Rappels et notations

H. Benhassine

Octobre 2021

Contents

Chapter 1

Rappels et notations

1.1 La partie entière d'un réel

Commençons par rappeler que l'on note:

- L'ensemble des nombres entiers naturels par: $\mathbb{N}$.
- L'ensemble des nombres entiers par: $\mathbb{Z}$.
- L'ensemble des nombres rationnels par: $\mathbb{Q}$.
- L'ensemble des nombres réels par: $\mathbb{R}$.
- L'ensemble des nombres complexes par: $\mathbb{C}$.

Et l'on a les inclusions: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Définition 1.1.1 *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on notera par $E(x)$ (ou par $[x]$), la partie entière du nombre x, définie comme étant le nombre entier vérifiant la relation:*

$$E(x) \leq x < E(x) + 1,$$

C"est à dire que $E(x) \in \mathbb{Z}$ est le plus grand des entiers inférieur ou égal à x. Et l'on peut écrire:

$$x = E(x) + \varepsilon, \text{ avec: } 0 \leq \varepsilon < 1.$$

Exemple 1.1.2 $E(5,19) = 5$, $E(-5,19) = -6$, $E(\pi) = 3$.

1.2 Les ensembles

- Soit A un sous-ensemble de E : $A \subset E$. On note l'ensemble des sous-ensembles de E par $P(E)$. Alors: $A \in P(E)$.
- On note le complémentaire de A dans E par: C_E^A.
- Soient A et B deux ensembles. On note alors par: $A - B$ l'ensemble ces éléments appartenant à A et qui ne sont pas dans B.

• On note par: $Card(E)$, le cardinale de E (c'est à dire le nombre d'éléments de E). On a forcément: $Card(E) < Card(P(E))$.

• Soient A et B deux ensembles. On définit l'ensemble produit $A \times B$ par:

$$A \times B = \{(x, y) \, / x \in A \text{ et } y \in B\}.$$

En particulier: $A^2 = \{(x, y) \, / x \in A \text{ et } y \in A\}$.

• Soit $I = \{1, 2, \cdots, n\}$. Alors on a:

$$\begin{aligned} \underset{i \in I}{\cup} E_i &= E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n, \\ \underset{i \in I}{\cap} E_i &= E_1 \cap E_2 \cap \cdots \cap E_n. \end{aligned}$$

• On dit des sous-ensemble $(E_i)_{i \in I}$ qu'ils forment une partition de l'ensemble E si et seulement si:

$$\begin{cases} \forall i \neq j : E_i \cap E_i = \emptyset, \\ \quad E = \underset{i \in I}{\cup} E_i. \end{cases}$$

1.3 Un peu de logique

On rappelle qu'une proposition est un énoncé formé d'un assemblage de symboles et de mots, auquel une valeur de vérité vrai ou faux peut être attribuée.

• Soient P et Q deux propositions, alors on a les équivalences suivantes:

$$\begin{aligned} \overline{P \wedge Q} &\Leftrightarrow \overline{P} \vee \overline{Q}, \\ \overline{P \vee Q} &\Leftrightarrow \overline{P} \wedge \overline{Q}, \\ (P \Rightarrow Q) &\Leftrightarrow (\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}), \\ (\overline{P \Rightarrow Q}) &\Leftrightarrow (P \wedge \overline{Q}), \end{aligned}$$

où les symboles $\overline{P}, \wedge, \vee$ signifient respectivement "la négation de P", "et", "ou".

• Les expressions « **pour tout** » et « **il existe** » utilisées pour formuler des propositions mathématiques sont appelées des $quantifications$ et le symbole qui les représente sont respectivement $\forall$ (*quatificateur universel*) et $\exists$ (*quatificateur existentiel*).

En mathèmatique l'inclusion de l'ensemble A dans l'ensemble B s'écrit:

$$A \subseteq B \Leftrightarrow (\forall x \in A \Rightarrow x \in B).$$

La négation de cette proposition sera alors:

$$A \nsubseteq B \Leftrightarrow (\exists x \in A \ \wedge \ x \notin B).$$

1.4 Les applications

• Soit f l'application (ou bien la fonction) définie par:

$$\begin{aligned} f: \quad E &\longrightarrow F \\ x &\longmapsto f(x) = y. \end{aligned}$$

On dit que:

$$
\begin{aligned}
f \text{ est surjective} &\Leftrightarrow \forall y \in F, \exists x \in E : f(x) = y. \\
f \text{ est injective} &\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in E : f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2. \\
f \text{ est bijective} &\Leftrightarrow f \text{ est surjective et injective.} \\
&\Leftrightarrow \forall y \in F, \exists! x \in E : f(x) = y \text{ } (x \text{ est unique}).
\end{aligned}
$$

• Soit $A \subset E$. On appelle l'image de A par l'application f l'ensemble défini par:

$$f(A) = \{y \in F / \exists x \in A : f(x) = y\}.$$

• Si l'application f est bijective, elle admet alors une application inverse, notée: f^{-1} définie de F vers E telle que:

$$f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x.$$

On a alors: $f \circ f^{-1}(y) = y$ et $f^{-1} \circ f(x) = x$ (le symbole $\circ$ représente la composée de deux fonctions).

