Université Dr Yahia Farès de Médéa	**Année Univer. 2010/2011**
Département de G.E.I.	**2ème Année ST**
Matière: MATHS 3 (S3)	**Durée : 01h30**

Epreuve de Fin de Semestre

Exercice 1. (03 points) Déterminer la nature de la série, et en cas de convergence, calculer sa somme:

$$\sum_{n\geq 0} \frac{3}{(3n+1)(3n+4)}$$

Exercice 2. (7 points) $(1.5+1.5+2+2)$

1. Etudier la nature des séries numériques suivantes:

$$\textbf{a)} \sum_{n\geq 0} n^3 \sin\left(\frac{1}{n^3}\right) \qquad \textbf{b)} \sum_{n\geq 0} \log\left(\frac{n^2+n+1}{n^2+n-1}\right)$$

2. Etudier la convergence et la convergence absolue de:

$$\textbf{a)} \sum_{n\geq 1} \frac{\sqrt{n}\sin(n)}{n^2} \qquad \textbf{b)} \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n+\cos n}$$

Exercice 3. (07 points) $(3+1+1+1+1)$

1. Etudier la convergence simple et uniforme de la suite de fonctions (f_n) suivante:

$$f_n(x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1} \text{ sur }]-1,1[\,, \text{ puis sur } [-a,a] \text{ avec } 0 \leq a < 1.$$

2. Pour $x \geq 0$, on pose $u_n(x) = \dfrac{x}{n^2+x^2}$.

$a)$ Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} u_n(x)$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.

$b)$ Montrer que $\sum_{n\geq 1} u_n(x)$ converge uniformément sur tout intervalle $[0, A]$, avec $A > 0$.

$c)$ Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{n}{n^2+k^2} \geq \frac{1}{5}$.

$d)$ En déduire que la série $\sum_{n\geq 1} u_n(x)$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4. (03 points)

Université Dr Yahia Farès de Médéa	**Année Univer. 2009/20010**
Département chargé du Socle LMD	**2$^{\text{ème}}$ Année ST**
Module : MATHS 3 (S3)	**Durée : 01h30**

Corrigé (E.F.S.1)

Exercice 1:

On décompose la fraction en éléments simples.

$$\frac{3}{(3k+1)(3k+4)} = \frac{1}{3k+1} - \frac{1}{3k+4}$$

Alors

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{3}{(3n+1)(3n+4)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{3k+1} - \frac{1}{3k+4}$$

Donc

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{3k+1} - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{3k+1}$$

Il reste,

$$S_n = 1 - \frac{1}{3n+4}$$

et donc,

$$S = \lim_{n\to+\infty} S_n = 1.$$

La suite (S_n) étant convegente alors la série numérique converge aussi, de plus, la somme de la série $S = 1$.

Exercice 2:

1) $\lim\limits_{n\to+\infty} n^3 \sin(\frac{1}{n^3}) = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\sin(\frac{1}{n^3})}{n^3} = \lim\limits_{n\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \neq 0$, et la série diverge d'après la condition nécessaire de convergence.

2) $u_n = \log\left(\frac{n^2+n+1}{n^2+n-1}\right) = \log\left(\frac{n^2+n-1+2}{n^2+n-1}\right) = \log\left(1+\frac{2}{n^2+n-1}\right) \backsim_{n\to+\infty} \frac{2}{n^2}$ qui est bien le terme général d'une série convergente. Par le critère d'équivalence, la série de terme général $\log\left(\frac{n^2+n+1}{n^2+n-1}\right)$ est aussi convergente.

2) *a)*

$$\left|\frac{\sqrt{n}\sin(n)}{n}\right| = \left|\frac{\sin(n)}{\sqrt{n}}\right| \geq \frac{\sin^2(n)}{\sqrt{n}}$$

$$\left|\frac{\sin(n)}{\sqrt{n}}\right| \geq \frac{1-\cos 2n}{2\sqrt{n}} = \frac{1}{2\sqrt{n}} - \frac{\cos 2n}{2\sqrt{n}}$$

$\sum\limits_{n\geq 1} \frac{\sin x n}{n^\alpha}$ et $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{\cos x n}{n^\alpha}$ avec $0<\alpha\leq 1 \rightarrow$ on utilise la règle Dirichlet-D'Abel

$u_n = a_n \times b_n$ avec $a_n = \frac{1}{n^\alpha}$ (1) $a_n > 0$ | (2) $a_n \searrow$ décroissante | (3) $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

$|b_1+b_2+\dots b_n| = \left|\sum_{k=1}^{n} \cos x k\right| \leq \frac{1}{|\sin \frac{x}{2}|} \rightarrow \boxed{x=2}$

. La série $\sum \frac{1}{2\sqrt{n}}$ diverge d'après *Riemmann* et la série $\sum \frac{\cos 2n}{2\sqrt{n}}$ converge d'après le critère de Dirichlet. D'Abel En effet, $\boxed{\left|\sum_{k=1}^{n} \cos 2k\right| \leq \frac{1}{|\sin 1|}}$ et $\frac{1}{2\sqrt{n}}$ décroit et tend vers 0 quand $n \to +\infty$. Donc $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(n)}{\sqrt{n}}$ n'est pas absolument convergente. D'autre part la série $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(n)}{\sqrt{n}}$ converge d'après Dirichlet; donc elle est semi-convergente.

b) $\left|\frac{(-1)^n}{n+\cos n}\right| \sim \frac{1}{n}$. Donc $\sum \frac{(-1)^n}{n+\cos n}$ n'est pas absolument convergente. Mais, elle est convergente car il s'agit d'une série alterné vérifiant les conditions suivantes: la suite $\frac{1}{n+\cos n} > 0$ est décroissante et tend vers 0 quand $n \to +\infty$.

Exercice 3:

1. Si $x \in]-1,1[$, alors

$$f_n(x) = 1 + x + x^2 + ... + x^{n-1} = \frac{1-x^n}{1-x}$$

et donc la suite converge simplement vers $f(x) = \frac{1}{1-x}$ sur $]-1,1[$. Posons $g_n(x) = f_n(x) - f(x) =$. On a :

$$g_n(x) = \frac{x^x}{1-x}$$

qui tend vers $+\infty$ si x vers 1. D'où $\|f_n(x) - f(x)\|_\infty = +\infty$ et la convergence n'est pas uniforme sur $]-1,1[$. Dans le deuxième cas, on vérifie aisément en étudiant $g_n(x)$ que:

$$\sup_{x\in[-a,a]} |g_n(x)| = \frac{a^n}{1-a} \to 0 \text{ quand } n \to +\infty$$

ce qui garantit la convergence uniforme sur $[-a, a]$.

2. **a)** Il est très facile de prouver la convergence simple sur $\mathbb{R}_+$. Pour $x = 0$, on a en effet $u_n(0) = 0$, qui est bien le terme général d'une série convergente. Pour $x > 0$, on a $u_n(x) \backsim_{n\to+\infty} \frac{x}{n^2}$, qui est aussi le terme général d'une série convergente.

b) On va prouver la convergence normale. On a en effet, pour tout $x \in [0, A]$,

$$|u_n(x)| \leq \frac{A}{n^2}$$

terme général d'une série convergente.

c) Il suffit d'écrire que, pour $n+1 \leq k \leq 2n$, on a $n^2 + k^2 \leq 5n$, et donc $\frac{n}{n^2+k^2} \geq \frac{1}{5}$. On obtient finalement

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{n}{n^2+k^2} \geq \frac{(2n-(n+1)+1)}{5n} = \frac{1}{5}$$

d) Il est plus difficile de prouver la non-convergence uniforme. On peut procéder de la façon suivante. Supposons que la convergence est uniforme. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, et tout $x \in \mathbb{R}_+$, on ait

$$\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x) \right| \leq \varepsilon$$

En particulier, pour $n = n_0$ et $x = n_0$, on doit avoir

$$\sum_{k=n+1}^{2n} u_k(x) \leq \varepsilon$$

Mais,

$$\varepsilon \geq \sum_{k=n+1}^{2n} u_k(x) \geq \frac{1}{5}$$

Bien sûr, si $\varepsilon < \frac{1}{5}$, c'est impossible.

<u>Exercice 4:</u>

Université Dr Yahia Farès de Médéa — **Année univer. 2013/2014**
Département de G.E.I — **$2^{ère}$ Année ST**
Module : MATHS 3 (S3) — **03/02/2014** — **Durée: 01h30**

Epreuve de fin de Semestre

Exercice 1 : (7 points) $(3 + 1,5 + 2,5)$

1- Etudier la nature des séries numériques suivantes:

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{n=+\infty} \frac{1}{n^2 + |\cos n|}$, b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{n=+\infty} \log(1 + a^n)$ avec $a \geq 0$.

