univdocs.com

Épreuve écrite

Exercice 1: (07*pts*)

Une entreprise produit en grande quantité des stylos. La probabilité qu'un stylo présente un défaut est égale à 0,1. On prélève dans cette production, successivement et avec remise huit stylos. On note X la v.a. qui compte le nombre de stylos présentant un défaut parmi les huit stylos prélevés.

1. Quelle est la loi de probabilité de la v.a. X ?
2. Quelle est la probabilité qu'il n'y a aucun stylo avec un défaut ?
3. Quelle est la probabilité qu'il y a au moins un stylo avec un défaut ?
4. Quelle est la probabilité qu'il y a moins de deux stylos avec un défaut ?

Exercice 2: (06*pts*)

Soit X une variable aléatoire de fonction de répartition $F(x)$ définie par :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 1 \\ \ln x & \text{si } 1 < x \leq e \\ 1 & \text{si } e < x \end{cases}$$

1. Calculer $P(X \geq 1)$ et $P(0,5 \leq X \leq e)$.
2. Déterminer la fonction densité de probabilité $f(x)$ de la variable aléatoire X.
3. Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

On donne : $ln(e)=1$.

Exercice 3: (07*pts*)

La répartition des salaires journaliers des employés d'une usine est donnée par le tableau suivant :

Salaires (DA)	[500,600[	[600,700[	[700,850[	[850,900[	[900,1000[
Fréquences cumulées croissantes	0,18	0,43	0,79	0,94	1

1. Déterminer :
   a) La population étudiée (en précisant l'unité statistique)
   b) Le caractère étudié et sa nature.
2. Construire le tableau représentatif de cette population (utiliser ici la fréquence au lieu de l'effectif).
3. Représenter graphiquement cette distribution.
4. Calculer le mode, la médiane, la moyenne et l'intervalle interquartile.
5. Quelle est la proportion des employés qui perçoivent un salaire supérieur à 600 DA par jour.

Bon courage

CamScanner

univdocs.com

Corrigé type_Examen_2023

Exo 1 : (07pts)

1. La loi de probabilité de la v.a. X :

   $X = \sum_{i=1}^{8} X_i$ tel que $X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(0,1)$, $i = 1, \ldots, 8$. 0,5 0,5

   Donc, la v.a. X suit une loi binomiale de paramètre $n = 8$ et $p = 0,1$, on écrit $X \hookrightarrow \mathcal{B}(8, 0, 1)$, et on a : 0,5

   $$\mathbb{P}(X = k) = C_8^k (0,1)^k (0,9)^{8-k}. \quad 1$$

2. La probabilité qu'il n'y a aucun stylo avec un défaut :

   $$\mathbb{P}(X = 0) = C_8^0 (0,1)^0 (0,9)^{8-0} = (0,9)^8 = 0,43. \quad 1$$

3. La probabilité qu'il y a au moins un stylo avec un défaut :

   $$\mathbb{P}(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0,43 = 0,57. \quad 1$$

4. La probabilité qu'il y a moins de deux stylos avec un défaut :

   $$\mathbb{P}(X < 2) = \mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1)$$
   $$= \sum_{i=0}^{1} C_8^i (0,1)^i (0,9)^{8-i} \quad 1$$
   $$= 0,813.$$

(6pts)

Exo 2 :

1. $p(x \geq 1) = 1 - p(x \leq 1) = 1 - F(1) = 1 - \ln(1) = 1$ 1

$p(0,5 \leq x \leq e) = F(e) - F(0,5) = \ln(e) - 0 = 1$ 1

2) Il s'agit bien d'une fonction de répartition, strictement croissante de $F(1) = 0$ à $F(e) = 1$, de dérivée nulle en dehors de l'intervalle $[1, e]$, avec $F'(x) = f(x) = 1/x$ pour $1 < x \leq e$. On calcule donc :

$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} ; 1 \leq x \leq e \\ 0 ; \text{sinon} \end{cases}$ 1

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,dx = \int_1^e dx = e - 1 \quad 1$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx = \int_1^e x\,dx = \frac{1}{2}(e^2 - 1) \quad 1$$

et $V(X) = E(X^2) - E^2(X) = \frac{1}{2}(-e^2 + 4e - 3)$. 1

Exo3 :

