6 الإحتمالات

المحتويات

قائمة المحتويات

6 الإحتمالات

دروس مفصلة

1 الإحتمالات المتساوية على مجموعة منتهية

1 تذكير بالمصطلحات

مصطلحات الإحتمالات

1. نقول عن تجربة إنها عشوائية كل تجربة لا يمكن توقع نتيجتها رغم معرفة جميع إمكانياتها .
2. **مثلا**: رمي قطعة نقد نتائجها الممكنة هي ظهور الوجه أو الظهر، رمي زهر النرد نتائجها الممكنة هي ظهور الأوجه الستة .
3. نرمز لمجموعة النتائج الممكنة للتجربة العشوائية بـ Ω ونسميها مجموعة الإمكانيات (المخارج) أو المجموعة الشاملة.
4. كل عنصر من Ω يسمى إمكانية وكل جزء منها يسمى حادثة (حدث).
5. إذا كان A و B حادثتان و a إمكانية من Ω

إذا كان	نقول إن :
$A=\Omega$	A هي الحادثة الأكيدة
$A=\varnothing$	A هي الحادثة المستحيلة
$a\in A$	الإمكانية a تحقق الحادثة A
$C=A\cap B$	C هي تقاطع الحادثتين A و B (الحادثة A و B)
$C=A\cup B$	C هي اتحاد الحادثتين A و B (الحادثة A أو B)
$B=\overline{A}$ ، $(B=\Omega-A)$	B هي الحادثة المعاكسة لـ A
$A\cap B=\varnothing$	الحادثتين A و B غير متلائمتين

2 قانون الإحتمال

تعريف

$\Omega=\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$ مجموعة النتائج الممكنة لتجربة العشوائية، P دالة ترفق بكل عنصر x_i من Ω عدد حقيقيا موجبا P_i. نقول عن p إنه قانون إحتمال إذا وفقط إذاكان : $\sum_{i=1}^{n} P_i=1$.

ملاحظات

1. إذا تحقق الشرط السابق نقول إن الثنائية $(\Omega;P)$ فضاء إحتمالي منته.

2. إحتمال حادثة A هو مجموع احتمالات كل المخارج التي تنتمي إلى A .
3. في حالة تساوي احتمالات جميع المخارج نقول إن الفضاء متساوي الإحتمال (متساوي التوزيع).
4. بعض العبارات التي تدل على تساوي الإحتمال :
   - لكل الإمكانيات نفس الإحتمال أو نفس الحظ .
   - قطعة (نقد أو نرد) غير مزيفة .
   - نسحب عشوائيا .
   - كريات لا نفرق بينها باللمس .

مبرهنة

في حالة تساوي الإحتمال على Ω

يكون لدينا من أجل كل حادثة A : $P(A) = \frac{\text{عدد عناصر } A}{\text{عدد عناصر } \Omega}$

مثال

عند رمي زهرة نرد غير مزيفة ذات ستة أوجه مرقمة من 1 إلى 6 ، مجموعة المخارج هي : $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ وبما زهرة النرد غير مزيفة فهذا يعني أنه من أجل كل عدد طبيعي i من 1إى 6 فإن : $P_i = \frac{1}{6}$

ومنه احتمال الحادثة A : الحصول على رقم زوجي هو : $\frac{1}{2}$.

خواص

$(\Omega;P)$ فضاء إحتمالي و A و B حادثتان :

1. $0 \leq P(A) \leq 1$.
2. $P(\Omega) = 1$ و $P(\varnothing) = 0$.
3. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.
4. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
5. إذا كان $A \subset B$ فإن : $P(A) \leq P(B)$.

2 المتغيرات العشوائية

1 تذكير

لتكن Ω مجموعة النتائج الممكنة لتجربة عشوائية حيث : $\Omega = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ وليكن P احتمال على Ω

1. أمل قانون الإحتمال هو العدد E حيث : $E = \sum_{i=1}^{n} x_i P_i$.
2. تباين قانون الإحتمال هو العدد V حيث: $V = \sum_{i=1}^{n} (x_i - E)^2 p_i$.

3. الإنحراف المعياري لقانون الإحتمال هو العدد $\sigma = \sqrt{V}$.

2 المتغير العشوائي

مثال

نرمي قطعة نقدية متوازنة 3 مرات متتابعة ونسجل F لظهور الوجه و P لظهور الظهر ، مجموعة الإمكانيات هي :
$\Omega = \{PPP, PPF, PFP, PFF, FPP, FPF, FFP, FFF\}$ ونعتبر اللعبة التالية : يربح اللاعب دينارا واحد كلما ظهر F ويخسر دينارا كلما ظهر P
♠ نعتبر الدالة X التي ترفق بكل نتيجة الربح (أو الخسارة) المناسب لها. يسمى X المتغير العشوائي المعرف على Ω
إذن مجموعة قيم X هي -3 و -1 و 1 و 3.

تعريف

Ω مجموعة النتائج الممكنة لتجربة العشوائية، نسمي متغيرا عشوائيا كل دالة عددية معرفة على Ω

3 قانون إحتمال متغير عشوائي

في المثال السابق نبحث عن احتمال الحادثة : يكون الربح دينارا واحدا
مثلا : نعبر عن هذه الحالة بالكتابة $(X = 1)$ وتتحقق هذه الحالة بتحقق الحادثة A حيث : $A = \{PFF, FFP, FPF\}$ و $P(A) = \dfrac{3}{8}$ إذن نكتب :
$P(X = 1) = \dfrac{3}{8}$ الجدول التالي يمثل قانون احتمال للمتغير العشوائي X

الربح X	-3	-1	1	3
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

تعريف

قانون احتمال لمتغير عشوائي X هو الدالة المعرفة على I (مجموعة قيم X)والتي نرفق بكل قيمة x_i من I العدد $P(X = x_i)$

4 الأمل الرياضياتي

الأمل الرياضياتي

(Ω, P) فضاء احتمال،X مغير عشوائي على Ω قيمه (x_i) واحتمالاتها (p_i) حيث $i \in \mathbb{N}^*$ ، **الأمل الرياضياتي**للمتغير العشوائي X هو العدد الحقيقي المعرف بـ : $E(X) = \sum_{i=1}^{n} P_i x_i$

في المثال السابق الأمل الرياضياتي للمتغيرالعشوائي X هو العدد:
$E(X) = (-3) \times \dfrac{1}{8} + (-1) \times \dfrac{3}{8} + 1 \times \dfrac{3}{8} + 3 \times \dfrac{1}{8} = 0$.

ملاحظة

إذا كان $E(X)=0$ نقول عن اللعبة إنها عادلة .

5 التباين والإنحراف المعياري

التباين و الإنحراف المعياري

الإنحراف المعياري هو الجذر التربيعي للتباين $V(X)$ ونرمز له بـ : $\sigma(X)$ حيث : $V(X)=\sum_{i=1}^{n} P_i\left(x_i-E(X)\right)^2=E(x^2)-\left(E(X)\right)^2$.

مثال

في المثال السابق :

$V(x)=9\times\frac{1}{8}+1\times\frac{3}{8}+1\times\frac{3}{8}+9\times\frac{1}{8}-0=3$ و $\sigma(X)=\sqrt{3}$.

3 المبدأ الأساسي للعد

العد

لتكن E مجموعة منتهية عدد عناصرها $n\in\mathbb{N}^*$ وk عدد طبيعي

1 القوائم

تعريف

نسمي قائمة ذات k $(k\geq 1)$ عنصرا من E كل متتالية مرتبة من k عنصر من عناصر E حيث : عدد القوائم ذات k عنصر من E هو n^k .

التفسير

لكل عنصر من عناصر القائمة توجد n إمكانية، إذن عدد القوائم ذات k عنصر من E هو : $\underbrace{n\times n\times n\cdots\times n}_{k\text{مرة}}$ أي هو : n^k .

أمثلة

1. عدد الطرائق الممكنة لتشكيل عدد ذي 4 أربعة أرقام مختارة من الأرقام 1 ، 3 ،6 ،7 ،8 ،5 هو 6^4 طريقة .
2. عدد الطرائق الممكنة لسحب 3 كرات على التوالي مع الإعادة من كيس يحتوي على 9 كرات هو : 9^3 طريقة .

2 الترتيبات

تعريف

نسمي ترتيبة k عنصرا من E كل متتالية مرتبة من k عنصر متمايزة مثنى مثنى من عناصر E
عدد ترتيبات k عنصر من E هو العدد الطبيعي A_n^p حيث : $A_p^n = n(n-1)(n-2)\cdots(n-p+1)$.

التفسير

لتكوين ترتيبة توجد n إمكانية للعنصر الأول ثم $(n-1)$ للعنصر الثاني ... وأخيرا $(n-p+1)$ للعنصر الأخير الذي رتبته p .

أمثلة

1. عدد الطرائق الممكنة لجلوس 5 تلاميذ على 3 مقاعد في صف واحد هو : $A_5^3 = 5\times4\times3 = 60$ طريقة .
2. عدد الطرائق الممكنة لسحب 3 كرات على التوالي دون الإعادة من كيس يحتوي على 9 كرات هو : $A_9^3 = 9\times8\times7 = 504$ طريقة .

3 التبديلات

تعريف

نسمي تبديلة لعناصر المجموعة E كل ترتيبة n من E
عدد تبديلات مجموعة ذات n عنصرا من E هو العدد الطبيعي A_n^n حيث : $A_n^n = n(n-1)(n-2)\cdots\times2\times1$
نرمز لهذا العدد بـ : $n!$ أي : $n! = n(n-1)(n-2)\cdots\times2\times1$
ويقرأ n عاملي.

اصطلاح: $0! = 1$

أمثلة

1. $8! = 8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1$.
2. عدد تبديلات المجموعة $\{a,b,c\}$ هو $3! = 6$ وهي : $(a,b,c);(b,c,a);(c,a,b);(b,a,c);(c,b,a);(a,c,b)$.

ملاحظة

يمكن كتابة عدد الترتيبات ذات p عنصر من مجموعة بها n عنصر كما يلي : $A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$.

4 التوفيقات

تعريف

نسمي توفيقة ذات k عنصر من عناصر E كل جزء من E ذي k عنصر من عناصر E
نرمز لعدد توفيقات ذات k عنصر من مجموعة ذات n عنصر بـ : C_n^k أو $\begin{pmatrix}k\\n\end{pmatrix}$ والمعرف كما يلي : $C_n^k = \dfrac{A_n^k}{k!} = \dfrac{n!}{k!(n-p)!}$.

أمثلة

1. $C_{10}^2 = \dfrac{10!}{2!(10-2)!} = 45$.
2. عدد الطرائق الممكنة لاختيار تلميذين من 28 تلميذ هو : $C_{28}^2 = \dfrac{28!}{2!(28-2)!} = 378$.

ملاحظات

1. عدد أجزاء E ذات n عنصرا هو 1 لأن E هي الجزء الوحيد الذي يشمل n عنصرا ومنه : $C_n^n = \dfrac{n!}{n!(0)!} = 1$.
2. لدينا أيضا : $C_1^n = n$ و $C_n^0 = 1$.

خواص

1. من أجل كل $n, k \in \mathbb{N}$ حيث $(0 \leq k \leq n)$ لدينا: $C_n^k = C_n^{n-k}$.
2. من أجل كل عددين طبيعيين n و k حيث $(1 \leq k \leq n-1)$ لدينا: $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{p-1}$.

ملاحظة

تمكننا الخاصية الثانية من حساب C_n^k إذا علمنا C_{n-1}^k و C_{n-1}^{k-1} كما هو مبين في الشكل التالي (مثلث باسكال)

	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$
$n=0$	1						
$n=1$	1	1					
$n=2$	1	2	1				
$n=3$	1	3	3	1			
$n=4$	1	4	6	4	1		
$n=5$	1	5	10	10	5	1	
$n=6$	1	6	15	20	15	6	1

5 دستور ثنائي الحد

مبرهنة

من أجل كل عددين حقيقين a و b من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n لدينا : $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$.

