Université Oran 1 Ahmed Ben Bella

Faculté des Sciences Exactes et Appliquées

Licence 1 MI (2022/2023)

Examen final d'Algèbre 1 - Durée 01h30

Exercice 1. (*4 pts*)
Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier vos réponses.

1. Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux propositions logiques, alors on a
$$(\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}) \iff (\mathcal{Q} \vee \overline{\mathcal{P}})$$
2. Soit E une partie de $\mathbb{R}$ telle que $E = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 1 = 0\}$, alors $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset\}$.
3. Soient E et F deux ensembles et $f : E \longmapsto F$ une application, alors $f(E) = F$.
4. L'anneau quotient $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, +, \times)$ est un corps.

Exercice 2. (*5 pts*)
Soit $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q}$ une application définie par $f(x) = \frac{x}{2}$.

1. Déterminer $f(\mathbb{Z})$ et $f^{-1}(B)$ tel que $B = \{\frac{5}{3}\}$.
2. f est-elle injective, surjective ?

Exercice 3. (*5 pts*)
On définit sur $\mathbb{R}^*$ la relation : $\left\{\forall x, y \in \mathbb{R}^* : \ x\mathcal{R}y \iff x - y = \frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right\}$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Déterminer la classe d'équivalence de 2.

Exercice 4. (*6 pts*)
Soit $G = \mathbb{R} - \{1\}$ et $*$ une loi définie sur G par :
$$x * y = x + y - xy$$

1. Montrer que $(\mathbb{R} - \{1\}, *)$ est un groupe commutatif.
2. Soit l'application $f : (\mathbb{R} - \{1\}, *) \longmapsto (\mathbb{R}^*, .)$ définie par $f(x) = 1 - x$. Montrer que f est un homomorphisme de groupes.

BON COURAGE.

Corrigé

Exercice 1. 0,25 pour chaque réponse +0,75 pour chaque justification

1. **Vraie.** Il suffit de vérifier que la table de vérité de $(\mathcal{Q} \vee \overline{\mathcal{P}})$ est identique à celle de $(\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q})$

$\mathcal{P}$	$\overline{\mathcal{P}}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$	$\mathcal{Q} \vee \overline{\mathcal{P}}$
V	F	V	V	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V
F	V	F	V	V

2. **Fausse.** $E = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 1 = 0\} = \{1, -1\}\}$ ce qui donne $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{1\}, \{-1\}, \{1, -1\}\}\}$.
3. **Fausse.** Il suffit de donner un exemple d'application qui n'est pas surjective.
4. **Fausse.** Il suffit d'établir la table de multiplication et de remarquer qu'il existe au moins un élément de $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ qui ne possède pas d'inverse multiplicatif.

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q}$ une application définie par $f(x) = \frac{x}{2}$.

1.

$$\begin{aligned} f(\mathbb{Z}) &= \{f(x)/x \in \mathbb{Z}\}\textbf{....0,5} \\ &= \{\frac{x}{2}/x \in \mathbb{Z}\} = \{0, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{2}{2}, \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{4}{2}, ...\}\textbf{....0,75} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f^{-1}(B) &= \{x \in \mathbb{Z}/f(x) \in B\}\textbf{....0,5} \\ &= \{x \in \mathbb{Z}/f(x) = \frac{5}{3}\} = \{x \in \mathbb{Z}/x = \frac{10}{3}\} = \emptyset\textbf{....0,75} \end{aligned}$$

2. f est injective $\Leftrightarrow \Big(\forall x_1, x_2 \in \mathbb{Z}, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2\Big)$ **....0,75**
Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$, tels que $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \frac{x_1}{2} = \frac{x_2}{2} \Rightarrow x_1 = x_2$**....0,5**.
D'après la question 1, on peut remarquer que f n'est pas surjective i.e

$$\exists y \in \mathbb{Q}, \forall x \in \mathbb{Z}, f(x) \neq y\textbf{....0,75}$$

pour $y = \frac{5}{3} \in \mathbb{Q}, \forall x \in \mathbb{Z}, f(x) \neq \frac{5}{3}$**.....0,5**

