Opérations sur les Ensembles

Ensemble :

Un ensemble peut être définit de deux façons, soit en explicitant tous ses éléments, on dit qu'il est définit **en extension**, par exemple l'ensemble $A = \{1,2,3,4\}$ est définit en extension ; soit on le définit par une phrase littéraire ou logique qui permet de faire comprendre quels sont les éléments de cet ensemble, et on dit que l'ensemble est définit **en compréhension**, par exemple, l'ensemble B définit par $B = \{ x \in Z: -100 \leq x < 100\}$ est définit en compréhension, l'ensemble $2N$ définit par $2N = \{n \in N: n \text{ est un entier pair}\}$ est un ensemble définit en compréhension. D'une façon générale un ensemble E définit en compréhension s'écrit $E = \{x \in U: P(x)\}$ où il faut indiquer où sont pris les éléments de l'ensemble, ici c'est l'ensemble U, et quelle est la caractéristique de ces éléments, ici c'est l'information $P(x)$

Ensemble, éléments d'un ensemble et appartenance :
Soit A un ensemble, disons par exemple $A = \{1,2,3,4\}$; les nombres 1,2,3,4 sont **les éléments de l'ensemble A** ; on dit que les 1 **appartient** à A, et on écrit $1 \in A$,
On a aussi $2 \in A; 3 \in A; 4 \in A$.
Le nombre 5 n'appartient pas à l'ensemble A, on écrit dans ce cas $5 \notin A$
Cardinal d'un ensemble fini E: c'est le nombre des éléments de E et on le note $card(E)$
Dans l'exemple précédant : $card(A) = 4$

Ensemble vide :
Un ensemble est vide lorsqu'il ne contient aucun élément, on le note ∅.
On a $card(\emptyset) = 0$.

Inclusion et égalité
On dit qu'un ensemble F est inclus dans un ensemble E si tout élément de F appartient à l'ensemble E ; on écrit $F \subset E$ et on lit F est inclus dans E. on dit aussi que F est une partie de E.
Exemple :$E = \{1,2,3,4,5\},\ F = \{1,2,3\},\ G = \{4,5,6\}$
Ici F est inclus dans , mais G n'est pas inclus dans E car $6 \in G$ mais $6 \notin E$; de meme E n'est pas inclus dans F car $4 \in E$ mais $4 \notin F$
Symboliquement on a : $F \subset E;\ G \not\subset E\ ; E \not\subset F$
Exemple d'inclusion : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z};\ \ \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q};\ \ \mathbb{Q} \subset \mathbb{R};\ \ \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$
Remarque :
L'ensemble vide ∅ est inclus dans tous les ensembles, en effet, pour tout élément x, l'information $x \in \emptyset$ est fausse, et comme le faux implique le vrai et le faux alors l'implication $x \in \emptyset \Longrightarrow x \in A$ est vraie quel que soit l'ensemble A, donc $\emptyset \subset A$.
D'une manière générale, on a : $F \subset E \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall x: x \in F \Longrightarrow x \in E$
Et pour la non-inclusion : $F \not\subset \mathrm{E} \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} : \exists x: x \in F \text{ et } x \notin E$

Remarque : Si les ensembles sont définit en compréhension, disons
$$E = \{x \in G: p(x)\} \text{ et } F = \{x \in G: q(x)\}$$
Alors dire que $F \subset E$ revient à dire que $q(x) \Longrightarrow p(x)$
Exercice :

Montrer que l'implication suivante est vraie :

$$(A \subset B \text{ } et \text{ } B \subset C) \Longrightarrow (A \subset C)$$

Egalité de deux ensembles :

On dit que deux ensembles A et B sont égaux si et seulement si A et B ont les mêmes éléments, autrement dit

$$A = B \overset{def}{\Longleftrightarrow} [\forall x: x \in A \Leftrightarrow x \in B] \Leftrightarrow (A \subset B \text{ } et \text{ } B \subset A)$$

Remarque : si $A = \{x \in E: p(x)\}$ et $B = \{x \in E: q(x)\}$ alors $A = B \overset{def}{\Longleftrightarrow} [p(x) \Leftrightarrow q(x)]$.

