Série d'exercices sur les raisonnements Mathématiques

Exercice1 :

Montrer que pour tout entier naturel non nul n tel que $n^2 + n^3 \neq 100$.

Solution :

On fait un raisonnement par disjonction des cas :

Remarquons que si $n \geq 5\ alors\ n^2 + n^3 \geq 150 \neq 100$

Donc nous avons à étudier 6 cas :

Si $n = 0$ alors $n^2 + n^3 = 0 \neq 100$

Si $n = 1$ alors $n^2 + n^3 = 1 + 1 = 2 \neq 100$

Si $n = 2$ alors $n^2 + n^3 = 4 + 8 = 12 \neq 100$

Si $n = 3$ alors $n^2 + n^3 = 9 + 27 = 36 \neq 100$

Si $n = 4$ alors $n^2 + n^3 = 16 + 64 = 80 \neq 100$

Si $n \geq 5$ alors $n^2 + n^3 \geq 25 + 125 = 150 \neq 100$

Donc pour tout entier naturel n $n^2 + n^3 \neq 100$

On peut faire aussi un raisonnement par l'absurde :

On montre que la négation de la proposition est fausse, c'est-à-dire on montre que la proposition « il existe un entier naturel n tel que $n^2 + n^3 = 100$ » est fausse et pour cela par un raisonnement direct on prouve que cette proposition implique une proposition fausse :

$(n^2 + n^3 = 100) \Leftrightarrow n^2(n + 1) = 100$ et ici on fait un raisonnement par disjonction des cas

Soit $n^2 = 1$ et $n + 1 = 100$ donc $n = 1$ et $n = 99$ ce qui est faux

Soit $n^2 = 4$ et $n + 1 = 25$ donc $n = 2$ et $n = 24$ ce qui est faux

Soit $n^2 = 25$ et $n + 1 = 4$ donc $n = 5$ et $n = 3$ ce qui est faux

Ce sont tous les cas possibles, et chacun de ces cas conduit à une proposition fausse donc pour tout n : $n^2 + n^3 \neq 100$.

Exercice 2 :

a, b et *c* étant des nombres réels, et $a \neq 0$. Montrer que L'équation $ax + b = c$ admet une unique solution dans R.

Solution :

il faut montrer deux chose, que la solution existe en la calculant, et que cette solution est unique, pour l'existence de la solution on fait un raisonnement direct en calculant la solution, pour l'unicité on fait un raisonnement par l'absurde :

Existence de la solution :

$$(ax + b = c) \Leftrightarrow (ax = c - b) \Leftrightarrow \left(x = \frac{c - b}{a}\right)\ car\ a \neq 0$$

Donc la solution existe

Unicité de la solution :

Supposons par l'absurde que la solution n'eset pas unique, alors soit y cette autre solution , ona alors :

$$ay + b = c\ or\ ax + b = c\ \text{ donc } (ay + b) - (ax + b) = c - c \text{ donc}$$
$$ay - ax = 0 \text{ donc en divisat les deux membres par } a \neq 0 \text{ on a } y - x = 0$$

C'est-à-dire $y = x$ et la solution est donc unique.

Exercice 3 :

Montrer que si *n* est un nombre relatif impair, alors il existe un unique entier *k* tel que *n* soit la somme de $k - 2$ et $k + 3$.

Solution :

Remarquons que $(k-2) + (k+3) = 2k + 1$.

On doit prouver l'existence du k et son unicité :

Existence :

Soit n un entire relatif impair, alors il existe un k dans Z tel que $n = 2k + 1$

Et selon la remarque plus haut on a : $2k + 1 = (k-2) + (k+3)$ donc

$$n = (k-2) + (k+3)$$

Unicité :

<u>On fait un raisonnement par l'absurde</u> :

Supposons qu'il existe un autre entier relatif p tel que

$$n = (p-2) + (p+3)$$

On a donc $(p-2) + (p+3) = (k-2) + (k+3)$ ce qui equivaut à : $2p + 1 = 2k + 1$ et après simplification il reste $p = k$.