2- Déterminer la nature de la série, et en cas de convergence, calculer sa somme.

$$\sum_{n=0}^{n=+\infty} \left(\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right).$$

3- Etudier la convergence et la convergence absolue de:

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{n=+\infty} (-1)^n \frac{\cos n}{1 + n\sqrt{n}}$. b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{n=+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2 + n}}$

Exercice 2 : (5 points) $(1 + 1,5 + 1,5 + 1)$

Soit $f_n(x) = e^{-nx} \sin(nx)$ une suite de fonctions définie sur $[0, +\infty[$.

1) Etudier la convergence simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 0}$.

2) Etudier la convergence uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 0}$ sur $[0, +\infty[$.

3) Etudier la convergence uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 0}$ sur $[a, +\infty[$, avec $a > 0$.

4) Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_a^1 e^{-nx} \sin(nx)\, dx$.

Exercice 3 : (5 points) $(1,5 + 2 + 1,5)$

Soit $f_n(x) = \dfrac{x^n \sin(nx)}{n}$, avec $x \in]-1, 1[$.

1) Etudier la convergence simple de la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n=1}^{n=+\infty} f_n$ sur $]-1, 1[$.

2) Montrer que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n=1}^{n=+\infty} f_n'$ est uniformément convergente sur $[-\alpha, \alpha]$ avec $0 < \alpha < 1$.

3) Posons $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{n=+\infty} f_n(x)$. Montrer que f est dérivable sur $[-\alpha, \alpha]$ et donner $f'(x)$.

Exercice 4 : (3 points)

Déterminer l'intervalle de convergence des séries entières suivantes.

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{n=+\infty} \frac{2^n}{n} x^n$ 2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{n=+\infty} \frac{x^n}{n!}$ 3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{n=+\infty} \frac{n!}{n^n} x^n$

Université Dr Yahia Farès de Médéa **Année univer. 2013/2014**
Département de G.E.I **$2^{ère}$ Année ST**
Module : MATHS 3 (S3) **03/02/2014** **Durée: 01h30**

Corrigé de L'EFS 1-MATHS 3

Exercice 1

1-a) $\sum\limits_{n=0}^{n=+\infty} \frac{1}{n^2+|\cos n|}$ série à termes positifs. $0 \leq |\cos n| \Rightarrow n^2 \leq |\cos n| + n^2$. Ceci implique que $\frac{1}{n^2+|\cos n|} \leq \frac{1}{n^2}$. La série $\sum\limits_{n=1}^{n=+\infty} \frac{1}{n^2}$ est de Riemann convergente et d'après le critère de comparaison la série $\sum\limits_{n=0}^{n=+\infty} \frac{1}{n^2+|\cos n|}$ est convergente.

b) $\sum\limits_{n=0}^{n=+\infty} \log(1+a^n)$ avec $a \geq 0$. Si $a > 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \log(1+a^n) = +\infty \neq 0 \Longrightarrow$ la série diverge. Si $a = 1$ on a $\log(1+a^n) = \log 2$ et la série $\sum\limits_{n=0}^{n=+\infty} \log 2$ diverge. Si $0 \leq a < 1$, alors $\log(1+a^n) \sim a^n$. La série $\sum\limits_{n=1}^{n=+\infty} a^n$ est géométrique convergente, d'après le critère d'équivalence, la série $\sum\limits_{n=1}^{n=+\infty} \log(1+a^n)$ est convergente.

2) $\sum\limits_{n=0}^{n=+\infty} \left(\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)$. $S_n = \sum\limits_{k=0}^{k=n} u_k = \sum\limits_{k=0}^{k=n} \left(\sqrt{k+2} - 2\sqrt{k+1} + \sqrt{k}\right) = \sum\limits_{k=0}^{k=n} \sqrt{k+2} - 2\sum\limits_{k=0}^{k=n} \sqrt{k+1} + \sum\limits_{k=0}^{k=n} \sqrt{k}$

$S_n = \left(\sqrt{2}+\sqrt{3}+...+\sqrt{n}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}\right) - 2\left(1+\sqrt{2}+...+\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right) + \left(1+\sqrt{2}+...+\sqrt{n}\right)$.
Par simplification, on trouve $S_n = -1 + \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \left[-1 + (\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}).\left(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}\right).\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}\right] = \lim\limits_{n\to+\infty} (-1 + \frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}) = -1$. La suite (S_n) converge, par conséquent la série $\sum\limits_{n=0}^{n=+\infty} \left(\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)$ converge et la somme égale à -1.

3) a) $\sum\limits_{n=0}^{n=+\infty} (-1)^n \frac{\cos n}{1+n\sqrt{n}}$ cette série n'est pas alternée car le cosinus change de signe. On a $\left|(-1)^n \frac{\cos n}{1+n\sqrt{n}}\right| \leq \frac{1}{n\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$. La série $\sum\limits_{n=1}^{n=+\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ est de Riemann convergente et d'après le critère de comparaison la série $\sum\limits_{n=0}^{n=+\infty} \left|(-1)^n \frac{\cos n}{1+n\sqrt{n}}\right|$ est convergente. On conclut que la série $\sum\limits_{n=0}^{n=+\infty} (-1)^n \frac{\cos n}{1+n\sqrt{n}}$ est absolument convergente donc elle est convergente

b) $\sum_{n=1}^{n=+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+n}}$ est une série alternée. La suite $\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)_{n\geq 1}$ est décroissante vers 0, donc d'aprèe le théorème de Leibniz la série $\sum_{n=1}^{n=+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+n}}$ converge. $\left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+n}}\right| = \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} = \frac{1}{n\sqrt{1+\frac{1}{n}}} \sim \frac{1}{n}$. La série $\sum_{n=1}^{n=+\infty} \frac{1}{n}$ est divergente, d'après le critère d'équivalence, la série $\sum_{n=1}^{n=+\infty} \left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+n}}\right|$ est divergente. Donc la série $\sum_{n=1}^{n=+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+n}}$ n'est pas absolument convergente.

Exercice 2 :

Soit $f_n(x) = e^{-nx}\sin(nx)$ une suite de fonctions définie sur $[0, \ +\infty[$.

1) $f_n(0) = 0$, et si $x > 0$ $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$. Donc la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ converge simplement sur $[0, \ +\infty[$ vers la fonction $f(x) = 0$.

2) $\sup\limits_{x\in[0,\ +\infty[} |f_n(x) - f(x)| = \sup\limits_{x\in[0,\ +\infty[} |f_n(x)| \geq \left|f_n\left(\frac{\pi}{2n}\right)\right| = e^{-\dfrac{\pi}{2}}$. Ceci implique que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sup\limits_{x\in[0,\ +\infty[} |f_n(x) - f(x)| \neq 0$ et donc la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ ne converge pas uniformément sur $[0, \ +\infty[$.

3) $|f_n(x) - f(x)| = |e^{-nx}\sin(nx)| \leq e^{-nx}|\sin(nx)| \leq e^{-nx} \leq e^{-na}$ pour tout $x \in [a, \ +\infty[$ avec $a > 0$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-na} = 0$ alors la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément sur $[a, \ +\infty[$ vers $f(x) = 0$.

4) Comme la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément sur $[a, \ +\infty[$ vers $f(x) = 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_a^1 e^{-nx}\sin(nx)\, dx =. \int_a^1 \lim\limits_{n\to+\infty} e^{-nx}\sin(nx)\, dx = \int_a^1 0\, dx = 0$

Exercice 3 :

Soit $f_n(x) = \frac{x^n \sin(nx)}{n}$ avec $x \in]-1, \ 1[$

1) La convergence simple de la série de fonctions $\sum_{n=1}^{n=+\infty} f_n$. Soit $x \in]-1, \ 1[$. $\forall n \geq 1$, $|f_n(x)| = \left|\frac{x^n\sin(nx)}{n}\right| \leq |x|^{n-1}$. Or la série $\sum_{n=1}^{n=+\infty} |x|^{n-1}$est géométrique convergente. Donc la série $\sum_{n=1}^{n=+\infty} f_n(x)$ est absolument convergente, d'où $\forall x \in]-1, \ 1[$ la série $\sum_{n=1}^{n=+\infty} f_n(x)$ est convergente. Ceci implique que la série de fonctions $\sum_{n=1}^{n=+\infty} f_n$ est simplement convergente sur $]-1, \ 1[$

2) $f_n'(x) = x^{n-1}\sin(nx) + x^n\cos(nx)$. Pour $x \in [-\alpha, \ \alpha]$ avec $0 < \alpha < 1$ on a $|f_n'(x)| = \left|x^{n-1}\sin(nx) + x^n\cos(nx)\right| \leq \alpha^{n-1} + \alpha^n \leq 2\alpha^{n-1}$. Puisque la série numérique $\sum_{n=1}^{n=+\infty} 2\alpha^{n-1}$ converge, la série de fonctions $\sum_{n=1}^{n=+\infty} f_n'$ est normalement convergente et donc uniformément

convergente sur $[-\alpha,\ \alpha]$.

