Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques **Année Universitaire 2020-2021**

1ère Année LMD MI Durée : 01H30.

Epreuve finale : Algèbre 2

Les calculatrices et téléphones portables sont strictement interdits

PARTIE 1 [1] : (10 points)

1. Soient les vecteurs suivants de $\mathbb{R}^3$:
$v_1 = (1, -3, -5), v_2 = (3, 4, -2)$ et $v_3 = (1, 10, 8)$. Ces vecteurs forment-ils une famille libre ?
2. Quelle est la dimension de $Vect(v_1, v_2, v_3)$, le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par v_1, v_2 et v_3 ?
3. On considère l'ensemble $W = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 2x - y + z = 0\right\}$. Montrer que W est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
4. Montrer que $W = Vect(v_1, v_2, v_3)$.
5. Soit $u = (x, y, z) \in W$, exprimer u comme une combinaison linéaire des vecteurs de $Vect(v_1, v_2, v_3)$.
6. Donner un supplémentaire de W dans $\mathbb{R}^3$.

PARTIE 2 [2] : (10 points)

1. Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ et g l'application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^4$ définies par :
$f(x, y, z) = (3x - 2y + 7z, x - 2y + 2z), g(x, y) = (x + y, x - y, 2x + y, x - 2y)$.
a) Déterminer le noyau de f et l'image de f. L'application f est-elle injective ? surjective ? Même question pour l'application g.
b) Donner les matrices associées à f et g par rapport aux bases canoniques.
2. On considère les matrices A, B et C définies par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 2 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -2 & 1 \\ 8 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } C = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -14 & 7 \\ 24 & 17 \end{pmatrix}.$$

Trouver deux réels x et y tels que $xA + yB = C$.
3. Soient $M = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
a) Vérifiez que $MN = 0$. Qu'est ce qu'on peut déduire ?
b) Calculer NM et vérifier que $MN \neq NM$.

1. **Note CC**= (Max{Note(PARTIE 1),Note(PARTIE 2)})× 2.
2. **Note EF**= Note(PARTIE 1)+Note(PARTIE 2).

Univ-Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Maths

Corrigé EF Algèbre 2

A.U 2020/2021

Partie 1 : (10pts)

1- $v_1 = (1,-3,-5)$, $v_2 = (3,4,-2)$, $v_3 = (1,10,8)$ 01pts

Puisque $v_3 = -2v_1 + v_2$, alors $\{v_1, v_2, v_3\}$ est lié.

2- D'après 1, $\dim(\mathrm{Vect}(v_1,v_2,v_3)) = 2$ càd

01pts $\mathrm{Vect}(v_1,v_2,v_3) = \left\langle \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \right\rangle$ ($\{v_1, v_2\}$ est libre !)

3- $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / 2x - y + z = 0\} \subset \mathbb{R}^3$

(i) $(0,0,0) \in W$ car $2(0) - 0 + 0 = 0$. 0,5

(ii) $\forall u, v \in W, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \alpha u + \beta v \overset{?}{\in} W$ 0,5

$$\alpha u + \beta v = \alpha(u_1,u_2,u_3) + \beta(v_1,v_2,v_3)$$
$$= (\underbrace{\alpha u_1 + \beta v_1}_{X_1}, \underbrace{\alpha u_2 + \beta v_2}_{X_2}, \underbrace{\alpha u_3 + \beta v_3}_{X_3}) \quad 0{,}5$$

$$2X_1 - X_2 + X_3 = 2(\alpha u_1 + \beta v_1) - (\alpha u_2 + \beta v_2) + (\alpha u_3 + \beta v_3)$$
$$= \alpha(\underbrace{2u_1 - u_2 + u_3}_{\overset{\shortparallel}{0}}) + \beta(\underbrace{2v_1 - v_2 + v_3}_{\overset{\shortparallel}{0}}) = 0$$

0,5 car $u \in W$ car $v \in W$ 0,5

Conclusion : W est un s.e.v de $\mathbb{R}^3$.

0,5

4- $v_1 = (1,-3,-5) \in W$ car $2(1) + 3 - 5 = 0$ 0,5

$v_2 = (3, 4, -2) \in W$ car $2(3) - 4 - 2 = 0$ 0,5

Soit $u = (x,y,z) \in W \Rightarrow u = (x, 2x+z, z)$

$$= (x, 2x, 0) + (0, z, z)$$

$$= x\underbrace{(1, 2, 0)}_{w_1} + z\underbrace{(0, 1, 1)}_{w_2}$$

or $\{w_1, w_2\}$ est libre ds $W \Rightarrow \{w_1, w_2\}$ base de W

et $\dim W = 2$ 0,5

Mq $\{v_1, v_2\}$ est une base ds W, il suffit de montrer que $\{v_1, v_2\}$ est libre car $\dim W = 2$. 0,5

En effet. $\alpha v_1 + \beta v_1 = (0,0,0) \Rightarrow \alpha(1,-3,-5) + \beta(3,4,-2) = (0,0,0)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha + 3\beta = 0 \\ -3\alpha + 4\beta = 0 \\ -5\alpha - 2\beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \beta = 0$$ 0,5

donc $\{v_1, v_2\}$ est une base de $W \Rightarrow W = \mathrm{Vect}\{v_1, v_2, v_3\}$ 0,5

