Université Mostefa Benboulaïd Batna 2
Faculté de Technologie
Département d'Electrotechnique
Année universitaire 2018/2019
Promotion : Licence en Electrotechnique
Parcours : Electrotechnique
Module : ELT514

Contrôle de Connaissances

Jeudi 14 Février 2019

Ne pas oublier les unités des différentes grandeurs s'il y a lieu.

Questions de cours (7 points)

1. Rappeler les définitions respectives de l'électrostatique et de la magnétostatique.
2. Donner les expressions de calcul de la charge électrique $\boldsymbol{Q}$ à partir des densités : linéique $\boldsymbol{\lambda}$, surfacique $\boldsymbol{\sigma}$ et volumique $\boldsymbol{\rho}$.
3. Comment sont orientées les lignes des champs électrique et magnétique ?
4. Comment appelle-t-on ce symbole $\vec{\nabla}$? Donner son expression en coordonner cartésiennes.
5. Soit $\boldsymbol{dV = \vec{\nabla}V.\overrightarrow{dM}}$ comment orienter $\overrightarrow{\boldsymbol{dM}}$ par rapport à $\boldsymbol{\vec{\nabla}V}$ pour que $\boldsymbol{dV}$ soit nulle, positive et maximum.
6. Rappeler les formes locales des équations de Maxwell en électrostatique et en magnétostatique.
7. Comment appelle-t-on ce symbole Δ ? A quoi est égale ? déduire l'expression du $\Delta\boldsymbol{V}$ en coordonnées catésiennes.

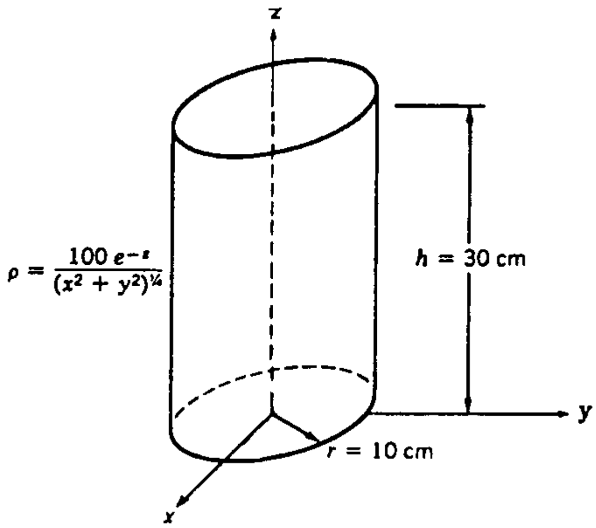
Exercice n°1 (4 points)

Considérons un champ vectoriel $\boldsymbol{\vec{V} = x\vec{e}_x}$ et la surface d'un cube unitaire (de côté égale à 1) centré à l'origine $\boldsymbol{O}$ d'un repère orthonormé $\boldsymbol{Oxyz}$ avec ces arêtes parallèles aux axes.

1.1. Réaliser la figure de l'exercice.

1.2. Vérifier le théorème de divergence. Exprimer $\boldsymbol{dS}$ et $\boldsymbol{d\tau}$ en coordonnées cartésiennes.

$$\iint \boldsymbol{\vec{V}.\overrightarrow{dS}} = \iiint \boldsymbol{\vec{\nabla}.\vec{V}\,d\tau}$$

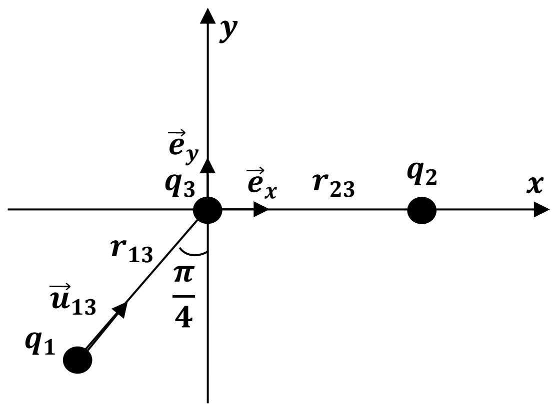


Exercice n°2 (4 points)

