Prix : 60 DA

Université Saad Dahlab Blida 1 — **Première Année LMD**

TEST

Epreuve de Maths II (*Mai 2017*)

Sections: A, C, E et F.

Durée 01h:30

Exercice(01)

1. Décomposer la fraction rationnelle : $\frac{x^2+11x+8}{(x-2)(x^2+4x-5)}$ en éléments simples, puis calculer leur primitives.
2. Donner une primitive de $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ et une autre pour $\frac{x}{(1+x^2)^2}$, puis calculer par parties l'intégrale

$$I = \int \frac{x^2}{(1+x^2)^2}dx$$

3. En calculant la dérivée de f, montrer que $\forall x \in \mathbb{R} : xf'(x) + 2f(x) = 2\frac{1}{(1+x^2)^2}$.
4. De (2) et (3), en déduire une primitive de $\frac{1}{(1+x^2)^2}$.

Exercice (02)

Soit la matrice A_m définie par:

$$A_m = \begin{pmatrix} 0 & 1 & m \\ m & 0 & 1 \\ 1 & m & 0 \end{pmatrix} ; m \in \mathbb{R}$$

1. Pour quelles valeurs de m, la matrice A_m est inversible?
2. Soit l'application f suivante:

$$f : M_{3\times3}(\mathbb{R}) \to M_{3\times3}(\mathbb{R})$$
$$M \mapsto f(M) = M^2 - M.$$

où $M_{3\times3}(\mathbb{R})$ est l'ensemble de toutes les matrices d'ordre 3×3 et à coefficients réels.

a. Trouver les valeurs de m pour lesquelles $f(A_m) = 2I_3$.

b. Pour la valeur de m trouvée, en déduire que A_m est inversible et calculer son inverse, puis retrouver A_m^{-1} par la méthode de l'échelonnement.

Exercice(03)

1. Donner à l'ordre 2 et dans un voisinage de 0, le développement limité de $\sqrt{1+2x}$.
2. Soit $f(x) = \operatorname{arctg}(\sqrt{1+2x})$. Calculer la dérivée de f, puis en déduire le développement limité de f au voisinage de 0 et à l'ordre 3.
3. Donner l'équation de la tangente au graphe de f au point $(0, f(0))$, puis préciser la position du graphe par rapport à cette droite.
4. Posons maintenant $g(x) = x\operatorname{arctg}(\sqrt{\frac{2+x}{x}})$. Déterminer le développement limité de g au voisinage de $+\infty$ à l'ordre 1, puis en déduire l'équation de l'asymptote au voisinage de $+\infty$ et préciser la position du graphe par rapport à cette asymptote.

(2

Sections A, C, E et F

Exercice 1 : (7 pts)

1/ Décomposition en éléments simples :

$$\frac{x^2+11x+8}{(x-2)(x^2+4x+5)} = \frac{A}{x-2} + \frac{Mx+N}{x^2+4x+5} \quad \text{--- } (*) \quad 0{,}5$$

On multiplie $(*)$ par $(x-2)$, on obtient :

$$\frac{x^2+11x+8}{x^2+4x+5} = A + \frac{(x-2)\,Mx+N}{x^2+4x+5} \quad \text{--- } (**)$$

On pose dans $(**)$: $x=2$;

$$\frac{4+22+8}{4+8+5} = \frac{34}{17} = 2 = A \quad \text{donc } \boxed{A=2} \quad 0{,}5$$

$\underline{x=0}$:
$$\frac{8}{-10} = \frac{-4}{5} = -\frac{A}{2} + \frac{N}{5}$$
$$\Rightarrow \frac{N}{5} = -\frac{4}{5} + \frac{A}{2} \Rightarrow \frac{N}{5} = -\frac{4}{5} + 1 = \frac{1}{5}$$

donc $\boxed{N=1}$ 0,5

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x(x^2+11x+8)}{(x-2)(x^2+4x+5)} = 1 = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{Ax}{x-2} + \frac{Mx^2+Nx}{x^2+4x+5}\right)$$

$$\Rightarrow 1 = A + M \Rightarrow \boxed{M=-1} \quad 0{,}5$$

alors
$$\frac{x^2+11x+8}{(x-2)(x^2+4x+5)} = \frac{2}{x-2} + \frac{-x+1}{x^2+4x+5}$$

$$\int \frac{x^2+11x+8}{(x-2)(x^2+4x+5)}\,dx = \int\left(\frac{2}{x-2} + \frac{-x+1}{x^2+4x+5}\right)dx$$
$$= 2\int \frac{dx}{x-2} + \int \frac{-x+1}{x^2+4x+5}\,dx$$
$$= 2\ln|x-2| + J'$$

