Nom :

Prénom :

Date de Naissance :

Département de Mathématiques
Faculté des Sciences
Université Aboubekr BELKAID-Tlemcen

16/01/2018
Epreuve Finale Algèbre1
Durée : 1h-30'

EXERCICE 1 : Soient A, B et C trois parties d'un ensemble E.

1- Montrer que si $(A \cup B) \subset (A \cup C)$ et $(A \cap B) \subset (A \cap C)$ alors $B \subset C$.

2- Montrer que $(A \cup B) \cap C \neq A \cup (B \cap C)$. Dans quels cas a-t-on égalité ?

6 points

1- Soit $x \in B$, 0,5

$x \in A \cup B \Rightarrow x \in A \cup C$ 0.5

Si $x \in C$ alors $B \subset C$ 0.5

Si $x \in A$ alors $x \in A \cap B \Rightarrow x \in A \cap C \Rightarrow x \in C$, 0.5

alors $B \subset C$

2- Montrons qu'il existe A, B et C telle que l'égalité

$(A \cup B) \cap C = A \cup (B \cap C)$ est fausse.

Choisissons $A=\{0\}$, $B=\{0,1\}$ et $C=\{1\}$ 0.5

On a donc : $(A \cup B) \cap C = \{1\}$ 0.5

et $A \cup (B \cap C) = \{0,1\}$ 0.5

d'où $\{1\} \neq \{0,1\}$ 0.5

Cas d'égalité :

On sait que $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ 0.5

Si $C = A \cup C$ alors $(A \cup B) \cap C = A \cup (B \cap C)$ 0.5

Si $C = A \cup C$ alors $A \subset C$ 0.5 ou $A = C$ 0.5 (il y a aussi les cas : $A=\emptyset$ et $C=E$). On ne les note pas tous. On se contente de deux d'entre eux.

****
****
****
****
****
****
****

<u>EXERCICE 2 :</u> Soit l'application E de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{Z}$ qui à tout réel x associe sa partie entière E(x). E est-elle injective ? surjective ? bijective ? Justifier.

3 points

Injection : celui (celle) qui donne la définition de E injective 0.5

E est non injective :

$E(0,1) = E(0.2) = 0$ 0.5

mais $0.1 \neq 0.2$ 0.5

Surjection : celui (celle) qui donne la définition de E surjective 0.5

E est surjective :

Soit $n \in \mathbb{Z}$ alors il existe au moins $x=n$ tel que $E(x)=n$ 0.5

Bijection : E est donc non bijective 0.5

<u>EXERCICE 3 :</u> On veut partager l'ensemble $\mathbb{N}$ en trois parties A, B et C uniques tels que $A \cap B = A \cap C = B \cap C = \emptyset$ et $A \cup B \cup C = \mathbb{N}$, et ceci en définissant une relation $\mathfrak{R}$ sur $\mathbb{N}$ par : pour tout x, y dans $\mathbb{N}$, $x \,\mathfrak{R}\, y$ si et seulement si $(2x+y)/3$ est dans $\mathbb{N}$.

1- Vérifier que $\mathfrak{R}$ est une relation d'équivalence.
2- Trouver A, B et C si on suppose qu'on a : $0 \in A$, $1 \in B$ et $2 \in C$.

5.5 Points

1) a) <u>$\mathfrak{R}$ réflexive :</u> Soit $x \in \mathbb{N}$, $(2x + x)/3 = x \in \mathbb{N}$ donc $x \,\mathfrak{R}\, x$ 0.5

b) <u>$\mathfrak{R}$ symétrique :</u> Soient $x, y \in \mathbb{N}$ tel que $x \,\mathfrak{R}\, y$

c.à.d. $\exists\, k \in \mathbb{N}$ tel que $2x+y=3k$ 0.5

$(2y + x) + (2x + y) = 3(x+y) = 3k1$ avec $k1 = x+y \in \mathbb{N}$ 0.5

$(2y + x) = 3k1 - 3k = 3\,(k1 - k) = 3k2$, avec $k2 \in \mathbb{N}$. 0.5

D'où $y \,\mathfrak{R}\, x$.

c) **$\mathfrak{R}$ transitive :** Soient x, y et z dans $\mathbb{N}$ tel que :

$x \mathfrak{R} y$ c.à.d. $\exists k \in \mathbb{N}$ tel que $2x+y=3k$ 0.5

et $y \mathfrak{R} z$ c.à.d. $\exists k1 \in \mathbb{N}$ tel que $2y+z=3k1$ 0.5

$(2x+y)+(2y+z)=2x+3y+z=3(k+k1)$ 0.5

D'où $2x+z=3k2$ avec $k2 \in \mathbb{N}$, 0.5

soit $x \mathfrak{R} z$.

