \vee q) \wedge (\bar{p} \vee r) \overset{def}{\Leftrightarrow} (p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)$$

Exercice 4 :

On utilisant les lois de Morgan, les définitions et sans utiliser de table de vérité montrer que :

1. $[\,\overline{p \wedge q} \vee r] \Leftrightarrow [(p \Rightarrow r) \vee (q \Rightarrow r)]$
2. $\overline{p \Rightarrow q} \Leftrightarrow (p \wedge \bar{q})$
3. $(\bar{p} \wedge \bar{q}) \Leftrightarrow \overline{\bar{p} \Rightarrow q}$

Solution :

1. $[(\overline{p \wedge q} \vee r] \overset{Morgan}{\Leftrightarrow} [(\bar{p} \vee \bar{q}) \vee r] \overset{exos.cour}{\Leftrightarrow} ((\bar{p} \vee \bar{q}) \vee (r \vee r) \overset{exos2}{\Leftrightarrow} (\bar{p} \vee r) \vee (\bar{q} \vee r)$

$$\overset{def}{\Leftrightarrow} (p \Rightarrow r) \vee (q \Rightarrow r)$$

2. $\overline{p \Rightarrow q} \overset{def}{\Leftrightarrow} \overline{\bar{p} \vee q} \overset{morgan}{\Leftrightarrow} \bar{\bar{p}} \wedge \bar{q} \Leftrightarrow p \wedge \bar{q}$
3. $(\bar{p} \wedge \bar{q}) \overset{Morgan}{\Leftrightarrow} \overline{p \vee q} \overset{def}{\underbrace{\Leftrightarrow}_{exos.cour}} \overline{\bar{p} \Rightarrow q}$

Exercice 5 :

Expliquer sans utiliser de table de vérité pourquoi la proposition suivante est vraie lorsque $p,\ q,\ et\ r$ ont même valeur de vérité, et fausse sinon :

$$(p \vee \bar{q}) \wedge (q \vee \bar{r}) \wedge (r \wedge \bar{p})$$

Solution :

les trois propositions sont vraies alors $p \vee \bar{q}$ est vraie car p est vraie, $q \vee \bar{r}$ est vraie car q est vraie, et $r \wedge \bar{p}$ est vraie car r est vraie, donc leur conjonction $(p \vee \bar{q}) \wedge (q \vee \bar{r}) \wedge (r \vee \bar{p})$ est vraie aussi.

Si les trois propositions sont fausses, alors la négation de chacune d'elles est vraie et on tombe dans le cas précédant. Donc dans le cas ou les trois propositions p, q, r ont même valeur de vérité

alors la proposition $(p \vee \bar{q}) \wedge (q \vee \bar{r}) \wedge (r \wedge \bar{p})$ est vraie.
Si maintenant on a par exemple p vraie, q fausse et r vraie, alors q est fausse et r est fause et donc la disjonction $(q \vee \bar{r})$ est fausse et donc la conjonction $(p \vee \bar{q}) \wedge (q \vee \bar{r}) \wedge (r \wedge \bar{p})$ est fausse. On peut étudier les autres cas de la même façon.

Exercice 6 :

1. Expliquer sans utiliser de table de vérité pourquoi la proposition suivante est vraie lorsqu'au moins l'une des propositions p, q , r est vraie et au moins l'une d'elles est fausse, et qu'elle est fausse si les trois propositions p, q , r ont même valeur de vérité :

$$(p \vee q \vee r) \wedge (\bar{p} \vee \bar{q} \vee \bar{r})$$

2. Vérifier les résultats en utilisant une table de vérité.

Solution :

1. Si au moins l'une d'entre les propositions p, q, r est vraie alors la disjonction $(p \vee q \vee r)$ est vraie, et si au moins l'une d'entre les propositions p, q, r est fausse alors l'une d'entre les propositions $\bar{p}, \bar{q}, \bar{r}$ est vraie, et donc la disjonction $(\bar{p} \vee \bar{q} \vee \bar{r})$ est vraie, et donc la conjonction $(p \vee q \vee r) \wedge (\bar{p} \vee \bar{q} \vee \bar{r})$
2.

