Les Integrale Doubles.

$$\int_a^b \left[\int_c^d f(x.y) \right] dy\, dx = \int_c^d \left[\left[\int_a^b f(x.y) \right] dx \right] dy.$$

Par changement de variable :

$$\iint_D f(x.y)\, dx\, dy \quad \text{avec} \quad \begin{array}{l} x = \varphi(u.v) \\ y = \psi(u.v) \end{array}$$

$$\iint_D f(x.y)\, dx\, dy = \iint_{D'} f(\varphi, \psi) . J . du . dv.$$

ou $J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \varphi}{\partial u} & \dfrac{\partial \varphi}{\partial v} \\ \dfrac{\partial \psi}{\partial u} & \dfrac{\partial \psi}{\partial v} \end{vmatrix}$

Les coordonnées polaires :

$$\begin{cases} x = r \cos\theta = \varphi(r.\theta) \\ y = r \sin\theta = \psi(r.\theta) \end{cases}$$

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\sin\theta \end{vmatrix} = r$$

Integralles triples!

$z = x^2 + y^2$ Paraboloïde 

$z\ z^2 = x^2 + y^2$ Cône 

on a :

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

$$\begin{cases} x = f(u, v, w) \\ y = t(u, v, w) \quad \ldots\ (1) \\ z = h(u, v, w) \end{cases}$$

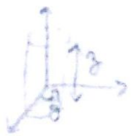
Ω' transformé du Ω par (1):

$$\iiint_{\Omega'} f(f, t, h)\, |J|\, du . dv . dw .$$

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial h} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial h} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial h} \end{vmatrix}$$

1er cas : Coordonnés Cylindriques :

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = h \end{cases}$$



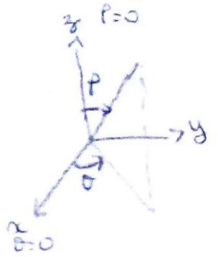
$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial h} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial h} \\ \frac{\partial z}{\partial h} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial h} \end{vmatrix} \qquad |J| = r$$

$$J = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

$$J = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r\cos^2\theta + r^2\sin\theta = r$$

2ème cas : Coordonné sphériques

$$\begin{cases} x = r\cos\theta\sin\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\varphi \end{cases}$$



$0 \leq r \leq \infty$
$0 \leq \theta \leq 2\pi$
$0 \leq \varphi \leq \pi$

$J = \Big|$

Equation Differentielles

Eqt Diff ordre 1 :

La Forme : $y' = f(x, y)$

f est continue et $y' = \frac{dy}{dx}$

Eq Diff à Variable séparables (séparées) :

$y' = f(x, y)$ est eq diff séparable si

$f(x, y) = h(x) . g(y)$

Eq Diff Homogéne :

a la forme : $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$

Methode de résolution :

en pose $t = \frac{y}{x} \Rightarrow y = t . x$

$y' = t' . x + x' t$

$y' = t' x + t$

$y' = f(t) = f\left(\frac{y}{x}\right)$

$t' = \frac{f(t) - t}{x}$

$t' = \left(f(t) - t\right) . \frac{1}{x}$

Eq Diff lineaire du 1er ordre :

de la forme : $y' + a(x)\, y + b(x) = 0$

$y' + (a(x) y = b(x)$

Methode de résolution :

$y_G = y_H + y_P$

général → y_G ; Homogéne → y_H ; particuliére → y_P

1ere étape : on considère $b(x) = 0$:

$y' + a(x) y = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -a(x) y \Rightarrow \frac{dy}{y} = -a(x)\, dx$

$\ln|y| = -\int a(x) . dx + C_1$

$|y| = \pm e^{C_1}\, e^{-\int a(x) . dx} \Rightarrow \boxed{y_H = K . e^{-\int a(x) . dx}}$ $K = e^c \in \mathbb{R}$.

Pour trouver y_p on :

$2^{ème}$ étape :

on a : $y_H = K e^{-\int a(x).dx}$

$y_H = K\ y(x)$ en posant $y(x) = e^{-\int a(x).dx}$

on cherche la solution y_p :

$y_p = K(x) \cdot y(x)$ ou $K(x)$ est une fct a determiner :

. $y_p' + a(x) y_p = b(x)$.