Exercice 4

Montrer que si un entier naturel n est multiple de 2 et de 3 alors n est un multiple de 6

Solution :

Soit n un entier

n est multiple de 2 alors il existe un entier naturel k tel que $n = 2k$

n est multiple de 3 alors il existe un entier naturel p tel que $n = 3p$

donc $n = 2k = 3p$ $(*)$

Montrons que 2 divise p,

<u>pour ce cela on fait un raisonnement par l'absurde</u> :

Supposons que 2 ne divise pas p, donc p n'est pas pair, donc il est impair, il existe ainsi un entier naturel r tel que $p = 2r + 1$, l'égalité $(*)$ devient

$$n = 3p = 3(2p + 1) = 6p + 3 = 2(3p + 1) + 1$$

Donc n est impair, or $n = 2k$, c'est-à-dire n est paire, donc n est pair et impair, ce qui est faux, donc l'hypothèse 2 ne divise pas p est fausse, donc 2 divise p, donc $p = 2r$ et ainsi $n = 3p = 3 \times 2r = 6r$ donc 6 divise n ; ainsi n est un multiple de 6

Exercice 5

Montrer que *n* est pair si et seulement si $3n + 4$ est pair.

Solution :

Il faut montrer deux implications :

1. *n* est pair implique $3n + 4$ est pair.
2. $3n + 4$ est pair implique n est pair

n est pair implique $3n + 4$ est pair. ?

$$n\ pair \ \Longrightarrow (\exists p \in Z : n = 2p) \Longrightarrow (3n + 4 = 6p + 4 = 2(3p + 2))$$
$$\text{donc } 3n + 4\ est\ pair\ aussi$$

$3n + 4$ est pair implique n est pair ?

on fait un raisonnement par contraposée:

On montre que ($n\ n'est\ pas\ pair\ implique$ $3n + 4$ $n'est\ pas\ pair$)

n n'est pas pair $\Longrightarrow$ n est impair $\Longrightarrow$ $\exists k \in Z : n = 2k + 1 \Longrightarrow$

$$3n + 4 = 6k + 7 = 2[3k + 3] + 1$$

Donc $3n + 4$ est impair donc il n'est pas pair

Exercice 6 :

Soient a, b, c trois nombre réels. Montrer qu'au moins l'un de ces nombres est plus grand que ou égale à leur moyenne arithmétique $\frac{a+b+c}{3}$.

Solution :

Supposons que $a = \max\{a, b, c\}$ (on peut supposer aussi que b ou c est la max), on a :

$$(a \le a\ et \quad b \le a\ \ et\ c \le a\ ) \Longrightarrow (a + b + c \le 3a) \Longrightarrow \left(\frac{a+b+c}{3} \le \frac{a+a+a}{3} = a\right)$$

Exercice 7

Montrer que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel.

Solution :

On fait un raisonnement par l'absurde

Supposons que : supposons que $\sqrt{2} \in Q$, on a

$$\sqrt{2} \in Q \Longrightarrow \left(\exists p \in Z, \exists q \in Z^{*} : \sqrt{2} = \frac{p}{q}\ et\ \text{pgcd}(p, q) = 1\right) \Longrightarrow p^2 = 2q^2$$
$$\Longrightarrow (p^2 \text{ est paire}) \Longrightarrow (p \text{ est paire}) \text{ (voir exemple de contraposée, cours)}$$
$$\Longrightarrow (\exists k \in Z : p = 2k) \Longrightarrow (4k^2 = 2q^2) \Longrightarrow (q^2 = 2k^2)$$
$$\Longrightarrow (q^2\ est\ pair) \Longrightarrow (q\ est\ paire)$$

On a :{ $\text{pgcd}(p, q) = 1\ et\ (p\ paire\ et\ q\ paire)$} $\Longrightarrow [\text{pgcd}(p, q) = 1\ et \text{pgcd}(p, q) \ge 2\ ]$

Cette dernière proposition est fausse, et comme les implications sont toutes justes donc nécessairement la première supposition est fausse c'est-à-dire $\sqrt{2} \notin Q$.

