Exercice 01

La résultante de deux forces $\vec{F_1}$ *et* $\vec{F_2}$ *est égale à 50 N et fait un angle de 30° avec la force* $F_1 = 15N$ *. Trouver le module de la force* $\vec{F_2}$ *et l'angle entre les deux forces.*

Solution :

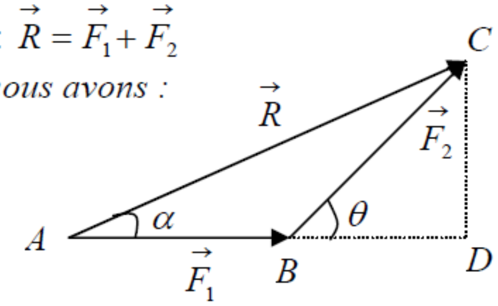
$R = 50\ N$; $V_1 = 15\ N$; $\alpha = 30°$, nous avons : $\vec{R} = \vec{F_1} + \vec{F_2}$

Dans le triangle rectangle: ACD *rectangle en D, nous avons :*

$AC^2 = AD^2 + DC^2$

$AD = AB + BD = F_1 + F_2 \cos\theta$

$DC = F_2 \sin\theta$



On obtient alors : $R^2 = (F_1 + F_2 \cos\theta)^2 + (F_2 \sin\theta)^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos\theta$

$$R^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos\theta \qquad \textbf{(1)}$$

Nous avons aussi :
$$\left.\begin{aligned} \sin\alpha &= \frac{CD}{R} \Rightarrow CD = R\sin\alpha \\ \sin\theta &= \frac{CD}{F_2} \Rightarrow CD = F_2 \sin\theta \end{aligned}\right\} \Rightarrow R\sin\alpha = F_2 \sin\theta \qquad \textbf{(2)}$$

et
$$\cos\alpha = \frac{AD}{R} = \frac{F_1 + F_2\cos\theta}{R} \Rightarrow \cos\theta = \frac{R\cos\alpha - F_1}{F_2} \qquad \textbf{(3)}$$

en remplaçant l'expression (3) dans (1), on aboutit à :

$$R^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\left(\frac{R\cos\alpha - F_1}{F_2}\right) = F_1^2 + F_2^2 + 2F_1(R\cos\alpha - F_1)$$

d'où : $F_2 = \sqrt{R^2 - F_1^2 - 2F_1(R\cos\alpha - F_1)}$

$$F_2 = \sqrt{50^2 - 15^2 - 2x15(50\cos 30° - 15)} = 44{,}44N$$

L'expression **(3)** nous donne : $\cos\theta = \dfrac{50\cos 30 - 15}{50} = 0{,}566 \Rightarrow \theta = 55{,}528°$

Exercice 02

La ligne d'action d'une force $\vec{F}$ de $800\,N$, passe par les points $A\begin{cases}1{,}22\\0\\2{,}74\end{cases}$ et $B\begin{cases}0\\1{,}22\\0{,}61\end{cases}$

dans un repère orthonormé. Déterminer les composantes de cette force

Solution :

Nous avons : $\overrightarrow{AB} = AB\ \vec{u}_{AB} \quad \Rightarrow \quad \vec{u}_{AB} = \dfrac{\overrightarrow{AB}}{AB}$ vecteur unitaire porté par la ligne d'action.

$$\vec{u}_{AB} = \frac{\overrightarrow{AB}}{AB} = \frac{-1{,}22\,\vec{i} + 1{,}22\,\vec{j} - 2{,}13\,\vec{k}}{\sqrt{(-1{,}22)^2 + (1{,}22)^2 + (-2{,}13)^2}} = \frac{-1{,}22\,\vec{i} + 1{,}22\,\vec{j} - 2{,}13\,\vec{k}}{2{,}74}$$

$$\vec{u}_{AB} = -0{,}445\,\vec{i} + 0{,}445\,\vec{j} - 0{,}777\,\vec{k}$$

La force $\vec{F}$ s'écrira :

