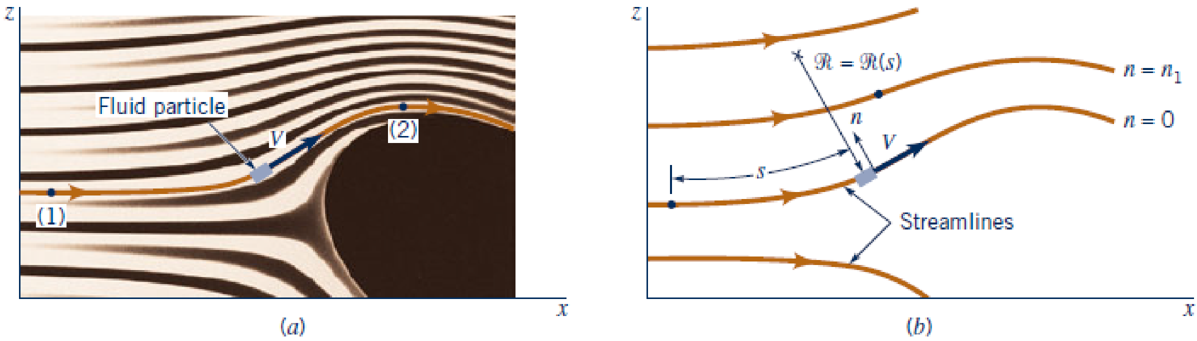
Chapitre III : Dynamique élémentaire des fluides

1-Introduction : On va considérer le mouvement d'un fluide non visqueux, c'est-à-dire qu'on va négliger les forces dues aux contraintes de frottement $\boldsymbol{\tau}$. On applique la deuxième loi de Newton à une particule de fluide. Ainsi, l'écoulement d'un fluide non visqueux est fonction des forces de pression et de gravité.

Forces engendrées par la pression sur la particule fluide	⊕	Forces de volume (gravité) sur la particule fluide	=	Masse de la particule ⊗ accélération de la particule

Le mouvement de la particule fluide est décrit par le vecteur vitesse $\vec{V}$ qui représente une quantité vectorielle avec une intensité (vitesse $\boldsymbol{V} = |\vec{\boldsymbol{V}}|$) et une direction. Dans son mouvement, la particule suit un chemin dont la forme est définit par la vitesse. La position de la particule le long du chemin est fonction de sa position initiale, du temps initial et de sa vitesse.

Si les paramètres de l'écoulement V, P,…ne varient pas en fonction du temps, les particules fluides suivent le même chemin, pour ce cas le chemin ne varie pas dans l'espace. Pour chaque position, les particules suivent des chemins fixes dans le temps.

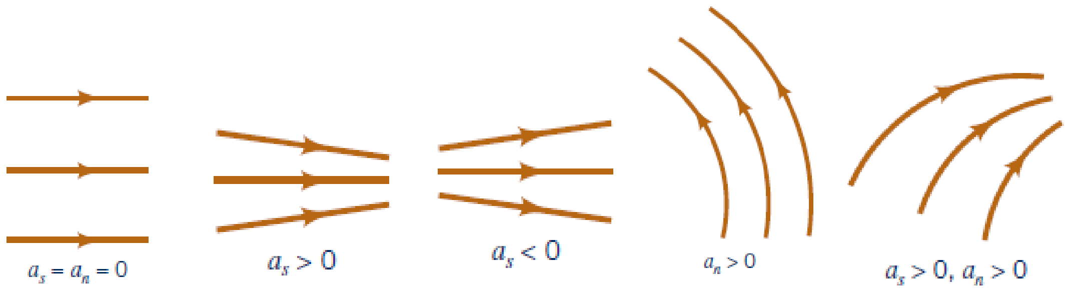


Ecoulement permanent : C'est un écoulement indépendant du temps où les particules fluides glissent le long des trajectoires. Ces chemins ou trajectoires sont dits **lignes de courant (streamlines)**. On peut décrire l'écoulement en fonction de la distance *« s »* le long de la ligne de courant à partir d'une origine et un rayon de courbure local *R=R(s)*. La vitesse est donnée par $v = \frac{ds}{dt}$ et l'accélération $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$

