Exercices de probabilités. Semestre 1-2011/2012

Exercice 1

Un sac contient 9 cartes portant respectivement les chiffres de 1 à 9. On tire 3 cartes successivement du sac, on les range dans l'ordre où elles sont tirées et on lit le nombre de 3 chiffres ainsi formé.

(i) Combien de nombres pairs peut-on former ?

(ii) Combien de nombres divisibles par 5 peut-on former ?

(iii) Combien de nombres inférieurs à 400 peut-on former ?

Exercice 2

Une boite contient 10 boules blanches, 5 boules noires et 5 boules rouges. On tire 3 boules successivement de la boite sans remise.

Quelle est la probabilité d'avoir :

(i) la première boule blanche et le deux autres rouges ?

(ii) les deux premières boules noires ?

(iii) une boule blanche et deux boules rouges ?

(iv) au moins une boule blanche ?

(v) trois boules de même couleur ?

Exercice 3

(i) Lors d'un examen, un étudiant doit répondre à 8 questions parmi les 10 questions posées.
Combien l'étudiant a t-il de manières diférentes pour choisir ses questions ?

(ii) On suppose maintenant que l'étudiant doit choisir obligatoirement au moins 4 questions parmi les 5 premières questions.
Combien a t-il de manières différentes de choisir ses quetions ?

Exercice 4

On a 3 boites : la boite B_1 contenant 2 boules blanches et 2 boules rouges, la boite B_2 contenant 3 blanches et 1 rouge, et la boite B_3 contenant 1 blanche et 3 rouges.

On réalise l'expérience suivante : "On tire au hasard 2 boules de la boite B_1, 3 boules de B_2 et 1 boule de B_3".

(i) Donner un exemple de tirage.
Combien y a t-il de tirages possibles pour cette expérience ?
Décrire l'ensemble fondamental S de l'expérience.

(ii) Combien de tirages vérifient la condition qu'au moins une boule tirée de B_1 soit blanche, les boules tirées de B_2 et B_3 étant quelconques ?
Quelle est la probabilité de cette événement ?

(iii) Combien de tirages vérifient que 2 boules exactement soient blanches ?
Quelle est la probabilité de cet événement ?

(iv) En utilisant l'événement complementaire, calculer la probabilité que le tirage donne au moins une boule rouge ?

Exercice 5

Le dé d'une personne A est formé des nombres (2,2,2,3,5,5).

Le dé d'une personne B est formé des nombres (1,1,4,4,4,6).

Les deux personnes A et B jettent leurs dés ensemble, le gagnant est celui qui aura le numéro le plus grand.

Quelle est la probabilité que A gagne à ce jeu ?

Exercice 6

Quatre personnes d'une même famille sont réunies avec trois autres personnes d'une deuxième famille et deux autres d'une troisième famille.

On choisit deux personnes quelconques de ce groupe.

(i) Décrire un ensemble fondamental de cette expérience ?

(ii) Quelle est la probabilité pour que les deux personnes choisies soient de la même famille ?

Exercice 7

On tire sans remise 4 cartes au hasard d'un paquet de 10 cartes numérotées de 1 à 10.
Calculer la probabilité que :

(i) le plus grand nombre tiré est un 6 ?

(ii) les cartes 4 et 5 soient parmi les 4 cartes tirées ?

(iii) le produit des 4 nombres est pair ?

(iv) le produit donne 180 ?

(v) les 4 nombres sont des entiers qui se suivent ?

Exercice 8

Deux personnes A et B jouent à un jeu de la manière suivante. Un dé ordinaire est lancé :
- si le numéro 6 sort, c'est A qui gagne
- si le numéro 1 sort, c'est B qui gagne

Si 1 ou 6 ne sortent pas, le dé est relancé, jusqu'à ce que l'un des deux gagne.

(i) Quelle est la probabilité que la personne A gagne
- au premier jet du dé
- au deuxième jet du dé
- au n-ième jet du dé

(ii) Quelle est la probabilité que la personne A gagne à ce jeu ?

Exercice 9

Un sac S_1 contient 4 boules rouges et 3 jaunes. Un autre sac S_2 contient 3 boules rouges et 4 jaunes.

Une boule est tirée au hasard du sac S_1 et est placée dans le sac S_2.

