Chapitre III : Représentation temporelles des systèmes

Tous les systèmes étudies sont causaux linéaires et invariants.

III.1 Représentation par une équation différentielle

Dans le cas où un système à temps continu à la fois linéaire et invariant possède une seule entrée et une seule sortie, sa relation entrée-sortie peut être décrite par une équation différentielle:

$\sum_{i=c}^{n} a_i \frac{d^i y}{d\,t^i} = \sum_{i=0}^{m} b_i \frac{d^i e}{dt^i}$

Où:

- Les coefficients a_i et b_i sont des constants réelles, telles que a_c, a_n, b_0 et b_m soient non nuls.
- n, m sont des entiers positifs tels que $m \leq n$, n est l'ordre du système.
- $c \leq n$ est un entier positif ou nul appelé classe du système.
- La solution de cette équation appelée réponse temporelle du système.

Exemple : Circuit RC

Soit le circuit RC

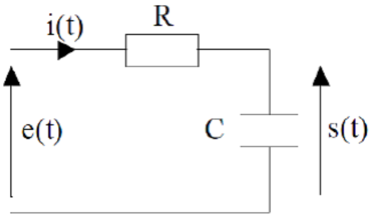

Figure III.1 : Circuit RC

Les équations électriques sont :

$e(t) = Ri + s(t)$

$i = C\frac{ds(t)}{dt}$

Nous pouvons obtenir une équation différentielle d'ordre 1 reliant la sortie *s(t)* et l'entrée *e(t)*.

$e(t) = RC\frac{ds(t)}{dt} + s(t)$

$RC\frac{ds}{dt} + s = e \rightarrow \frac{ds}{dt} + \frac{1}{RC}s = \frac{1}{RC}e$

III.2 Représentation par fonction de transfert

On peut donner d'un système linéaire invariant mono-entrée mono-sortie une représentation externe simple obtenue par transformation de l'équation différentielle en équation algébrique. Pour cela on utilise la transformée de Laplace.

Soit un système linéaire invariant d'entrée e et de sortie y. on appelle fonction de transfert du système le rapport des transformées de Laplace de la sortie et de l'entrée, à condition initiales nulles (CI=0).

$$G(p) = \frac{Y(p)}{E(p)}$$

Le terme de transmittance synonyme de fonction de transfert est parfois utilisé.

Remarques

- Le concept de fonction de transfert permet de représenter le comportement dynamique du système de manière algébrique (le rapport sortie/entrée est variable dans le temps).
- La fonction de transfert est une caractéristique indépendante de l'amplitude et de la nature de l'entrée du système.
- C'est un modèle entrée-sortie qui ne contient aucune information sur la structure interne physique du système.

Exemple 1

Nous reprenons l'exemple du circuit RC

$$RC\frac{ds(t)}{dt} + s(t) = e(t)$$

En prenant la transformée de Laplace

$$E(p) = RCpS(p) + S(p) = (RCp + 1)S(p)$$

On peut former la fonction de transfert :

$$G(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{1}{1 + RCp}$$

Exemple 2 : Amortisseur

Considérons le système décrit par la figure suivante :

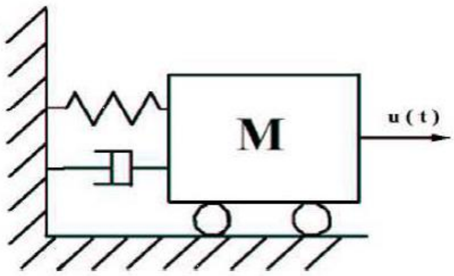

Figure III.2 : Système mécanique

Par application du Principe Fondamental de la Dynamique, l'équation différentielle régissant le comportement de la masse *M* soumise à une force *u* (*t*) est donnée par :

$$M\ddot{y}(t) + f\dot{y}(t) + Ky(t) = u(t)$$

En appliquant la transformée de Laplace à cette équation et en choisissant la position *y* (*t*) de la masse comme sortie, on obtient la fonction de transfert du système comme le rapport de *Y*(*p*) sur *U*(*p*), soit :

$$G(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{1}{Mp^2 + fp + K}$$

III.3 Représentation d'état du système

La dynamique d'un système linéaire invariant d'entrée *u* et de sortie *y* peut être décrite par une représentation sous la forme :

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

Avec *A*, *B*, *C*, *D* des matrices constantes et x un vecteur de dimension *n*, appelé vecteur d'état. Cette représentation est appelée représentation d'état du système.

