U.S.T.H.B. 2012-2013 Semestre 1 **Math 3 : Séries**

Faculté de Mathématiques **$2^{\text{ème}}$ Lic, ST-GP, Section F**

Examen final - 13 janvier 2013. Durée : 90 minutes

Nom :.. **Matricule :**..

Prénom :.. **Groupe :**..

==

Exercice 1 (5 points) : Quelle est la nature des séries numériques suivantes :

$$1)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{-n}+1} \qquad 2)\ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^n}{n!} \qquad 3)\ \sum_{n=0}^{+\infty} ne^{-n}$$

==

Réponse.

==

Exercice 2 (5 points) :

a) Calculer le rayon de convergence R de $\sum_{n=0}^{+\infty} (n^2+1)\, 2^{n+1} x^n$ et étudier sa convergence en $x = \pm R$.

b) On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n^2+1)\, 2^{n+1} x^n$ et $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$, $x \in \left]-R, R\right[$.

Montrer que $f(x) = 8x^2 g''(2x) + 4x g'(2x) + 2g(2x)$.

c) En déduire la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} (n^2+1)\, 2^{n+1} x^n$. *Indication*. Noter que $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$.

==

Réponse.

==

Exercice 3 (5 points) : On considère la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = e^x \sin x$.

a) Montrer que la dérivée $n^{ième}$ de f est $f^{(n)}(x) = \left(\sqrt{2}\right)^n e^x \sin\left(x + n\frac{\pi}{4}\right)$, $n \geq 1$.

Indication. Noter que $\sin a + \cos a = \sqrt{2}\sin\left(a + \frac{\pi}{4}\right)$.

b) En déduire le développement en séries entières de f et donner son domaine de convergence.

==

Réponse.

==

Exercice 4 (5 points) : Soit f la fonction 2π-périodique définie par

$$f(x) = \begin{cases} -2 & \text{si} \quad x \in \left]-\pi, 0\right], \\ 2 & \text{si} \quad x \in \left]0, \pi\right]. \end{cases}$$

a) Tracer le graphe de la fonction f pour $x \in [-3\pi, 3\pi]$.

b) Écrire la série de Fourier σf associée à f et étudier sa convergence sur $]-\pi, \pi[$.

c) En déduire la somme de la série numérique $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

d) En appliquant l'égalité de Parseval $\frac{a_0^2}{2} + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} (f(x))^2 \, dx$, calculer $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

==

Réponse.

U.S.T.H.B. 2012-2013 Semestre 1 **Math 3 : Séries**

Faculté de Mathématiques **$2^{\text{ème}}$ Lic, ST-GP, Section F**

Examen final - 13 janvier 2013. Durée : 90 minutes

Nom :.. **Matricule :**..

Prénom :.. **Groupe :**..

==

Exercice 1 (5 points) : Quelle est la nature des séries numériques suivantes :

$$1) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{-n}+1} \qquad 2) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^n}{n!} \qquad 3) \sum_{n=0}^{+\infty} ne^{-n}$$

==

Réponse.

1) On a $u_n = \dfrac{1}{2^{-n}+1}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2^{-n}+1} = 1 \neq 0$. La condition nécessaire de convergence $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ pour les séries numériques n'est pas satisfaite.

Alors la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{-n}+1}$ est divergente (grossièrement).

2) Le terme général $u_n = \dfrac{n^n}{n!}$ est strictement positif. En utilisant le critère de D'Alembert

$$l = \lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \left(u_{n+1} \cdot \frac{1}{u_n} \right) = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n} \right)$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)\, n!} \cdot \frac{n!}{n^n} \right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^n}{n^n} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^n = e \simeq 2,72 > 1.$$

Comme $l > 1$, alors la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^n}{n!}$ est divergente.

3) Le terme général $u_n = ne^{-n} > 0$ pour $n \geq 1$. En appliquant le critère de D'Alembert

$$l = \lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)\, e^{-(n+1)}}{ne^{-n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)\, e^{-1}}{n} = e^{-1} \simeq 0,37 < 1.$$

Comme $l < 1$, alors la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} ne^{-n}$ est convergente.

===

Exercice 2 (5 points) :

a) Calculer le rayon de convergence R de $\sum_{n=0}^{+\infty} (n^2+1)\, 2^{n+1} x^n$ et étudier sa convergence en $x = \pm R$.

b) On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n^2+1)\, 2^{n+1} x^n$ et $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$, $x \in\,]-R, R[$.

Montrer que $f(x) = 8x^2 g''(2x) + 4x g'(2x) + 2g(2x)$.

c) En déduire la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} (n^2+1)\, 2^{n+1} x^n$. *Indication.* Noter que $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \dfrac{1}{1-x}$.