Ensuite une boule est tirée au hasard du sac S_2 et est placée dans le sac S_1.

On tire maintenant une boule au hasard du sac S_1, quelle est la probabilité que cette boule soit rouge ?

Exercice 10

On met 18 cartes de jeu dans une boite telles que 5 sont de couleur Rouge-Noire, 7 sont Noire-Noire, 2 sont Rouge-Rouge et 4 sont Blanche-Rouge.

L'expérience qu'on veut étudier consiste à tirer une carte quelconque de cette boite.

(i) Quelle est la probabilité de tirer une carte Noire d'une face ?

(ii) Quelle est la probabilité de tirer une carte Blanche d'une face ?

(iii) Quelle est la probabilité de tirer une carte Rouge d'une face ?

(iv) Sachant qu'une face de la carte tirée est Rouge, quelle est la probabilité que l'autre face soit Rouge ?

Exercice 11

(i) Qu'appelle t-on probabilité conditionnelle de 2 événements A et B quelconques d'une expérience donnée $p(A|B)$?

(ii) Soient $F_1, F_2, \ldots, F_n$, n événements mutuellement exclusifs d'une expérience, tels que $F_1 \cup F_2 \cup \ldots \cup F_n = S$, S étant l'ensemble fondamental.

Pourquoi la relation suivante est vérifiée :

$$p(A) = \sum_{i=1}^{n} p(A|F_i) \;\; p(F_i)$$

(iii) Etablir la relation suivante :

$$p(A_2|A_1) = \sum_{i=1}^{n} p(A_2|A_1 \cap F_i) \cdot p(F_i|A_1)$$

avec A_1 et A_2 deux événements quelconques.

Exercice 12

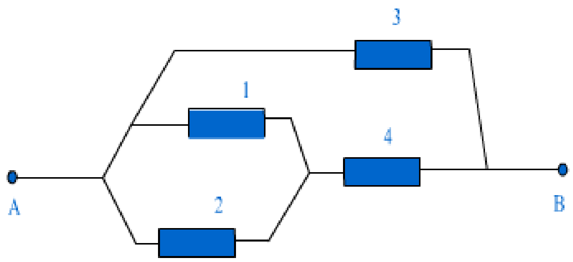
On a 2 boites.
La boite A qui contient 7 boules rouges et 4 boules blanches.
La boite B qui contient 3 boules rouges et 5 boules blanches.
On réalise l'expérience suivante :
- on jette une pièce de monnaie,
- si c'est pile qui sort, on tire une boule de la boite A,
- sinon, si c'est face, on tire une boule de la boite B.

(i) Quelle est la probabilité de tirer une boule rouge ?

(ii) Supposons que la boule tirée est rouge, quelle est la probabilité que cette boule vienne de la boite A ?

Exercice 13

On considère un circuit electrique composé de 4 relais. Chaque relais a une probabilité de 70% de laisser passer le courant electrique indépendamment des autres relais.



Quelle est la probabilité que le courant passe de A vers B ?

Exercice 14

Dans un ensemble fondamental Ω, on suppose que :
- A et B_1 sont deux événements indépendants
- A et B_2 sont deux événements indépendants

Montrer que si A et $B_1 \cap B_2$ sont indépendants alors A et $B_1 \cup B_2$ sont aussi indépendants.

Exercice 15

(i) Si n personnes sont présentes ensemble ($2 \leq n \leq 100$), quelle est la probabilité que leurs dates d'anniversaire tombent sur des jours tous différents ?

Pour simplifier, on supposera qu'il y a 365 dates d'anniversaire possibles pour chaque personne.

(ii) Quelle valeur faut t-il donner à n pour atteindre 50% ?

Remarque : on peut aussi utiliser la formule de Stirling $n! \sim e^{-n} n^n \sqrt{2\pi n}$ lorsque n est grand pour simplifier les probabilités trouvées.

Exercices de probabilités. Semestre 1-2009/2010

Exercice 1

Un sac contient 9 cartes portant respectivement les chiffres de 1 à 9. On tire 3 cartes successivement du sac, on les range dans l'ordre où elles sont tirées et on lit le nombre de 3 chiffres ainsi formé.