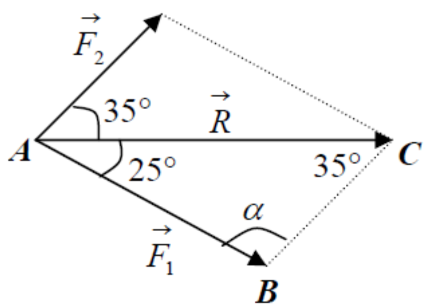
$$\vec{F} = F\,\vec{u}_{AB} = 800(-0{,}445\,\vec{i} + 0{,}445\,\vec{j} - 0{,}777\,\vec{k}) = -356\,\vec{i} + 356\,\vec{j} - 621{,}6\,\vec{k})$$

Les composantes de la force sont ainsi connues suivant les trois axes du repère.

Exercice 03

Soient deux forces $\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$ faisant chacune respectivement un angle de $25°$ et $35°$ avec la résultante $\vec{R}$ qui a une valeur de $400\,N$. Déterminer les modules des deux forces.

Solution :



Utilisons la règle des sinus :

$$\frac{BC}{\sin 25°} = \frac{AB}{\sin 35°} = \frac{AC}{\sin \alpha}$$

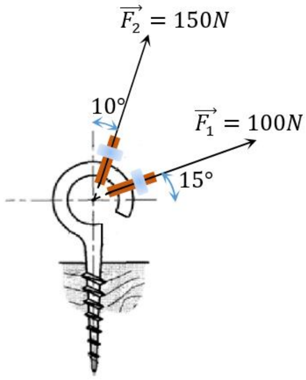
$$\alpha = 180° - (25° + 35°) = 120°$$

or nous avons : $AB = F_1$, $BC = F_2$ et $AC = R$

D'où : $F_2 = R\dfrac{\sin 25°}{\sin 120°} = 195N$ et $F_1 = R\dfrac{\sin 35°}{\sin 120°} = 265N$

Exercice 04 :

La vis de la figure ci-contre est soumise à deux forces $\vec{F_1}$ et $\vec{F_2}$. Déterminer la résultante $\vec{F_R}$ de $\vec{F_1}$ et $\vec{F_2}$.



Solution :

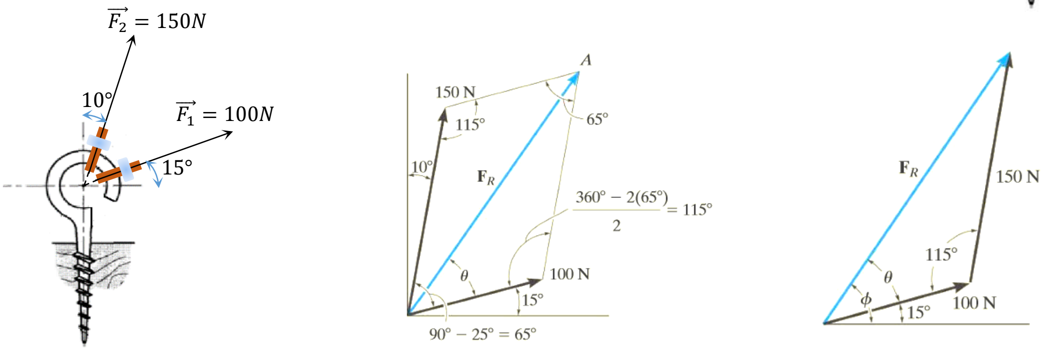


Figure . Vis soumise à deux forces $\vec{F_1}$ et $\vec{F_2}$.