مثال

$(x+1)^6 = \sum_{k=0}^{6} C_6^k x^{6-k} 1^k = x^6 + 6x^5 + 15x^4 + 20x^3 + 15x^2 + 6x + 1$.

6 طرائق العد

الطريقة / المطلوب	تشكيل أرقام	تشكيل لجان	سحب من كيس	مجموعات
قائمة	الأرقام يمكن أن تتكرر		على التوالي مع الإعادة	
ترتيبة	الأرقام لا تتكرر	المهام محددة	على التوالي دون الإعادة	
توفيقة		المهام غير محددة	في آن واحد	أجزاء مجموعة

4 الإحتمالات الشرطية

تعريف

احتمال الحادثة B علما أن A محققة هو العدد $P_A(B)$ المعرف بـ :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

مثال

نرمي زهرة نرد غير مزيفة مرقمة من 1 إلى 6

- ماهو إحتمال الحصول على رقم فردي علما أنه مضاعف للعدد 3 ؟

ملاحظات

1. يجب أن نفرق بين العبارتين : (A و B) و(B علما أن A) فالأولى تعني : تحقق الحادثتين A و B في آن واحد، بينما الثانية تعني : تحقق B يتبع تحقق A علما أن A محققة.
2. عند تساوي الاحتمال يكون : $P_A(B) = \dfrac{\text{عدد عناصر } A \cap B}{\text{عدد عناصر } A}$.

5 الحوادث والمتغيرات العشوائية المستقلة

1 الحوادث المستقلة

تعريف

(Ω, P) فضاء إحتمالي ، A و B حادثتان

نقول عن الحادثتين A و B إنهما مستقلتان إذا وفقط إذاكان تحقق إحداهما لا يغير من احتمال تحقق الأخرى.

مبرهنة

نقول عن الحادثتين A و B إنهما مستقلتان إذا وفقط إذا كان :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

ومنه ينتج أنه إذا كان $P(A) \neq 0$ فإن : $P_A(B) = P(B)$.

أمثلة

1. نرمي زهرة نرد غير مزيفة مرقمة من 1 إلى 6 ونعتبر الحادثتين
A الحصول على رقم زوجي و B الحصول على عدد أولي
-هل الحادثتان A و B مستقلتان؟ .

2. نرمي قطعة نقد غير مزيفة مرتين على التوالي ونعتبر الحادثتين
A الحصول على الوجه في الرمية الأولى وB الحصول على الوجه في الرمية الثانية
-هل الحادثتان A و B مستقلتان؟ .

الحل

1. لدينا $P(A)=\frac{1}{2}$ و $P(B)=\frac{1}{2}$ و $P(A\cap B)=P(\{2\})=\frac{1}{6}$
بما أن $\frac{1}{4}\neq\frac{1}{6}$ فالحادثتان A و B غير مستقلتان .

2. لدينا $P(A)=\frac{1}{2}$ و $P(B)=\frac{1}{2}$ و $P(A\cap B)=\frac{1}{4}$
بما أن $\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$ فالحادثتان A و B مستقلتان .

ملاحظات

1. في حالة استقلال الحوادث يكون احتمال قائمة النتائج هو جداء احتمالات كل النتائج (يحدث هذا عموما في التجارب العشوائية المكررة) .
2. إذا كانت A و B حادثتين مستقلتين فإن A و $\overline{B}$ مستقلتين .
3. A و B مستقلتان لا يستلزم عموما أن A و B غير متلائمتين .
4. إذا كانت A و B حادثتين غير متلائمتين مع $P(A)\neq 0$ و $P(B)\neq 0$ فإن A و B غير مستقلتين ($P(A\cap B)=0$ و $P(A)\times P(B)\neq 0$) .

2 المتغيرات العشوائية المستقلة

تعريف

X و Y متغيران معرفان على نفس مجموعة الإمكانيات E
لتكن $x_1,x_2,...,x_n$ قيم المتغير X و $y_1,y_2,...,y_m$ قيم المتغير Y
نقول إن X و Y مستقلان عندما تكون الحادثتان $(X=x_i)$ و $(Y=y_j)$ مستقلتان من أجل كل i و j حيث ($1\leq i\leq n$ و $1\leq j\leq m$) .

ملاحظة

المتغيران العشوائيان المرتبطان بتجربتين مختلفتين مستقلان

6 قانون الإحتمالات الكلية

1 تجزئة مجموعة

تعريف

نسمي تجزئة مجموعة مجموعة أجزاء لهذه المجموعة كلها ليست خالية، منفصلة مثنى مثنى واتحادهما المجموعة الكلية أي أن $(A_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ إذا وفقط إذا تحقق ما يلي :

1. $A_i \neq \varnothing$
2. $A_i \cap A_j = \varnothing$
3. $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cap A_n = \Omega$

2 دستور الاحتمالات الكلية

مبرهنة

لتكن A_1 ، A_2 ، ... ، A_n حوادث احتمالاتها غير معدومة وتشكل تجزئة للمجموعة الشاملة Ω . لدينا من أجل كل حادثة B :
$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_n \cap B) + \cdots P(A_n \cap B)$
مع $P(A_i \cap B) = P(A_i) \times P_{A_i}(B)$ من أجل كل i يحقق : $1 \leq i \leq n$
و $\{A_i \cap B; 1 \leq i \leq n\}$ تشكل تجزئة للحادثة B

6 الإحتمالات

تمارين البكالوريا

7 حلول تمارين الإحتمالات الواردة في البكالوريا

1 شعبة العلوم التجريبية

التمرين 01 بكالوريا 2018 الموضوع الأول (04 نقاط)

✍ يحتوي صندوق 10 كريات متماثلة لا نفرق بينها باللمس ,منها اربع كريات بيضاء مرقمة بـ:$1,2,2,3$ ثلاث كريات مرقمة حمراء مرقمة بـ:$2,2,3$ و ثلاث كريات خضراء مرقمة بـ:$2,3,3$ نسحب عشوائيا وفي آن واحد ثلاث كريات من هذا الصندوق.

نعتبر الحادثتين : A الكريات الثلاث المسحوبة تحمل الوان العلم الوطني.

و B الكريات الثلاث المسحوبة تحمل نفس الرقم.

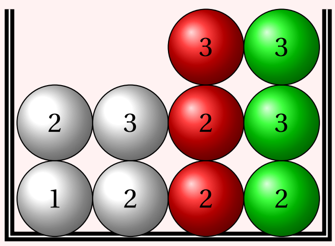
1-أ) احسب : $P(A)$ و $P(B)$ احتمالي الحادثتين A و B على الترتيب .

ب) بيّن أن: $P(A\cap B)=\frac{1}{20}$, ثم استنتج $P_A(B)$ و $P(A\cup B)$.

2)ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل نتيجة عملية سحب عدد الكرات التي تحمل رقمافرديا.

عرّف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X وأحسبه أمله الرياضياتي $\mathbb{E}(X)$.

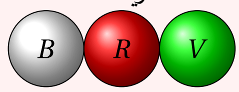
الحل



✍ عدد السحبات المكنة هو : $C_{10}^3=\dfrac{10!}{3!\times 7!}=120$.

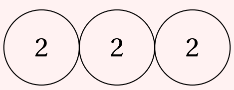
1) أ) حساب إحتمالات الحوادث :

A : " الكريات الثلاث المسحوبة تحمل ألوان العلم الوطني ". أي الحصول على ثلاثة ألوان الأبيض و الأحمر و الأخضر .

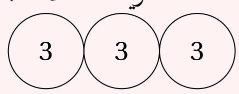


$$P(A)=\frac{C_4^1\times C_3^1\times C_3^1}{C_{10}^3}=\frac{36}{120}=\frac{3}{10}$$

B : " الكريات الثلاث المسحوبة لها نفس الرقم " أي الحصول على ثلاثة كريات تحمل الرقم 2 أو ثلاثة كريات تحمل الرقم 3 .



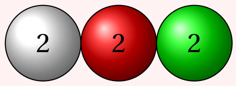
أو

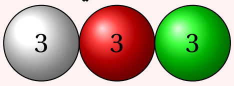


$$P(B)=\frac{C_5^3+C_4^3}{C_{10}^3}=\frac{14}{120}=\frac{7}{60}$$

ب) تبيان أن : $P(A\cap B)=\dfrac{1}{20}$.

✍ $P(A\cap B)$ هو إحتمال سحب ثلاث كريات تحمل نفس الرقم و من ألوان مختلفة .



أو


$$P(A\cap B)=\frac{C_2^1\times C_2^1\times C_1^1+C_1^1\times C_1^1\times C_2^1}{C_{10}^3}=\frac{6}{120}=\frac{1}{20}$$

✍ حساب الإحتمال الشرطي $P_A(B)$: $P_A(B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}=\dfrac{\frac{1}{20}}{\frac{3}{10}}=\dfrac{1}{6}$.

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\dfrac{36}{120}+\dfrac{14}{120}-\dfrac{6}{120}=\dfrac{44}{120}=\dfrac{11}{30}$.

2) X المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكل نتيجة عملية سحب عدد الكريات التي تحمل رقما فرديا.

✍ قيم المتغير العشوائي X هي $X=\{0;1;2;3\}$.

$X=0$ معناه عدم سحب أية كرة تحمل رقما فرديا. $X=1$ معناه سحب كرة واحدة تحمل رقما فرديا.

$X=2$ معناه سحب كرتين تحملان رقما فرديا. $X=3$ معناه سحب ثلاث كرات تحمل رقما فرديا.

✍ تعريف قانون إحتمال المتغير العشوائي X:

$P(X=0)=\dfrac{C_5^3\times C_5^0}{C_{10}^3}=\dfrac{10}{120}=\dfrac{1}{12}$ ، $P(X=1)=\dfrac{C_5^1\times C_5^2}{C_{10}^3}=\dfrac{50}{120}=\dfrac{5}{12}$ ، $P(X=2)=\dfrac{C_5^2\times C_5^1}{C_{10}^3}=\dfrac{50}{120}=\dfrac{5}{12}$ ، $P(X=3)=\dfrac{C_5^3\times C_5^0}{C_{10}^3}=$

$\dfrac{10}{120}=\dfrac{1}{12}$.

(لكي يكون قانون الإحتمال معرف يجب أن يكون مجموع الإحتمالات يساوي الواحد أي : $\sum_{i=1}^{i=4}P_i=1$).

✍ فيكون قانون الإحتمال ملخص في الجدول التالي :

$X=x_i$	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{12}$

✍ حساب الأمل الرياضياتي $\mathbb{E}(X)$: $\mathbb{E}(X)=\sum_{i=1}^{i=4}x_i\times P_i=\dfrac{(0\times1)+(1\times5)+(2\times5)+(3\times1)}{12}=\dfrac{18}{12}=\dfrac{3}{2}$.

التمرين 02 بكالوريا 2019 الموضوع الأول (04 نقاط)

✍ يحتوي كيس على خمس كريات حمراء منها أربع كريات تحمل الرقم 1 و كرية واحدة تحمل الرقم 2 و سبع كريات خضراء منها أربع كريات تحمل الرقم 1 وثلاث كريات تحمل الرقم 2 (كل الكريات متماثلة لانفرق بينها عند اللمس) .

نسحب عشوائيا كرتين من الكيس في آن واحد و نعتبر الحادثتين A و B حيث:

A"سحب كريتين من نفس اللون" , B " سحب كريتين تحملان نفس الرقم".

