Solution TD 4 : Cinématique du Solide Rigide

4.1. Soit une tige (**T**) homogène de longueur R, d'extrémités O et A. Cette tige est en rotation autour d'un axe fixe $(\mathbf{O}, \vec{\mathbf{z}}_1)$, par un angle de rotation θ (Figure 4.1), dans le repère fixe $\mathbf{R_1}$ $(\mathbf{O}, \vec{\mathbf{x}}_1, \vec{\mathbf{y}}_1, \vec{\mathbf{z}}_1)$. Le repère $\mathbf{R_T}$ $(\mathbf{A}, \vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{z}}_1)$ est lié à la tige, tel que $\overrightarrow{\mathbf{OA}}=\mathbf{R}\vec{\mathbf{u}}$.

- Déterminer les vecteurs vitesse et accélération du point A, en utilisant la méthode de dérivation directe et la méthode de distribution des vitesses.

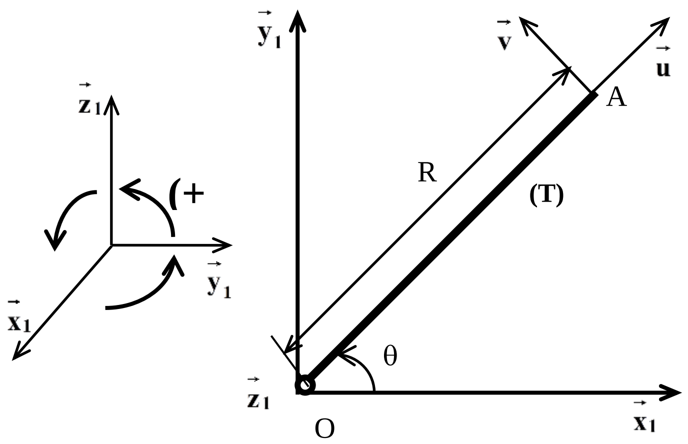


Figure 4.1.

Solution:

Détermination des vecteurs vitesse et accélération du point A :

Nous avons l'angle de rotation de la tige autour de l'axe $\vec{\mathbf{z}}_1$: **θ;**

Et le vecteur position du point A : $\overrightarrow{\mathbf{OA}}=\mathbf{R}\vec{\mathbf{u}}$

1- la méthode de dérivation directe

Le vecteur vitesse du point A par rapport à R_1 est défini par :

$$\vec{\mathbf{V}}_{A/R_1}=\frac{d^{R_1}\overrightarrow{\mathbf{OA}}}{dt}=\frac{d^{R_1}\mathbf{R}\vec{\mathbf{u}}}{dt}=\mathbf{R}\frac{d^{R_1}\vec{\mathbf{u}}}{dt}$$

Sachant que :

$$\vec{\mathbf{u}}=\cos\theta\,\vec{\mathbf{x}}_1+\sin\theta\,\vec{\mathbf{y}}_1$$

$$\vec{\mathbf{v}}=-\sin\theta\,\vec{\mathbf{x}}_1+\cos\theta\,\vec{\mathbf{y}}_1$$

La dérivée du vecteur unitaire mobile $\vec{\mathbf{u}}$ est :

$$\frac{d^{R_1}\vec{u}}{dt}=\frac{d\cos\theta}{dt}\vec{x}_1+\frac{d\sin\theta}{dt}\vec{y}_1=-\dot{\theta}\sin\theta\vec{x}_1+\dot{\theta}\cos\theta\vec{y}_1=\dot{\theta}\left(-\sin\theta\vec{x}_1+\cos\theta\vec{y}_1\right)=\dot{\theta}\vec{v}$$

Donc, le vecteur vitesse du point A à l'extrémité de la tige s'écrit :

$$\vec{V}_{A/R_1}=R\dot{\theta}\vec{v}$$

Le vecteur accélération du point A est exprimé par :

$$\vec{a}_{A/R_1}=\frac{d^{R_1}\vec{V}_{A/R_1}}{dt}=\frac{d^{R_1}\left(R\dot{\theta}\vec{v}\right)}{dt}=R\frac{d^{R_1}\left(\dot{\theta}\vec{v}\right)}{dt}$$

$$\vec{a}_{A/R_1}=R\left(\vec{v}\frac{d^{R_1}\dot{\theta}}{dt}+\dot{\theta}\frac{d^{R_1}\vec{v}}{dt}\right)$$