0,5

Scanné avec CamScanner

On calcul J'

$$J' = \int \frac{-x+1}{x^2+4x+5}\,dx$$ (c'est un élément simple de second espèce)

- Forme canonique. $x^2+4x+5 = (x+2)^2+1$
- changement de variable :

On pose $z = x+2 \Rightarrow dz = dx$
et $x = z-2$

(1,25)

$$x^2+4x+5 = z^2+1.$$

donc $$J' = \int \frac{-(z-2)+1}{z^2+1}\,dz = \int \frac{-z+3}{z^2+1}\,dz$$

$$= \int \frac{-z}{z^2+1}\,dz + 3\int \frac{dz}{z^2+1}$$

$$= -\frac{1}{2}\,Ln(z^2+1) + 3\,arctg\, z + c'$$

$$= -\frac{1}{2}\,Ln(x^2+4x+5) + 3\,arctg(x+2) + c'$$

$$J' = -\frac{1}{2}\,Ln(x^2+4x+5) + 3\,arctg(x+2) + c'$$

$$\int \frac{(x^2+11x+8)\,dx}{(x-2)(x^2+4x+5)} = 2\,Ln|x-2| - \frac{1}{2}\,Ln(x^2+4x+5) + 3\,arctg(x+2) + c'$$

2/ • Primitive de $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

$$\int f(x)\,dx = \int \frac{1}{1+x^2}\,dx = arctg\, x + C_1.$$ (1,25)

- Une Primitive de $\frac{x}{(1+x^2)^2}$

$$\int \frac{x}{(1+x^2)^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{(1+x^2)^2}\,dx = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+x^2} + C_2$$ (0,5)

(on pose $t = 1+x^2 \Rightarrow dt = 2x\,dx$

$$\int \frac{2x}{(1+x^2)^2}\,dx = \int \frac{dt}{t^2} = \int t^{-2}\,dt = \frac{-1}{t} + C_2$$
$$= \frac{-1}{1+x^2} + C_2$$)

• Calcul de $I = \int \frac{x^2}{(1+x^2)^2}\,dx$ par parties

On a $I = \int \frac{x^2}{(1+x^2)^2}\,dx = \int x \, \frac{x}{(1+x^2)^2}\,dx$

1

$u = x$, $du = dx$

$dv = \frac{x}{(1+x^2)^2}\,dx$, $v = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+x^2}$

$I = \int \frac{x^2}{(1+x^2)^2}\,dx = -\frac{1}{2} \cdot \frac{x}{1+x^2} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{1+x^2}$

$\Rightarrow I = -\frac{1}{2} \cdot \frac{x}{1+x^2} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + C$

0,25

3/ $f'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$

Montrons que $\forall x \in \mathbb{R}$, $x f'(x) + 2 f(x) = 2 \cdot \frac{1}{(1+x^2)^2}$

On a $\forall x \in \mathbb{R}$, $x f'(x) + 2 f(x) = x \left(\frac{-2x}{(1+x^2)^2}\right) + 2 \cdot \frac{1}{1+x^2}$

0,5

$$= \frac{-2x^2 + 2(1+x^2)}{(1+x^2)^2}$$

$$= \frac{2}{(1+x^2)^2} = 2 \cdot \frac{1}{(1+x^2)^2}$$

4/ de 2/ et 3/ on déduit $\int \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx$.

On a $\forall x \in \mathbb{R}$, $x f'(x) + 2 f(x) = 2 \cdot \frac{1}{(1+x^2)^2}$

0,75

$$\Leftrightarrow \frac{1}{(1+x^2)^2} = \frac{x}{2} f'(x) + f(x)$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx = \int \left(\frac{-2x^2}{2(1+x^2)^2} + \frac{1}{1+x^2}\right) dx$$

$$= -\int \frac{x^2}{(1+x^2)^2}\,dx + \int \frac{dx}{1+x^2}$$

$$= +\frac{1}{2} \frac{x}{1+x^2} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} x + C$$

donc $\int \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx = \frac{1}{2} \frac{x}{1+x^2} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + C$

Exo2 : (6,5 pts)

$$A_m = \begin{pmatrix} 0 & 1 & m \\ m & 0 & 1 \\ 1 & m & 0 \end{pmatrix}, \quad m \in \mathbb{R}$$

1/ les valeurs de m pour que A_m soit inversible :

A_m est inversible $\Leftrightarrow \det A_m \neq 0$

$$\det A_m = \begin{vmatrix} 0 & 1 & m \\ m & 0 & 1 \\ 1 & m & 0 \end{vmatrix} = -m \begin{vmatrix} 1 & m \\ m & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -m(-m^2) + 1$$

$$= m^3 + 1. \quad 1$$

donc $\det A_m = m^3 + 1$.

