Correction de la Série d'exercices 2 en mathématiques

Exo1 : Calculer les primitives suivantes :

$\int(3x^2-2x+3)\,dx$; $\int(\frac{6}{x^2}-3\sqrt{x}+\frac{2}{x})\,dx$; $\int e^x\sin(e^x)\,dx$; $\int xe^{x^2}\,dx$; $\int\frac{\ln x}{x}\,dx$;

$\int cos^3x\ dx$; $\int t^2e^t\ dt$; $\int x^2\ln x\,dx$

Solution :

- $\int(3x^2-2x+3)\,dx = x^3-x^2+3x+c$
- $\int(\frac{6}{x^2}-3\sqrt{x}+\frac{2}{x})\,dx = -\frac{6}{x}-2\sqrt{x^3}+2lnx+c$
- $\int e^x\sin(e^x)\,dx = \int\sin(u)\,du = -\cos u + c = -\cos(e^x)+c$ où $u=e^x$ donc $du=e^xdx$
- $\int xe^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int 2xe^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int e^u\,du = \frac{1}{2}e^u+c = \frac{1}{2}e^{x^2}+c$ où $u=x^2$ donc $du=2xdx$
- $\int\frac{\ln x}{x}\,dx = \int u\,du = \frac{u^2}{2}+c = \frac{(lnx)^2}{2}+c$ où $= lnx$ donc $du = \frac{1}{x}dx$
- $\int cos^3x\ dx = \int cos^2x\ cosx\ dx = \int(1-sin^2x)cosx\ dx =$

$\int(1-u^2)du = u-\frac{1}{3}u^3+c = sinx-\frac{1}{3}sin^3x+c$ où $u=sinx$ donc $du=cosx\ dx$

- $\int t^2e^t\ dt$; *on applique l'intégration par partie*

  $\int u'(x)v(x)dx = u(x)v(x)-\int u(x)v'(x)dx$

On pose : $u'=e^t$ et $v=t^2$ donc $u=e^t$ et $v'=2t$

$\int t^2e^t\ dt = t^2e^t-2\int te^tdt$ *on utilise une seconde intégration par partie*

On pose : $u'=e^t$ et $v=t$ donc $u=e^t$ et $v'=1$

$\int t^2e^t\ dt = t^2e^t-2[te^t-\int e^t\,dt] = t^2e^t-2te^t+2e^t+c = (t^2-2t+2)e^t+c$

- $\int x^2lnx\ dx$; *on applique l'intégration par partie*

$\int u'(x)v(x)dx = u(x)v(x)-\int u(x)v'(x)dx$

On pose : $u'=x^2$ et $v=lnx$ donc $u=\frac{x^3}{3}$ et $v'=\frac{1}{x}$

$\int x^2lnx\ dx = \frac{x^3}{3}lnx-\frac{1}{3}\int x^3\frac{1}{x}dx = \frac{x^3}{3}lnx-\frac{1}{3}\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3}lnx-\frac{1}{3}\frac{x^3}{3}+c = \frac{x^3}{3}lnx-\frac{x^3}{9}+c =$
$\frac{x^3}{3}(\ lnx-\frac{1}{3})+c$

Exo2 : Déterminer les réels a et b tels que : $\forall x\in R-\{-1,1\}$ $\quad\frac{1}{x^2-1}=\frac{a}{x+1}+\frac{b}{x-1}$

Utiliser le changement de variable u=cosx pour calculer $\int\frac{dx}{\sin x}$

Solution :

1. En multipliant les deux membres par $x+1$, puis en remplaçant x par -1, on obtient $a = -\frac{1}{2}\cdot$
En multipliant les deux membres par $x-1$, puis en remplaçant x par 1, on obtient $b = \frac{1}{2}\cdot$ Donc :

$$\frac{1}{x^2-1} = -\frac{1}{2}\frac{1}{x+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{x-1}.$$