D'où, le vecteur accélération du point A est :

$$\vec{a}_{A/R_1}=R\left(\ddot{\theta}\vec{v}-\dot{\theta}^2\vec{u}\right)$$

2- Méthode de distribution des vitesses dans un corps solide

Le taux de rotation de la tige autour de l'axe $\vec{z}_1$ est :

$$\vec{\Omega}_{T/R_1}=\frac{d\theta}{dt}\vec{z}_1=\dot{\theta}\vec{z}_1$$

D'après la formule de distribution des vitesses dans un corps solide, le vecteur vitesse du point A est exprimé par :

$$\vec{V}_{A/R_1}=\vec{V}_{O/R_1}+\overrightarrow{AO}\wedge\vec{\Omega}_{T/R_1}$$

Où, $\vec{V}_{O/R_1}=\vec{0}$, (O point fixe, centre de rotation de la tige).

D'ici :

$$\vec{V}_{A/R_1}=\overrightarrow{AO}\wedge\vec{\Omega}_{T/R_1}=-R\vec{u}\wedge\dot{\theta}\vec{z}_1=R\dot{\theta}\vec{v}$$

On déduit le torseur cinématique dans le point A :

$$[V]_A=\begin{pmatrix}\vec{\Omega}_{T/R_1}\\ \vec{V}_{A/R_1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dot{\theta}\vec{z}_1\\ R\dot{\theta}\vec{v}\end{pmatrix}$$

-le vecteur accélération du point A s'écrit :

$$\vec{a}_{A/R_1}=\frac{d^{R_1}\vec{V}_{A/R_1}}{dt}=\frac{d^{R_1}\vec{V}_{O/R_1}}{dt}+\frac{d\left(\overrightarrow{AO}\wedge\vec{\Omega}_{T/R_1}\right)}{dt}$$

et, la dérivée d'un vecteur mobile, par rapport au repère fixe, s'écrit :

$$\frac{d^{R_1}\overrightarrow{OA}}{dt}=\vec{\Omega}_{T/R_1}\wedge\overrightarrow{AO}$$

Donc, on retrouve la formule de Rivals concernant la loi de distribution des accélérations dans un corps solide :

$$\vec{a}_{A/R_1}=\vec{a}_{O/R_1}+\overrightarrow{AO}\wedge\frac{d\vec{\Omega}_{T/R_1}}{dt}+\left(\vec{\Omega}_{T/R_1}\wedge\overrightarrow{AO}\right)\wedge\vec{\Omega}_{T/R_1}$$

Où :

$\vec{a}_{O/R_1}=\vec{0}$: car O point fixe,

$$\overrightarrow{AO}\wedge\frac{d\vec{\Omega}}{dt}=R\vec{u}\wedge\frac{d\dot{\theta}\vec{z}_1}{dt}=R\ddot{\theta}\vec{v}$$

$$\left(\vec{\Omega}_{T/R_1} \wedge \overrightarrow{AO}\right) \wedge \vec{\Omega}_{T/R_1} = \left(\dot{\theta}\vec{z}_1 \wedge -R\vec{u}\right) \wedge \dot{\theta}\vec{z}_1 = -R\dot{\theta}^2\vec{u}$$

D’où, on retrouve le vecteur accélération du point A :

$$\vec{a}_{A/R_1} = R\left(\ddot{\theta}\vec{v} - \dot{\theta}^2\vec{u}\right)$$

4.2. On considère le roulement d’un disque de centre C et de rayon **r** sur un axe (O, $\vec{x}_1$). Le repère R (C, $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$) est lié au disque (Figure 4.2).

- Ecrire le torseur cinématique au centre C du disque ;
- Déterminer les vecteurs vitesse et accélération du point M sur la périphérie du disque ;
- Écrire la condition de roulement sans glissement au point de contact **I** avec l’axe (O, $\vec{x}_1$).

