probabilités/statistique (Maths 4)

Solution : série d'exercices n°1 « analyse combinatoire »

EX1:

A : L'ensemble des personnes ont répondu « oui » à la première question.

B : " " " " " "oui" à la seconde question.

Ω : Ensemble de toutes les personnes votées.

1) $Card(A \cup B) = Card(A) + Card(B) - Card(A \cap B)$

$= 435 + 654 - 116 = 973$

2) $Card(\bar{A} \cap \bar{B}) = Card(\overline{A \cup B}) = \Omega - card(A \cup B) = 1200 - 973 = 227$.

EX2:

1) pas de répétition mais en tenant compte l'ordre. Arrangement (A_n^p)

$$A_9^3 = \frac{9!}{(9-3)!} = \frac{9!}{6!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \, 6!}{6!} = 504 \text{ nombres.}$$

2) En tenant compte l'ordre avec des répétitions possible. p-liste n^p $(n=9, p=3)$

Ce sont les trois 3-listes donc on en a $9^3 = 729$ nombres.

3) les chiffres sont divisibles par 5 s'ils se terminent par 5, donc, on doit choisir les 2 chiffres restants parmi 9. Comme il y a répétitions, on a p-liste de deux éléments parmi 9 : $9^2 = 81$ nombres.

4) les chiffres pairs sont : 2, 4, 6, 8 ; les chiffres ne peuvent pas répéter donc c'est un arrangement : $A_4^3 = \frac{4!}{1!} = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ nombres.

EX3:

$T_1, T_2 \; \ldots \; T_7$ (permutation)

1) Nombre de toute les possibilités : $P_7 = 7! = 5040$

2) les tomes 1, 2, 3 se trouvent côte à côte

1, 2, 3 se changent

$$P_3 = 3! \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$ donc $Nb = P_3 P_5 = 3! \, 5! = 720$.

EX4 : permutation avec répétition

On a 4 groupes de lettres identiques : M (2 fois), A (2 fois), T (2 fois) et E (2 fois)

autrement : le mot « MATHEMATIQUE » contient 12 lettres : alors :

$$P_{12} = \frac{12!}{2!\,2!\,2!\,2!} = 29937600 \text{ mots.}$$

EX5 :

1) $C_7^3 = \frac{7!}{3!\,4!} = 7\times 5 = 35 = C_4^0 C_3^3 + C_4^1 C_3^2 + C_4^2 C_3^1 + C_4^3 C_3^0$

2) $C_4^3 = \frac{4!}{3!\,1!} = 4$

3) $C_4^1 C_3^2 + C_4^2 C_3^1 + C_4^3 C_3^0 = 34 = C_7^3 - C_4^0 C_3^3$

4) $C_4^1 C_3^2 = 12.$

EX6

Coeurs :	7	8	9	10	V	D	R	AS
Carreaux :	7	8	9	10	V	D	R	AS
piques :	7	8	9	10	V	D	R	AS
trèfles :	7	8	9	10	V	D	R	AS

nombres de toutes les mains possibles : C_{32}^8

a) nombre de mains contenant 2 AS : $C_4^2 C_{28}^6$

b) Aucun AS : $C_4^0 C_{28}^8$

c) nombre de mains contenant au moins 1 AS : $C_4^1 C_{28}^7 + C_4^2 C_{28}^6 + C_4^3 C_{28}^5 + C_4^4 C_{28}^4 =$

$$C_{32}^8 - C_4^0 C_{28}^8$$

d) deux coeurs et 3 piques : $C_8^2 C_8^3 C_{16}^3$

e) deux coeurs, 3 piques et 1 trèfle $= C_8^2 C_8^3 C_8^1 C_8^2$

f) 2 coeurs et 1 AS $= C_7^2 C_3^1 C_{21}^5 + C_7^1 C_1^1 C_{21}^6$

coeurs : 7 8 9 10 V D R AS

AS
AS
AS

g) deux coeurs et 2 dames $= C_7^2 C_3^2 C_{21}^4 + C_1^1 C_7^1 C_3^1 C_{21}^5$

h) un carré : pour avoir un carré, on choisit une hauteur, on prend les 4 cartes de cette hauteur, puis une autre hauteur parmi les 7 restantes et on prend les 3 cartes de cette hauteur au plus.