A_m est inversible $\Leftrightarrow \det A_m \neq 0$

$\Leftrightarrow m^3 + 1 \neq 0$.

Or $m^3 + 1 = (m+1)(m^2 - m + 1)$

$m^3 + 1 = (m+1)(m^2 - m + 1 \neq 0)$. (0,5)

$m^3 + 1 \neq 0 \Rightarrow m \neq -1$. (car $m^2 - m + 1$, $\Delta < 0$)

A_m est inversible $\Leftrightarrow m \neq -1$.

alors A_m est inversible.

si $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, A_m est inversible.

2/ soit l'application $f : \mathcal{M}_{3\times3}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_{3\times3}(\mathbb{R})$

$M \longrightarrow f(M) = '$

$\mathcal{M}_{3\times3}(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices d'ordre 3 coefficients réels.

a/ m ? tel que $f(A_m) = 2I_3$

$f(A_m) = 2I_3 \Leftrightarrow A_m^2 - A_m = 2I_3$.

Scanné avec CamScanner

$$A_m^2 = A_m \cdot A_m = \begin{pmatrix} 0 & 1 & m \\ m & 0 & 1 \\ 1 & m & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & m \\ m & 0 & 1 \\ 1 & m & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2m & m^2 & 1 \\ 1 & 2m & m^2 \\ m^2 & 1 & 2m \end{pmatrix}$$

$$A_m^2 - A_m = \begin{pmatrix} 2m & m^2 & 1 \\ 1 & 2m & m^2 \\ m^2 & 1 & 2m \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ m & 0 & \\ 1 & m & \end{pmatrix}$$

1.

$$= \begin{pmatrix} 2m & m^2-1 & 1-m \\ 1-m & 2m & m^2-1 \\ m^2-1 & 1-m & 2m \end{pmatrix}$$

$$A_m^2 - A_m = 2I_3 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2m & m^2-1 & 1-m \\ 1-m & 2m & m^2-1 \\ m^2-1 & 1-m & 2m \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2m & m^2-1 & 1-m \\ 1-m & 2m & m^2-1 \\ m^2-1 & 1-m & 2m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donc
$$\begin{cases} 2m = 2 & \Rightarrow m = 1 \\ m^2 - 1 = 0 & \Rightarrow m = 1 \vee m = -1 \\ 1 - m = 0 & \Rightarrow m = 1 \end{cases}$$

0,5

0,25

d'où $m = 1$ (La valeur qui vérifie les equations)

Pour $m = 1$, $f(A_1) = 2I_3$ avec $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & \end{pmatrix}$

b/ Pour $m=1$ en Déduire que A_1 est inversible

On a $f(A_1) = 2I_3 \iff A_1^2 - A_1 = 2I_3$ $\quad A_1^2 = A_1 \cdot A_1$

$$\iff \frac{1}{2}A_1^2 - \frac{1}{2}A_1 = I_3 \quad \left(A_1 = I_3 A_1 = A_1 \cdot I_3\right.$$

1

$$\iff \Big(\underbrace{\frac{1}{2}A_1 - \frac{1}{2}I_3}_{B}\Big) A_1 = A_1 \Big(\underbrace{\frac{1}{2}A_1 - \frac{1}{2}I_3}_{B}\Big) =$$

Donc $\exists\, B = \frac{1}{2}A_1 - \frac{1}{2}I_3 \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ tel que $AB = BA = I_3$

alors A_1 est inversible et $A_1^{-1} = B$.

• Calcul de A_1^{-1}

$$A_1^{-1} = \frac{1}{2}A_1 - \frac{1}{2}I_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

OK

$$\text{donc } A_1^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Vérification : $A_1^{-1} \cdot A_1 = A_1 \cdot A_1^{-1} = I_3$

• Calcul de A_1^{-1} par la méthode de l'échelonnement

$$(A_1 | I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_3 \to L_3 - L_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3 \to L_3 - L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_3 \to -\frac{1}{2}L_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right) \xrightarrow[L_2 \to L_2 - L_3]{L_1 \to L_1 - L_3} \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1/2 \end{array}\right)$$

I_3

donc $A_1^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ (1,5)

Exercice 3 (4,5 Pts)

1/ DL d'ordre 2 au voisinage de 0 de $\sqrt{1+2x}$

$\sqrt{1+2x} = \sqrt{1+u}$ avec $u = 2x \in V(0)$.

