

# Contrôle continu N° 1

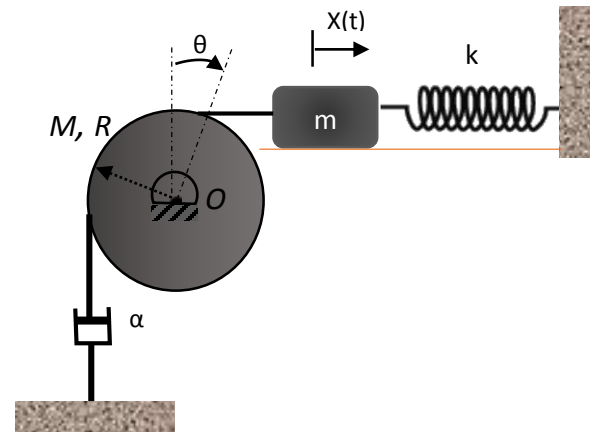
## Exercice 1 : Système libre non amorti

14 pts

On considère un système composé d'une masse  $m$  se déplaçant horizontalement selon  $x$  relié par un ressort de raideur  $k$  à un disque en rotation par rapport à son axe fixe. Le Disque est relié à un amortisseur de constante  $\alpha$  attaché à un bâti à l'autre extrémité.

Le disque peut pivoter dans le plan vertical autour du point O.

La masse  $m$  est écartée de son état d'équilibre de **5cm** puis relâchée sans vitesse initiale pour osciller librement. On constate que l'amplitude des oscillations du système perd 90% de sa valeur du départ au bout de 10 oscillations. On constate aussi que la période de ces oscillations décroissantes est constante et est égale à **0.8s**.



- 1- Dire, quel est le régime d'oscillation du système. Sous quelle condition on obtient ce régime.

Régime pseudopériodique.

Ce régime est obtenu lorsque l'amortissement est faible ( $\delta < \omega_0$ )

- 2- Calculer la valeur du facteur d'amortissement  $\delta$ .

$$D_c = \frac{1}{10} \ln \left( \frac{100\%}{100\% - 99\%} \right) = 0.23 = \delta T_a \rightarrow \delta = \frac{0.23}{0.8} = 0.287 \text{ s}^{-1}$$

On veut déterminer la constante d'amortissement  $\alpha$  à l'aide de l'expression du facteur d'amortissement  $\delta$ . Pour cela on doit chercher l'équation de mouvement

- 3- Trouver La fonction de Lagrange du système  $L(x, \dot{x})$ .

$$L = \frac{1}{2} \left( \frac{M}{2} + m \right) \dot{x}^2 - \frac{1}{2} k x^2, \quad D_s = \frac{1}{2} \alpha \dot{x}^2$$

- 4- Etablir l'équation de mouvement du système et donner l'expression du facteur  $\delta$  et de la pulsation propre  $\omega_0$

$$\left( \frac{M}{2} + m \right) \ddot{x} + \alpha \dot{x} + kx = 0 \rightarrow \ddot{x} + \frac{2\alpha}{M + 2m} \dot{x} + \frac{2k}{M + 2m} x = 0$$

$$\delta = \frac{\alpha}{M + 2m}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{M + 2m}}$$

- 5- Si  $m=0.25$  kg et  $M=2m$ , calculer la constante d'amortissement  $\alpha$ .

$$M = 2m \rightarrow \delta = \frac{\alpha}{4m} \rightarrow \alpha = 4m\delta = 0.287 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$$

- 6- Dédurre de ce qui précède, la valeur de la pulsation propre  $\omega_0$  et de la constante de raideur  $k$  du ressort.

$$\omega_a = \frac{2\pi}{T_a} = 7.85 = \omega_0^2 - \delta^2 \rightarrow \omega_0 = \sqrt{\omega_a^2 + \delta^2} = 7.86 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{2m}} \rightarrow k = 2m\omega_0^2 = 30.86 \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$$

- 7- Ecrire l'expression de la réponse du système  $x(t)$

$$x(t) = Ae^{-\delta t} \cos(\omega_a t + \phi)$$

**Contrôle continu N° 1**

$$x(0) = 5 \text{ et } \dot{x}(0) = 0$$

$$\begin{cases} A \cos(\phi) = 5 & (1) \\ -\delta \cos \phi - \omega_a \sin \phi = 0 & (2) \end{cases}$$

$$\text{de (2) } \tan \phi = 0 \rightarrow \phi = 0 \text{ de (1) } \rightarrow A = 5$$

$$x(t) = 5e^{-0.23t} \cos(7.85t)$$

**Exercice 3 : Système forcé**

Soit le système sur la figure ci-contre. Le disque roule sans glissement.

6 pts

Le point P est assujéti à suivre un mouvement sinusoïdal  $s(t) = s_0 \cos(\omega t)$  parallèle à X.

1- Ecrire l'équation du mouvement du disque.

$$L = \frac{3}{4} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} k (x - s)^2, \quad D_s = \frac{1}{2} \alpha \dot{x}^2$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \left( \frac{\partial L}{\partial x} \right) = - \left( \frac{\partial D_s}{\partial \dot{x}} \right)$$

$$\frac{3}{2} m \ddot{x} + \alpha \ddot{x} + kx = ks \rightarrow \ddot{x} + \frac{2\alpha}{3m} \dot{x} + \frac{2k}{3m} x = \frac{2k}{3m} s_0 \cos \omega t$$

2- En régime permanent, donner l'expression de l'amplitude des vibrations ainsi la constante de déphasage en fonction de  $S_0$ ,  $\delta$ ,  $\omega_0$  et  $\omega$ .

$$\ddot{x} + 2\delta \dot{x} + \omega_0^2 x = A_0 \cos \omega t$$

$$x(t) = B \cos(\omega t + \Phi) \text{ avec } B = \frac{A_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2 \omega^2}}$$

$$\text{et } \Phi = \text{Arctan} \left( \frac{-2\delta \omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \right)$$

$$\delta = \frac{\alpha}{3m}, \omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{3m}}, A_0 = \frac{2k}{3m} s_0$$

3- Calculer ces deux constantes et écrire l'expression de la réponse du système  $x(t)$

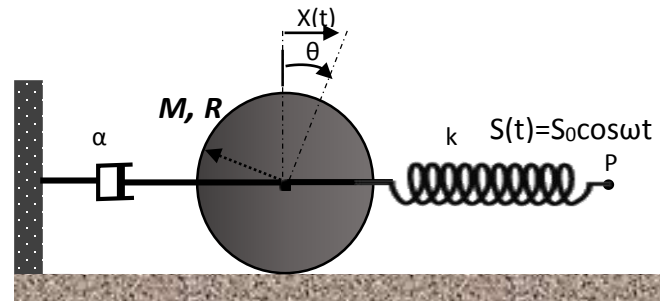
$$\delta = 20 \text{ s}^{-1}, \quad \omega_0 = 10 \text{ rad.s}^{-1}, \quad A_0 = 10 \text{ m.s}^{-1}$$

$$B = 25 \text{ cm}, \quad \Phi = \frac{\pi}{2}$$

$$x(t) = 0.25 \cos \left( 10t + \frac{\pi}{2} \right) \text{ en mètres}$$

On donne  $S_0 = 10 \text{ cm}$ ,  $\omega = 10 \text{ rad/s}$ ,  $M = 1 \text{ kg}$ ,  $\alpha = 60 \text{ kg/s}$

$K = 150 \text{ kg.m.s}^{-2}$



بالتوفيق للجميع