Si on considère deux dimensions de l'espace, une le long de la ligne de courant *« s »* et l'autre perpendiculaire *« n »*, l'accélération aura deux composantes a_s et a_n, on aura donc :

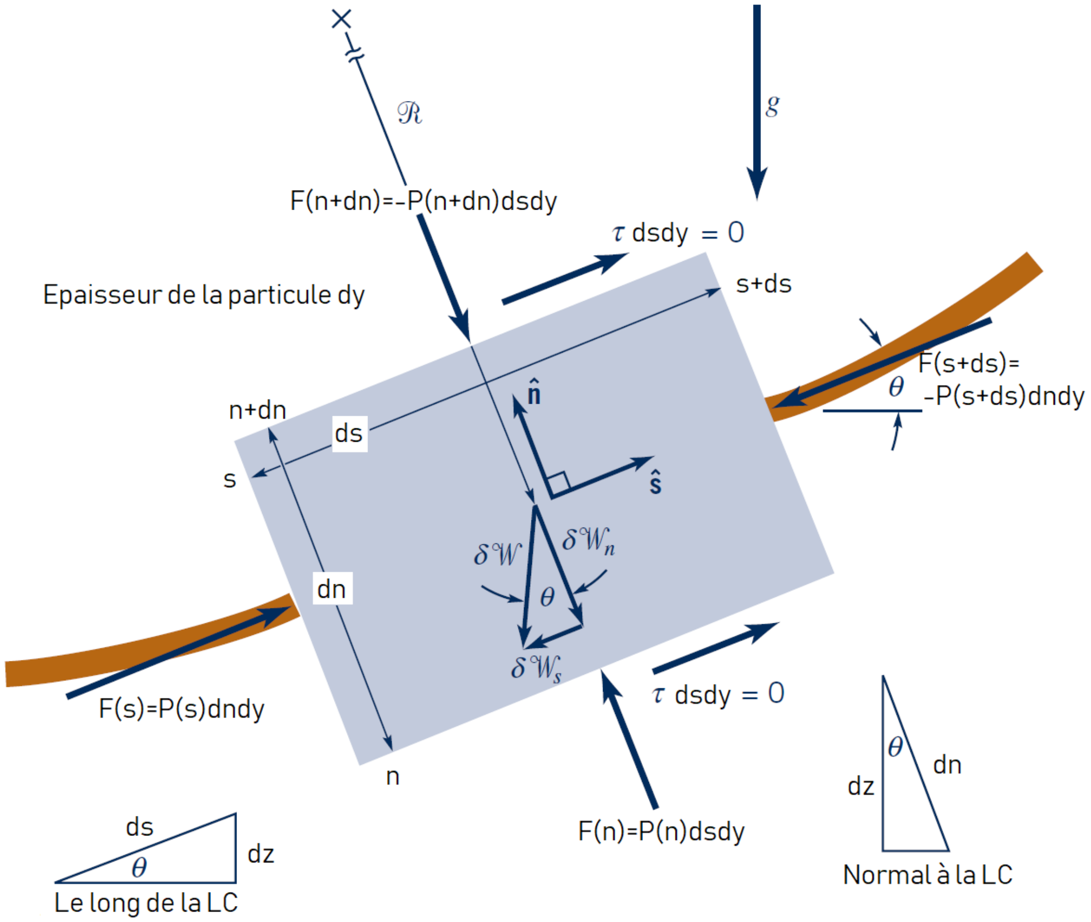
$$a_s = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt} = v\frac{dv}{ds} \quad \text{puisque} \quad v = \frac{ds}{dt}.$$

L'accélération a_s est le résultat de la variation de la vitesse le long de la ligne de courant ; par contre a_n est l'accélération centrifuge, elle est donnée par $a_n = \frac{v^2}{R}$ ou R est le rayon de courbure local. Les différentes configurations montrant la vitesse et l'accélération sont montrées par la figure ci-dessous.