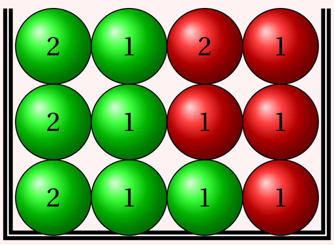
1) بيّن أنّ: إحتمال الحادثةA هو: $P(A)=\dfrac{31}{66}$ و أحسب إحتمال الحادثة B.

2) علما أنّ الكرتين المسحوبتين من نفس اللون , ما إحتمال أن تحملا نفس الرقم ؟

3) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب عدد الكريات الحمراء المتبقية في الكيس.

عرف قانون الإحتمال المتغير العشوائي X وأحسب أمله الرياضياتي $\mathbb{E}(X)$.

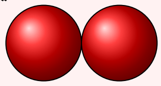
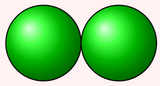
الحل



✍ عدد السحبات المكنة هو : $C_{12}^2=\dfrac{12!}{2!\times10!}=66$.

1) تبيان أن إحتمال الحادثة A هو : $P(A)=\dfrac{31}{66}$.

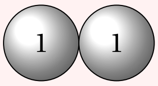
A : " سحب كريتين من نفس اللون ". أي الحصول على كرتين حمراء أو كرتين خضراء .

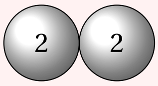

أو


$$P(A) = \frac{C_5^2 + C_7^2}{C_{12}^2} = \frac{10+21}{66} = \frac{31}{66}.$$

✍ حساب إحتمال الحادثة B .

B : " سحب كرتين تحملان نفس الرقم " أي الحصول على ثلاثة كرتين تحملان الرقم 1 أو كرتين تحملان الرقم 2 .



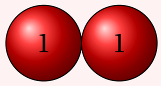
أو


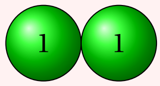
$$P(B) = \frac{C_8^2 + C_4^2}{C_{12}^2} = \frac{28+6}{66} = \frac{34}{66} = \frac{17}{33}.$$

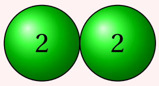
2) علما أن الكريتين المسحوبتين من نفس اللون ، ما إحتمال أن تحملا نفس الرقم.

لدينا: $P_A(B) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}$.

✍ حساب $P(A\cap B)$: هو إحتمال سحب كرتين من نفس اللون و تحملان نفس الرقم .



أو


أو


$$P(A\cap B) = \frac{C_4^2 + C_4^2 + C_3^2 +}{C_{12}^2} = \frac{6+6+3}{66} = \frac{15}{66}$$

✍ حساب الإحتمال الشرطي $P_A(B)$: $P_A(B) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(A)} = \dfrac{\frac{15}{66}}{\frac{31}{66}} = \dfrac{15}{31}$.

3) X المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكل نتيجة عملية سحب عدد الكريات الحمراء المتبقية في الكيس.

✍ قيم المتغير العشوائي X هي $X = \{3;4;5\}$.

$X = 3$ معناه يتبقى ثلاث كرات حمراء في الكيس أي سحب كرتين حمراء.

$X = 4$ معناه يتبقى أربع كرات حمراء في الكيس أي سحب كرة واحدة حمراء و كرة واحدة خضراء.

$X = 5$ معناه يتبقى فالكيس خمس كرات حمراء أي سحب كرتين خضراء.

✍ تعريف قانون إحتمال المتغير العشوائي X:

$P(X=3) = \dfrac{C_5^2 \times C_7^0}{C_{12}^2} = \dfrac{10}{66}$ ، $P(X=4) = \dfrac{C_5^1 \times C_7^1}{C_{12}^2} = \dfrac{5\times 7}{66} = \dfrac{35}{66}$ ، $P(X=5) = \dfrac{C_7^2 \times C_5^0}{C_{12}^2} = \dfrac{21}{66}$.

(لكي يكون قانون الإحتمال معرف يجب أن يكون مجموع الإحتمالات يساوي الواحد أي : $\sum_{i=1}^{i=3} P_i = 1$).

✍ فيكون قانون الإحتمال ملخص في الجدول التالي :

$X = x_i$	3	4	5
$P(X = x_i)$	$\frac{10}{66}$	$\frac{35}{66}$	$\frac{21}{66}$

✍ حساب الأمل الرياضياتي $\mathbb{E}(X)$: $\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{i=3} x_i \times P_i = \dfrac{(3\times 10)+(4\times 35)+(5\times 21)}{66} = \dfrac{275}{66}$.

التمرين 03 بكالوريا 2019 الموضوع الثاني (04 نقاط)

✍ يحتوي صندوق على 10 كريات لا نفرق بينهما عند اللمّس منها كريتان تحملان الرقم 0 و ثلاث تحمل الرقم 1 و الكريات الأخرى تحمل الرقم 2 . نسحب عشوائيا و في آن واحد ثلاث كريات من الصندوق .

ليكن X المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكل سحب ، جداء الأرقام المسجّلة على الكريات المسحوبة .

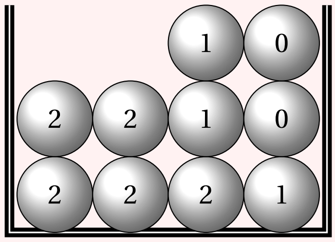
1) عرّف قانون الإحتمال للمتغيّر العشوائي X ثم أحسب أمله الر ياضياتي $\mathbb{E}(X)$.

2) بيّن أنّ إحتمال الحصول على ثلاث كريات كل منها تحمل رقما زوجيا هو : $\dfrac{7}{24}$.

3) نسحب الآن من الصندوق كريتين على التوالي دون إرجاع .

ما إحتمال الحصول على كريتين تحملان رقمين مجموعهما فردي علما أن جدائهما زوجي ؟

الحل



✍ عدد السحبات الممكنة هو : $C_{10}^{3}=\dfrac{10!}{3!\times 7!}=120$.

1) X المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكل نتيجة عملية سحب جداء الأرقام المسجلة على الكريات المسحوبة .

✍ قيم المتغير العشوائي X هي $X=\{0;1;2;4;8\}$.

$X=0$ معناه سحب كرية على الأقل تحمل الرقم 0 : $\{0\times\bar{0}\times\bar{0}=0\}$ أو $\{0\times 0\times\bar{0}\}=0$.

$X=1$ معناه سحب ثلاث كرات تحمل الرقم 1 : $\{1\times 1\times 1=1\}$.

$X=2$ معناه سحب كرتين تحملان الرقم 1 و كرة تحمل الرقم 2 : $\{1\times 1\times 2=2\}$.

$X=4$ معناه سحب كرة تحمل الرقم 1 و كرتين تحملان الرقم 2 : $\{1\times 2\times 2=4\}$.

$X=8$ معناه سحب ثلاث كرات تحمل الرقم 2 : $\{2\times 2\times 2=8\}$.

✍ تعريف قانون إحتمال المتغير العشوائي X:

$P(X=0)=\dfrac{C_2^1\times C_8^2+C_2^2\times C_8^1}{C_{10}^3}=\dfrac{64}{120}$ ، $P(X=1)=\dfrac{C_3^3\times C_7^0}{C_{10}^3}=\dfrac{1}{120}$ ، $P(X=2)=\dfrac{C_3^2\times C_5^1}{C_{10}^3}=\dfrac{15}{120}$ ،

$P(X=4)=\dfrac{C_3^1\times C_5^2}{C_{10}^3}=\dfrac{30}{120}$ ، $P(X=8)=\dfrac{C_5^3\times C_5^0}{C_{10}^3}=\dfrac{10}{120}$.

(لكي يكون قانون الإحتمال معرف يجب أن يكون مجموع الإحتمالات يساوي الواحد أي : $\sum_{i=1}^{i=5}P_i=1$).

✍ فيكون قانون الإحتمال ملخص في الجدول التالي :

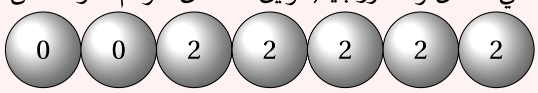
$X=x_i$	0	1	2	4	8
$P(X=x_i)$	$\dfrac{64}{120}$	$\dfrac{1}{120}$	$\dfrac{15}{120}$	$\dfrac{30}{120}$	$\dfrac{10}{120}$

✍ حساب الأمل الرياضياتي $\mathbb{E}(X)$:

$$\mathbb{E}(X)=\sum_{i=1}^{i=5}x_i\times P_i=\frac{(0\times 64)+(1\times 1)+(2\times 15)+(4\times 30)+(8\times 10)}{120}=\frac{0+1+30+120+80}{120}=\frac{231}{120}=\frac{77}{44}.$$

2) تبيان أن إحتمال الحصول على ثلاث كريات كل منها تحمل رقما زوجيا هو : $\dfrac{7}{24}$.

A : " سحب ثلاث كريات كل منها تحمل رقما زوجيا ". أي الحصول على ثلاث كريات كل منها يحمل رقما زوجيا و ذلك بسحب ثلاث كريات من الكريات السبع التي تحمل رقما زوجيا(كرتين تحملان الرقم 0 و خمس كرات تحمل الرقم 2) .



$$P(A)=\frac{C_7^3}{C_{10}^3}=\frac{35}{120}=\frac{7}{24}$$

3) نسحب الآن من الصندوق كريتين على التوالي دون إرجاع .

✍ عدد السحبات الممكنة هو : $A_{10}^2=\dfrac{10!}{8!}=90$.

B : "سحب كريتين تحملان رقمين مجموعهما فردي".

أي سحب كرية تحمل رقما فرديا و أخرى تحمل رقما زوجيا مع مراعاة الترتيب.

$$P(B)=\frac{2(A_3^1\times A_7^1)}{A_{10}^2}=\frac{2\times(3\times 7)}{90}=\frac{42}{90}=\frac{7}{15}.$$

C : "سحب كريتين تحملان رقمين جداؤهما زوجي".

أي سحب كرية واحدة على الأقل تحمل رقما زوجيا أو سحب كرتين تحملان رقما زوجيا.

$$P(C)=\frac{2(A_3^1\times A_7^1)+A_7^2}{A_{10}^2}=\frac{42+42}{90}=\frac{84}{90}=\frac{14}{15}.$$

✍ حساب $P(B\cap C)$: نلاحظ أن $B\subset C$ ومنه : $P(B\cap C)=P(B)=\dfrac{42}{90}=\dfrac{7}{15}$.

✍ حساب $P_C(B)$: $P_C(B)=\dfrac{P(B\cap C)}{P(C)}=\dfrac{\frac{7}{15}}{\frac{14}{15}}=\dfrac{7}{14}=\dfrac{1}{2}$.

2 شعبة التقني الرياضي

التمرين 04 بكالوريا 2018 الموضوع الثاني (04 نقاط)

✍ كيس به 7 كريات متماثلة ، لا نفرق بينها باللمس ، منها 3 بيضاء و 4 خضراء. نسحب عشوائيا وفي آن واحد كرتين من الكيس.

1) أ) احسب احتمال الحادثة A : "سحب كرتين مختلفتين في اللون ".

ب) احسب احتمال الحادثة B : " سحب كرتين من نفس اللون ".

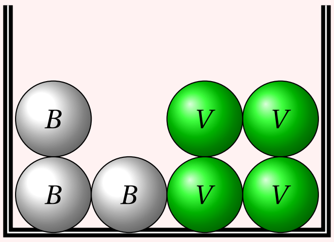
2) نقترح اللعبة التالية: للمشاركة يدفع اللاعب $\alpha(DA)$ (α عدد طبيعي معطى DA, تعني دينار جزائري).