$[K(x)y(x)]' + a(x)\ K(x)\ y(x) = b(x)$

$K'(x)\ y(x) + y'(x) K(x) + a(x) K(x)\ \cancel{a}y(x) = b(x)$ ... (1)

nous avions : $y(x) = e^{-\int a(x).dx} \Rightarrow y'(x) = -a(x) e^{-\int a(x).dx}$

en remplace dans (1) et on obtient :

$K'(x)\ y(x) = b(x) \Rightarrow K'(x) = \frac{b(x)}{y(x)}$

$K(x) = \int \frac{b(x)}{y(x)} \cdot dx$

Equation de Bernoli :

$y' + a(x)y + b(x)\ y^n = 0$

Methode derésolution :

$\frac{y'}{y^n} + \frac{a(x)\ y}{y^n} + \frac{b(x)\ y^n}{y^n} = 0$

$\frac{y'}{y^n} + a(x)\ y^{(1-n)} + b(x) = 0 \Rightarrow \frac{y'}{y^n} + \frac{a(x)}{y^{(n-1)}} + b(x) = 0$

en pose $z = y^{-(n-1)} \Rightarrow z = \frac{1}{y^{n-1}}$

$z' = -(n-1)\ y^{-n} \cdot y' \Rightarrow y^{-n} \cdot y' = \frac{z'}{-(n-1)}$

$\Rightarrow \frac{y'}{y^n} = \frac{z'}{-(n-1)} \Rightarrow \frac{z'}{-(n-1)} + a(x) z + b(x) = 0$

Eq Diff a Coeff Cst :

$$y^n + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0 \quad \dots (1)$$

On supose : $y = e^{\alpha x}$, $y' = \alpha e^{\alpha x}$, $y'' = \alpha^2 e^{\alpha x}$, $y^n = \alpha^n e^{\alpha x}$

en remplace dans (1) :

$$\alpha^n e^{\alpha x} + a_1 \alpha^{(n-1)} e^{\alpha x} + \dots + a_n e^{\alpha x} = 0$$

$$\left[\alpha^n + a_1 \alpha^{(n-1)} + \dots + a_n\right] e^{\alpha x} = 0$$

$e^{\alpha x} \neq 0$ donc $\alpha^n + a_1 \alpha^{n-1} + \dots + a_n = 0$

1^er cas : $\alpha_i \neq \alpha_j$

Alors $y = C_1 e^{\alpha_1 x} + C_2 e^{\alpha_2 x} + \dots + C_n e^{\alpha_n x}$

2^eme cas : $m < n$ (racine multiple)

α_1, α_m et y_1, y_m l'ordre des rat multipes.

$n = y_1 + y_2 + \dots y_m$

$y_G = e^{m x} + x e^{\alpha m x} + \dots + x^{y_m - 1} e^{\alpha^{m-1} x}$

Eq Diff a d'Ordre 2 :

$$y'' + a y' + b y = 0$$

$\alpha^2 + a\alpha + b = 0$ (polynome)

$\Delta = a^2 - 4b$

1^er cas : $\Delta > 0$

$\alpha_1 \neq \alpha_2$

$y = C_1 e^{\alpha_1 x} + C_2 e^{\alpha_2 x}$ $\qquad \alpha_1 = \frac{-a - \sqrt{\Delta}}{2}$

$\alpha_2 = \frac{-a + \sqrt{\Delta}}{2}$

2^em cas : $\alpha_1 = \alpha_2$ $(\Delta = 0)$

$y = C_1 e^{\alpha_1 x} + C_2 x e^{\alpha_1 x}$ $\qquad \alpha_1 = \frac{-a}{2}$

3em cas : $\Delta < 0$ $\quad \alpha_1 = \bar{\alpha}_2 = \alpha + i\beta$

$y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$

Les Serie :

Critére d'Alembert :

$$\lim_{n \to \infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = L$$

Pour $\begin{cases} L < 1 & \text{laserie converge} \\ L > 1 & \text{la serie diverge} \\ L = 0 & \text{On peut riendire.} \end{cases}$