2- Application de la deuxième loi de Newton sur un particule fluide le long d'une ligne de courant (Equation de Bernoulli) :

Soit une particule fluide de volume $\delta V = \delta s \delta n \delta y$ montrée par la figure.



Pour un écoulement permanent, l'application de la loi de Newton dans la direction « ***s*** » s'écrit :

$$\sum \delta F_s = \delta m a_s = \delta m v \frac{\partial v}{\partial s} = \rho \delta V v \frac{\partial v}{\partial s} \text{ avec } \delta V = \delta s \delta n \delta y$$

Avec dy la direction perpendiculaire à ***s-n***. Le poids de la particule (l'effet de la force de gravité) s'écrit : $\delta W = \rho g \delta V$

La composante de la force de gravité (poids) dans la direction « ***s*** » est :

$$\delta W_s = -\delta W \sin\theta = -\rho g \delta V \sin\theta$$

La pression aussi dépend de la position de la particule fluide *p=p(n,s)*. Si la pression au centre de la particule est notée par *p*, sa valeur moyenne sur les faces dans la direction tangentielle à la ligne de courant sont *p(s)* et *p(s+ds)*. Puisque la particule est petite on utilisera le développement en série de Taylor pour le champ de pression dans le calcul de :

$$p(s+\delta s) = p(s) + \delta p_s = p(s) + \frac{\delta s}{2}\frac{\partial p}{\partial s} + \cdots$$

On néglige les termes d'ordres deux et ceux supérieurs, cela donne : $\delta p_s \approx \frac{\delta s}{2}\frac{\partial p}{\partial s}$

Alors, si dF_{ps} est la force nette de pression sur la particule dans la direction de la ligne de courant, on aura : $\delta F_{ps} = p(s-\delta s)\delta n\delta y - p(s+\delta s)\delta n\delta y = -2\delta p_s \delta n\delta y = -\frac{\partial p}{\partial s}\delta n\delta y\delta s = -\frac{\partial p}{\partial s}\delta V$

Les forces visqueuses sont nulles $\tau dsdy=0$ pour le fluide non visqueux. La force totale est donc :

$$\sum \delta F_s = \delta W_s + \delta F_{ps} = \left(-\rho g \sin\theta - \frac{\partial p}{\partial s}\right)\delta V$$

En remplaçant ΣdF_s par sa valeur, on aura $\rho\delta V v\frac{\partial v}{\partial s} = \left(-\rho g \sin\theta - \frac{\partial p}{\partial s}\right)\delta V$

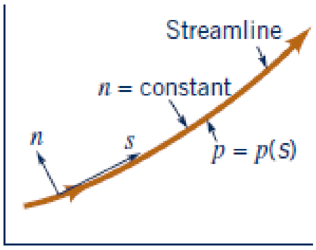
La variation de la vitesse de la particule fluide est due à la combinaison du gradient de pression et du poids de la particule le long de la ligne de courant.

L'équation $\rho v\frac{\partial v}{\partial s} = -\rho g \sin\theta - \frac{\partial p}{\partial s}$ peut être arrangée et intégrée si on note que $\sin\theta = \frac{dz}{ds}$, aussi on peut écrire $v\frac{dv}{ds} = \frac{1}{2}\frac{dv^2}{ds}$.

Sachant que le long de la ligne de courant « *LC* » (figure) *n* est constant alors *dn = 0*,

d'où la différentielle :

$$dp = \left(\frac{\partial p}{\partial s}\right)ds + \left(\frac{\partial p}{\partial n}\right)dn = \left(\frac{\partial p}{\partial s}\right)ds \text{ aussi } p(n,s) = p(s) \text{ et } \frac{\partial p}{\partial s} = \frac{dp}{ds}$$



L'équation peut s'écrire : $\frac{1}{2}\rho\frac{dv^2}{ds} = -\rho g\frac{dz}{ds} - \frac{dp}{ds}$

Qui se simplifie à : $dp + \frac{1}{2}\rho dv^2 + \rho g dz = 0$ le long d'une LC.

