2^{eme} année LMD (GC et TP) *Examen math3* *le 12/01/2017*

Exercice 1.

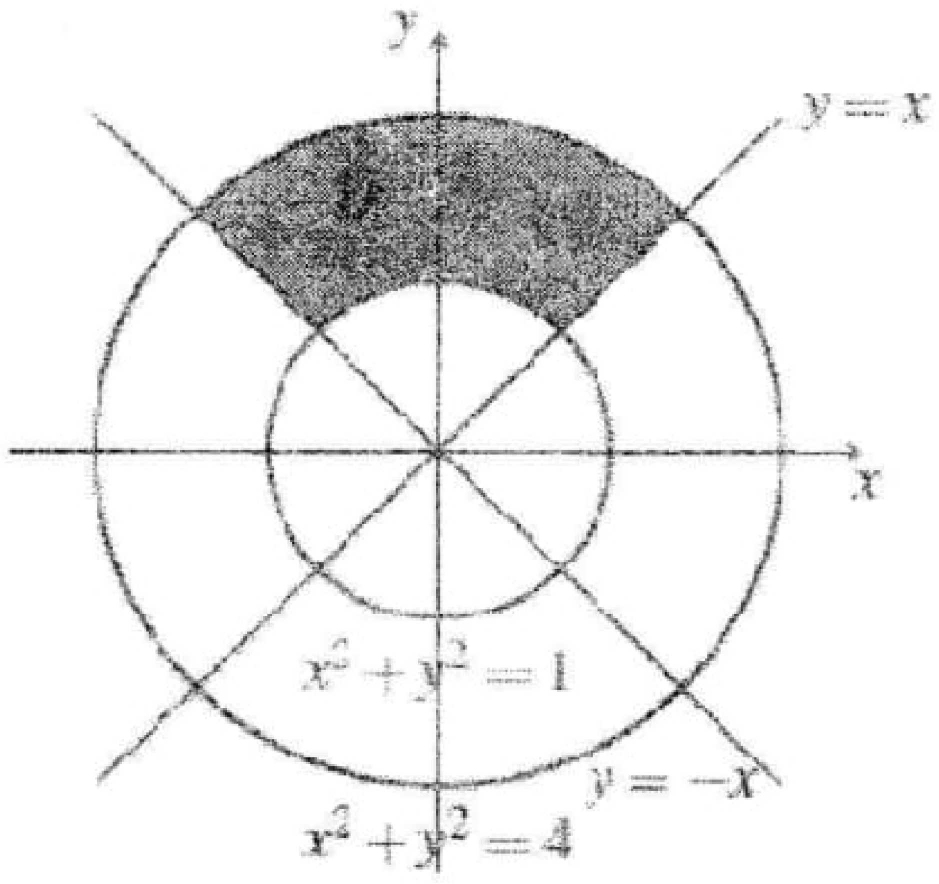
Résoudre les équations différentielles suivantes :

1) $y'' - 3y' + 2y = x^2 - 3x$
2) $y'' + y' - 2y = 9e^x - 2$

Exercice 2 (test) .

Calculer l'intégrale double ?

$$\iint_D (x^2 + y)\, dx\, dy$$



Exercice 3.
Dessiner un domaine et choisir judicieusement un ordre d'intégration soit D le domaine du plan R^2 formé des couples (x, y) vérifiant le système

$$\begin{cases} |y - 2| \leq 1 \\ (x - 1).(x - y) \leq 0 \end{cases}$$

Dessiner le domaine D ?

Calculer l'intégrale ?

$$I = \iint_D e^{(3-x)^2}\, dx\, dy$$

Exercice 3.
Soit $R = \{(x, y, z) \in R^3 | x^2 + y^2 \leq 1,\ z^2 \leq 4(x^2 + y^2), -2 \leq z \leq 2\}$ R est la région de R^3 a l'intérieur du cylindre dont l'axe de symétrie est l'axe des z et de rayon 1, entre les deux plans horizontaux d'équation respectivement z = 2 et z = −2 et a l'extérieur du cône d'équation $z^2 = 4(x^2 + y^2)$.