فإذا سحب كرتين بيضاوين يتحصل على $100DA$ و إذا سحب كرتين مختلفتين في اللون يحصل على $50DA$, وإذا سحب كرتين خضراوين يخسر ما دفعه . وليكن X المتغير العشوائي الذي يمثل ربح أو خسارة اللاعب بدلالة α .

1) برّر أن قيم المتغير العشوائي هي : $\{100-\alpha;50-\alpha;-\alpha\}$ ثم عرّف قانون احتماله.

2) بيّن أن الأمل الرياضياتي للمتغير العشوائي بدلالة α هو: $\mathbb{E}(x)=-\alpha+\dfrac{300}{7}$ ثم أوجد أكبر قيمة ممكنة لـ α : حتى تكون اللعبة في صالح اللاعب.

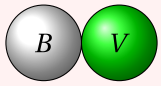
الحل



✍ عدد السحبات الممكنة هو : $C_7^2=\dfrac{7!}{2!\times 5!}=21$.

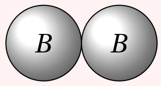
1) حساب إحتمالات الحوادث :

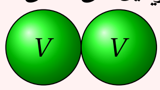
أ) A : " سحب كريتين مختلفتين في اللون ". أي الحصول على كرة واحدة بيضاء و كرة واحدة خضراء .



$$P(A)=\frac{C_3^1\times C_4^1}{C_7^2}=\frac{3\times 4}{21}=\frac{12}{21}=\frac{4}{7}.$$

ب) B : " سحب كريتين من نفس اللون ". أي الحصول على كرتين بيضاوين أو كرتين خضراوين .



أو


$$P(B)=\frac{C_3^2+C_4^2}{C_7^2}=\frac{3+6}{21}=\frac{9}{21}=\frac{3}{7}$$

2) X المتغيّر العشوائي الذي يمثل ربح أو خسارة اللاعب بدلالة α .

1) تبرير أن قيم المتغير العشوائي X هي $X=\{100-\alpha;50-\alpha;-\alpha\}$.

اللاعب يدفع α DA و يسحب كرتين في آن واحد .

الحصول على كرتين خضراوين ، الحصول على كرتين بيضاوين ، الحصول على كرة بيضاء وكرة خضراء .

الحصول على كرتين بيضاوين يربح 100DA ومنه $X=100-\alpha$.

الحصول على كرتين مختلفتين يربح 50DA ومنه $X=50-\alpha$.

الحصول على كرتين خضراوين يخسر ما دفعه ومنه $X=-\alpha$.

✍ تعريف قانون إحتمال المتغير العشوائي X:

$P(X=100-\alpha)=\dfrac{C_3^2\times C_4^0}{C_7^2}=\dfrac{3}{21}$ ، $P(X=50-\alpha)=P(A)=\dfrac{12}{21}=$ ، $P(X=-\alpha)=\dfrac{C_4^2\times C_3^0}{C_7^2}=\dfrac{6}{21}$.

(لكي يكون قانون الإحتمال معرف يجب أن يكون مجموع الإحتمالات يساوي الواحد أي : $\sum_{i=1}^{i=3}P_i=1$).

✍ فيكون قانون الإحتمال ملخص في الجدول التالي :

$X = x_i$	$100-\alpha$	$50-\alpha$	$-\alpha$
$P(X = x_i)$	$\frac{3}{21}$	$\frac{12}{21}$	$\frac{6}{21}$

2) إثبات أن الأمل الرياضياتي للمتغير العشوائي X هو : $\mathbb{E}(X) = -\alpha + \frac{300}{7}$.

✍ حساب الأمل الرياضياتي $\mathbb{E}(X)$:

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{i=3} x_i \times P_i = \frac{((100-\alpha)\times 3) + ((50-\alpha)\times 12) + ((-\alpha)\times 6)}{21} = \frac{300 - 3\alpha + 600 - 12\alpha - 6\alpha}{21} = \frac{-21\alpha + 900}{21}.$$

و منه : $\mathbb{E}(X) = -\alpha + \frac{300}{7}$.

✍ إيجاد أكبر قيمة للعدد α حتى تكون اللعبة في صالح اللاعب :

حتى تكون اللعبة في صالح اللاعب يجب أن يكون $\mathbb{E}(X) > 0$.

أي : $-\alpha + \frac{300}{7} > 0$ و منه : $\alpha < \frac{300}{7}$ و منه : $\alpha < 42.85$.

إذن أكبر قيمة لـ α حتى تكون اللعبة في صالح اللاعب هي 42DA .

التمرين 05 بكالوريا 2019 الموضوع الأول (04 نقاط)

✍ توجد إجابة صحيحة واحدة من بين الأجوبة المقترحة في كل حالة من الحالات التالية . إختر الإجابة الصحيحة مبررا إختيارك .

يحتوي كيس على ثلاث كريات بيضاء تحمل الأرقام $3,2,1$ و كريتين سوداوين تحملان الرقمين $2,1$ (الكريات لا نفرّق بينها عند اللمس).

نسحب من الكيس 3 كريات عشوائيا و في آن واحد.

X المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكل سحب عدد الكريات السوداء المسحوبة .

1) قيم المتغيّر العشوائي X هي : أ) $3,2,1$ ب) $3,2,0$ ج) $2,1,0$.

2) $\mathbb{E}(X)$ الأمل الرياضياتي لـ X هو :

أ) $\mathbb{E}(X) = \frac{4}{5}$ ب) $\mathbb{E}(X) = \frac{6}{5}$ ج) $\mathbb{E}(X) = \frac{11}{10}$.

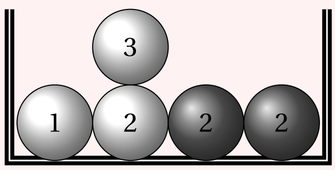
3) إحتمال " الحصول على كريّة واحدة سوداء تحمل الرقم 1 من الكريات المسحوبة " يساوي :

أ) $\frac{7}{10}$ ب) $\frac{9}{10}$ ج) $\frac{3}{5}$

4) . إحتمال " باقي قسمة مجموع مربعات الأرقام التي تحملها الكريات المسحوبة على 13 هو 1 " يساوي :

أ) $\frac{2}{5}$ ب) $\frac{3}{10}$ ج) $\frac{1}{5}$.

الحل



✍ عدد السحبات الممكنة هو : $C_5^3 = \frac{5!}{3! \times 2!} = 10$.

1) X المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكل نتيجة عملية سحب عدد الكريات السوداء المسحوبة.

✍ قيم المتغير العشوائي X هي $X = \{0;1;2\}$. $\boxed{\text{الإجابة ج}}$

التبرير :

$X = 0$ معناه عدم سحب أية كرة سوداء.

$X = 1$ معناه سحب كرة واحدة سوداء.

$X = 2$ معناه سحب كرتين سوداوين.

2) الأمل الرياضياتي $\mathbb{E}(X)$ لـ X هو : $\mathbb{E}(X) = \frac{6}{5}$. $\boxed{\text{الإجابة ب}}$

التبرير :

✍ تعريف قانون إحتمال المتغير العشوائي X:

$P(X=0)=\frac{C_3^3}{C_5^3}=\frac{1}{10}$ ، $P(X=1)=\frac{C_2^1\times C_3^2}{C_5^3}=\frac{2\times 3}{10}=\frac{6}{10}$ ، $P(X=2)=\frac{C_3^1\times C_2^2}{C_5^3}=\frac{3\times 1}{10}=\frac{3}{10}$.

(لكي يكون قانون الإحتمال معرف يجب أن يكون مجموع الإحتمالات يساوي الواحد أي : $\sum_{i=1}^{i=3} P_i=1$).

✍ فيكون قانون الإحتمال ملخص في الجدول التالي :

$X=x_i$	0	1	2
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{3}{10}$

✍ حساب الأمل الرياضياتي $\mathbb{E}(X)$: $\mathbb{E}(X)=\sum_{i=1}^{i=3} x_i\times P_i=\frac{(0\times 1)+(1\times 6)+(2\times 3)}{10}=\frac{12}{10}=\frac{6}{5}$.

3) إحتمال " الحصول على كريّة واحدة سوداء تحمل الرقم 1 من الكريات المسحوبة " يساوي : $\frac{3}{5}$. $\boxed{\text{الإجابة ج}}$

التبرير :

نسمي الحادثة A : " الحصول على كريّة واحدة سوداء تحمل الرقم 1 من الكريات المسحوبة ".

$P(A)=\frac{C_1^1\times C_4^2}{C_5^3}=\frac{1\times 6}{10}=\frac{3}{5}$.

4) إحتمال " باقي قسمة مجموع مربعات الأرقام التي تحملها الكريات المسحوبة على 13 هو 1 " يساوي : $\frac{2}{5}$ $\boxed{\text{الإجابة أ}}$

التبرير :

نسمي الحادثة B : " يكون باقي قسمة مجموع مربعات الأرقام التي تحملها الكريات المسحوبة على 13 هو 1 " , أي نسحب ثلاث كريات تحمل الأرقام 1،2،3.

$P(B)=\frac{C_1^1\times C_2^1\times C_2^1}{C_5^3}=\frac{1\times 2\times 2}{10}=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$.

التمرين 06 بكالوريا 2019 الموضوع الثاني (04 نقاط)

✍ يحتوي كيس على أربع كريات بيضاء تحمل الأرقام 4,3,2,1 وثلاث كريات حمراء تحمل الأرقام 3,2,1 وكريتين سوداوين تحملان الرقمين 2,1 (كل الكريات متشابهة لانفرق بينها باللمس).

نسحب عشوائيا وفي آن واحد ثلاث كريات من هذا الكيس .

1) أحسب إحتمال الحوادث التالية :

أ) الحادثة A :"الحصول على كرية بيضاء واحدة " .

ب) الحادثة B :"الحصول على كريتين بيضاوين على الأكثر " .

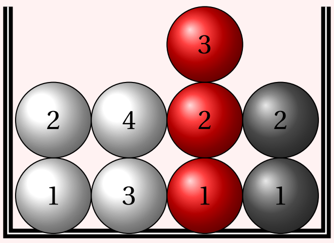
ج) الحادثة C :"الحصول على ثلاث كريات تحمل أرقاما غير أولية " .

2) نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل عملية سحب عدد الكريات التي تحمل أرقاما أولية .

أ) عيّن قيم المتغير العشوائي X, ثم عرّف قانون إحتماله.

ب) أحسب $P(X^2-X\leqslant 0$

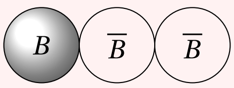
الحل



✍ عدد السحبات الممكنة هو : $84=\frac{9!}{3!\times 6!}=C_9^3$.

1) أ) حساب إحتمالات الحوادث :

A : " الحصول على كرية بيضاء واحدة ". أي الحصول على كرة واحدة بيضاء و كرتين من الكرات الحمراء و السوداء .



$$P(A) = \frac{C_4^1 \times C_5^2}{C_9^3} = \frac{4 \times 10}{84} = \frac{40}{84} = \frac{10}{21}$$

B : " الحصول على كريتين بيضاوين على الأكثر " أي الحصول على كرتين بيضاء أو كرة واحدة بيضاء أو عدم سحب أية كرة بيضاء. $B\ B\ \overline{B}$

أو $B\ \overline{B}\ \overline{B}$ أو $\overline{B}\ \overline{B}\ \overline{B}$

$$P(B) = \frac{C_5^3 + C_4^1 \times C_5^2 + C_4^2 \times C_5^1}{C_9^3} = \frac{10+40+30}{84} = \frac{80}{84} = \frac{20}{21}$$

C : " الحصول على ثلاث كريات تحمل أرقاما غير أولية " .

$P(C) = \frac{C_4^3}{C_9^3} = \frac{4}{84} = \frac{1}{21}$.

