'HB Faculté de mathématiques
Module : Proba-Stat.

29/01/2020
GP - Section G / GM - Sections K et I

Nom :
Prénoms :
Matricule :
Gpe :

Epreuve Finale

Il est strictement interdit de se prêter les affaires. Les portables doivent être éteints et rangés. Les calculs doivent être justifiés dans les tableaux statistiques.

08/08

Exercice1 : (8 points)

Sur un échantillon de solutions chimiques, nous avons mesuré la solubilité Y (en mol/L) d'un certain composé ionique. Les résultats des expériences sont regroupés en classes comme suit :

Classes	Y_i	n_i	n_{ic}	n_iZ_i	$n_iZ_i^2$	Z_i
[0,1 – 0,4[	0,25	9	9	-9	9	-1
[0,4 – 0,7[	0,55	12	21	0	0	0
[0,7 – 1,0]	0,85	10	31	10	10	1
Σ		31		1	19	

2

1/ - Quel est le caractère étudié : La solubilité

- Donner sa nature : quantitatif – continu

1

2/ Calculer la médiane.

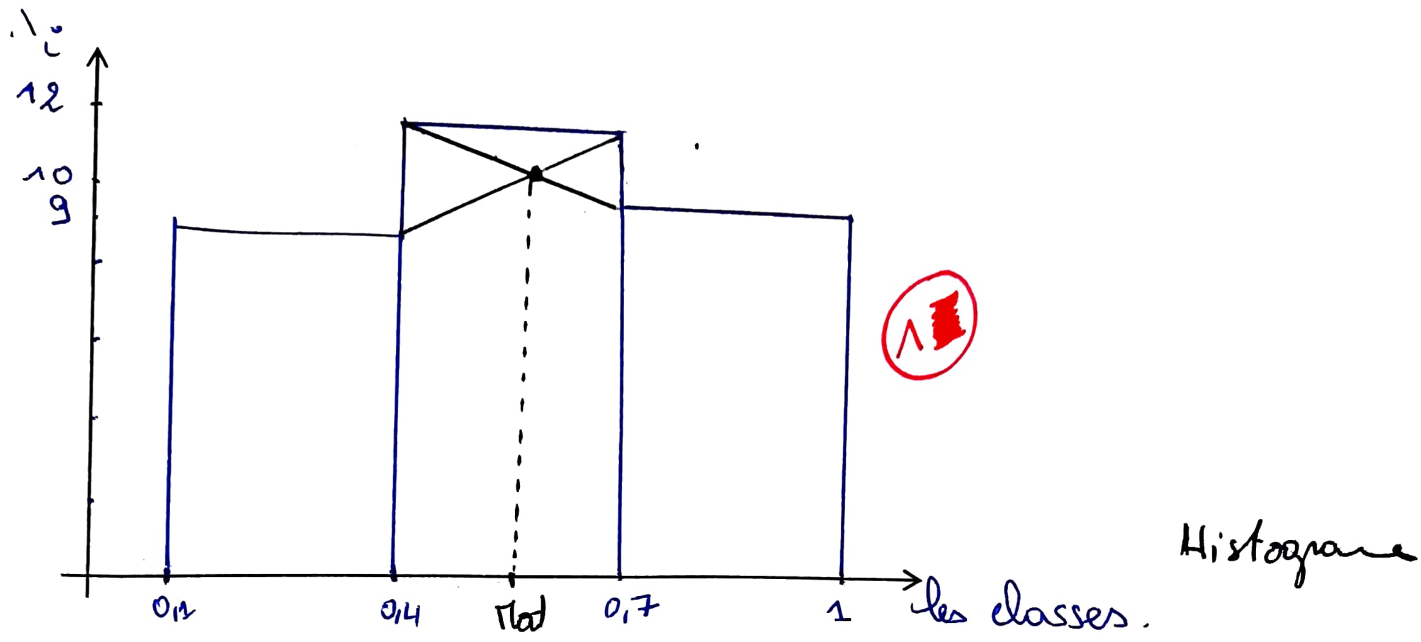
$Me = q_{0,5}$; $n\alpha = 31 \times 0,5 = 15,5$; $C_{0,5} = [0,4 ; 0,7[$

$Med = 0,4 + 0,3 \dfrac{15,5 - 9}{12} = 0,56$ 1

3/ Calculer le mode et représenter le graphiquement.

La classe modale est : [0,4 ; 0,7[1

$Mo = 0,4 + 0,3 \dfrac{(12-9)}{(12-9)+(12-10)} = 0,4 + 0,3 \dfrac{3}{3+2} = 0,58$



1

4/ Calculer la moyenne et la variance en utilisant le changement de variable :

$Z = \frac{Y-b}{a}$ avec $a = 0,3$ et $b = 0,55$.