Exercice 3. On définit sur $\mathbb{R}^*$ la relation : $\Big\{\forall x, y \in \mathbb{R}^* : \; x\mathcal{R}y \iff x - y = \frac{1}{x} - \frac{1}{y}\Big\}$

1. $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
   - Réflexive. **....0,75**
   - Symétrique. **....1pt**
   - Transitive. **....1pt**

2. Déterminons la classe d'équivalence de 2.

$$\overline{2} = \{x \in \mathbb{R}^* / x\mathcal{R}2\}\textbf{....1pt}$$

$$\begin{aligned} x \in \overline{2} \Leftrightarrow x\mathcal{R}2 \Leftrightarrow x - \frac{1}{x} &= \frac{3}{2}\textbf{....0,5pt} \\ &\Leftrightarrow 2x^2 - 3x - 2 = 0 \Rightarrow \big(x = 2 \vee x = -1/2\big)\textbf{....0,5} \end{aligned}$$

Ce qui donne $\overline{2} = \{2, -\frac{1}{2}\}$**.....0,25**

Exercice 4. Soit $G = \mathbb{R} - \{1\}$ et $*$ une loi définie sur G par :

$$x * y = x + y - xy$$

1. $(\mathbb{R} - \{1\}, *)$ est un groupe commutatif. En effet,
   - $x*y = x+y-xy \in \mathbb{R}-\{1\}$ car l'addition et la multiplication sont stables dans $\mathbb{R}$, en particulier dans $\mathbb{R} - \{1\}$. En effet, soient $x, y \in \mathbb{R} - \{1\}$ et supposons que $x * y = 1$ alors $x + y - xy = x(1 - y) + y = 1 \Rightarrow (1 - y)(x - 1) = 0 \Rightarrow x = 1 \vee y = 1$ ce qui est une contradiction. Ainsi $*$ est une loi de composition interne**....0,75**
   - $*$ est commutative **....0,5**
   - L'associativité : Soient $x, y, z \in \mathbb{R} - \{1\}$
     $(x * y) * z = (x + y - xy) * z = x + y + z - xy - xz - yz + xyz$**....0,5**
     $x * (y * z) = x * (y + z - yz) = x + y + z - yz - xy - xz - xyz$**....0,5**
     donc on a bien $(x * y) * z = x * (y * z)$
   - L'élément neutre : $\exists e? \in \mathbb{R} - \{1\}, \forall x \in \mathbb{R} - \{1\} : x * e = x$**....0,5**

     $$x * e = x \Rightarrow x + e - xe = x \Rightarrow e(1 - x) = 0$$

     donc $e = 0 \vee x = 1$, mais $x \in \mathbb{R} - \{1\}$ donc $e = 0 \in \mathbb{R} - \{1\}$. **....0,5**
   - L'existence du symétrique : $\forall x \in \mathbb{R}-\{1\}, \exists x' \in \mathbb{R}-\{1\} : x*x' = 0$**....0,5**

     $$x * x' = x + x' - xx' = 0 \Rightarrow x' = \frac{x}{x - 1}$$

     En effet, $x' = \frac{x}{x-1} \in \mathbb{R} - \{1\}$, car si $x' = \frac{x}{x-1} = 1$ alors on obtient $-1 = 0$ ce qui est impossible. **....0,5**
2. Soit l'application $f : (\mathbb{R} - \{1\}, *) \longmapsto (\mathbb{R}^*, .)$ définie par $f(x) = 1 - x$. Etant donnees les deux groupes $(\mathbb{R} - \{1\}$ et $(\mathbb{R}^*, .)$, alors

   $f$est un morphisme de groupes $\Longleftrightarrow \forall x, y \in \mathbb{R}-\{1\} : f(x*y) = f(x).f(y)$**...0,75**

   $$f(x * y) = 1 - (x * y) = 1 - x - y + xy\textbf{....0,5}$$
   $$f(x).f(y) = (1 - x)(1 - y) = 1 - x - y + xy\textbf{....0,5}$$

   donc f est bien un morphisme de groupes.