License 2 : Génie Mécanique **Série 05**

Exercice 01 :

Déterminer les coordonnées du centre de masse G du système des points matériels décrit par le tableau ci-contre.

Points	Coordonnées cartésiennes (cm)			Masses (kg)
	x	y	z	
P_1	2	2	5	3
P_2	-1	1	0	4
P_3	-1	-1	-10	5
P_4	1	-1	0	1

Solution 01 :

1 On choisit O de coordonnées $(0, 0, 0)$. Soit $G(x_G, y_G, z_G)$. Les relations donnant les coordonnées du centre de masse fournissent :

$$x_G = \frac{2\times 3 + (-1)\times 4 + (-1)\times 5 + 1\times 1}{13} = -\frac{2}{13}\ \text{cm}$$

$$y_G = \frac{2\times 3 + 1\times 4 + (-1)\times 5 + (-1)\times 1}{13} = \frac{4}{13}\ \text{cm}$$

$$z_G = \frac{5\times 3 + 0\times 4 + (-10)\times 5 + 0\times 1}{13} = -\frac{35}{13}\ \text{cm}$$

Exercice 02:

Déterminer, par intégration et par le théorème de Guldin, les coordonnées des centres d'inertie des corps surfaciques homogènes suivants :

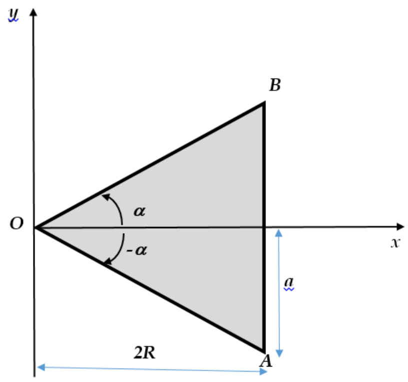


Figure 01

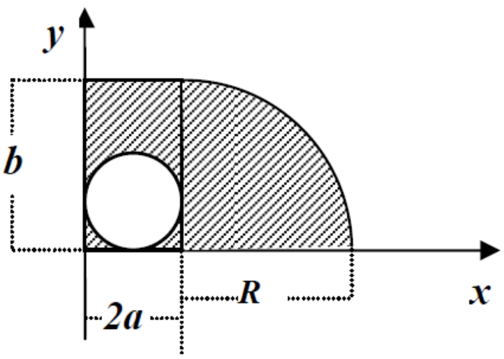


Figure 02

Solution:

figure 01 :

Centre d'inertie par intégration :

Par raison de symétrie, le centre d'inertie est sur l'axe ***(Ox)*** , alors $y_G = 0$

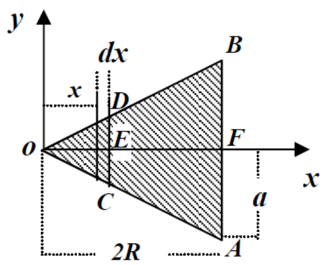
On calcule d'abord le centre d'inertie du triangle puis celui de la portion de disque, ensuite on déduit le centre d'inertie du solide.

a) Centre d'inertie du triangle :

masse du triangle : $m_1 = \sigma S_1 = \sigma \dfrac{2a.2R}{2} = 2aR$;

on choisit un élément de surface :

$ds_1 = CD.dx = L_1.dx$; avec : $0 \le x \le 2R$.



Les triangles ***OED*** et ***OFB*** sont senblables ;

Nous pouvons écrire : $\dfrac{OE}{OF} = \dfrac{ED}{FB} \Leftrightarrow \dfrac{x}{2R} = \dfrac{L_1/2}{a} \Rightarrow L_1 = \dfrac{a}{R}x$

$$x_{1G} = \frac{1}{m_1}\int_s x\,dm_1 = \frac{1}{m_1}\int_s x\sigma ds_1 = \frac{1}{\sigma 2aR}\int_0^{2R} x\sigma\frac{a}{R}x\,dx = \frac{1}{2R^2}\int_0^{2R} x^2 dx = \frac{4R}{3}$$

b) Centre d'inertie de la portion de disque :

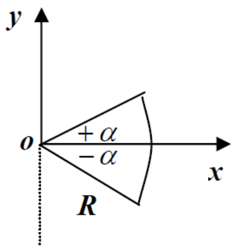
Masse de la portion de disque :

$$m_2 = \int_s \sigma ds_2 = \sigma\int_0^R r\,dr\int_{-\alpha}^{+\alpha} d\theta = \sigma.\alpha R^2$$

on choisit un élément de surfe $ds_2 = rd\theta.dr$

de coordonnées : $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$

avec : $-\alpha \le \theta \le +\alpha$ et $0 \le r \le R$



On déduit alors : $x_{2G} = \frac{1}{m_2}\int_{s_2} x\,dm_2 = \frac{1}{m_2}\int_s x\sigma ds_2 = \frac{1}{\sigma\alpha R^2}\int_0^R x\sigma r\,dr.d\theta$

$$x_{2G} = \frac{1}{\alpha R^2}\int_0^R r^2 dr\int_{-\alpha 0}^{+\alpha}\cos\theta d\theta = \frac{1}{\alpha R^2}.\frac{R^3}{3}.2\sin\alpha = \frac{2R}{3}.\frac{\sin\alpha}{\alpha} \quad ; \quad x_{2G} = \frac{2R}{3}.\frac{\sin\alpha}{\alpha}$$

Centre d'inertie du solide :

$$x_G = \frac{x_{1G}.m_1 - x_{2G}.m_2}{m_1 - m_2} = \frac{x_{1G}.s_1 - x_{2G}.s_2}{s_1 - s_2}$$

$$x_G = \frac{\frac{4R}{3}.2aR - \frac{2R}{3}\frac{\sin\alpha}{\alpha}.\alpha R^2}{2aR - \alpha R^2} = \frac{2R}{3}.\frac{4a - R\sin\alpha}{2a - \alpha R}$$

Centre d'inertie du solide par le théorème de Guldin :

La rotation se fait autour de l'axe Oy

$$x_G = \frac{V_{tot}/y}{2\pi.S_{tot}} = \frac{(2aR).2\pi.\frac{4R}{3} - (\alpha R^2).2\pi.\frac{2R}{3}\frac{\sin\alpha}{\alpha}}{2\pi.(2aR - \alpha R^2)} = \frac{2R}{3}.\frac{4a - R\sin\alpha}{2a - \alpha R}$$

figure 02 :

Centre d'inertie par intégration :

On calcul le centre d'inertie des trois solides ***(rectangle, quart de disque, disque)*** séparément puis on déduit le centre d'inertie du solide entier.

