I- Les Suites

1) La suite (U_n) est majorée si pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe $M \in \mathbb{R}$, $(U_n) \leq M$

---

2) La suite (U_n) est minorée si pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $m \in \mathbb{R}$, $m \leq U_n$

(U_n) majorée $\iff \forall n \in \mathbb{N}, \exists M \in \mathbb{R} ; U_n \leq M$

(U_n) minorée $\iff \forall n \in \mathbb{N}, \exists m \in \mathbb{R} ; m \leq U_n$

---

3) La suite (U_n) est bornée si (U_n) majorée et minorée

(U_n) bornée $\iff \forall n \in \mathbb{N}, \exists m, M \in \mathbb{R}$
$m \leq U_n \leq M$

---

4) Suite (U_n) est croissante si :
$U_{n+1} - U_n \geq 0$

---

5) Suite (U_n) est decroissante si
$U_{n+1} - U_n \leq 0$

---

6) (U_n) est borné si $(|U_n|)$ est bornée

---

7) On dit que (U_n) est convergente et elle converge vers l. Si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un entier $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tq : $n > N_\varepsilon$ Alors : $|U_n - l| < \varepsilon$

(U_n) converge vers $l \iff \forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$
$\forall n > N_\varepsilon : |U_n - l| < \varepsilon$

---

8) Si $\lim_{n \to +\infty} U_n = \pm\infty$ ou bien (U_n) n'admet pas de limite donc (U_n) est divergente

9) Si une suite a une limite l dans $\mathbb{R}$ alors la limite l est unique

---

10) Si la limite (U_n) est convergente alors : (U_n) est bornée

---

11) La suite (U_n) tend vers $+\infty$
SSi $\forall A \in \mathbb{R}, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n > N_\varepsilon$:
$U_n > A$

---

12) La limite (U_n) tend vers $-\infty$
SSi $\forall B \in \exists N_\varepsilon, \forall n > N_\varepsilon : U_n < B$

---

13) On a : (U_n) et (V_n) deux suites
Si la suite (U_n) est borné et $\lim_{n \to +\infty} V_n = 0$
Alors : la suite $((U_n) \cdot (V_n))$ converge vers 0

---

14) La Convergence :

- Toute suite croissante + majorée est conv
- Toute suite decroissante + minorée est "
- Toute suite monotone + bornée est "

---

15)

- Toute suite croissante + non majorée $\longrightarrow +\infty$
- Toute suite decroissante + non minoré $\longrightarrow -\infty$

---

16) Si la suite (U_n) est convergente alors toute sous suite extraite est convergente vers la même limite de (U_n) donc : vers l

17) Une suite divergente peut admettre des sous suites extraite convergente

---

18) Si les sous suites extraites sont convergentes mais pas vers la même limite donc : La suite est divergente

---

19) Soit (U_n) et (V_n) deux suites on dit que (U_n) et (V_n) suite adjacentes SSi :
1. (U_n) est croissante (decroissante)
2. (V_n) est decroissante (croissante)
3. $\lim_{n \to +\infty} U_n - V_n = 0$

---

20) Si (U_n) et (V_n) sont adjacentes alors elles convergent vers la même limite $\lim_n U_n = \lim_n V_n = l$

---

21) Suite arethmetique

- Sa raison r : $U_{n+1} = U_n + r$
- Son terme generale $U_n = U_p + (n-p)r$
- Sa somme : $S = U_0 + U_1 + \dots + U_n$

$S = \frac{\text{nbr des termes}}{2} (\text{1er terme} + \text{dernier terme})$

- nbr des termes : indice f - indice i + 1

$S = \frac{n-0+1}{2} (U_0 + U_n) = \frac{n+1}{2} (U_0 + U_n)$

- La methode pour montrer que (U_n) est une suite arethmetique il suffit de calculer : $U_{n+1} - U_n = r$ r constant

---

22) Suite geometique :

- Sa raison q $V_{n+1} = q V_n$
- Son terme general $V_n = V_p \cdot q^{n-p}$
- Sa Somme $S = V_0 + V_1 + \dots + V_n$

$S = \text{premier terme} \cdot \frac{1 - q^{\text{nbr de termes}}}{1-q}$

$S = V_0 \cdot \frac{1 - q^{n-0+1}}{1-q} = V_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

La methode pour montrer que (V_n) est une suite geometique il suffit de calculer $\frac{V_{n+1}}{V_n} = q$ (q constant) q ne depend pas de n

---

23) Suite de Cauchy

(U_n) est une suite de Cauchy SSi :
$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon, \forall p, \forall q \quad p > q > N_\varepsilon$
$|U_p - U_q| < \varepsilon$

---

24) (U_n) n'est pas une suite de Cauchy la majorité on prend $p = 2n$ et $q = n$ et on trouve a la fin que $|U_p - U_q| > \varepsilon$

---

25) Toute suite de Cauchy est une suite convergente.

---

26) Toute suite de Cauchy est une suite bornée.