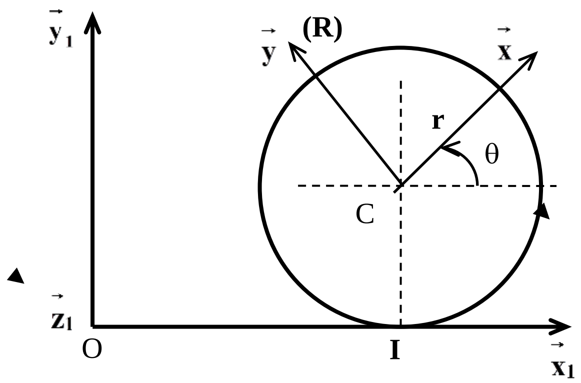


Figure 4.2

Solution :

1- Le torseur cinématique au centre C du disque :

Le disque est en mouvement hélicoïdal (rotation + translation)

θ est l'angle de rotation du disque autour de l'axe Cz_1, donc, le taux de rotation est (Figure 3.16) :

$$\vec{\Omega}_{C/R_1} = \frac{d\theta}{dt}\vec{z}_1 = \dot{\theta}\vec{z}_1$$

Le déplacement du disque du point **O** jusqu'au point de contact **I**, est égal à **x**, donc, la vitesse de translation du point **C** est :

$$\vec{V}_C = \frac{d\overrightarrow{O_1C}}{dt} = \frac{d\left(\overrightarrow{O_1I} + \overrightarrow{IC}\right)}{dt} = \frac{d\left(x\vec{x}_1 + R\vec{y}_1\right)}{dt} = \dot{x}\vec{x}_1$$

Par conséquent, le torseur cinématique du centre C du disque est :

$$[V]_C=\begin{pmatrix}\vec{\Omega}_{C/R_1}\\ \vec{V}_C\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dot{\theta}\vec{z}_1\\ \dot{x}\vec{x}_1\end{pmatrix}$$

2- Les vecteurs vitesse et accélération du point M sur la périphérie du disque :

Appliquons la règle de distribution des vitesses dans un corps solide dans le point M :

$$\vec{V}_{M/R_1}=\vec{V}_C+\overrightarrow{MC}\wedge\vec{\Omega}_{C/R_1}$$

$$\vec{V}_{M/R_1}=\dot{x}\vec{x}_1-r\,\vec{x}\wedge\dot{\theta}\vec{z}_1=\dot{x}\vec{x}_1+r\dot{\theta}\vec{y}$$

On exprime $\vec{V}_{M/R_1}$ dans le repère fixe :
Sachant que :

$$\vec{x}=\cos\theta\,\vec{x}_1+\sin\theta\,\vec{y}_1$$
$$\vec{y}=-\sin\theta\,\vec{x}_1+\cos\theta\,\vec{y}_1$$

Donc,

$$\vec{V}_{M/R_1}=\dot{x}\vec{x}_1+r\dot{\theta}\left(-\sin\theta\,\vec{x}_1+\cos\theta\,\vec{y}_1\right)$$

Le vecteur accélération du point M :

$$\vec{a}_{M/R_1}=\frac{d^{R_1}\vec{V}_{M/R_1}}{dt}=\frac{d^{R_1}\left(\vec{V}_{C/R_1}+\overrightarrow{MC}\wedge\vec{\Omega}_{C/R_1}\right)}{dt}$$
$$\vec{a}_{M/R_1}==\frac{d^{R_1}\vec{V}_{C/R_1}}{dt}+\overrightarrow{MC}\wedge\frac{d^{R_1}\vec{\Omega}_{C/R_1}}{dt}+\frac{d^{R_1}\overrightarrow{MC}}{dt}\wedge\vec{\Omega}_{C/R_1}$$

Or, la dérivée d'un vecteur mobile est :

$$\frac{d^{R_1}\overrightarrow{MC}}{dt}=\vec{\Omega}_{C/R_1}\wedge\overrightarrow{MC}$$

D'où, la formule de Rivals concernant la loi de distribution des accélérations dans un corps solide :

$$\vec{a}_{M/R_1}=\vec{a}_{C/R_1}+\overrightarrow{MC}\wedge\frac{d\vec{\Omega}_{C/R_1}}{dt}+\left(\vec{\Omega}_{C/R_1}\wedge\overrightarrow{MC}\right)\wedge\vec{\Omega}_{T/R_1}$$

Où :

$$\vec{a}_{C/R_1} = \ddot{x}\vec{x}_1$$

$$\overrightarrow{MC} \wedge \frac{d\vec{\Omega}_{C/R_1}}{dt} = -r\,\vec{x} \wedge \frac{d\dot{\theta}\,\vec{z}_1}{dt} = r\ddot{\theta}\vec{y}\ \left(\vec{\Omega}_{C/R_1} \wedge \overrightarrow{MC}\right) \wedge \vec{\Omega}_{T/R_1} = \quad \left(\dot{\theta}\vec{z}_1 \wedge -r\,\vec{x}\right) \wedge \dot{\theta}\vec{z}_1 = -r\,\dot{\theta}^2\,\vec{x}$$

