الأستاذ : شايبي أمين

ملخص وتمارين في الموافقات

تعريف : n عدد طبيعي غير معدوم . القول أن عددين a و b متوافقان بترديد n يعني أن للعددين a و b نفس الباقي في القسمة الإقليدية على n, ونكتب $a \equiv b\,[n]$ ونقرأ a يوافق b بترديد n.

مثال : $16 \equiv 9\,[7]$ ذلك لأن للعددين 16 و 9 نفس الباقي في القسمة على 7 وهو 2 .

مبرهنة : $a \equiv b\,[n]$ $\Leftrightarrow$ $a-b$ مضاعف لـ n $\Leftrightarrow$ $a-b \equiv 0\,[n]$ $\Leftrightarrow$

ملاحظة1 : $a-b \equiv 0\,[n]$ تكافيء $a-b$ مضاعف لـ n معناه يوجد عدد صحيح k حيث $a-b = k.n$

مثال : $16 \equiv 9\,[7]$ ذلك لأن $16-9$ مضاعف لـ 7 أي $16-9 \equiv 0\,[7]$

ملاحظة2 : إذا كان $a \equiv r\,[b]$ نقول عن r أنه باقي قسمة a على n في حالة إذا كان $0 \le r \prec b$ ..

خواص الموافقات في Z

n عدد طبيعي غير معدوم. a,b,c أعداد صحيحة , لدينا الخواص التالية

① $a \equiv a\,[n]$.

② $a \equiv b\,[n]$ فإن $b \equiv a\,[n]$.

③ $\begin{cases} a \equiv b\,[n] \\ b \equiv c\,[n] \end{cases}$ فإن $a \equiv c\,[n]$ (خاصية التعدي) .

④ $\begin{cases} a \equiv b\,[n] \\ c \equiv d\,[n] \end{cases}$ فإن $a+c \equiv b+d\,[n]$ (خاصية الجمع) .

⑤ $\begin{cases} a \equiv b\,[n] \\ c \equiv d\,[n] \end{cases}$ فإن $a.c \equiv b.d\,[n]$ (خاصية الضرب) .

⑥ $a \equiv b\,[n]$ فإن $a^p \equiv b^p\,[n]$ (خاصية الرفع إلى القوى) .

تمارين تدريبية :

تمرين 1 :لتكن الأعداد الصحيحة: $a = 255$, $b = 837$, $c = 3691$.

① عين باقي قسمة كل من الأعداد a , b , c على 11 .

② باستعمال خواص الموافقات عين باقي قسمة كل من $a+b$, $a \times b$, $a+b+c$, a^2 , $a \times b \times c$ على العدد 11 .

الحل:

① $a = 23 \times 11 + 2$ أي $a \equiv 2\,[11]$ (الباقي هو 2)

$b = 76 \times (11) + 1$ أي $b \equiv 1\,[11]$ (الباقي هو 1)

$c = 335 \times (11) + 6$ أي $c \equiv 6\,[11]$ (الباقي هو 6)

②* **تعيين باقي قسمة $a+b$ على 11 :**

لدينا $\begin{cases} a \equiv 2\,[11] \\ b \equiv 1\,[11] \end{cases}$ ومنه فإن $a+b \equiv 3\,[11]$ (الباقي هو 3)

- **تعيين باقي قسمة $a \times b$ على 11 :**

لدينا $\begin{cases} a \equiv 2\,[11] \\ b \equiv 1\,[11] \end{cases}$ ومنه فإن $a \times b \equiv 2\,[11]$ (خاصية الضرب)

- **تعيين باقي قسمة $a+b+c$ على 11 :**

لدينا $\begin{cases} a \equiv 2\,[11] \\ b \equiv 1\,[11] \\ c \equiv 6\,[11] \end{cases}$ ومنه فإن $a+b+c \equiv 9\,[11]$ (خاصية الجمع)

- **تعيين باقي قسمة a^2 على 11 :**

لدينا $a \equiv 2\,[11]$ ومنه فإن $a^2 \equiv 2^2\,[11]$ أي $a^2 \equiv 4\,[11]$

- **تعيين باقي قسمة $a \times b \times c$ على 11 :**

لدينا $\begin{cases} a \equiv 2\,[11] \\ b \equiv 1\,[11] \\ c \equiv 6\,[11] \end{cases}$ ومنه $a \times b \times c \equiv 12\,[11]$ (12 ليس باقي لانه أكبر من العدد 11) .

بما أن $\begin{cases} a \times b \times c \equiv 12\,[11] \\ \text{و} \\ 12 \equiv 1\,[11] \end{cases}$ فإن $a \times b \times c \equiv 1\,[11]$ (بالتعدي)

تمرين 2 a و b عددان صحيحان حيث $a \equiv 3\,[5]$ و $b \equiv 4\,[5]$

① بين أن العدد $2a+b$ يقبل القسمة على 5 .

② عين باقي قسمة العدد $2a^2+b^2$ على 5 .

③ تحقق أن $b \equiv -1\,[5]$ واستنتج باقي قسمة b^{2015} و b^{1436} على 5.

الحل :

① **لإثبات أن العدد $2a+b$ يقبل القسمة على 5 يكفي إثبات أن** $2a+b \equiv 0\,[5]$.

لدينا $\begin{cases} a \equiv 3\,[5] \\ b \equiv 4\,[5] \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} 2a \equiv 6\,[5] \\ b \equiv 4\,[5] \end{cases}$ وبالتالي $2a+b \equiv 10\,[5]$

وبما أن $10 \equiv 0\,[5]$ فإن $2a+b \equiv 0\,[5]$ (بالتعدي)

أي $2a+b$ يقبل القسمة على 5 .

② **لتعيين باقي قسمة العدد $2a^2+b^2$ على 5 يكفي إيجاد العدد r حيث** $2a^2+b^2 \equiv r\,[5]$

$\begin{cases} a \equiv 3\,[5] \\ b \equiv 4\,[5] \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} a^2 \equiv 9\,[5] \\ b^2 \equiv 16\,[5] \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} 2a^2 \equiv 18\,[5] \\ b^2 \equiv 16\,[5] \end{cases}$ وبالتالي

$2a^2+b^2 \equiv 34\,[5]$ وبما أن $34 \equiv 4\,[5]$ فإن $2a^2+b^2 \equiv 4\,[5]$

③ **التحقق أن $b \equiv -1\,[5]$:**

ط1/ لدينا $\begin{cases} b \equiv 4\,[5] \\ 4 \equiv -1\,[5] \end{cases}$ ومنه $b \equiv -1\,[5]$ (خاصية التعدي)

ط2/ $\begin{cases} b \equiv 4\,[5] \\ 0 \equiv 5\,[5] \end{cases}$ ومنه $b - 0 \equiv 4 - 5\,[5]$ أي $b \equiv -1\,[5]$

• استنتاج باقي قسمة b^{2015} و b^{1436} على 5 :

تذكير :

$(-1)^n=-1$ إذا كان n زوجي , $(-1)^n=1$ إذا كان n فردي

لدينا $b\equiv -1[5]$ وبالتالي $b^{2015}\equiv(-1)^{2015}[5]$ ومنه

$b^{2015}\equiv -1[5]$ وبما أن $-1\equiv 4[5]$ فإن $b^{2015}\equiv 4[5]$

$b^{1436}\equiv(-1)^{1436}[5]$ ومنه $b^{1436}\equiv 1[5]$

تطبيق 1

①عين حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعددين 3^n و 7^n على11 .

② استنتج باقي قسمة الاعداد 3^{2016} , 9^{2016} , 7^{2017} على 11 .