1) a) Population : Les employés d'une usine

unité statistique : un (1) employé

b) caractère : le salaire

Nature : quantitatif continue

1

CamScanner

univdocs.com

2)

classes	$F_i(\uparrow)$	f_i	c_i	$F_i(\downarrow)$
[500, 600[	0,18	0,18	550	100
[600, 700[	0,43	0,25	650	82
[700, 850[	0,79	0,36	775	57
[850, 900[	0,94	0,15	875	42
[900, 1000[	1	0,06	950	36
total	/	1	/	/

$c_i = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$

$f_1 = 0{,}18 - 0 = 0{,}18$

$f_2 = F_2(\uparrow) - F_1(\uparrow) = 0{,}43 - 0{,}18 = 0{,}25$

⋮

$f_5 = F_5(\uparrow) - F_4(\uparrow) = 1 - 0{,}94 = 0{,}06$

3) Cette distribution est representée par un histogramme parce que le caractère est quantitatif continu.

Les classes ont des amplitudes differente.

$a_i = x_{i+1} - x_i$

$a_1 = 600 - 500 = 100$

$a_2 = 700 - 600 = 100$

$a_3 = 850 - 700 = 150$

$a_4 = 900 - 850 = 50$

$a_5 = 1000 - 900 = 100$

on choisie l'échelle suivante:

classe $\rightarrow$ 50 DA $\longrightarrow$ 1 cm

$f_i \rightarrow 0{,}02 \longrightarrow 1\,cm^2$

$\left.\begin{array}{l} - a_1 = 100 \longrightarrow 2\,cm \\ f_1 = 0{,}18 \longrightarrow \frac{0{,}18}{0{,}02} = 9\,cm^2 \end{array}\right\} \Rightarrow L_1 = \frac{9\,cm^2}{2\,cm} = 4{,}5\,cm$

$\left.\begin{array}{l} - a_2 = 100 \longrightarrow 2\,cm \\ f_2 = 0{,}25 \longrightarrow \frac{0{,}25}{0{,}02} = 12{,}5\,cm^2 \end{array}\right\} \Rightarrow L_2 = \frac{12{,}5\,cm^2}{2\,cm} = 6{,}25\,cm$

CamScanner

univdocs.com

$$\left.\begin{aligned} & - a_3 = 150 \longrightarrow 3\,cm \\ & f_3 = 0{,}36 \Rightarrow \frac{0{,}36}{0{,}02} = 18\,cm^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow L_3 = \frac{18\,cm^2}{3\,cm} = 6\,cm$$

$$\left.\begin{aligned} & - a_4 = 50 \longrightarrow 1\,cm \\ & f_4 = 0{,}15 \longrightarrow \frac{0{,}15}{0{,}02} = 7{,}5\,cm^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow L_4 = \frac{7{,}5\,cm^2}{1\,cm} = 7{,}5\,cm$$

$$\left.\begin{aligned} & - a_5 = 100 \longrightarrow 2\,cm \\ & f_5 = 0{,}06 \longrightarrow \frac{0{,}06}{0{,}02} = 3\,cm^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow L_5 = \frac{3\,cm^2}{2\,cm} = 1{,}5\,cm$$

4) Le mode est obtenue graphiquement :

La classe modale $\Rightarrow [850, 900[$

D'après le graphe le mode est situé à une distance de 7,25 de 500DA

$$\boxed{M_0 = 862{,}5\,DA} \quad 0{,}5$$

pour calculer la médiane est l'intervalle interquartile, on trace le polygone des fréquences cumulées croissantes :

D'après le graphe :

$M_e = 675\,DA$ 0,5

$\left.\begin{aligned} & q_1 = 580 \\ & q_3 = 760 \end{aligned}\right\}$ IQR (intervalle interquartile) $= 760 - 580 = 180\,DA$

$$\bar{X} = \sum_{i=1}^{5} f_i\, c_i = (0{,}18 \times 550) + (0{,}25 \times 650) + (0{,}36 \times 775) + (0{,}15 \times 875) + (0{,}06 \times 950)$$

$$\boxed{\bar{X} = 728{,}75\,DA} \quad 0{,}5$$

5) D'après le calcul de ~~les~~ fréquences cumulées décroissantes (F_i) on obtient : la proportion des employés qui ont un salaire > 600 est 82% 0,5