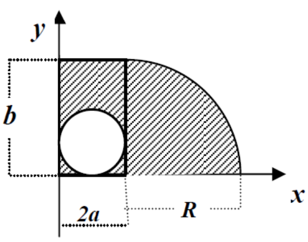
a) Centre d'inertie du rectangle :

Masse du rectangle : $dm_1 = \sigma ds_1 = \sigma dxdy$

Avec $0 \le x \le 2a$; $0 \le y \le b$; $m_1 = \sigma 2a.b$

$$x_{1G} = \frac{1}{m_1}\int_{S_1} x\,dm_1 = \frac{1}{m_1}\int_{S_1} x\sigma ds_1 = \frac{\sigma}{\sigma 2ab}\int_0^{2a} x\,dx\int_0^b dy = a$$

$$y_{1G} = \frac{1}{m_1}\int_{S_1} y\,dm_1 = \frac{1}{m_1}\int_{S_1} y\sigma ds_1 = \frac{\sigma}{\sigma 2ab}\int_0^{2a} dx\int_0^b y\,dy = \frac{b}{2}$$



b) Centre d'inertie du quart de disque :

On fait une translation de repère de **2a** suivant l'axe (Ox) puis on calcule les coordonnés du centre de masse du quart de disque. On choisit un élément de surface :

$dm_2 = \sigma ds_2 = \sigma\, r d\theta . dr$ avec : $0 \le r \le R$; $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$; d'où $m_2 = \sigma \frac{\pi R^2}{4}$

Les coordonnées du centre de masse seront données par :

$$x_{2G} = 2a + \frac{1}{m_2}\int_{S_1} x dm_2 = 2a + \frac{1}{m_2}\int_{S_1} x\sigma ds_2 = 2a + \frac{\sigma}{\sigma \frac{\pi R^2}{4}}\int_0^{2r} r^2 dr \int_0^{\pi/2} \cos\theta d\theta = 2a + \frac{4R}{3\pi}$$

$$y_{2G} = \frac{1}{m_2}\int_{S_1} y dm_2 = \frac{1}{m_2}\int_{S_1} y\sigma ds_2 = \frac{\sigma}{\sigma \frac{\pi R^2}{4}}\int_0^{2r} r^2 dr \int_0^{\pi/2} \sin\theta d\theta = \frac{4R}{3\pi}$$

c) Centre d'inertie du disque :

Masse du disque : $m_3 = \sigma . \pi a^2$

Les coordonnées du centre de masse sont : $x_{3G} = a$ et $y_{3G} = a$

Le solide est homogène, alors le centre d'inertie des masses est le même que le centre d'inertie des surfaces. Les coordonnées du centre d'inertie du solide qui est un système composé seront données par les relations suivantes :

<u>*Sur l'axe des **x** :*</u> $x_G = \frac{x_{1G}.m_1 + x_{2G}.m_2 - x_{3G}.m_3}{m_1 + m_2 - m_2 +} = \frac{x_{1G}.s_1 + x_{2G}.s_2 - x_{3G}.s_3}{s_1 + s_2 - s_2 +}$

d'où : $$x_G = \frac{\frac{a}{2}.ab + \left(a + \frac{4R}{3\pi}\right).\frac{\pi R^2}{4} - a.\pi a^2}{ab + \frac{\pi R^2}{4} - \pi a^2} = \frac{\frac{a^2 b}{2} + \left(a + \frac{4R}{3\pi}\right).\frac{\pi R^2}{4} - \pi a^3}{ab + \frac{\pi R^2}{4} - \pi a^2}$$

<u>*de même sur l'axe des **y***</u>

$$y_G = \frac{y_{1G}.m_1 + y_{2G}.m_2 - y_{3G}.m_3}{m_1 + m_2 - m_2 +} = \frac{y_{1G}.s_1 + y_{2G}.s_2 - y_{3G}.s_3}{s_1 + s_2 - s_2 +}$$

d'où :

$$y_G = \frac{\frac{b}{2}.ab + \frac{4R}{3\pi}.\frac{\pi R^2}{4} - a.\pi a^2}{ab + \frac{\pi R^2}{4} - \pi a^2} = \frac{\frac{ab^2}{2} + \frac{R^3}{3} - \pi a^3}{ab + \frac{\pi R^2}{4} - \pi a^2}$$

Les coordonnées du centre d'inertie du solide composé sont :

$$G\left(\frac{\frac{a^2b}{2}+\left(a+\frac{4R}{3\pi}\right).\frac{\pi R^2}{4}-\pi a^3}{ab+\frac{\pi R^2}{4}-\pi a^2}\ ,\ \frac{\frac{ab^2}{2}+\frac{R^3}{3}-\pi a^3}{ab+\frac{\pi R^2}{4}-\pi a^2}\right)$$

d) Par le théorème de Guldin, en faisant tourner le solide autour des axes, nous déduisons le centre d'inertie du solide composé.