③ ماهو باقي قسمة العدد $13.3^{2016}+26.7^{2017}-9^{2016}$ على 11 ؟

الحل :

① تعيين حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العدد 3^n على 11 :

$3^0\equiv1[11]$, $3^1\equiv3[11]$, $3^2\equiv9[11]$, $3^3\equiv5[11]$,

$3^4\equiv4[11]$, $3^5\equiv1[11]$ (الدور هو 5).

من أجل كل عدد صحيح k فإن $3^{5k}\equiv1[11]$

نحصل على البواقي كما في الجدول :

قيم n	$5k$	$5k+1$	$5k+2$	$5k+3$	$5k+4$	
$3^n\equiv$	1	3	9	5	4	$[11]$

• تعيين باقي قسمة العدد 7^n على 11 :

$7^0\equiv1[11]$, $7^1\equiv7[11]$, $7^2\equiv5[11]$, $7^3\equiv2[11]$,

$7^4\equiv3[11]$, $7^5\equiv1[11]$. ومنه فإن الدور هو 5

من أجل كل عدد صحيح k فإن $7^{5k}\equiv1[11]$

قيم n	$5k$	$5k+1$	$5k+2$	$5k+3$	$5k+4$	
$7^n\equiv$	1	7	5	2	3	$[11]$

② استنتاج باقي قسمة الاعداد 3^{2016} , 9^{2016} , 7^{2017} على 11 :

• لدينا $2016=5.(403)+1$ أي $3^{2016}=3^{5.(403)+1}$

• ومنه نستنتج أن $3^{2016}\equiv7[11]$

• لدينا

$$9^{2016}=(3^2)^{2016}=(3^2)^{5.(403)+1}=3^{2.[5.(403)+1]}=3^{5.(2.403)+2}$$

• ومنه نستنتج أن $9^{2016}\equiv5[11]$

Tech-Serrar Abdelhamid

تمارين تدريبية لشعبة تقني رياضي + رياضي

تمرين 1 :

①أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 4^n على 7 .

② عين باقي قسمة كل من 4^{2015} و 4^{1437} على 7 .

③ استنتج أن $53\times4^{2015}+5\times4^{1437}\equiv0[7]$.

حل التمرين 1 :

①دراسة حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 4^n على 7 :

$4^0\equiv1[7]$, $4^1\equiv4[7]$, $4^2\equiv2[7]$, $4^3\equiv1[7]$ (الدور هو 3)

ومنه من أجل كل عدد صحيح k لدينا :

$4^{3k}\equiv1[7]$, $4^{3k+1}\equiv4[7]$, $4^{3k+2}\equiv2[7]$.

ومنه جدول البواقي كما يلي:

قيم n	$3k$	$3k+1$	$3k+2$	
$4^n\equiv$	1	4	2	$[7]$

② تعيين باقي قسمة كل من 4^{2015} و 4^{1437} على 7 :

لدينا $2015=3.(671)+2$ ومنه $4^{2015}=4^{3.(671)+2}$

نستنتج أن $4^{2015}\equiv2[7]$.

• لدينا $1437=3.(479)$ ومنه $4^{1437}=4^{3.(479)}$

نستنتج أن $4^{1437}\equiv1[7]$.

③ استنتاج أن $53\times4^{2015}+5\times4^{1437}+8\equiv0[7]$:

بما أن $53\equiv4[7]$, $5\equiv5[7]$ و $8\equiv1[7]$ فإن :

$53\times4^{2015}+5\times4^{1437}+8\equiv4\times2+5\times1+1[7]$

ومنه $53\times4^{2015}+5\times4^{1437}+8\equiv14[7]$

إذن $53\times4^{2015}+5\times4^{1437}+8\equiv0[7]$

تمرين 2 :

1. عين تبعا لقيم العدد الطبيعي n باقي قسمة 3^n على 7.

2.عين باقي قسمة $3^{1999}+10^{1418}+9^{3n+2}$ على 7.

حل التمرين 2

① تعيين تبعا لقيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة 3^n على 7 :

$3^0\equiv1[7]$, $3^1\equiv3[7]$, $3^2\equiv2[7]$, $3^3\equiv6[7]$,

$3^4\equiv4[7]$,

$3^5\equiv5[7]$, $3^6\equiv1[7]$.

ومنه من أجل كل عدد صحيح k لدينا

$3^{6k}\equiv1[7]$, $3^{6k+1}\equiv3[7]$, $3^{6k+2}\equiv2[7]$, $3^{6k+3}\equiv6[7]$,

$3^{6k+4}\equiv4[7]$, $3^{6k+5}\equiv5[7]$.

② تعيين باقي قسمة $3^{1999}+10^{1418}+9^{3n+2}$ على 7 :

لدينا $3^{1999}=3^{6.(333)+1}$ ومنه $3^{1999}\equiv3[7]$ .....(1)

$10\equiv3[7]$ ومنه $10^{1418}\equiv3^{1418}[7]$ إذن

$10^{1418} \equiv 3^{6.(236)+2}[7]$

ومنه فإن $10^{1418} \equiv 2[7]$ ......(2)

ولدينا $9^{3n+2} = \left(3^2\right)^{3n+2} = 3^{6n+4}$ ومنه $9^{3n+2} \equiv 4[7]$ .....(3)

من (1) , (2) و (3) لدينا

$3^{1999} + 10^{1418} + 9^{3n+2} \equiv 3+2+4[7]$

ومنه $3^{1999} + 10^{1418} + 9^{3n+2} \equiv 9[7]$

وبالتالي $3^{1999} + 10^{1418} + 9^{3n+2} \equiv 2[7]$.

التمرين 3 :

n عدد طبيعي .

1) أدرس تبعا لقيم العدد n بواقي قسمة العدد 5^n على 7.

2) عين باقي القسمة الأقليدية للعدد 6^{2n} على 7 .

3) عين قيم الطبيعي n التي يكون من أجلها العدد $\left(5^n + 6^{2n} + 3\right)$ قابلا للقسمة على 7 .

حل التمرين 3 :

① **تعيين تبعا لقيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة 5^n على 7 :**

$5^0 \equiv 1[7]$, $5^1 \equiv 5[7]$, $5^2 \equiv 4[7]$, $5^3 \equiv 6[7]$, $5^4 \equiv 2[7]$,

$5^5 \equiv 3[7]$, $5^6 \equiv 1[7]$.

من أجل كل عدد صحيح k فإن

$5^{6k} \equiv 1[7]$, $5^{6k+1} \equiv 5[7]$, $5^{6k+2} \equiv 4[7]$, $5^{6k+3} \equiv 6[7]$

$5^{6k+4} \equiv 2[7]$, $5^{6k+5} \equiv 3[7]$.

② **تعيين باقي قسمة 6^{2n} على 7 :**

لدينا $6 \equiv -1[7]$ ومنه $6^{2n} \equiv (-1)^{2n}[7]$

وبالتالي $6^{2n} \equiv 1[7]$

③**تعيين قيم n التي يكون من أجلها $5^n + 6^{2n} + 3$ قابلا للقسمة على 7**

$5^n + 6^{2n} + 3 \equiv 0[7]$ ومنه $5^n + 1 + 3 \equiv 0[7]$ وبالتالي

$5^n \equiv -4[7]$ ومنه $5^n \equiv 3[7]$ ومنه $n = 6k+5$

مبرهنة غوص (تذكير):

a , b و c أعداد صحيحة غير معدومة .

إذا كان a يقسم الجداء $b \times c$ و a أولي مع b فإن a يقسم c .