(i) Combien de nombres pairs peut-on former ?
• $4 \cdot 8 \cdot 7 = 224$ *: tous les chiffres de la forme xx(2 ou 4 ou 6 ou 8).*

(ii) Combien de nombres divisibles par 5 peut-on former ?
•$1 \cdot 8 \cdot 7 = 56$ *: tous les chiffres de la forme xx(5).*

(iii) Combien de nombres inférieurs à 400 peut-on former ?
•$3 \cdot 8 \cdot 7 = 168$ *: tous les chiffres de la forme (1 ou 2 ou 3)xx.*

Exercice 2

Une boite contient 10 boules blanches, 5 boules noires et 5 boules rouges. On tire 3 boules successivement de la boite sans remise.

Quelle est la probabilité d'avoir :

(i) la première boule blanche et le deux autres rouges ?
• *Les boules sont tirées l'une à la suite de l'autre, l'ordre est important. Le nombre total de tirages est* $20 \cdot 19 \cdot 18 = 6840$ *tirages (arrangement* A_3^{20}*). Les tirages BRR sont au nombre de* $10 \cdot 5 \cdot 4 = 200$. *D'où la probabilité* $200/6840 = 2,9\%$.

(ii) les deux premières boules noires ?
• *Les tirages NN(quelconque) sont au nombre de* $5 \cdot 4 \cdot 18 = 360$. *Probabilité* $5,2\%$.

(iii) une boule blanche et deux boules rouges ?
• *On a 3 possibilités : BRR, RBR ou RRB. Donc :* $3 \cdot (10 \cdot 5 \cdot 4) = 600$ *cas. Probabilité* $8,7\%$.

(iv) au moins une boule blanche ?
• *On cherche la probabilité de l'événement complémentaire "aucune boule blanche". Le nombre de tirage est* $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$. *Probabilité du complémentaire* $10,5\%$. *Probabilité de l'événement initial* $100\% - 10,5\% = 89,5\%$.

(v) trois boules de même couleur ?
• *On a 3 possibilités : BBB, RRR ou NNN. Donc :* $(10 \cdot 9 \cdot 8) + (5 \cdot 4 \cdot 3) + (5 \cdot 4 \cdot 3) = 840$ *cas. Probabilité* $12,2\%$.

Exercice 3

(i) Lors d'un examen, un étudiant doit répondre à 8 questions parmi les 10 questions posées.
Combien l'étudiant a t-il de manières diférentes pour choisir ses questions ?
• $C_8^{10} = 45$. *L'ordre du choix des questions n'a pas d'importance d'où l'utilistion des combinaisons.*

(ii) On suppose maintenant que l'étudiant doit choisir obligatoirement au moins 4 questions parmi les 5 premières questions.
Combien a t-il de manières différentes de choisir ses quetions ?
• *On sépare les deux groupes de questions (les 5 premières et les 5 dernières). On a deux possibilités (4,4) ou (5,3). Donc :*

$$C_4^5 \cdot C_4^5 + 1 \cdot C_3^5 = 35$$

Exercice 4

On a 3 boites : la boite B_1 contenant 2 boules blanches et 2 boules rouges, la boite B_2 contenant 3 blanches et 1 rouge, et la boite B_3 contenant 1 blanche et 3 rouges.

On réalise l'expérience suivante : "On tire au hasard 2 boules de la boite B_1, 3 boules de B_2 et 1 boule de B_3".

(i) Donner un exemple de tirage.
Combien y a t-il de tirages possibles pour cette expérience ?
Décrire l'ensemble fondamental S de l'expérience.

- *Exemple (BR,BBB,R). Il y a* $C_2^4 \cdot C_3^4 \cdot C_1^4 = 96$ *tirages possibles.*

(ii) Combien de tirages vérifient la condition qu'au moins une boule tirée de B_1 soit blanche, les boules tirées de B_2 et B_3 étant quelconques ?
Quelle est la probabilité de cette événement ?

- $(C_2^2 \cdot C_0^2 + C_1^2 \cdot C_1^2) \cdot C_3^4 \cdot C_1^4 = 80$ *tirages. Probabilité* $80/96 = 83\%$.

(iii) Combien de tirages vérifient que 2 boules exactement soient blanches ?
Quelle est la probabilité de cet événement ?

