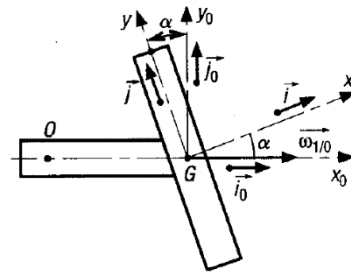
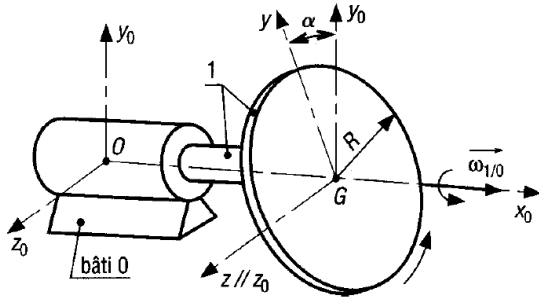


Exercice 01 :

Un disque plat (1) de masse 1 kg, de rayon $R = 0,15m$, est monté sur un arbre horizontal d'axe X_0 , avec une inclinaison $\alpha = 20^\circ$ par rapport au plan de rotation. Si $\omega_{1/0} = 32 \text{ rad.s}^{-1}$, déterminer $\vec{\sigma}_{G1/0}$ et l'angle θ entre $\vec{\omega}_{1/0}$ et $\vec{\sigma}_{G1/0}$.



Solution :

Pour déterminer le moment cinétique, Il faut d'abord faire les calculs dans le repère associé au disque (G, x, y, z) du tenseur d'inertie et du vecteur de rotation. La matrice d'inertie dans son repère local (X, Y, Z) est

$$[U_G]_{xyz} = \begin{bmatrix} \frac{mR^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mR^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mR^2}{4} \end{bmatrix}$$

Par ailleurs, dans le repère (X_0, Y_0, Z_0) on a, $\vec{\omega}_{1/0} = \omega \vec{i}_0$ et dans le repère (X, Y, Z) on a $[\vec{\omega}_{1/0}]_{xyz} = \begin{bmatrix} \omega \cos \alpha \\ -\omega \sin \alpha \\ 0 \end{bmatrix}$ Car nous avons :

$$\vec{i} = \cos \alpha \vec{i}_0 + \sin \alpha \vec{j}_0 \quad \vec{j} = -\sin \alpha \vec{i}_0 + \cos \alpha \vec{j}_0$$

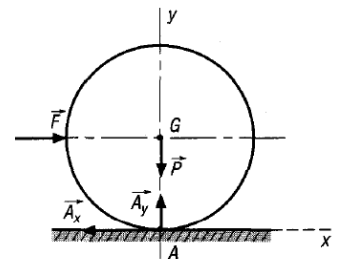
$$[\vec{\sigma}_{G1/0}]_{xyz} = [U_G]_{xyz} [\vec{\omega}_{1/0}]_{xyz} \text{ d'où } [\vec{\sigma}_{G1/0}]_{xyz} = \frac{mR^2}{4} \omega \begin{bmatrix} 2 \cos \alpha \\ -\sin \alpha \\ 0 \end{bmatrix}$$

On obtient l'expression du moment cinétique dans la base (G, x_0, y_0, z_0) :

$$\vec{\sigma}_{G1/0} = \frac{mR^2 \omega}{4} [(2 \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) \vec{i}_0 + \sin \alpha \cos \alpha \vec{j}_0] = \frac{1 \times 0,15^2 \times 32}{4} [(2 \cos^2 20^\circ + \sin^2 20^\circ) \vec{i}_0 + \sin 20^\circ \cos 20^\circ \vec{j}_0]$$

Exercice 02:

Considérons le cas d'un disque qui roule sans glisser sur un plan horizontal sous l'action d'une force constante \vec{F} . La masse du disque est m , $f_A = \mu_A$, caractérise le frottement en A. Déterminer l'équation du mouvement.



Solution EX 02

$$f_A = \mu_A = \frac{A_x}{A_y} ; P = mg ; \Sigma \vec{F}_{\text{ext}} = m\vec{a}_G$$

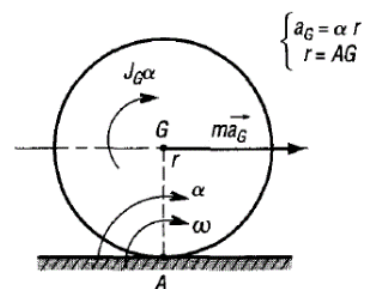
$$\text{Projection sur } x : \Sigma F_x = ma_G \quad F - A_x = F - f_A \quad A_y = F - f_A \quad P = ma_G = m\alpha r \quad (1)$$

$$\text{Projection sur } y : \Sigma F_y = A_y - P = 0 \quad \text{donne } A_y = P = mg \quad (2)$$

$$\Sigma M_G(\vec{F}_{\text{ext}}) = J_G \alpha \text{ donne } A_x \cdot r = \frac{m r^2}{2} \alpha = f_A P r \quad (3)$$

$$\text{les équations (1) et (3) conduisent à : } \alpha = \frac{2 f_A P}{m r} = \frac{F - f_A P}{m r} \text{ d'où } f_A = \frac{F}{3 P}$$