$\overline{Z} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{3} n_i Z_i = \frac{1}{31} \cdot 1 = 0,032$ 0,5 $\Rightarrow \boxed{\overline{Z} = 0,032}$

$V(Z) = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{3} n_i Z_i^2\right) - \overline{Z}^2 = \left(\frac{1}{31} \cdot 19\right) - (0,032)^2 = 0,61$

On a : $Z = \frac{Y-b}{a} \Rightarrow \boxed{Y = aZ + b}$ donc : $\boxed{V(Z) = 0,61}$ 0,5

$\overline{Y} = a\overline{Z} + b = 0,3(0,032) + 0,55 = 0,56$ 0,5 $\Rightarrow \boxed{\overline{Y} = 0,56}$

$V(Y) = a^2 V(Z) = (0,3)^2 \cdot 0,61 = 0,055$ 0,5 $\boxed{V(Y) = 0,055}$

12/12

Exercice 2 : (12 points)

Afin d'étudier l'influence du pH (noté X) sur la solubilité Y étudiée dans **l'exercice 1,** nous avons mesuré le pH pour le même échantillon et croisé les données dans le tableau de contingence suivant :

2

X \ Y	[0,1 – 0,4[	[0,4 – 0,7[	[0,7 – 1,0]	$n_{i\cdot}$	$n_{i\cdot} x_i$	$n_{i\cdot} x_i^2$	n_{ic}
[1,5 – 2,5[2	0	1	7	8	16	32	8
[2,5 – 3,5[3	0	10	3	13	39	117	21
[3,5 – 4,5[4	9	1	0	10	40	160	31
$n_{\cdot j}$	9	12	10	31	95	309	/

Partie I : Etude de la variable *X*

1/ Calculer la moyenne et la variance du pH mesuré.

$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{3} n_i x_i = \frac{1}{31} \cdot 95 = 3,064$ 1

$V(X) = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{3} n_i x_i^2\right) - \bar{X}^2 = \left(\frac{1}{31} \cdot 309\right) - (3,064)^2 = 0,58$

0,604

$\Rightarrow \boxed{\bar{X} = 3,064} \; ; \; \boxed{V(X) = 0,58}$

2/ Calculer les trois quartiles et représenter les graphiquement.

$Q_1 = q_{0,25}$; $n\alpha = 31 \cdot 0,25 = 7,75$; $q_{0,25} \in [1,5 ; 2,5[$.

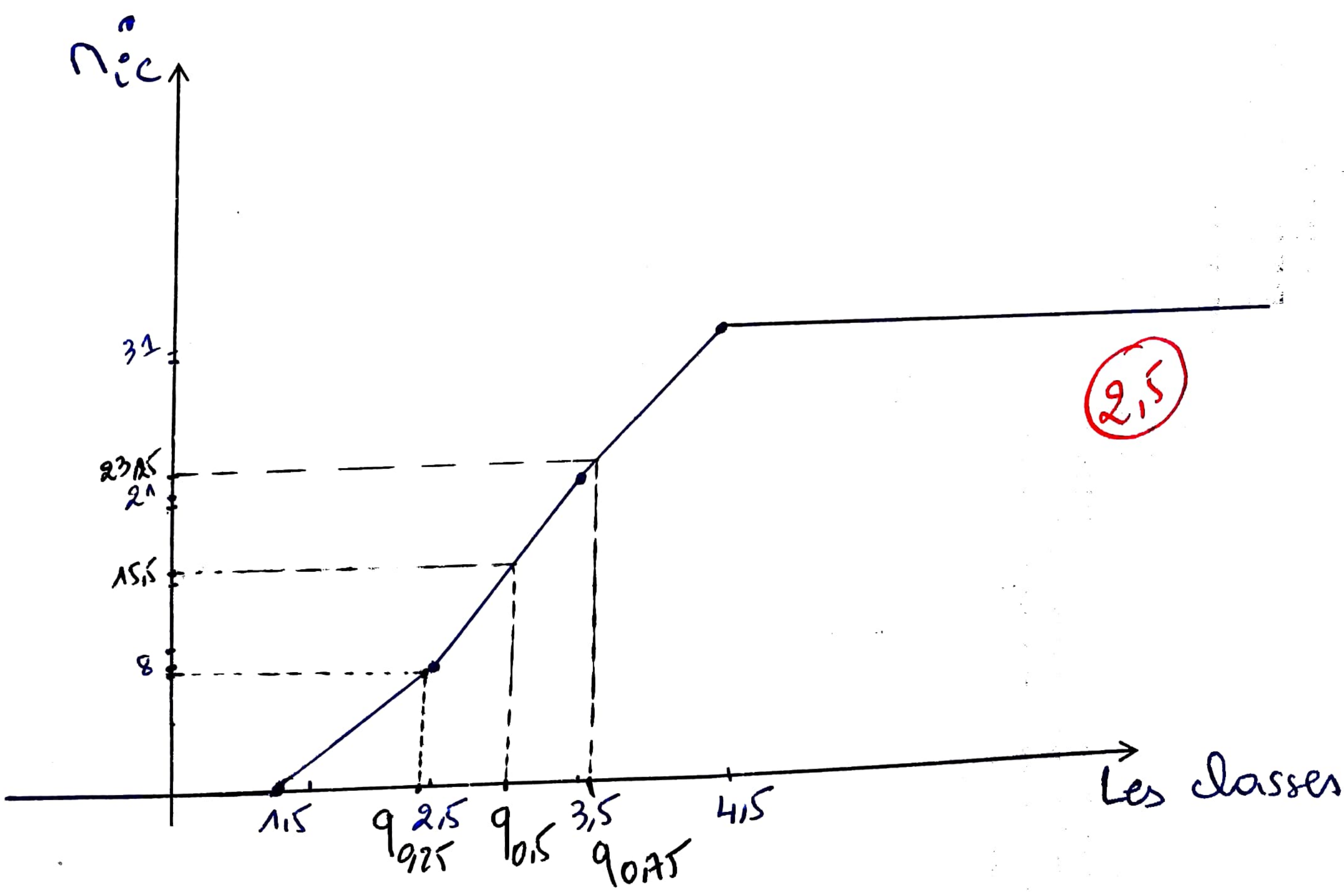
$Q_1 = 1,5 + 1 \cdot \frac{7,75 - 0}{8} = 2,47$ 0,5 $\boxed{Q_1 = 2,47}$