On remplaçant ces expressions dans $\vec{a}_{M/R_1}$, on obtient, le vecteur accélération du point M :

$$\vec{a}_{M/R_1} = \ddot{x}\vec{x}_1 - r\,\dot{\theta}^2\vec{x} + r\ddot{\theta}\,\vec{y}$$

3- La condition de roulement sans glissement au point de contact **I** avec l'axe (O, $\vec{x}_1$) :

Le vecteur vitesse du point de contact **I** :

Lorsque $\theta = \frac{3\pi}{2}$ le point M coïncide avec le point de contact I, dans ce cas : $\vec{y} = \vec{x}_1$

C'est-à-dire que :

$$\vec{V}_{I/R_1} = \vec{V}_{M/R_1}(\theta = \frac{3\pi}{2})$$

D'où :

$$\vec{V}_{I/R_1} = \dot{x}\vec{x}_1 + r\,\dot{\theta}\vec{x}_1 = \left(\dot{x} + r\,\dot{\theta}\right)\vec{x}_1$$

La condition de roulement sans glissement au point de contact I, est la vitesse de glissement $\vec{V}_g$ nulle, c'est-à-dire :

$$\vec{V}_g = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{V}_I = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \left(\dot{x} + r\dot{\theta}\right)\vec{x}_1 = \vec{0} \Leftrightarrow \left(\dot{x} + r\dot{\theta}\right) = 0$$

4.3. Un carré ABCD de coté $2a$ (cm) (repère R (O, xyz) mobile) tourne autour d'un axe fixe O_1z_1 avec un taux de rotation $\vec{\Omega}=\frac{\pi}{2}\vec{z}_1$ (rad/sec) (Figure 2). Nous avons:

- $\overrightarrow{O_1O}=a\,\vec{z}_1$
- $\vec{z}_1=\vec{z}$.

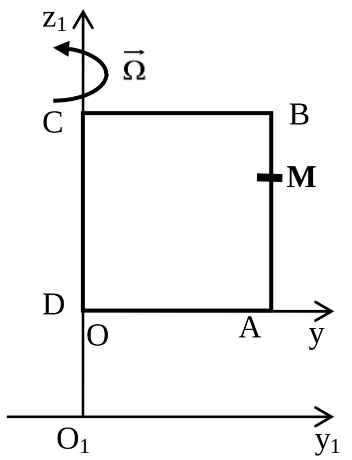
-Un point matériel M est mobile sur le coté AB, ses coordonnées x, y, z satisfaisant à :

$$x = 0,\ y = 2a,\ z = a\sin(\frac{\pi}{3}t)\ \text{(cm)}$$

t désignant le temps.

Questions:

1. Définir les repères relatif et absolu ;
2. Donner le taux de rotation de **R/R₁** ;
3. Donner les vecteurs de position du point M ;
4. Déterminer l’expression analytique du vecteur vitesse absolue du point M ;
5. On déduire les vecteurs vitesses relative, d’entrainement et absolue du point M dans le repère mobile ;
6. Déterminer le vecteur vitesse absolue à l’instant t = 3 sec;
7. Déterminer l’expression analytique du vecteur accélération absolue du point M ;
8. On déduire les vecteurs accélérations relative, complémentaire (Coriolis), d’entrainement et absolue du point M dans le repère mobile.
9. Déterminer le vecteur accélération absolue à l’instant t = 3 sec;



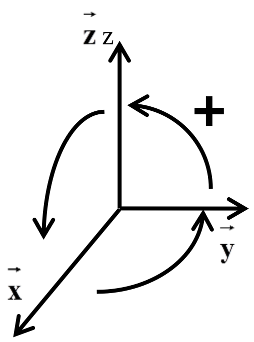


Figure 2

Solution :

1- Définir les repères relatif et absolu

- Le repère R (**O**, $\vec{\mathbf{x}},\vec{\mathbf{y}},\vec{\mathbf{z}}$) mobile (Repère relatif)
- Le repère R_1(**O_1**, $\vec{\mathbf{x}}_1,\vec{\mathbf{y}}_1,\vec{\mathbf{z}}_1$) fixe **(**Repère absolu)