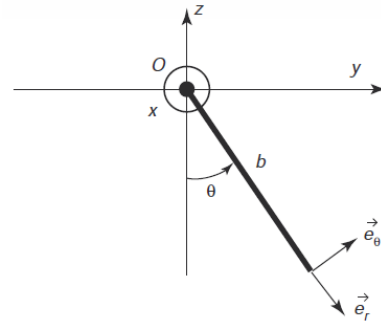
$$\text{Si on remplace } f_A \text{ par } \frac{F}{3 P} \text{ dans l'équation (3), on obtient : } \alpha = \frac{2 F}{3 m r}$$



Exercice 03 :

On considère une plaque rectangulaire a sur b , homogène, de masse M , d'épaisseur négligeable, qui oscille autour d'un axe horizontal Ox . Elle est attachée à cet axe par un de ses côtés de longueur a . La rotation de la plaque autour de Ox est repérée par l'angle $\theta(t)$. Le point O est au milieu du côté de longueur a . On utilisera la base cartésienne $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ ainsi que la base locale $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_x)$.

1. Déterminer le vecteur vitesse $\vec{v}(P)$ d'un point P de la plaque en fonction de r (distance de P à Ox), θ et $\dot{\theta}$.
2. En déduire le vecteur quantité de mouvement \vec{P} de la plaque.



3. Déterminer la position du centre de masse G de la plaque. Vérifier que $\vec{P} = M\vec{v}(G)$.
4. Calculer le moment cinétique $\vec{\sigma}_O$ en fonction de M , a , b , $\dot{\theta}$ et des vecteurs de base.
5. En déduire $\vec{\sigma}^*$. Vérifier l'homogénéité de son expression.

Solution

1. Un point P de la plaque reste à la distance r de l'axe Ox pendant sa rotation. Soit x son abscisse.

Le vecteur position du point P s'écrit $\vec{OP} = r\vec{e}_r + x\vec{e}_x$ avec $0 < r < b$ et $-\frac{a}{2} < x < \frac{a}{2}$.

Le vecteur vitesse est obtenu par dérivation :

$$\vec{v}(P) = r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$$

2. La résultante cinétique s'obtient par intégration sur la plaque : $\vec{P} = \iint_{\text{plaque}} \vec{v}(P) dm$.

L'élément dm est la masse d'un élément de surface dS de la plaque : $dm = \sigma(P)dS$. L'élément géométrique dS s'exprime en fonction des coordonnées du point $P(r, x)$ par $dS = dxdr$. La masse surfacique est uniforme (hypothèse de l'énoncé) donc $\sigma = \frac{M}{ab}$.

On peut écrire :

$$\vec{P} = \int_{r=0}^b \int_{x=-a/2}^{a/2} \frac{M}{ab} r\dot{\theta}\vec{e}_\theta dx dr = \frac{M}{ab} \int_0^b r dr \int_{-a/2}^{a/2} dx \vec{e}_\theta$$

$$\vec{P} = \frac{1}{2} Mb\dot{\theta}\vec{e}_\theta$$

3. La plaque étant homogène, le centre de masse peut être déterminé par la recherche d'éléments de symétrie. Les axes passant par le centre du rectangle et parallèles aux côtés sont des axes de symétrie. G se trouve donc au centre du rectangle, à l'intersection des diagonales. Les coordonnées de G sont données par :

$$x_G = 0, r_G = \frac{b}{2}$$

On en déduit la vitesse de G , cas particulier de la relation de la question 1. : $\vec{v}(G) = \frac{1}{2} b\dot{\theta}\vec{e}_\theta$.

On a bien le résultat : $\vec{P} = M\vec{v}(G)$.

4. Écrivons l'expression de $\vec{\sigma}_O$ pour un système bidimensionnel : $\vec{\sigma}_O = \iint_{\text{plaque}} \vec{OP} \wedge \vec{v}(P) dm$.

On a déjà explicité les coordonnées du vecteur $\vec{OP} = r\vec{e}_r + x\vec{e}_x$, du vecteur vitesse $\vec{v}(P) = r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$ et de l'élément $dm = \frac{M}{ab} dxdr$ précédemment. On en déduit :

$$\vec{\sigma}_O = \frac{M}{ab} \int_{r=0}^b \int_{x=-a/2}^{a/2} (r\vec{e}_r + x\vec{e}_x) \wedge r\dot{\theta}\vec{e}_\theta dx dr$$