La rotation par rapport à l'axe **y** *donne la coordonnée* x_G *:*

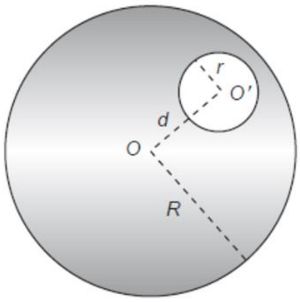
$$x_G=\frac{V_{tot}/y}{2\pi.S_{tot}}\ ;\quad x_G=\frac{\pi a^2b+2\pi\left(a+\frac{4R}{3\pi}\right).\frac{\pi R^2}{4}-\pi a^2.2\pi a}{2\pi\left(ab+\frac{\pi R^2}{4}-\pi a^2\right)}=\frac{\frac{a^2b}{2}+\left(a+\frac{4R}{3\pi}\right).\frac{\pi R^2}{4}-\pi a^3}{ab+\frac{\pi R^2}{4}-\pi a^2}$$

La rotation par rapport à l'axe **x** *donne la coordonnée* y_G *:*

$$y_G=\frac{V_{tot}/x}{2\pi.S_{tot}}\ ;\quad y_G=\frac{\pi b^2.a+\frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)-\pi a^2.2\pi a}{2\pi\left(ab+\frac{\pi R^2}{4}-\pi a^2\right)}=\frac{\frac{ab^2}{2}+\frac{R^3}{3}-\pi a^3}{ab+\frac{\pi R^2}{4}-\pi a^2}$$

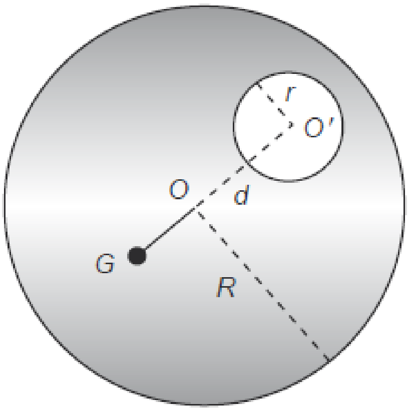
Exercice 03:

Déterminer le centre de masse d'une boule homogène de centre O, de rayon R, dans Laquelle on a formé une cavité vide de centre O', de rayon r. On posera OO'=d.



Solution

5 Il s'agit d'utiliser ici la propriété d'associativité des centres de masse en utilisant une masse **négative**. En effet, en superposant deux systèmes de masses volumiques **opposées**, on engendre dans leur intersection une masse nulle, c'est-à-dire une cavité vide.
Soit M la masse de la grande boule, dont le centre de masse est O. Il lui correspond une masse volumique $\rho=\frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}$. Considérons une boule de rayon r centrée en O' (son centre de masse) et de masse volumique $-\rho$. Sa masse m est alors :

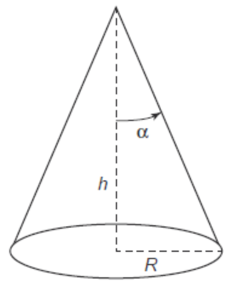


$m = -\rho \frac{4}{3}\pi r^3 = -\frac{r^3}{R^3}M$. Par associativité du centre de masse on peut écrire, en prenant le point O comme origine :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{M\overrightarrow{OO} + m\overrightarrow{OO'}}{M+m} = \frac{-\frac{r^3}{R^3}}{1-\frac{r^3}{R^3}}\overrightarrow{OO'}$$

soit $$\boxed{\overrightarrow{OG} = -\frac{r^3}{R^3 - r^3}\overrightarrow{OO'}}$$

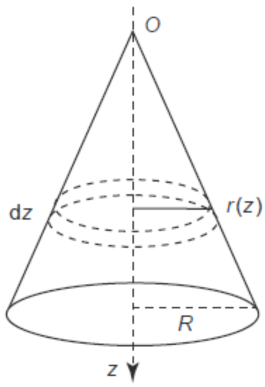
Exercice 04:



Déterminer la position du centre de masse d'un cône de révolution homogène, de masse M, de hauteur h, dont la base est un disque de rayon R.

Solution

6 On utilise ici une méthode intégrale. Il faut découper le cône en cylindres d'épaisseur infinitésimale, de rayon et de masse variables.



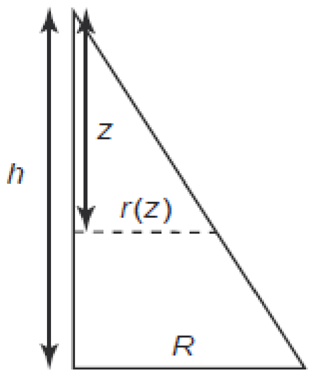
Paramétrons le cône, en vue du calcul à faire. Prenons l'origine O au sommet du cône et notons Oz son axe de révolution. Chaque tranche du cône à la cote z a un rayon $r(z)$, une épaisseur dz et une masse dm.

Le centre de masse de cette tranche est situé au centre du disque, soit à la cote z.

La cote z_G du centre de masse du cône est alors donnée par : $z_G = \frac{1}{M}\int_0^h z\,dm$.

Pour calculer cette intégrale, il faut exprimer dm en fonction de dz.

Soit ρ la masse volumique du cône : ρ est donnée par $\rho = \frac{M}{V}$.



Le volume du cône est $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$ d'où $\rho = \frac{3M}{\pi R^2 h}$.