3) Soit $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{n=+\infty} f_n(x)$. Comme $\sum\limits_{n=1}^{n=+\infty} f'_n$ est une série de fonctions continues et dérivable sur $[-\alpha,\ \alpha]$ et de plus la série de fonctions $\sum\limits_{n=1}^{n=+\infty} f'_n$ est uniformément convergente sur $[-\alpha,\ \alpha]$, alors f est dérivable sur $[-\alpha,\ \alpha]$ et pour tout $x \in [-\alpha,\ \alpha]$ on a $f\prime(x) = \sum\limits_{n=0}^{n=+\infty} f'_n(x) = \sum\limits_{n=0}^{n=+\infty} \left[x^{n-1}\sin(nx) + x^n\cos(nx)\right]$.

Exercice 4 :

1) $\sum\limits_{n=1}^{n=+\infty} \frac{2^n}{n}x^n$. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2^{n+1}}{n+1}.\frac{n}{2^n} = \lim\limits_{n\to+\infty} 2\frac{n}{n+1} = 2$. Donc le rayon de convergence $R = \frac{1}{2}$. Pour $x = \frac{1}{2}$, on trouve la série $\sum\limits_{n=1}^{n=+\infty} \frac{1}{n}$ qui est divergente. Pour $x = -\frac{1}{2}$, on trouve la série $\sum\limits_{n=1}^{n=+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ qui converge d'après le théorème de Leibniz. D'où $D_{cv} = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$.

2) $\sum\limits_{n=1}^{n=+\infty} \frac{x^n}{n!}$. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$. Donc $R = +\infty$, et $D_{cv} =]-\infty, +\infty[$.

3) $\sum\limits_{n=1}^{n=+\infty} \frac{n!}{n^n}x^n$. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(n+1)!}{n^{n+1}}.\frac{n^n}{n!} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e}$. Donc $R = e$. Pour $x = e$ on trouve la série $\sum\limits_{n=1}^{n=+\infty} \frac{n!}{n^n}e^n$. On utilise la formule de Stirling , on trouve $\frac{n!}{n^n}e^n \sim \sqrt{2\pi n}$. La série $\sum\limits_{n=1}^{n=+\infty} \sqrt{2\pi n}$ diverge, d'après le critère d'équivalence la série $\sum\limits_{n=1}^{n=+\infty} \frac{n!}{n^n}e^n$ diverge. Pour

Pour $x = -e$ on trouve la série $\sum\limits_{n=1}^{n=+\infty} \frac{(-1)^n n!}{n^n}e^n$. Puisque $\frac{n!}{n^n}e^n \sim \sqrt{2\pi n}$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n}e^n = +\infty$, ceci implique que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n n!}{n^n}e^n$ n'existe pas, d'où la série $\sum\limits_{n=1}^{n=+\infty} \frac{(-1)^n n!}{n^n}e^n$ diverge. Dans ce cas $D_{cv} =]-e, e[$.

Université Dr. Yahia Farès de Médéa
Faculté des Sciences et de la Technologie
Département de Génie Eléctrique & Informatique

Année universitaire 2015-2016
Matière : Maths 3
17/01/2016

Epreuve de Fin de Semestre 1

Exercice 1 : (5 points 2,5+2,5)

Calculer les intégrales doubles suivantes :

1. $\iint\limits_D \frac{1}{(1+x+y)^2} dxdy$ où $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ avec } x \geq 0,\ y \geq 0,\ x+y \leq 1\right\}$.

2. $\iint\limits_D \sqrt{1+x^2+y^2} dxdy$ où $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ avec } x \geq 0,\ -x \leq y \leq x,\ 1 \leq x^2+y^2 \leq 4\right\}$.

Exercice 2 : (5 points 2+2+1)

Soit f la fonction définie sur $[2, \ +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^2}$.

1. En utilisant le définition, montrer que l'intégrale $\int\limits_2^{+\infty} f(x)\, dx$ est convergente.
2. Donner le tableau de variations de f.
3. En déduire la nature de la série $\sum\limits_{n\geq 2} \frac{1}{n \ln^2 n}$.

Exercice 3 : (5 points 3+2)

1. Etudier la nature de l'intégrale impropre $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} \sin(\frac{1}{x}) dx$, $\alpha \in \mathbb{R}$.
2. Résoudre l'équation différentielle : $\left(x^2+1\right) y' = y + 1$.

Exercice 4 : (5 points 2,5+2,5)

Soit $(f_n)_{n\geq 1}$la suite de fonctions définie par $f_n(x) = \frac{x}{x+n}$.

1. a) Montrer que $(f_n)_{n\geq 1}$ converge simplement sur $[0, \ 1]$.
   b) Montrer que $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément sur $[0, \ 1]$.
2. Etudier la convergence simple et uniforme de $(f_n)_{n\geq 1}$ sur $[1, \ +\infty[$.

Université Dr. Yahia Farès de Médéa
Faculté des Sciences et de la Technologie
Département de Génie Eléctrique & Informatique

Année universitaire 2015-20016
Matière : Maths 3
17/01/2016

Corrigé de l' Epreuve de Fin de Semestre 1

Exercice 1 : (5 points 2,5+2,5)

1. $\iint\limits_D \frac{1}{(1+x+y)^2}dxdy$ où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ avec } x \geq 0,\ y \geq 0,\ x+y \leq 1\}$
   $\iint\limits_D \frac{1}{(1+x+y)^2}dxdy = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^{1-x} \frac{dy}{(1+x+y)^2}\right) dx$ **(0,5 point).** On a $\int\limits_0^{1-x} \frac{dy}{(1+x+y)^2} = \left[\frac{-1}{1+x+y}\right]_{y=0}^{y=1-x}$ $= \frac{-1}{1+x+1-x} + \frac{1}{1+x}$ **(1 point)**. Par suite, $\iint\limits_D \frac{1}{(1+x+y)^2}dxdy = \int\limits_0^1 \left(\frac{-1}{1+x+1-x} + \frac{1}{1+x}\right) dx =$ $\left[\frac{-1}{2}x + \ln|1+x|\right]_0^1 = -\frac{1}{2} + \ln 2$ **(1 point)**.
2. $\iint\limits_D \sqrt{1+x^2+y^2}dxdy$ où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ avec } x \geq 0,\ -x \leq y \leq x,\ 1 \leq x^2+y^2 \leq 4\}$.
   On passe aux coordonnées polaires. On pose $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta \Rightarrow r = \sqrt{x^2+y^2}$ **(0,5 point)**.
   $\iint\limits_D \sqrt{1+x^2+y^2}dxdy = \iint\limits_{D'} \sqrt{1+r^2}rdrd\theta = \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (\int\limits_1^2 \sqrt{1+r^2}rdr)d\theta$ **(0,5 point)**. On a $\int\limits_1^2 \sqrt{1+r^2}rdr =$ $\left[\frac{1}{3}\left(1+r^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]_{r=1}^{r=2} = \frac{5\sqrt{5}-2\sqrt{2}}{3}$ **(1 point)**. Par suite, $\iint\limits_{D'} \sqrt{1+r^2}rdrd\theta = \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{5\sqrt{5}-2\sqrt{2}}{3}d\theta = \frac{\pi}{6}\left(5\sqrt{5}-2\sqrt{2}\right)$ **(0,5 point)**.