1. Représente cette région ?
2. Calculer l'intégrale triple ?

$$\iiint_R (x^2 + y^2 + z^2) dxdydz$$

Correction MATH 3.

Exercice N° 1 4 pts Résoudre les équations différentielles

① $y'' - 3y' + 2y = x^2 - 3x$

la solution homogène est $y'' - 3y' + 2y = 0$

$r^2 - 3r + 2 = (r-1)\cdot(r-2) \Rightarrow$ (équation caractéristique).

$\boxed{y(x) = K_1 \cdot e^{x} + K_2 \cdot e^{2x}}$ 1

la solution particulière

sous la forme d'un polynôme $y(x) = ax^2 + bx + c$

donc la solution $2a - 3(2ax + b) + 2(ax^2 + bx + c) = x^2 - 3x$

la solution générale est 1 $\boxed{y(x) = K_1 e^{x} + K_2 e^{2x} + \frac{1}{2}(x^2 - 1)\ ,\ K_1, K_2 \in \mathbb{R}}$

② $y'' + y' - 2y = 9e^{x} - 2$

la solution homogène est $y'' + y' - 2y = 0$.

$r^2 + r - 2 = (r+2)(r-1) \Rightarrow$ (l'équation caractéristique).

la solution est $\boxed{y(x) = K_1 e^{-2x} + K_2 e^{x}}$ 1

on applique le principe de superposition $\begin{cases} y'' + y' - 2y = -2 \\ y'' + y' - 2y = 9e^{x} \end{cases}$

est de la forme $\begin{cases} y_1(x) = 1 \\ y(x) = p(x) \cdot e^{x} \end{cases}$

où $\deg p = 1$ et p sans coefficient car 1 est racine de l'équation

on pose $y(x) = z(x) \cdot e^{x}$

$y(x)$	$z(x)$
e^{x}	$1 = e^{0x}$
e^{-2x}	e^{-3x}

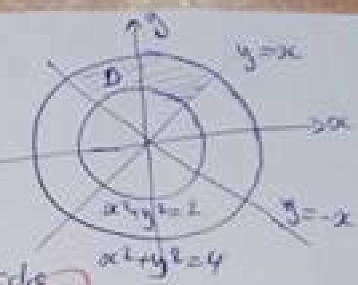
$r^2 - (0 + (-3))r + (0 \times (-3)) = 0$

l'équation en z est donc $z'' + 3z' = 9$.

dont une solution évidente est $z = 3x$ ainsi $y_2(x) = 3x$

$\boxed{y(x) = K_1 e^{-2x} + K_2 e^{x} + 3x e^{x} + 1}$ 1

Exercice N° 02 (5 pts)



la région "D" s'écrit en coordonnées polaires

1 $D=\left\{(r,\theta) \mid 1 \leqslant r \leqslant 2,\ \frac{\pi}{4} \leqslant \theta \leqslant \frac{3\pi}{4}\right\}$

$$\iint_D (x^2+y)\,dx\,dy = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\int_1^2 \left(r^2\cos^2\theta + r\sin\theta\right) r\,dr\,d\theta \quad 1$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\int_1^2 \left(r^3\cdot\cos^2\theta + r^2\sin\theta\right) dr\,d\theta = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \left[\frac{r^4}{4}\cos^2\theta + \frac{r^3}{3}\sin\theta\right]_1^2 d\theta$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \left(\frac{15}{4}\cos^2\theta + \frac{7}{3}\sin\theta\right) d\theta \quad 1 \quad = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \left(\frac{15}{4}\cdot\frac{1+\cos(2\theta)}{2} + \frac{7}{3}\sin\theta\right) d\theta.$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{15}{4} + \frac{15}{8}\cos(2\theta) + \frac{7}{3}\sin\theta\,d\theta = \left[\frac{15}{4}\theta + \frac{15}{16}\sin(2\theta) - \frac{7}{3}\cos\theta\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}$$