Le volume d'une tranche est $dV = \pi r^2(z)dz$ d'où :

$$dm = \rho\pi r^2(z)dz = \frac{3M}{R^2 h} r^2(z)dz$$

Il faut encore exprimer le rayon de la tranche en fonction de z. D'après le théorème de Thalès :

$$\frac{r(z)}{z} = \frac{R}{h}$$

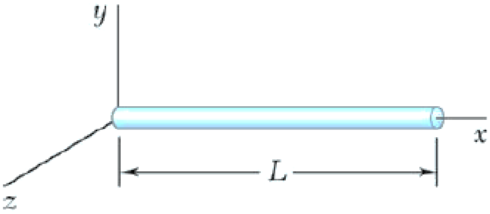
Il vient alors :

$$\begin{aligned} z_G &= \frac{1}{M}\int_0^h z\,dm \\ &= \frac{1}{M}\int_0^h z\rho\pi r^2(z)dz \qquad = \frac{3}{h^3}\int_0^h z^3 dz \\ &= \frac{1}{M}\int_0^h z\frac{3M}{R^2 h}\left(\frac{R}{h}z\right)^2 dz \qquad = \frac{3}{4}h \end{aligned}$$

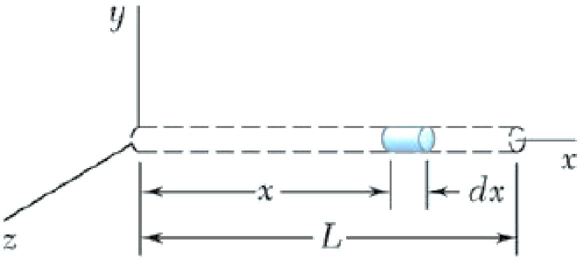
On aboutit ainsi à $\boxed{z_G = \frac{3h}{4}}$.

Exercice 05 :

Calculer le moment d'inertie d'une tige mince de longueur L et de masse m, par rapport à un axe perpendiculaire à la tige et passant par une des extrémités de la tige.



Solution:



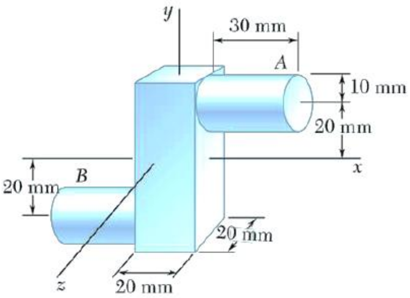
Si dm représente la masse de l'élément différentiel illustré, on a

$$dm = \frac{m}{L}\,dx$$

$$I_y = \int x^2\,dm = \int_0^L x^2 \frac{m}{L}\,dx = \frac{m}{L}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^L$$

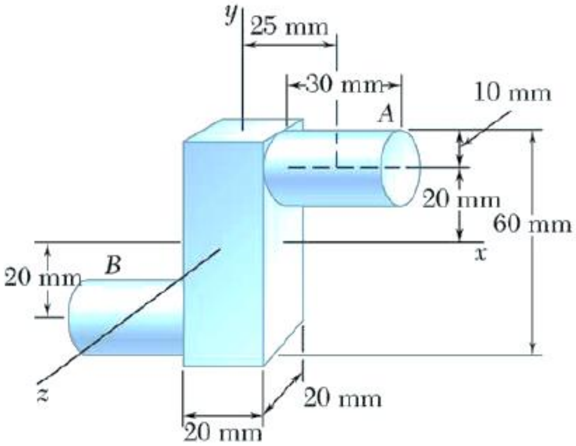
$$I_y = \tfrac{1}{3} mL^2$$

Exercice 06 :



La pièce en acier forgé illustrée ci-contre est composée d'un prisme rectangulaire de 60 mm × 20 mm × 20 mm et de deux cylindres de 20 mm de diamètre et de 30 mm de longueur. Déterminez ses moments d'inertie par rapport aux axes de référence, sachant que la densité de l'acier est $\rho_a = 7850\ \text{kg/m}^3$.

Solution :



Calcul des masses
du prisme

$$V = (0{,}02\ \text{m})(0{,}02\ \text{m})(0{,}06\ \text{m}) = 24 \times 10^{-6}\ \text{m}^3$$

$$m = \frac{7850\ \text{kg}}{\text{m}^3} \times 24 \times 10^{-6}\ \text{m}^3 = 0{,}188\ \text{kg}$$

de chaque cylindre

$$V = \pi(0{,}01\ \text{m})^2(0{,}03\ \text{m}) = 9{,}42 \times 10^{-6}\ \text{m}^3$$

$$m = \frac{7850\ \text{kg}}{\text{m}^3} \times 9{,}42 \times 10^{-6}\ \text{m}^3 = 0{,}074\ \text{kg}$$

Moments d'inertie : On calcule les moments d'inertie de chaque volume constituant à partir de la figure, et on utilise le théorème des axes parallèles (Huygens) au besoin. Il est à souligner que toutes les longueurs devraient être exprimées en mètres.

Prisme

$$I_x = I_z = \tfrac{1}{12}(0{,}188 \text{ kg})[(0{,}06 \text{ m})^2 + (0{,}02 \text{ m})^2] = 62{,}67 \times 10^{-6} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$
$$I_y = \tfrac{1}{12}(0{,}188 \text{ kg})[(0{,}02 \text{ m})^2 + (0{,}02 \text{ m})^2] = 12{,}53 \times 10^{-6} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Chaque cylindre

$$I_x = \tfrac{1}{2} m a^2 + m\bar{y}^2$$
$$= \tfrac{1}{2}(0{,}074 \text{ kg})(0{,}01 \text{ m})^2 + (0{,}074 \text{ kg})(0{,}02 \text{ m})^2$$
$$= 33{,}3 \times 10^{-6} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$
$$I_y = \tfrac{1}{12} m(3a^2 + L^2) + m\bar{x}^2$$
$$= \tfrac{1}{12}(0{,}074 \text{ kg})[3(0{,}01 \text{ m})^2 + (0{,}03 \text{ m})^2] + (0{,}074 \text{ kg})(0{,}025 \text{ m})^2$$
$$= 53{,}65 \times 10^{-6} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$
$$I_z = \tfrac{1}{12} m(3\text{a}^2 + L^2) + m(\bar{x}^2 + \bar{y}^2)$$
$$= \tfrac{1}{12}(0{,}074 \text{ kg})[3(0{,}01 \text{ m})^2 + (0{,}03 \text{ m})^2]$$
$$+ (0{,}074 \text{ kg})[(0{,}025 \text{ m})^2 + (0{,}02 \text{ m})^2] = 83{,}25 \times 10^{-6} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