Exercice 2 : (5 points 2+2+1)

Soit f la fonction définie sur $[2, \ +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^2}$

1. $\int\limits_2^{+\infty} f(x)\, dx = \int\limits_2^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^2}dx$. Soit $t > 2$. $\int\limits_2^t \frac{1}{x(\ln x)^2}dx = \left[\frac{-1}{\ln x}\right]_2^t = \frac{-1}{\ln t} + \frac{1}{\ln 2}$ **(1 point)**.
   On a donc $\lim\limits_{t\to+\infty} \int\limits_2^t \frac{1}{x(\ln x)^2}dx = \lim\limits_{t\to+\infty}\left(\frac{-1}{\ln t} + \frac{1}{\ln 2}\right) = \frac{1}{\ln 2}$ **(0,5 point)** et donc l'intégrale $\int\limits_2^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^2}dx$ est convergente **(0,5 point)**.
2. f est dérivable sur $[2, \ +\infty[$ et $f'(x) = \frac{-(\ln x)^2 - 2\ln x}{x^2(\ln x)^4} = \frac{-(\ln x+2)}{x^2(\ln x)^3}$ **(1 point)**. On voit donc que f est décroissante sur $[2, \ +\infty[$ et on a $\lim\limits_{t\to+\infty} f(x) = 0$ **(1 point)**.
3. On a donc grâce aux questions précédentes que f est une fonction continue, décroissante et positive

sur $[2, +\infty[$. Ainsi d'après le théorème de comparaison séries-intégrales, la série $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n\ln^2 n}$ est de même nature que l'intégrale $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^2}dx$ **(0,5 point)**. Par conséquent, la série $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n\ln^2 n}$ est convergente **(0,5 point)**.

Exercice 3 : **(5 points 3+2)**

1. Soit l'intégrale impropre $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\sin(\frac{1}{x})dx$, $\alpha \in \mathbb{R}$. On a $\sin(\frac{1}{x}) \sim_{+\infty} \frac{1}{x}$. Ceci implique que $\frac{1}{x^\alpha}\sin(\frac{1}{x}) \sim_{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha+1}}$ **(1 point)**. On distingue deux cas :
   Cas 1 : $\alpha+1>1$. Ceci implique que $\alpha>0$. Dans ce cas, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}dx$ est convergente. D'après la critère d'équivalence, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\sin(\frac{1}{x})dx$ est convergente **(1 point)**.
   Cas 2 : $\alpha+1<1$. Ceci implique que $\alpha<0$. Dans ce cas, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}dx$ est divergente. D'après la critère d'équivalence, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\sin(\frac{1}{x})dx$ est divergente **(1 point)**.
2. Soit l'équation différentielle : $\left(x^2+1\right)y' = y+1$. C'est une équation différentielle du premier ordre à variables séparables. On peut mêttre l'équation proposée sous la forme $\frac{y'(x)}{y(x)+1} = \frac{1}{x^2+1}$ **(0,5 point)**, En primitivant les deux membres, on obtient $\ln|y(x)+1| = \arctan x + c_1$ **(1 point)**. Ceci implique que $y(x) = \pm e^{\arctan x + c_1} - 1 = \pm e^{c_1}.e^{\arctan x} - 1$. On pose $\pm e^{c_1} = c$, on obtient $y(x) = ce^{\arctan x} - 1$ **(0,5 point)**.

Exercice 4 : **(5 points 2,5+2,5)**

Soit $(f_n)_{n\geq 1}$la suite de fonctions définie par $f_n(x) = \frac{x}{x+n}$.

1. a) **La convergence simple sur** $[0, 1]$: Pour $x \in [0, 1]$ fixé, on a $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{x}{x+n} = 0$ **(0,5 point)**. D'où, la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ converge simplement sur $[0, 1]$ vers la fonction nulle **(0,5 point)**.
   b) **La convergence uniforme sur** $[0, 1]$: Pour tout $x \in [0, 1]$, on a $|f_n(x) - 0| = \left|\frac{x}{x+n} - 0\right| \leq \frac{1}{x+n} \leq \frac{1}{n}$. On déduit que $0 \leq \lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in[0, 1]} \left|\frac{x}{x+n} - 0\right| \leq \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ **(0,5 point)**. Par conséquent $\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in[0, 1]} |f_n(x) - 0| = \lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in[0, 1]} \left|\frac{x}{x+n} - 0\right| = 0$ **(0,5 point)**. D'où, la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément sur $[0, 1]$ **(0,5 point).**
2. **La convergence simple sur** $[1, +\infty[$: Pour tout $x \in [1, +\infty[$, $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{x}{x+n} = 0$ **(0,5 point)**. D'où, la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ converge simplement sur $[1, +\infty[$ vers la fonction nulle **(0,5 point)**.
   La convergence uniforme sur $[1, +\infty[$: Soit $n_0 \in \mathbb{N}^*$. $n_0 \geq 1$ donc $\sup_{x\in[1, +\infty[} |f_n(x) - 0| \geq$

$\sup\limits_{x\in[1,\ \ +\infty[} |f_{n_0}(x) - 0| \geq |f_{n_0}(n_0) - 0| = \dfrac{1}{2}$ **(0,5 point)**. On a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \sup\limits_{x\in[1,\ \ +\infty[} |f_n(x) - 0| \neq 0$ **(0,5 point)**. Par conséquent, la convergence n'est pas uniforme sur $[1, \quad +\infty[$ **(0,5 point)**.

Université Dr. Yahia Farès de Médéa
Faculté des Sciences et de la Technologie
Département de Génie Eléctrique & Informatique

Année universitaire 2016-2017
Matière : Maths 3
08/01/2017

Epreuve de Fin de Semestre

Exercice 1 : (4 points 2+2)

Calculer les intégrales doubles suivantes :

1. $\iint\limits_D \frac{1}{(1+x^2)(1+y^2)}dxdy$ où $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ avec } 0 \leq x \leq 1,\ y \geq 0,\ 0 \leq y \leq x\right\}$.

2. $\iint\limits_D \frac{y^3}{x^2+y^2}dxdy$ où $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ avec } x \geq 0,\ y \leq x,\ 1 \leq x^2+y^2 \leq 4\right\}$.

Exercice 2 : (5 points 3+2)

1. Etudier la convergence des intégrales impropres suivantes :
   a) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+3}$ b) $\int_2^{+\infty} \frac{x}{x^3+\sqrt{x}-1}dx.$

2. Etudier la convergence et la convergence absolue de l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin 5x}{x^\alpha}dx$, $\alpha \in \mathbb{R}^+$.

Exercice 3 : (5 points 2.5+2.5)

1. Résoudre l'équation différentielle : $y' - \frac{y}{x} = x\ln(x+1)$
2. Résoudre l'équation différentielle : $y'' - 3y' + 2y = 2x^2 - 5x + 3$.

Exercice 4 : (6 points 2,5+2,5+1)

Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ la suite de fonctions définie par $f_n(x) = 1 - \frac{1}{nx^2+1}$, sur $[0, +\infty[$.

1. Etudier la convergence uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ sur $[0, +\infty[$.

2. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément sur $[a, +\infty[$, $a > 0$.

3. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_3^5 \left(1 - \frac{1}{nx^2+1}\right)dx$.

Bon Courage

Université Dr. Yahia Farès de Médéa
Faculté des Sciences et de la Technologie
Département de Génie Eléctrique & Informatique

Année universitaire 2016-20017
Matière : Maths 3
08/01/2017

Corrigé de l' Epreuve de Fin de Semestre

Exercice 1 : (4 points 2+2)

1. $\iint\limits_D \frac{1}{(1+x^2)(1+y^2)}dxdy$ où $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \text{ avec } 0\le x\le 1,\ y\ge 0,\ 0\le y\le x\}$
$\iint\limits_D \frac{1}{(1+x^2)(1+y^2)}dxdy = \int\limits_0^1\left(\int\limits_0^x \frac{1}{(1+x^2)(1+y^2)}dy\right)dx$.
On a $\int\limits_0^x \frac{1}{(1+x^2)(1+y^2)}dy = \frac{1}{1+x^2}\int\limits_0^x \frac{1}{(1+y^2)}dy = \frac{1}{1+x^2}\left[\arctan y\right]_{y=0}^{y=x} = \frac{1}{1+x^2}\arctan x$
. Par suite, $\iint\limits_D \frac{1}{(1+x^2)(1+y^2)}dxdy = \int\limits_0^1 \frac{1}{1+x^2}\arctan x dx$. On pose $u=\arctan x$ $du = \frac{1}{1+x^2}dx$. Ceci implique que $\iint\limits_D \frac{1}{(1+x^2)(1+y^2)}dxdy = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} udu = \left[\frac{u^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi^2}{32}$ **(2 point)**.
2. $\iint\limits_D \frac{y^3}{x^2+y^2}dxdy$ où $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \text{ avec } x\ge 0,\ y\le x,\ 1\le x^2+y^2\le 4\}$.
On passe aux coordonnées polaires. On pose $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta \Rightarrow r=\sqrt{x^2+y^2}$.
$D=\{(r,\theta)\in\mathbb{R}^2 \text{ avec } \cos\theta\ge 0,\ \sin\theta\le\cos\theta,\ 1\le r^2\le 4\} = \left\{(r,\theta)\in\mathbb{R}^2 \text{ avec } \frac{-\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{4},\ 1\le r\le 2\right\}$.
$\iint\limits_D \frac{y^3}{x^2+y^2}dxdy = \iint\limits_{D'} \frac{r^3\sin^3\theta}{r^2}rdrd\theta = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}}(\int\limits_1^2 r^2\sin^3\theta dr)d\theta$. On a $\int\limits_1^2 r^2\sin^3\theta dr = \sin^3\theta\int\limits_1^2 r^2dr =$
$\sin^3\theta\left[\frac{r^3}{3}\right]_{r=1}^{r=2} = \frac{7}{3}\sin^3\theta$ **(1 point)**. Par suite, $\iint\limits_D \frac{y^3}{x^2+y^2}dxdy = \frac{7}{3}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}}\sin^3\theta d\theta = \frac{7}{3}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}}\sin\theta\left(1-\cos^2\theta\right)d\theta =$
$\frac{7}{3}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}}\sin\theta d\theta - \frac{7}{3}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}}\sin\theta\cos^2\theta d\theta =$
$\frac{7}{3}\left[-\cos\theta\right]_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\theta=\frac{\pi}{4}} + \frac{7}{3}\left[\frac{1}{3}\cos^3\theta\right]_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\theta=\frac{\pi}{4}} = -\frac{7}{3}.\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{7}{9}\frac{1}{\sqrt{2}^3} = -\frac{35}{18\sqrt{2}}$**(2 point)**.