- *Le seul cas possible est (RR,BBR,R) correspondant à* $C_2^2 \cdot C_2^3 \cdot C_1^3 = 9$ *tirages. Probabilité* $9/96 = 9\%$.

(iv) En utilisant l'événement complementaire, calculer la probabilité que le tirage donne au moins une boule rouge ?

- *Le complémentaire correspond à "aucune boule rouge dans le tirage". C'est à dire (BB,BBB,B) correspondant à* $C_2^2 \cdot C_3^3 \cdot C_1^1 = 1$ *seul tirage. D'où la probabilité* $1 - 1/96 = 95/96 = 99\%$.

Exercice 5

Le dé d'une personne A est formé des nombres (2,2,2,3,5,5).

Le dé d'une personne B est formé des nombres (1,1,4,4,4,6).

Les deux personnes A et B jettent leurs dés ensemble, le gagnant est celui qui aura le numéro le plus grand.

Quelle est la probabilité que A gagne à ce jeu ?

- *Les cas où A gagne sont (2,1), (3,1), (5,1) et (5,4), avec une probabilité de :*

$(3 \cdot 2 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3)/36 = 1/2 = 50\%$.

Exercice 6

Quatre personnes d'une même famille sont réunies avec trois autres personnes d'une deuxième famille et deux autres d'une troisième famille.

On choisit deux personnes quelconques de ce groupe.

(i) Décrire un ensemble fondamental de cette expérience ?

- *On désigne par A, B et C les trois familles. On a :*
  - $C_2^4 = 6$ *possibilités pour choisir les 2 personnes de A*
  - $C_2^3 = 3$ *possibilités pour choisir les 2 personnes de B*
  - $C_2^2 = 1$ *possibilités pour choisir les 2 personnes de C*
  - $C_1^4 \cdot C_1^3 = 12$ *possibilités pour choisir une personne de A et une de B*
  - $C_1^4 \cdot C_1^2 = 8$ *possibilités pour choisir une personne de A et une de C*
  - $C_1^3 \cdot C_1^2 = 6$ *possibilités pour choisir une personne de B et une de C*

  soit au total $C_2^9 = 36$ *cas.*

(ii) Quelle est la probabilité pour que les deux personnes choisies soient de la même famille ?

- *Le nombre de cas où les deux personnes sont de la même famille est 10. Probabilité* $10/36 = 28\%$.

Exercice 7

On tire sans remise 4 cartes au hasard d'un paquet de 10 cartes numérotées de 1 à 10.
Calculer la probabilité que :

(i) le plus grand nombre tiré est un 6 ?
- $C_3^5/C_4^{10} = 10/210 = 4,8\%$

(ii) les cartes 4 et 5 soient parmi les 4 cartes tirées ?
- $C_2^8/C_4^{10} = 28/210 = 13\%$

(iii) le produit des 4 nombres est pair ?
- *Pour que le produit soit impair il faut choisir 4 nombres parmi les 5 impairs (1 3 5 7 9). Probabilité du complémentaire* $C_4^5/C_4^{10} = 5/210 = 2,3\%$. *D'où* $97,6\%$ *pour un produit pair.*

(iv) le produit donne 180 ?
- *Les 4 cas possibles sont (1 2 9 10), (1 3 6 10), (1 4 5 9) et (2 3 5 6). Probabilité* $4/C_4^{10} = 4/210 = 2\%$.

(v) les 4 nombres sont des entiers qui se suivent ?
- $7/C_4^{10} = 7/210 = 3,3\%$ *car les cas possibles sont (1 2 3 4), (2 3 4 5), ..., (7 8 9 10).*

Exercice 8

Deux personnes A et B jouent à un jeu de la manière suivante. Un dé ordinaire est lancé :
- si le numéro 6 sort, c'est A qui gagne
- si le numéro 1 sort, c'est B qui gagne
Si 1 ou 6 ne sortent pas, le dé est relancé, jusqu'à ce que l'un des deux gagne.

(i) Quelle est la probabilité que la personne A gagne
- au premier jet du dé
- au deuxième jet du dé
- au n-ième jet du dé
- $1/6, 4/6 \cdot 1/6, (4/6)^{n-1} \cdot 1/6$

(ii) Quelle est la probabilité que la personne A gagne à ce jeu ?
- $\sum_{n=1}^{\infty}(4/6)^{n-1} \cdot 1/6 = 1/2$

Exercice 9

Un sac S_1 contient 4 boules rouges et 3 jaunes. Un autre sac S_2 contient 3 boules rouges et 4 jaunes.