Il faut connaitre $\rho=\rho(P)$ pour intégrer l'équation. Pour les liquides, la masse volumique est constante, on obtient l'équation de ***Bernoulli*** :

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g z = cte$$

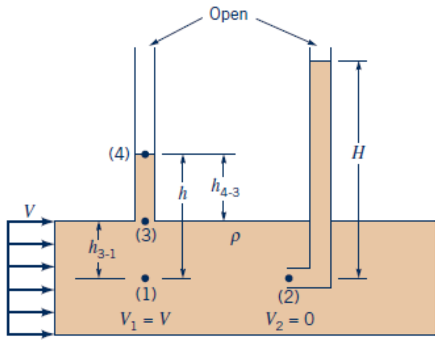
Pour un écoulement permanent non visqueux, l'effet de la somme d'une certaine pression, vitesse et élévation est constant le long d'une LC.

3 Application de l'équation de Bernouilli

Avant d'appliquer cette équation, nous allons donner quelques définitions.

3-1 Pression statique, de stagnation, dynamique et totale :

Chaque terme dans l'équation de Bernoulli a la dimension d'une pression (force par unité de surface). Le premier terme « ***P*** » est dit pression thermodynamique du fluide lorsqu'il s'écoule, elle est aussi dite « pression statique ». Pour mesurer cette pression, on utilise un **tube piézométrique** monté **perpendiculairement à la surface qui contient le fluide** (point 3 sur la figure). La pression au point 1 est $p_1 = \gamma h_{3-1} + p_3$ comme le cas d'un fluide statique. Si on connait $p_3 = \gamma h_{4-3}$ du manomètre, alors $h_{3-1} + h_{4-3} = h$ et $p_1 = \gamma h$.



Le deuxième terme de l'équation « ***ρv²/2*** » est dit « ***pression dynamique*** », elle est due à la vitesse de l'écoulement.

Elle est mesurée par un tube face à l'écoulement de telle sorte que la vitesse au point (2) est nulle ($v_2 = 0$, point de stagnation).

Si on applique Bernoulli entre (1) et (2), ($v_2 = 0$ et $z_1 = z_2$),

on aura : $$p_2 = p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = \gamma H.$$

La pression de stagnation est plus grande que celle statique par $\frac{1}{2}\rho v_1^2$ qui est la pression dynamique. Donc la pression de stagnation ou d'arrêt est égale à celle statique plus celle dynamique. Le troisième terme $\rho g z$ est appelé « pression hydrostatique » (déjà vu).

La pression de stagnation ou d'arrêt est la plus grande pression le long d'une ***LC***. Elle représente la conversion de toute l'énergie cinétique en pression.

La somme de la pression statique, hydrostatique et dynamique est dite pression totale p_T. La relation de Bernoulli énonce que la pression totale est constante le long d'une LC.

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g z = p_T$$

3.2 Tube de Pitot :

Ce tube mesure la vitesse par la conversion de la pression en vitesse. La connaissance de la pression statique et de stagnation implique que la vitesse peut être calculée. C'est le principe du tube de « **Pitot statique** ». Il est formé par deux tubes concentriques attachés à deux manomètres de telle façon à pouvoir calculer la différence entre la pression d'arrêt et statique. Si les élévations ***Z*** sont négligeables $z_2 = z_3$,

