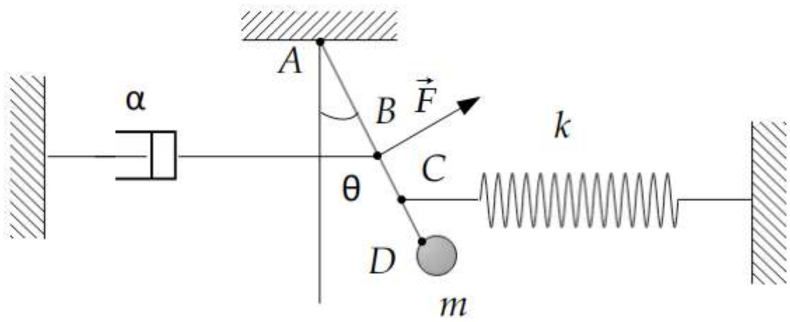
Interrogation (Sujet A)

Exercice 1 (Système forcé à un degré de liberté)



On considère une tige de masse négligeable et de longueur l à l'extrémité de laquelle est attachée une masse m. Au point B (milieu de la tige) est attaché un amortisseur de constante d'amortissement α et en ce même point une force $F = F_0 cos(\omega t)$ est appliquée. Un ressort de raideur k est également attaché à un point C de la tige

a)- Donnez le Lagrangien du système ainsi que la fonction dissipation
b)- En déduire l'équation du mouvement
c)- Donner la réponse du système en régime permanent
On donne : $AB = \frac{l}{2}$ et $BC = \frac{l}{4}$

Exercice 2 (Système libre à deux degrés de liberté)

Le Lagrangien d'un système à 2DDL s'écrit :

$$L = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_2 l^2 \dot{\theta}^2 + m_2 \dot{x} l \dot{\theta} - kx^2 - \frac{1}{2}(m_2 g l \theta^2)$$

a)- Trouver les équations du mouvement de m_1 et de m_2 en fonction de x et de θ On prendra $m_1 = 2m$ et $m_2 = m$, $\frac{g}{l} = \frac{k}{m}$ et on posera $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$
b)- Calculer les pulsations propres du système en fonction de ω_0.
c)- Calculer les rapports d'amplitudes et en déduire l'expression générale des solutions $x(t)$ et $\theta(t)$
d)- Question Bonus : dans le cas où $x(0) = x_0$, $\theta(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$ et $\dot{\theta}(0) = 0$.
Écrire les expressions de $x(t)$ et $\theta(t)$

Solution

Exercice 1

a)- Les énergies cinétiques et potentielles s'écrivent pour ce système :
$T = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2$
$V = mgl\frac{\theta^2}{1} + \frac{1}{2}k(\frac{3l}{4}\theta)^2$
La fonction de dissipation s'écrit pour ce système :
$D = \frac{1}{2}\alpha(\frac{l}{2}\dot{\theta})^2$
Le lagrangien du système s'écrit :
$L = T - V$
b)- L'équation du mouvement s'écrit
$\ddot{\theta} + (\frac{g}{l} + \frac{9k}{16m})\theta + \frac{\alpha}{4m}\dot{\theta} = \frac{F}{2ml}$
Ce qui peut s'écrire :
$\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta + 2\delta\dot{\theta} = \frac{F}{2ml}$
où $\omega_0^2 = \frac{g}{l} + \frac{9k}{16m}$ et $\delta = \frac{\alpha}{8m}$
c)- La solution de cette dernière équation en régime permanent s'écrit :
$\theta(t) = Acos(\omega t + \psi)$
où
$A = \frac{\frac{F_0}{2ml}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2) + 4\delta^2\omega^2}}$
$tan\phi = \frac{-2\delta\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)}$

Exercice 2

a)-Les équations de mouvement de m_1 et m_2:
$m_1 = 2m$, $m_2 = m$ et $\frac{g}{l} = \omega_0^2$
$L = \frac{3}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + ml\dot{\theta}\dot{x} - kx^2 - \frac{1}{2}mgl\theta^2$
$\begin{cases} 3m\ddot{x} + ml\ddot{\theta} + 2kx = 0 \\ ml^2\ddot{\theta} + ml\ddot{x} + mgl\theta = 0 \end{cases}$ qui s'écrit $\begin{cases} 3m\ddot{x} + m\ddot{y} + 2kx = 0 \\ ml\ddot{y} + ml\ddot{x} + mgy = 0 \end{cases}$ qui donne
$\begin{cases} 3\ddot{x} + \ddot{y} + 2\omega_0^2 x = 0 \\ \ddot{y} + \ddot{x} + \omega_0^2 y = 0 \end{cases}$
Avec $y = l\theta$
b)- Les pulsations propres: (1.5)
On cherche des solutions du type: $x = Acos(\omega t + \phi)$, $y = Bcos(\omega t + \phi)$
En remplaçant dans les équations de mouvement on trouve le système suivant:
$\begin{cases} (2\omega_0^2 - 3\omega^2)A - \omega^2 B = 0 \\ -\omega^2 A + (\omega_0^2 - \omega^2)B = 0 \end{cases}$ $\begin{pmatrix} (2\omega_0^2 - 3\omega^2) & -\omega^2 \\ -\omega^2 & (\omega_0^2 - \omega^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
la solution n'est possible que si le déterminant est nul.
Le calcul des pulsation propres du système revient donc à résoudre l'équation algébrique suivante :
$(2\omega_0^2 - 3\omega^2)(\omega_0^2 - \omega^2) - \omega^4 = 0$
qui a pour solution $\omega_1 = \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}$ et $\omega_2 = \sqrt{2}\omega_0$

c) Les expressions générales des solutions x et y sont alors données
$x(t) = A_1 cos(\omega_1 t + \phi_1) + A_2 cos(\omega_2 t + \phi_2)$
$y(t) = B_1 cos(\omega_1 t + \phi_1) + B_2 cos(\omega_2 t + \phi_2)$
Avec $y = l\theta$ Calcul des rapports d'amplitudes :
On pose
$r_1 = \frac{B_{1]}}{A_1}$ et $r_2 = \frac{B_{2]}}{A_2}$
Pour $\omega = \omega_1$
$(2\omega_0^2 - 3\omega_1^2)A_1 - \omega_1^2 B_1 = 0$
ce qui donne
$r_1 = +1$
Pour $\omega = \omega_2$
$(2\omega_0^2 - 3\omega_2^2)A_2 - \omega_2^2 B_2 = 0$
ce qui donne
$r_2 = -2$
On en déduit les solutions générales suivantes :
$x(t) = A_1 cos(\omega_1 t + \phi_1) + A_2 cos(\omega_2 t + \phi_2)$
$y(t) = A_1 cos(\omega_1 t + \phi_1) - 2A_2 cos(\omega_2 t + \phi_2)$
d) En remplaçant t=0 dans les équation précédentes et en faisant également le même travail pour les dérivées nous obtenons :
$A_1 cos(\phi_1) + A_2 cos(\phi_2) = x_0$
$A_1 cos(\phi_1) - 2A_2 cos(\phi_2 = 0)$
$-\omega_1 A_1 sin(\phi_1) - \omega_2 A_2 sin(\phi_2) = 0$
$-\omega_1 A_1 sin(\phi_1) + \omega_2 2A_2 sin(\phi_2 = 0)$
La solution de ce système d'équation est :
$\phi_1 = \phi_2 = 0$, $A_1 = \frac{2}{3}x_0$ et $A_2 = \frac{x_0}{3}$