2)

$A= cl(0)=\{y \text{ dans } \mathbb{N} \,/\, 0 \mathfrak{R} y\}=\{y=3k, k \text{ dans } \mathbb{N}\}$ 0.5

En effet : $2(0)+y=3k \Leftrightarrow y=3k$

ou $A=cl(0)=\{y \text{ dans } \mathbb{N} \,/\, y \mathfrak{R} 0\}=\{y=3p, p \text{ dans } \mathbb{N}\}$

En effet dans ce cas : $y=(3/2)k$ avec $k=2p$

$B=cl(1)=\{y \text{ dans } \mathbb{N} \,/\, 1 \mathfrak{R} y\}=\{y=3k+1, k \text{ dans } \mathbb{N}\}$ 0.5

En effet : $2(1)+y=3k \Leftrightarrow y=3k-2 \Leftrightarrow y=3(k-1)+1$

ou $B=cl(1)=\,)=\{y \text{ dans } \mathbb{N} \,/\, y \mathfrak{R} 1\}=\{y=3p+1, p \text{ dans } \mathbb{N}\}$

En effet : $y=(3k-1)/2=(3(k-1)+2)/2$ avec $k=2p+1$

$C=cl(2)=\{y \text{ dans } \mathbb{N} \,/\, 2 \mathfrak{R} y\}=\{y=3k+2, k \text{ dans } \mathbb{N}\}$ 0.5

En effet : $2(2)+y=3k \Leftrightarrow y=3k-4 \Leftrightarrow y=3(k-2)+2$

ou $C=cl(2)=\,)=\{y \text{ dans } \mathbb{N} \,/\, y \mathfrak{R} 2\}=\{y=3p+2, p \text{ dans } \mathbb{N}\}$

En effet : $y=(3k-2)/2=(3(k-2)+4)/2$ avec $k=2p+2$

EXERCICE 4 : On définit sur $\mathbb{N}$ une relation $\mathfrak{R}$ par :

pour tout x, y dans $\mathbb{N}$, $x \mathfrak{R} y$ si et seulement si, il existe p, q de $\mathbb{N}^*$ tel que $y=px^q$.

1- Vérifier que $\mathfrak{R}$ est une relation d'ordre.
2- Peut-on classer par ordre croissant (ou décroissant) tous les éléments de $\mathbb{N}$? Justifier.
3- Soit A une partie de $\mathbb{N}$ majorée par 10. Trouvez deux autres majorants de A.

5.5 Points

1) a) **$\mathfrak{R}$ réflexive :** si $p=q=1$ alors $x=x$ d'où : $x \mathfrak{R} x$ 0.5

b) **$\mathfrak{R}$ antisymétrique :** Supposons que pour certains p, q, p', q' dans $\mathbb{N}^*$ on a : $y=px^q$ et $x=p'y^{q'}$. 0.5

1ère Méthode (classique) : On a $x=p'y^{q'}=p'p^{q'}x^{qq'}$. Ceci nous conduit à résoudre le système: $p'p^{q'}=1$ et $qq'=1$. Comme p, p', q et q' sont des entiers naturels alors $p=p'=q=q'=1$.

D'où $x=y$. 0.5

2ème Méthode (évidente) : Chacune des deux équations $y = px^q$ et $x = p' y^{q'}$ ne peut être que $y = x$, d'où : p= p'= q= q' = 1.

En effet (observation géométrique) : En fixant p et q dans la première équation $y=px^q$, on remarque qu'il y a une infinité de points (x, y) qui vérifient cette équation. Ces points appartiennent à la courbe représentative du polynôme $y=px^q$ (je garde les mêmes notations x et y dans l'équation du polynôme et qui sont dans $\mathbb{R}^+$puisqu'il n'y a aucune ambiguïté à le faire).

Je fais la même chose pour l'équation $x = p' y^{q'}$ en fixant p' et q'.

Dans ce cas le système $y=px^q$ et $x = p' y^{q'}$ représente l'intersection de deux courbes dans le plan réel positif (xoy) et (yox) (o étant l'origine du plan). Cette intersection des deux courbes ne peut me donner la droite y=x que si ces deux courbes sont confondues avec la droite y=x. Donc pour quelles valeurs de p, p', q et q' a-t-on ($y=px^q$ et $x = p' y^{q'}$) ⇒ (x=y) ? La réponse, toute simple, sans aucun calcul est : pour p=p'=q=q'=1 on a ($y=px^q$ et $x = p' y^{q'}$) ⇒ (x=y) . (A généraliser).

c) $\mathfrak{R}$ transitive : Supposons que pour certains p, q, p', q' dans $\mathbb{N}^*$ on a : $y=px^q$ et $z = p' y^{q'}$. 0.5

Ceci nous donne : $z = p' p^{q'} x^{qq'} = p'' x^{q''}$, 0.5

avec $p'' = p' p^{q'}$ et $q'' = qq'$. D'où x $\mathfrak{R}$ z.

2) Il n'existe pas p, q dans $\mathbb{N}^*$ tel que $2 = p\, 3^q$ 0.5

Il n'existe pas p, q dans $\mathbb{N}^*$ tel que $3 = p\, 2^q$ 0.5

Donc 2 non $\mathfrak{R}$ 3 et 3 non $\mathfrak{R}$ 2. 0.5

L'ordre n'est pas total. Il est partiel. 0.5

3) A majorée par 10.

Si p = 2 et q = 1 alors $2(10)^1 = 20$ ⇔ 10 $\mathfrak{R}$ 20. 0.5

Si p = 1 et q = 2 alors $1(10)^2 = 100$ ⇔ 10 $\mathfrak{R}$ 100. 0.5

D'où 20 et 100 sont deux autres majorants de A.