2- Le vecteur taux de rotation de R/R_1, $\vec{\Omega}_{R/R_1}$:

$$\vec{\Omega}=\frac{\pi}{2}\vec{z}_1$$

3-les vecteurs de positions point M :

Le point matériel M défini par les coordonnées :

$$x = 0,\ y = 2a\ ,\ z = a\sin(\frac{\pi}{3}t)\ \text{(cm)}$$

Le vecteur de position relatif du point M s'écrit :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{x} + y\vec{y} + z\vec{z} = 0\vec{x} + 2a\vec{y} + a\sin(\frac{\pi}{3}t)\vec{z}$$

Le vecteur de position absolu du point M est :

$$\overrightarrow{O_1M} = \overrightarrow{O_1O} + \overrightarrow{OM}$$

Le vecteur de position d'entraînement de **O** à **O_1**:

- $\overrightarrow{O_1O} = a\,\vec{z}_1$

4- l'expression analytique du vecteur vitesse absolue du point M,

Le vecteur vitesse absolue du point M dans le repère R s'écrit :

$$\vec{V}_A(M) = \vec{V}_{M/R_1} = \frac{d^{R_1}\overrightarrow{O_1M}}{dt} = \frac{d^{R_1}\overrightarrow{O_1O}}{dt} + \frac{d^{R_1}\overrightarrow{OM}}{dt}$$

La dérivée du vecteur mobile $\overrightarrow{OM}$ par rapport à un repère fixe est :

$$\frac{d^{R_1}\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d^{R}\overrightarrow{OM}}{dt} + \vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{OM} = \vec{V}_{M/R} + \vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{OM}$$

$$\frac{d^{R_1}\overrightarrow{O_1O}}{dt} = \vec{V}_{O/R_1}$$

Donc, la formule du vecteur vitesse absolue du point M, s'exprime :

$$\vec{V}_A(M) = \vec{V}_{M/R_1} = \frac{d^{R_1}\overrightarrow{O_1M}}{dt} = \vec{V}_{M/R} + \vec{V}_{O/R_1} + \vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{OM}$$

Avec :

$\vec{V}_{M/R} = \dfrac{d^{R}\overrightarrow{OM}}{dt}$: la vitesse relative du point M

$\vec{V}_e(M) = \vec{V}_{O/R_1} + \vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{OM}$: le vecteur vitesse d'entraînement du point M

$\vec{V}_{O/R_1} = \dfrac{d^{R_1}\overrightarrow{O_1O}}{dt}$ est la vitesse du point O par rapport à R_1.

5-On déduire les vecteurs vitesses relative, d'entrainement et absolue du point M dans le repère mobile.

Le vecteur vitesse relative du point M s'écrit :

$$\vec{V}_{M/R} = \frac{d^R \overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{\pi}{3} a \cos(\frac{\pi}{3} t)\vec{z} \qquad (cm/\sec)$$

le vecteur vitesses d'entrainement :

$$\vec{V}_{O/R_1} = \frac{d^{R_1} \overrightarrow{O_1O}}{dt} = \vec{0} \quad \text{a constante}$$

$$\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM} = \frac{\pi}{2} \vec{z}_1 \wedge (2a\vec{y} + a\sin(\frac{\pi}{3}t)\vec{z}) = -\pi a\vec{x} \quad (cm/\sec)$$

D'où :

$$\vec{V}_e(M) = -\pi a\vec{x} \quad (cm/\sec)$$

Par conséquent, le vecteur vitesse absolue du point M par rapport à R_1 est :

$$\vec{V}_A(M) = \vec{V}_{M/R_1} = -\pi a\vec{x} + \frac{\pi}{3} a\cos(\frac{\pi}{3}t)\vec{z} \qquad (cm/\sec)$$

6. Déterminer le vecteur vitesse absolue à l'instant t = 3 sec;

$$\vec{V}_A(M) = \vec{V}_{M/R_1} = -\pi a\vec{x} + 2\vec{y} - \frac{\pi}{3} a\vec{z} \qquad (cm/\sec)$$