Une boule est tirée au hasard du sac S_1 et est placée dans le sac S_2.

Ensuite une boule est tirée au hasard du sac S_2 et est placée dans le sac S_1.

On tire maintenant une boule au hasard du sac S_1, quelle est la probabilité que cette boule soit rouge ?

- *Il faut considérer tous les cas possibles de tirages :*

- *RRR avec une probabilité de* $4/7 \cdot 4/8 \cdot 4/7$
- *RJR avec une probabilité de* $4/7 \cdot 4/8 \cdot 3/7$
- *JRR avec une probabilité de* $3/7 \cdot 3/8 \cdot 5/7$
- *JJR avec une probabilité de* $3/7 \cdot 5/8 \cdot 4/7$

La somme donne une probabilité de $55,3\%$.

Exercice 10

On met 18 cartes de jeu dans une boite telles que 5 sont de couleur Rouge-Noire, 7 sont Noire-Noire, 2 sont Rouge-Rouge et 4 sont Blanche-Rouge.

L'expérience qu'on veut étudier consiste à tirer une carte quelconque de cette boite.

(i) Quelle est la probabilité de tirer une carte Noire d'une face ?

- *On a :*

$$\begin{aligned} p(N) &= p(N|RN) \cdot p(RN) + p(N|NN) \cdot p(NN) \\ &\quad + p(N|RR) \cdot p(RR) + p(N|BR) \cdot p(BR) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{18} + 1 \cdot \frac{7}{18} + 0 \cdot \frac{2}{18} + 0 \cdot \frac{4}{18} = \frac{19}{36} = 53\% \end{aligned}$$

(ii) Quelle est la probabilité de tirer une carte Blanche d'une face ?

- *On a :*

$$p(B) = \frac{2}{18} = 11\%$$

(iii) Quelle est la probabilité de tirer une carte Rouge d'une face ?

- *On a :*

$$p(R) = \frac{13}{36} = 36\%$$

(iv) Sachant qu'une face de la carte tirée est Rouge, quelle est la probabilité que l'autre face soit Rouge ?

- *On utilise la formule de Bayes :*

$$p(RR|R) = \frac{p(R|RR) \cdot p(RR)}{p(R)} = 31\%$$

Exercice 11

(i) Qu'appelle t-on probabilité conditionnelle de 2 événements A et B quelconques d'une expérience donnée $p(A|B)$?

- *Voir cours.*

(ii) Soient $F_1, F_2, \ldots, F_n$, n événements mutuellement exclusifs d'une expérience, tels que $F_1 \cup F_2 \cup \ldots \cup F_n = S$, S étant l'ensemble fondamental.
Pourquoi la relation suivante est vérifiée :

$$p(A) = \sum_{i=1}^{n} p(A|F_i) \;\; p(F_i)$$

- *Voir cours.*

(iii) Etablir la relation suivante :

$$p(A_2|A_1) = \sum_{i=1}^{n} p(A_2|A_1 \cap F_i) \cdot p(F_i|A_1)$$

avec A_1 et A_2 deux événements quelconques.

- *On a :*

$$\begin{aligned} p(A_2|A_1) &= \frac{p(A_1 \cap A_2)}{p(A_1)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{p(A_1 \cap A_2 \cap F_i)}{p(A_1)} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{p(A_1 \cap A_2 \cap F_i)}{p(A_1 \cap F_i)} \cdot \frac{p(A_1 \cap F_i)}{p(A_1)} = \sum_{i=1}^{n} p(A_2|A_1 \cap F_i) \cdot p(F_i|A_1) \end{aligned}$$

Exercice 12

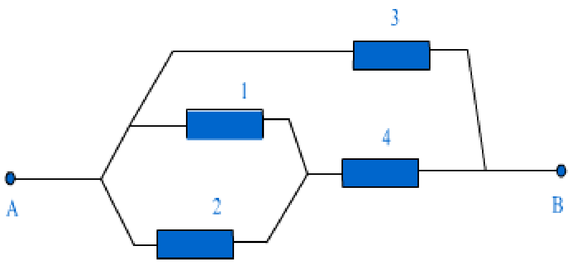
On a 2 boites.
La boite A qui contient 7 boules rouges et 4 boules blanches.
La boite B qui contient 3 boules rouges et 5 boules blanches.
On réalise l'expérience suivante :
- on jette une pièce de monnaie,
- si c'est pile qui sort, on tire une boule de la boite A,
- sinon, si c'est face, on tire une boule de la boite B.