D'où

$$\begin{aligned} \vec{\sigma}_O &= \frac{M}{ab} \dot{\theta} \int_{r=0}^b \int_{x=-a/2}^{a/2} (r^2\vec{e}_x - xr\vec{e}_r) dx dr \\ &= \frac{M}{ab} \dot{\theta} \int_{r=0}^b \left(\int_{x=-a/2}^{a/2} (r^2\vec{e}_x - xr\vec{e}_r) dx \right) dr \\ &= \frac{M}{ab} \dot{\theta} \int_{r=0}^b \left[r^2 x\vec{e}_x - \frac{x^2}{2} r\vec{e}_r \right]_{-a/2}^{a/2} dr \\ &= \frac{M}{ab} \dot{\theta} \int_{r=0}^b r^2 a\vec{e}_x dr \\ &= \frac{M}{ab} \dot{\theta} a \frac{b^3}{3} \vec{e}_x \end{aligned}$$

$$\text{Finalement : } \vec{\sigma}_O = \frac{1}{3} Mb^2\dot{\theta}\vec{e}_x$$

5. Pour calculer $\vec{\sigma}^*$, on utilise le premier théorème de Koenig : $\vec{\sigma}_O = \vec{OG} \wedge \vec{v}(G) + \vec{\sigma}^*$.

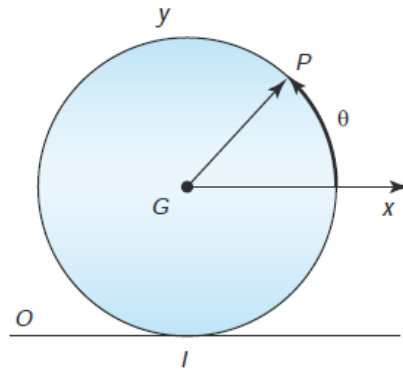
Ici, $\vec{OG} \wedge \vec{v}(G) = \frac{b}{2}\vec{e}_r \wedge \frac{b}{2}\dot{\theta}\vec{e}_\theta = \frac{b^2}{4}\dot{\theta}\vec{e}_x$ d'où :

$$\vec{\sigma}^* = \frac{1}{3} Mb^2\dot{\theta}\vec{e}_x - \frac{1}{4} Mb^2\dot{\theta}\vec{e}_x$$

$$\vec{\sigma}^* = \frac{1}{12} Mb^2\dot{\theta}\vec{e}_x$$

Exercice 04 :

On se place dans un référentiel terrestre (R). On considère un disque homogène de masse M , de rayon R dont le centre G est repéré par la coordonnée cartésienne x . La position d'un point P à la périphérie du disque est repérée par un angle θ par rapport à un axe de direction passant par G et parallèle à (Ox) . Le disque roule sans glisser sur un plan horizontal. Le moment d'inertie du disque par rapport à son axe (Gz) est $J_{Gz} = \frac{1}{2}MR^2$.



1. Donner l'expression du moment cinétique barycentrique du disque.
2. Déterminer l'expression, dans (R), du moment cinétique du disque par rapport au point O .
3. On suppose qu'il y a roulement sans glissement. Exprimer le moment cinétique précédent en fonction uniquement de θ (ou de sa dérivée).

Solution Ex 04 :

1. Le référentiel barycentrique du disque est le référentiel d'origine G et d'axes parallèles à ceux du référentiel d'étude (R). Dans le référentiel barycentrique, le disque a un mouvement de rotation autour de l'axe fixe (Gz) . Son vecteur rotation instantané est $\frac{d\theta}{dt}\vec{e}_z$. L'axe (Gz) est un axe de symétrie de la distribution matérielle, laquelle est aussi dans un plan orthogonal à (Gz) . Le moment cinétique barycentrique du disque en G est ainsi :

$$\begin{aligned}\vec{\sigma}^* &= J_{Gz} \frac{d\theta}{dt} \vec{e}_z \\ &= \frac{1}{2} MR^2 \frac{d\theta}{dt} \vec{e}_z\end{aligned}$$

2. Le théorème de Koenig relatif au moment cinétique nous indique que le moment cinétique en O est la somme du moment cinétique barycentrique et du moment cinétique d'un point matériel de masse M placé en G , centre d'inertie du disque. Ainsi :

$$\begin{aligned}\vec{\sigma}_O &= \vec{\sigma}^* + \overrightarrow{OG} \wedge M\vec{v}_G \\ &= \frac{1}{2} MR^2 \frac{d\theta}{dt} \vec{e}_z + (x\vec{e}_x + R\vec{e}_y) \wedge M \frac{dx}{dt} \vec{e}_x \\ &= \frac{1}{2} MR^2 \frac{d\theta}{dt} \vec{e}_z - MR \frac{dx}{dt} \vec{e}_z\end{aligned}$$

3. La vitesse de glissement sur le sol se réduit ici à la vitesse du point I du disque coïncidant à l'instant t avec le sol. D'après la formule de Varignon, il s'agit de :

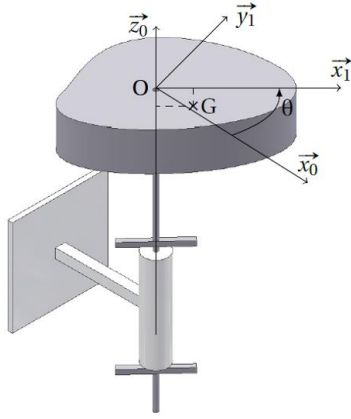
$$\begin{aligned}\vec{v}_I &= \vec{v}_G + \frac{d\theta}{dt} \vec{e}_z \wedge \overrightarrow{GI} \\ &= \frac{dx}{dt} \vec{e}_x + \frac{d\theta}{dt} \vec{e}_z \wedge (-R\vec{e}_y) \\ &= \left(\frac{dx}{dt} + R \frac{d\theta}{dt} \right) \vec{e}_x\end{aligned}$$