تطبيقات على مبرهنة غوص

التمرين 1 :

x و y عددان صحيحان بحيث : $5x = 3(y+2)$ ......(*)

- جد جميع الثنائيات (x,y) التي تحقق المعادلة (*) .

حل التمرين 1

لدينا $5 / 5x$ ومنه $5 / 3(y+2)$, بما أن 5 و 3 أوليان فيما بينهما فإنه

وحسب مبرهنة غوص فإن $5 / (y+2)$ وبالتالي يوجد عدد صحيح k

بحيث $y+2 = 5k$ ومنه $y = 5k-2$

بتعويض قيمة y في المعادلة (*) نجد $x = 3k$

ومنه مجموعة حلول المعادلة (*) هي $S = \left\{(3k, 5k-2) / k \in Z\right\}$

حل المعادلات من الشكل $ax + by = c$

مبرهنة : a , b و c أعداد صحيحة غير معدومة

نعتبر المعادلة $ax + by = c$.......(1)

حيث x و y مجهولان من Z , $p\gcd(a,b) = d$.

- يكون للمعادلة (1) حلولا في Z إذا كان العدد c يقبل القسمة على d .

طريقة حل معادلة من الشكل $ax + by = c$

الطريقة الأولى باستعمال نظرية غوص :

تمرين

حل في Z^2 المعادلة $21x + 15y = 6$.....(1)

الحل

$p\gcd(21,15) = 3$

بما أن 6 تقبل القسمة على 3 فإن المعادلة (1) لها حلولا في Z^2 .

المعادلة (1) تكافيء $7x + 5y = 2$

لدينا الثنائية $(1,-1)$ هي حل خاص للمعادلة (1)

ومنه $\begin{cases} 7x + 5y = 2 \\ 7.(1) + 5.(-1) = 2 \end{cases}$ وبالتالي $7x + 5y = 7.(1) + 5.(-1)$

إذن $7x - 7.(1) = 5.(-1) - 5y$ أي أن

$7(x-1) = 5.(-1-y)$

لدينا $7 / 7.(x-1)$ ومنه $7 / 5.(-1-y)$ وبما أن 7 و 5 أوليان

فيما بينهما فإن $7 / (-1-y)$ وعليه يوجد $k \in Z$ حيث

$-1-y = 7k$ ومنه $y = -1-7k$ وبالتعويض بقيمة y

نجد $x = 1+5k$

مجموعة حلول المعادلة (1) هي

$S = \left\{(1+5k, -1-7k) / k \in Z\right\}$

الطريقة الثانية باستعمال الموافقات :

تمرين

حل في Z^2 المعادلة $21x + 15y = 6$.....(1)

الحل

$p\gcd(21,15) = 3$

بما أن 6 تقبل القسمة على 3 فإن المعادلة (1) لها حلولا في Z^2 .

المعادلة (1) تكافيء $7x + 5y = 2$

$7x = -5y + 2$ ومنه $7x \equiv 2[5]$ وبالتالي $\begin{cases} 7x \equiv 2[5] \\ 5x \equiv 0[5] \end{cases}$

بالطرح نجد $7x - 5x \equiv 2[5]$ أي أن $2x \equiv 2[5]$ نجد إذن

$x \equiv 1[5]$ ومنه فإن $x = 5k+1$ وبالتعويض نجد قيمة y .

مجموعة حلول المعادلة (1) هي

$S = \left\{(1+5k, -1-7k) / k \in Z\right\}$

خلاصة :

لحل معادلة من الشكل $ax+by=c....(E)$ نتبع مايلي :

/1 نبحث عن $p\gcd(a,b)=d$ ثم نبسط المعادلة بالقسمة على d فتصبح $a'x+b'y=c'$.

/2 نبحث عن الثنائية (x_0,y_0) التي تحقق المعادلة (E) باستعمال خوارزمية إقليدس .

/3 نشكل الجملة $\begin{cases}a'x+b'y=c'\\ a'x_0+b'y_0=c'\end{cases}$ وبالطرح نحصل على

$$a'(x-x_0)=b'(y-y_0)$$

/4 نطبق مبرهنة غوص للحصول على أحد المجاهيل ثم نعوض للحصول على المجهول الثاني .

تمارين مقترحة

تمرين 1

n, b, a اعداد طبيعية غير معدومة حيث : $a=11n+3$

$b=13n-1$

1) بين ان كل قاسم مشترك للعددين a و b يقسم 50

2) باستعمال خوارزمية اقليدس عين حلا خاصا للمعادلة : $50x-11y=1$

ثم حل في $\mathbb{Z}$ المعادلة : $50x-11y=3$

حل التمرين 1

1) إثبات أن كل قاسم مشترك للعددين a و b يقسم 50

ليكن d قاسم مشترك للعددين a و b ومنه

$\begin{cases}d/a\\ d/b\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}d/13a\\ d/11b\end{cases}$ وبالتالي $d/13a-11b$ أي $d/50$

2) باستعمال خوارزمية إقليدس تعيين حل خاص للمعادلة

$50x-11y=1$

بالقسمة المتتالية نجد $\begin{cases}50=4.(11)+6.......(1)\\ 11=1.(6)+5.........(2)\\ 6=1.(5)+1..........(3)\end{cases}$

ومنه فإن $\begin{cases}6=50-4.(11)................(4)\\ 5=11-1.(6)..................(5)\\ 1=6-1.(5)....................(6)\end{cases}$

بالتعويض نجد : $50.(2)-11(9)=1$

ومنه الثنائية $(2,9)$ هي حل خاص للمعادلة .

- حل المعادلة $50x-11y=3$

لدينا $\begin{cases}50x-11y=3\\ 50.(2)-11(9)=1\end{cases}$ تكافيء

$\begin{cases}50x-11y=3\\ 50.(2\times3)-11(9\times3)=1\times3\end{cases}$ أي $\begin{cases}50x-11y=3\\ 50.(6)-11(27)=3\end{cases}$

وبالطرح نجد $50x-50.(6)=11y-11.(27)$

أي أن $50(x-6)=11(y-27)$

* $11/11(y-27)$ ومنه $11/50(x-6)$ وبما أن 11 و50 أوليان فيما بينهما فإنه وحسب مبرهنة غوص 11 تقسم $11/(x-6)$ ومنه

يوجد $k\in Z$ حيث $x-6=11k$ ومنه $x=11k+6$

بالتعويض في المعادلة نجد $y=50k+27$

ومنه مجموعة الحلول هي

$S=\{(11k+6,50k+27)/k\in Z\}$

تمرين2

حل في Z كل من الجملتين التاليتين :

/1 $\begin{cases} x\equiv 3[5] \\ x\equiv 1[6]\end{cases}$, /2 $\begin{cases} 2x\equiv 2[4]\\ 4x\equiv 1[3]\end{cases}$

الحل2

/1 $\begin{cases}x\equiv3[5]\\x\equiv1[6]\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}x=5\alpha+3\\x=6\beta+1\end{cases}$ بالطرح نجد $6\beta-5\alpha=2$

ومنه $6\beta=5\alpha+2$ وبالتالي $6\beta\equiv2[5]$ ومنه $\beta\equiv2[5]$

وبالتالي $\beta=5k+2$

وبالتعويض في المعادلة نجد $\alpha=6k+2$ مع $k\in Z$) نعوض لإيجاد قيمتي x و y .