2. Commençons par un calcul formel (comme si on écrivait au brouillon) :

$$du = -\sin x\, dx \quad ; \quad \frac{dx}{\sin x} = -\frac{du}{\sin^2 x} = -\frac{du}{1-\cos^2 x} = \frac{du}{u^2-1}.$$

Retrouvons du sens mathématique :

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{du}{u^2-1} = -\frac{1}{2}\int \frac{du}{u+1} + \frac{1}{2}\int \frac{du}{u-1}$$
$$= -\frac{1}{2}\ln|u+1| + \frac{1}{2}\ln|u-1| = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right|$$
$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\cos x - 1}{\cos x + 1}\right|.$$

Exo3 : Calculer les intégrales définies : I=$\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin2x\, dx$; J=$\int_1^z \frac{dx}{2x-1}$; K=$\int_0^2 e^{-t}\, dt$; L=$\int_1^4 \frac{x^2}{x^3+2}\, dx$; S= $\int_0^{+\infty} e^{-2t}\cos 3t dt$.

Solution :

1. I=$\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin2x\, dx = \left[-\frac{1}{2}cos2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{2}\left[cos2\frac{\pi}{2} - cos0\right] = -\frac{-2}{2} = 1$
2. J=$\int_1^z \frac{dx}{2x-1} = \frac{1}{2}\int_1^z \frac{2}{2x-1}dx = \frac{1}{2}\int_1^z \frac{u\prime}{u}dx = \frac{1}{2}[lnu(x)]_1^Z = \frac{1}{2}[\ln(2x-1)]_1^Z =$

   $\frac{1}{2}[\ln(2z-1) - \ln(2\times 1 - 1)] = \frac{1}{2}\ln(2z-1)$ *où* $u=2x-1$ *donc* $u'=2$
3. K=$\int_0^2 e^{-t}\, dt = [-e^{-t}]_0^2 = 1 - e^{-2} = 1 - \frac{1}{e^2}$
4. L=$\int_1^4 \frac{x^2}{x^3+2}\, dx = \frac{1}{3}\int_1^4 \frac{3x^2}{x^3+2}\, dx = \frac{1}{3}\int_1^4 \frac{u\prime}{u}\, dx = \frac{1}{3}[lnu(x)]_1^4 = \frac{1}{3}[ln(x^3+2)]_1^4 =$
   $\frac{1}{3}[ln(4^3+2) - \ln(1+2)] = \frac{1}{3}[ln66 - ln3] = \frac{1}{3}ln\left(\frac{66}{3}\right) = \frac{1}{3}ln22$
5. S= $\int_0^{+\infty} e^{-2t}\cos 3t dt = \lim_{b\to+\infty} \int_0^b e^{-2t}\cos 3t dt$; posons F(t)= $\int e^{-2t}\cos 3t dt$ et faisons une intégration par partie :

On pose : $u'=e^{-2t}$ *et* $v=cos3t$ *donc* $u=-\frac{1}{2}e^{-2t}$ *et* $v'=-3sin3t$

F(t)= $\int e^{-2t}\cos 3t dt = -\frac{1}{2}e^{-2t}cos3t - \frac{3}{2}\int e^{-2t}sin3t\, dt$

Faisons une seconde intégration par partie :

On pose : $u'=e^{-2t}$ *et* $v=sin3t$ *donc* $u=-\frac{1}{2}e^{-2t}$ *et* $v'=3cos3t$

$F(t)= -\frac{1}{2}e^{-2t}cos3t - \frac{3}{2}\int e^{-2t}sin3t\,dt =$

$-\frac{1}{2}e^{-2t}cos3t - \frac{3}{2}\left[-\frac{1}{2}e^{-2t}sin3t + \frac{3}{2}\int e^{-2t}cos3t\,dt\right]$