On peut déterminer facilement le vecteur $\vec{F_R}$ qui résulte de l'addition des deux vecteurs $\vec{F_1}$ et $\vec{F_2}$ en se utilisant le parallelogramme ou le triangle de construction montrés sur la figure … Ainsi, le module de ce vecteur est :

$$\|\vec{F_R}\| = \sqrt{100^2 + 150^2 - 2\times 100\times 150\times cos115°} = 212.6N$$

on peut identifier également identifier l'angle d'orientation en utilisant la loi des sinus dans un triangle.

$$\frac{150}{sin\theta} = \frac{212.6}{sin(115°)} \text{ d'où } sin\theta = \frac{150}{212.6} sin(115°) \text{ donc } \theta = 39.8°$$

La force $\vec{F_R}$ fait un angle φ=39.8+15=54.8°

En utilisant les coordonnées cartésiennes des forces $\vec{F_1}$ et $\vec{F_2}$, on a :

$\vec{F_1} = 100cos15°\vec{u}_x + 100sin15°\vec{u}_y$=96.6$\vec{u}_x$ + 25.9$\vec{u}_y$

$\vec{F_2} = 150cos80°\vec{u}_x + 150 \sin 80° \vec{u}_y$ =26.0$\vec{u}_x$ + 147.7$\vec{u}_y$

$\vec{F_R}$ =122.55$\vec{u}_x$ + 173.7$\vec{u}_y$

Exercice 05 :

Un étagère est fixé au mur par des câbles comme indiqué sur la figure. Si les câbles exercent les forces $\vec{F_{AB}}$ et $\vec{F_{AC}}$, avec $\|\vec{F_{AB}}\| = 100N$ et $\|\vec{F_{AC}}\| = 120N$, sur les anneaux de fixation, déterminer la force résultante agissant au point A. Exprimer le résultat en utilisant les coordonnées cartésiennes.

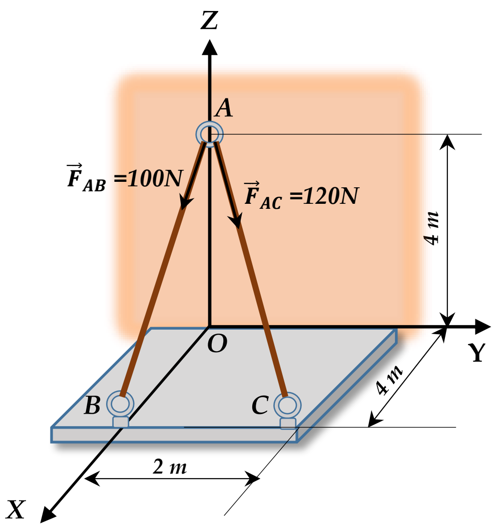


Figure . *Etagère fixé au mur par des câbles*

Solution:

La force résultante $\vec{F}_R$ est montrée sur la figure … on peut exprimer cette force en coordonnées cartésiennes en formulant d'abord les vecteurs $\overrightarrow{F_{AB}}$ et $\overrightarrow{F_{AC}}$ comme vecteurs cartésiens qui seront par la suite additionnés, composante par composante, pour obtenir $\vec{F}_R$. Les directions de ces forces dans l'espace sont spécifiées à travers les vecteurs unitaires $\vec{u}_{AB}$ et $\vec{u}_{AC}$ définis le long des câbles en se basant sur les vecteurs positions $\vec{r}_{AB}$ et $\vec{r}_{AC}$.