• Soit $B \subset F$. On appelle l'image inverse de B par l'application f l'ensemble défini par:

$$f^{-1}(B) = \{x \in E / f(x) \in B\}.$$

(Il faut bien différencier entre $f^{-1}(B)$ l'image inverse de B qui est un ensemble toujours défini et f^{-1} l'application inverse de f qui n'est définie que si f est une bijection).

1.5 Les relations

• Soit l'ensemble E sur lequel est définie une relation $\Re$. On dit de $\Re$, que c'est une relation d'équivalence, si et seulement si:

$$
\begin{aligned}
\Re \text{ est réfléxive} &\Leftrightarrow \forall x \in E : x \,\Re\, x, \\
\Re \text{ est symétrique} &\Leftrightarrow \forall x, y \in E : x \,\Re\, y \Rightarrow y \,\Re\, x, \\
\Re \text{ est transitive} &\Leftrightarrow \forall x, y, z \in E : (x \,\Re\, y \text{ et } y \,\Re\, z) \Rightarrow x \,\Re\, z.
\end{aligned}
$$

• On définit la classe d'équivalence associée à l'élément $x \in E$ par:

$$\overline{x} = \{y \in E / y \,\Re\, x\}.$$

• On dit d'une relation $\Re$ est anti-symétrique, si et seulement si:

$$
\begin{aligned}
&\Re \text{ est réfléxive} \\
&\Re \text{ est anti-symétrique} \Leftrightarrow \forall x, y \in E : x \,\Re\, y \text{ et } y \,\Re\, x \Rightarrow x = y. \\
&\Re \text{ est transitive}
\end{aligned}
$$

1.6 Le dénombrement

• On appelle **arrangement**, que l'on note A_n^p , le nombre de p-uplets (où bien p-liste) que l'on peut former à partir de n éléments, sans répitition et où l'ordre des éléments est important. Ce nombre est donné par la formule:

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!} = n(n-1)(n-2)\cdots(n-p+1).$$

• On appelle **combinaison**, que l'on note C_n^p , le nombre de p-ensemble (sous-ensemble qui contiennent p éléments) que l'on peut former à partir de n éléments, sans répitition et où l'ordre des éléments n'est pas important. Ce nombre est donné par la formule:

$$C_n^p = \frac{n!}{(n-p)!p!} = \frac{A_n^p}{p!}.$$

(On rappellera que $n!$ est le symbole du factoriel tel que: $n! = n(n-1)(n-2)\cdots 2$).

1.7 Les ensembles finis, dénombrables et infinis

• On dit de deux ensembles E et F qu'ils sont de même puissance, s'il existe une application bijective entre les deux et l'on écrira alors: $E \sim F$. Cela signifie qu'ils ont le même nombre d'éléments: $Card(E) = Card(F)$.

• On dit d'un ensemble E qu'il est infini si et seulemnt si: $Card(E) = +\infty$.

• On dit d'un ensemble E qu'il est fini si et seulemnt si: $Card(E) < +\infty$. Dans ce cas:

$$E \sim \mathbb{N}_n = \{1, 2, 3, \cdots, n\}.$$

• On dit d'un ensemble E qu'il est dénombrable, ou infini dénombrable, lorsque ses éléments peuvent être listés sans omission ni répétition dans une suite indexée par les entiers. C'est à dire que l'on a: $E \sim \mathbb{N}$.

(Un ensemble fini est forcément dénombrable; un ensemble infini peut étre dénombrable).

Exemple 1.7.1

- L'ensemble des nombres naturels $\mathbb{N}$ est un ensemble infini dénombrable. Il en est de même pour les deux ensembles $2\mathbb{N}$ et $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

- L'intervalle $[1, 2]$ constitu un ensemble infini et non dénombrable d'éléments.

- L'ensemble $\{n \in \mathbb{N}/n \leq 7\}$ est un ensemble fini, donc forcément dénomrable.

1.8 L'alphabet grec

Rappelons ici quelques lettres grecques que l'on est peut être appeller à utiliser par la suite:

Prononciation	**Minuscule**	**Majuscule**
alpha	α	
beta	β	
gamma	γ	Γ
delta	δ	Δ
epsilon	ε	
zeta	ζ	
eta	η	
theta	θ	Θ
kappa	κ	
lambda	λ	Λ
mu	μ	

Prononciation	**Minuscule**	**Majuscule**
nu	ν	
pi	π	Π
rho	ρ	
sigma	σ	$\sum$
tau	τ	
upsilon	υ	Υ
phi	ϕ	Φ
chi	χ	
psi	ψ	Ψ
omega	ω	Ω

Parfois, on est amené à utliser aussi en mathèmatique l'opérateur ∇ "nabla" et l'opérateur de dérivée partielle ∂ "d rond".

Généralement, la lettre ε est utilisée pour représenter un nombre positif infinitisimal.