p	q	r	$\bar{p}$	$\bar{q}$	$\bar{r}$	$p \vee q \vee r$	$\bar{p} \vee \bar{q} \vee \bar{r}$	$(p \vee q \vee r) \wedge (\bar{p} \vee \bar{q} \vee \bar{r})$
1	1	1	0	0	0	1	1	0
1	1	0	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	0	0	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1	1	1	1
0	0	1	1	1	0	1	1	1
0	0	0	1	1	1	0	1	0

Nous remarquons que la conjonction $(p \vee q \vee r) \wedge (\bar{p} \vee \bar{q} \vee \bar{r})$ est vraie dans les cas des lignes 2 à 7, et dans ces lignes l'une au moins des propositions p, q, r est vraie et l'une au moins des ces propositions est fausse.

On remarque aussi qu'elle est fausse dans le cas de la première ligne et le cas de la huitième ligne, là où les propositions p, q, r ont même valeur de vérité.

Exercice 7 :

Ecrire la négation de la proposition suivante :

$$\forall x \in A, \exists b \in B : p(a, b) \Longrightarrow q(a, b)$$

Solution :

Rappelons que : $\overline{p \Longrightarrow q} \Leftrightarrow p \; et \; \bar{q}$

On a donc :

$$\overline{\forall x \in A, \exists b \in B: p(a,b) \Longrightarrow q(a,b)} \Leftrightarrow \exists x \in A, \forall b \in B: p(,a,b)\ et\ \overline{q(a,b)}$$

Exercice 8 :

Soit $f: R \to R$
On dit que f est continue en a lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in R:\ |x-a| < \delta \Longrightarrow f|(x) - f(a)| < \varepsilon$$

Que veut dire que f n'est pas continue en a.

Solution :

f n'est pas continue en a est la négation de f est continue en a, autrement dit :

$\overline{\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in R:\ |x-a| < \delta \Longrightarrow f|(x) - f(a)| < \varepsilon} \Leftrightarrow$

$\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x \in R:\ |x-a| < \delta\ \ et\ f|(x) - f(a)| \geq \varepsilon$

f n'est pas continue en a veut dire :

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x \in R:\ |x-a| < \delta\ \ et\ f|(x) - f(a)| \geq \varepsilon$$

Exercice 9 :

Soit $f: R \to R$
On dit que f admet une limite lorsque x tend vers a lorsque :

$$\exists l \in R, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in R:\ |x-a| < \delta \Longrightarrow f|(x) - l| < \varepsilon$$

Que veut dire que f n'admet pas de limite au voisinage de a
Solution :
f n'admet pas de limite au voisinage de a est la négation de f admet une limite au voisinage de a autrement dit f n'admet pas de limite au voisinage de a veut dire :

$$\forall l \in R, \exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x \in R:\ |x-a| < \delta\ et\ f|(x) - l| \geq \varepsilon$$

Exercice 10

Supposons qu'on visites une ile ou il y a des varitasses qui ne disent que la vérité, des manitasses qui mentent toujours, et des jokers qui mentent et qui disent la vérités. On rencontres quelqu'un labas qui nous dis : « je suis un mentasse ».
Que serait cette personne, une mentasse, une varitasse, ou un joker.
Solution
Supposons que cette personne soit une manitas, alors elle ment, donc elle n'est pas uen mentasse, donc c'est soit une varitas soit un joker, si c'était une varitas, elle devrait dire je suis une varitas, donc elle n'est pas une varitas, donc c'est un joker.

Exercice11
Nous sommes dans la même île que celle de l'exercice 10, on rencontre trois personnes, 3allel, Djamel et Kamel,
3allal dit : Djamel est un joker
Djamel dit : Kamel est un joker
Kamel dit : 3allel est un joker

Si il n’y a qu’un seul joker parmi les trois, combien y a-t-il parmi eux de varitas.