Ensemble des parties d'un ensemble :

Exemple :

Soit $E = \{ 1,2,3\}$, on a par exemple $\{1\} \subset E; \{2,3\} \subset E;$ $\emptyset \subset E$ ...

On peut construire l'ensemble de toutes les parties de E, qu'on note $\mathcal{P}(E)$, et qui est définit en extension par : $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$

Les éléments de l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ sont des ensembles, ce sont les sous-ensembles de E.

On a : $\emptyset \in \mathcal{P}(E)$, $\{1\} \in \mathcal{P}(E)$, ..., $\{1,2,3\} \in \mathcal{P}(E)$

Exercice :

1. Décrire l'ensemble des parties des ensembles suivants et déterminer le cardinal de chacun d'eux :
   $\emptyset$, $A = \{a\}, B = \{a, b\}, C = \{a, b, c, d\}$
2. En déduire que si $card(E) = n$ alors $card(\mathcal{P}(E)) = 2^n$

Produit cartésien $\boldsymbol{E \times F}$ de deux ensembles $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{F}$:

$$E \times F = \{(a; b): a \in E \text{ } et \text{ } b \in F\}$$

Exemple : si $E = \{1, x\}$, $F = \{2, x, y\}$ alors

$$E \times F = \{(1; 2), (1; x), (1; y), (x; 2), (x; x), (x; y)\}$$

Ici $card(E) = 2 \text{ } et \text{ } card(F) = 3 \text{ } et \text{ } card(E \times F) = 6$

D'une manière générale si $card(E) = n \text{ } et \text{ } card(F) = p \text{ } alors \text{ } card(E \times F) = n \times p.$

Exemple :

On note R^2 le produit cartésien $R \times R$.

Réunion de deux ensembles :

Soient A, B, et C trois ensembles définis par $A = \{1,2,3,4\}$; $B = \{3,4,5,6\}$; $C = \{a, 2,5, c\}$

On peut considérer un ensemble contenant uniquement tous les éléments de A et tous les éléments de B, c'est l'ensemble {1,2,3,4,5,6} , on le note $A \cup B$, et on lit « A union B ». Symboliquement on écrit $A \cup B = \{1,2,3,4,5,6\}$

On a de la même façon : $A \cup C = \{1,2,3,4,5, a, c\}$ et $A \cup B \cup C = \{1,2,3,4,5,6, a, c\}$

Exemple :

Si on pose $N^- = \{-n: n \in N\}$ alors $Z = N^- \cup N$

D'une façon générale on a, on définit la réunion de deux ensembles A et B par :

$$A \cup B = \{x: x \in A \text{ } ou \text{ } x \in B\}$$

Si $A = \{x \in E: p(x)\} \text{ } et \text{ } B = \{x \in F: q(x)\}$ alors $A \cup B = \{x \in E \cup F: p(x) \vee q(x)\}$

Autrement dit : $x \in A \cup B \overset{def}{\Longleftrightarrow} x \in A \text{ } ou \text{ } x \in B$

Si on a plusieurs ensembles $A_1, A_2, \dots, A_n$:

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \{x : x \in A_1 \text{ ou } x \in A_2 \text{ ou } \ldots x \in A_n$$

$$x \in A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \overset{def}{\Longleftrightarrow} x \in A_1 \text{ ou } x \in A_2 \text{ ou } \ldots x \in A_n$$

Exercice :

Montrer que pour tout ensemble A et B on a : $A \subset A \cup B$

Intersection de deux ou plusieurs ensembles

Soient A, B, et C trois ensembles définis par $A = \{1,2,3,4\}$; $B = \{3,4,5,6\}$; $C = \{a, 2, 5, c\}$

