Université Dr. Yahia Farès de Médéa
Faculté des Sciences et de la Technologie
Département de Génie Eléctrique & Informatique

Année universitaire 2015-2016
Matière : Maths 3
17/01/2016

Epreuve de Fin de Semestre 1

Exercice 1 : (5 points 2,5+2,5)

Calculer les intégrales doubles suivantes :

1. $\iint\limits_D \frac{1}{(1+x+y)^2}dxdy$ où $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \text{ avec } x\geq 0,\ y\geq 0,\ x+y\leq 1\right\}$.

2. $\iint\limits_D \sqrt{1+x^2+y^2}dxdy$ où $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \text{ avec } x\geq 0,\ -x\leq y\leq x,\ 1\leq x^2+y^2\leq 4\right\}$.

Exercice 2 : (5 points 2+2+1)

Soit f la fonction définie sur $[2,\ +\infty[$ par $f(x)=\frac{1}{x(\ln x)^2}$.

1. En utilisant le définition, montrer que l'intégrale $\int\limits_2^{+\infty} f(x)\,dx$ est convergente.
2. Donner le tableau de variations de f.
3. En déduire la nature de la série $\sum\limits_{n\geq 2}\frac{1}{n\ln^2 n}$.

Exercice 3 : (5 points 3+2)

1. Etudier la nature de l'intégrale impropre $\int\limits_1^{+\infty}\frac{1}{x^\alpha}\sin(\frac{1}{x})dx$, $\alpha\in\mathbb{R}$.
2. Résoudre l'équation différentielle : $\left(x^2+1\right)y'=y+1$.

Exercice 4 : (5 points 2,5+2,5)

Soit $(f_n)_{n\geq 1}$la suite de fonctions définie par $f_n(x)=\frac{x}{x+n}$.

1. a) Montrer que $(f_n)_{n\geq 1}$ converge simplement sur $[0,\ 1]$.
   b) Montrer que $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément sur $[0,\ 1]$.
2. Etudier la convergence simple et uniforme de $(f_n)_{n\geq 1}$ sur $[1,\ +\infty[$.

Université Dr. Yahia Farès de Médéa
Faculté des Sciences et de la Technologie
Département de Génie Eléctrique & Informatique

Année universitaire 2015-20016
Matière : Maths 3
17/01/2016

Corrigé de l' Epreuve de Fin de Semestre 1

Exercice 1 : (5 points 2,5+2,5)

1. $\iint\limits_D \dfrac{1}{(1+x+y)^2}dxdy$ où $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \text{ avec } x\geq 0,\ y\geq 0,\ x+y\leq 1\right\}$
   $\iint\limits_D \dfrac{1}{(1+x+y)^2}dxdy=\int\limits_0^1\left(\int\limits_0^{1-x}\dfrac{dy}{(1+x+y)^2}\right)dx$ **(0,5 point).** On a $\int\limits_0^{1-x}\dfrac{dy}{(1+x+y)^2}=\left[\dfrac{-1}{1+x+y}\right]_{y=0}^{y=1-x}$ $=\frac{-1}{1+x+1-x}+\frac{1}{1+x}$ **(1 point)**. Par suite, $\iint\limits_D \dfrac{1}{(1+x+y)^2}dxdy=\int\limits_0^1\left(\frac{-1}{1+x+1-x}+\frac{1}{1+x}\right)dx=$ $\left[\dfrac{-1}{2}x+\ln|1+x|\right]_0^1=-\frac{1}{2}+\ln 2$ **(1 point)**.
2. $\iint\limits_D \sqrt{1+x^2+y^2}dxdy$ où $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \text{ avec } x\geq 0,\ -x\leq y\leq x,\ 1\leq x^2+y^2\leq 4\right\}$.
   On passe aux coordonnées polaires. On pose $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta\Rightarrow r=\sqrt{x^2+y^2}$ **(0,5 point)**.
   $\iint\limits_D \sqrt{1+x^2+y^2}dxdy=\iint\limits_{D'}\sqrt{1+r^2}rdrd\theta=\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}(\int\limits_1^2\sqrt{1+r^2}rdr)d\theta$ **(0,5 point)**. On a $\int\limits_1^2\sqrt{1+r^2}rdr=$ $\left[\frac{1}{3}\left(1+r^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]_{r=1}^{r=2}=\frac{5\sqrt{5}-2\sqrt{2}}{3}$ **(1 point)**. Par suite, $\iint\limits_{D'}\sqrt{1+r^2}rdrd\theta=\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{5\sqrt{5}-2\sqrt{2}}{3}d\theta=\frac{\pi}{6}\left(5\sqrt{5}-2\sqrt{2}\right)$ **(0,5 point)**.

