# Chapitre VI Energie électrostatique

On montre que l'énergie d'un système de conducteurs est une fonction quadratique des charges ou des potentiels. Le cas du condensateur plan permet de définir la densité d'énergie.
On examine ensuite les actions entre conducteurs en séparant les cas « charge constante » et « potentiel constant ».
L'action d'un champ électrostatique sur un dipôle.

1 Energie d'un système de charges
1.1 Charge ponctuelle dans un champ électrostatique
Soit une charge ponctuelle q placée en un point M ($\overrightarrow{OM} = \vec{r}$ ) dans un champ électrostatique $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V$ . Pour un déplacement d £r , la force électrostatique effectue le travail :

$$dW = \vec{F}.d\vec{r} = q\vec{E}.d\vec{r} \Rightarrow W = q\int_A^B \vec{E}.d\vec{r} = q\left(V_A - V_B\right)$$

L'opérateur extérieur exerce la force $\vec{F}_{op} = -\vec{F}$ donc fournit le travail:
$W_{opé} = - W = q\,(V_B - V_A)$
On pose :$U_p$ = qV énergie potentielle d'interaction de la charge ponctuelle dans le champ : dans ces conditions : $W = - \Delta U_p$.

1.2 Système de charges
1.2.1 Cas de deux charges :
Considérons une charge $q_1$ en un point $M_1$ et une charge $q_2$ en un point $M_2$ (avec $M_1M_2 = r_{12}$) soumise au potentiel $V_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r_{12}}$ de la charge $q_1$. L'énergie potentielle d'interaction s'écrit $U_p = q_2V_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{r_{12}}$ (ce qui implique le choix habituel $U_p = 0$ si $r_{12}\rightarrow \infty$). Il est évident que cette expression peut s'écrire d'une manière symétrique :

$$U_p = q_2V_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{r_{12}} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2q_1}{r_{21}}\right) = \frac{1}{2}\left(q_1V_2 + q_2V_1\right)$$

1.2.2 Cas de n charges ponctuelles
L'expression ci-dessus se généralise facilement pour n charges :

$$U_p = \frac{1}{2}\sum_i q_i \sum_{j\neq i}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_j}{r_{ij}} = \frac{1}{2}\sum_i q_iV_i$$

L'énergie zéro correspond à toutes les charges infiniment éloignées les unes des autres ; $V_i$ est le potentiel au point $M_i$ (charge $q_i$) créé par toutes les charges autres que la charge $q_i$.
- Unité : dans le système SI, l'énergie s'exprime en joules (symbole J).

1.2.3 Cas des distributions continues :
Le résultat précédent se transpose aisément au cas des distributions continues

$$U_p = \frac{1}{2}\iint \sigma V dS \quad ou \quad U_p = \frac{1}{2}\iiint \rho V d\tau$$

ceci respectivement pour une distribution surfacique et volumique.
V est ici le potentiel total en un point où se trouve l'élément de surface dS ou de volume dτ (voir le chapitre IV).

## 2 Énergie d'un système de conducteurs

### 2.1 Expression de l’énergie

L'expression générale de l'énergie d'un système de charges est de la forme :

$$U = \frac{1}{2}\sum_i q_i V_i + \frac{1}{2}\iint \sigma V dS + \frac{1}{2}\iiint \rho V d\tau$$

Pour un conducteur en équilibre électrostatique, les charges étant uniquement superficielles, l'expression de l'énergie se simplifie :

$$U = \frac{1}{2}\iint \sigma V dS$$

L'intégration est étendue à toutes les surfaces $S_i$ de tous les conducteurs « i ». On peut ainsi séparer tous les conducteurs :

$$U = \frac{1}{2}\iint \sigma V dS = \frac{1}{2}\sum_i \iint_{S_i} \sigma V_i dS = \frac{1}{2}\sum_i V_i \iint_{S_i} \sigma dS = \frac{1}{2}\sum_i V_i Q_i$$

Dans cette expression, $V_i$ est le potentiel du conducteur « i » créé par toutes les charges y compris celles du conducteur « i », la somme portant sur les conducteurs « i ».