2) أ) X المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكل نتيجة عملية سحب عدد الكريات التي تحمل أرقاما أولية.

✍ قيم المتغير العشوائي X هي $X = \{0;1;2;3\}$.

$X=0$ معناه عدم سحب أية كرة تحمل رقما أوليا. $X=1$ معناه سحب كرة واحدة تحمل رقما أوليا.

$X=2$ معناه سحب كرتين تحملان رقما أوليا. $X=3$ معناه سحب ثلاث كرات تحمل رقما أوليا.

✍ تعريف قانون إحتمال المتغير العشوائي X:

$P(X=0) = \frac{C_4^3 \times C_5^0}{C_9^3} = \frac{4}{84}$ ، $P(X=1) = \frac{C_5^1 \times C_4^2}{C_9^3} = \frac{30}{84}$ ، $P(X=2) = \frac{C_5^2 \times C_4^1}{C_9^3} = \frac{40}{84}$ ، $P(X=3) = \frac{C_5^3 \times C_5^0}{C_9^3} = \frac{10}{84}$.

(لكي يكون قانون الإحتمال معرف يجب أن يكون مجموع الإحتمالات يساوي الواحد أي : $\sum_{i=1}^{i=4} P_i = 1$).

✍ فيكون قانون الإحتمال ملخص في الجدول التالي :

$X = x_i$	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{4}{84}$	$\frac{30}{84}$	$\frac{40}{84}$	$\frac{10}{84}$

ب) حساب $P(X^2 - X \leqslant 0)$:

$X^2 - X \leqslant 0$ معناه $X(X-1) \leqslant 0$ أي $X \in \{0;1\}$.

$P(X^2 - X \leqslant 0) = P(X=0) + P(X=1) = \frac{4}{84} + \frac{30}{84} = \frac{34}{84}$.

3 شعبة الرياضيات

التمرين 07 بكالوريا 2009 الموضوع الأول (05 نقاط)

✍ كيس به 10 كريات متماثلة لا نميز بينها عند اللمس منها 4 بيضاء و6حمراء .

نسحب عشوائيا من الكيس 3كريات في آن واحد.

1) أ) احسب احتمال الحصول على 3كريات بيضاء.

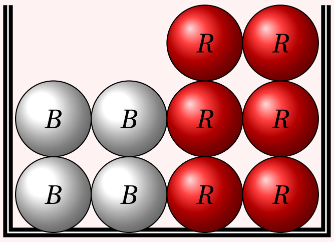
ب) احسب احتمال الحصول على الأقل على كرية حمراء.

2)ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب عدد الكريات البيضاء المسحوبة.

عرّف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X و أحسب أمله الرياضي $\mathbb{E}(X)$.

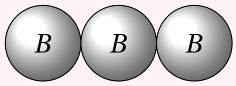
3) نسحب من الكيس في آن واحد 3 كريات خمس مرات على التوالي مع الإرجاع.

- أحسب إحتمال الحصول على 3كريات بيضاء مرتين بالضبط.



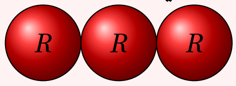
✍ عدد السحبات الممكنة هو : $C_{10}^{3} = \dfrac{10!}{3! \times 7!} = 120$.

1) أ) حساب احتمال الحصول على 3 كريات بيضاء. يعني الحصول عى ثلاث كريات بيضاء

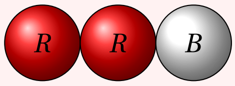


$$P(A) = \frac{C_4^3}{C_{10}^3} = \frac{4}{120} = \frac{1}{30}$$

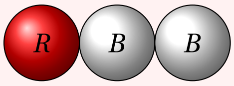
ب) احسب احتمال الحصول على الأقل على كرية حمراء. يعني الحصول عى ثلاث كريات حمراء أو كريتين حمراوين و كرية بيضاء أو كرية حمراء و كريتين بيضاوين.



أو



أو



$$P(B) = \frac{C_6^3 + C_6^2 \times C_4^1 + C_6^1 \times C_4^2}{C_{10}^3} = \frac{20+60+36}{120} = \frac{116}{120} = \frac{29}{30}$$

2) X المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكل نتيجة عملية سحب عدد الكريات المسحوبة .

✍ قيم المتغير العشوائي X هي $X = \{0;1;2;3\}$.

$X = 0$ معناه عدم سحب أية كرية بيضاء .

$X = 1$ معناه سحب كرة واحدة بيضاء و كرتين حمراء .

$X = 2$ معناه سحب كرتين بيضاء و كرة واحدة بيضاء .

$X = 4$ معناه سحب ثلاث كريات بيضاء .

✍ تعريف قانون إحتمال المتغير العشوائي X:

$P(X=0) = \dfrac{C_6^3 \times C_4^0}{C_{10}^3} = \dfrac{20}{120} = \dfrac{1}{6}$ ، $P(X=1) = \dfrac{C_6^2 \times C_4^1}{C_{10}^3} = \dfrac{60}{120} = \dfrac{1}{2}$ ، $P(X=2) = \dfrac{C_6^1 \times C_4^2}{C_{10}^3} = \dfrac{36}{120} = \dfrac{3}{10}$ ،

$P(X=3) = \dfrac{C_4^3 \times C_6^0}{C_{10}^3} = \dfrac{4}{120} = \dfrac{1}{30}$.

(لكي يكون قانون الإحتمال معرف يجب أن يكون مجموع الإحتمالات يساوي الواحد أي : $\sum_{i=1}^{i=4} P_i = 1$).

✍ فيكون قانون الإحتمال ملخص في الجدول التالي :

$X = x_i$	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{20}{120}$	$\frac{60}{120}$	$\frac{36}{120}$	$\frac{4}{120}$

✍ حساب الأمل الرياضياتي $\mathbb{E}(X)$:

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{i=4} x_i \times P_i = \frac{(0\times 20)+(1\times 60)+(2\times 36)+(3\times 4)}{120} = \frac{0+60+72+12}{120} = \frac{144}{120} = \frac{6}{5}.$$

3) نسحب من الكيس في آن واحد 3 كريات خمس مرات على التوالي مع الإرجاع.

- حساب إحتمال الحصول على 3كريات بيضاء مرتين بالضبط.

نسمي الحدث "$Y = 2$" الحصول على 3 كريات بيضاء مرتين بالضبط .

$$P(Y=2) = C_5^2 \left(\frac{1}{30}\right)^2 \left(\frac{29}{30}\right)^3 \approx 0.01.$$

✍ كيس يحوي 9 كريات لا نفرق بينها عند اللمس موزعة كما يلي: خمس كريات حمراء مرقمة بـ: $1,1,2,2,2$ وثلاث كريات خضراء مرقمة بـ:$-3,2,3$ وكرية بيضاء مرقمة بـ: -1.

نسحب عشوائيا 4 كريات في آن واحد.

1) أحسب احتمال الحوادث التالية:

A "الحصول على أربع كريات من نفس اللون ".

B " الحصول على كرية بيضاء على الأكثر ".

C " الحصول على أربع كريات مجموع أرقامها معدوم ".

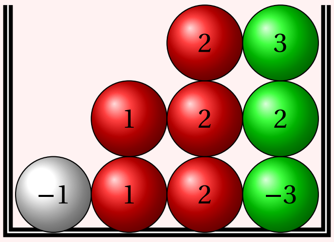
2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل نتيجة سحب عدد الكريات الخضراء المتبقية في الكيس.

أ)عين قيم المتغير العشوائي X, ثم عرّف قانون احتماله.

ب) أحسب الأمل الرياضياتي $\mathbb{E}(X)$ للمتغير العشوائي X.

ج) أحسب أحتمال الحادثة "$X^2 - X > 0$".

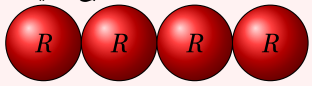
الحل



✍ عدد السحبات الممكنة هو : $126 = \dfrac{9!}{4! \times 5!} = C_9^4$.

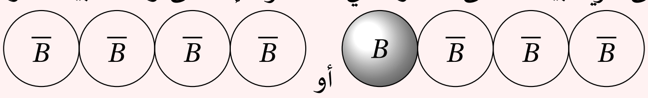
1) أ) حساب إحتمالات الحوادث :

A : " الحصول على أربع كريات من نفس اللون ". أي الحصول على أربع كريات حمراء .



$P(A) = \dfrac{C_5^4}{C_9^4} = \dfrac{5}{126}$.

B : " الحصول على كرية بيضاء على الأكثر " أي الحصول إما على واحدة بيضاء وثلاثة من اللونين الآخرين أو عدم سحب أية كرية بيضاء و سحب أربع كريات من الباقي .



$P(B) = \dfrac{C_1^1 \times C_8^3 + C_8^4}{C_9^4} = \dfrac{126}{126} = 1$.

C : " الحصول على أربع كريات مجموع أرقامها معدوم ".

معناه : $\{-3;-1;2;2\}$ أو $\{-3;-1;1;3\}$.

و لدينا 4 كريات مرقمة بـ 2 و كرية مرقمة بـ -1 و كرية مرقمة بـ -3 و كرية مرقمة بـ 3 و كريتان مرقمتان بـ 1 .

و منه : $P(C) = \dfrac{C_1^1 \times C_1^1 \times C_4^2 + C_1^1 \times C_1^1 \times C_1^1 \times C_1^1}{C_9^4} = \dfrac{6+2}{126} = \dfrac{8}{126}$.

2)أ) X المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكل نتيجة عملية سحب عدد الكريات الخضراء المتبقية في الكيس.

✍ قيم المتغير العشوائي X هي $X = \{0;1;2;3\}$.

$X = 0$ معناه لا تتبقى أيك كرة خضراء في الكيس أي سحب ثلاث كرات خضراء.

$X = 1$ معناه يتبقى كرة واحدة خضراء في الكيس أي سحب كرتين خضراء.

$X = 2$ معناه يتبقى فالكيس كرتين خضراء أي سحب كرة واحدة خضراء.

$X = 3$ معناه يتبقى فالكيس ثلاث كرات خضراء أي عدم سحب أية كرة خضراء.

✍ تعريف قانون إحتمال المتغير العشوائي X:

$P(X = 0) = \dfrac{C_3^3 \times C_6^1}{C_9^4} = \dfrac{6}{126}$ $\qquad$ $P(X = 1) = \dfrac{C_3^2 \times C_6^2}{C_9^4} = \dfrac{3 \times 15}{126} = \dfrac{45}{126}$

$P(X = 2) = \dfrac{C_3^1 \times C_6^3}{C_9^4} = \dfrac{3 \times 20}{126} = \dfrac{60}{126}$ $\qquad$ $P(X = 3) = \dfrac{C_3^0 \times C_6^4}{C_9^4} = \dfrac{1 \times 15}{126} = \dfrac{15}{126}$

(لكي يكون قانون الإحتمال معرف يجب أن يكون مجموع الإحتمالات يساوي الواحد أي : $\sum_{i=1}^{i=4} P_i = 1$).

✍ فيكون قانون الإحتمال ملخص في الجدول التالي :

$X = x_i$	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{6}{126}$	$\frac{45}{126}$	$\frac{60}{126}$	$\frac{15}{126}$

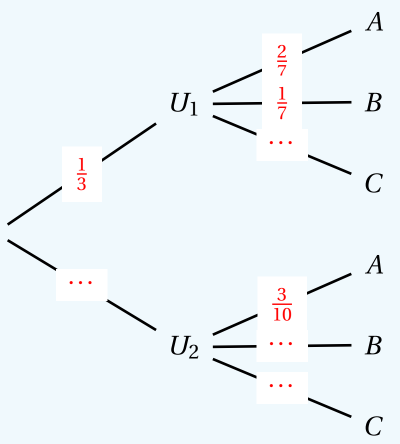
ب) حساب الأمل الرياضياتي $\mathbb{E}(X)$: $\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{i=4} x_i \times P_i = \frac{(0\times 6)+(1\times 45)+(2\times 60)+(3\times 15)}{126} = \frac{210}{126} = \frac{5}{3}$.