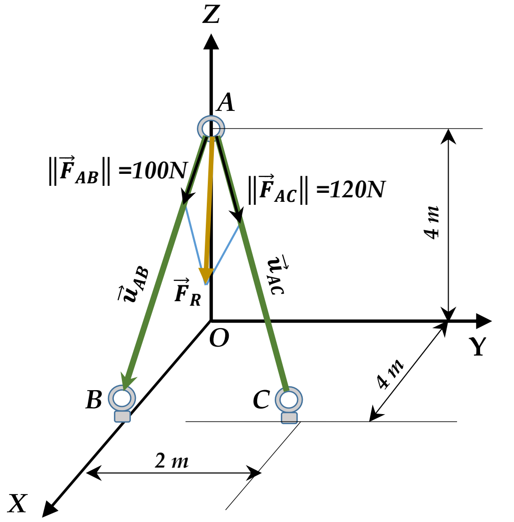


Figure . *Résultante des forces appliquées le long des câbles.*

A partir de la figure, on en déduit que pour le câble AB

$$\vec{u}_{AB} = 4\vec{\imath} - 4\vec{k} \quad \text{avec} \quad \|\vec{u}_{AB}\| = \sqrt{4^2 + (-4)^2} = 5.66m$$

Alors : $\vec{F}_{AB} = \|\vec{F}_{AB}\|.\frac{\vec{u}_{AB}}{\|\vec{u}_{AB}\|} = 100.\left(\frac{4}{5.66}\vec{\imath} - \frac{4}{5.66}\vec{k}\right)$

D'où : $\vec{F}_{AB} = 70.7\vec{\imath} - 70.7\vec{k}$ N

De même pour le câble AC :

$$\vec{u}_{AC} = 4\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} - 4\vec{k} \quad \text{avec} \quad \|\vec{u}_{AB}\| = \sqrt{4^2 + 2^2 + (-4)^2} = 6m$$

Alors :

$$\vec{F}_{AC} = \|\vec{F}_{AC}\|.\frac{\vec{u}_{AC}}{\|\vec{u}_{AC}\|} = 120.\left(\frac{4}{6}\vec{\imath} + \frac{2}{6}\vec{\jmath} - \frac{4}{6}\vec{k}\right)$$

D'où : $\vec{F}_{AC} = 80\vec{\imath} + 40\vec{\jmath} - 80\vec{k}$ N

La force résultante est donc :

$$\vec{F}_R = \vec{F}_{AC} + \vec{F}_{AB} = (70.7\vec{\imath} - 70.7\vec{k}) + (80\vec{\imath} + 40\vec{\jmath} - 80\vec{k}) = 150.7\vec{\imath} + 40\vec{\jmath} - 150.7\vec{k}$$

Exercice 06 :

Dans le repère (O, $\vec{u}_x$, $\vec{u}_y$, $\vec{u}_z$), modéliser l'action mécanique due à la pression hydrostatique de l'eau sur la paroi verticale du barrage de la figure ; sachant que chaque élément de surface ds situé autour d'un point M_i de la paroi verticale subit un effort élémentaire $d\vec{f}_i = p_{M_i}.ds.\vec{u}_x$ (Modèle élémentaire). Selon les lois de l'hydrostatique on a $p_{M_i} = \rho g(h - y)$, avec ρ la masse volumique de l'eau et g l'accélération de la pesanteur.