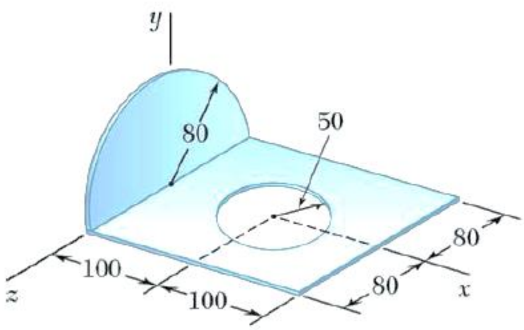
Ensemble de la pièce forgée

En additionnant les valeurs obtenues, on obtient

$$I_x = 62{,}67 \times 10^{-6} + 2(33{,}3 \times 10^{-6}) \qquad I_x = 129{,}3 \times 10^{-6} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$
$$I_y = 12{,}53 \times 10^{-6} + 2(53{,}65 \times 10^{-6}) \qquad I_y = 119{,}8 \times 10^{-6} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$
$$I_z = 62{,}67 \times 10^{-6} + 2(83{,}25 \times 10^{-6}) \qquad I_z = 229{,}2 \times 10^{-6} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Exercice 07

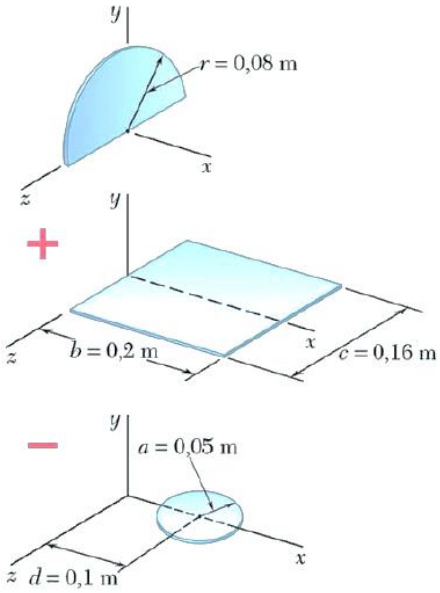
Une mince feuille d'acier de 4 mm d'épaisseur est estampée pour former l'élément de machine illustré. La densité de l'acier étant ρa = 7850 kg/m3, déterminez les moments d'inertie de la pièce par rapport aux axes de coordonnées.



Dimensions en mm

Solution:

L'élément de machine peut être divisé en trois composants distincts : un demi-cercle, un rectangle et un cercle retranché du rectangle.



Calcul des masses

Demi-cercle

$$V_1 = \tfrac{1}{2}\pi r^2 t = \tfrac{1}{2}\pi(0{,}08\text{ m})^2(0{,}004\text{ m}) = 40{,}21\times10^{-6}\text{ m}^3$$
$$m_1 = \rho V_1 = (7{,}85\times10^3\text{ kg/m}^3)(40{,}21\times10^{-6}\text{ m}^3) = 0{,}3156\text{ kg}$$

Rectangle

$$V_2 = (0{,}200\text{ m})(0{,}160\text{ m})(0{,}004\text{ m}) = 128\times10^{-6}\text{ m}^3$$
$$m_2 = \rho V_2 = (7{,}85\times10^3\text{ kg/m}^3)(128\times10^{-6}\text{ m}^3) = 1{,}005\text{ kg}$$

Cercle

$$V_3 = \pi a^2 t = \pi(0{,}050\text{ m})^2(0{,}004\text{ m}) = 31{,}42\times10^{-6}\text{ m}^3$$
$$m_3 = \rho V_3 = (7{,}85\times10^3\text{ kg/m}^3)(31{,}42\times10^{-6}\text{ m}^3) = 0{,}2466\text{ kg}$$

Moments d'inertie des masses On calcule les moments d'inertie de chaque composant en appliquant la méthode présentée à la section 9.5.3.

Demi-cercle À partir de la figure 9.28, on détermine que, pour une plaque circulaire de masse m et de rayon r, les moments d'inertie sont

$$I_x = \tfrac{1}{2}mr^2 \qquad I_y = I_z = \tfrac{1}{4}mr^2$$

En raison de la symétrie, la plaque en forme de demi-cercle aura des moments d'inertie de

$$I_x = \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}mr^2) \qquad I_y = I_z = \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{4}mr^2)$$

Or, la masse du demi-cercle étant de $m_1 = \frac{1}{2}m$, on a

$$I_x = \tfrac{1}{2}m_1r^2 = \tfrac{1}{2}(0{,}3156\text{ kg})(0{,}08\text{ m})^2 = 1{,}010\times10^{-3}\text{ kg}\cdot\text{m}^2$$
$$I_y = I_z = \tfrac{1}{4}(\tfrac{1}{2}mr^2) = \tfrac{1}{4}m_1r^2 = \tfrac{1}{4}(0{,}3156\text{ kg})(0{,}08\text{ m})^2 = 0{,}505\times10^{-3}\text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

Rectangle

$$I_x = \tfrac{1}{12}m_2c^2 = \tfrac{1}{12}(1{,}005\text{ kg})(0{,}16\text{ m})^2 = 2{,}144\times10^{-3}\text{ kg}\cdot\text{m}^2$$
$$I_z = \tfrac{1}{3}m_2b^2 = \tfrac{1}{3}(1{,}005\text{ kg})(0{,}2\text{ m})^2 = 13{,}400\times10^{-3}\text{ kg}\cdot\text{m}^2$$
$$I_y = I_x + I_z = (2{,}144 + 13{,}400)(10^{-3}) = 15{,}544\times10^{-3}\text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