A : matrice de dimension $n\times n$ est appelée matrice d'évolution (matrice d'état).

B : matrice de dimension $n\times 1$ est appelée matrice de commande (matrice d'entrée).

C : matrice de dimension $1\times n$ est appelée matrice d'observation.

D : est un scalaire est le coefficient de transmission directe qui relie directement la commande à la sortie.

Dans le cas où D=0, $m<n$ et le système est dit strictement propre.

III.3 Correspondance entre représentation d'état et fonction de transfert

III.3.1 Passage de la représentation d'état à la fonction de transfert

Appliquons-la transformée de Laplace à la représentation d'état

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = Ax + Be \\ y = Cx + De \end{cases}$$

On obtient le système :

$$\begin{cases} pX(p) = AX(p) + BE(p) \\ Y(p) = CX(p) + DE(p) \end{cases}$$

Soit:

$$\begin{cases} X(p) = (pI - A)^{-1} \times B \times E(p) \\ Y(p) = CX(p) + DE(p) \end{cases}$$

Où I est la matrice identité.

Finalement :

$$Y(p) = [C(pI - A)^{-1}B + D]E(p)$$

$$G(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = C(pI - A)^{-1}B + D$$

<u>Exemple 1</u>

Calculer la fonction de transfert du système suivant :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} e$$

$$y = [1 \quad 0 \quad 0]x$$

$$G(p) = C(pI - A)^{-1}B + D$$

$$pI - A = \begin{bmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & -1 & 0 \\ 0 & p & -1 \\ 1 & 2 & p+3 \end{bmatrix}$$

$$(pI - A)^{-1} = \frac{adj(pI - A)}{\det(pI - A)} = \frac{\begin{vmatrix} (p^2 + 3p + 2) & p+3 & 1 \\ -1 & p(p+3) & p \\ -p & -(2p+1) & p^2 \end{vmatrix}}{p^3 + 3p^2 + 2p + 1}$$

Finalement on trouve la fonction de transfert suivante :

$$G(p) = \frac{10(p^2 + 3p + 2)}{p^3 + 3p^2 + 2p + 1}$$

<u>Exemple 2</u>

Déterminer la fonction de transfert à partir de la représentation d'état suivante :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

$$G(p) = C(pI - A)^{-1}B + D$$

$$(pI - A)^{-1} = \frac{1}{(p+3)(p-1)+2} \times \begin{bmatrix} p-1 & 1 \\ -2 & p+3 \end{bmatrix}$$

$$G(p) = \frac{1}{(p+3)(p-1)+2} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} p-1 & 1 \\ -2 & p+3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$G(p) = \frac{1}{p^2 + 2p - 1}$$

III.3.2 Passage de la fonction de transfert à la représentation d'état

III.3.2.1 Représentation d'état parallèle

Il faut commencer par décomposer la fonction de transfert en éléments simples

- **Cas où tous les pôles sont distincts**

Alors : $\frac{Y(p)}{E(p)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{p - \lambda_i} + D$ (*)

On choisit alors les variables d'état successives telles que :

$$X_i(p) = \frac{1}{p - \lambda_i} E(p)$$

Pour $i = 1, 2, ...,n$. on en déduit que :

$$pX_i(p) = \lambda_i X_i(p) + E(p)$$

Soit : $\frac{dx_i}{dt} = \lambda_i x_i + e$ (**)

Finalement d'après (*) et (**) on obtient la représentation d'état sous la forme diagonale :

$$\frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} e$$

$$y = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \cdots & \alpha_n \end{bmatrix} x + De$$

Une telle représentation d'état est dite sous forme modale.