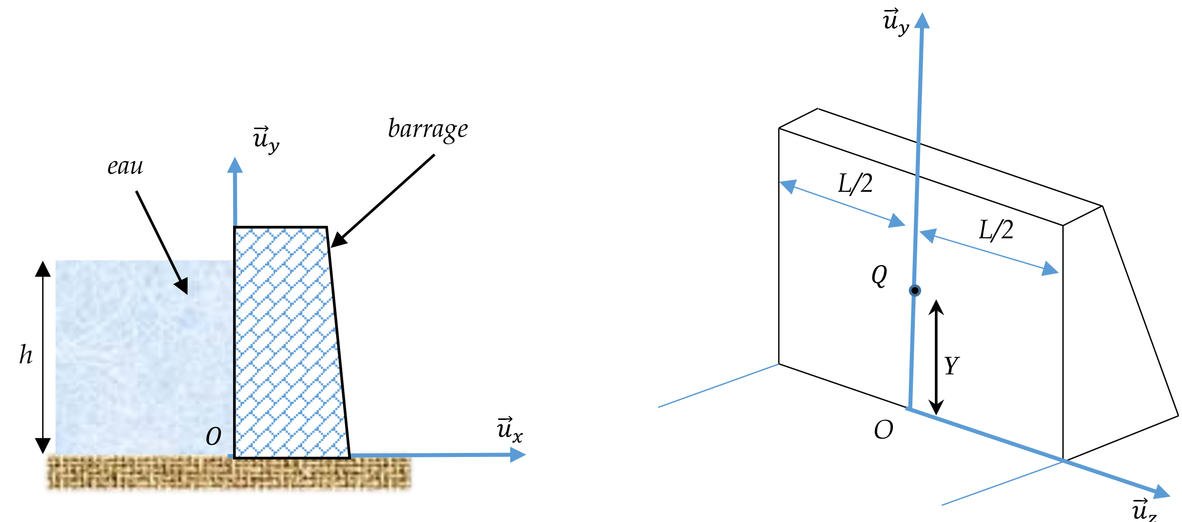


Figure. Pression de l'eau sur la paroi verticale d'un barrage

Solution:

Chaque élément de surface *ds* situé autour d'un point M_i de la paroi verticale subit un effort élémentaire $d\vec{f_i} = p_{M_i}.ds.\vec{u}_x$ (Modèle élémentaire). Selon les lois de l'hydrostatique on a $p_{M_i} = \rho g(h-y)$, avec ρ la masse volumique de l'eau et g l'accélération de la pesanteur.

Les coordonnées cartésiennes du point M_i de la paroi sont (0, y, z), avec $y \in [0, h]$ et $z \in [-L/2, L/2]$. L'élément de surface est $ds = dy.dz$.

L'intégration des actions élémentaires de l'eau sur la paroi nous donne la résultante $\vec{\boldsymbol{R}}_{eau/paroi}$:

$$\vec{\boldsymbol{R}}_{eau/paroi} = \iint_{paroi} d\vec{f_i} = \iint_{paroi} p_{M_i}.ds.\vec{u}_x = \int_0^h \int_{-L/2}^{L/2} \rho g(h-y).dy.dz.\vec{u}_x = \rho g \int_0^h (h-y).dy \int_{-L/2}^{L/2} dz\,.\vec{u}_x$$

$$= \rho g L \frac{h^2}{2} \vec{u}_x$$

Déterminons le moment de ces actions élémentaires au niveau d'un point Q de la verticale ($\overrightarrow{OQ} = Y\vec{u}_y$).

$$\vec{\boldsymbol{M}}_Q = \iint_{paroi} \overrightarrow{QM_i} \times d\vec{f_i} = \iint_{paroi} \left((y-Y)\,\vec{u}_y + z\,\vec{u}_z\right) \times \rho g(h-y).dy.dz.\vec{u}_x$$

$$= \iint_{paroi} \left(-(y-Y).\rho g(h-y).dy.dz\,\vec{u}_z + z\rho g(h-y).dy.dz\,\vec{u}_y\right)$$

$$= \rho g \int_0^h (h-y).dy\,. \int_{-L/2}^{L/2} zdz\,.\vec{u}_y - \rho g \int_0^h (y-Y)(h-y).dy. \int_{-L/2}^{L/2} dz\,.\vec{u}_z$$

$$= -\rho g L \left[\frac{h^3}{6} - \frac{Yh^2}{2}\right] \vec{u}_z$$

Ainsi, on peut dire que l'ensemble des actions mécaniques de pression hydrostatique exercées par l'eau sur la paroi verticale du barrage peut être modélisé en tout point Q par le torseur suivant :

$$\vec{\boldsymbol{\tau}}_{eau/paroi} = \left\{ \rho g L \frac{h^2}{2} \vec{u}_x \quad -\rho g L \left[\frac{h^3}{6} - \frac{Yh^2}{2}\right] \vec{u}_z \right\}_Q$$

Ce torseur se réduit à un glisseur (moment nul), au niveau du point Q de coordonnées (Y=h/3, z=0).