On peut mettre les éléments communs aux ensembles A et B dans un même ensemble, c'est-à-dire mettre les éléments qui sont dans A et dans B en même temps dans un même ensemble, ces éléments sont 3 et 4 et l'ensemble qui va les contenir s'appellera l'**intersection** des ensembles A et B, et il sera noté $A \cap B$ et on le lit « A inter B ». Dans notre exemple on a :

$$A \cap B = \{3,4\}$$

On a aussi :

$$A \cap C = \{2\}; \ \ B \cap C = \{5\}; \ \ A \cap B \cap C = \emptyset$$

Exemple : $A = \{x \in Z : x \leq 2\}$, $B = \{x \in Z : x \geq -2\}$, $A \cap B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

D'une façon générale on a :

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ et } x \in B\}$$

Si $A = \{x \in E : p(x)\} \text{ et } B = \{x \in F : q(x)\}$ alors $A \cap B = \{x \in E \cap F : p(x) \wedge q(x)\}$

Autrement dit : $x \in A \cap B \overset{def}{\Longleftrightarrow} x \in A \text{ et } x \in B$

Si $A = \{x \in E : p(x)\} \text{ et } B = \{x \in F : q(x)\}$ alors $A \cap B = \{x \in E \cap F : p(x) \wedge q(x)\}$

Et si on a plusieurs ensembles $A_1, A_2, \ldots, A_n$:

$$A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = \{x : x \in A_1 \text{ et } x \in A_2 \text{ et } \ldots \text{ et } x \in A_n\}$$

$$x \in A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n \overset{def}{\Longleftrightarrow} x \in A_1 \text{ et } x \in A_2 \text{ et } \ldots \text{ et } x \in A_n$$

Exercice :

Montrer que pour tout ensemble A et B on a : $A \cap B \subset A$

Remarque : Si les ensembles sont définit en compréhension, par exemple

$A = \{x \in E : p(x)\}$; $B = \{x \in F : q(x)\}$ $\quad A \cap B = \{x \in E \cap F : p(x) \text{ et } q(x)\}$

Théorème :

Pour tout ensemble X, Y, Z on a :

1. $X \cap X = X$; $X \cup X = X$
2. $X \cap Y = Y \cap X$; $\ X \cup Y = Y \cup X$
3. $X \cap (Y \cap Z) = (X \cap Y) \cap Z$; $\ X \cup (Y \cup Z) = (X \cup Y) \cup Z$
4. $X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$; $\ X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$

Complémentaire d'une partie d'un ensemble par rapport à cet ensemble :

Soit $E = \{1,2,3,4,5\}$, $H = \{2,3,6,7\} \text{ et } A = \{2,3\}$

A est bien inclus dans E

Les éléments qui sont dans E et qui ne sont pas dans A s'appelle complémentaire de A dans E, et on le note $\bar{A}^E$, et on a $\bar{A}^E = \{1,4,5\}$.

On peut considérer de la même façon le complémentaire de A dans H vue que A est une partie de H, et on a $\bar{A}^H = \{6,7\}$.
Remarquons que $A \cup \bar{A}^E = E$ et que $A \cup \bar{A}^H = H$ et que $A \cap \bar{A}^E = \emptyset = A \cap \bar{A}^H$
d'une manière générale, on si A est une partie d'un ensemble , on appelle complémentaire de A dans E l'ensemble de tous les éléments de E qui n'appartiennent pas à A , on note cet ensemble $\bar{A}^E$.
Symboliquement on a : $\bar{A}^E = \{x \in E : x \notin A\}$
Autrement dit : $x \in \bar{A}^E \Leftrightarrow x \notin A$
Si A est un ensemble définit par une information $p(x)$ sur ses éléments, $A = \{x \in E : p(x)\}$, alors $\bar{A}^E = \{x \in E : \overline{p(x)}\}$ ou $\overline{p(x)}$ est la négation de $p(x)$.

Lois de Morgan :
Soit E un ensemble et A et B deux parties de E, on a :
1. $\overline{A \cup B}^E = \bar{A}^E \cap \bar{B}^E$
2. $\overline{A \cap B}^E = \bar{A}^E \cap \bar{B}^E$

Preuve : on va utiliser une table de vérité pour prouver le 1.