/2 $\begin{cases}2x\equiv2[4]\\4x\equiv1[3]\end{cases}$ تكافيء $\begin{cases}x\equiv1[2]\\x\equiv1[3]\end{cases}$ والتالي $\begin{cases}3x\equiv3[6]\\2x\equiv2[6]\end{cases}$

ومنه $3x-2x\equiv3-2[6]$ أي $x\equiv1[6]$ ومنه $x=6k+1$ مع $k\in Z$

التعداد

نشر عدد طبيعي وفق أساس :

من أجل A عددطبيعي موجب تماما ومن أجل كل $x\succ1$ فإنه يوجد نشر وحيد للعدد A حيث : $A=a_0+a_1x+a_2x^2+......+ax^n$

و $a_0,a_1,a_2....$ أعداد طبيعية مع $a_n\neq0$

ونكتب $A=a_0+a_1x+a_2x^2+......+a_nx^n=\overline{a_n..a_2a_1a_0}^x$

مع $i\in[0,n]$ و $a_i\prec x$ ونقول في هذه الحالة أننا كتبنا العدد A في نظام التعداد ذو الأساس x .

تمرين 1

a عدد طبيعي حيث $a\succ5$.

نضع : $N_a=4a^5+2a^3+a+3$

- أكتب العدد N_a في النظام ذي الأساس a .

الحل 1

حسب التعريف فإن : $N_a=\overline{4213}^a$

تمرين 2

يكتب العدد الطبيعي N في التعداد الثنائي بالشكل $\overline{1101101}$.

- ماهو أساس التعداد الذي يكتب فيه N كما يلي $\overline{214}$ ؟

الحل 2

لدينا $\begin{cases}N=\overline{1101101}\\N=\overline{214}\end{cases}$ ومنه

$$\begin{cases}N=1.2^6+1.2^5+0.2^4+1.2^3+1.2^2+0.2^1+1.2^0\\N=2x^2+1x+4x^0\end{cases}$$

أي $\begin{cases}N=2^6+2^5+2^3+2^2+1\\N=2x^2+x+4\end{cases}$ إذن $\begin{cases}N=109\\N=2x^2+x+4\end{cases}$

ومنه فإن $2x^2+x+4=109$ تكافيء $2x^2+x-105=0$

$\Delta=840$ ومنه يوجد حلان للمعادلة و هما $x_1=7$, $x_2=-\frac{15}{2}$

إذن الأساس هو 7 .

تمارين مقترحة من سلاسل الأستاذ :حليلات عمار

التمرين (01) 1 - عيّن حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 10^n على 13

2 - تحقق أن : $(10^{2008})^2 + 10^{2008} + 1 \equiv 0[13]$

3 - عيّن قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون : $10^{2n} + 10^n + 1 \equiv 0[13]$

التمرين (02) n عدد طبيعي أكبر من 5 .

1/ a و b عددان طبيعيان حيث $a = n - 2$ و $b = 2n + 3$

أ - ماهي القيم الممكنة للقاسم المشترك الأكبر للعددين a و b ؟

ب - بين أن العددين a و b من مضاعفات 7 إذا وفقط إذا كان $n + 5$ مضاعفا للعدد 7.

ج - عيّن قيم n التي يكون من أجلها $PGCD(a;b) = 7$

2/ نعتبر العددين الطبيعيين p و q حيث : $p = 2n^2 - 7n - 15$ و $q = n^2 - 7n + 10$

أ - بيّن أن كل من العددين p و q يقبل القسمة على $n - 5$.

ب -عين تبعا لقيم n و بدلالة n ، $PGCD(p;q)$

التمرين (03) 1.نعتبر المعادلة : $7x + 65y = 2009....(1)$ حيث x و y عددان صحيحان.

أ) بيّن أنه إذا كانت الثنائية (x, y) حلا للمعادلة (1) فإن y مضاعف للعدد 7

ب) حل المعادلة (1) .

2.ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 9.

3.عيّن قيم العدد الطبيعي n بحيث يقبل العدد $2^{6n} + 3n + 2$ القسمة على 9.

4.نضع من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = 2^{6n} - 1$

أ) تحقق أن u_n يقبل القسمة على 9.

ب) حل المعادلة : $(7u_1)x + (u_2)y = 126567...(2)$ ذات المجهول (x, y) ،

حيث x و y عددان صحيحان .

التمرين (04) 1 - برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، العدد $3^{3n} - 1$ يقبل القسمة على 13.

2 -استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، يقبل كــل من العــددين

$3^{3n+1} - 3$ و $3^{3n+2} - 9$ القسمة على 13.

3 -عيّن ، حسب قيم n ، باقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 13 ، واستنتج

باقي قسمة 2005^{2010} على 13 .

4 - نضع من أجل كل عدد طبيعي p : $A_p = 3^p + 3^{2p} + 3^{3p}$

أ – من أجل $p = 3n$ ، عيّن باقي القسمة الإقليدية للعدد A_p على 13.

ب - برهن أنه إذا كان $p = 3n + 1$ فإن A_p يقبل القسمة على 13.

جـــ - عيّن باقي القسمة الإقليدية للعدد A_p على 13 من أجل $p = 3n + 2$

5 - يكتب العددان الطبيعيان a و b في نظام العد ذي الأساس 3 كما يلي :

$a = \overline{1001001000}$ و $b = \overline{1000100010000}$

أ - تحقق أن العددين a و b يكتبان على الشكل A_p في النظام العشري .

التمرين (05) نعتبر المعادلة ذات المجهولين الصحيحين x و y : (I)........$4x-9y=319$

1) - تأكد أن الثنائية $(82;1)$ حل للمعادلـــــة (I)

- حل المعادلة (I)

2) عين الثنائيات (a,b) الصحيحية ، حلول المعادلة : (II).......$4a^2-9b^2=319$

3) استنتج الثنائيات $(x_0;y_0)$ حلول المعادلة (I) بحيث x_0 و y_0 مربعين تامين .

التمرين (06) نعتبر العدد الطبيعي n الذي يكتب في نظام العد ذي الأساس 7 كما يلي :

$n=\overline{11\alpha 00}$ حيث α عدد طبيعي .

1 -عين α حتى يكون n قابلا للقسمة على 3.

2 -عين العدد α حتى يكون n قابلا للقسمة على 5.

- استنتج قيمة α التي تجعل n قابلا للقسمة على 15.

3 -نأخذ $\alpha=4$ اكتب العدد n في النظام العشري .

التمرين (07) نعتبر المعادلة (E) ذات المجهولين الصحيحين x و y حيث : $3x-21y=78$

1) أ - بيّن أن (E) تقبل حلولا في $\mathbb{Z}^2$.

ب -أثبت أنه إذا كانت الثنائية (x,y) من $\mathbb{Z}^2$ حلا للمعادلة (E) فإن $x\equiv 5[7]$

- استنتج حلول المعادلة (E) .

2) أ - ادرس ، حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي القسمة الإقليدية للعدد 5^n على 7.

ب - عيّن الثنائيات (x,y) من $\mathbb{N}^2$ التي هي حلول للمعادلة (E) و تحقق $5^x+5^y\equiv 3[7]$

التمرين (08) 1. حل المعادلة التفاضلية : $y'=(\ln 2)y$

2.نسمي f الحل الخاص لهذه المعادلة الذي يحقق $f(0)=1$ ، عيّن عبارة $f(x)$

3. n عدد طبيعي .

أ) ادرس بواقي القسمة الإقليدية على 7 للعدد 2^n

ب) استنتج باقي القسمة الإقليدية على 7 للعدد $f(2009)-4$

4.أ) احسب بدلالة n ، المجموع S_n حيث $S_n=f(0)+f(1)+.....f(n)$

ب)عيّن قيم العدد الطبيعى n التى من أجلها S_n القسمة على 7.