Nous avons vu que les charges sont des fonctions linéaires et homogènes des potentiels et réciproquement :

$$Q_i = \sum_j C_{ij} V_j \quad ou \quad V_i = \sum_j \Gamma_{ij} Q_j$$

L'énergie d'un système de conducteurs est donc une fonction quadratique des charges ou des potentiels :

$$U = \frac{1}{2}\sum_{ij} C_{ij} V_i V_j = \frac{1}{2}\sum_{ij} \Gamma_{ij} Q_i Q_j$$

Elle ne dépend que de l'état du système.

Remarque :

On peut retrouver ce résultat différemment :

Soient des conducteurs fixes chargés en équilibre ($Q_i$ ; $V_i$). La linéarité des équations qui déterminent le potentiel, nous permet d'affirmer qu'il en est de même pour tous les états ($q_i = \lambda Q_i$ ; $v_i = \lambda V_i$).

Pour constituer l'état ($Q_i$ ; $V_i$) à partir de l'état (0 ; 0) on apporte sur chaque conducteur « i » dans l'état ($q_i$ ; $v_i$) la charge $dq_i = Q_i d\lambda$. Le travail nécessaire à cette opération est :

$$dW_{opé} = dU = \sum_i v_i dq_i = V_i Q_i \lambda d\lambda$$

Si nous faisons varier $\lambda$ de 0 à 1 on obtient l'état ($Q_i$ ; $V_i$) :

$$U = \sum_i Q_i V_i \int_0^1 \lambda d\lambda = \frac{1}{2}\sum_i Q_i V_i$$

### 2.2 Exemples

#### 2.2.1 Conducteur unique

Les relations précédentes donnent immédiatement :

$$U = \frac{1}{2} C V^2 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

#### 2.2.2 Condensateur

L'armature interne du condensateur au potentiel $V_1$ porte la charge +Q et l'armature externe au potentiel $V_2$ porte la charge $-Q + C'V_2$. L'énergie emmagasinée est donc :

$$U = \frac{1}{2} Q V_1 + \frac{1}{2}(-Q + C'V_2)V_2 = \frac{1}{2} Q (V_1 - V_2) + \frac{1}{2} C' V_2^2$$

(mais $C'V_2 << Q$) soit en posant $V = V_1 - V_2$ :

$$U \cong \frac{1}{2}QV = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

N.B. On peut établir cette relation directement :

$$dU = V_1 dQ_1 + V_2 dQ_2 = (V_1 - V_2)dQ = \frac{Q}{C}dQ = d\left(\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}\right)$$

2) Les expressions de l'énergie emmagasinée dans un condensateur restent valables s'il contient un diélectrique quelconque.

2.3 Densité d'énergie

2.3.1 Exemple du condensateur plan

La capacité d'un condensateur plan étant $C = \varepsilon_0 \frac{S}{e}$ permet d'écrire l'énergie sous la forme : $U = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \frac{S}{e}V^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 v \left(\frac{V}{e}\right)^2$ Si on pose $v = Se = volume, et\ E = V/e$ champ électrostatique uniforme entre les armatures, l'expression de l'énergie devient :

$$U = \frac{1}{2}\varepsilon_0 v E^2$$

Ainsi tout se passe comme si entre les armatures du condensateur l'énergie électrostatique était répartie avec la densité :

$$u = \frac{U}{v} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$$

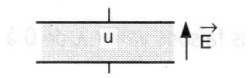



Figure VI,1

- Dans le système SI, cette grandeur s'exprime en joules par m$^3$ (symbole J.m$^{-3}$).