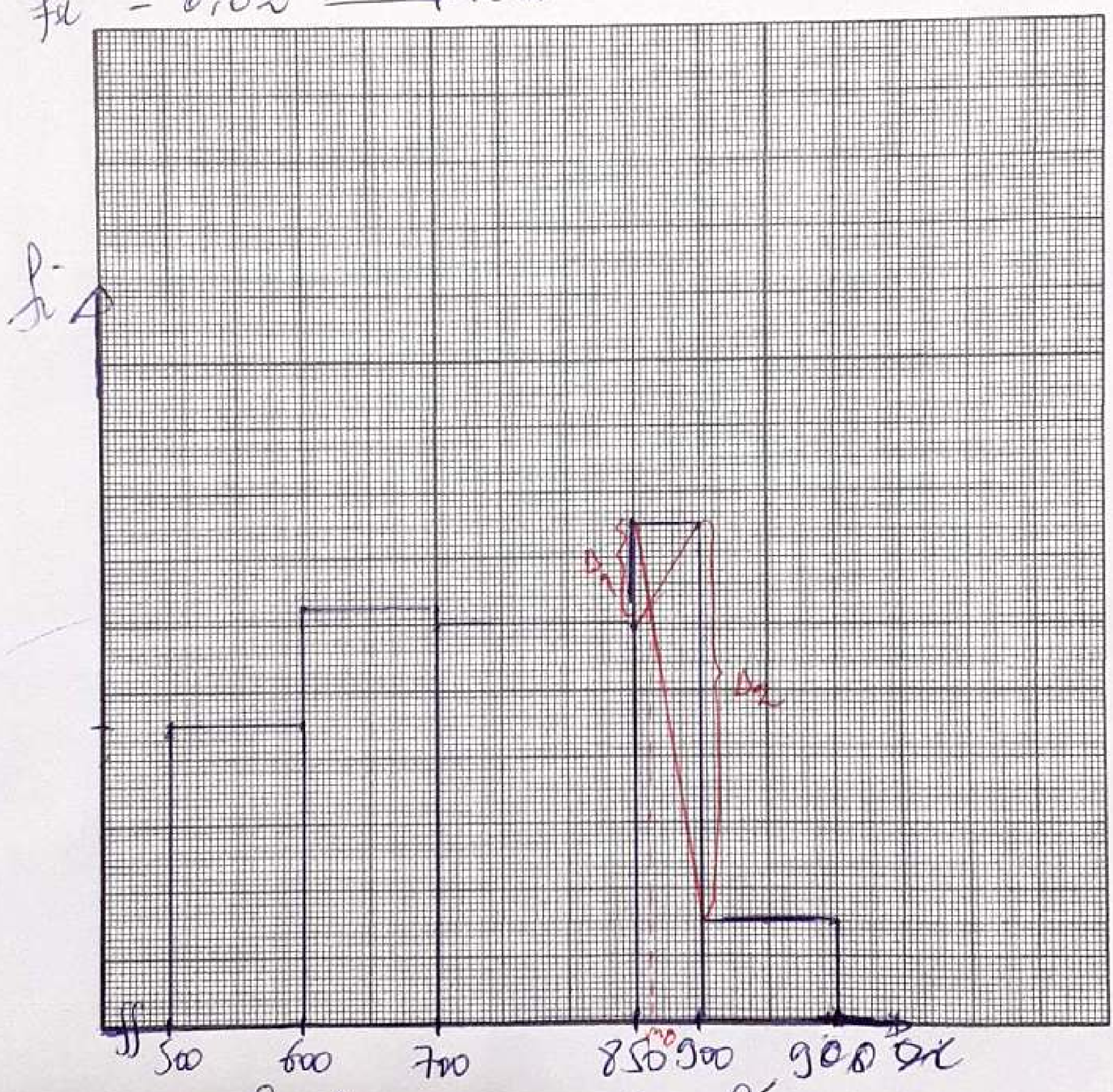
CamScanner

univdocs.com

Nom: .... Prénom: ....

option: .... Groupe: ....