Le roulement sans glissement se produit donc si et seulement si :

$$\frac{dx}{dt} + R \frac{d\theta}{dt} = 0$$

Le moment cinétique du disque en O devient donc :

$$\begin{aligned}\vec{\sigma}_O &= \frac{1}{2} MR^2 \frac{d\theta}{dt} \vec{e}_z + MR^2 \frac{d\theta}{dt} \vec{e}_z \\ &= \frac{3}{2} MR^2 \frac{d\theta}{dt} \vec{e}_z\end{aligned}$$



Exercice 05 :

Soit un solide S_1 de masse M en liaison pivot d'axe (O, \vec{z}_0) par rapport au bâti S_0 . Ce solide n'ayant aucune particularité géométrique, sa matrice d'inertie calculée au point O a la forme suivante :

$$[I(O, S)] = [I_O] = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_{((O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1))}$$

Le repère $R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ est lié au solide en rotation $\theta = (\vec{x}_0, \vec{x}_1)$. Le centre de gravité est défini par $\vec{OG} = x_g \vec{x}_1 + z_g \vec{z}_0$. Le repère $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ est galiléen, \vec{z}_0 est vertical ascendant. Le mouvement du corps est dû à un couple moteur $\vec{C}_m = C_m \vec{z}_0$. La liaison est supposée parfaite. Faites une étude dynamique du mouvement de ce corps, et en déduire les efforts de liaison.

Solution Ex 05 :

a) données

$$[I(O, S)] = [I_O] = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_{((O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1))}$$

b) Étude dynamique

Inventaire des actions extérieures appliquées au solide en rotation

- Action de la pesanteur sur le solide : $\{\mathcal{P}_{g \rightarrow S_1}\} = \left\{ \begin{matrix} -M \cdot g \cdot \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_G = \left\{ \begin{matrix} -M \cdot g \cdot \vec{z}_0 \\ M \cdot g \cdot x_g \cdot \vec{y}_1 \end{matrix} \right\}_O$
- Couple moteur : $\{\mathcal{C}_{Mot \rightarrow S_1}\} = \left\{ \begin{matrix} \vec{0} \\ C_m \cdot \vec{z}_0 \end{matrix} \right\}_{\forall P}$;
- Actions transmissibles par la liaison pivot : $\{\mathcal{L}_{S_0 \rightarrow S_1}\} = \left\{ \begin{matrix} X_{01} & L_{01} \\ Y_{01} & M_{01} \\ Z_{01} & 0 \end{matrix} \right\}_{\forall P \in (O, \vec{z}_0)}$.

Détermination du torseur dynamique en O du solide S_1 dans son mouvement par rapport à R_0 .

Déterminons dans un premier temps le torseur cinétique en O du solide S_1 dans son mouvement par rapport à R_0 :

- Résultante cinétique : $\overrightarrow{p_{S_1/R_0}} = M \cdot \overrightarrow{V_{G \in S_1/R_0}} = M \cdot x_g \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{y}_1$
- Moment cinétique, O est un point fixe dans le référentiel, donc :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\sigma_{O, S_1/R_0}} &= \overline{\overline{\mathcal{I}_O(S_1)}} \cdot \overrightarrow{\Omega_{S_1/R_0}} = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}_O \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_1} \\ &= -E \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{x}_1 - D \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{y}_1 + C \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{z}_0 \\ &= -E \cdot \omega \cdot \vec{x}_1 - D \cdot \omega \cdot \vec{y}_1 + C \cdot \omega \cdot \vec{z}_0 \text{ avec } \omega = \dot{\theta} \end{aligned}$$

d'où les composantes du torseur dynamique : $\{\mathcal{D}_{S_1/R_0}\} = \left\{ \begin{matrix} \overrightarrow{A_{S_1/R_0}} \\ \overrightarrow{\delta_{O, S_1/R_0}} \end{matrix} \right\}_O$

- $\overrightarrow{A_{S_1/R_0}}$, résultante dynamique, par dérivation de la résultante cinétique :

$$\overrightarrow{A_{S_1/R_0}} = M \cdot x_g \cdot \ddot{\theta} \cdot \vec{y}_1 - M \cdot x_g \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \vec{x}_1$$

– $\overrightarrow{\delta_{O,S_1/R_0}}$, moment dynamique en O , O est un point fixe dans R_0 donc :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\delta_{O,S_1/R_0}} &= \left[\frac{d}{dt} \overrightarrow{\sigma_{O,S_1/R_0}} \right]_{R_0} \\ &= -E \cdot \ddot{\theta} \cdot \vec{x}_1 - D \cdot \ddot{\theta} \cdot \vec{y}_1 - E \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \vec{y}_1 + D \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \vec{x}_1 + C \cdot \ddot{\theta} \cdot \vec{z}_0 \\ &= (D \cdot \dot{\theta}^2 - E \cdot \ddot{\theta}) \cdot \vec{x}_1 + (-D \cdot \ddot{\theta} - E \cdot \dot{\theta}^2) \cdot \vec{y}_1 + C \cdot \ddot{\theta} \cdot \vec{z}_0\end{aligned}$$