ج) حساب أحتمال الحادثة "$X^2 - X > 0$" : $X^2 - X > 0$ معناه $X(X-1) > 0$ أي $X \in \{2;3\}$.

و منه : $P(X^2 - X > 0) = P(X=2) + P(X=3) = \frac{60}{126} + \frac{15}{126} = \frac{75}{126} = \frac{25}{42}$.

التمرين 09 بكالوريا 2019 الموضوع الثاني (04 نقاط)

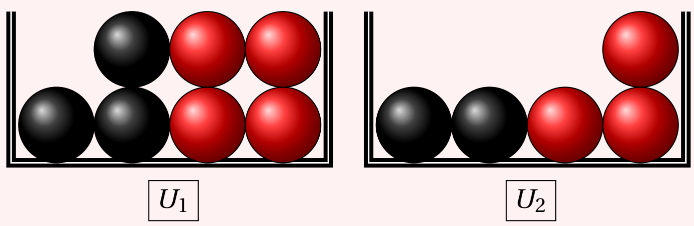
✍ صندوقان غير شفافين U_1 و U_2 , يحتوي الصندوق U_1 على 4 كريات حمراء و 3 كريات سوداء ويحتوي الصندوق U_2 على 3 كريات حمراء وكريتين سوداوين (الكريات كلها متشابهة لا نفرق بينها باللمس).



نرمي نردا غير مزيف ذا ستة أوجه مرقمة من 1 إلى 6 .
إذا ظهر الرقمان 2 أو 4 نسحب عشوائيا كريتين في آن واحد من الصندوق U_1 وفي باقي الحالات نسحب عشوائيا كريتين في آن واحد من الصندوق U_2 .
نعتبر الأحداث A , B و C المعرفة بـ :
A " سحب كريتين حمراوين "
B " سحب كريتين سوداوين "
C " سحب كريتين من لونين مختلفين "
1) أنقل وأكمل شجرة الاحتمالات.
2) أحسب احتمالات الأحداث A , B و C .

نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل سحب عدد الكريات الحمراء المسحوبة.
3) أ- عين قيم المتغير العشوائي X .
ب - عين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X .
4) أحسب الأمل الرياضياتي $\mathbb{E}(X)$.

الحل



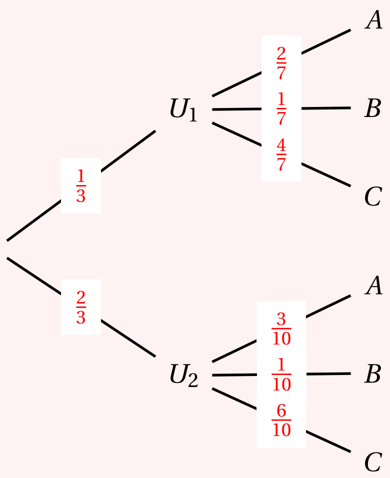
✍ عدد الحالات الممكنة للسحب :

U_1 : $C_7^2 = \dfrac{7!}{2! \times 5!} = 21$

U_2 : $C_5^2 = \dfrac{5!}{2! \times 3!} = 10$

1) شجرة الاحتمالات :

2)



حساب إحتمالات الأحداث A ، B و C :

$P(A) = P(U_1 \cap A + U_2 \cap A) = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{C_4^2}{C_7^2} + \dfrac{2}{3} \times \dfrac{C_3^2}{C_5^2} = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{6}{21} + \dfrac{2}{3} \times \dfrac{3}{10} = \dfrac{31}{105}$.

$P(B) = P(U_1 \cap B + U_2 \cap B) = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{C_3^2}{C_7^2} + \dfrac{2}{3} \times \dfrac{C_2^2}{C_5^2} = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{3}{21} + \dfrac{2}{3} \times \dfrac{1}{10} = \dfrac{12}{105}$.

$P(C) = P(U_1 \cap C + U_2 \cap C) = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{C_3^1 \times C_4^1}{C_7^2} + \dfrac{2}{3} \times \dfrac{C_2^1 \times C_3^1}{C_5^2} = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{12}{21} + \dfrac{2}{3} \times \dfrac{6}{10} = \dfrac{62}{105}$.

3) X المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكل نتيجة عملية سحب عدد الكريات الحمراء المسحوبة .

أ) قيم المتغير العشوائي X هي $X = \{0;1;2\}$.

$X = 0$ معناه عدم سحب أية كرية حمراء أي سحب كرتين سوداوين .

$X = 1$ معناه سحب كرة واحدة حمراء و كرة واحدة سوداء .

$X = 2$ معناه سحب كرتين حمراوين .

ب) تعريف قانون إحتمال المتغير العشوائي X:

$P(X=0) = P(B) = \dfrac{12}{105}$ ، $P(X=1) = P(C) = \dfrac{62}{105}$ ، $P(X=2) = P(A) = \dfrac{31}{105}$.

(لكي يكون قانون الإحتمال معرف يجب أن يكون مجموع الإحتمالات يساوي الواحد أي : $\sum_{i=1}^{i=3} P_i = 1$).

✍ فيكون قانون الإحتمال ملخص في الجدول التالي :

$X = x_i$	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\dfrac{12}{105}$	$\dfrac{62}{105}$	$\dfrac{31}{105}$

4) حساب الأمل الرياضياتي $\mathbb{E}(X)$: $\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{i=3} x_i \times P_i = \dfrac{(0 \times 12) + (1 \times 62) + (2 \times 31)}{105} = \dfrac{0 + 62 + 62}{105} = \dfrac{124}{105}$.

تمارين مقترحة

8 حلول تمارين مقترحة للتحضير الجيد لبكالوريا 2020

التمرين 01

✍ يحتوي كيس على 4 كرات سوداء ، و 6 كرات بيضاء (الكرات لا نفرق بينها عند اللمس).
نسحب عشوائيا من الكيس كرتين في ان واحد .
1) ما هو عدد الحالات المكنة لهذه التجربة .
2) أحسب إحتمال كل من الحادثتين : A"الحصول على كرتين سوداوتين" B : "الحصول على كرتين من لونين مختلفين".
✍ ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب عدد الكرات السوداء المتبقية في الكيس .
1) ماهي مجموعة القيم المكنة لـ X .
2) عرف قانون احتمال المتغير X .
3) احسب الأمل الرياضي $\mathbb{E}(X)$ ، والتباين $\mathbb{V}(X)$ ، ثم الانحراف المعياري $\sigma(X)$.
4) أحسب إحتمال الحادثة $P(X^2-9\leq 0)$.

الحل

❶ **عدد الحالات المكنة :** هو $\boxed{C_{10}^{10}=\frac{10!}{2!8!}=45}$

❷ **حساب احتمال الحادثتين A و B :**

لدينا: A : الحصول على كرتين سوداويين ومنه $\boxed{P(A)=\frac{C_4^2}{C_{10}^2}=\frac{6}{45}+\frac{2}{15}}$

لدينا: B : الحصول على كرتين من لونين مختلفين ومنه $\boxed{P(B)=\frac{C_4^1\times C_6^1}{C_{10}^2}=\frac{24}{45}=\frac{8}{15}}$

❸ **قيم المتغير العشوائي X :** هي $\boxed{X=\{2,3,4\}}$

❹ **قانون احتمال المتغير العشوائي X :**

$$P(X=2)=\frac{C_4^2}{45}=\frac{6}{45}\ ،\ P(X=3)=\frac{C_4^1\times C_6^1}{45}=\frac{24}{45}\ ،\ P(X=4)=\frac{C_6^2}{45}=\frac{15}{45}$$

✍ **حساب الأمل الرياضياتي :** $E(X)=\sum_{i=1}^{3}(X=x_i)P(X=x_i)=\frac{12+72+60}{45}=\frac{144}{45}=3,2$

✍ **حساب التباين :** $V(X)=\sum_{i=1}^{3}\left(X_i-E(X)\right)^2P(X=x_i)=0,52$

✍ **حساب الانحراف المعياري :** $\sigma(X)=\sqrt{V(x)}=\sqrt{0,52}=0,72$

✍ **حساب احتمال الحادثة $P(X^2-9\leq 0)$:** $P(X^2-9\leq 0)=P(X=2)+P(X=3)=\frac{6+24}{45}=\frac{30}{45}=\frac{2}{3}$

التمرين 02

✍ يحتوي صندوق على تسع كريات ,منها أربع حمراء مرقمة من 1 إلى 4 و خمس بيضاء مرقمة من 5 إلى 9.
جميع الكرات لا نميز بينهما باللمس.

1) نسحب عشوائيا و على التوالي ثلاث كريات دون إرجاع ,و نشكل هكذا عددا ذا ثلاثة أرقام .الكرية الأولى نسجل بها رقم المئات و الكرية الثانية نسجل بها رقم العشرات و الكرية الثالثة نسجل بها رقم الآحاد.

أ) أحسب إحتمال الحدثين التاليين : A:"العدد المحصل عليه أصغر تماما من 300"

B:"العدد المحصل عليه زوجي".

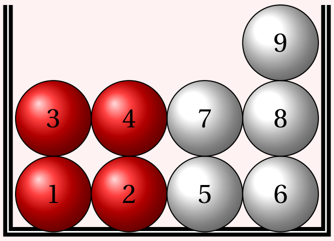
ب) أحسب إحتمال أن يكون العدد المحصل عليه أصغر تماما من 300 علما أنه زوجي ,هل الحدثين A و B مستقلان ؟

2) نسحب عشوائيا و في آن واحد ثلاث كريات ,ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل إمكانية سحب عدد الكريات البيضاء المحصل عليها.

أ) عين قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X.

ب) أحسب $\mathbb{E}(X)$ الأمل الرياضياتي للمتغير العشوائي X.

الحل



1) أ) حساب إحتمال تحقق الحدثين A و B:

A:"العدد المحصل عليه أصغر تماما من 300" :

$$P(A)=\frac{A_2^1\times A_8^2}{A_9^3}=\frac{112}{504}=\frac{2}{9}.$$

B:"العدد المحصل عليه زوجي" :

$$P(B)=\frac{A_4^1\times A_8^2}{A_9^3}=\frac{224}{504}=\frac{4}{9}.$$

ب) حساب إحتمال أن يكون العدد المحصل عليه أصغر تماما من 300 علما أنه زوجي:

$$P_B(A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{A_4^1\times A_2^1\times A_7^1}{504}}{\frac{4}{9}}=\frac{1}{4}.$$

بما أن $P(A)\neq P_B(A)$ إذن الحدثين A و B غير مستقلان.

2) قيم المتغير العشوائي X : $X\{0;1;2;3\}=$.

أ) تعيين قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X:

$$P(X=0)=\frac{C_4^3}{C_9^3}=\frac{4}{84}=\frac{1}{4}\qquad P(X=1)=\frac{C_5^1\times C_4^2}{C_9^3}=\frac{30}{84}=\frac{5}{14};$$

$$P(X=2)=\frac{C_5^2\times C_4^1}{C_9^3}=\frac{40}{84}=\frac{10}{21}\qquad P(X=3)=\frac{C_5^3}{C_9^3}=\frac{10}{84}=\frac{5}{42}.$$

فيكون قانون الإحتمال ملخص في الجدول التالي :

x_i	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	$\frac{4}{84}$	$\frac{30}{84}$	$\frac{40}{84}$	$\frac{10}{84}$

ب) حساب الأمل الرياضياتي $\mathbb{E}(X)$: $\mathbb{E}(X)=\frac{(0\times 4)+(1\times 30)+(2\times 40)+(3\times 10)}{84}=\frac{140}{84}=\frac{5}{3}$.