5- Soit $u \in W \Rightarrow u = (x,y,z) = \alpha v_1 + \beta v_2$ 0,5

Cherchons α et β:

$$(x,y,z) = \alpha(1,-3,-5) + \beta(3,4,-2) = (\alpha+3\beta, -3\alpha+4\beta, -5\alpha-2\beta)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \alpha + 3\beta \\ y = -3\alpha + 4\beta \\ z = -5\alpha - 2\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \dfrac{4x-3y}{13} \\ \beta = \dfrac{3x+y}{13} \end{cases}$$ 0,5 0,5

donc $u = \left(\dfrac{4x-3y}{13}\right) v_1 + \left(\dfrac{3x+y}{13}\right) v_2$ 0,5

Partie 2 : (10pts)

1- $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$(x,y,z) \longmapsto f(x,y,z) = (3x-2y+7z,\ x-2y+2z)$

a- $\operatorname{Ker} f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / f(x,y,z) = (0,0)\}$ (0,5)

$$f(x,y,z) = (0,0) \Rightarrow \begin{cases} 3x-2y+7z=0 \ \dots (1) \\ x-2y+2z=0 \ \dots (2) \end{cases}$$

$(1)-(2) \Rightarrow 2x+5z=0 \Rightarrow x = -\frac{5}{2}z$

$(2) \Rightarrow -\frac{5}{2}z - 2y + 2z = 0 \Rightarrow -\frac{1}{2}z - 2y = 0$

$\Rightarrow z = -4y$

donc $u \in \operatorname{Ker} f \Rightarrow u = \left(-\frac{5}{2}z, -\frac{1}{4}z, z\right)$

$= z\left(-\frac{5}{2}, -\frac{1}{4}, 1\right)$ (0,5)

donc $\operatorname{Ker} f \neq \{(0,0,0)\} \Rightarrow f$ non injective. (0,5)

Or, $\underbrace{\dim \mathbb{R}^3}_{=3} = \underbrace{\dim \operatorname{Ker} f}_{=1} + \dim \operatorname{Im} f \Rightarrow \dim \operatorname{Im} f = 2 = \dim \mathbb{R}^2$

$\Rightarrow f$ surjective (0,5)

Pour g : $u \in \operatorname{Ker} g \Rightarrow f(u) = (0,0,0,0) \Rightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ x-y=0 \\ 2x+y=0 \\ x-2y=0 \end{cases} \Rightarrow x=y=0$ (0,5)

$g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ $\Rightarrow \operatorname{Ker} g = \{(0,0)\} \Rightarrow g$ injective

$(x,y) \longmapsto g(x,y) = (x+y, x-y, 2x+y, x-2y)$ (0,5)

Or, $\dim \mathbb{R}^2 = \dim \operatorname{Ker} g + \dim \operatorname{Im} g \Rightarrow \dim \operatorname{Im} g = 2$ 0,5

$\quad\;\; \overset{\shortparallel}{2} \qquad\qquad \overset{\shortparallel}{0}$

$\Rightarrow g$ non surjective.

b – Soient $B_1 = \{e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)\}$ base de $\mathbb{R}^3$
et $B_2 = \{e_1' = (1,0), e_2' = (0,1)\}$ base de $\mathbb{R}^2$ (les bases canoniques)

$M(f, B_1, B_2) = ?$

0,5 $f(e_1) = f(1,0,0) = (3,1)$

0,5 $f(e_2) = f(0,1,0) = (-2,-2)$

0,5 $f(e_3) = f(0,0,1) = (7,2)$

$$\Rightarrow M(f, B_1, B_2) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 3 & -2 & 7 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{c} e_1' \\ e_2' \end{array} \end{array}$$ 0,5

ds $\mathbb{R}^4$, soit la base canonique $B' = \{e_1'' = (1,0,0,0), e_2'' = (0,1,0,0), e_3'' = (0,0,1,0), e_4'' = (0,0,0,1)\}$ ds $\mathbb{R}^4$.

$M(g, B_2, B') = ?$

$f(e_1') = f(1,0) = (1,1,2,1) = e_1'' + e_2'' + 2e_3'' + e_4''$. 0,5

$f(e_2') = f(0,1) = (1,-1,1,-2) = e_1'' - e_2'' + e_3'' - 2e_4''$ 0,5

$$\Rightarrow M(g, B_2, B') = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} f(e_1') & f(e_2') \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{array}{c} e_1'' \\ e_2'' \\ e_3'' \\ e_4'' \end{array} \end{array}$$ 0,5

2-

$$xA + yB = C \Rightarrow x\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 2 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -2 & 1 \\ 8 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -14 & 7 \\ 24 & 17 \end{pmatrix}$$ 0,5

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x & 3x \\ -4x & +2x \\ 0 & 7x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2y & 0 \\ -2y & y \\ 8y & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-2y & 3x \\ -4x-2y & 2x+y \\ 8y & 7x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -14 & 7 \\ 24 & 17 \end{pmatrix}$$

Par identification on trouve : $\begin{cases} 3x = 6 \\ 8y = 24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$ 0,5

3- a- $M.N = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-2\times 2)+(4\times 1) & (-2\times 2)+(4\times 1) \\ (3\times 2)+(-6)\cdot 1 & (3\times 2)-6\times 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 0,5

Conclusion

$M.N = 0$ n'implique pas que $M = 0$ ou bien $N = 0$ 0,5

b- $N.M = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\times(-2)+2\times 3 & 2\times 4+(-6)\times 2 \\ (-2)\times 1+3\times 1 & (4\times 1)-6\times 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ 0,5

Conclusion $M.N \neq N.M$. 0,5

Question Bonus (+0,5) :

Partie 1:

6 - Un supplémentaire de W ds $\mathbb{R}^3$:

Par exemple $F = \{(x, x, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$

$F \cap W = \{(0,0,0)\}$ et $\underbrace{\dim \mathbb{R}^3}_{3} = \underbrace{\dim W}_{2} + \underbrace{\dim F}_{1}$