Principe fondamental de la dynamique appliqué au solide S_1 .

$$\begin{aligned}\left\{ \mathcal{D}_{S_1/R_0} \right\} &= \left\{ \mathcal{A}_{S_1 \rightarrow S_1} \right\} \\ \left\{ \mathcal{D}_{S_1/R_0} \right\} &= \left\{ \mathcal{P}_{g \rightarrow S_1} \right\} + \left\{ \mathcal{C}_{Mot \rightarrow S_1} \right\} + \left\{ \mathcal{L}_{S_0 \rightarrow S_1} \right\} \\ \left\{ \overrightarrow{A_{S_1/R_0}} \right\}_O &= \left\{ \begin{matrix} -M \cdot g \cdot \vec{z}_0 \\ M \cdot g \cdot x_g \cdot \vec{y}_1 \end{matrix} \right\}_O + \left\{ \begin{matrix} \vec{0} \\ C_m \cdot \vec{z}_0 \end{matrix} \right\}_{\forall P} + \left\{ \begin{matrix} X_{01} & L_{01} \\ Y_{01} & M_{01} \\ Z_{01} & 0 \end{matrix} \right\}_{\substack{\forall P \in (O, \vec{z}_0) \\ (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}_0)}}\end{aligned}$$

Il est judicieux ici, d'écrire le torseur des efforts transmissibles par la liaison pivot $\left\{ \mathcal{L}_{S_0 \rightarrow S_1} \right\}$ dans la base $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$, de déterminer les composantes de la liaison dans cette base puis de revenir dans la base $(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$.

On obtient donc les deux équations vectorielles suivantes :

– Théorème de la résultante dynamique

$$\begin{aligned}\overrightarrow{A_{S_1/R_0}} &= -M \cdot g \cdot \vec{z}_0 + \vec{0} + X_{01} \cdot \vec{x}_1 + Y_{01} \cdot \vec{y}_1 + Z_{01} \cdot \vec{z}_0 \\ M \cdot x_g \cdot \ddot{\theta} \cdot \vec{y}_1 - M \cdot x_g \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \vec{x}_1 &= -M \cdot g \cdot \vec{z}_0 + \vec{0} + X_{01} \cdot \vec{x}_1 + Y_{01} \cdot \vec{y}_1 + Z_{01} \cdot \vec{z}_0\end{aligned}$$

– Théorème du moment dynamique

$$\overrightarrow{\delta_{O,S_1/R_0}} = M \cdot g \cdot x_g \cdot \vec{y}_1 + C_m \cdot \vec{z}_0 + L_{01} \cdot \vec{x}_1 + M_{01} \cdot \vec{y}_1$$

$$\begin{aligned}(D \cdot \dot{\theta}^2 - E \cdot \ddot{\theta}) \cdot \vec{x}_1 + (-D \cdot \ddot{\theta} - E \cdot \dot{\theta}^2) \cdot \vec{y}_1 + C \cdot \ddot{\theta} \cdot \vec{z}_0 &= M \cdot g \cdot x_g \cdot \vec{y}_1 + C_m \cdot \vec{z}_0 \\ &\quad + L_{01} \cdot \vec{x}_1 + M_{01} \cdot \vec{y}_1\end{aligned}$$

La projection de ces deux équations donne les 6 équations scalaires suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} -M \cdot x_g \cdot \dot{\theta}^2 = X_{01} \\ M \cdot x_g \cdot \ddot{\theta} = Y_{01} \\ 0 = -M \cdot g + Z_{01} \end{array} \right. \text{ et } \left\{ \begin{array}{l} D \cdot \dot{\theta}^2 - E \cdot \ddot{\theta} = L_{01} \\ -D \cdot \ddot{\theta} - E \cdot \dot{\theta}^2 = M \cdot g \cdot x_g + M_{01} \\ C \cdot \ddot{\theta} = C_m \end{array} \right.$$

Détermination des efforts dans la liaison Pour continuer et simplifier les calculs, nous supposons que le rotor tourne à vitesse constante $\dot{\omega} = \ddot{\theta} = 0$, les 6 équations deviennent :

$$\left\{ \begin{array}{l} -M \cdot x_g \cdot \dot{\theta}^2 = X_{01} \\ 0 = Y_{01} \\ M \cdot g = +Z_{01} \end{array} \right. \text{ et } \left\{ \begin{array}{l} D \cdot \dot{\theta}^2 = L_{01} \\ -E \cdot \dot{\theta}^2 - M \cdot g \cdot x_g = M_{01} \\ 0 = C_m \end{array} \right.$$