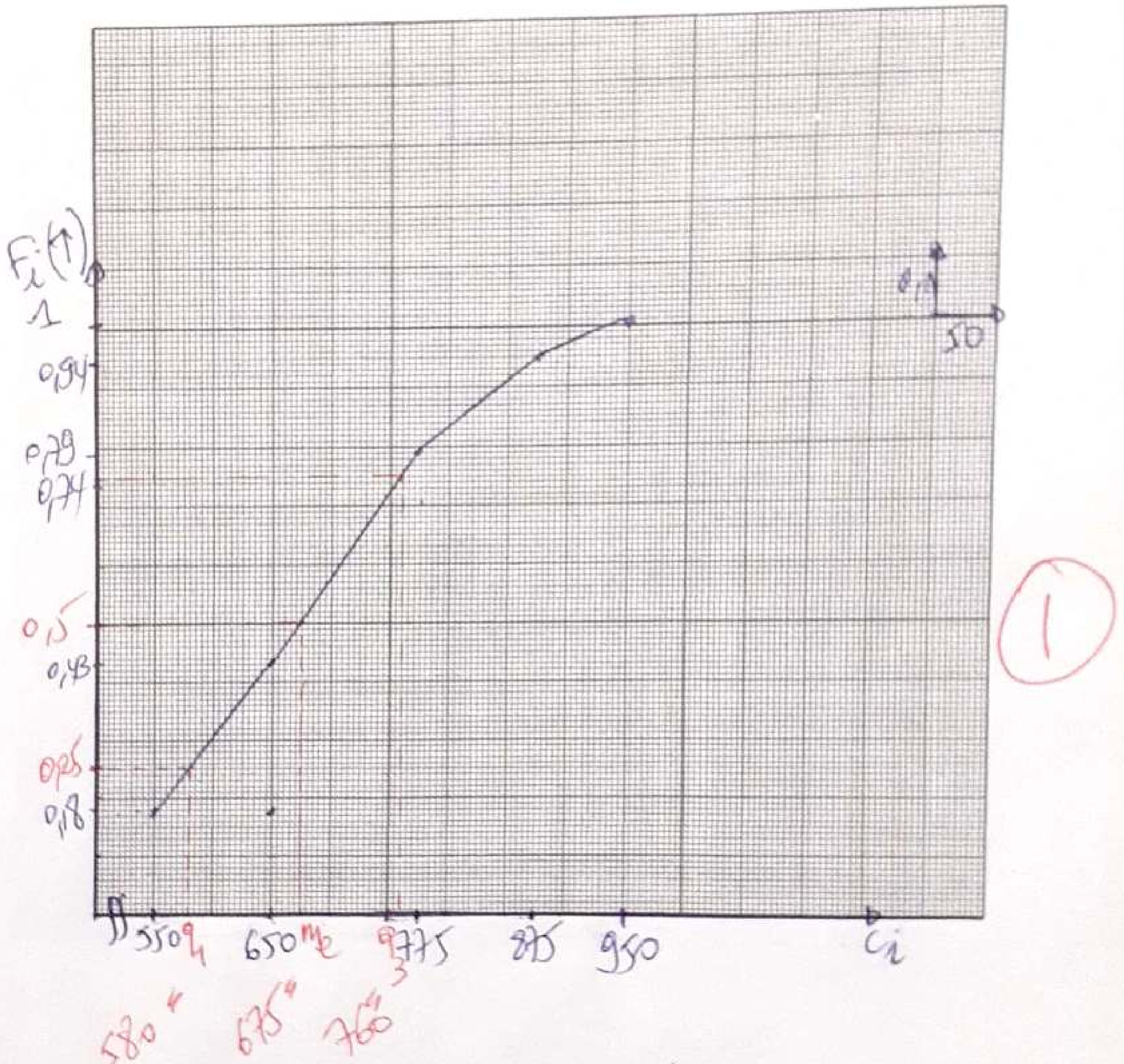
classes - 50 DA → 1cm
fi - 0,02 → 1cm²



histogramme des fréquences

CamScanner

univdocs.com



polygone des fréquences cumulées croissantes.

CamScanner