Exercice 2 : (5 points 2+2+1)

Soit f la fonction définie sur $[2,\ +\infty[$ par $f(x)=\dfrac{1}{x(\ln x)^2}$

1. $\int\limits_2^{+\infty}f(x)\,dx=\int\limits_2^{+\infty}\dfrac{1}{x(\ln x)^2}dx$. Soit $t>2$. $\int\limits_2^t\dfrac{1}{x(\ln x)^2}dx=\left[\dfrac{-1}{\ln x}\right]_2^t=\dfrac{-1}{\ln t}+\dfrac{1}{\ln 2}$ **(1 point)**.
   On a donc $\lim\limits_{t\to+\infty}\int\limits_2^t\dfrac{1}{x(\ln x)^2}dx=\lim\limits_{t\to+\infty}\left(\dfrac{-1}{\ln t}+\dfrac{1}{\ln 2}\right)=\dfrac{1}{\ln 2}$ **(0,5 point)** et donc l'intégrale $\int\limits_2^{+\infty}\dfrac{1}{x(\ln x)^2}dx$ est convergente **(0,5 point)**.
2. f est dérivable sur $[2,\ +\infty[$ et $f'(x)=\dfrac{-(\ln x)^2-2\ln x}{x^2(\ln x)^4}=\dfrac{-(\ln x+2)}{x^2(\ln x)^3}$ **(1 point)**. On voit donc que f est décroissante sur $[2,\ +\infty[$ et on a $\lim\limits_{t\to+\infty}f(x)=0$ **(1 point)**.
3. On a donc grâce aux questions précédentes que f est une fonction continue, décroissante et positive

sur $[2, +\infty[$. Ainsi d'après le théorème de comparaison séries-intégrales, la série $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n\ln^2 n}$ est de même nature que l'intégrale $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^2}dx$ **(0,5 point)**. Par conséquent, la série $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n\ln^2 n}$ est convergente **(0,5 point)**.

Exercice 3 : **(5 points 3+2)**

1. Soit l'intégrale impropre $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\sin(\frac{1}{x})dx$, $\alpha \in \mathbb{R}$. On a $\sin(\frac{1}{x}) \sim_{+\infty} \frac{1}{x}$. Ceci implique que $\frac{1}{x^\alpha}\sin(\frac{1}{x}) \sim_{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha+1}}$ **(1 point)**. On distingue deux cas :
   Cas 1 : $\alpha+1>1$. Ceci implique que $\alpha>0$. Dans ce cas, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}dx$ est convergente. D'après la critère d'équivalence, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\sin(\frac{1}{x})dx$ est convergente **(1 point)**.
   Cas 2 : $\alpha+1<1$. Ceci implique que $\alpha<0$. Dans ce cas, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}dx$ est divergente. D'après la critère d'équivalence, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\sin(\frac{1}{x})dx$ est divergente **(1 point)**.
2. Soit l'équation différentielle : $\left(x^2+1\right)y' = y+1$. C'est une équation différentielle du premier ordre à variables séparables. On peut mêttre l'équation proposée sous la forme $\frac{y'(x)}{y(x)+1} = \frac{1}{x^2+1}$ **(0,5 point)**, En primitivant les deux membres, on obtient $\ln|y(x)+1| = \arctan x + c_1$ **(1 point)**. Ceci implique que $y(x) = \pm e^{\arctan x + c_1} - 1 = \pm e^{c_1}.e^{\arctan x} - 1$. On pose $\pm e^{c_1} = c$, on obtient $y(x) = ce^{\arctan x} - 1$ **(0,5 point)**.

Exercice 4 : **(5 points 2,5+2,5)**

Soit $(f_n)_{n\geq 1}$la suite de fonctions définie par $f_n(x) = \frac{x}{x+n}$.

1. a) **La convergence simple sur** $[0, 1]$: Pour $x \in [0, 1]$ fixé, on a $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{x}{x+n} = 0$ **(0,5 point)**. D'où, la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ converge simplement sur $[0, 1]$ vers la fonction nulle **(0,5 point)**.
   b) **La convergence uniforme sur** $[0, 1]$: Pour tout $x \in [0, 1]$, on a $|f_n(x) - 0| = \left|\frac{x}{x+n} - 0\right| \leq \frac{1}{x+n} \leq \frac{1}{n}$. On déduit que $0 \leq \lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in[0, 1]} \left|\frac{x}{x+n} - 0\right| \leq \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ **(0,5 point)**. Par conséquent $\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in[0, 1]} |f_n(x) - 0| = \lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in[0, 1]} \left|\frac{x}{x+n} - 0\right| = 0$ **(0,5 point)**. D'où, la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément sur $[0, 1]$ **(0,5 point).**
2. **La convergence simple sur** $[1, +\infty[$: Pour tout $x \in [1, +\infty[$, $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{x}{x+n} = 0$ **(0,5 point)**. D'où, la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ converge simplement sur $[1, +\infty[$ vers la fonction nulle **(0,5 point)**.
   La convergence uniforme sur $[1, +\infty[$: Soit $n_0 \in \mathbb{N}^*$. $n_0 \geq 1$ donc $\sup_{x\in[1, +\infty[} |f_n(x) - 0| \geq$

$\sup_{x\in[1,\ +\infty[} |f_{n_0}(x) - 0| \geq |f_{n_0}(n_0) - 0| = \dfrac{1}{2}$ **(0,5 point)**. On a donc $\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in[1,\ +\infty[} |f_n(x) - 0| \neq 0$ **(0,5 point)**. Par conséquent, la convergence n'est pas uniforme sur $[1, \ +\infty[$ **(0,5 point)**.