$F(t)= -\frac{1}{2}e^{-2t}cos3t + \frac{3}{4}e^{-2t}sin3t - \frac{9}{4}F(t)$ *d'où* $F(t)= \frac{e^{-2t}}{13}[3sin3t - 2cos3t]$

$$F(b) - F(0) = \frac{e^{-2b}}{13}[3sin3b - 2cos3b] + \frac{2}{13}$$

$S = \lim_{b\to+\infty} \int_0^b e^{-2t}\cos3t dt = \lim_{b\to+\infty} [F(b) - F(0)] = \lim_{b\to+\infty} \frac{e^{-2b}}{13}[3sin3b - 2cos3b] + \frac{2}{13} = \frac{2}{13}$

En effet, $\lim_{b\to+\infty} \frac{e^{-2b}}{13}[3sin3b - 2cos3b] = 0$ *(voir théorème d'encadrement)*

Exo4 : Une substance commence à entrer dans la circulation sanguine d'un chat au temps t = 0. On note C(t) la concentration de cette substance au temps t. D'après un modèle théorique, la vitesse de variation C'(t) de la concentration est donnée par la formule

$C'(t) = Ae^{-\theta t} - Be^{-\alpha t}$ où A, B, θ, α sont des constantes.

Calculer la valeur de la concentration C(t) au temps T.

Solution : $C(T) = \int_0^T C'(t)dt = \int_0^T (Ae^{-\theta t} - Be^{-\alpha t})dt = \left[-\frac{A}{\theta}e^{-\theta t} + \frac{B}{\alpha}e^{-\alpha t}\right]_0^T$

$C(T) = -\frac{A}{\theta}e^{-\theta T} + \frac{B}{\alpha}e^{-\alpha T} + \frac{A}{\theta} - \frac{B}{\alpha}$

Exo5 : Une population d'animaux augmente à la vitesse de 200 + 50t (en individus/an, t étant en années). De combien la population a-t-elle augmenté entre la quatrième et la dixième année

Solution : la population a augmenté entre la quatrième et la dixième année de :

$$\int_4^{10} (200 + 50t)dt = [200t + 25t^2]_4^{10} = 4500 - 1200 = 3300$$

Exo6 : Une population de bactéries d'initialement 700 unités croît à la vitesse de $452{,}7 \times e^{1{,}25t}$ bactéries par heure. Quel est l'effectif de cette population après trois heures ?

Solution : Posons y(t) l'effectif de la population de bactéries : $y(t) = \int 452{,}7 \times e^{1{,}25t}dt$

$y(t) = \frac{452{,}7}{1{,}25}e^{1{,}25t} + c = 362.16\times e^{1{,}25t} + c$ puisque y(0)=700 on obtient c=337.84

d'où $y(t)= 362.16\times e^{1{,}25t}+337.84$. Après trois heures l'effectif de la population de bactéries est devenu : $y(3)= 362.16\times e^{1{,}25\times3}+337.84=15737.27$

Exercices sur les séries numériques à termes poritifs :

Exo1 : Les sommes suivantes sont-elles finies ?

$S_1 = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{5^n}$; $S_2 = \sum_{n=4}^{+\infty}\frac{2^n}{3^{n-2}}$; $S_3= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{9}{(3n+1)(3n+4)}$

Solution : en utilisant les suites géométriques ou l'équivalence des séries numériques

- $\frac{1}{5^n} = \left(\frac{1}{5}\right)^n$ est le terme général d'une série géométrique de raison dans $]-1,1[$, la série converge.