Critére de Cauchy :

si $\lim \sqrt[n]{U_n} = \ell$

Pour $\begin{cases} \ell < 1 \Rightarrow \sum U_n & \text{converge} \\ \ell > 1 \Rightarrow \quad " & \text{diverge.} \\ \ell = 0 \Rightarrow & \text{On dit rien.} \end{cases}$

Serie de Reimann :

$$\sum \frac{1}{n^\alpha}$$

$\begin{cases} \text{si } \alpha > 1 & \text{elle converge} \\ \text{si } \alpha = 1 & \text{elle diverge. (serie ABEL } \frac{1}{n}) \\ \text{si } \alpha < 1 & \quad " \quad " \end{cases}$

Le critére de "Leibinz"

$$\sum_{n \geq 0} (-1)^n a_n .$$

$a_n \geq 0 \quad \forall n \geq n_0$ converge

$a_{n+1} \leq a_n \quad \forall n \geq n_0$ ~~déc~~

$\lim_{n \to \infty} a_n = 0$

* $y_p = Q(x) e^{\alpha x}$

si α n'est ~~polynôme~~ pas racine du polynome

* $y_p = x^r Q(x) e^{\alpha x}$

si α est une racine du polynome d'ordre r

$$y'' + Ay' + By = F(x)$$

si $F(x) = k$

$$\begin{cases} y_p = k & \text{si } B \neq 0 \\ y_p = kx & \text{si } B = 0 \text{ et } A \neq 0 \\ y_p = kx^2 & \text{si } B = 0 = A \end{cases}$$

$$y'' + 3y' = 3$$

$$F(x) = 3$$

$$\boxed{y_p = kx} \Rightarrow y_p = x$$

$$\boxed{y'_p = k} \qquad y''_p = 0$$

$$3y'_p = 3$$

$$\boxed{y'_p = 1}$$

$$\boxed{\begin{aligned} Y_G &= Y_H + Y_P \\ Y_G &= C_1 + C_2 e^{-3x} + x \end{aligned}}$$

- Eq Diff linéaire du 1^e ordre :

(1)

$y' + a(x)y + b(x) = 0$ / $y' + a(x)y = b(x)$.

• Méthode de résolution :

$y_G = y_H + y_P$

- On a : $y' + a(x)y + b(x) = 0$

1ère étape : Trouver la solution Homogène (y_H) :

- On considère : $b(x) = 0$

$y' + a(x)y = 0$

$y' = -a(x)y$

$\frac{dy}{dx} = -a(x)y$

$\frac{dy}{y} = -a(x)\,dx$

- On intègre :

$\ln|y| = -\int a(x).dx + C_1$

- On entre (e) :

$|y| = e^{-\int a(x).dx + C_1}$

$|y| = e^{-\int a(x)dx} . e^{C_1}$

- On aura :

$y_H = e^{-\int a(x)dx} . K$ avec : $K = e^{C_1}$

Solution Homogène.

2° étape : Trouver la solution particulière (y_p) :

- On a : $y_H = k \cdot e^{-\int a(x)\,dx}$

$y_H = k \cdot y(x)$ $\quad \left(y(x) = e^{-\int a(x)\,dx} \right)$

- On cherche la solution (y_p) : $\left(y_p = k(x) \cdot y(x) \right)$ ...... (2)
- On a : $k(x)$: une fonction à déterminer !
- On a l'équation (1), on remplace y par y_p / y' par y'_p

$y'_p + a(x)\, y_p = b(x)$ ...... (3)

- On remplace (2) dans (3) :

$\left(k(x) \cdot y(x) \right)' + a(x) \left(k(x) \cdot y(x) \right) = b(x)$.

$k(x)' \cdot y(x) + k(x) \cdot y(x)' + a(x) \cdot k(x) \cdot y(x) = b(x)$ ...... (4).

- On a : $\left(y(x) = e^{-\int a(x)\,dx} \Rightarrow y'(x) = -a(x) \cdot e^{-\int a(x)\,dx} \right)$ ... (5)

- On remplace (5) dans (4) :

$k'(x) \cdot y(x) = b(x)$

$k'(x) = \dfrac{b(x)}{y(x)}$

$k'(x) = \int \dfrac{b(x)}{y(x)}$

Scanned by CamScanner