Cercle

$$I_x = \tfrac{1}{4}m_3a^2 = \tfrac{1}{4}(0{,}2466\text{ kg})(0{,}05\text{ m})^2 = 0{,}154\times10^{-3}\text{ kg}\cdot\text{m}^2$$
$$I_y = \tfrac{1}{2}m_3a^2 + m_3d^2$$
$$= \tfrac{1}{2}(0{,}2466\text{ kg})(0{,}05\text{ m})^2 + (0{,}2466\text{ kg})(0{,}1\text{ m})^2 = 2{,}774\times10^{-3}\text{ kg}\cdot\text{m}^2$$
$$I_z = \tfrac{1}{4}m_3a^2 + m_3d^2 = \tfrac{1}{4}(0{,}2466\text{ kg})(0{,}05\text{ m})^2 + (0{,}2466\text{ kg})(0{,}1\text{ m})^2$$
$$= 2{,}620\times10^{-3}\text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

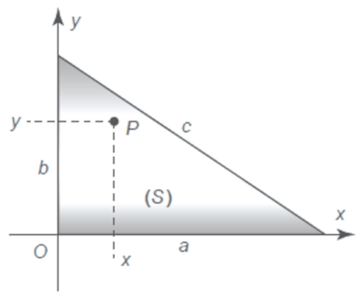
Ensemble de l'élément de machine

$$I_x = (1{,}010 + 2{,}144 - 0{,}154)(10^{-3})\text{ kg}\cdot\text{m}^2 \qquad I_x = 3{,}00\times10^{-3}\text{ kg}\cdot\text{m}^2 \blacktriangleleft$$
$$I_y = (0{,}505 + 15{,}544 - 2{,}774)(10^{-3})\text{ kg}\cdot\text{m}^2 \qquad I_y = 13{,}28\times10^{-3}\text{ kg}\cdot\text{m}^2 \blacktriangleleft$$
$$I_z = (0{,}505 + 13{,}400 - 2{,}620)(10^{-3})\text{ kg}\cdot\text{m}^2 \qquad I_z = 11{,}29\times10^{-3}\text{ kg}\cdot\text{m}^2 \blacktriangleleft$$

Exercice 08

Soit un triangle (S) de cotés (a,b,c) dont la masse surfacique est donnée par $\sigma(x,y) = \sigma_0\frac{y}{b}$

- *Calculer la masse M du triangle.*
- *Calculer les coordonnées du centre de masse*



Solution

La masse M est donnée par $M = \iint_{(S)} \sigma\, \mathrm{d}S = \iint_{(S)} \sigma(x, y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

La fonction σ ne dépend que de y, il est plus facile de commencer par une intégration sur la variable x :

$$M = \int_0^b \int_0^{x_{\max}} \sigma(x, y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$x_{\max}$ est donné par l'équation de l'hypoténuse : $\frac{x_{\max}}{a} + \frac{y}{b} = 1 \Rightarrow x_{\max} = a\left(1 - \frac{y}{b}\right)$, d'où :

$$M = \int_0^b \left(\int_0^{x_{\max} = a\left(1-\frac{y}{b}\right)} \sigma(y)\mathrm{d}\,x \right) \mathrm{d}y$$

Calculons l'intégrale :

$$\begin{aligned} M &= \int_0^b \left(a\sigma(y)\left(1 - \frac{y}{b}\right)\right)\mathrm{d}y \\ &= \frac{a\sigma_0}{b} \int_0^b \left(y - \frac{y^2}{b}\right)\mathrm{d}y \\ &= \frac{a\sigma_0}{b}\left[\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3b}\right]_0^b \\ &= \frac{a\sigma_0}{b}\left(\frac{b^2}{2} - \frac{b^2}{3}\right) \\ &= \frac{ab\sigma_0}{6} \end{aligned}$$

$$\boxed{M = \frac{1}{6}\, ab\sigma_0}$$

D'après le cours, l'abscisse x_G du centre de masse est donnée par $x_G = \frac{1}{M}\iint_{(S)} x\sigma\mathrm{d}S$ qui s'explicite comme dans le calcul de la masse :

$$\begin{aligned} x_G &= \frac{1}{M}\int_{y=0}^b \left(\int_{x=0}^{a\left(1-\frac{y}{b}\right)} x\sigma(x, y)\mathrm{d}x \right)\mathrm{d}y \\ &= \frac{\sigma_0}{Mb}\int_{y=0}^b y\left(\int_{x=0}^{a\left(1-\frac{y}{b}\right)} x\,\mathrm{d}x \right)\mathrm{d}y \\ &= \frac{\sigma_0}{Mb}\int_{y=0}^b y\left(\frac{a^2}{2}\left(1 - \frac{y}{b}\right)^2 \right)\mathrm{d}y \\ &= \frac{\sigma_0 a^2}{2Mb}\int_{y=0}^b \left(y + \frac{y^3}{b^2} - 2\frac{y^2}{b}\right)\mathrm{d}y \\ &= \frac{\sigma_0 a^2}{2Mb}\left(\frac{b^2}{2} + \frac{b^2}{4} - 2\frac{b^2}{3}\right) \\ &= \frac{\sigma_0 a^2 b}{24M} \end{aligned}$$

On utilise alors l'expression de la masse M pour trouver : $\boxed{x_G = \frac{a}{4}}$.