- **Cas où les pôles ne sont pas tous distincts**

Dans ce cas, considérons le cas d'un pôle λ_1 de multiplicité p, alors :

$$\frac{Y(p)}{E(p)} = \frac{\alpha_1}{p - \lambda_1} + \frac{\alpha_2}{(p - \lambda_1)^2} + \cdots + \frac{\alpha_p}{(p - \lambda_i)^p} + \sum_{i=p+1}^{n} \frac{\alpha_i}{p - \lambda_i} + D$$

On choisit alors les variables d'état successives telles que :

$$\begin{cases} X_1(p) = \dfrac{1}{p-\lambda_1}\, E(p) \\ X_2(p) = \dfrac{1}{(p-\lambda_1)^2} E(p) \\ \vdots \\ X_p(p) = \dfrac{1}{(p-\lambda_1)^p} E(p) \\ X_1(p) = \dfrac{1}{p-\lambda_1}\, E(p); \quad \text{pour} \quad i = p+1 \cdots n \end{cases}$$

On en déduit que :

$$\begin{cases} pX_1(p) = \lambda_1 X_1(p) + E(p) \\ pX_2(p) = \lambda_1 X_2(p) + X_1(p) \\ \vdots \\ pX_p(p) = \lambda_1 X_p(p) + X_{p-1}(p) \\ pX_i(p) = \lambda_i X_i(p) + E(s) \quad \text{pour} \quad i = p+1 \cdots n \end{cases}$$

$$\frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ 1 & & 0 \\ \vdots & \lambda_{p+1} & \vdots \\ 0 & & 0 \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{p+1} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} e$$

$$y = [\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \cdots \quad \cdots \quad \alpha_n]x + De$$

III.3.2.3 Obtention d'un modèle d'état avec A compagne :

La fonction de transfert du système s'écrit :

$$G(p) = \frac{Y(p)}{E(p)} = \frac{N(p)}{D(s)} = \frac{b_0 + b_1 s + \cdots + b_m s^m}{a_0 + a_1 p + \cdots + p^n}$$

On choisit le vecteur d'état x tel que x_1 vérifie :

$$\begin{cases} E(p) = X_1(p) \times D(p) \\ Y(p) = X_1(p) \times N(p) \end{cases}$$

Soit :

$$E(p) = (p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \cdots + a_0)X_1(p)$$

$$Y(p) = (b_m p^m + b_{m-1}p^{m-1} + \cdots + b_0)X_1(p)$$

En choisissant alors x_2, x_3, ..., x_n de sorte que :

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = x_3 \\ \quad \vdots \\ \frac{dx_{n-1}}{dt} = x_n \end{cases} \qquad (*)$$

On a ; pour $i = 1, 2, 3, \ldots, n$

$$\frac{d\,x_i}{dt} = \frac{d^i\,x_i}{d\,t^i}$$

D'après $E(p)$:

$$\frac{d^n x_1}{dt^n} = -a_{n-1}\frac{d^{n-1}x_1}{dt^{n-1}} - \cdots - a_0 x_1 + e$$

Soit, avec :

$$\frac{dx_n}{dt} = -a_{n-1}\frac{dx_{n-1}}{dt} - \cdots - a_0 x_1 + e$$

Et enfin, d'après (*)

$$\frac{dx_n}{dt} = -a_{n-1}x_n - \cdots - a_0 x_1 + e$$

L'équation dynamique du système s'écrit donc :

$$\frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} e$$

La forme de la matrice d'évolution A est dite compagne horizontale. Il reste alors à déterminer la sortie :

$$Y(p) = (b_m p^m + b_{m-1}p^{m-1} + \cdots + b_0)X_1(p)$$