التمرين (09) n عدد طبيعي . 1) عيّن باقي قسمة 4^{2n} على 5

2) ادرس بواقي قسمة 3^n على 5

3) ما هو باقي قسمة العدد 1429^{2009} على 5؟

4) ليكن العدد الطبيعي $A_n=2+4^{2n}+3^n$

- عيّن قيم n بحيث A_n يقبل القسمة على 5

التمرين (10) n عدد طبيعي .ليكن العددان α و β حيث :$\alpha = n^2 + 1$ و $\beta = n + 2$

1 - أ) برهن أن :$PGCD(\alpha,\beta) = PGCD(\beta,n)$

ب) استنتج القيم الممكنة للعدد $PGCD(\alpha,\beta)$

2 - a و b عددان طبيعيان يكتبان في نظام التعداد ذي الأساس n كما يلي :

$a = \overline{3520}$ و $b = \overline{384}$

أ) برهن أن العدد $(3n+2)$ هو قاسم مشترك للعددين a و b

ب) استنتج تبعا لقيم n أن :$PGCD(a,b)$ هو $(3n+2)$ أو $2(3n+2)$

ج) عين α و β إذا علمت أن :$PGCD(a,b) = 41$

التمرين (11) . نعتبر المعادلة (E) : $109x - 226y = 1$ حيث x و y عددان صحيحان .

أ) عين القاسم المشترك الأكبر للعددين 109 و 226 . ماذا يمكن استنتاجه فيما يخص المعادلة (E) ؟

ب) برهن أن مجموعة حلول المعادلة (E) هي مجموعة الثنائيات من الشكل $(141+226k\,;68+109k)$ ،
حيث k عدد صحيح .

حلول مقترحة

حل التمرين (1)

1/ تعيين حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية ل 10^n على 13 :

$10^6 \equiv 1[13]$, $10^5 \equiv 4[13]$, $10^4 \equiv 3[13]$, $10^3 \equiv 12[13]$, $10^2 \equiv 9[13]$, $10^1 \equiv 10[13]$, $10^0 \equiv 1[13]$

من أجل كل $k \in Z$ فإن $10^{6k} \equiv 1[13]$, $10^{6k+1} \equiv 10[13]$, $10^{6k+2} \equiv 9[13]$, $10^{6k+3} \equiv 12[13]$, $10^{6k+4} \equiv 3[13]$

$10^{6k+5} \equiv 4[13]$

نلخص البواقي حسب قيم العدد الطبيعي n كما يلي :

قيم n	$6k$	$6k+1$	$6k+2$	$6k+3$	$6k+4$	$6k+5$	
$10^n \equiv$	1	10	9	12	3	4	$[13]$

2/ التحقق أن : $\left(10^{2008}\right)^2 + 10^{2008} + 1 \equiv 0[13]$:

لدينا $10^{2008} = 10^{6.(334)+4}$, $\left(10^{2008}\right)^2 = 10^{2(2008)} = 10^{2(6.(334)+4)} = 10^{6.(668)+8} = 10^{6.(668)+6+2} = 10^{6.(669)+2}$

ومنه $10^{2008} \equiv 3[13]$ و $\left(10^{2008}\right)^2 \equiv 9[13]$ وبالتالي $\left(10^{2008}\right)^2 + 10^{2008} + 1 \equiv 9+3+1[13]$ أي $\left(10^{2008}\right)^2 + 10^{2008} + 1 \equiv 13[13]$

ومنه نجد $\left(10^{2008}\right)^2 + 10^{2008} + 1 \equiv 0[13]$

3/ تعيين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون $10^{2n} + 10^n + 1 \equiv 0[13]$:

قيم n	$6k$	$6k+1$	$6k+2$	$6k+3$	$6k+4$	$6k+5$	
$10^n \equiv$	1	10	9	12	3	4	$[13]$
$10^{2n} \equiv$	1	9	3	1	9	3	$[13]$
$1 \equiv$	1	1	1	1	1	1	$[13]$
$10^{2n} + 10^n + 1 \equiv$	3	20	0	14	0	7	$[13]$

ومنه قيم العدد الطبيعي n حتى يكون $10^{2n} + 10^n + 1 \equiv 0[13]$ هي $n \in \{6k+2; 6k+4\}$

حل التمرين (2)

$b = 2n+3$, $a = n-2$, $n \succ 5$

1/ أ)القيم الممكنة للقاسم المشترك الأكبر للعددين a و b :

نضع $PGCD(a,b) = d$ ومنه

$\begin{cases} d / a \\ d / b \end{cases}$ وبالتالي $\begin{cases} d / 2a \\ d / b \end{cases}$ ومنه $d / b-2a$ أي $d / 7$ ومنه فإن $d \in D_7$ أي $d \in \{1,7\}$

ب) إثبات أن العددين a و b من مضاعفات 7 إذا وفقط إذا كان $n+5$ مضاعفا للعدد 7 :

* a و b من مضاعفات 7 معناه : $\begin{cases} 7/a \\ 7/b \end{cases}$ أي $\begin{cases} 7/n-2 \\ 7/2n+3 \end{cases}$ وبالتالي يوجد $k \in Z$ بحيث $\begin{cases} n-2=7k \\ 2n+3=7k \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} n=7k+2 \\ 2n=7k-3 \end{cases}$ أي

$\begin{cases} n \equiv 2[7] \\ 2n \equiv -3[7] \end{cases}$ وبالطرح نجد $2n-n \equiv -3-2[7] \Leftrightarrow n \equiv -5[7]$ وعليه $n+5 \equiv 0[7]$ أي $n+5$ مضاعف ل 7 .

* من جهة أخرى إذا كان $n+5$ مضاعفا للعدد 7 فإن $n+5 \equiv 0[7] \Leftrightarrow n \equiv -5[7]$ ومنه فإن

$\begin{cases} n-2 \equiv -5-2[7] \\ 2n+3 \equiv 2.(-5)+3[7] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n-2 \equiv -7[7] \\ 2n+3 \equiv -7[7] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n-2 \equiv 0[7] \\ 2n+3 \equiv 0[7] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \equiv 0[7] \\ b \equiv 0[7] \end{cases}$ أي a و b من مضاعفات 7.

ج/ قيم n التي يكون من أجلها $PGCD(a,b)=7$:

لدينا $PGCD(a,b)=7$ ومنه $7/a$ أي $7/n-2$ ومنه يوجد $k \in Z$ بحيث $n=7k+2$

2/ $p=2n^2-7n-15$, $q=n^2-7n+10$

أ / إثبات أن كلا من p و q يقبلان القسمة على $n-5$:

بالقسمة الإقليدية للعدد p على $n-5$ نجد : $p=2n^2-7n-15=(n-5)\times(2n+3)$ أي $p=2n^2-7n-15=(n-5)\times b$

بالقسمة الإقليدية للعدد q على $n-5$ نجد : $q=n^2-7n+10=(n-5)\times(n-2)$ أي $q=n^2-7n+10=(n-5)\times a$

ومنه نستنتج أن p و q يقبلان القسمة على $n-5$.