$Q_2 = Med = q_{0,5}$; $n\alpha = 31 \cdot 0,5 = 15,5$; $q_{0,5} \in [2,5 ; 3,5[$

$Q_2 = 2,5 + 1 \cdot \frac{15,5 - 8}{13} = 3,07$ 0,5 $\boxed{Q_2 = 3,07}$

$Q_3 = q_{0,75}$; $n\alpha = 31 \cdot 0,75 = 23,25$; $q_{0,75} \in [3,5 ; 4,5[$.

$Q_3 = 3,5 + 1 \cdot \frac{23,25 - 21}{10} = 3,73$ 0,5 $\boxed{Q_3 = 3,73}$



2,5

Courbe cumulative

tie II : Etude simultanée des variables X et Y :

1/ Les variables X et Y sont-elles indépendantes ? Justifier.

X est indépendant de Y $\Longleftrightarrow$ $n_{ij}\, n = n_{i.} \times n_{.j}$; $\forall i$; $\forall j$ (0,5)

$n_{11}\, n \overset{?}{=} n_{1.} \cdot n_{.1}$ donc X et Y sont dépendants.

$31 \cdot 0 \neq 9 \times 8$

2/ Calculer le coefficient de corrélation (on donne $\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} n_{ij}X_iY_j = 48{,}35$). Un ajustement linéaire est-il justifié? Pourquoi ?

$\rho_{XY} = \dfrac{cov(X,Y)}{\sigma_X\, \sigma_Y}$; $cov(X,Y) = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} n_{ij}\, x_i\, y_j\right) - \bar{X}\bar{Y}$ $-0,156$

$= \left(\frac{1}{31} \cdot 48{,}35\right) - 3{,}064 \cdot 0{,}56 = \boxed{-0{,}16}$ (0,5)

$-0{,}88$

$\rho_{XY} = \dfrac{-0{,}16}{0{,}23 \times 0{,}76} = \boxed{-0{,}91 \quad |\rho| > 0{,}75}$ (0,5) (0,5) ; il y a une forte corrélat° ~~ou la~~ donc l'ajustement linéaire est justifié. (0,5)

$\boxed{cov(X,Y) = -0{,}16}$ $\boxed{\rho_{XY} = -0{,}91}$

3/ Calculer les deux droites de régression.

* (d_1) (1) $y = a x + b$; $a = \dfrac{cov(X,Y)}{V(X)} = \dfrac{-0{,}16}{0{,}58} = -0{,}27$.

$b = \bar{Y} - a\bar{X} = 0{,}56 + (0{,}27)(3{,}064) = 1{,}4$

donc : (d_1) : $y = -0{,}27x + 1{,}4$

(1) * (d_2) $x = a' y + b'$; $a' = \dfrac{cov(X,Y)}{V(Y)} = \dfrac{-0{,}16}{0{,}055} = -2{,}9$

$b' = \bar{X} - a'\bar{Y} = 3{,}064 + (2{,}9)\, 0{,}56 = \cancel{1{,}44}\ 4{,}68$

donc : (d_2) : $x = -2{,}9y + 4{,}68$

4/ Pour un pH égal à 5 quelle serait la solubilité ?

(0,5) $x = 5$; cherchons y :

(d_1) $y = -0{,}27x + 1{,}4$; $y = -0{,}27(5) + 1{,}4 = 0{,}05$.