تمرين جيّد في الحساب لشعبتي الرّياضي و التّقني رياضي للتّحضير لبكالوريا 2018

1) حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $(E): 3x-8y=5$.

2) n ، x وَ y أعداد صحيحة حيث : $n=3x+2$ و $n=8y+7$.

✓ بيّن أنّ الثنائية $(x;y)$ حل للمعادلة (E) .

✓ نعتبر الجملة : $(S): \begin{cases} n\equiv 2[3] \\ n\equiv 7[8] \end{cases}$. بيّن أنّ : $n\equiv 23[24]$.

3) m عدد طبيعي :

✓ عيّن باقي قسمة 2^{2m} على 3 ، وَ باقي قسمة 7^{2m} على 8 .

✓ تحقّق أنّ العدد 1439 حل للجملة (S) .

✓ ما هو باقي قسمة : 1439^{2018} على 24 ؟ .

تمرين في الحساب للتّحضير للفرض و الإختبار

أجب بصحيح أو خطأ مع التّبرير :

1) من أجل كل عدد طبيعي n، العدد $(2^{2n}-1)$ يقبل القسمة على 3 .

2) إذا كان العدد الصّحيح x حلاّ للمعادلة $x^2+x\equiv 0[6]$، فإنّ : $x\equiv 0[3]$.

3) المعادلة : $25x-30y=47$ ، تقبل حلولا في $\mathbb{Z}^2$.

4) توجد ثنائية وحيدة $(a;b)$ من الأعداد الطبيعية حيث: $a<b$ وَ $PPCM(a,b)-PGCD(a,b)=1$

5) مهما يكن العدد الطبيعي n : $PGCD(14n+21;21n+14)=7$.

6) العددان M و N مكتوبان في النّظام العشري على الشّكل : $M=\overline{abc}$ ، $N=\overline{bca}$:

✓ إذا كان M يقبل القسمة على 27 فإنّ : $(M-N)$ يقبل القسمة على 27 أيضا .

7) يوجد نظام تعداد أساسه a بحيث العدد 2018 يكتب : $\overline{21312}^{(a)}$.

حل التمرين الأوّل

1) المعادلة : $(E): 3x-8y=5$ ، الثّنائية $(-1;-1)$ هي حل ظاهر للمعادلة (E) .

الآن نبحث عن كل الحلول : لدينا : $\begin{cases}3x-8y=5.....(1)\\3(-1)-8(-1)=5.....(2)\end{cases}$ بطرح $(1)-(2)$ نجد :

$3(x+1)-8(y+1)=0$ أي : $3(x+1)=8(y+1)$ ، العدد 8 يقسم $3(x+1)$ و8 و3 أوّلي مع 3 ،

إذن حسب مبرهنة غوص : 8 يقسم $(x+1)$ أي : $x+1=8k$ ، ومنه : $x=8k-1$.

نعوّض قيمة x في $3(x+1)=8(y+1)$ أي $3(8k)=8(y+1)$ أي $3k=y+1$ ومنه: $y=3k-1$

إذن حلول المعادلة (E) هي: $(x;y)=(8k-1;3k-1)$ حيث : $k\in\mathbb{Z}$.

2) أ) لدينا : $n=3x+2$ وَ $n=8y+7$ ، أي : $3x+2=8y+7$ ، ومنه : $3x-8y=5$.

إذن الثّنائية $(x;y)$ هي حل للمعادلة (E) .

ب) لدينا الجملة: $(S):\begin{cases}n\equiv 2[3]\\n\equiv 7[8]\end{cases}$ ، إذن: $n=3\alpha+2$ وَ $n=8\beta+7$ ومنه: $3\alpha+2=8\beta+7$

أي : $3\alpha-8\beta=5$ ، إذن الثّنائية $(\alpha;\beta)$ هي حل للمعادلة (E) ، ومنه : $\begin{cases}\alpha=8k-1\\\beta=3k-1\end{cases}$ ولدينا

$n=3x+2$ بالتعويض نجد : $n=3(8k-1)+2$ أي $n=24k-1$ أي : $n\equiv -1[24]$ ،

ومنه : $n\equiv 23[24]$ ، وهو المطلوب .

3) أ) تعيّين باقي القسمة 2^{2m} على 3 ، وَ باقي قسمة 7^{2m} على 8 :

✓ لدينا: $2^{2m}=(2^2)^m=4^m$ ، ونعلم أنّ : $4\equiv 1[3]$ أي: $4^m\equiv 1[3]$ ومنه : $2^{2m}\equiv 1[3]$.

✓ لدينا: $7\equiv -1[8]$ أي : $7^2\equiv 1[8]$ ، أي : $(7^2)^m\equiv 1[8]$ ومنه : $7^{2m}\equiv 1[8]$.

ب) بقسمة 1439 على كلّ من 3 وَ 8 نجد : $\begin{cases}1439\equiv 2[3]\\1439\equiv 7[8]\end{cases}$ ومنه 1439 حل للجملة (S) .

ج) لدينا: $\begin{cases}1439\equiv 2[3]\\1439\equiv 7[8]\end{cases}$ إذن : $\begin{cases}1439^{2018}\equiv 2^{2018}[3]\\1439^{2018}\equiv 7^{2018}[8]\end{cases}$ ، و من السؤال (أ) سيكون لدينا :

$2^{2018}\equiv 1[3]$ وَ $7^{2018}\equiv 1[8]$ ، إذن : $\begin{cases}1439^{2018}\equiv 1[3]\\1439^{2018}\equiv 1[8]\end{cases}$ ومنه: $\begin{cases}1439^{2018}-1\equiv 0[3]\\1439^{2018}-1\equiv 0[8]\end{cases}$.