ب/ تعيين تبعا لقيم n $PGCD(p,q)$:

$$PGCD(p,q)=PGCD\left[(n-5)\times b,(n-5)\times a\right]=(n-5)\times PGCD(a,b)$$

- **إذا كان** $n=7k+2$ **فإن** $PGCD(a,b)=7$ **ومنه فإن** $PGCD(p,q)=(n-5)\times 7$
- **إذا كان** $n \neq 7k+2$ **فإن** $PGCD(a,b)=1$ **ومنه فإن** $PGCD(p,q)=(n-5)$

حل التمرين (3)

نعتبر المعادلة $7x+65y=2009.....(1)$

ت) إثبات أنه إذا كانت الثنائية (x,y) حلا للمعادلة (1) فإن y مضاعف ل 7 :

$$\bullet (1) \Leftrightarrow 7x-2009=65y \Leftrightarrow 7(x-287)=65y$$

$7/7(x-287)$ ومنه $7/65y$ وبما أن $p\gcd(7,65)=1$ وحسب مبرهنة غوص فإن : $7/y$.

ث) حل المعادلة (1) :

بما $7/y$ فإنه يوجد $k \in Z$ بحيث $y=7k$ وبالتعويض في المعادلة نجد $x=65k+287$

وعليه $S=\{(65k+287,7k)/k \in Z\}$

2/ دراسة حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة 2^n على 9 :

$2^0 \equiv 1[9]$ ، $2^1 \equiv 2[9]$ ، $2^2 \equiv 4[9]$ ، $2^3 \equiv 8[9]$ ، $2^4 \equiv 7[9]$ ، $2^5 \equiv 5[9]$ ، $2^6 \equiv 1[9]$.

من أجل كل $k \in Z$ نجد $2^{6k} \equiv 1[9]$ ، $2^{6k+1} \equiv 2[9]$ ، $2^{6k+2} \equiv 4[9]$ ، $2^{6k+3} \equiv 8[9]$ ، $2^{6k+4} \equiv 7[9]$ ، $2^{6k+5} \equiv 5[9]$.

نلخص النتائج كما في الجدول

قيم n	$6k$	$6k+1$	$6k+2$	$6k+3$	$6k+4$	$6k+5$	
$2^n \equiv$	**1**	**2**	**4**	**8**	**7**	**5**	$[9]$

3/ تعيين قيم العدد الطبيعي n حتى يقبل العدد $2^{6n}+3n+2$ القسمة على 9 :

لدينا $2^{6n}+3n+2 \equiv 0[9]$ تكافيء $1+3n+2 \equiv 0[9]$ ومنه $3n+3 \equiv 0[9]$ تكافيء $3(n+1) \equiv 0[9]$

ومنه $n+1 \equiv 0[9]$ وبالتالي $n \equiv -1[9]$ ومنه فإن $n \equiv 8[9]$ وبالتالي $n = 9k+8$ حيث $k \in N$.

4/ نضع $u_n = 2^{6n}-1$

ت) التحقق أن u_n يقبل القسمة على 9 :

بما أن : $2^{6n} \equiv 1[9]$ فإن: $2^{6n}-1 \equiv 0[9]$ معناه u_n يقبل القسمة على 9 .

ث) حل المعادلة $(7u_1)x+(u_2)y = 126567......(2)$:

بما أن $u_1 = 2^6-1 = 63$ ، $u_2 = 2^{12}-1 = 4095$

المعادلة (2) تكافيء $(7\times 63)x+(4095)y = 126567$ بالقسمة على 9 نجد $(7\times 7)x+(455)y = 14063$

ومنه $7x+65y = 2009$ وبالتالي حلول المعادلة (2) هي حلول المعادلة (1) أي أن مجموعة حلول المعادلة (2) هي

$S = \{(65k+287, 7k)/k \in Z\}$

ج)

حل التمرين (4)

1/ إثبات انه من أجل كل عدد طبيعي n العدد $3^{3n}-1$ يقبل القسمة على 13 :

$3^3\equiv1[13]$ وبالتالي $(3^3)^n\equiv1^n[13]$ تكافيء $3^{3n}\equiv1[13]$ تكافيء $3^{3n}-1\equiv0[13]$ أي أن $3^{3n}-1$ مضاعف ل 13 و هو المطلوب .

2/ استنتاج أن العددان $3^{3n+1}-3$ و $3^{3n+2}-9$ يقبلان القسمة على 13 :

- لدينا $\begin{cases}3^{3n}\equiv1[13]\\3\equiv3[13]\end{cases}$ تكافيء $3^{3n}\times3\equiv1\times3[13]$ تكافيء $3^{3n+1}\equiv3[13]$ تكافيء $3^{3n+1}-3\equiv0[13]$
- لدينا $\begin{cases}3^{3n}\equiv1[13]\\3^2\equiv3^2[13]\end{cases}$ تكافيء $3^{3n}\times3^2\equiv3^2[13]$ تكافيء $3^{3n+2}\equiv9[13]$ تكافيء $3^{3n+2}-9\equiv0[13]$

3/ تعيين حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 13 :

$3^0\equiv1[13]$, $3^1\equiv3[13]$, $3^2\equiv9[13]$, $3^3\equiv1[13]$

نستنتج أن $3^{3k}\equiv1[13]$, $3^{3k+1}\equiv3[13]$, $3^{3k+2}\equiv9[13]$

- **استنتاج باقي قسمة 2005^{2010} على 13 :**

لدينا $2005\equiv3[13]$ وبما ان $2010=3\times(670)$ فإن $2005^{2010}\equiv1[13]$

4/ بوضع $A_p=3^p+3^{2p}+3^{3p}$

ت) من أجل $p=3n$ إيجاد باقي القسمة للعدد A_p على 13 :

من أجل $p=3n$ فإن $A_p=3^{3n}+3^{6n}+3^{9n}$ أي $A_p=3^{3n}+3^{3.(2n)}+3^{3.(3n)}$ ومنه

$A_P\equiv1+1+1[13]$ أي $A_P\equiv3[13]$

ث) تبيان أنه من اجل $p=3n+1$ فإن A_p يقبل القسمة على 13 :

من اجل $p=3n+1$ لدينا $A_p=3^{3n+1}+3^{2.(3n+1)}+3^{3.(3n+1)}$ أي أن $A_p=3^{3n+1}+\left(3^{3n+1}\right)^2+\left(3^{3n+1}\right)^3$

بما أن : $\begin{cases}3^{3n+1}\equiv3[13]\\\left(3^{3n+1}\right)^2\equiv3^2[13]\\\left(3^{3n+1}\right)^3\equiv3^3[13]\end{cases}$ فإن $3^{3n+1}+\left(3^{3n+1}\right)^2+\left(3^{3n+1}\right)^3\equiv3+9+1[13]$ أي $3^{3n+1}+\left(3^{3n+1}\right)^2+\left(3^{3n+1}\right)^3\equiv13[13]$

معناه $A_p\equiv0[13]$ (من أجل $p=3n+1$) أي A_p يقبل القسمة على 13 .

ج) تعيين باقي القسمة الإقليدية للعدد A_p على 13 من أجل $p=3n+2$:

من أجل $p=3n+2$ فإن $A_p=3^{3n+2}+3^{2.(3n+2)}+3^{3.(3n+2)}$ أي ان $A_p=3^{3n+2}+\left(3^{3n+2}\right)^2+\left(3^{3n+2}\right)^3$

بما ان $\begin{cases}3^{3n+2}\equiv9[13]\\\left(3^{3n+2}\right)^2\equiv9^2[13]\\\left(3^{3n+2}\right)^3\equiv9^3[13]\end{cases}$ أي $\begin{cases}3^{3n+2}\equiv9[13]\\\left(3^{3n+2}\right)^2\equiv3[13]\\\left(3^{3n+2}\right)^3\equiv1[13]\end{cases}$ فإن $3^{3n+2}+\left(3^{3n+2}\right)^2+\left(3^{3n+2}\right)^3\equiv9+3+1[13]$

معناه $A_p \equiv 0[13]$ (من أجل $p=3n+2$) .