التمرين 03

✍ يحتوي كيس U_1 على ثمانية كريات ثلاثة منها تحمل الرقم 2 و البقية تحمل الرقم 3 و يحتوي كيس U_2 على عشرة كريات من بينها خمسة حمراء مرقمة بـ: 1 ، 1 ، 3 ، 3 ، 3 و أربعة بيضاء مرقمة بـ: 1 ، 1 ، 2 ، 2 وكرة خضراء واحدة مرقمة بـ: 1 و يحتوي الكيس U_3 على تسعة كريات منها أربعة حمراء مرقمة بـ: 1 ، 2 ، 2 ، 3 و ثلاثة بيضاء مرقمة بـ:
1 ، 2 ، 3 وكريتين خضراويتين مرقمتين بـ: 3 ، 3 .جميع الكريات متماثلة ولا نفرق بينها باللمس .

1) نسحب كرية واحدة من الكيس U_1 إذا كان رقمها 2 فإننا نسحب ثلاث كريات بالتتابع دون إرجاع من الكيس U_2 , أما إذا كان رقمها 3 فنسحب ثلاث كريات بالتتابع بالإرجاع من الكيس U_3

أ) أحسب إحتمال كل حدث من الأحداث التالية : A : الحصول على ثلاث كريات من نفس اللون

B : الحصول على ثلاث كريات تحمل ألوان العلم الوطني ، C : الحصول على ثلاث كريات من لونين فقط .

ب) إذا علمت أن الكريات الثلاث المسحوبة من نفس اللون فما إحتمال أن تكون مسحوبة من الكيس U_3

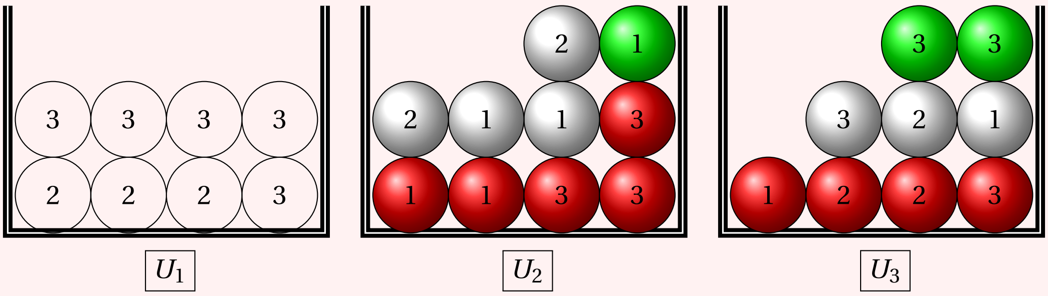
2) نفرغ جميع كريات الكيس U_3 في الكيس U_2 ثم نسحب من الكيس U_2 ثلاث كريات في أن واحد .

ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب مجموع الأرقام المحصل عليها

أ) عين قيم المتغير العشوائي X ثم أكتب قانونه الإحتمالي .

ب) أحسب الأمل الرياضياتي $\mathbb{E}(X)$ و التباين $\mathbb{V}(X)$ ثم إستنتج الإنحراف المعياري $\sigma(X)$.

الحل



1. ✍ حساب إحتمال A ، B و C

لدينا : $P(A) = P(A \cap U_2) + P(A \cap U_3)$

ومنه $$P(A) = \left(\frac{A_5^3 + A_4^3}{A_{10}^3}\right) \times \frac{3}{8} + \left(\frac{4^3 + 3^3 + 2^3}{9^3}\right)\frac{5}{8} = \frac{252}{5768} + \frac{455}{5832} \approx 0,1217$$

لدينا : $P(B) = P(B \cap U_2) + P(B \cap U_3)$

$$P(B) = \left(\frac{A_5^1 \times A_4^1 \times A_1^1 \times 6}{A_{10}^3}\right) \times \frac{3}{8} + \left(\frac{4 \times 3 \times 2 \times 6}{9^3}\right)\frac{5}{8} = \frac{360}{5760} + \frac{720}{5832} \approx 0,1859$$

لدينا : $P(C) = P(C \cap U_2) + P(C \cap U_3)$

$$P(C) = \left(\frac{A_5^2 \times A_5^1 + A_4^2 \times A_6^1}{A_{10}^3}\right) \times \frac{9}{8} + \left(\frac{3^2 \times 6 + 2^2 \times 7 + 4^2 \times 5}{9^3}\right) \times \frac{15}{8} = \frac{1548}{5760} + \frac{2430}{5832} \approx 0,685$$

<u>طريقة 2</u>

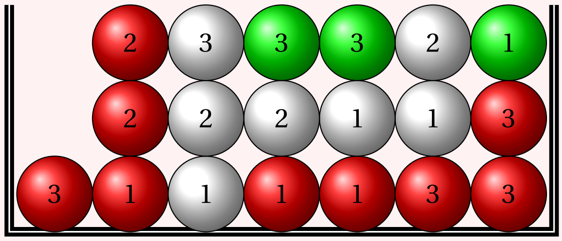
الحدث C معناه كل الحالات منقوص منها الحالتين لما تكون الكريات الثلاث من نفس اللون و من ثلاث ألوان

و منه $P(C) = 1 - [P(A) + P(B)] \approx 1 - [0,1217 + 0,1852] \approx 0,0.692$

✍ حساب $P_A(U_3)$

$$P_A(U_3) = \frac{P(U_3 \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{5}{8} \times \frac{4^3 + 3^3}{9^3}}{p(A)} \approx 0,641$$

.2



✍ قيم المتغير العشوائي X و كتابة قانون إحتماله

قيم المتغير العشوائي X هي $X=\{3;4;5;6;7;8;9\}$

تعريف قانون إحتمال المتغير العشوائي X:

$$P(X=3)=\frac{C_7^3}{C_{19}^7}=\frac{35}{969} \text{ ، } P(X=4)=\frac{C_7^2\times C_5^1}{C_{19}^3}=\frac{105}{969} \text{ ، } P(X=5)=\frac{C_5^2\times C_7^1+C_7^2\times C_7^1}{C_{19}^3}=\frac{217}{969}$$

$$P(X=6)=\frac{C_5^3+C_7^1\times C_5^1\times C_7^1}{C_{19}^3}=\frac{255}{969} \text{ ، } P(X=7)=\frac{C_7^2\times C_7^1+C_7^1\times C_5^2}{C_{19}^3}=\frac{217}{969}$$

$$P(X=8)=\frac{C_7^2\times C_5^1}{C_{19}^3}=\frac{105}{969} \text{ ، } P(X=9)=\frac{C_7^3}{C_{19}^3}=\frac{35}{969}$$

فيكون قانون الإحتمال ملخص في الجدول التالي :

x_i	3	4	5	6	7	8	9
$P(X=x_i)$	$\frac{35}{969}$	$\frac{105}{969}$	$\frac{217}{969}$	$\frac{255}{969}$	$\frac{217}{969}$	$\frac{105}{969}$	$\frac{35}{969}$

✍ حساب الأمل الرياضياتي $E(X)$ و التباين $V(X)$ ثم إستنتج الإنحراف المعياري $\sigma(X)$

$$E(X)=\frac{3\times35+4\times105+5\times217+6\times255+7\times217+8\times105+9\times35}{969}=6$$

$$V(X)=\frac{9\times35+16\times105+25\times217+36\times255+49\times217+64\times105+81\times35}{969}-6^2\approx37,96-36\approx2$$

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{2}$$

التمرين 04

نعلم أن فصائل الدم للإنسان أربعة وهي: O, A, B و AB.

تتوزع مجموعة من عشرة أشخاص حسب فصيلتهم الدموية كمايلي : أربعة أشخاص من فصيلة O و ثلاثة من فصيلة A و شخصان من فصيلة B و شخص واحد من فصيلة AB, نختار عشوائيا شخصين من هذه المجموعة .

1) أحسب إحتمال كل من الأحداث:

C : "الشخصان المختاران لهما نفس الفصيلة الدموية ".

D : "الشخصان المختاران من فصيلتين دمويتين مختلفتين ".

E : "فصيلة أحد الشخصين المختارين هي A فقط ".

2) نرفق الفصيلة O بالعدد 4 الذي يمثل عدد الفصائل التي يمكن أن تتلقى من الفصيلة O وهكذا نرفق الفصيلة A بالعدد 2 و الفصيلة B بالعدد 2 و الفصيلة AB بالعدد 1.

ليكن X المتغير العشوائي الذي يربط كل اختيار لشخصين بمجموع الرقمين المرفقين بفصيلتهما .

أ) حدد قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X .

ب) أحسب الأمل الرياضياتي للمتغير العشوائي X.

ج) أحسب إحتمال الحدث $(X=4)$ إذا علمت أن فصيلة أحد الشخصين المختارين هي A فقط.

الحل

فصائل الدم للإنسان أربعة وهي: O, A, B و AB.

✍ عدد الحالات الممكنة لإختيار شخصين : $C_{10}^2 = \frac{10!}{2! \times 8!} = 45$.

1) حساب إحتمالات الحوادث C, D و E :

C : " الشخصان المختاران لهما نفس الفصيلة الدموية ". الشخصان المختاران فصيلتهما الدموية O أو A أو B

$P(C) = \frac{C_4^2 + C_3^2 + C_2^2}{C_{10}^2} = \frac{10}{45} = \frac{2}{9}$.

D : " الشخصان المختاران من فصيلتين دمويتين مختلفتين " , الحدث D هو الحدث العكسي للحدث C .

$P(D) = 1 - P(C) = 1 - \frac{2}{9} = \frac{7}{9}$.

E : " فصيلة أحد الشخصين المختارين هي A فقط "

$P(E) = \frac{C_3^1 \times C_1^1 + C_3^1 \times C_2^1 + C_3^1 \times C_4^1}{C_{10}^2} = \frac{21}{45} = \frac{7}{15}$.

2) قيم المتغير العشوائي X :

لدينا : $(O;O), (O;A), (O;B), (O;AB), (A;A), (A;B), (A;AB), (B;B), (B;AB)$.

وعليه تكون قيم المتغير العشوائي X هي : $X = \{3,4,5,6,8\}$.

أ) تحديد قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X :

$P(X=3) = \frac{C_1^1 \times C_2^1 + C_1^1 \times C_3^1}{C_{10}^2} = \frac{5}{45} = \frac{1}{9}$

$P(X=4) = \frac{C_5^2}{C_{10}^2} = \frac{10}{45} = \frac{2}{9}$

$P(X=5) = \frac{C_1^1 \times C_4^1}{C_{10}^2} = \frac{4}{45}$

$P(X=6) = \frac{C_4^1 \times C_5^1}{C_{10}^2} = \frac{20}{45} = \frac{4}{9}$

$P(X=8) = \frac{C_4^2}{C_{10}^2} = \frac{6}{45}$.

$X = x_i$	3	4	5	6	8
$P(X = x_i)$	$\frac{5}{45}$	$\frac{10}{45}$	$\frac{4}{45}$	$\frac{20}{45}$	$\frac{6}{45}$

ب) حساب الأمل الرياضياتي $\mathbb{E}(X)$:

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{i=5} x_i \times P_i = \frac{(3\times5)+(4\times10)+(5\times4)+(6\times20)+(8\times6)}{45} = \frac{15+40+20+120+48}{45} = \frac{243}{45} = \frac{27}{5}.$$

ج) حساب إحتمال الحدث $(X=4)$ إذا علمت أن فصيلة أحد الشخصين المختارين هي A :

$P_E(X=4) = \frac{P((X=4)\cap E)}{P(E)}$, $P((X=4)\cap E) = \frac{C_3^1 \times C_2^1}{C_{10}^2} = \frac{6}{45}$.