(i) Quelle est la probabilité de tirer une boule rouge ?
- *On a :*
$$p(R) = p(R|A) \cdot p(A) + p(R|B) \cdot p(B) = \frac{7}{11} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{2} = 50,5\%$$

(ii) Supposons que la boule tirée est rouge, quelle est la probabilité que cette boule vienne de la boite A ?
- *On a :* $p(A|R) = p(R|A) \cdot p(A)/p(R) = 62,9\%$

Exercice 13

On considère un circuit electrique composé de 4 relais. Chaque relais a une probabilité de 70% de laisser passer le courant electrique indépendamment des autres relais.



Quelle est la probabilité que le courant passe de A vers B ?
- *Le fait que les événements soient indépendants donne :*
$$\begin{aligned} p(R_3 \cup (R_4 \cap (R_1 \cup R_2))) &= p(R_3) + p(R_4 \cap (R_1 \cup R_2)) - p(R_3 \cap (R_4 \cap (R_1 \cup R_2)) \\ &= p(R_3) + p(R_4) \cdot p(R_1 \cup R_2) - p(R_3) \cdot p(R_4) \cdot p(R_1 \cup R_2) \\ &= \cdots \\ &= p^4 - 3p^3 + 2p^2 + p = 89\% \end{aligned}$$

Exercice 14

Dans un ensemble fondamental Ω, on suppose que :
- A et B_1 sont deux événements indépendants
- A et B_2 sont deux événements indépendants

Montrer que si A et $B_1 \cap B_2$ sont indépendants alors A et $B_1 \cup B_2$ sont aussi indépendants.
- *On a les hypothèses suivantes :*
$$p(A \cap B_1) = p(A) \cdot p(B_1)$$
$$p(A \cap B_2) = p(A) \cdot p(B_2)$$
$$p(A \cap B_1 \cap B_2) = p(A) \cdot p(B_1 \cap B_2)$$

d'où :

$$\begin{aligned} p(A \cap (B_1 \cup B_2)) &= p((A \cap B_1) \cup (A \cap B_2)) \\ &= p(A \cap B_1) + p(A \cap B_2) - p(A \cap B_1 \cap B_2) \\ &= p(A) \cdot (p(B_1) + p(B_2) - p(B_1 \cap B_2)) \\ &= p(A) \cdot p(B_1 \cup B_2) \end{aligned}$$

Exercice 15

(i) Si n personnes sont présentes ensemble ($2 \leq n \leq 100$), quelle est la probabilité que leurs dates d'anniversaire tombent sur des jours tous différents ?

Pour simplifier, on supposera qu'il y a 365 dates d'anniversaire possibles pour chaque personne.

- $S = \{$*n-uples de dates de naissance*$\}$, $Card(S) = 365^n$
  $E = \{$*n-uples de dates de naissance différentes*$\}$,
  $Card(E) = 365 \cdot 364 \cdots (365 - n + 1) = \frac{365!}{(365-n)!}$
  Donc $p(E) = \frac{365!}{365^n \cdot (365-n)!} = (1 - \frac{0}{365}) \cdot (1 - \frac{1}{365}) \cdots (1 - \frac{n-1}{365})$
  qu'on peut écrire lorsque n est grand :
  $ln(p(E)) = ln(1 - \frac{0}{365}) + ln(1 - \frac{1}{365}) + \cdots + ln(1 - \frac{n-1}{365}) \sim \frac{-n(n-1)}{730}$
  $p(E) = exp(-n(n-1)/730)$

(ii) Quelle valeur faut t-il donner à n pour atteindre 50% ?

- $n = 23$

Remarque : on peut aussi utiliser la formule de Stirling $n! \sim e^{-n} n^n \sqrt{2\pi n}$ lorsque n est grand pour simplifier les probabilités trouvées.