Raisonnements Mathématiques

A. Pour montrer que : p (est vraie)

1. **Raisonnement direct** :
   On construit une suite finie de propositions $p_1, p_2, \dots, p_n$ vraies telles que
   $$p_1 \Longrightarrow p_2 \Longrightarrow \cdots p_n \Longrightarrow p$$
   Exemple : Montrer que $\forall x \in R: x^2 - 3 \geq -3$
   Solution :
   On sait que,
   $$\forall x \in R: x^2 \geq 0 \quad \Rightarrow \forall x \in R: x^2 - 3 \geq -3$$
   Et comme la proposition $\forall x \in R: x^2 \geq 0$ est vraie alors nécessairement la proposition $\forall x \in R: x^2 - 3 \geq -3$ est vraie aussi.

2. **Raisonnement par l'absurde** :
   $$[\bar{p} \Longrightarrow \cdots \Longrightarrow 0]\text{vraie} \Longrightarrow (p \text{ vraie})$$
   On montre qu'il existe une proposition **fausse** q telle que l'implication $\bar{p} \Longrightarrow q$ soit vraie, alors nécessairement la proposition $\bar{p}$ est fausse, c'est-à-dire p est vraie.
   Exemple : montrer que : $\forall x \in R: x^2 - 1 \geq -1$.
   Rappel : $\overline{\forall x \in R: p(x)} \Leftrightarrow \exists x \in R: \overline{p(x)}$
   Solution : on a :
   $$(\exists x \in R: x^2 - 1 < -1) \Longrightarrow (\exists x \in R: x^2 - 1 + 1 < -1 + 1) \Longrightarrow (\exists x \in R: x^2 < 0)$$
   Or la proposition $\exists x \in R: x^2 < 0$ est fausse, comme les implications précédentes sont vraies alors nécessairement la proposition $\exists x \in R: x^2 - 1 < -1$ est fausse, donc sa negation est vraie c'est-a-dire $\forall x \in R: x^2 - 1 \geq -1$ est vraie.

3. **Raisonnement par disjonction des cas** :
   $$[(p_1 \Longrightarrow q) \wedge (p_2 \Longrightarrow q) \wedge \dots \wedge (p_n \Longrightarrow q)] \Leftrightarrow [(p_1 \vee p_2 \vee \dots \vee p_n) \Longrightarrow q]$$

   Exemple :
   Montrer que l'équation $x^2 + 5y^2 = 15$ n'a pas de solution dans N.
   Solution :
   a. $x \in N \text{ et } y \geq 2 \Longrightarrow 5y^2 \geq 5.4 \Longrightarrow 5y^2 \geq 20 \Longrightarrow x^2 + 5y^2 \geq 20 \Longrightarrow x^2 + 5y^2 \neq 15 \Longrightarrow \text{l'équation n'a pas de solution dans N}$
   b. $x \in N \text{ et } y = 1 \Longrightarrow [(x^2 + 5y^2 = 15) \Leftrightarrow x^2 = 10] \Longrightarrow x \notin N \Longrightarrow$ $\text{l'équation n'a pas de solution dans N}$
   c. $x \in N \text{ et } y = 0 \Longrightarrow [(x^2 + 5y^2 = 15) \Leftrightarrow x^2 = 15] \Longrightarrow x \notin N \Longrightarrow$ $\text{l'équation n'a pas de solution dans N}$

   Ainsi :
   $(x \in N \text{ et } y \geq 2) \vee (x \in N \text{ et } y = 1) \vee (x \in N \text{ et } y = 0) \Longrightarrow$
   $\text{l'équation n'a pas de solution.}$

Ceci est équivalent à :
$(x \in N) \wedge [(y \geq 2) \vee (y = 1) \vee (y = 0)] \Longrightarrow$ l'équation n'a pas de solution.

C'est-à-dire : $(x \in N) \wedge [(y \epsilon N)] \Longrightarrow$ l'équation n'a pas de solution.

Généralement si $x \in A$ et $A = X \cup Y \cup \ldots \cup Z$ et si on veut montrer que $\forall x \in A: p(x)$ alors il suffit de montrer que :$\left(\forall x \in X: p(x)\right)$ *et* $\left(\forall x \in Y: p(x)\right)$ *et* … *et* $(\forall x \in Z: p(x))$

Dans l'exemple précédant $N = \{0\} \cup \{1\} \cup \{y \in N: y \geq 2\}$.