7. l'expression analytique du vecteur accélération absolue du point M,

Le vecteur accélération absolue du point M par rapport au repère fixe R_1, s'écrit :

$$\vec{a}_A(M) = \vec{a}_{M/R_1} = \frac{d^{2R_1} \overrightarrow{O_1M}}{dt^2} = \frac{d^{R_1} \vec{V}_{M/R_1}}{dt} = \frac{d^{R_1}\left(\vec{V}_{M/R} + \vec{V}_{O/R_1} + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM}\right)}{dt}$$

$$\vec{a}_A(M) = \frac{d^{R_1} \vec{V}_{M/R_1}}{dt} + \frac{d^{R_1} \vec{V}_{O/R_1}}{dt} + \frac{d^{R_1} \vec{\Omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{OM} + \vec{\Omega} \wedge \frac{d^{R_1} \overrightarrow{OM}}{dt} \qquad (1)$$

On applique la dérivation d'un vecteur mobile par rapport à un repère fixe à la dérivée des vecteurs mobiles $\overrightarrow{OM}$ et $\vec{V}_{M/R}$ par rapport au repère fixe R_1 :

$$\frac{d^{R_1} \overrightarrow{OM}}{dt} = \vec{V}_{M/R} + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM}$$

$$\frac{d^{R_1} \vec{V}_{M/R}}{dt} = \frac{d^{R} \vec{V}_{M/R}}{dt} + \vec{\Omega} \wedge \vec{V}_{M/R}$$

Où :

$$\frac{d^{R_1} \vec{V}_{M/R}}{dt} = \vec{a}_{M/R} + \vec{\Omega} \wedge \vec{V}_{M/R}$$

Avec :

$$\vec{a}_{M/R} = \frac{d^R \vec{V}_{M/R}}{dt}$$ le vecteur accélération relative,

On remplace ces développements dans l'expression (1), on obtient l'expresse du vecteur accélération absolue :

$$\vec{a}_A(M) = \vec{a}_{M/R_1} = \vec{a}_{M/R} + 2\left(\vec{\Omega} \wedge \vec{V}_{M/R}\right) + \vec{a}_{O/R_1} + \frac{d^{R_1}\vec{\Omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{OM} + \vec{\Omega} \wedge \left(\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM}\right)$$

8. On déduire les vecteurs accélérations relative, complémentaire (Coriolis), d'entrainement et absolue du point M dans le repère mobile.

Le vecteur accélération relative du point M, est :

$$\vec{a}_r(M) = \vec{a}_{M/R} = \frac{d^R \vec{V}_{M/R}}{dt} = -\left(\frac{\pi}{3}\right)^2 a \sin(\frac{\pi}{3} t)\vec{z} \qquad (cm/\sec^2)$$

Le vecteur accélération complémentaire (Coriolis) :

$$\vec{a}_C(M) = 2\left(\vec{\Omega} \wedge \vec{V}_{M/R}\right) = 2\left(\frac{\pi}{2}\vec{z}_1 \wedge (\frac{\pi}{3} a \cos(\frac{\pi}{3} t)\vec{z})\right) = \vec{0}$$

Le vecteur accélération d'entraînement :

$$\vec{a}_e(M) = \vec{a}_{O/R_1} + \frac{d^{R_1}\vec{\Omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{OM} + \vec{\Omega} \wedge \left(\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM}\right)$$

Avec

$$\vec{a}_{O/R_1} = \frac{d^{R_1}\vec{V}_{O/R_1}}{dt} = \vec{0} \quad (cm/\sec^2)$$

$$\frac{d^{R_1}\vec{\Omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{OM} = \vec{0}$$

$$\vec{\Omega} \wedge \left(\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM}\right) = -\frac{\pi^2}{2} a\vec{y} \qquad (cm/\sec^2)$$

Donc, le vecteur accélération d'entraînement s'écrit :

$$\vec{a}_e(M) = \vec{\Omega} \wedge \left(\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM}\right) = \frac{\pi}{2}\vec{z} \wedge (\frac{\pi}{2}\vec{z} \wedge (2a\vec{y} + a\sin(\frac{\pi}{3}t)\vec{z}) = -\frac{\pi^2}{2} a\vec{y} \quad (cm/\sec^2)$$

Enfin, le vecteur accélération absolue du point M est :

$$\vec{a}_A(M) = \vec{a}_{M/R} = -\frac{\pi^2}{2} a\vec{y} - \left(\frac{\pi}{3}\right)^2 a\sin(\frac{\pi}{3}t)\vec{z} \qquad (cm/\sec^2)$$

A l'instant t = 3 sec :

$$\vec{a}_A(M) = \vec{a}_{M/R} = -\frac{\pi^2}{2} a\vec{y} = -5a\vec{y} \quad (cm/\sec^2)$$