$$= \boxed{\frac{15}{16}\pi + \frac{15}{8}} \quad 2$$

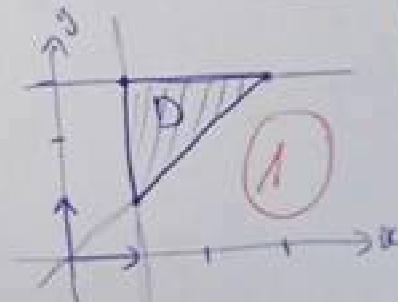
Exercice N° 03 (5 pts)

$|y-2| \leqslant 1 \iff -1 \leqslant y-2 \leqslant 1 \Rightarrow 1 \leqslant y \leqslant 3$

$(x-1)\cdot(x-y) \leqslant 0 \iff \begin{cases} x-1 \geqslant 0 \text{ et } x-y \leqslant 0 \\ \text{ou} \\ x-1 \leqslant 0 \text{ et } x-y \geqslant 0 \end{cases}$

1 $y=1,\ y=3$
$x=1,\ x=y$

les quatre droites d'équat° donne :
un triangle fermé dont les sommets :
$(1,1)$, $(3,3)$ et $(1,3)$ 1



1

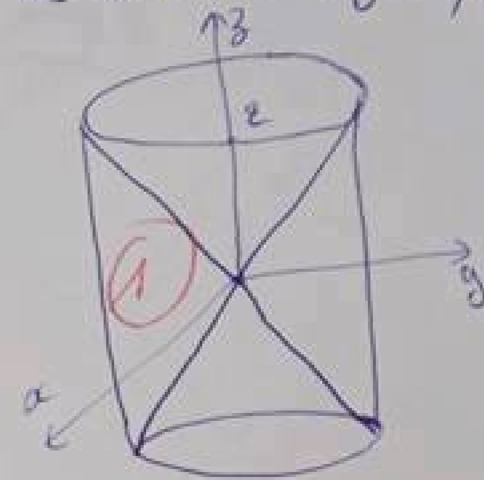
$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;/\; 1\leqslant x\leqslant 3,\ x\leqslant y\leqslant 3\right\}$

$$I = \int_1^3 \left[\int_x^3 e^{(3-x)^2}\,dy\right] dx = \int_1^3 e^{(3-x)^2}(3-x)\,dx$$

$$I = -\frac{1}{2}\left[e^{(3-x)^2}\right]_1^3 = \boxed{\frac{e^4-1}{2}} \quad 2$$

Exercice N° 04 6 pts

$\iiint_R (x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz$ en utilisant les coordonnées cylindriques



La région R' correspondant à R en coordonnées cylindriques sera : $R' = \{(r,\theta,z) \mid 0 \leq \theta \leq 2\pi,$ (1) $0 \leq r \leq 1, -2r \leq z \leq 2r\}$

Notons que $x^2+y^2+z^2 = (r\cos\theta)^2 + (r\cdot\sin\theta)^2 + z^2 = r^2+z^2$ (1)

$$\iiint_R (x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{R'} (r^2+z^2)\,r\,dr\,d\theta\,dz \quad (0,5)$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{-2r}^{2r} (r^2+z^2)\,r\,dz\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \left[r^3 z + \frac{r z^3}{3}\right]_{-2r}^{2r} dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{28\,r^4}{3}\,dr\,d\theta$$

$$= \frac{28}{3}\int_0^{2\pi}\left[\frac{r^5}{5}\right]_0^1 d\theta = \frac{28}{15}\int_0^{2\pi} d\theta = \frac{28}{15}\left[\theta\right]_0^{2\pi} = \boxed{\frac{56\,\pi}{15}}$$

(2 pts)