Exercice 8 :

Sachant $\sqrt{2} \notin Q$, montrer que : $\forall x \in$Q, $x + \sqrt{2} \notin$ Q

Solution :

Par l'absurde :

Supposons que $x + \sqrt{2} \in Q$, or $x \in Q$, donc il existe deux entiers relatifs p, q : $x = \frac{p}{q}$, et deux entiers relatifs a, b : $x + \sqrt{2} = \frac{p}{q} + \sqrt{2} = \frac{a}{b}$, donc $\sqrt{2} = \frac{a}{b} - \frac{p}{q} = \frac{aq-bp}{bq} \in Q$

On a donc $\sqrt{2} \notin Q\ et\ \sqrt{2} \in Q$, ce qui est faux, donc nécessaiement l'hypothèse e départ est fausse, c'est-à-dire $x + \sqrt{2} \notin$ Q

Exercice 9 :

Montrer que : $\frac{Ln2}{Ln3} \notin Q$

Solution

<u>Par l'absurde</u>

Supposons que $\frac{Ln2}{Ln3} \in Q$

$$\frac{Ln2}{Ln3} \in Q \Longrightarrow \exists a, b \in Z: \frac{Ln2}{Ln3} = \frac{a}{b} \Longrightarrow aLn3 = bLn2 \Longrightarrow Ln3^a = Ln2^b$$
$$\Longrightarrow 3^a = 2^b$$

Or $3 > 2 > 1 \Longrightarrow Ln3 > Ln2 > Ln1 = 0$ car la fonction Lnx est strictement croissante donc ,$\frac{a}{b} > 0$, on peut donc supposer que $a > 0$ et $b > 0$, il s'en suit que 3^a et 2^b sont entiers positifs et dans ce cas 3^a est impair, car c'est un produit de nombres impaire, et 2^b est paire car c'est un produit de nombre pairs, donc un nombre pair est égale à un nombre impair ce qui est faux donc l'hypothèse de départ est fausse aussi donc $\frac{Ln2}{Ln3} \notin Q$.

Exercice 10 :

Montrer que : $\forall a \in R_+, \forall b \in R_+: a + b \geq 2\sqrt{ab}$

a. Par un raisonnement par équivalence.
b. Par un raisonnement par l'absurde.

Solution :

a. <u>Raisonnement par équivalence :</u> pour tout a, b positifs on a :

$$\left(a + b \geq 2\sqrt{ab}\right) \Leftrightarrow \left(\sqrt{a}^2 + \sqrt{b}^2 \ \geq\ 2\sqrt{a}\sqrt{b}\right) \Leftrightarrow \left(\sqrt{a}^2 + \sqrt{b}^2 -\ 2\sqrt{a}\sqrt{b} \geq 0\right)$$
$$\Leftrightarrow \left((\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0\right)$$

Or la dernière proposition est vraie et comme toute les propositions sont équivalentes alors la première est vraie aussi, c'est-à-dire $\forall a \in R_+, \forall b \in R_+: a + b \geq 2\sqrt{ab}$.

b. <u>raisonnement par l'absurde</u> :

Supposons qu'il existe deux réels positifs a, b tel que $+b < 2\sqrt{ab}$, on a :

$$a + b < 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow a + b - 2\sqrt{ab} < 0 \Leftrightarrow (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 < 0$$

Or ceci est faux, donc l'hypothèse de départ est fausse, c'est à dire

$$\forall a \in R_+, \forall b \in R_+: a + b \geq 2\sqrt{ab}$$

Exercice 11 :

Les longueurs des cotes d'un triangle ABC sont des entiers que l'on désigne par a,b, c.

a. On suppose que $a = 1$ En utilisant l'inégalité triangulaire, montrer que le triangle ABC est soit équilatérale, soit isocèle.
b. Trouver le plus petit périmètre possible si l'un des cotés est égal à 6.

Solution

a. <u>Par l'absurde</u>

Supposons que le triangle n'est ni isocèle ni équilatérale, donc $a = 1, b \neq 1, c \neq 1, b \neq c$

On peut supposer que $c > b$. Donc $c \geq b+1$ puisque que les cotés sont entiers, et d'après l'inégalité triangulaire on a $1+b > c$ donc $b > c-1 \geq b+1-1$ donc $b > b$ ce qui est faux, donc l'hypothèse de départ est fausse donc le triangle et soit isocèle soit équilatérale.

b. Nous avons les possibilités suivantes :
6,1,6 donc le périmètre est égale à13
Si l'un des coté est plus grand que 1 on a les possiblité sivantes :
6,2,5 et périmètre=13
6,3,4 et périmètre = 13
Supposons qu'il existe un triangle de cotés entiers de périmètre 12 et dont l'un d'eux vaut 6, donc la somme des deux autres cotés vaut 6, si a=6 alors b+c=6 et dans ce cas ona b+c=a ce qui viole l'inégalité triangulaire, donc le plus petit périmètre possible pour un triangle de coté entiers dont l'un vaut 6, est égale à 13.