Trouver la charge totale contenue dans le cylindre de la figure ci-contre, sachant que la densité volumique de charge est : $\boldsymbol{\rho = 100e^{-z}(x^2+y^2)^{-1/4}C/m^3}$. Travailler en coordonnées cylindriques. $\boldsymbol{d\tau = rdrd\varphi dz}$

Exercice n°3 (5 points)

Dans la figure montrer ci-contre déterminer la force résultante $\boldsymbol{\vec{F}}$ agissant sur la charge $\boldsymbol{q_3 = -2\mu C}$ par $\boldsymbol{q_1 = -4\mu C}$ et $\boldsymbol{q_2 = +3\mu C}$ et déterminer son sens $\boldsymbol{\theta}$ par rapport à l'axe des $\boldsymbol{x}$. Sachant que $1/4\pi\varepsilon_0 = \boldsymbol{9.10^9\,Nm^2/C^2}$, $\boldsymbol{r_{13} = 0,08m}$, $\boldsymbol{r_{23} = 0,12m}$.



Université Mostefa Benboulaïd Batna 2
Faculté de Technologie
Département d'Electrotechnique
Année universitaire 2018/2019
Promotion : Licence en Electrotechnique
Parcours : Electrotechnique
Module : ELT514

Corrigé du Contrôle de Connaissances

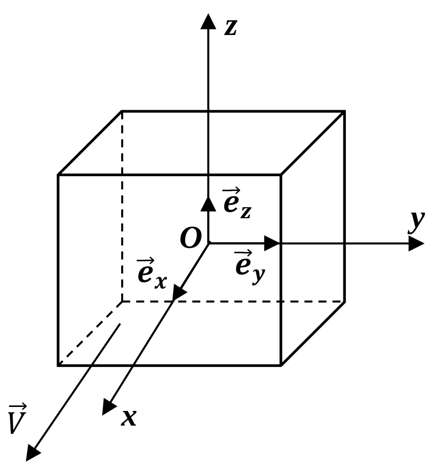
Jeudi 14 Février 2019

Questions de cours (7 points)

1. L'**électrostatique** traite les phénomènes électriques, forces, champs électriques et potentiels électriques, résultant de l'interaction des charges électriques immobiles. La magnétostatique traite les phénomènes magnétiques indépendant du temps, résultant de l'interaction des charges électriques en mouvement. En d'autres termes, elle traite les phénomènes magnétiques des courants continus.
2. $$\boldsymbol{Q = \int \lambda dl\,, \qquad Q = \iint \sigma dS\,, \qquad Q = \iiint \rho d\tau}$$
3. Les lignes de champ électriques sont soit divergents (c'est à dire que son vecteur pointe de la charge électrique qui l'a créé vers l'extérieur) si $\boldsymbol{Q > 0}$ ou convergent (c'est à dire que son vecteur pointe de l'extérieur vers la charge électrique qui l'a créé) si $\boldsymbol{Q < 0}$. Les lignes de champ magnétique sont fermées ce qui est expliqué par $\boldsymbol{\vec{\nabla}.\vec{B} = 0}$.
4. Le symbole $\boldsymbol{\vec{\nabla}}$ s'appelle Nabla. En coordonnées cartésiennes : $\boldsymbol{\vec{\nabla} = \partial/\partial x\,\vec{e}_x + \partial/\partial y\,\vec{e}_y + \partial/\partial z\,\vec{e}_z}$
5. $\boldsymbol{\overrightarrow{dM}}$ est perpendiculaire à $\boldsymbol{\vec{\nabla}V}$ ce qui donne $\boldsymbol{dV = 0}$, $\boldsymbol{\overrightarrow{dM}}$ forme un angle aigu avec $\boldsymbol{\vec{\nabla}V}$ ce qui donne $\boldsymbol{dV > 0}$, $\boldsymbol{\overrightarrow{dM}}$ et $\boldsymbol{\vec{\nabla}V}$ sont collinaires à ce qui donne $\boldsymbol{dV}$ maximum.
6. Les équations de Maxwell en électrostatique et en magnétostatique sont : $\boldsymbol{\vec{\nabla}\Lambda\vec{E} = 0}$, $\boldsymbol{\vec{\nabla}\Lambda\vec{H} = \vec{J}}$, $\boldsymbol{\vec{\nabla}.\vec{E} = \rho/\varepsilon_0}$, $\boldsymbol{\vec{\nabla}.\vec{B} = 0}$.
7. Δ s'appelle Laplacien. Son expression en coordonnées catésiennes
$$\Delta = \vec{\nabla}.\vec{\nabla} = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