Exercice 2 : (5 points 2+2+1)

1. a) $\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+3} = \int\limits_2^{+\infty}\frac{1}{x(\ln x)^2}dx$. Soit $t>0$. $\int\limits_0^t \frac{dx}{x^2+3}dx = \frac{1}{\sqrt{3}}\int\limits_0^t \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}dx}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^t =$
$\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)$. On a donc $\lim\limits_{t\to+\infty}\int\limits_0^t \frac{dx}{x^2+3}dx = \lim\limits_{t\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}$ et donc l'intégrale $\int\limits_2^{+\infty}\frac{1}{x(\ln x)^2}dx$ est convergente (**1,5 points**).
b) $\int\limits_2^{+\infty}\frac{xdx}{x^3+\sqrt{x}-1}$. On $\forall x\ge 2$, la fonction $\frac{x}{x^3+\sqrt{x}-1}\ge 0$ et $\frac{x}{x^3+\sqrt{x}-1} = \frac{1}{x^2+\frac{\sqrt{x}}{x}-\frac{1}{x}} \sim_{+\infty}$ $\frac{1}{x^2}$. Comme l'intégrale $\int\limits_2^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx$ converge, l'intégrale $\int\limits_2^{+\infty}\frac{xdx}{x^3+\sqrt{x}-1}$ converge (**1,5 points**)

$\int_1^{+\infty} \frac{\sin 5x}{x^\alpha}dx$, $\alpha \in \mathbb{R}^+$. On pour tout $x \geq 1$, $\left|\frac{\sin 5x}{x^\alpha}\right| = \frac{|\sin 5x|}{x^\alpha} \leq \frac{|\sin 5x|}{x^\alpha} \leq \frac{1}{x^\alpha}$. Si $\alpha > 1$, alors comme l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}dx$ converge, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \left|\frac{\sin 5x}{x^\alpha}\right| dx$ converge. Ceci implique que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin 5x}{x^\alpha}dx$ est absolument convergente et donc convergente **(1 point)**. Si $\alpha \leq 1$, alors $\left|\frac{\sin 5x}{x^\alpha}\right| = \frac{|\sin 5x|}{x^\alpha} \geq \frac{\sin^2 5x}{x^\alpha} = \frac{1-\cos 10x}{2x^\alpha} = \frac{1}{2x^\alpha} - \frac{\cos 10x}{2x^\alpha}$. L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{2x^\alpha}dx$ est divergente. L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\cos 10x}{2x^\alpha}dx$ converge. En vertu le Théorème d'Abel Diriclet, L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\cos 10x}{2x^\alpha}dx$ converge. Ceci implique que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 5x}{x^\alpha}dx$ est divergente. D'après le critère de comparaison, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \left|\frac{\sin 5x}{x^\alpha}\right| dx$ est divergente et donc l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin 5x}{x^\alpha}dx$ n'est pas absolument convergente. Pour la convergence on utilise le Théorème d'Abel Diriclet. On a $\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)' = \frac{-\alpha}{x^{\alpha+1}}$ et donc la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$ est positive et décroissante vers 0 sur l'intervalle $[1, +\infty[$. Pour tout $c, d \in [1, +\infty[$, on a $\left|\int_c^d \sin 5x dx\right| = \left|\left[-\frac{1}{5}\cos 5x\right]_c^d\right| = \frac{1}{5}|\cos 5c - \cos 5d| \leq \frac{1}{5}(|\cos 5c| + |\cos 5d|) \leq \frac{2}{5}$. D'après le Théorème d'Abel Diriclet, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin 5x}{x^\alpha}dx$ est convergente. **(1 points)**.

Exercice 3 : (5 points 2,5+2,5)

1. $y'' - 3y' + 2y = 2x^2 - 5x + 3$. La solution $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$. Soit $y'' - 3y' + 2y = 0$ l'équation homogène. L'equation caractéristique $k^2 - 3k + 2 = 0$ admet deux solutions réelles $k_1 = 1$, $k_2 = 2$ donc $y_h(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$. Comme le second membre est un polynôme de dégrés 2, $y_p(x) = ax^2 + bx + c$. $y_p'(x) = 2ax + b$ et $y_p'(x) = 2a$. On remplace dans l'équation différentielle donnée, on trouve $2ax^2 + (-6a + 2b)x + 2a - 3b + 2c = 2x^2 - 5x + 3$. Par identification, on obtient $\begin{cases} 2a = 2 \\ -6a + 2b = -5 \\ 2a - 3b + 2c = 3 \end{cases}$. D'où, $a = 1$, $b = \frac{1}{2}, c = \frac{5}{4}$ et $y_p(x) = x^2 + \frac{x}{2} + \frac{5}{4}$. La solution $y(x) = y_h(x) + y_p(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + x^2 + \frac{x}{2} + \frac{5}{4}$. **(2,5 points)**
2. Soit l'équation différentielle : $y' - \frac{y}{x} = x\ln(x+1)$. C'est une équation différentielle linéaire du premier ordre avec $p(x) = -\frac{1}{x}$ et $Q(x) = x\ln(x+1)$. La solution $y(x) = u(x)v(x)$. $v(x) = e^{-\int p(x)dx} = e^{\int \frac{1}{x}dx} = x$. $u(x) = \int \frac{Q(x)}{v(x)}dx + c = \int \frac{x\ln(x+1)}{x} + c = \int \ln(x+1)\,dx + c$. On effectue une intégration par partie. On pose $f(x) = \ln(x+1)$ et $g'(x) = 1$. Ceci implique que $f'(x) = \frac{1}{1+x}$ et $g(x) = x$. Donc $\int \ln(x+1)\,dx = x\ln(x+1) - \int \frac{x}{x+1}dx$. Comme $\frac{x}{x+1} = 1 - \frac{1}{1+x}$, alors $\int \ln(x+1)\,dx = x\ln(x+1) - \int dx + \int \frac{1}{1+x}dx = (x+1)\ln(x+1) - x$. Donc $u(x) = (x+1)\ln(x+1) - x + c$. D'où $y(x) = u(x)v(x) = x(x+1)\ln(x+1) - x^2 + cx$. **(2,5 points)**

Exercice 4 : (6 points 2,5+2,5+1)

$f_n(x) = 1 - \dfrac{1}{nx^2+1}$, sur $[0, +\infty[$

1. a) **La convergence simple sur** $[0, +\infty[$: Pour $x \in [0, 1]$ fixé, on a $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty}\left(1 - \dfrac{1}{nx^2+1}\right) = \begin{cases} 0 \text{ si } x = 0 \\ 1 \text{ si } x > 0 \end{cases}$ 0 **(1 point)**. D'où, la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ converge

simplement sur $[0, \quad +\infty[$ vers la fonction $f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x = 0 \\ 1 \text{ si } x > 0 \end{cases}$ **(0,5 point)**.

b) **La convergence uniforme sur** $[0, \quad +\infty[$: On ici une suite de fonctions continues sur $[0, \quad +\infty[$ convergente simplement sur $[0, \quad +\infty[$ vers une fonction discontinue en 0. On a donc pas de convergence uniforme sur $[0, \quad +\infty[$. (**1 point**)

2. a) **La convergence simple sur** $[a, \quad +\infty[$: Pour tout $x \in [a, \quad +\infty[$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 1$ **(0,5 point)**. D'où, la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ converge simplement sur $[a, \quad +\infty[$ vers la fonction $f(x) = 1$ **(0,5 point)**.

b) **La convergence uniforme sur** $[a, \quad +\infty[$: $|f_n(x) - f(x)| = \left|\dfrac{-1}{nx^2+1}\right| = \dfrac{1}{nx^2+1} = g_n(x)$. On a $g_n'(x) = \frac{-2nx}{(nx^2+1)^2} < 0$.