$x \in A$	$x \in B$	$x \in \bar{A}^E$	$x \in \bar{B}^E$	$x \in A \cup B$	$x \in \overline{A \cup B}^E$	$x \in \bar{A}^E \cap \bar{B}^E$
1	1	0	0	1	0	0
1	0	0	1	1	0	0
0	1	1	0	1	0	0
0	0	1	1	0	1	1

On voit que voit dans les deux dernières colonnes, les lignes de mêmes niveaux prennent les mêmes valeurs. Ce qui se traduit par $x \in \overline{A \cup B}^E \Leftrightarrow x \in \bar{A}^E \cap \bar{B}^E$, ce qui veut dire que $\overline{A \cup B}^E = \bar{A}^E \cap \bar{B}^E$.
Faire la même chose pour 2.
Exercice :
Vérifier les deux lois de Morgan dans le cas ou $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{3,4,5,6\}, et\ E = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$
Solution :
1. $\bar{A}^E = \{5,6,7,8\}$, $\bar{B}^E = \{1,2,7,8\}$, $\bar{A}^E \cap \bar{B}^E = \{7,8\}$, $A \cup B = \{1,2,3,4,5,6\}$
   $\overline{A \cup B}^E = \{7,8\}$
   On voit bien que $\overline{A \cup B}^E = \bar{A}^E \cap \bar{B}^E$
2. $A \cap B = \{3,4\}$, $\overline{A \cap B}^E = \{1,2,5,6,7,8\}$, $\bar{A}^E \cup \bar{B}^E = \{1,2,5,6,7,8\}$
   Et on voit bien ici aussi que $\overline{A \cap B}^E = \bar{A}^E \cup \bar{B}^E$.

Théorème :
Montrer que pour tout ensembles A, B, C on a :
1. $A = A \cap A = A \cup A$
2. $A \cap B = B \cap A$ et $A \cup B = B \cup A$
3. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ et $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
4. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ et $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Démonstration
1. Si $x \in A$ est vraie alors la conjonction ($x \in A$ et $x \in A$) et la disjonction ($x \in A$ ou $x \in A$) sont aussi vraies

Les autres propriétés sont laissées en exeercice.

Différence et difference symétrique de deux ensembles :

Exemple :

$A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{3,4,5,6\}$

On peut construire l'ensemble des éléments qui sont dans A et qui ne sont pas dans B, on note cet ensemble $A - B$, et dans notre exemple $A - B = \{1,2\}$, de même $B - A = \{5,6\}$

On peut aussi construire l'ensemble qui va contenir les éléments qui sont dans B et qui ne sont pas dans A ainsi que les éléments qui sont dans A et qui ne sont pas dans B, autrement dit on construit l'ensemble qui va contenir $A - B$ et $B - A$, on va le noter $A \vartriangle B$, lire A delta B, et dans notre exemple $A \vartriangle B = \{1,2,5,6\}$.

D'une manière générale on a :

$$E - F = \{x : x \in E \; et \; x \notin F] \quad \text{et} \quad E \vartriangle F = (E - F) \cup (F - E)$$

Si $E = \{x : p(x)\}$ et $F = \{x : q(x)\}$ alors $E - F = \{x : p(x) \wedge \overline{q(x)}\}$.

Exercice :

Montrer en utilisant les définitions et les lois de Morgan, puis en utilisant une table de vérité que :

1. $A \vartriangle B = (A \cup B) - (A \cap B)$
2. $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$

Théorème :

Pour tous sous-ensembles X, Y d'un ensemble E on a :

1. $X - X = \emptyset$, $X - \emptyset = X$
2. $\overline{\overline{X}^E}^E = X$
3. $X \cap \overline{X}^E = \emptyset$
4. $X - Y = X \cap \overline{Y}$
5. $X \subset Y \Leftrightarrow \overline{Y}^E \subset \overline{X}^E$
6. $(X \cap Y = \emptyset) \Leftrightarrow (X \subset \overline{Y}^E) \Leftrightarrow (Y \subset \overline{X}^E)$
7. $(X \cup Y = E) \Leftrightarrow (\overline{Y}^E \subset X) \Leftrightarrow (\overline{X}^E \subset Y)$