Exercice 12 :
Montrer que pour tout x dans R on a :$[(x \neq 1)$ et $(x \neq 2)] \Longrightarrow [(x-1)(x-2) \neq 0]$
Solution :
<u>On fait un raisonnement par contraposition</u> :
On montre que pour tout x dans R on a : $[(x-1)(x-2)=0] \Longrightarrow [(x=1)$ ou $(x=2)]$
On a :
$[(x-1)(x-2)=0] \Longrightarrow [(x-1)=0$ ou $(x-2=0)] \Longrightarrow [(x=1)$ ou $(x=2)]$
On peut faire un raisonnement par l'absurde aussi….

Exercice 13.
Montrer que : $\forall n \in N - \{0,1\}$: $1 + 1/2^2 + 1/3^2 + \cdots + 1/n^2 > 3n/2n + 1$
Solution :
<u>On fait un raisonnement par récurrence :</u>
Soit p_n la proposition $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2} > \frac{3n}{2n+1}$
Il s'agit de montrer que p_n est vraie pour tout entier naturel $n \geq 2$

1. Montrons que p_2 est vraie :

$$1+\frac{1}{2^2}=1+\frac{1}{4}$$

$$\frac{3\times 2}{2\times 2+1}=\frac{6}{5}=1+\frac{1}{5}$$

On a bien $1+\frac{1}{2^2} > \frac{3\times 2}{2\times 2+1}$

2. Supposons maintenant que p_n soit vraie et montrons que cela implique que p_{n+1} :
on suppose donc que $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2} > \frac{3n}{2n+1}$
et on doit prouver que $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2} > \frac{3(n+1)}{2(n+1)+1}$
On a : $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}=(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2})+\frac{1}{(n+1)^2}$

$$> \frac{3n}{2n+1} + \frac{1}{(n+1)^2}$$

essayons de voir que $\frac{3n}{2n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} > \frac{3(n+1)}{2(n+1)+1}$

autrement dit montrons que $\frac{1}{(n+1)^2} > \frac{3n+3)}{2n+3} - \frac{3n}{2n+1}$

c'est-à-dire a-t-on $\frac{1}{(n+1)^2} > \frac{3}{(2n+3)(2n+1)}$

ce qui est équivalent à prouver que $n^2 + 2n > 0$ pour ≥ 2 , or ceci est vraie dans $\boldsymbol{N}$ **,** donc p_{n+1} est vraie aussi.

On a : p_2 est vraie et $p_n \Longrightarrow p_{n+1}$ donc d'après le théorème de la récurrence p_n est vraie pour tout $n \geq 2$.

Exercice 14 :

Montrer « $\forall a \in R, \forall \varepsilon > 0 : |a| \leq \varepsilon \Rightarrow a = 0$ » est une proposition fausse.

Solution :

On montre que sa négation est vraie c'est-à-dire :

$$\exists a \in R, \exists \varepsilon > 0 : |a| \leq \varepsilon \text{ et } a \neq 0$$

Il suffit de trouver un réel a et en réel positif ϵ tels que $|a| \leq \varepsilon$ *et* $a \neq 0$

Pour cela on choisit par exemple $a = 1$ et $\varepsilon = 2$, on a bien $1 \leq 2$ *et* $1 \neq 0$

Exercice 15

Soit $a \in$R.

a. Montrer que $(\forall \varepsilon > 0, |a| \leq \varepsilon) \Rightarrow a = 0$.

b. Montrer que $(\forall \varepsilon > 0, |a| < \varepsilon) \Rightarrow a = 0$

Solution :

a. On utilise la contraposée

On montre que : $a \neq 0 \Longrightarrow (\exists \varepsilon > 0, |a| > \varepsilon)$

Il suffit de prendre $\varepsilon = \frac{|a|}{2}$: $|a| > \frac{|a|}{2}$

b. On peut utiliser la contraposée, mais on va faire un raisonnement directe en utilisant la question a.

$(\forall \varepsilon > 0, |a| < \varepsilon) \Longrightarrow [\forall \varepsilon > 0, (|a| < \varepsilon) \vee (|a| = \varepsilon)] \Longrightarrow (\forall \varepsilon > 0, |a| \leq \varepsilon)$

$\Longrightarrow a = 0$ (d'après la question a.)