$\sqrt{1+u} = 1 + \frac{1}{2}u - \frac{1}{8}u^2 + o(u^2)$.

$u^2 = 4x^2 + o(x^2)$

donc $\sqrt{1+2x} = 1 + \frac{1}{2}(2x) - \frac{1}{8}(4x^2) + o(x^2)$ (1)

$$\boxed{\sqrt{1+2x} = 1 + x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)}$$

2/ $f(x) = \operatorname{arctg}(\sqrt{1+2x})$

$f'(x) = (\sqrt{1+2x})' \cdot \frac{1}{1+(\sqrt{1+2x})^2} = \frac{2}{2\sqrt{1+2x}}$

$= \frac{1}{\sqrt{1+2x}\,(2+2x)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(1+x)\sqrt{1+2x}}$ (1)

. En déduire le DL de f au voisinage de 0 d'ordre 3 :

$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+2x}}$

$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + o(x^2)$

$\frac{1}{\sqrt{1+2x}} = \frac{1}{1+x-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)} = \frac{1}{1+y}$ avec $y = x - \frac{1}{2}x^2$

$\frac{1}{1+y} = 1 - y + y^2 + o(y^2)$.

$y = x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$

$y^2 = y \cdot y = x^2 + o(x^2)$

donc $\frac{1}{\sqrt{1+2x}} = 1 - x + \frac{1}{2}x^2 + x^2 + o(x^2)$

$= 1 - x + \frac{3}{2}x^2 + o(x^2)$

d'où $f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+2x}}$

$= \frac{1}{2}(1 - x + x^2 + o(x^2))(1 - x + \frac{3}{2}x^2 + o(x^2))$

$= \frac{1}{2}(1 - x + x^2 - x + x^2 + x^2 + o(x^2))$.

$= \frac{1}{2}(1 \quad x + \frac{3}{2}x^2 - x + x^2 + x^2 + o(x^2))$

1,75 $= \frac{1}{2}(1 - 2x + \frac{7}{2}x^2 + o(x^2))$

$= \frac{1}{2}(1 - 2x + \frac{7}{2}x^2 + o(x^2))$

alors $f'(x) = \frac{1}{2} - x + \frac{7}{4}x^2 + o(x^2)$

ou $(\operatorname{arctg}(\sqrt{1+2x}))' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(1+x)\cdot\sqrt{1+2x}}$

$= \frac{1}{2} - x + \frac{7}{4}x^2 + o(x^2)$

donc $\int_0^x (\operatorname{arctg}(\sqrt{1+2t}))' dt = \int_0^x (\frac{1}{2} - t + \frac{7}{4}t^2$

d'où $[\operatorname{arctg}(\sqrt{1+2t})]_0^x = [\frac{1}{2}t - \frac{1}{2}t^2 +$

$\Rightarrow \operatorname{arctg}(\sqrt{1+2x}) - \underbrace{\operatorname{arctg}(1)}_{=\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}x -$

alors $\operatorname{arctg}(\sqrt{1+2x}) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ (25

3) l'équation de la tangente au poi

$y = \frac{1}{2}x + \frac{\pi}{4}$ 0,5

la position: On étudie le sig

$f(x) - y = -\frac{1}{2}x^2 \leq 0$ 0,5

Scanné avec CamScanner

Ou $f(x) - y \leq 0$ donc la courbe se trouve dessous de la tangente.

4/ $g(x) = x \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{2+x}{x}}\right)$

. DL de g au voisinage de $+\infty$ à l'ordre 1 :

on pose $y = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{1}{y}$

$x \in V(+\infty)$, $y \in V(0^+)$

$g(x) = g\left(\frac{1}{y}\right) = \frac{1}{y} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{2+\frac{1}{y}}{\frac{1}{y}}}\right) = \frac{1}{y} \operatorname{arctg}(\sqrt{}$ 0,5

d'où $g\left(\frac{1}{y}\right) = \frac{1}{y}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}y^2 + o(y^2)\right)$

$= \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{y} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}y + o(y)$ 0,5

alors $g(x) = \frac{\pi}{4}x + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$.

. l'équation de l'asymptote :

0,5 $y = \frac{\pi}{4}x + \frac{1}{2}$ est l'équation de l'asymp oblique au $V(+\infty)$ car $\lim_{x \to +\infty}(g(x) - y) = \lim_{x \to +\infty}($

. La position : On étudie le signe de $g(x)$

$g(x) - y = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x}$

On a $x \in V(+\infty)$ donc $g(x) - y = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x} < 0$ 0,5

donc la courbe est au dessous de l'asym oblique au voisinage de $+\infty$