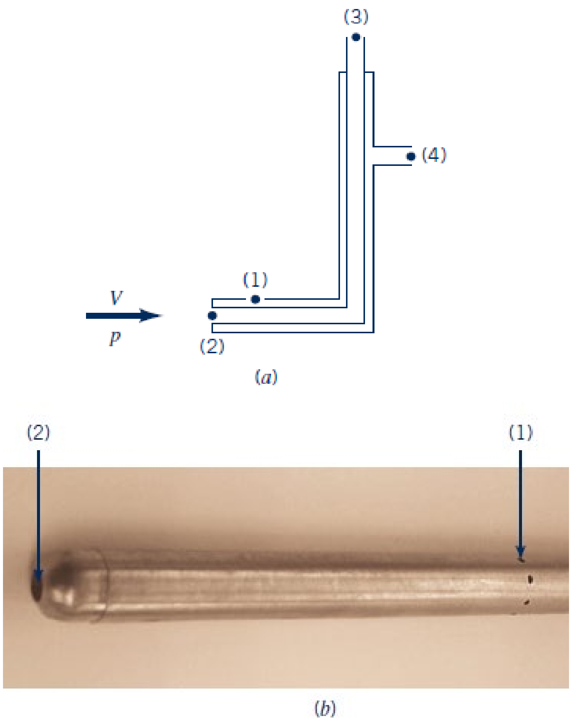
$$p_3 = p + \frac{1}{2}\rho v^2$$

Aussi on a les pressions statiques $p_4 = p_1 = p$, ce qui donne

$$p_3 - p_4 = \frac{1}{2}\rho v^2 \text{ et finalement}$$

$$v = \sqrt{\frac{2}{\rho}(p_3 - p_4)}$$

qui est la vitesse du fluide.



Tube de Pitot

Tube de Pitot dans un avion

3.3 Jets libres :

Soit un jet de liquide de diamètre ***d*** qui s'écoule à travers un orifice avec une vitesse ***v*** à calculer. L'application de l'équation de Bernoulli entre deux points *(1)* et *(2)* de la ligne de courant donne (figure) :

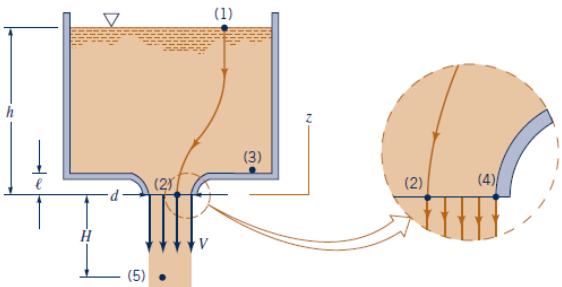
$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g z_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g z_2$$

On a $z_1 - z_2 = h$, $p_1 = p_2 = p_{atm}$ et $v_1 \approx 0$.

L'équation se simplifie à :

$$\gamma h = \frac{1}{2}\rho v^2 \text{ ce qui donne}$$

$$v = \sqrt{2gh}$$ qui est dite formule de Torricelli.



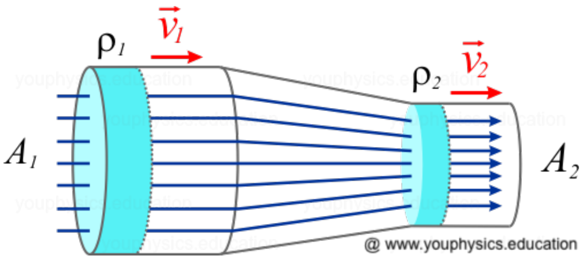
Jet libre

3.4 Calcul des débits par la formule de Bernoulli

Ecoulements confinés : Ce sont des écoulements de fluides limités physiquement par des parois solides, comme par exemple les tubes. La figure monte une conduite avec une section variable dans laquelle s'écoule un fluide. On définit les quantités suivantes :

Débit volumique : C'est le volume du fluide qui passe par une surface fermée par unité de temps, il est donné par : $\dot{Q} = vA \equiv \left[\frac{m^3}{s}\right]$

Débit massique : C'est la masse du fluide qui passe par une surface fermée par unité de temps, il est donné par : $\dot{m} = \rho\dot{Q} = \rho vA \equiv \left[\frac{kg}{s}\right]$