Le calcul de l'ordonnée y_G se fait de la même façon : $y_G = \frac{1}{M}\iint_{(S)} y\sigma\,\mathrm{d}S$.

$$y_G = \frac{1}{M}\int_{y=0}^{b}\left(\int_{x=0}^{a\left(1-\frac{y}{b}\right)} y\sigma(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$$

$$= \frac{\sigma_0}{Mb}\int_{y=0}^{b} y^2\left(\int_{x=0}^{a\left(1-\frac{y}{b}\right)} \mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$$

$$= \frac{\sigma_0}{Mb}\int_{y=0}^{b} y^2\left(a\left(1-\frac{y}{b}\right)\right)\mathrm{d}y$$

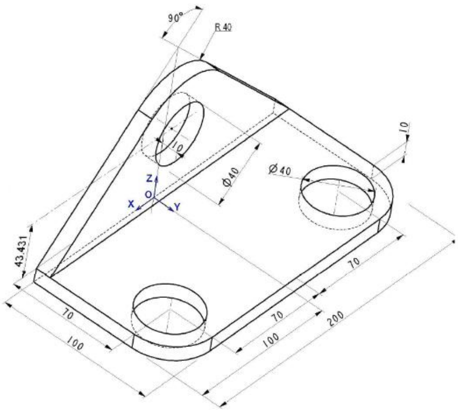
$$= \frac{\sigma_0 a}{Mb}\int_{y=0}^{b}\left(y^2-\frac{y^3}{b}\right)\mathrm{d}y$$

$$= \frac{\sigma_0 a}{Mb}\left(\frac{b^3}{3}-\frac{b^3}{4}\right)$$

$$= \frac{\sigma_0 a b^2}{12M}$$

d'où, après simplification par la masse M : $\boxed{y_G = \frac{b}{2}}$.

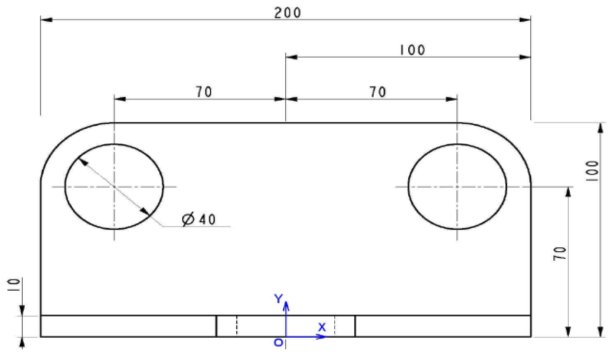
Exercice 09 :

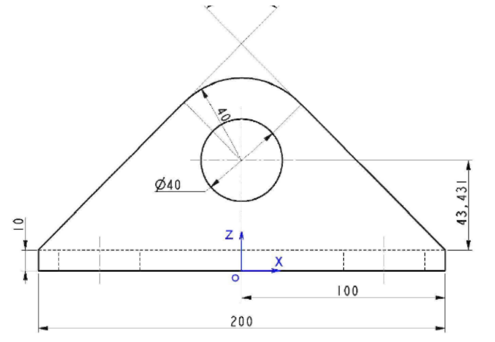


Une pièce de support fabriquée en bois de chêne de densité 700kg/m^3 et d'épaisseur uniforme de 10mm est donnée sur la figure. Elle comporte trois trous circulaires de diamètre 40mm : deux à sa base horizontale et un sur le côté vertical. Toutes les dimensions sont données sur la figure.

1) Calculer la masse de cette pièce en grammes.

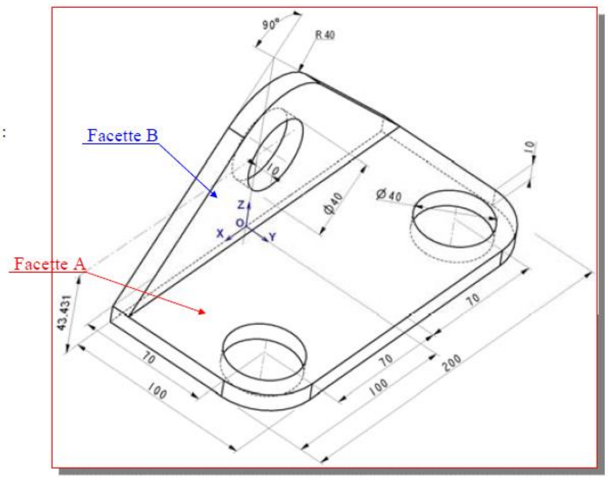
2) Déterminer la position du centre de masse par rapport à l'origine du repère global (O,X,Y,Z)





Solution

On définit deux facettes A et B

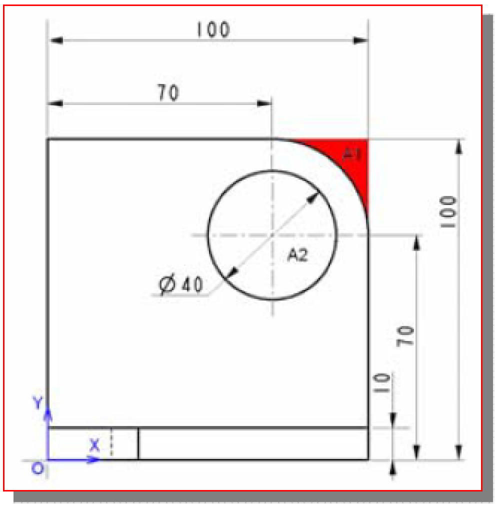


❑ Surface A_1:

$$A_1 = 30 \times 30 - \frac{\pi\ 30^2}{4} = 193.14 mm^2$$

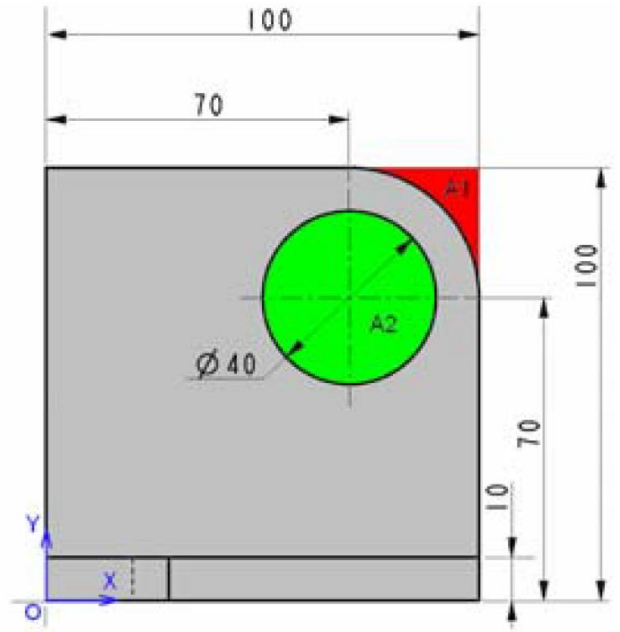
$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{(70+15)\times 900 - \left(70 + \frac{4\times 30}{3\pi}\right)\times \frac{\pi \times 30^2}{4}}{193.14} \\ &= \frac{85\times 900 - 82.73\times 706.86}{193.14} \\ &= 93.31 mm \end{aligned}$$

$$y_1 = x_1 = 93.31 mm \quad \text{(symétrie)}$$



Calcul de la facette A : facette symétrique / Y:

$$A = 2(100\times 100 - A_1 - A_2)$$



❑ Surface A_2:

$$A_2 = \frac{\pi\ 40^2}{4} = 1256.64 mm^2$$

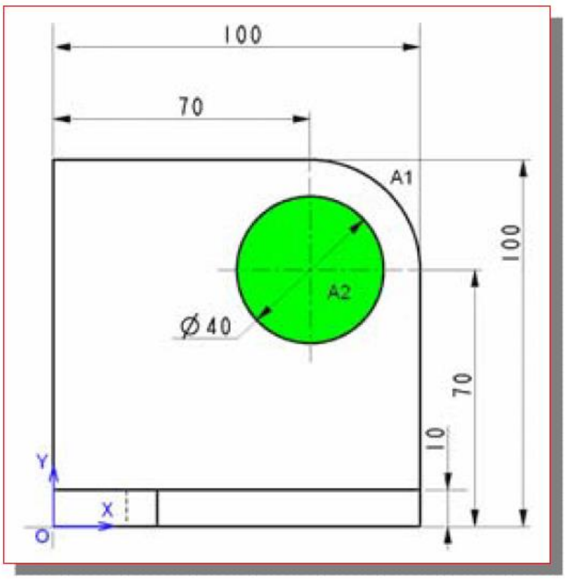
$$x_2 = 70 mm$$

$$y_2 = 70 mm$$

❑ Surface de facette:

$$\begin{aligned} A &= 2(100\times 100 - A_1 - A_2) \\ &= 2(100\times 100 - 193.14 - 1256.64) \\ &= 17100.44 mm^2 \end{aligned}$$

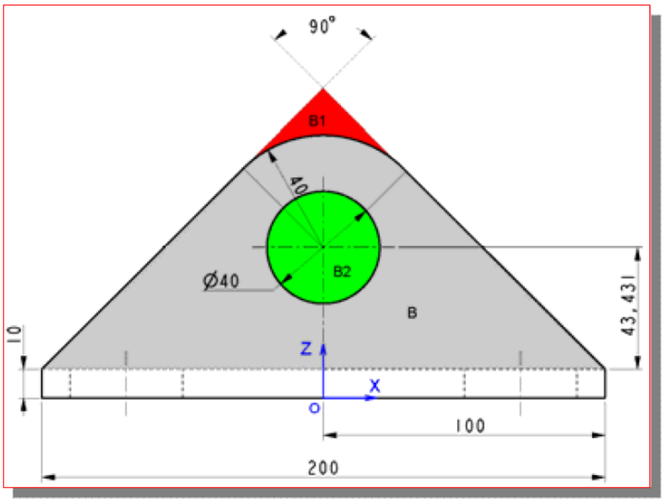
⇨ Masse: $M_A = 0.0007\times 10\times 17100.44 = \boxed{119.7 g}$



$$\Longrightarrow \text{Centre de masse: } \begin{cases} x_{A_C} = \boxed{0mm} \\ y_{A_C} = \dfrac{50\times10^4 - 93.31\times193.14 - 70\times1256.64}{17100.44/2} = \boxed{46.08mm} \\ z_{A_C} = \boxed{5mm} \end{cases}$$

Calcul de la facette B :

 facette symétrique / Z:



❑ Surface : $B = 100\times100 - B_1 - B_2$

triangle rectangle de côté $100\sqrt{2}$

❑ Surface B_1:

$$B_1 = 40\times40 - \frac{\pi\ 40^2}{4} = 343.36mm^2$$

$$z_1 = \frac{\left(10+43.431+20\sqrt{2}\right)\times1600 - \left(10+43.431+\dfrac{4\times40}{3\pi}\sqrt{2}\right)\times\dfrac{\pi\times40^2}{4}}{343.36}$$

$$= \frac{81.72\times1600 - 77.44\times1256.64}{343.36}$$

$$= 97.38mm$$

$x_1 = 0mm$ (symétrie)

$\Longrightarrow$ Masse:

$$M = M_A + M_B = 58.8 + 119.7 = \boxed{178.5g}$$

$$\Longrightarrow \text{Centre de masse: } \begin{cases} x_C = \boxed{0mm} \\ y_C = \dfrac{46.08\times119.7 + 5\times58.8}{178.5} = \boxed{32.55mm} \\ z_C = \dfrac{5\times119.7 + 41.11\times58.8}{178.5} = \boxed{16.90mm} \end{cases}$$