Exercice n°1 (4 points)

Évaluons d'abord l'intégrale de surface. Il est évident que $\boldsymbol{\vec{V}}$ est parallèle à quatre des six faces. D'où $\boldsymbol{\vec{e}_x.\vec{n} = O}$. Il reste à calculer l'intégrale de surface uniquement sur les deux autres faces perpendiculaires à $\boldsymbol{\vec{V}}$ où $\boldsymbol{\vec{e}_x.\vec{n} = \pm 1}$. Il vient alors :



Face $\boldsymbol{x = 1/2}$, $\boldsymbol{\vec{e}_x.\vec{n} = 1}$, $\boldsymbol{dS = dydz}$, $\boldsymbol{y}$ et $\boldsymbol{z}$ varient respectivement de $\boldsymbol{-1/2}$ **à** $\boldsymbol{+1/2}$

$$\frac{1}{2}\int_{-1/2}^{1/2} dy \int_{-1/2}^{1/2} dz = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right)\right]\left[\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right)\right] = \frac{1}{2}$$

Face $\boldsymbol{x = -1/2}$, $\boldsymbol{\vec{e}_x.\vec{n} = -1}$, $\boldsymbol{dS = dydz}$

$$\frac{1}{2}\int_{-1/2}^{1/2} dy \int_{-1/2}^{1/2} dz = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right)\right]\left[\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right)\right] = \frac{1}{2}$$

$$\iint \vec{V}.\overrightarrow{dS} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

Évaluons maintenant l'intégrale de volume :

$$\iiint \vec{\nabla}.\vec{V}\, d\tau$$

$\vec{\nabla}.\vec{V} = dV_x/dx = 1, x, y$ et z varient respectivement de $-1/2$ **à** $+1/2$

$$1\int_{-1/2}^{1/2} dx \int_{-1/2}^{1/2} dy \int_{-1/2}^{1/2} dz = 1\left[\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right)\right]\left[\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right)\right]\left[\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right)\right] = 1$$

Conclusion

Il en résulte des calculs ci-dessus que :

$$\iint \vec{V}.\overrightarrow{dS} = \iiint \vec{\nabla}.\vec{V}\, d\tau = 1$$

Le théorème de divergence est alors vérifié.

Exercice n°2 (4 points)

La charge totale contenue dans le cylindre circulaire droit peut être obtenue en évaluant

$$Q = \iiint \rho\, d\tau$$

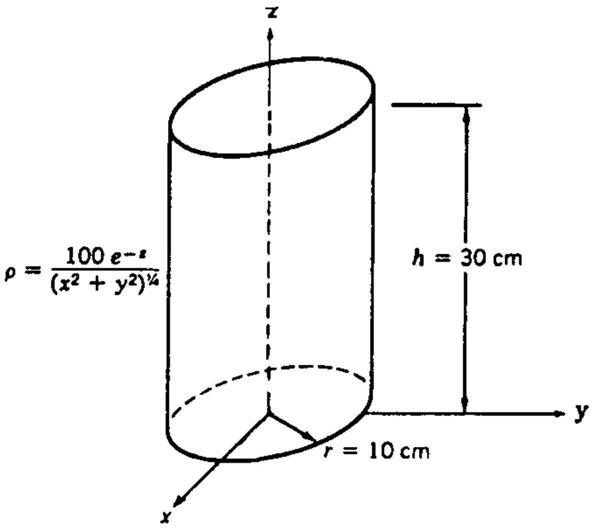
Exprimons la densité de charge, le volume est plus facilement décrit par ses coordonnées cylindriques.