Le torseur des actions transmissibles dans la liaison pivot s'écrit dans la base liée au solide en rotation $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$:

$$\left\{ \mathcal{L}_{S_0 \rightarrow S_1} \right\} = \left\{ \begin{array}{cc} X_{01} = -M \cdot x_g \cdot \dot{\Theta}^2 & L_{01} = D \cdot \dot{\Theta}^2 \\ Y_{01} = 0 & M_{01} = -E \cdot \dot{\Theta}^2 - M \cdot g \cdot x_g \\ Z_{01} = M \cdot g & 0 \end{array} \right\}_{\substack{0 \\ (\overline{x_1}, \overline{y_1}, \overline{z_1})}}$$

On s'aperçoit que les efforts (résultante et moment) dans la liaison pivot sont fonction de la vitesse de rotation $\dot{\theta}$. En projection dans la base galiléenne, R_0 , on peut mieux évaluer l'influence des paramètres cinétiques sur les efforts dans la liaison.

$$\left\{ \mathcal{L}_{S_0 \rightarrow S_1} \right\} = \left\{ \begin{array}{cc} X_{01} \cdot \cos \theta & L_{01} \cdot \cos \theta - M_{01} \cdot \sin \theta \\ X_{01} \cdot \sin \theta & L_{01} \cdot \sin \theta + M_{01} \cdot \cos \theta \\ Z_{01} & 0 \end{array} \right\}_{o_{(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)}} \quad \text{avec } \theta = \omega \cdot t$$

On constate donc que les efforts transmis au bâti par la liaison pivot ne sont pas constants et dépendent du temps. Pour rendre ces efforts indépendants du temps, il faut que :

$$\left\{ \begin{array}{l} X_{01} = 0 \\ L_{01} = 0 \\ M_{01} = 0 \end{array} \right. \text{ c'est à dire } \left\{ \begin{array}{l} -M \cdot x_g \cdot \dot{\theta}^2 = 0 \\ D \cdot \dot{\theta}^2 - E \cdot \ddot{\theta} = 0 \\ -D \cdot \ddot{\theta} - E \cdot \dot{\theta}^2 - M \cdot g \cdot x_g = 0 \end{array} \right. \text{ d'où } \left\{ \begin{array}{l} x_g = 0 \\ D = 0 \\ E = 0 \end{array} \right.$$

Vous pourrez vérifier que ces conditions sont aussi suffisantes si la vitesse n'est pas constante.

Exercice 08 :

On se propose d'étudier une éolienne. Une schématisation simplifiée peut-être donnée par l'ensemble constitué :

- d'un mat 0 ;
- d'un bloc oscillant (solide 1) en liaison pivot d'axe (A, \vec{z}_0) avec le bâti 0 ;
- d'une hélice associée au rotor de la génératrice (solide 2) en liaison pivot d'axe (A, \vec{x}_1) avec le solide 1.

Paramétrage : à chaque solide i est associé un repère de base orthonormée directe $(\vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$ avec

- $\vec{z}_0 = \vec{z}_1$ et $(\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1) = \alpha$
- $\vec{x}_1 = \vec{x}_2$ et $(\vec{z}_1, \vec{z}_2) = (\vec{y}_1, \vec{y}_2) = \beta$

Solide 1 : Homogène de masse m_1 , de centre d'inertie A, admettant le plan $(A, \vec{x}_1, \vec{z}_1)$ comme plan de symétrie matérielle.

Solide 2 : homogène de masse m_2 , et de centre d'inertie G_2 , $\overrightarrow{AG_2} = l \cdot \vec{x}_1$, ce solide est constitué

- D'un cylindre plein (2a) de hauteur H et de rayon R, d'axe (A, \vec{x}_2) de masse m_{2a} , de centre d'inertie G_{2a} avec $\overrightarrow{G_2 G_{2a}} = \lambda \vec{x}_2$.
- D'une plaque rectangulaire (2b), d'épaisseur négligeable, de côté a suivant \vec{y}_2 et b suivant \vec{z}_2 de masse m_{2b} , de centre d'inertie G_{2b} avec $\overrightarrow{G_2 G_{2b}} = \mu \vec{x}_2$.

Q1. On note, A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 et F_1 les coefficients de l'opérateur d'inertie du solide S_1 dans la base B_1 , préciser la forme de la matrice d'inertie du solide S_1 en A_1 .

Q2. Déterminer

- la relation entre λ, μ et les masses
- l'opérateur d'inertie $[I_{G_{2a}}]$ en G_{2a} du solide (2a) dans la base $(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ en fonction de m_{2a} et des dimensions H et R.
- l'opérateur d'inertie $[I_{G_{2b}}]$ en G_{2b} du solide (2b) dans la base $(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ en fonction de m_{2b} et des dimensions a et b .
- l'opérateur d'inertie $[I_{G_2}]$ en G_2 du solide (2) dans la base $(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$

On notera A_2, B_2, C_2, \dots Les termes de l'opérateur d'inertie $[I_{G_2}]$ dans la suite du problème. Déterminer :

Q3. $\vec{\sigma}_{A, S_1/R_0}$, le moment cinétique au point A du solide 1 dans son mouvement par rapport au repère galiléen, puis le torseur cinétique du solide S_1 dans mouvement par rapport à R_0 .