2.3.2 Cas général :

L'énergie d'une distribution de charges de densité $\rho = \varepsilon_0 div\vec{E}$ est :

$U = \frac{1}{2}\iiint_v \rho V d\tau = \frac{1}{2}\iiint_v \left(\varepsilon_0 div\vec{E}\right)V d\tau$. En utilisant le théorème de Green, on montre que cette énergie s'exprime par :

$$U = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \iiint E^2 d\tau = \iiint u d\tau \quad avec \quad u = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \quad densité\ d'énergie.$$

On généralise ainsi le résultat obtenu pour le condensateur plan.

*3.Exercice d'application :*

3.1.Dipôle dans un champ électrostatique

On considère le dipôle électrostatique de moment $\vec{p} = aq\vec{\imath}$

1 - Déterminer l'énergie propre $U_0$ de ce système.

2 -On place ce dipôle dans un champ extérieur $\vec{E}$ dérivant du potentiel V. Déterminer l'énergie d'interaction de ce dipôle avec le champ extérieur.

*Solution :*

1 - Supposons la charge +q placée en A, nous déplaçons alors la charge -q de l'infini jusqu'au point B où le potentiel créé par +q est égal à $V_A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{a}$. Le travail nécessaire pour cette opération est : $W = U_0 = \int_{\infty}^{a} -q\vec{E}_A.\vec{dl} = -qV_A = \frac{-1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{a} \prec 0$

2 - Soit V(A) et V(B) les valeurs du potentiel (extérieur) aux points A et B. L'énergie totale du dipôle dans ce champ est donc :

$U = q_AV(A) + q_BV(B) = q(V(A) - V(B))$ Or $V(A) - V(B) = -\int_{A}^{B} \vec{E}.\vec{dl} \cong \vec{E}.\overrightarrow{AB}$ car le dipôle étant de « petites dimensions » implique que le champ est relativement uniforme au voisinage de cette distribution de charges. Par suite, sachant que par définition $\vec{p} = q\overrightarrow{BA}$ ***on obtient :*** $U = -\vec{p}.\vec{E}$

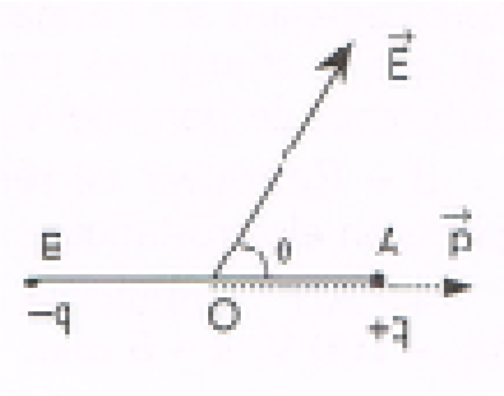



Figure VI,2

N.B. De manière générale, en O nous pouvons écrire le potentiel sous la forme :

$V(r_i) = V(0) + \vec{r}_i\left(\overrightarrow{grad}V\right)_0 + \cdots$ ***par suite puisque*** $\sum_i q_i = 0$ ***on obtient :***

$U = \sum_i q_iV(r_i) = -\sum_i q_i\vec{r}_i.\vec{E} = -\vec{p}.\vec{E}$

3.2. Forces entre les armatures d'un condensateur

On considère un condensateur plan dont les armatures distantes de x ont une surface S (figure VI.3).

1 - Rappeler les expressions de la capacité et de l'énergie emmagasinée par ce condensateur.

2 - L'armature A étant fixe, déterminer la force agissant sur l'armature B en supposant (a) que la charge est constante et (b) que la différence de potentiel $V_A - V_B = V_0 = Cte$. A

3 - Retrouver ce résultat en utilisant la pression électrostatique

4 - AN : Calculer la densité d'énergie entre les armatures pour $V_0$=100V, x = 5mm.

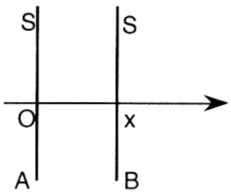



Figure VI,3.