- $\frac{2^n}{3^{n-2}} = 4 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$ est le terme général d'une série géométrique de raison dans $]-1,1[$, la série converge.
- $\frac{9}{(3n+1)(3n+4)} \sim \frac{1}{n^2}$ est le terme général d'une série d'une série de Riemann convergente avec $\alpha = 2 > 1$

Exo2 : Déterminer la nature des séries numériques suivantes : a/ $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}$

b/ $\sum_{n\geq 0} \frac{(n\,!)^2}{(2n)\,!}$ c/ $\sum_{n\geq 0} \frac{(n\,!)^2}{2^{n^2}}$ d/ $\sum_{n\geq 0} \frac{n^2}{n^3+1}$ e/ $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{(\ln(n))^n}$ f/ $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n^2+1}{n^2}$ g/ $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{\sqrt{n}}$

h/ $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n+1)^4}{(7n^2+1)^3}$ k/ $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^n$ i/ $\sum_{n=0}^{+\infty} \ln(1+e^{-n})$ l/ $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(ne^{\frac{1}{n}} - n\right)$

Solution :

a / On a $u_n = \frac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}} \sim \frac{1}{n^{3/2}}$, *la série* $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ *est convergente (série de Riemann avec* $\alpha = \frac{3}{2} > 1$*), on en déduit que la série* $\sum u_n$ *est convergente (critère d'équivalence)*

b / Critère de D'Alembert : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{((n+1)!)^2}{(2(n+1))!}\frac{(2n)!}{(n\,!)^2} = \left[\frac{(n+1)!}{n\,!}\right]^2 \frac{(2n)!}{(2n+2)!}$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to+\infty} (n+1)^2 \frac{1}{(2n+2)(2n+1)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{4n+2} = \frac{1}{4} < 1,$$

la série est donc convergente.

c / Critère de D'Alembert : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{((n+1)!)^2}{2^{(n+1)^2}}\frac{2^{n^2}}{(n\,!)^2} = \left[\frac{(n+1)!}{n\,!}\right]^2 \frac{2^{n^2}}{2^{(n+1)^2}}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} (n+1)^2 \frac{1}{2^{2n+1}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^2}{e^{(2n+1)\ln 2}} = 0 < 1$, *la série est donc convergente.*

d / La série est à termes positifs, on peut donc appliquer le critère d'équivalence :

on a $u_n = \frac{n^2}{n^3+1} \sim \frac{1}{n}$, *la série harmonique* $\sum \frac{1}{n}$ *est divergente, donc la série* $\sum u_n$ *est divergente.*

e / Critère de D'Alembert : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(\ln(n))^n}{(\ln(n+1))^{n+1}} = \left[\frac{\ln(n)}{\ln(n+1)}\right]^n \cdot \frac{1}{\ln(n+1)}$

on a : $0 \leq \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{1}{\ln(n+1)} \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0 < 1$, *la série est donc convergente.*

f/ $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n^2+1}{n^2}$; $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^2+1}{n^2} = 1 \neq 0$ *donc la série diverge*

g/ $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{\sqrt{n}} = 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 2\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ Série de Riemann avec $= \frac{1}{2} < 1$, donc la série diverge h/$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n+1)^4}{(7n^2+1)^3}$

$$\frac{(2n+1)^4}{(7n^2+1)^3} \sim \frac{2^4}{7^3} \times \frac{1}{n^2}$$

Il s'agit du terme général d'une série de Riemann convergente avec $\alpha = 2 > 1$

k/ $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to+\infty} e^{n\ln(1-\frac{1}{n})} = \lim_{n\to+\infty} e^{-\frac{\ln(1-\frac{1}{n})}{-\frac{1}{n}}}$$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{x=-\frac{1}{n}\to 0} e^{-\frac{\ln(1+x)}{x}} = e^{-1} = \frac{1}{e} \neq 0 \text{ donc la série diverge}$$

i/ $\sum_{n=0}^{+\infty} \ln(1 + e^{-n})$

$$\ln(1 + e^{-n}) \sim e^{-n} = \left(\frac{1}{e}\right)^n$$

Il s'agit d'une suite géométrique de raison dans $]-1,1[$.

l/ $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(ne^{\frac{1}{n}} - n\right)$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \left(ne^{\frac{1}{n}} - n\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)}{\frac{1}{n}} = \lim_{x=\frac{1}{n}\to 0} \frac{(e^x-1)}{x} = 1 \neq 0. \text{ La série diverge}$$