و بما أنّ 3 و 8 أوّليان فيما بينهما إذن : $1439^{2018}-1\equiv 0[24]$ ومنه : $1439^{2018}\equiv 1[24]$.

إذن باقي قسمة 1439^{2018} على 24 هو 1 .

حل التّمرين الثّاني

1) الإجابة **صحيحة** ، لأنّ: $2^{2n}=4^n$ ، ونعلم أنّ: $4\equiv 1[3]$ أي: $4^n\equiv 1[3]$ أي: $4^n-1\equiv 0[3]$

ومنه : $2^{2n}-1\equiv 0[3]$.

2) الإجابة **خاطئة** ، لأنّ :

ومنه $x^2+x\equiv 0[6]$ لا يعطينا حتما :

$x\equiv 0[3]$.

و كمثال مضاد: ممكن أن يكون $x\equiv 5[6]$

وهنا: $x=6k+5$ أي x ليس مضاعفا لـ 3

$x\equiv$	0	1	2	3	4	5	$[6]$
$x^2\equiv$	0	1	4	3	4	1	$[6]$
$x^2+x\equiv$	0	2	0	0	2	0	$[6]$

3) الإجابة **خاطئة** ، لأنّ: $PGCD(25;30)=5$ لكن 5 لا يقسم 47 .

4) الإجابة **صحيحة** ، لأنّ : نعلم أنّ $PPCM(a;b)=da'b'$ حيث d هو $PGCD(a;b)$ ،و a' و b' أوليّان فيما بينهما ، ولدينا $PPCM(a;b)-PGCD(a;b)=1$ ، أي : $da'b'-d=1$ أي :

$d(a'b'-1)=1$ إذن : $d=1$ ، ومنه : $a'b'-1=1$ أي $a'b'=2$ ، وبما أنّ $a'<b'$ لأنّ :

$a<b$ ، إذن : $(a';b')=(1;2)$ ، ومنه : $(a;b)=(1;2)$ ، لأنّ : $d=1$.

5) الإجابة **خاطئة** ، لأنّ: $PGCD(14n+21;21n+14)=PGCD(7(2n+3);7(3n+2))$ أي:

$PGCD(14n+21;21n+14)=7\times PGCD(2n+3;3n+2)$.

نفرض أنّ: $PGCD(2n+3;3n+2)=d$ ،إذن: $\begin{cases} d/2n+3 \\ d/3n+2 \end{cases}$ ومنه: $\begin{cases} d/3(2n+3) \\ d/2(3n+2) \end{cases}$ أي :

$\begin{cases} d/6n+9 \\ d/6n+4 \end{cases}$ ، ومنه : $d/5$ أي : $d=1$ أو $d=5$ ، إذن :

$PGCD(14n+21;21n+14)=7\times 1$ ، ومنه : $PGCD(14n+21;21n+14)=7$.

أو : $PGCD(14n+21;21n+14)=7\times 5$ ، ومنه : $PGCD(14n+21;21n+14)=35$.

6) الإجابة **صحيحة** ، لأنّ :

لدينا : $\begin{cases} M=\overline{abc}=a\times 10^2+b\times 10+c=100a+10b+c \\ N=\overline{bca}=b\times 10^2+c\times 10+a=100b+10c+a \end{cases}$.

بما أنّ M يقبل القسمة على 27 ، إذن M يقبل القسمة على 3 (لأنّ 27 مضاعف لـ 3) .

إذن : $M\equiv 0[3]$ أي : $100a+10b+c\equiv 0[3]$. نعلم أنّ: $100\equiv 1[3]$ وَ $10\equiv 1[3]$ ،

إذن : $(1)......a+b+c\equiv 0[3]$.

نحسب الآن : $M-N$ ، $M-N=(100a+10b+c)-(100b+10c+a)$ أي :

$M-N=99a-90b-9c$ ، أي : $M-N=9(11a-10b-c)$ (مضاعف لـ9) .

يكون $M-N$ قابلا للقسمة على 27 إذا كان : $(11a-10b-c)$ مضاعفا لـــ 3 ، أي :

$11a-10b-c\equiv 0[3]$ أي: $2a-b-c\equiv 0[3]$ وَ $2\equiv -1[3]$ ، إذن : $-a-b-c\equiv 0[3]$

(بالضرب في (-1))أي : $a+b+c\equiv 0[3]$. ، وهذا ما توصّلنا من قبل ، أنظر (1) .

إذن : $M-N$ يقبل القسمة على 27 أيضا .

7) الإجابة **خاطئة** ، لأنّ : $\overline{21321}^{(a)}=2018$ ، $(a>3)$: $2018=2a^4+a^3+3a^2+2a+1$ ،

إذن : $2a^4<2018$ أي : $a^4<1009$ أي : $a^2<\sqrt{1009}$ أي: $a^2<31,764$ أي: $a<\sqrt{31,764}$

ومنه : $a<5,63$ ، لكن: $(a>3)$ ، إذن : $(a=4)$ أو $(a=5)$.

✓ التحقق من أجل : $(a=4)$

مرفوضة لأنّ : $\overline{21321}^{(4)}=2\times(4)^4+1\times(4)^3+3\times(4)^2+2\times(4)+1=633$.

✓ التحقّق من أجل : $(a=5)$

مرفوضة لأنّ : $\overline{21321}^{(5)}=2\times(5)^4+1\times(5)^3+3\times(5)^2+2\times(5)+1=1461$.

إذن لا يوجد نظام تعداد أساسه a حيث يكتب 2018 : $\overline{21321}^{(a)}$.

كتابة الأستاذ : بلقاسم عبدالرّزاق