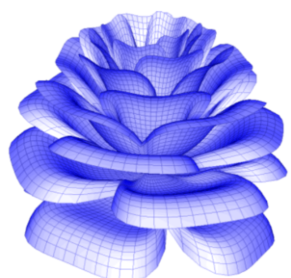
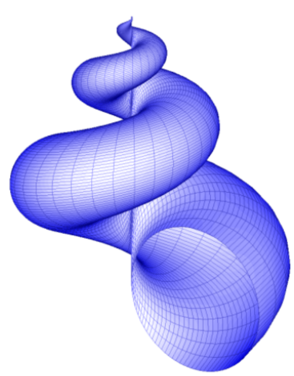
Cours de Mathématiques 2

Chapitre 6 : Systèmes d'équations linéaires



Imene Medjadj



0.1 Systèmes d'équations linéaires

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

On appelle système de n équations linéaires à p inconnus à coefficients dans $\mathbb{K}$, tout système de la forme :

$$(S) : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1p}x_p & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2p}x_p & = b_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{np}x_p & = b_n \end{cases}$$

où les $(x_j)_{j=1,..,p}$ sont les inconnues, les $(a_{ij}), b_j \in \mathbb{K}$.

`1)Forme matricielle du système :`

Posons $A = (a_{ij})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq p}, B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ Le système (S) devient ; $AX = B$.

Si f est une application linéaire de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$ telle que que A soit la matrice associée à f suivant les bases canoniques et si on note par $X = (x_1, ..., x_p)$ et $b = (b_1, ..., b_n)$, le système (S) devient $f(X) = B$.

`2)Solution du système :`

Définition 0.1.1. *On appelle solution du système (S) tout élément $X = (x_1, ..., x_p)$ vérifiant les n équations de (S) ceci revient à trouver un vecteur X tel que $AX = B$ ou encore un élément $X \in \mathbb{K}^p$ tel que $f(X) = B$.*

Exemple 0.1.2.

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 3x - y = 4 \\ x - y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

`3)Rang d'un système linéaire :`

Le rang d'un système linéaire est le rang de la matrice $(a_{ij})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq p}$. Si r est le rang du système linéaire (S), alors $r \leq n$ et $r \leq p$.

0.1.1 Système de Cramer

Définition 0.1.3. *Le système (S) est dit de Cramer si $n = p = r$ c'est à dire, (S) est un système de n équations à n inconnus et telle que*

$$detA \neq 0.$$

Théorème 0.1.4. *Tout Le système de Cramer admet une solution donnée par : $X = A^{-1}B$.*

Exemple 0.1.5.

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow AX = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \times X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = B$$

$detA = 1 \neq 0, rgA = 2,$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix},$$

ainsi

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

Théorème 0.1.6. *Dans un système de Cramer, la solution est donnée par les formules :*

$$x_i = \frac{detA_i}{detA}, i = 1, ..., n.$$

Où les A_i est la matrice réduite de A, en remplaçant la colonne i par le vecteur B.

Exemple 0.1.7.

$$(S) : \begin{cases} 2x + 2y + z = 1 \\ 2x + y - z = 2 \\ 3x + y + z = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$detA = 4 \neq 0, rgA = n = p = 3$ *((S) est un système de cramer).*

$$x = \frac{detA_1}{detA} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-7} = 9/7.$$

$$y = \frac{detA_2}{detA} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{-7} = -5/7.$$

$$z = \frac{detA_3}{detA} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{-7} = -1/7.$$

`3)Cas où` $n = p$ `et` $r < n$ `:`
Si on considère maintenant un système de n équations à n inconus, mais $rgA < n$ c'est à dire

$$detA = 0,$$

dans ce cas on extrait une matrice M de A sachant que c'est la plus grande matrice carrée inversible c'est à dire $detM \neq 0$ contenue dans A et d'ordre r c'est ce qu'on appelle une sous-matrice, les inconnus associés à M deviennent des inconnus principales et les $(n - r)$ autres inconnus deviennent des paramètres où bien ce qu'on appelle valeurs arbitraires et on considère le système suivant :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1r}x_r & = b_1 - (a_{1r+1}x_{r+1} + ... + a_{1n}x_n) = b'_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2r}x_r & = b_2(a_{2r+1}x_{r+1} + ... + a_{2n}x_n) = b'_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + ... + a_{rr}x_r & = b_n(a_{rr+1}x_{r+1} + ... + a_{rn}x_n) = b'_r \end{cases}$$

ce dernier est un système de cramer, donc il admet une seule solution $(x_1, ..., x_r)$ qui dépend de $(x_{r+1}, ..., x_n)$. Si cette solution vérifie les $(n - r)$ équations restantes, alors le système globale admet une infinité de solutions. Si par contre $(x_1, ..., x_r)$ ne vérifie pas une seule équation parmis les $(n - r)$ équations restantes alors le système globale n'admet de solution.

Exemple 0.1.8.

$$(S) : \begin{cases} 3x - y + 2z = 3 \\ 2x + 2y + z = 2 \\ x - 3y + z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$detA = 0$ (S) n'est pas un système de Cramer comme $|A'| = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 8 \neq 0$. Alors $rgA = 2$ et on considère x, y les inconnus et z paramètre, alors on obtient le système :

$$\left\{ \begin{array}{ll} 3x - y = & 3 - 2z \\ 2x + 2y = & 2 - z \end{array} \right.$$

qui est un système de Cramer et admet une unique solution (x, y) dépendante de z.

$$x = 1/8 \begin{vmatrix} 3 - 2z & -1 \\ 2 - z & 2 \end{vmatrix} = 1 - (5/8)z$$

$$y = 1/8 \begin{vmatrix} 3 & 3 - 2z \\ 2 & 2 - z \end{vmatrix} = 1/8z$$

Reste à voir si (x, y) vérifie $x - 3y + z = 1$(équation réstante) on a : $1 - 5/8z - 3/8z + z = 1 \Rightarrow 1 = 1$(vraie $\forall t \in \mathbb{R}$) donc le système admet une infinité de solutions données par :

$$(1 - 5/8z, 1/8z, z)/z \in \mathbb{R}.$$

`3)Cas où` $n \neq p$:

Si le nombre d'équations n'est pas égale au nombre d'inconnus, alors on cherche d'abord le rang de A et on procède comme précédement. Si M est une matrice contenue dans A et d'ordre r et $detM \neq 0$ alors on considère le système de r équations à r inconnus correspondant à M qui est un système de Cramer.
Si la solution vérifie les équation restantes alors le système globale admet une infinité de solutions sinon il n'admet aucune solution.

Exemple 0.1.9.

$$(S) : \left\{ \begin{array}{l} 3x - y = 4 \\ 2x + 2y = 3 \\ x - 5y = -5 \end{array} \right. \Leftrightarrow A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$$

le rang de $A \leq 2$ choisissons

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow detM = 8 \neq 0 \Rightarrow rgM = 2.$$

on prend le système :

$$\left\{ \begin{array}{l} 3x - y = 4 \\ 2x + 2y = 3 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 11/8 \\ y = 1/8 \end{array} \right.$$

on a l'équation réstante :

$$x - 5y = -5 \Rightarrow 11/8 - 5/8 = 6/8 = 3/2 \neq -5$$

alors le système n'admet pas de solutions.

Dr. I.Medjadj