La fonction $g_n(x)$ est décroissante et donc $\sup\limits_{x\in[a, \quad +\infty[} |f_n(x) - f(x)| = \sup\limits_{x\in[a, \quad +\infty[} g_n(x) = g_n(a) = \dfrac{1}{na^2+1}$. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sup\limits_{x\in[a, \quad +\infty[} |f_n(x) - f(x)| = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{na^2+1} = 0$. D'où, la suite de fonctions$(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément sur $[a, \quad +\infty[$.**(1,5 point)**.

3. Comme on la convergence uniforme sur $[a, \quad +\infty[$, $a > 0$. On prend $a = 1$ et on a donc $[3, 5] \subset [1, \quad +\infty[$. Ceci implique que $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_3^5 \left(1 - \dfrac{1}{nx^2+1}\right) dx = \int_3^5 \lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 - \dfrac{1}{nx^2+1}\right) dx = \int_3^5 dx = [x]_3^5 = 5 - 3 = 2$. **(1 point).**

Université Dr. Yahia Farès de Médéa
Faculté de la Technologie
Département de TCT

Année universitaire 2017-2018
Matière : Maths 3
10/01/2018

Epreuve de Fin de Semestre

Exercice 1 : (4 points 2+2)

Calculer les intégrales doubles suivantes :

1. $\iint\limits_D \cos(x+y)\,dxdy$ où D est le triangle de sommets $A(0,0)$, $B(\pi,0)$, $C(\pi,\pi)$.
2. $\iint\limits_D \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ où $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \text{ avec } x^2+y^2\leq 3\sqrt{x^2+y^2}-3x,\ x+y\geq 0\right\}$.

Exercice 2 : (6 points 1+1+2+2)

1. Ennoncer le critère de comparaison d'une série numérique avec une intégrale impropre.
2. Etudier la nature de la série numérique $\sum\limits_{n\geq 2}\frac{1}{n\ln^{\beta} n}$, $\beta\in\mathbb{R}$.
3. Ennoncer le critère d'équivalence pour les intégrales impropres.
4. Etudier la convergence de l'intégrale $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin 5x-\sin 3x}{x^{\frac{5}{3}}}dx$.

Exercice 3 : (4 points 2+2)

1. Résoudre l'équation différentielle : $\left(x^2+1\right)y'+2xy=3x^2+1$
2. Résoudre l'équation différentielle : $y''+y=2\left(1+\cos 2x\right)$.

Exercice 4 : (6 points 1+1+1+1,5+1,5)

On considère la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 1} ne^{-nx}$, $x\geq 0$.

1. Etudier la convergence simple sur :
   1) $[0,\quad +\infty[$. 2) $]0,\qquad +\infty[$
2. Donner la définition de la convergence normale d'une série de fonctions.
3. Etudier la convergence uniforme sur $[a,\quad +\infty[$, $a>0$.
4. Calculer $\sum\limits_{n=1}^{n=+\infty} ne^{-nx}$.

Bon Courage

Université Dr. Yahia Farès de Médéa
Faculté des Sciences et de la Technologie
Département de Génie Eléctrique & Informatique

Année universitaire 2016-20017
Matière : Maths 3
08/01/2017

Corrigé de l' Epreuve de Fin de Semestre

Exercice 1 : (4 points 2+2)

1. $\iint\limits_D \frac{1}{(1+x^2)(1+y^2)}dxdy$ où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ avec } 0 \leq x \leq 1,\ y \geq 0,\ 0 \leq y \leq x\}$

$\iint\limits_D \frac{1}{(1+x^2)(1+y^2)}dxdy = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^x \frac{1}{(1+x^2)(1+y^2)}dy\right) dx$.

On a $\int\limits_0^x \frac{1}{(1+x^2)(1+y^2)}dy = \frac{1}{1+x^2}\int\limits_0^x \frac{1}{(1+y^2)}dy = \frac{1}{1+x^2}[\arctan y]_{y=0}^{y=x} = \frac{1}{1+x^2}\arctan x$

. Par suite, $\iint\limits_D \frac{1}{(1+x^2)(1+y^2)}dxdy = \int\limits_0^1 \frac{1}{1+x^2}\arctan x dx$. On pose $u = \arctan x$ $du = \frac{1}{1+x^2}dx$. Ceci implique que $\iint\limits_D \frac{1}{(1+x^2)(1+y^2)}dxdy = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} udu = \left[\frac{u^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi^2}{32}$ **(2 point)**.

2. $\iint\limits_D \frac{y^3}{x^2+y^2}dxdy$ où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ avec } x \geq 0,\ y \leq x,\ 1 \leq x^2+y^2 \leq 4\}$.

On passe aux coordonnées polaires. On pose $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta \Rightarrow r = \sqrt{x^2+y^2}$.

$D = \{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 \text{ avec } \cos\theta \geq 0,\ \sin\theta \leq \cos\theta,\ 1 \leq r^2 \leq 4\} = \left\{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 \text{ avec } \frac{-\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4},\ 1 \leq r \leq 2\right\}$.

$\iint\limits_D \frac{y^3}{x^2+y^2}dxdy = \iint\limits_{D'} \frac{r^3\sin^3\theta}{r^2}rdrd\theta = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} (\int\limits_1^2 r^2\sin^3\theta dr)d\theta$. On a $\int\limits_1^2 r^2\sin^3\theta dr = \sin^3\theta\int\limits_1^2 r^2dr = \sin^3\theta\left[\frac{r^3}{3}\right]_{r=1}^{r=2} = \frac{7}{3}\sin^3\theta$ **(1 point)**. Par suite, $\iint\limits_D \frac{y^3}{x^2+y^2}dxdy = \frac{7}{3}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \sin^3\theta d\theta = \frac{7}{3}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \sin\theta\left(1-\cos^2\theta\right)d\theta =$

$\frac{7}{3}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \sin\theta d\theta - \frac{7}{3}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \sin\theta\cos^2\theta d\theta =$

$\frac{7}{3}[-\cos\theta]_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\theta=\frac{\pi}{4}} + \frac{7}{3}\left[\frac{1}{3}\cos^3\theta\right]_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\theta=\frac{\pi}{4}} = -\frac{7}{3}.\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{7}{9}\frac{1}{\sqrt{2}^3} = -\frac{35}{18\sqrt{2}}$ **(2 point)**.

Exercice 2 : (5 points 2+2+1)

1. a) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+3} = \int\limits_2^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^2}dx$. Soit $t > 0$. $\int\limits_0^t \frac{dx}{x^2+3}dx = \frac{1}{\sqrt{3}}\int\limits_0^t \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}dx}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^t =$

$\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)$. On a donc $\lim\limits_{t\to+\infty}\int\limits_0^t \frac{dx}{x^2+3}dx = \lim\limits_{t\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}$ et donc l'intégrale $\int\limits_2^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^2}dx$ est convergente (**1,5 points**).

b) $\int\limits_2^{+\infty} \frac{xdx}{x^3+\sqrt{x}-1}$. On $\forall x \geq 2$, la fonction $\frac{x}{x^3+\sqrt{x}-1} \geq 0$ et $\frac{x}{x^3+\sqrt{x}-1} = \frac{1}{x^2+\frac{\sqrt{x}}{x}-\frac{1}{x}} \sim_{+\infty} \frac{1}{x^2}$. Comme l'intégrale $\int\limits_2^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx$ converge, l'intégrale $\int\limits_2^{+\infty} \frac{xdx}{x^3+\sqrt{x}-1}$ converge (**1,5 points**)