/ 5 $a=\overline{1001001000}^3$, $b=\overline{1000100010000}^3$

ت) التحقق أن العددان a و b يكتبان على الشكل A_p في النظام العشري :

- $a=0.3^0+0.3^1+0.3^2+1.3^3+0.3^4+0.3^5+1.3^6+0.3^7+0.3^8+1.3^9$ أي $a=3^3+3^6+3^9$

ومنه $a=3^3+3^{2(3)}+3^{3(3)}$ أي ان a يكتب في النظام العشري على الشكل A_p حيث $p=3$

- $b=0.3^0+0.3^1+0.3^2+0.3^3+1.3^4+0.3^5+0.3^6+0.3^7+1.3^8+0.3^9+0.3^{10}+0.3^{10}+1.3^{12}$

ومنه $b=3^4+3^{2(4)}+3^{3(4)}$ أي أن b يكتب في النظام العشري على الشكل A_p حيث $p=4$.

حل التمرين (5)

/1 التأكد أن الثنائية $(82,1)$ هي حل للمعادلة $4x-9y=319......(I)$ حيث x , y عددان صحيحان

لدينا $4.(82)-9.(1)=328-9=319$ ومنه الثنائية $(82,1)$ هي حل خاص للمعادلة (I) .

- **حل المعادلة (I) :**

لدينا $\begin{cases}4x-9y=319\\4.(82)-9.(1)=319\end{cases}$ ومنه $4x-9y=4.(82)-9.(1) \Leftrightarrow 4x-4(82)=9y-9(1) \Leftrightarrow 4(x-82)=9(y-1)$

ومنه $4/4(x-82)$ $4/9(y-1)$ وبما أن $pgcd(4,9)=1$ فإنه حسب مبرهنة غوص 4 تقسم $4/(y-1)$ وبالتالي يوجد $k\in Z$ بحيث $y-1=4k$ ومنه $y=4k+1$ وبالتعويض نجد $x=9k+82$ وبالتالي $S=\{(9k+82,4k+1)/k\in Z\}$

/2 تعيين الثنائيات الصحيحة (a,b) حلول المعادلة $4a^2-9b^2=319......(II)$

- $4a^2-9b^2=319 \Leftrightarrow (2a)^2-(3b)^2=319 \Leftrightarrow (2a-3b).(2a+3b)=319$

بما أن 319 عدد أولي و $2a+3b \succ 2a-3b$ فإن: $\begin{cases}2a+3b=319\\2a-3b=1\end{cases}$ وبالجمع نجد $4a=320$ ومنه $a=80$ وبالتعويض نجد $b=53$

وبالتالي توجد ثنائية وحيدة هي $(a,b)=(80,53)$

/3 استنتاج الثنائية (x_0,y_0) بحيث x_0 و y_0 مربعين تامين :

من المعادلتين (I) و (II) لدينا $\begin{cases}4x_0-9y_0=319\\4a^2-9b^2=319\end{cases}$ وبالمطابقة نجد $\begin{cases}x_0=a^2\\y_0=b^2\end{cases}$ أي أن $\begin{cases}x_0=80^2\\y_0=53^2\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}x_0=6400\\y_0=2809\end{cases}$

أي $(x_0,y_0)=(6400,2809)$

حل التمرين (6)

$n=\overline{11\alpha 00}^7$, $\alpha\in N$

1 / تعيين العدد α حتى يكون n قابلا للقسمة على 3 :

لدينا $n=\overline{11\alpha00}^{7}=0.7^0+0.7^1+\alpha.7^2+1.7^3+1.7^4$ ومنه $n=49\alpha+2744$

n قابلا للقسمة على 3 معناه $n\equiv 0[3]$ تكافيء $49\alpha+2744\equiv 0[3]$ تكافيء $49(\alpha+56)\equiv 0[3]$ تكافيء $\alpha+56\equiv 0[3]$

أي أن $\alpha\equiv -56[3]$ وبما أن $-56\equiv 1[3]$ فإن $\alpha\equiv 1[3]$ وبالتالي $\alpha=3k+1$ حيث $k\in Z$

2/ تعيين العدد α حتى يكون n قابلا للقسمة على 5 :

n قابلا للقسمة على 5 معناه $n\equiv 0[5]$ تكافيء $49\alpha+2744\equiv 0[5]$ تكافيء $49(\alpha+56)\equiv 0[5]$ تكافيء $\alpha+56\equiv 0[5]$

أي أن $\alpha\equiv -56[5]$ وبما أن $-56\equiv -4[5]$ فإن $\alpha\equiv 4[5]$ وبالتالي $\alpha=5k+4$ حيث $k\in Z$

- استنتاج قيمة α التي تجعل n قابلا للقسمة على 15 :

$\alpha\equiv -56[15]$ ومنه $\alpha\equiv 4[15]$ وبالتالي $\alpha=15k+4$ حيث $k\in Z$

3/ بوضع $\alpha=4$ كتابة العدد n في النظام العشري :

لدينا $n=49.(4)+2744$ وبالتالي $n=2940$

حل التمرين (7)

$3x-21y=78........(E)$

1/ أ) إثبات أن المعادلة (E) تقبل حلولا في Z^2 :

لدينا $p\gcd(3,21)=3$ وبما أن $3/78$ فإن المعادلة (E) تقبل حلولا في Z^2 .

ث) إثبات أنه إذا كانت الثنائية (x,y) حلا للمعادلة (E) فإن $x\equiv 5[7]$:

المعادلة (E) $\Leftrightarrow$ $x-7y=26$ $\Leftrightarrow$ $x=7y+26$ وعليه $x\equiv 26[7]$ ومنه $x\equiv 5[7]$

- استنتاج حلول المعادلة (E) :

لدينا $x\equiv 5[7]$ ومنه $x-5\equiv 0[7]$ وبالتالي يوجد عدد صحيح k بحيث $x-5=7k$ ومنه $x=7k+5$ وبالتعويض في المعادلة

نجد $7y+26=7k+5$ وبالتالي $7y=7k-21$ ومنه فإن $y=k-3$

مجموعة حلول المعادلة (E) هي : $S=\{(7k+5,k-3)/k\in Z\}$

2/أ) دراسة حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 5^n على 7 :

$5^0\equiv 1[7]$ ، $5^1\equiv 5[7]$ ، $5^2\equiv 4[7]$ ، $5^3\equiv 6[7]$ ، $5^4\equiv 2[7]$ ، $5^5\equiv 3[7]$ ، $5^6\equiv 1[7]$.

وبالتالي $5^{6k}\equiv 1[7]$ ، $5^{6k+1}\equiv 5[7]$ ، $5^{6k+2}\equiv 4[7]$ ، $5^{6k+3}\equiv 6[7]$ ، $5^{6k+4}\equiv 2[7]$ ، $5^{6k+5}\equiv 3[7]$.