---

27) De toute suite bornée on peut extraire des sous-suites convergentes (theoreme de Bolzano Weirstrass)

---

28) Si (U_n) est une suite recurrente dont U_{n+1} s'exprime en fonction de U_n
$U_{n+1} = f(U_n)$, U_0 donné
(U_n) est convergente donc
$\lim_n U_n = \lim_n U_{n+1} = l$

---

29) Les suites recurrente de 2ème ordre

une suite recurrente de 2ème ordre est une suite de la forme $U_{n+2} = f(U_{n+1}) U_n$

$U_{n+2} + a U_{n+1} + b U_n = 0$
$a, b \in \mathbb{R}$

30) Equation du 2ème ordre homogène

La solution d'une equation homogène est : $U_n = r^n$

$U_{n+1} = r^{n+1}$, $U_{n+2} = r^{n+2}$

$U_{n+2} + aU_{n+1} + bU_n = 0$

$r^{n+2} + ar^{n+1} + br^n = 0$

$r^n(r^2 + ar + b) = 0 \Rightarrow r^2 + ar + b = 0$

Si $\Delta = 0$, $r_1 = r_2 = r$, $U_n = \lambda r_1^n + \beta n r_2^{n-1}$

Si $\Delta > 0$, r_1, r_2 , $U_n = \lambda r_1^n + \beta r_2^n$

Si $\Delta < 0$, $r_1 = \alpha + i\beta = \rho e^{i\theta}$

$r_2 = \alpha - i\beta = \rho e^{-i\theta}$

$U_n = \lambda \rho^n e^{in\theta} + \beta \rho^n e^{-in\theta}$

31) Suite Complexe :

- est une suite qui s'ecrit sous la forme :

$U_n = a_n + i\, b_n$

Avec : (a_n) et (b_n) sont des suites reelles

- (U_n) converge Si (a_n) et (b_n) sont convergente.

- $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n + i \lim\limits_{n\to+\infty} b_n$

3

II. Les fonctions et les limites :

1) les fonctions composées

$g\circ f(x) = g(f(x))$

2) En general : $f\circ g \neq g\circ f$

3) fonction paire :

- f est paire SSi $\forall x \in D_f$ et $f(-x) = f(x)$
- Le graphe d'une f paire est Symetrique par rapport a l'axe (oy)

4) fonction impaire

- f est impaire SSi $\forall x \in D_f$ et $f(-x) = -f(x)$
- Le graphe d'une f impaire est Symetrique par rapport a l'origine $O(0,0)$

5) fonction periodique :

f est periodique de periode T $(T \in \mathbb{R})$ SSi : $\forall x \in D_f$: $(x+T) \in D_f$ et $f(x+T) = f(x)$

6) f est majorée $\Leftrightarrow \forall x \in D_f, \exists M \in \mathbb{R}$ $f(x) \leq M$

7) f est minorée $\Leftrightarrow \forall x \in D_f, \exists m \in \mathbb{R}$ $m \leq f(x)$

8) f est bornée Si elle est minorée et majorée

9) f est croissante SSi : $\forall x, y \in D_f$ $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$

10) f est decroissante SSi : $\forall x, y \in D_f$ $x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$

11) f est monotone SSi f est croissante ou décroissante

12) $\lim_{x \to x_0} f(x) = l \iff$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in D_f : |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$

13) $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \iff$

$\forall A \in \mathbb{R}, \exists \eta > 0, \forall x \in D_f : |x - x_0| < \eta \Rightarrow f(x) > A$

14) $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty \iff$

$\forall A \in \mathbb{R}, \exists \eta > 0, \forall x \in D_f :$
$|x - x_0| < \eta \Rightarrow f(x) < A$

15) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l \iff$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in D_f, x > \eta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$

16) $\lim_{x \to x_0} f(x) = l \iff \lim_{x \overset{>}{\to} x_0} f(x) = \lim_{x \overset{<}{\to} x_0} f(x) = l$

17) $\lim_{x \overset{>}{\to} x_0} f(x) = l_1$ et $\lim_{x \overset{<}{\to} x_0} f(x) = l_2$

et $l_1 \neq l_2$

donc f n'admet pas une limite en x_0

18) Si f admet une limite donc : f est bornée

19) Si f est bornée et $\lim g(x) = 0$
Alors : $\lim f(x) - g(x) = 0$

20) Relation entre suite et fonction

Si f admet une limite l en x_0 ($\lim_{x_0} f(x) = l$) Alors pour toute suite (U_n) qui converge vers x_0

On a : $\lim_{n \to +\infty} f(U_n) = l$

21) f continue en $x_0 \iff$
$\lim_{x \overset{>}{\to} x_0} f(x) = \lim_{x \overset{<}{\to} x_0} f(x) = f(x_0)$

22) f continue en x_0 SSi $\lim_{x \overset{>}{\underset{<}{\to}} x_0} f(x) = f(x_0)$

Par définition (f continue en x_0)
$\forall \varepsilon > 0, \exists M, \forall x > M, |x - x_0| < M \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

23) f est continue sur $[a, b]$ SSi f est continue en tout $x_0 \in]a, b[$ et continue à droite de a et à gauche de b, et on écrit : $f \in C([a, b], \mathbb{R})$ avec $C([a, b], \mathbb{R})$ est l'ensemble des f continues sur $[a, b]$

24) les fonctions polynomiales et rationelles sont définies et continues sur leurs domaines défi

25) Continuité Uniforme :
f définie sur I
f est uniformement continue sur I SSi
$\forall \varepsilon > 0, \exists M, \forall x, y \in I : |x - y| < M \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

26) f est lipschitzienne SSi
$\exists K \in \mathbb{R}, \forall x, y \in I, |f(x) - f(y)| < K|x - y|$

27) Théorème des valeurs intermédiaires
f est définie et continue sur $[a, b]$
$+ f(a) \times f(b) < 0$
Alors $\exists c \in]a, b[$ tel que $f(c) = 0$

28) prolongement par continuité :
f est définie et continue sur I sauf $x_0 \in I$
Si $\lim_{x \to x_0} f(x)$: existe l finie
Alors f admet un P. par continuité tq.

$$f(x) = \begin{cases} f(x) & \text{Si } x \neq x_0 \\ \lim f(x) = l & \text{Si } x = x_0 \end{cases}$$