===

Réponse.

a) On a $a_n = (n^2+1)\, 2^{n+1}$ et

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{\left((n+1)^2+1\right) 2^{n+1+1}}{(n^2+1)\, 2^{n+1}}\right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n^2+2n+2)\, 2}{(n^2+1)} = 2,$$

donc $R = \dfrac{1}{2}$.

Pour $x = R = \dfrac{1}{2}$, on a $\sum_{n=0}^{+\infty} (n^2+1)\, 2^{n+1} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} 2(n^2+1)$ qu'est divergente car

$$\lim_{n\to+\infty} 2\left(n^2+1\right) = +\infty \neq 0.$$

Pour $x = -R = -\dfrac{1}{2}$, on a $\sum_{n=0}^{+\infty} (n^2+1)\, 2^{n+1} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} 2(n^2+1)(-1)^n$ qu'est divergente car

$$\lim_{n\to+\infty} 2\left(n^2+1\right)(-1)^n \text{ n'existe pas.}$$

b) On a $g'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$, $g''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) x^{n-2}$. Alors

$$\begin{aligned}
8x^2 g''(2x) + 4x g'(2x) + 2g(2x) &= 8x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)(2x)^{n-2} + 4x \sum_{n=1}^{+\infty} n (2x)^{n-1} + 2\sum_{n=0}^{+\infty} (2x)^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)\, 2^{n+1} x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} n 2^{n+1} x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{n+1} x^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \left[n(n-1)\, 2^{n+1} x^n + n 2^{n+1} x^n + 2^{n+1} x^n\right].
\end{aligned}$$

En factorisant $2^{n+1} x^n$, il vient

$$\begin{aligned}
8x^2 g''(2x) + 4x g'(2x) + 2g(2x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} [n(n-1) + n + 1]\, 2^{n+1} x^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(n^2+1\right) 2^{n+1} x^n = f(x).
\end{aligned}$$

c) Comme $f(x) = 8x^2 g''(2x) + 4xg'(2x) + 2g(2x)$ et $g(x) = \dfrac{1}{1-x}$ alors,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(n^2+1\right)2^{n+1}x^n = f(x) &= 8x^2\left(\frac{1}{1-x}\right)''(2x) + 4x\left(\frac{1}{1-x}\right)'(2x) + \frac{2}{1-2x} \\ &= \\ &= 8x^2\frac{2}{(1-2x)^3} + 4x\frac{1}{(1-2x)^2} + \frac{2}{1-2x} \\ &= \frac{16x^2 + 4x(1-2x) + 2(1-2x)^2}{(1-2x)^3} \\ &= \frac{16x^2 - 4x + 2}{(1-x)^3}.\end{aligned}$$

==

Exercice 3 (5 points) : On considère la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = e^x \sin x$.

a) Montrer que la dérivée $n^{ième}$ de f est $f^{(n)}(x) = \left(\sqrt{2}\right)^n e^x \sin\left(x + n\frac{\pi}{4}\right)$, $n \geq 1$.

Indication. Noter que $\sin a + \cos a = \sqrt{2}\sin\left(a + \frac{\pi}{4}\right)$.

b) En déduire le développement en séries entières de f et donner son domaine de convergence.

==

Réponse.

a) Montrons par récurrence que $f^{(n)}(x) = \left(\sqrt{2}\right)^n e^x \sin\left(x + n\frac{\pi}{4}\right)$, $n \geq 1$.

Pour $n = 1$, on a $f'(x) = (e^x \sin x)' = (\cos x + \sin x)e^x = \sqrt{2}e^x \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

Supposons que $f^{(k)}(x) = \left(\sqrt{2}\right)^k e^x \sin\left(x + k\frac{\pi}{4}\right)$, $k = 1, 2, ...n$. On a alors

$$\begin{aligned}f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}\right)'(x) &= \left(\left(\sqrt{2}\right)^n e^x \sin\left(x + n\frac{\pi}{4}\right)\right)' \\ &= \left(\sqrt{2}\right)^n e^x\left[\cos\left(x + n\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(x + n\frac{\pi}{4}\right)\right] \\ &= \left(\sqrt{2}\right)^n e^x\sqrt{2}\sin\left(x + n\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) = \left(\sqrt{2}\right)^{n+1} e^x \sin\left(x + (n+1)\frac{\pi}{4}\right).\end{aligned}$$

D'après l'hypothèse de récurrence $f^{(n)}(x) = \left(\sqrt{2}\right)^n e^x \sin\left(x + n\frac{\pi}{4}\right)$, $n \geq 1$.

b) En utilisant la formule de Taylor $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$, il vient

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\left(\sqrt{2}\right)^n e^0 \sin\left(0 + n\frac{\pi}{4}\right)}{n!}x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\left(\sqrt{2}\right)^n \sin\left(n\frac{\pi}{4}\right)}{n!}x^n.$$

==

Exercice 4 (5 points) : Soit f la fonction 2π-périodique définie par

$$f(x) = \begin{cases} -2 & \text{si} \quad x \in \left]-\pi, 0\right], \\ 2 & \text{si} \quad x \in \left]0, \pi\right]. \end{cases}$$

a) Tracer le graphe de la fonction f pour $x \in [-3\pi, 3\pi]$.

b) Écrire la série de Fourier σf associée à f et étudier sa convergence sur $\left]-\pi, \pi\right[$.