Equation de la conservation de la masse ou de la continuité :

Elle définit le principe de conservation de la masse (***la masse ne peut être crée ou détruite***), on écrit alors : $\dot{m} = cte \ \rightarrow \dot{m}_1 = \dot{m}_2 \leftrightarrow \rho_1 v_1 A_1 = \rho_2 v_2 A_2$

Si la masse volumique ρ est constante, cas des fluides incompressibles, on écrit aussi :

$$v_1 A_1 = v_2 A_2 \leftrightarrow \dot{Q}_1 = \dot{Q}_2$$

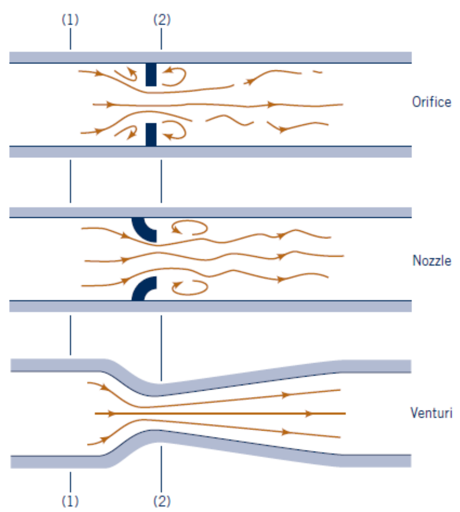
Mesure des débits : Plusieurs types d'instruments utilisant l'équation de Bernoulli sont développés pour la mesure des vitesses et débits des écoulements. Le tube de Pitot statique présente un exemple. D'autres exemples pour la mesure des débits sont montrés par la figure. L'idée est de placer une restriction dans le tube et de mesurer la différence de pressions entre l'écoulement à grande pression et petite vitesse (1) et petite pression et grande vitesse et petite pression (2). Les trois instruments sont basés sur le principe « une augmentation de vitesse provoque une diminution de pression ».

Si l'écoulement est horizontal $z_1 = z_2$, stationnaire, non visqueux et incompressible entre (1) et (2), l'équation de Bernoulli s'écrit : $p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$

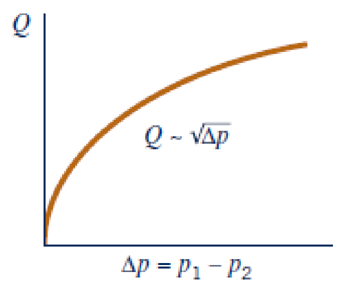
Si les vitesses sont uniformes aux sections *(1)* et *(2)* on peut écrire : $\dot{Q} = \dot{Q}_1 = \dot{Q}_2 \leftrightarrow v_1 A_1 = v_2 A_2$

avec $A_2 < A_1$ Ce qui donne :

$$\dot{Q} = A_2 \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho\left[1 - \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2\right]}}$$



Exemples de venturi



Débit en fonction de Δp

4- Autres formes de l'écriture de l'équation de Bernoulli :

L'équation de Bernoulli s'écrit en divisant les termes par le poids volumique comme suit :

$$\frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} + z = cst = H \equiv [m]$$

Chaque terme a l'unité d'une longueur ***[m]*** et représente un type d'hauteur.

- Le terme z, est relatif à l'énergie potentielle de la particule et dit « *hauteur ou élévation* ».
- Le terme de pression P/γ est dit « *hauteur de pression* » et représente la hauteur d'une colonne de fluide nécessaire pour produire la pression P.
- Le terme de vitesse $v^2/(2g)$ est la « *hauteur de vitesse* » qui représente la distance verticale nécessaire à la chute libre sans frottement du fluide pour atteindre, à partir de la stagnation ou l'arrêt, la vitesse v.

L'équation de ***Bernoulli*** énonce que la somme des hauteurs le long d'une ligne de courant est constante qui est la « *hauteur totale H* ».