$\int_1^{+\infty} \frac{\sin 5x}{x^\alpha}dx$, $\alpha \in \mathbb{R}^+$. On pour tout $x \geq 1$, $\left|\frac{\sin 5x}{x^\alpha}\right| = \frac{|\sin 5x|}{x^\alpha} \leq \frac{|\sin 5x|}{x^\alpha} \leq \frac{1}{x^\alpha}$. Si $\alpha > 1$, alors comme l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}dx$ converge, l'intégrale $\int_1^{+\infty}\left|\frac{\sin 5x}{x^\alpha}\right|dx$ converge. Ceci implique que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin 5x}{x^\alpha}dx$ est absolument convergente et donc convergente **(1 point)**. Si $\alpha \leq 1$, alors $\left|\frac{\sin 5x}{x^\alpha}\right| = \frac{|\sin 5x|}{x^\alpha} \geq \frac{\sin^2 5x}{x^\alpha} = \frac{1-\cos 10x}{2x^\alpha} = \frac{1}{2x^\alpha} - \frac{\cos 10x}{2x^\alpha}$. L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{2x^\alpha}dx$ est divergente. L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\cos 10x}{2x^\alpha}dx$ converge. En vertu le Théorème d'Abel Diriclet, L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\cos 10x}{2x^\alpha}dx$ converge. Ceci implique que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 5x}{x^\alpha}dx$ est divergente. D'après le critère de comparaison, l'intégrale $\int_1^{+\infty}\left|\frac{\sin 5x}{x^\alpha}\right|dx$ est divergente et donc l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin 5x}{x^\alpha}dx$ n'est pas absolument convergente. Pour la convergence on utilise le Théorème d'Abel Diriclet. On a $\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)' = \frac{-\alpha}{x^{\alpha+1}}$ et donc la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$ est positive et décroissante vers 0 sur l'intervalle $[1, +\infty[$. Pour tout $c, d \in [1, +\infty[$, on a $\left|\int_c^d \sin 5x dx\right| = \left|\left[-\frac{1}{5}\cos 5x\right]_c^d\right| = \frac{1}{5}|\cos 5c - \cos 5d| \leq \frac{1}{5}(|\cos 5c| + |\cos 5d|) \leq \frac{2}{5}$. D'après le Théorème d'Abel Diriclet, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin 5x}{x^\alpha}dx$ est convergente. **(1 points)**.

Exercice 3 : (5 points 2,5+2,5)

1. $y'' - 3y' + 2y = 2x^2 - 5x + 3$. La solution $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$. Soit $y'' - 3y' + 2y = 0$ l'équation homogène. L'equation caractéristique $k^2 - 3k + 2 = 0$ admet deux solutions réelles $k_1 = 1$, $k_2 = 2$ donc $y_h(x) = c_1e^x + c_2e^{2x}$. Comme le second membre est un polynôme de dégrés 2, $y_p(x) = ax^2 + bx + c$. $y_p'(x) = 2ax + b$ et $y_p'(x) = 2a$. On remplace dans l'équation différentielle donnée, on trouve $2ax^2 + (-6a + 2b)x + 2a - 3b + 2c = 2x^2 - 5x + 3$. Par identification, on obtient $\begin{cases} 2a = 2 \\ -6a + 2b = -5 \\ 2a - 3b + 2c = 3 \end{cases}$. D'où, $a = 1$, $b = \frac{1}{2}$, $c = \frac{5}{4}$ et $y_p(x) = x^2 + \frac{x}{2} + \frac{5}{4}$. La solution $y(x) = y_h(x) + y_p(x) = c_1e^x + c_2e^{2x} + x^2 + \frac{x}{2} + \frac{5}{4}$. **(2,5 points)**
2. Soit l'équation différentielle : $y' - \frac{y}{x} = x\ln(x+1)$. C'est une équation différentielle linéaire du premier ordre avec $p(x) = -\frac{1}{x}$ et $Q(x) = x\ln(x+1)$. La solution $y(x) = u(x)v(x)$. $v(x) = e^{-\int p(x)dx} = e^{\int \frac{1}{x}dx} = x$. $u(x) = \int \frac{Q(x)}{v(x)}dx + c = \int \frac{x\ln(x+1)}{x} + c = \int \ln(x+1)dx + c$. On effectue une intégration par partie. On pose $f(x) = \ln(x+1)$ et $g'(x) = 1$. Ceci implique que $f'(x) = \frac{1}{1+x}$ et $g(x) = x$. Donc $\int \ln(x+1)dx = x\ln(x+1) - \int \frac{x}{x+1}dx$. Comme $\frac{x}{x+1} = 1 - \frac{1}{1+x}$, alors $\int \ln(x+1)dx = x\ln(x+1) - \int dx + \int \frac{1}{1+x}dx = (x+1)\ln(x+1) - x$. Donc $u(x) = (x+1)\ln(x+1) - x + c$. D'où $y(x) = u(x)v(x) = x(x+1)\ln(x+1) - x^2 + cx$. **(2,5 points)**

Exercice 4 : (6 points 2,5+2,5+1)

$f_n(x) = 1 - \dfrac{1}{nx^2+1}$, sur $[0, +\infty[$

1. a) **La convergence simple sur** $[0, +\infty[$: Pour $x \in [0, 1]$ fixé, on a $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty}\left(1 - \frac{1}{nx^2+1}\right) = \begin{cases} 0 \text{ si } x = 0 \\ 1 \text{ si } x > 0 \end{cases}$ 0 **(1 point)**. D'où, la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq1}$ converge

simplement sur $[0, \ +\infty[$ vers la fonction $f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x = 0 \\ 1 \text{ si } x > 0 \end{cases}$ **(0,5 point)**.

b) **La convergence uniforme sur** $[0, \ +\infty[$: On a ici une suite de fonctions continues sur $[0, \ +\infty[$ convergente simplement sur $[0, \ +\infty[$ vers une fonction discontinue en 0. On a donc pas de convergence uniforme sur $[0, \ +\infty[$. (**1 point**)

2. a) **La convergence simple sur** $[a, \ +\infty[$: Pour tout $x \in [a, \ +\infty[$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 1$ **(0,5 point)**. D'où, la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ converge simplement sur $[a, \ +\infty[$ vers la fonction $f(x) = 1$ **(0,5 point)**.

   b) **La convergence uniforme sur** $[a, \ +\infty[$: $|f_n(x) - f(x)| = \left|\dfrac{-1}{nx^2+1}\right| = \dfrac{1}{nx^2+1} = g_n(x)$. On a $g_n'(x) = \frac{-2nx}{(nx^2+1)^2} < 0$.
   La fonction $g_n(x)$ est décroissante et donc $\sup\limits_{x\in[a, \ +\infty[} |f_n(x) - f(x)| = \sup\limits_{x\in[a, \ +\infty[} g_n(x) = g_n(a) = \dfrac{1}{na^2+1}$. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sup\limits_{x\in[a, \ +\infty[} |f_n(x) - f(x)| = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{na^2+1} = 0$. D'où, la suite de fonctions$(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément sur $[a, \ +\infty[$.**(1,5 point)**.

3. Comme on la convergence uniforme sur $[a, \ +\infty[$, $a > 0$. On prend $a = 1$ et on a donc $[3, 5] \subset [1, \ +\infty[$. Ceci implique que $\lim\limits_{n\to+\infty} \int\limits_3^5 \left(1 - \dfrac{1}{nx^2+1}\right) dx = \int\limits_3^5 \lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 - \dfrac{1}{nx^2+1}\right) dx = \int\limits_3^5 dx = [x]_3^5 = 5 - 3 = 2$. **(1 point).**

Université de Dr Yahia Farès de Médéa. **Département** de T.C.T.

Module: Maths03 -2èmeAnnée ST. **Durée**: $1h$.

Rattrapage.N°1: Maths 03

Exercice 1. **(4 points):.** Pour les deux cas suivants, tracer D, puis calculer l'intégrale I :

1. $I = \iint\limits_D 2x^2 y dxdy$ où $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ y \geq 0, \text{et } y + x \leq 1\}$..

Exercice 2. **(7 points)**

1. Donner l'énoncé du théorème de comparaison, puis étudier la convergence de intégrale suivant

$$(a) \quad \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx.$$

2. Donner l'énoncé de la condition néccéssaire et non suffisante de la convergence d'une série numérique.

3. Etudier la convergence des séries numériques suivantes

$$(a) \quad \sum_{n\geq 0} \frac{n^3}{n^2+1} \qquad (b) \quad \sum_{n\geq 1} \frac{2}{\sqrt{n}}$$

Exercice 3. **(4 points)**.

1. Montrer que la solution de l'équation différentielle homogène $y' + y\tan x = 0$ est donnée par $y = \lambda \cos x,\ \lambda \in R$

2. Endéduire la solution générale de l'équation différentielle $y' + y\tan(x) = \cos(x)\sin(x)$

Exercice 4. **(5 points):** Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ la suite de fonctions définie par $f_n(x) = \frac{1}{(1+x^2)^n}$.