Q4. $\vec{\delta}_{A, S_1/R_0}$, le moment dynamique au point A du solide 1 dans son mouvement par rapport au repère galiléen, en projection sur l'axe \vec{z}_0

Q5. $\vec{\sigma}_{G_2, S_2/R_0}$, le moment cinétique au point G_2 du solide 2 dans son mouvement par rapport au repère galiléen, puis le torseur cinétique du solide S_2 dans mouvement par rapport à R_0 .

Solution

Q1. Le solide 1 possède un plan de symétrie $(O, \vec{x}_1, \vec{z}_1)$, les deux produits d'inertie comportant \vec{y}_1 sont donc nuls.

$$[I_A(S_1)] = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & -E_1 \\ 0 & B_1 & 0 \\ -E_1 & 0 & C_1 \end{pmatrix}_A$$

$(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$

Q2a. Relation entre λ, μ et les masses

$$\begin{aligned} m_2 \overrightarrow{AG_2} &= m_{2a} \cdot \overrightarrow{AG_{2a}} + m_{2b} \cdot \overrightarrow{AG_{2b}} \\ &= m_{2a} \cdot (\overrightarrow{AG_2} + \overrightarrow{G_2 G_{2a}}) + m_{2b} \cdot (\overrightarrow{AG_2} + \overrightarrow{G_2 G_{2b}}) \\ \vec{0} &= m_{2a} \cdot \overrightarrow{G_2 G_{2a}} + m_{2b} \cdot \overrightarrow{G_2 G_{2b}} = (\lambda \cdot m_{2a} + \mu \cdot m_{2b}) \cdot \vec{x}_2 \\ \lambda \cdot m_{2a} &= -\mu \cdot m_{2b} \end{aligned}$$

Q2b. Le solide 2a est modélisé par un cylindre d'axe (A, \vec{x}_1) , donc

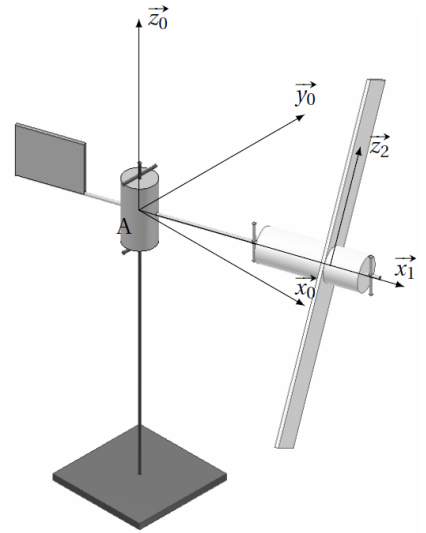
$$[I_{G_{2a}}(S_{2a})] = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} m_{2a} \cdot R^2 & 0 & 0 \\ 0 & m_{2a} \cdot \left(\frac{R^2}{4} + \frac{H^2}{12} \right) & 0 \\ 0 & 0 & m_{2a} \cdot \left(\frac{R^2}{4} + \frac{H^2}{12} \right) \end{pmatrix}_{G_{2a}}$$

$(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$

Q2c. Le solide 2b est modélisé par une plaque rectangulaire d'épaisseur négligeable, donc

$$[I_{G_{2b}}(S_{2b})] = \begin{pmatrix} m_{2b} \cdot \frac{a^2 + b^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & m_{2b} \cdot \frac{b^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & m_{2b} \cdot \frac{a^2}{12} \end{pmatrix}_{G_2}$$

$(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$



Q2d. On déplace, grâce au théorème de Huygens les deux matrices d'inertie en G_2 .

$$[I_{G_2}(S_{2a})] = [I_{G_{2a}}(S_{2a})] + m_{2a} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} m_{2a} \cdot R^2 & 0 & 0 \\ 0 & m_{2a} \cdot \left(\frac{R^2}{4} + \frac{H^2}{12} + \lambda^2 \right) & 0 \\ 0 & 0 & m_{2a} \cdot \left(\frac{R^2}{4} + \frac{H^2}{12} + \lambda^2 \right) \end{pmatrix}_{G_{2a}}^{\mathcal{B}_2}$$

$$[I_{G_2}(S_{2b})] = [I_{G_{2b}}(S_{2b})] + m_{2b} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu^2 & 0 \\ 0 & 0 & \mu^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A_{2b} = m_{2b} \cdot \frac{a^2 + b^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & B_{2b} = m_{2b} \cdot \left(\frac{b^2}{12} + \mu^2 \right) & 0 \\ 0 & 0 & C_{2b} = m_{2b} \cdot \left(\frac{a^2}{12} + \mu^2 \right) \end{pmatrix}_{G_{2b}}^{\mathcal{B}_2}$$

on pose

$$[I_{G_2}(S_{2a})] = \begin{pmatrix} A_{2a} & 0 & 0 \\ 0 & B_{2a} & 0 \\ 0 & 0 & B_{2a} \end{pmatrix}_{G_{2a}}^{\mathcal{B}_2} \quad [I_{G_2}(S_{2b})] = \begin{pmatrix} A_{2b} & 0 & 0 \\ 0 & B_{2b} & 0 \\ 0 & 0 & C_{2b} \end{pmatrix}_{G_{2b}}^{\mathcal{B}_2}$$