$$C_8^1 C_4^4 C_7^1 C_4^3 C_{24}^1 + C_8^1 C_4^4 C_7^1 C_4^2 C_{24}^2 + C_8^1 C_4^4 C_7^1 C_4^1 C_{24}^3 = C_8^1 C_4^4 C_{28}^4 - C_8^2 C_4^4 C_4^4$$

EX7: Dans le cas avec remise le résultat et une p-liste de l'ensemble produit qui contient 10 boules. sans remise un résultat et un arrangement.

a) 4 boules blanches : 7^4 (avec remise) ou A_7^4 (sans remise) cas.

b) 4 noires : 3^4 ou 0 cas.

c) 3 blanches et 1 noires dans cet ordre : $7^3 \times 3$ ou $A_7^3 \times 3$

d) 2 blanches et 2 noires dans cet ordre : $7^2 \times 3^2$ ou $A_7^2\, A_3^2$

e) 2 blanches et 2 noires : $C_4^2\, 7^2 \times 3^2$ ou $C_4^2\, A_7^2\, A_3^2$

f) Exactement 3 noires ou 4 noires Exactement :

3 noires : 4 possibilités pour la place de la blanche : $4 \times 7 \times 3^3$ ou $4\, A_7^1\, \underbrace{A_3^3}_{3!}$

4 noires : 3^4 ou 0 cas possible.

en tout : $4 \times 7 \times 3^3 + 3^4$ ou $4 \times 7 \times 3^3$

g) Au moins 3 noires : (3 noires et 1 blanche)

on a 3 noires et 4 possibilites pour la place de la blanche : $4 \times 3^3 \times 7^1$ ou $4 \times \underbrace{A_3^3}_{3!} \times A_7^1$

EX8

$$4! \begin{pmatrix} 5 & 7 & \alpha & \beta \\ 5 & 7 & \beta & \alpha \\ 7 & 5 & \alpha & \beta \\ 7 & 5 & \beta & \alpha \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} C_8^2 \qquad \begin{pmatrix} 0 & 5 & 7 & \lambda \\ 0 & 7 & 5 & \lambda \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} C_7^1$$

$Nb = 4!\, C_8^2 - 3!\, C_7^1 = 630$ nombres.

EX9:

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

$Nb = 4! - 3! = 18$ nombres.

$$5130 = 5\, 10^3 + 1 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 0$$
$$xyzt = x\, 10^3 + y\, 10^2 + z\, 10 + t$$

la somme $= (3! \times 1 + 3! \times 3 + 3!\, 5)\, 10^3 + ((3! - 2!) \cdot 1 + (3! - 2!) \cdot 3 + (3! - 2!) \cdot 5 + 3! \cdot 0)\, 10^2$

$+ ((3! - 2!) \cdot 1 + (3! - 2!) \cdot 3 + (3! - 2!) \cdot 5 + 3! \cdot 0)\, 10$

$+ ((3! - 2!) \cdot 1 + (3! - 2!)\, 3 + (3! - 2!) \cdot 5 + 3! \cdot 0) \cdot 1$

$= 6 \cdot 9\, 10^3 + 4 \cdot 9\, 10^2 + 4 \cdot 9\, 10 + 4 \cdot 9 = 54000 + 3600 + 360 + 36 = 57996.$

EX10 :

$A = \{3 \text{ noires} + 2 \text{ blanches}\}$

$B = \{2 \text{ boules noires} + 2 \text{ boules blanches}\}$

1) $C_3^2 C_2^1 + C_2^2 C_2^1 = 8$

2) nombre de tirage possibles : $C_5^2 C_4^1 = 40$

3) nombre de tirage (exactement une boule blanche) $= C_3^2 C_2^1 + C_2^1 C_3^1 C_2^1 = 18$

4) nombre de tirage (Exactement deux boules blanches) $= C_2^2 C_2^1 + C_2^1 C_3^1 C_2^1 = 14$