- Étudier la convergence simple et la convergence uniforme sur $I = [0, +\infty[$.
  Étudier la convergence simple et la convergence uniforme sur I $= [$a;+ 1 $[$: a>0

SOLUTION DÉTAILÉE DE RATTRAPAGE F.S. N 1: MATHS 03

Exercice 1. **(4 points: 2+2)** :pour les deux cas suivants, tracer D, puis calculer $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$:

1. $\iint\limits_D 2x^2ydxdy$ où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ y \geq 0, \text{et } y + x \leq 1\ \}$...............(02 pts)

Solution.

1. Fixons x entre 0 et 1. Le nombre y varie de 0 à $1-x$. Donc

$$\begin{aligned}\iint\limits_{D_1} 2x^2ydxdy &= \int\limits_{x=0}^{x=1}\left[\int\limits_0^{1-x} 2x^2ydy\right]dx = \int\limits_{x=0}^{x=1} x^2\left[\int\limits_0^{1-x} 2ydy\right]dx = \int\limits_{x=0}^{x=1} x^2(1-x)^2\,dx = \int\limits_{x=0}^{x=1} x^2(1-x)^2\,dx \\ &= \int\limits_{x=0}^{x=1}\left(x^4 - 2x^3 + x^2\right)dx = \left[\frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{2} + \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{30}.\end{aligned}$$

Exercice 2. **(6 points:2+2+2)**.

1. Donner l'énoncé du théorème de comparaison, puis étudier la convergence de l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx$. ....(02 pts)

2. Donner l'énoncer de la nécéssaire et non suffisante de convergence d'une série numérique.et étudier la convergence des séries numériques suivantes. ....(02 pts)

$$(a) \quad \sum_{n\geq 0} \frac{n^3}{n^2+1} \qquad (b) \quad \sum_{n\geq 1} \frac{2}{\sqrt{n}} \qquad (c) \quad \sum_{n\geq 1} \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$$

Solution.

1. **Théorème de comparaison.** Soient f et g deux fonctions positives et continues sur $[a, +\infty[$. Supposons que f soit majorée par g au voisinage de $+\infty$: *i.e.* $\exists A \geq a$ tq $\forall x \geq A : \ f(x) \leq g(x)$

   si $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ converge alors $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$. Et si $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ diverge alors $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ diverge.

- On a pour tout $x \in [1, +\infty[$: $\left|\frac{\sin x}{x^2}\right| \leq \frac{1}{x^2}$. Or l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ est convergente alors d'après le théorème de comparaison l'intégrale $\int_1^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x^2}\right| dx$ est convergente$\Longrightarrow$ $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx$ est absolument convergente $\Longrightarrow$ $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx$ est convergente.

2. **Théorème d'Abel.** Soit f une fonction dérivable sur $[a, +\infty[$, positive, décroissante, $\underset{x\to+\infty}{lim} f(x) = 0$. Soit g une fonction continue sur $[a, +\infty[$, telle que $\left|\int_a^b g(x)\,dx\right| \leq M$.

   Alors l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(x)\,g(x)\,dx$ converge.

- Avec $f(x) = \frac{1}{x}$ et $g(x) = \sin x$. On a sur $[1, +\infty[$ f est positive, dérivable et décroissante car $f'(x) = \frac{-1}{x^2} < 0$ et de plus $\underset{x\to+\infty}{lim} f(x) = 0$. Ainsi pour tout $[a, b] \subset [1, +\infty[$,

$$\left|\int_a^b g(x)\,dx\right| = \left|\int_a^b \sin x dx\right| = \left|[-\cos x]_a^b\right| = |\cos b| + |\cos a| \leq 2 = M.$$

D'après le théorème d'Abel, l'intégrale $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ est convergente.

3. (a) On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \arctan n = \frac{\pi}{2} \neq 0$, la condition nécéssaire de convergence n'est pas vérifiée et donc la série $\sum\limits_{n\geq 0} \arctan n$ est divergente.

(b) On utilise la règle d'Alembert $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \frac{(n)!}{(n)^n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e > 1$, et donc la série $\sum\limits_{n\geq 0} \arctan n$ est divergente.

Exercice 3. (5 points:2+3). Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. - Montrer que La solution de l'équation homogène $y' + y\tan x = 0$ est donnée par $y_h = \lambda \cos x$, $\lambda \in R$

- Endéduire la solution générale de

1. $y'' - 4y' + 3y = (2x+1)\, e^x$...............(03 pts)

Solution.

1. La solution homogène de l'équation homogène $y' + y\tan x = 0$ est donnée par $y_h = \lambda \cos x$, $\lambda \in R$. On cherche une solution particulière par la méthode de variation de la constante et posant $y_p = \lambda(x)\cos x$. Introduisant cette fonction dans l'équation, on trouve

$$\lambda(x)' \cos x = \sin x \cos x \Longrightarrow \lambda(x)' = \sin x \Longrightarrow \lambda(x) = \int \sin x dx = -\cos x + c$$

Une solution particulière de l'équation différentielle est donc donnée par la fonction $y_p = -2\cos^2 x$. La solution générale est

$$y_g = y_h + y_p = \lambda \cos x + -2\cos^2 x$$

2. On commence par résoudre l'équation homogène $y'' + 3y' - 4y = 0$. Son équation caractéristique est $r^2 + 3r - 4 = 0$, dont les racines sont 1 et -4. Les solutions de l'équation homogène sont donc les fonctions

$$y_h = \lambda e^x + \mu e^{-4x}.$$

Pour la solution particulière de l'équation $y'' + 3y' - 4y = (x+2)e^x$, on remarque cette fois que 1 est racine simple de l'équation caractéristique $r^2 + 3r - 4 = 0$. On cherche donc une solution particulière sous la forme

$$y_p = (ax+b)xe^x.$$

On dérive pour trouver

$$y' = (ax^2 + (2a+b)x + b)e^x \text{ et } y'' = (ax^2 + (4a+b)x + (2a+2b)e^x.$$

Par identification, a et b sont solutions du système : $\begin{cases} -4a = & 1 \\ 2a - 2b = & 2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = & -\frac{1}{4} \\ b = & -\frac{5}{4} \end{cases}$.

La solution particulière est donnée par

$$y_p = (-\frac{1}{4}x^2 - \frac{5}{4}x)e^x.$$

Finalement, la solution générale est

$$y_g = y_h + y_p = \lambda e^x + \mu e^{-4x} + (-\frac{1}{4}x^2 - \frac{5}{4}x)e^x;\ \blacksquare, \mu \in \mathbb{R}.$$

Exercice 4. (5 points:2+3). Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ la suite de fonctions définie par $f_n(x) = \frac{1}{(1+x^2)^n}$.

- Étudier la convergence simple et la convergence uniforme sur $I = \mathbb{R}^+$ puis sur $I = [a, +\infty[$, avec $a > 0$.

Solution.

Étudions la convergence simple et la convergence uniforme sur I = [0;+ 1 [:

- **Convergence simple.** Fixons $x \in \mathbb{R}$. On a $\boxed{f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}}$ ....(01 pts)

La suite de fonctions (f_n) converge donc simplement vers la fonction $f(x)$.

- **Convergence uniforme.** Puisque chaque fonction f_n est continue sur $\mathbb{R}$ et la fonction f ne l'est pas en 0. La convergence ne peut pas être uniforme sur $\mathbb{R}$.............(01 pts)

2. $I = [a, +\infty[$avec $a > 0$.

- **Convergence simple.** Fixons $x \in [a, +\infty[$. On a $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$..............(01 pts)

- **Convergence uniforme.** Sur les intervalles du type $[a, +\infty[$avec $a > 0$, puisque pour tout $x \geq a$, on a

$$\boxed{\|f_n - f\| = \sup_{x\in[a,+\infty[} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[a,+\infty[} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[a,+\infty[} |g(x)|.}$$

Avec

$$g(x) = |f_n(x) - f(x)| = |f_n(x)| = \frac{1}{(1+x^2)^n}.$$

Fixons $n \in \mathbb{N}$. On a pour tout $x \in [a, +\infty[$: $g'(x) = \frac{-2nx}{(1+x^2)^{n+1}} < 0$. Et la fonction g est strictement décroissante sur $[a, +\infty[$, et elle atteinte son sup en $x = a$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n - f\| = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sup\limits_{x\in[a,+\infty[} |g(x)| \right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{(1+a^2)^n} = 0.$

On en déduit que la suite (f_n) converge uniformément vers la fonction nulle sur $[a, +\infty[$avec $a > 0$..............(02 pts)