*Solution :*

1 - La capacité est C = $\varepsilon_0 S/x$ et l'énergie emmagasinée :

$$U = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} \quad (avec\ V = V_A - V_B).$$

2 - a) A charge constante $\vec{F} = -\overrightarrow{grad}U \Rightarrow F_x = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}\right) \quad donc \quad F_x = +\frac{Q^2}{2C^2}\frac{\partial C}{\partial x}$ (1)

b) A potentiel constant $\vec{F} = +\overrightarrow{grad}U \Rightarrow F_x = \frac{V^2}{2}\frac{\partial C}{\partial x}$ (2) Les expressions (1) et (2) sont identiques (car Q = $CV_0$) :

$$(1) \Rightarrow F_x = -\frac{Q^2}{2\varepsilon_0 S} \prec 0 \quad et \quad (2) \Rightarrow F_x = -\frac{\varepsilon_0 S V_0^2}{2x^2} \prec 0$$

La force étant négative, l'armature B se rapproche de l'armature A, il y a attraction (évident a priori). Cet effet est utilisé dans les électromètres.

3 - Soit p la pression électrostatique dirigée vers l'extérieur du conducteur (donc ici de B vers A). La force est $\vec{F} = pS\vec{n}$ perpendiculaire à la surface du conducteur, c'est-à-dire :

$$F_x = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}S = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 S} \quad car \quad Q = \sigma S$$

On retrouve le résultat précédent.

4 - $u = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\frac{V_0}{x}\right)^2 \cong 1.8.10^{-3} J.m^{-3}$.

**Résumé :**

**L'énergie d'un système de conducteurs est une fonction quadratique des charges ou des potentiels** $U = \frac{1}{2}\sum_{ij} C_{ij}V_iV_j = \frac{1}{2}\sum_{ij}\Gamma_{ij}Q_iQ_j$ **:**

**Elle ne dépend que de l'état du système.**

**Dans le cas du condensateur cette énergie s'écrit:** $U \cong \frac{1}{2}QV = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$

**Les forces entre conducteurs sont :**

- **Conducteurs à charge constante :** $\vec{F} = -\overrightarrow{grad}\,U_q$
- **Conducteurs à potentiel constant :** $\vec{F} = +\overrightarrow{grad}\,U_v$

***Exercices :***

***Conducteurs en équilibre et Energie Electrostatique***

***<u>Exercice 1 :</u>***

On relie un conducteur sphérique($S_1$) de rayon $R_1$ portant une charge $q_1$ à un autre conducteur sphérique ($S_2$) de rayon $R_2$, initialement neutre, à l'aide d'un fil conducteur suffisamment long.

1/ En supposant que l'ensemble soit isolé, donnez la nouvelle répartition des charges sur les deux sphères.

2/ Calculez le potentiel de chaque sphère,

***<u>Exercice 2 :</u>***

Soient deux sphères concentriques A et A'. d'épaisseur négligeable.

1) Considérons le cas ou A' n'est pas chargée, reliée à la terre et A reliée à une source de potentiel V. Calculez la charge q de A et les charges portées par (S) et (S').

2) On isole A', on relie A à la terre puis on l'isole. Trouvez la charge q de A et le potentiel V' de A'.

3) Sachant que le potentiel de A est V et celui de A' est V' ; calculez la charge q de A et la charge q' de A'.

***<u>Exercice 3 :</u>***

Soit une sphère conductrice $S_1$ , de rayon $R_1$ portée au potentiel $V_1$ .

1) Calculez la charge $q_1$ portée par cette sphère.

2) On relie la sphère $S_1$ à une sphère conductrice $S_2$ de rayon $R_2$, à l'aide d'un fil conducteur très long. Trouvez la relation qui lie les densités superficielles des charges $\sigma_1$ et $\sigma_2$ des deux sphères.