B. Pour montrer que $p \Longrightarrow q$:

1. Raisonnement directe

On fait apparaitre la dépendance de q sur p en transformant q

Exemple : Montrer que pout tout entier naturel n l'implication suivante est vraie

$10^n + 4$ *est divisible par* $6 \Longrightarrow 10^{n+1} + 4$ *est divisible par* 6

Solution : $10^{n+1} + 4 = 10.10^n + 4 = 10.(10^n + 4 - 4) + 4 = 10.(10^n + 4) - 36$

Si $10^n + 4$ est divisible par 6 alors $\exists k \in N: 10^n + 4 = 6k$

On a alors : $10^{n+1} + 4 = 10.(10^n + 4) - 36 = 10.6k - 36 = 6(10k - 6)$

Donc $10^{n+1} + 4$ n'est divisible par 6.

Remarque : Dans cette exercice l'implication est vraie pour tout entier sans que les propositions formant l'implication soit vraie pour tout entier, en effet si n=1 alors $10^1 + 4 = 14$ est 14 n'est pas divisible par 6.

2. Par contraposition

Pour prouver que $p \Longrightarrow q$ on montre que $\bar{q} \Longrightarrow \bar{p}$

Exemple : n est un nombre entier. Montrer que si n^2est pair alors n est pair

Ce problème peut être décrit par une implication : n^2pair $\Longrightarrow n$ pair

Au lieu de prouver cette implication on prouve sa contraposée : $\overline{n \text{ pair}} \Longrightarrow \overline{n^2\text{pair}}$

C'est-à-dire : n n'est pas pair $\Longrightarrow n^2$ n'est pas pair

Mais si un nombre entier n'est pas pair alors il est impair, et il s'agit donc de montrer que n impair $\Longrightarrow n^2$ impair. On a:

$$n \text{ est impair } \Longrightarrow \exists k \in N: n = 2k + 1 \Longrightarrow \exists k \in N: n^2 = (2k+1)^2 \Longrightarrow$$
$$n^2 = 4k^2 + 4k + 1 \Longrightarrow n^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1 \Longrightarrow n^2 \text{ est impair}$$

3. Par l'absurde

On montre que $p \wedge \bar{q} \Longrightarrow a_1 \Longrightarrow \cdots \Longrightarrow a_n \Longrightarrow 0$.

Ceci prouve que $p \wedge \bar{q}$ est fausse, donc sa negation $\overline{p \wedge \bar{q}}$ c'est-a-dire $\bar{p} \vee q$ vraie, c'est-a-dire $p \Longrightarrow q$.

C. Raisonnement par récurrence :

Soit un prédicat p(n) dépendant de l'entier naturel n. Pour que le prédicat soit vraie pour tout entier naturel il suffit de montrer que :

$p(0)$ est vraie

$p(n) \Longrightarrow p(n+1)$

En effet : $p(0)$ est vraie et $p(0) \Longrightarrow p(1)$ alors necessairement $p(1)$ est vraie aussi

De meme : $p(1)$ est vraie et $p(1) \Longrightarrow p(2)$ alors necessairement $p(2)$ est vraie aussi, et ainsi de suite.

<u>Exemple</u> :

Montrer que pour tout entier naturel n $10^n - 1$ est divisible par 3.

<u>Solution</u> : le prédicat $p(n)$ est $10^n - 1$ est divisible par 3. On montre que :

$p(0)$ est vraie, c'est-à-dire $10^0 - 1$ est divisible par 3

$p(n) \Longrightarrow p(n+1)$, c'est-à-dire :

$10^n - 1$ divisible par 3 $\Longrightarrow 10^{n+1} - 1$ est divisible par 3

On a : $10^0 - 1 = 1 - 1 = 0$ et 0 est divisible par 3, donc $p(0)$ est vraie.

Supponsons que $10^n - 1$ divisible par 3, alors $\exists k \in N$: $10^n - 1 = 3k$

et on a : $10^{n+1} - 1 = 10.10^n - 1 = 10(3k+1) - 1 = 30k - 9 = 3(10k - 3)$

c'est-à-dire que $10^{n+1} - 1$ est divisible par 3 aussi.

Donc pour tout entier n, $10^n - 1$ est divisible par 3.