$P_E(X=4) = \frac{P((X=4)\cap E)}{P(E)} = \frac{\frac{6}{45}}{\frac{21}{45}} = \frac{6}{21} = \frac{2}{7}$.

التمرين 05

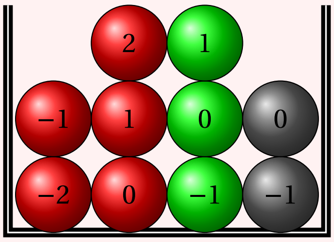
✍ يحتوي كيس على عشر كريات بحيث: خمس كريات حمراء تحمل الأرقام $-2, -1; 0; 1; 2$, و ثلاث كريات خضراء تحمل الأرقام $-1, 0, 1$ و كريتان سوداوان تحملان الرقمين $-1, 0$.

نسحب عشوائيا و في آن واحد كريتين من هذا الكيس و نفترض أن كل الكريات لها نفس احتمال السحب.

1) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحبة ممكنة العدد الحقيقي $|x - y|$ حيث x و y هما الرقمان اللذان تحملاهما الكريتان المسحوبتان من الكيس .

أ) عين القيم الممكنة للمتغير العشوائي X.
ب) اكتب قانون احتمال X ثم احسب أمله الرياضي.
2) نعيد كل الكريات المسحوبة إلى الكيس و نسحب منه كريتين على التوالي و بدون إرجاع الكرية المسحوبة الأولى.
أ) احسب عدد الحالات الممكنة للسحب.
A و B حادثتان معرفتان كما يلي :
A : " الكريتان المسحوبتان لوناهما مختلفان " B : الكريتان المسحوبتان تحمل كل منهما عددا موجبا تماما"".
ب) احسب $P(A)$ و $P(B)$.

الحل



✍ عدد الحالات الممكنة للسحب هو : $C_{10}^2 = \dfrac{10!}{2!\times 8!} = 45$.

1) X المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكل نتيجة سحبة ممكنة العدد الحقيقي $|x-y|$ حيث x و y هما الرقمان اللذان تحملاهما الكريتان المسحوبتان من الكيس .

أ) قيم المتغير العشوائي X هي $X=\{0;1;2;3;4\}$.

$X=0 \longmapsto \{-1,-1\};\{0,0\};\{1,1\}$.

$X=1 \longmapsto \{-2,-1\};\{0,1\};\{-1,0\};\{1,2\}$.

$X=2 \longmapsto \{-2,0\};\{0,2\};\{-1,1\}$.

$X=3 \longmapsto \{-2,1\};\{-1,2\}$.

$X=4 \longmapsto \{-2,2\}$.

ب) تعريف قانون إحتمال المتغير العشوائي X:

$$P(X=0)=\frac{C_3^2+C_3^2+C_2^2}{C_{10}^2}=\frac{3+3+1}{45}=\frac{7}{45}$$

$$P(X=1)=\frac{C_1^1\times C_3^1+C_3^1\times C_2^1+C_3^1\times C_3^1+C_2^1\times C_1^1}{C_{10}^2}=\frac{3+6+9+2}{45}=\frac{20}{45}$$

$$P(X=2)=\frac{C_1^1\times C_3^1+C_3^1\times C_1^1+C_3^1\times C_2^1}{C_{10}^2}=\frac{3+3+6}{45}=\frac{12}{45}$$

$$P(X=3)=\frac{C_1^1\times C_2^1+C_3^1\times C_1^1}{C_{10}^2}=\frac{2+3}{45}=\frac{5}{45}$$

$$P(X=4)=\frac{C_1^1\times C_1^1}{C_{10}^2}=\frac{1}{45}.$$

(لكي يكون قانون الإحتمال معرف يجب أن يكون مجموع الإحتمالات يساوي الواحد أي : $\sum_{i=1}^{i=5} P_i = 1$).

✍ فيكون قانون الإحتمال ملخص في الجدول التالي :

$X=x_i$	0	1	2	3	4
$P(X=x_i)$	$\frac{7}{45}$	$\frac{20}{45}$	$\frac{12}{45}$	$\frac{5}{45}$	$\frac{1}{45}$

✍ حساب الأمل الرياضياتي $\mathbb{E}(X)$:

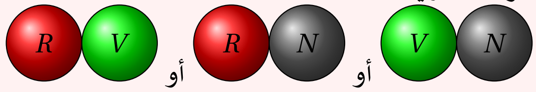
$$\mathbb{E}(X)=\sum_{i=1}^{i=5} x_i\times P_i=\frac{(0\times 7)+(1\times 20)+(2\times 12)+(3\times 5)+(4\times 1)}{45}=\frac{0+20+24+15+4}{45}=\frac{63}{45}=1.4.$$

2) نعيد كل الكريات المسحوبة إلى الكيس و نسحب منه كريتين على التوالي و بدون إرجاع الكرية المسحوبة الأولى.

أ) عدد الحالات الممكنة للسحب هو : $A_{10}^2=\dfrac{10!}{8!}=90$.

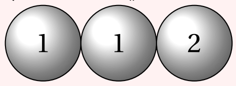
ب) حساب إحتمال الحادثتين A و B :

A : " الكريتان المسحوبتان لوناهما مختلفان ". أي سحب كرة خضراء و كرة سوداء أو سحب كرة حمراء و كرة سوداء أو سحب حمراء و كرة خضراء مع مراعاة الترتيب .



$$P(A)=\frac{2\times(A_5^1\times A_3^1)+2\times(A_5^1\times A_2^1)+2\times(A_3^1\times A_2^1)}{A_{10}^2}=\frac{62}{90}=\frac{31}{45}.$$

B : " الكريتان المسحوبتان تحمل كل منهما عددا موجبا تماما ". أي سحب كرتين من الأرقام الموجبة تماما.



$$P(B)=\frac{A_3^2}{A_{10}^2}=\frac{6}{90}=\frac{3}{45}.$$

التمرين 06

✍ يحتوي كيس غير شفاف على 9 كريات (كل الكريات متماثلة لا نفرق بينها عند اللمس).
منها 4 كريات سوداء تحمل الرقم λ و 3 كريات صفراء تحمل الرقم $(\lambda-1)$ (حيث λ عدد طبيعي غير معدوم) وكريتين بيضاوين تحملان الرقم 1.
نسحب عشوائيا من هذا الكيس ثلاث كريات في آن واحد .

1) أحسب إحتمال الاحداث التالية :

A: سحب على الاكثر كرة بيضاء

B:سحب 3 كريات تحمل نفس العدد

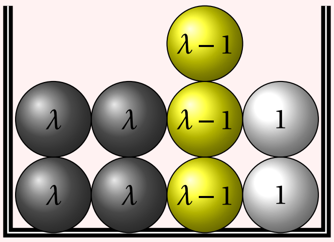
C:سحب كريتين بالضبط تحمل الرقم $(\lambda-1)$

2) نعرف X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب مجموع الارقام المسجلة على الكريات السوداء المسحوبة . والذي يأخذ القيمة 0 اذا كانت كل الكريات لسيت سوداء.

أ) عين القيم المكنة للمتغير العشوائي X.　　　ب) عرف قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X.

ج) أحسب الأمل الرياضياتي $\mathbb{E}(X)$ للمتغير العشوائي X بدلالة λ ثم حدد قيم λ من أجل $|\mathbb{E}(X)-1|\leqslant 2$.

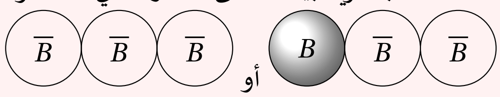
الحل



✍ عدد السحبات الممكنة هو : $C_9^3=\dfrac{9!}{3!\times 6!}=84$.

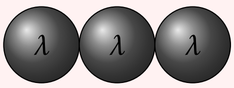
1) أ) حساب إحتمالات الحوادث :

A : " سحب كرية بيضاء على الأكثر ". أي الحصول على كرة بيضاء واحدة أو عدم سحب أية كرة بيضاء .

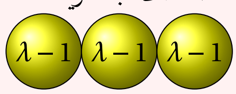


$$P(A)=\frac{C_2^1\times C_7^2+C_7^3}{C_9^3}=\frac{42+35}{84}=\frac{77}{84}$$

B : " سحب كريات تحمل نفس الرقم " أي الحصول على ثلاثة كريات تحمل الرقمλ أو ثلاثة كريات تحمل الرقم $\lambda-1$.

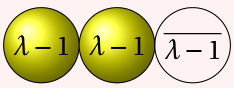


أو



$$P(B)=\frac{C_4^3+C_3^3}{C_9^3}=\frac{4+1}{84}=\frac{5}{84}$$

C : " سحب كريتين بالضبط تحمل الرقم $\lambda-1$ " أي الحصول على كريتين تحمل الرقم $\lambda-1$ و كرة واحدة من البقية.



$P(C)=\frac{C_3^2\times C_6^1}{C_9^3}=\frac{3\times 6}{84}=\frac{18}{84}$

2) X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب مجموع ارقام الكريات السوداء المسحوبة. والذي يأخذ القيمة 0 اذا كانت كل الكريات لسيت سوداء.

أ) قيم المتغير العشوائي X هي $X=\{0;\lambda;2\lambda;3\lambda\}$.

$X=0$ معناه عدم سحب أية كرة سوداء.

$X=1$ معناه سحب كرة واحدة سوداء و كرتين ليسا سوداوين.

$X=2$ معناه سحب كرتين سوداوين و كرة واحدة ليست سوداء.

$X=3$ معناه سحب ثلاث كرات سوداء.

ب) تعريف قانون إحتمال المتغير العشوائي X:

$P(X=0)=\frac{C_5^3\times C_4^0}{C_9^3}=\frac{10}{84}$ ، $P(X=\lambda)=\frac{C_4^1\times C_5^2}{C_9^3}=\frac{4\times 10}{84}=\frac{40}{84}$ ، $P(X=2\lambda)=\frac{C_4^2\times C_5^1}{C_9^3}=\frac{6\times 5}{84}=\frac{30}{84}$ ،

$P(X=3\lambda)=\frac{C_4^3\times C_5^0}{C_9^3}=\frac{4}{84}$.

(لكي يكون قانون الإحتمال معرف يجب أن يكون مجموع الإحتمالات يساوي الواحد أي : $\sum_{i=1}^{i=4} P_i=1$).

✍ فيكون قانون الإحتمال ملخص في الجدول التالي :

$X=x_i$	0	λ	2λ	3λ
$P(X=x_i)$	$\frac{10}{84}$	$\frac{40}{84}$	$\frac{30}{84}$	$\frac{4}{84}$

ج) حساب الأمل الرياضياتي $\mathbb{E}(X)$:

$\mathbb{E}(X)=\sum_{i=1}^{i=4} x_i\times P_i=\frac{(0\times 10)+(\lambda\times 40)+(2\lambda\times 30)+(3\lambda\times 4)}{84}=\frac{40\lambda+60\lambda+4\lambda}{84}=\frac{112\lambda}{84}=\frac{4\lambda}{3}$.

✍ تحديد قيمة λ التي يكون من أجلها $|\mathbb{E}(X)-1|\leqslant 2$:

$|\mathbb{E}(X)-1|\leqslant 2$ معناه $\left|\frac{4\lambda}{3}-1\right|\leqslant 2$ و منه : $-2\leqslant\frac{4\lambda}{3}-1\leqslant 2$ ومنه : $-1\leqslant\frac{4\lambda}{3}\leqslant 3$ ومنه : $\frac{-3}{4}\leqslant\lambda\leqslant\frac{9}{4}$ ومنه : $\lambda\in\{1;2\}$ لأن λ عدد طبيعي غير معدوم .