3) On isole la sphère $S_1$, de la source de potentiel $V_1$, après l'avoir chargé puis on la relie à la sphère $S_2$ initialement neutre, par un fil conducteur suffisamment long,

a) Calculer la charge portée par chaque sphère.
b) Calculer le champ électrique au voisinage de chaque sphère.
c) Donner l'énergie de l'ensemble avant et après la connexion.

***<u>Exercice 4 :</u>***

Un condensateur est formé à partir de deux cylindres coaxiales A et B de rayon $R_A$ et $R_B$ tel que $R_B>R_A$, et de même hauteur h. On applique au condensateur une d.d.p : $\Delta V = V_B-V_A$ ($V_B >VA$).

1 ) Quelle est le type d'influence.

2 ) A l'équilibre, montrer le cylindre qui est chargé positivement (+q) et celui négativement (-q) puis donner la direction du champ électrique entre les deus cylindres.

3) trouver l'expression du champ électrique en un point M entre les cylindres par l'utilisation du théorème de Gauss.

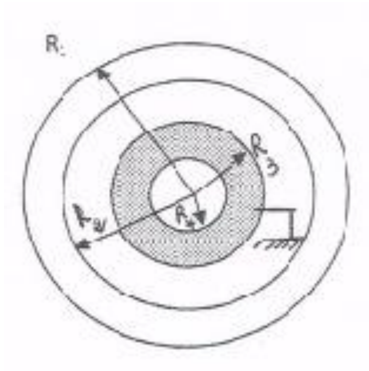
4 ) trouver $V_B$ -$V_A$ en fonction de h, $R_A$, $R_B$ et la charge q.

5 ) Calculer la capacité du condensateur.

***Exercice5 :***

Une charge q au point O est entourée par deux sphères concentriques, la première de rayon $R_1$et $R_2$ et de densité volumique ρ, et la deuxième de rayons $R_3$ et $R_4$ est reliée a la terre et porte une charge $q_2$, induite par influence.

1) Calculer le champ électrique dans tout l'espace.



***Exercice 6 :***

Calculer pour les deux schémas suivants :

1) La capacité équivalente entre A et B.
2) La différence de potentiel de chaque condensateur
3) La charge de chaque condensateur
4) L'énergie emmagasinée dans tous les condensateurs.
5) A.N. $V_0$=20V, $C_0$=4µF.

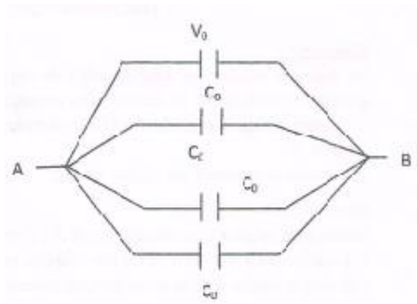



Schéma 1

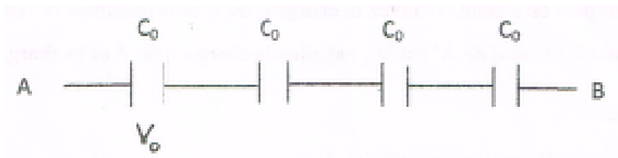



Schéma 2

***Exercice 7 :***

On considère un groupement de quatre condensateurs $C_1$=3C, $C_2$=C, $C_3$=2C et $C_4$=3C.

1) Calculer en fonction de C la capacité équivalente entre A et B. A.N. C=2µF.
2) On maintient entre A et B une d.d.p. $V_{AB}$=2000V. Calculer les charges $q_1$, $q_2$, $q_3$, $q_4$ et les tensions $v_1$, $V_2$, $V_3$, $V_4$ de chaque condensateur en fonction de C et $V_{AB}$.
3) On remplace la dérivation comprenant $C_2$ et $C_3$ par un condensateur de capacité x.
   a) Pour quelle valeur de x la capacité équivalente entre A et B est-elle égale à x.
   b) Calculer alors les charges des condensateurs de capacité $C_1$, x et $C_4$