D. Le Contre-exemple : c'est l'exemple qui permet de montrer qu'une règle n'est pas générale.

<u>Exemple</u> :

Tout entier naturel peut s'écrire comme somme de deux carrés.

Cet énoncé est faux car il existe des entiers naturels qui ne le sont pas, en effet : il n'y a que 2 façons d'écrire 3 sous forme d'une somme de 2 nombres entiers : $3 = 0 + 3$ et $3 = 1 + 2$,

3 n'est pas carré dans la première somme, et 2 ne l'est pas dans la seconde somme.

<u>Exemple</u> : soit l'implication suivate : $\forall x, p(x) \vee q(x) \Longrightarrow [\forall x, p(x)] \vee [\forall x, q(x)]$. Montrer que cette implication est fausse.

<u>Solution</u> :

On le fait en construisant un contre-exemple :

$$x \in R,\ \ p(x) : x = 1, \qquad q(x) : x \neq 1$$

On a : : $\forall x, p(x) \vee q(x) \Longleftrightarrow \forall x \in R, x = 1\ ou\ x \neq 1$. Cette proposition est vraie.

Mais: $[\forall x, p(x)] \vee [\forall x, q(x)] \Longleftrightarrow [\forall x, x = 1] \vee [\forall x, x \neq 1]$ est fausse car les propositions dans la disjonction sont fausse.

L'implication en question est de la forme « vrai implique faux », qui est bien entendue fausse.

E. Unicité de la solution :

Pour montrer que la solution à un problème est unique, on montre qui s'il en admet deux alors elles sont identiques.

<u>Exemple</u> : montrer que si un nombre n s'écrit sous forme 3k+4 alors cette écriture est unique.

Solution : supposons que $n = 3k + 4$ et que $n = 3p + 4$, alors :

$$3k + 4 = 3p + 4 \Longrightarrow 3k = 3p \Longrightarrow k = p$$

Donc l'écriture est bien unique.

Exercices

1. **Montrer qu'il n'existe aucun entier naturel non nul n tel que $n^2 + n^3 = 100$.**
2. *a, b* et *c* étant des nombres réels, et $a \neq 0$. Montrer que L'équation $ax + b = c$ admet une unique solution dans R.
3. **Montrer que si *n* est un nombre relatif impair, alors il existe un unique entier k tel que *n* soit la somme de $k - 2$ *et* $k + 3$.**
4. Montrer sans faire de calcul que $65^{1000} - 8^{2001} + 3^{177} < 0$
5. Montrer que *n* est pair si et seulement si $3n + 4$ est pair.
6. Soient a, b, c trois nombre réels. Montrer qu'au moins l'un de ces nombres est plus grand que ou égale à leur moyenne arithmétique $\frac{a+b+c}{3}$.
7. **Montrer que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel.**
8. **Sachant $\sqrt{2} \notin Q$, montrer $\forall x \in Q, x + \sqrt{2} \notin Q$**
9. Montrer que : $\frac{Ln2}{Ln3} \notin Q$
10. **Montrer que : $\forall A \in R_+, \forall B \in R_+ : A + B \geq 2\sqrt{AB}$**
    a. **Par un raisonnement par équivalence.**
    b. **Par un raisonnement par l'absurde.**

11. (*) Les longueurs des cotes d'un triangle ABC sont des entiers que l'on désigne par a,b, c.
    a. On suppose que $a = 1$ En utilisant l'inégalité triangulaire, montrer que le triangle ABC est soit équilatérale , soit isocèle.
    b. Trouver le plus petit périmètre possible si l'un des cotés est égal à 6.
12. (*) Montrer que : $\forall a, b \geq 1 \quad \sqrt{a-1} + \sqrt{b-1} \leq \sqrt{ab}$.
13. Montrer que
    $\forall n \in N- \{0, 1\} : \quad 1 + 1/2^2 + 1/3^2 + \cdots + 1/n^2 > 3n/2n + 1$
14. Montrer « $\forall a \in R, \forall \varepsilon > 0 : |a| \leq \varepsilon \Rightarrow a = 0$ » est une proposition fausse.
15. Soit $a \in$R.
    a) Montrer que $(\forall \varepsilon > 0, |a| \leq \varepsilon) \Rightarrow a = 0$.
    b) Montrer que $(\forall \varepsilon > 0, |a| < \varepsilon) \Rightarrow a = 0$