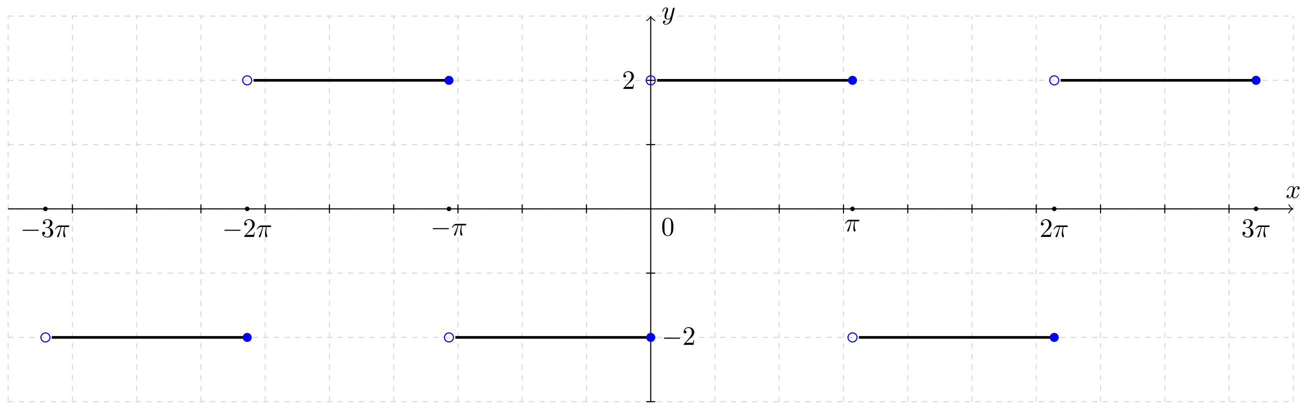
c) En déduire la somme de la série numérique $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

d) En appliquant l'égalité de Parseval $\displaystyle\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x))^2 \, dx$, calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

==

Réponse.

a)



b) La fonction 2π-périodique f est impaire car $f(-x) = -2 = -f(x)$, $x \in \left]0, \pi\right[$.

Alors les coefficients de Fourier sont donnés par

$$a_0 = a_n = 0, \;\; n \geq 1$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx) \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} 2 \sin(nx) \, dx = \left[\frac{-4}{\pi n} \cos(nx) \right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{4(1 - \cos(n\pi))}{\pi n} = \frac{4(1 - (-1)^n)}{\pi n}.$$

On remarque que $b_{2n} = 0$ et $b_{2n+1} = \dfrac{8}{\pi(2n+1)}$. La série de Fourier σf associée à f est

$$\sigma f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)] = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(nx)$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} b_{2n} \sin(2nx) + \sum_{n=0}^{+\infty} b_{2n+1} \sin((2n+1)x).$$

Comme $b_{2n}=0$, alors

$$\sigma f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} b_{2n+1}\sin((2n+1)x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{8}{\pi(2n+1)}\sin((2n+1)x).$$

Le seul point de discontinuité sur $]-\pi,\pi[$ est $x=0$ et on a $f(0+0)=2$, $f(0-0)=-2$.

La fonction f est partout dérivable sur $]-\pi,\pi[$ sauf en $x=0$. En ce point on a :

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0-0)}{x-0}=0 \text{ et } \lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0+0)}{x-0}=0.$$

La fonction f vérifie les conditions de Dirichlet, donc sa série de Fourier associée est convergente. De plus

$$\sigma f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{8}{\pi(2n+1)}\sin((2n+1)x)=\begin{cases}-2 & \text{si} \quad x\in\left]-\pi,0\right[,\\ 0 & \text{si} \quad x=0,\\ 2 & \text{si} \quad x\in\left]0,\pi\right[.\end{cases}$$

c) Pour $x=\frac{\pi}{2}$, on a $\sigma f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{8}{\pi(2n+1)}\sin\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right)=2.$

Comme $\sin\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right)=(-1)^n$, il vient

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{8(-1)^n}{\pi(2n+1)}=2.$$

On en déduit

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=\frac{\pi}{4}.$$

d) En appliquant l'égalité de Parseval $\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n^2+b_n^2)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x))^2\,dx$, il vient

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(b_{2n+1})^2=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x))^2\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}4dx=\frac{1}{\pi}(8\pi)=8.$$

en remplaçant b_{2n+1} par sa valeur, on obtient

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{64}{\pi^2(2n+1)^2}=8,$$

d'où

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}.$$