on pose

$$[I_{G_2}(S_{2a})] = \begin{pmatrix} A_{2a} & 0 & 0 \\ 0 & B_{2a} & 0 \\ 0 & 0 & B_{2a} \end{pmatrix}_{G_{2a}}^{\mathcal{B}_2} \quad [I_{G_2}(S_{2b})] = \begin{pmatrix} A_{2b} & 0 & 0 \\ 0 & B_{2b} & 0 \\ 0 & 0 & C_{2b} \end{pmatrix}_{G_{2b}}^{\mathcal{B}_2}$$

finalement

$$[I_{G_2}(S_2)] = \begin{pmatrix} A_2 = A_{2a} + A_{2b} & 0 & 0 \\ 0 & B_2 = B_{2a} + B_{2b} & 0 \\ 0 & 0 & C_2 = B_{2a} + C_{2b} \end{pmatrix}_{G_2}^{\mathcal{B}_2}$$

Q3. Le point A est fixe dans le mouvement de S_1 par rapport à R_0 , on sait alors que :

$$\vec{\sigma}_{A,S_1/R_0} = [I_{A_1}(S_1)] \vec{\Omega}_{S_1/R_0}$$

En A dans la base $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$.

$$\vec{\sigma}_{A,S_1/R_0} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & -E_1 \\ 0 & B_1 & 0 \\ -E_1 & 0 & C_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\alpha} \end{pmatrix} = -E_1 \cdot \dot{\alpha} \cdot \vec{x}_1 + C_1 \cdot \dot{\alpha} \cdot \vec{z}_1$$

$$\text{d'où } \left\{ \mathcal{C}_{S_1} \right\}_{R_0} = \left\{ \vec{p}_{S_1/R_0}^B = \vec{0} \right\}_C \quad \vec{\sigma}_{A,S_1/R_0} = -E_1 \cdot \dot{\alpha} \cdot \vec{x}_1 + C_1 \cdot \dot{\alpha} \cdot \vec{z}_1$$

Q4. En A point fixe, on peut écrire

$$\vec{\delta}_{A_1,S_1/R_0} = \left[\frac{d}{dt} \vec{\sigma}_{A_1,S_1/R_0} \right]_{R_0} = -E_1 \cdot \ddot{\alpha} \cdot \vec{x}_1 - E_1 \cdot \dot{\alpha}^2 \cdot \vec{y}_1 + C_1 \cdot \ddot{\alpha} \cdot \vec{z}_1$$

$$\vec{\delta}_{A_1,S_1/R_0} \cdot \vec{z}_0 = C_1 \cdot \ddot{\alpha}$$

Q5. En G_2 , centre d'inertie de S_2 on peut écrire que :

$$\overrightarrow{\sigma_{G_2, S_2/R_0}} = [\mathbf{I}_{G_2}(S_2)] \overrightarrow{\Omega_{S_2/R_0}} = [\mathbf{I}_{G_2}(S_2)] (\overrightarrow{\Omega_{S_2/S_1}} + \overrightarrow{\Omega_{S_1/R_0}})$$

Le vecteur $\overrightarrow{\Omega_{S_2/R_0}}$ doit être écrit dans la même base que la matrice d'inertie $(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$.

$$\overrightarrow{\Omega_{S_2/R_0}} = \dot{\alpha} \cdot \vec{z}_1 + \dot{\beta} \cdot \vec{x}_1 = \dot{\alpha} \cdot \cos \beta \cdot \vec{z}_2 + \dot{\alpha} \cdot \sin \beta \cdot \vec{y}_2 + \dot{\beta} \cdot \vec{x}_2$$

En G_2 dans la base $(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$

$$\overrightarrow{\sigma_{G_2, S_2/R_0}} = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{\beta} \\ \dot{\alpha} \cdot \sin \beta \\ \dot{\alpha} \cdot \cos \beta \end{pmatrix} = A_2 \cdot \dot{\beta} \vec{x}_2 + B_2 \cdot \dot{\alpha} \cdot \sin \beta \cdot \vec{y}_2 + C_2 \cdot \dot{\alpha} \cdot \cos \beta \vec{z}_2$$

d'où le torseur cinétique

$$\left\{ \mathcal{C}_{S_2/R_0} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{p_{S_2/R_0}} = m_2 \cdot \overrightarrow{V_{G_2 \in S_2/R_0}} \\ \overrightarrow{\sigma_{G_2, S_2/R_0}} \end{array} \right\}_{G_2} = \left\{ \begin{array}{l} m_2 \cdot l \cdot \dot{\alpha} \cdot \vec{y}_1 \\ A_2 \cdot \dot{\beta} \vec{x}_2 + B_2 \cdot \dot{\alpha} \cdot \sin \beta \cdot \vec{y}_2 + C_2 \cdot \dot{\alpha} \cdot \cos \beta \vec{z}_2 \end{array} \right\}_{G_2}$$