قيم n	$6k$	$6k+1$	$6k+2$	$6k+3$	$6k+4$	$6k+5$	
$5^n\equiv$	**1**	**5**	**4**	**6**	**2**	**3**	$[7]$

ب) تعيين الثنائيات (x,y) من Z^2 التي هي حلول المعادلة (E) وتحقق $5^x+5^y\equiv 3[7]$

نستعين بالجدول التالي :

	قيم x	$6k$	$6k+1$	$6k+2$	$6k+3$	$6k+4$	$6k+5$
قيم y	$5^x\equiv$ / $5^y\equiv$	**1**	**5**	**4**	**6**	**2**	**3**

$6k'$	1	2	6	5	0	3	4
$6k'+1$	5	6	4	3	4	0	1
$6k'+2$	4	5	2	1	3	6	0
$6k'+3$	6	0	4	3	5	1	2
$6k'+4$	2	3	0	6	1	4	5
$6k'+5$	3	4	1	0	3	5	6

من خلال الجدول نستنتج أن الثنائيات (x,y) من Z^2 التي هي حلول المعادلة (E) وتحقق $5^x+5^y\equiv 3[7]$

هي : $(x,y)\in\{(6k,6k'+4);(6k+2,6k'+1);(6k+2,6k'+3);(6k+3,6k'+2);(6k+3,6k'+5);(6k+4,6k')\}$

حل التمرين (8)

/1 حل المعادلة التفاضلية $y'=(\ln 2)y$ ....(1)

المعادلة (1) من الشكل $y'=ay$ وحلولها هي الدوال من الشكل $f_c(x)=c.e^{ax}$ ومنه حلول المعادلة $y'=(\ln 2)y$ هي الدوال المعرفة ب

$f_c(x)=c.e^{\ln 2.x}$ وبالتالي $f_c(x)=c.e^{x\ln 2}$ أي $f_c(x)=c.e^{\ln 2^x}$

/2 تعيين الحل الخاص f والذي يحقق $f(0)=1$:

$f(0)=1$ معناه $f_c(0)=1 \Leftrightarrow c.e^{\ln 2^0}=1 \Leftrightarrow c=1$

وبالتالي $f(x)=e^{\ln 2^x}$ ومنه $f(x)=2^x$

/3 أ) تعيين بواقي قسمة 2^n على 7 :

$2^0\equiv[7]$, $2^1\equiv[7]$, $2^2\equiv 4[7]$, $2^3\equiv 1[7]$ ومنه فإن : $2^{3k}\equiv 1[7]$, $2^{3k+1}\equiv 2[7]$, $2^{3k+2}\equiv 4[7]$

البواقي هي 1 , 2 و 4 على الترتيب .

ب) استنتاج باقي القسمة الإقليدية للعدد $f(2009)-4$ على 7 :

لدينا $f(2009)-4=2^{2009}-4$ و $2009=3.(669)+2$

ومنه نستنتج أن $2^{2009}-4\equiv 4-4[7]$ وبالتالي $2^{2009}-4\equiv 0[7]$

/4 أ) حساب بدلالة n المجموع S_n :

$S_n=f(0)+f(1)+.....+f(n)$ تكافئ $S_n=2^0+2^1+.....+2^n$ وبالتالي S_n هو مجموع لحدود متتابعة لمتتالية هندسية حدها الأول 1

وأساسها هو 2 .

ومنه $S_n=(1).\dfrac{2^{n+1}-1}{2-1}=2^{n+1}-1$

ب) تعيين قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها S_n يقبل القسمة على 7 :

S_n يقبل القسمة على 7 إذا وفقط إذا كان $2^{n+1}-1\equiv 0[7]$

$2^{n+1}-1\equiv 0[7]$ تكافيء $2^{n+1}\equiv 1[7]$ وبما أن $2^{3k}\equiv 1[7]$ في الجواب **3 / أ)** فإن $n+1=3k$ إذن $n=3k-1$

حل التمرين (10) :

$\alpha=n^2+n$, $\beta=n+2$ حيث $n\in N$

1 / أ) إثبات أن $PGCD(\alpha,\beta)=PGCD(\beta,n)$:

بقسمة العدد الطبيعي α على β نجد $n^2+1=n.(n+2)-n$ أي أن $\alpha=n.\beta+(-n)$

ومنه وحسب خوارزمية إقليدس فإن $PGCD(\alpha,\beta)=PGCD(\beta,-n)=PGCD(\beta,n)$.

ب) القيم الممكنة ل $PGCD(\alpha,\beta)$:

نضع $PGCD(\alpha,\beta)=d$ ومنه $PGCD(\alpha,\beta)=PGCD(\beta,n)=d$

$\begin{cases} d/\beta \\ d/n \end{cases}$ ومنه فإن: $d/\beta-n$ أي $d/(n+2)-n$ ومنه $d/2$ إذن $d\in\{1,2\}$

2 / a و b عددان طبيعيان يكتبان في النظام ذو الأساس n كما يلي $a=\overline{3520}$ و $b=\overline{384}$

أ) إثبات أن العدد $(3n+2)$ هو قاسم مشترك للعددان a و b :

- $a=\overline{3520}$ ومنه $a=0.n^0+2.n^1+5.n^2+3.n^3$ أي $a=3n^3+5n^2+2n$

وبالقسمة الإقليدية للعدد $3n^3+5n^2+2n$ على $(3n+2)$ نجد $a=3n^3+5n^2+2n=(3n+2).(n^2+n)$

ومنه العدد $(3n+2)$ قاسم للعدد a ....(1)

- $b=\overline{384}$ ومنه $b=4.n^0+8.n^1+3.n^2$ أي $b=3n^2+8n+4$

وبالقسمة الإقليدية للعدد $3n^2+8n+4$ على $(3n+2)$ نجد $b=3n^2+8n+4=(3n+2).(n+2)$

ومنه العدد $(3n+2)$ قاسم للعدد b ....(2)

- من (1) و (2) نستنتج ان العدد $(3n+2)$ هو قاسم مشترك للعددين a و b .

ب)استنتاج تبعا لقيم n أن $PGCD(a,b)$ هو $(3n+2)$ أو $2(3n+2)$:

نضع $D=PGCD(a,b)=PGCD\left((3n+2).(n^2+n);(3n+2).(n+2)\right)=(3n+2).PGCD\left((n^2+n);(n+2)\right)$

إذن $PGCD(a,b)=(3n+2)PGCD(\alpha,\beta)=(3n+2)PGCD(\beta,n)$

لكن $PGCD(\beta,n)=1$ أو $PGCD(\beta,n)=2$ وبالتالي $PGCD(a,b)=(3n+2)$ أو $PGCD(a,b)=2(3n+2)$

ج) تعيين α و β بحيث $PGCD(a,b)=41$:

بما أن $PGCD(a,b)=41$ فإن

حل التمرين (11) :

$109x-226y=1.............(E)$ حيث x و y عددان صحيحان .

1/ أ) تعيين القاسم المشترك الأكبر للعددين 226 و 109 :

حسب خوارزمية إقليدس فإن القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين هو اخر باقي غير معدوم في سلسلة القسمات المتتالية ومنه

226=109x2+ 8 , 109=8x13+5 , 8=5x1+3 , 5=3x1+2 , 3=2x1+1 , 2=1x1+**1** , 1=1x1+0

ومنه $PGCD(226,109)=1$

- بما أن $PGCD(226,109)=1$ فإن المعادلة (E) لها حلول في Z^2 .

ب)إثبات أن حلول المعادلة (E) من الشكل $(141+226k\,,68+109k)$:

$109x-226y=1.............(E) \Leftrightarrow 109x=226y+1 \Rightarrow 109x\equiv 1[226] \Rightarrow x\equiv 141[226]$

ومنه $x=226k+141$

$109x-226y=1.............(E) \Leftrightarrow 226y=109x-1 \Rightarrow 226y\equiv -1[109] \Leftrightarrow 226y\equiv 108[109]$

$\Leftrightarrow y\equiv 68[109]$ ومنه $y=109k+68$ ومنه $S=\{(226k+141,109k+68)\}$

2016/2015