Preuve :

1. $x \in X - X \Leftrightarrow (x \in X \text{ et } x \notin X) \Leftrightarrow X - X = \emptyset$
2. $\left(x \in \overline{\overline{X}^E}^E\right) \Leftrightarrow (x \notin \overline{X}^E) \Leftrightarrow x \in X$
3. $x \in (X \cap \overline{X}^E) \Leftrightarrow (x \in X \text{ et } x \notin X) \Leftrightarrow (X \cap \overline{X}^E = \emptyset)$
4. $x \in X - Y \Leftrightarrow (x \in X \text{ et } x \notin Y) \Leftrightarrow (x \in X \text{ et } x \in \overline{Y}) \Leftrightarrow x \in X \cap \overline{Y}$.
5. $(X \subset Y) \Leftrightarrow (\forall x : x \in X \Rightarrow x \in Y) \Leftrightarrow (\forall x : x \notin Y \Rightarrow x \notin X) \Leftrightarrow (\overline{Y}^E \subset \overline{X}^E)$.
6. $(x \in X) \underbrace{\overset{hypothèse}{\Longrightarrow}}_{X \cap Y = \emptyset} (x \in X \text{ et } X \cap Y = \emptyset) \Rightarrow (x \notin Y) \Rightarrow (x \in \overline{Y}^E)$

   $(X \subset \overline{Y}^E) \overset{4.}{\Leftrightarrow} (\overline{\overline{Y}^E}^E \subset \overline{X}^E) \overset{2.}{\Leftrightarrow} (Y \subset \overline{X}^E)$

   <u>Montrons que $(X \subset \overline{Y}^E) \Rightarrow (X \cap Y = \emptyset)$</u>

   $(x \in X \text{ et } X \subset \overline{Y}^E) \Leftrightarrow (x \in X \text{ et } x \in \overline{Y}^E) \Leftrightarrow (x \in X \text{ et } x \notin Y) \Rightarrow (X \cap Y = \emptyset)$

   $(x \in Y \text{ et } X \subset \overline{Y}^E) \overset{4.}{\Leftrightarrow} (x \in Y \text{ et } Y \subset \overline{X}^E) \Rightarrow (x \in \overline{X}^E) \Rightarrow (x \notin X) \Rightarrow (X \cap Y = \emptyset)$
7. On a : $(\overline{Y}^E \subset X) \overset{4.}{\Leftrightarrow} (\overline{X}^E \subset \overline{\overline{Y}^E}^E) \overset{2.}{\Leftrightarrow} (\overline{X}^E \subset Y)$

   <u>Montrons que $X \cup Y = E$ sachant que $\overline{Y}^E \subset X$ ou $\overline{X}^E \subset Y$</u>

   $(X \subset E \text{ et } Y \subset E) \Rightarrow X \cup Y \subset E$

soit $x \in E$, on faisant raisonnement par disjonction des cas on a :

si $x \in X$ alors $x \in X \cup Y$

si $x \notin X$ alors $x \in \bar{X}^E$ or $\bar{X}^E \subset Y$ donc $x \in Y$ donc $x \in X \cup Y$

si $x \in Y$ alors $x \in X \cup Y$

si $x \notin Y$ alors $x \in \bar{Y}^E$ or $\bar{Y}^E \subset X$ donc $x \in X$ donc $x \in X \cup Y$

donc $E \subset X \cup Y$

<u>Montrons que $\bar{Y}^E \subset X$ sachant que $X \cup Y = E$</u>

Soit $x \in \bar{Y}^E$, $x \in \bar{Y}^E \Leftrightarrow x \notin Y$ et si on suppose par l'absurde que $x \notin X$ alors $x \notin X \cup Y$ or $X \cup Y = E$ donc $x \notin E$ ce qui est faux, donc nécessairement $x \in X$.