Puisque :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Alors

$$\rho = 100e^{-z}r^{-1/2}C/m^3$$



Le volume différentiel en coordonnées cylindriques

$d\tau = rdrd\varphi dz$

$$Q = 100\int_0^{0,1} r\,r^{-1/2}dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{0,3} e^{-z}dz$$

$$Q = 100\int_0^{0,1} r^{1/2}dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{0,3} e^{-z}dz$$

$$Q = 100 \times \left.\frac{r^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right|_0^{0,1} \times 2\pi \times (-e^{-z})|_0^{0,3}$$

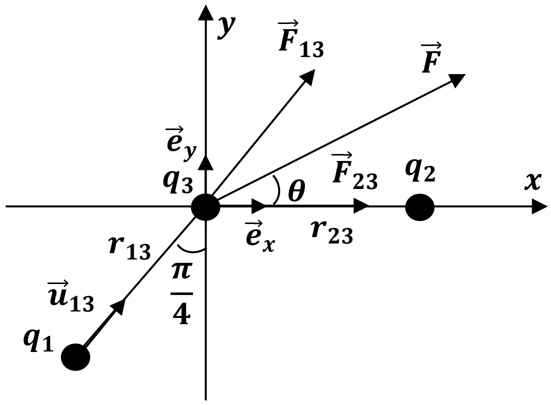
$$Q = 100 \times \left.\frac{2 \times r^{\frac{3}{2}}}{3}\right|_0^{0,1} \times 2\pi \times (-e^{-z})|_0^{0,3}$$

$$Q = 100 \times \frac{2 \times (0,1)^{1,5}}{3} \times 2\pi \times (-e^{-0,3} + e^0)$$

$$Q = \frac{400\pi \times (0,1)^{1,5}}{3} \times (-e^{-0,3} + e^0) = 3,43C$$

Exercice n°2 (5 points)

Etant donné que des charges identiques se repoussent et que des charges différentes s'attirent, les forces agissant sur $\boldsymbol{q_3}$ s'écrivent :



$$\vec{F}_{13} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_3}{r_{13}^2}\vec{u}_{13}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_3}{r_{13}^2}\left(cos\frac{\pi}{4}\vec{e}_x + sin\frac{\pi}{4}\vec{e}_y\right)$$

$$\vec{F}_{23} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2q_3}{r_{23}^2}\vec{e}_x$$

$$\vec{F} = \vec{F}_{13} + \vec{F}_{23}$$

$$= \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_3}{r_{13}^2}cos\frac{\pi}{4} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2q_3}{r_{23}^2}\right)\vec{e}_x + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_3}{r_{13}^2}sin\frac{\pi}{4}\vec{e}_y$$

$$\vec{F} = \frac{q_3}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1}{r_{13}^2}cos\frac{\pi}{4} + \frac{q_2}{r_{23}^2}\right)\vec{e}_x + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_3}{r_{13}^2}sin\frac{\pi}{4}\vec{e}_y$$

$$\vec{F} = \frac{2\times10^{-6}}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{4\times10^{-6}}{(0,08)^2}\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{3\times10^{-6}}{(0,12)^2}\right)\vec{e}_x + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{8\times10^{-12}}{(0,08)^2}\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{e}_y$$

$$\vec{F} = 9\times10^9\times2\times10^{-12}\left(\frac{4}{(0,08)^2}\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{3}{(0,12)^2}\right)\vec{e}_x + \frac{9\times10^9 8\times10^{-12}}{(0,08)^2}\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{e}_y$$

$$\vec{F} = 11,70\vec{e}_x + 7,95\vec{e}_y$$

$$F = \sqrt{(11,70)^2 + (7,95)^2} = 14,15\ N$$

Son sens est suivant un angle

$$\theta = arctang\left(\frac{7,95}{11,70}\right) = tang^{-1}\left(\frac{7,95}{11,70}\right) = 34,20°$$