

CORRIGE CONTRÔLE CONTINU ALGÈBRE 1

Département de Mathématiques
Faculté des Sciences

30/11/2017
Contrôle Continu Algèbre 1

EXERCICE 1: 7pts

1) a) L'implication suivante est-elle vraie ? Justifier.

$$\exists \alpha \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall y \in \mathbb{R}, \quad |x^2 - y^2| \leq \alpha |x - y| \\ \rightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad x^2 \leq \alpha |x|$$

b) Donner la négation de cette assertion.

SOLUTION:

1) a) -----

Soit $P: \exists \alpha \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, |x^2 - y^2| \leq \alpha |x - y|$
et soit $Q: \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in \mathbb{R}, x^2 \leq \alpha |x|$.

P est supposée vraie pour tout $y \in \mathbb{R}$,

donc en particulier pour $y=0$. 2pts

2pts

$$\text{D'où: } \exists \alpha \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad |x^2 - 0| \leq \alpha |x - 0|$$

$$\text{soit } \exists \alpha \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad x^2 \leq \alpha |x|.$$

Si $x \neq 0$, alors $\frac{x^2}{|x|} \leq \alpha$, soit $\alpha \geq |x| > 0$. 0.5 pt

D'où: $\exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in \mathbb{R}, x^2 \leq \alpha |x|$. 0.5 pt

1pt

SI ON MONTRE QUE P EST FAUSSE = 3pts

b) La négation est: P et non(Q) 1pt, soit:

$$\exists \alpha \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall y \in \mathbb{R}, \quad |x^2 - y^2| \leq \alpha |x - y| \quad 1pt$$

et $\forall \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \exists x \in \mathbb{R}, x^2 > \alpha |x|$. 1pt

3 pts

+++++

2) Montrer que : $(\forall \varepsilon > 0 \mid y - 1 \mid \leq \varepsilon) \rightarrow y = 1$

Raisonnons par contraposition et montrons que:

$y \neq 1 \rightarrow (\exists \varepsilon > 0 \mid y - 1 \mid > \varepsilon)$. 0.5 pt

Alors, peut-on trouver $\varepsilon > 0$ tel que

$\mid y - 1 \mid > \varepsilon$ avec $y \neq 1$, soit $y - 1 \neq 0$?

La réponse est OUI : choisissons par exemple: $\varepsilon = \frac{\mid y - 1 \mid}{2}$. 0.5 pt 1pt

EXERCICE 2: 5pts

Montrer par contraposition puis par l'absurde que si 3 divise $x^2 + y^2$ alors 3 divise x et 3 divise y .

SOLUTION:

Par contraposition: Montrons que si

(3 ne divise pas x) ou (3 ne divise pas y) alors 3 ne divise pas $x^2 + y^2$.

On sait (cours) que: Si p divise n^2 alors p divise n où p est premier.

3 ne divise pas x , donc 3 ne divise pas x^2 ,

soit $x^2 = 3k + r$, $k \in \mathbb{N}$, $r \in]0, 3[$ 1pt

Considérons le « ou » exclusif ET NON le « ou » inclusif:

3 divise y , donc 3 divise y^2 , soit $y^2 = 3k'$, $k' \in \mathbb{N}$ 1pt

D'où $x^2 + y^2 = 3k'' + r$, $k'' = k + k' \in \mathbb{N}$, $r \in]0, 3[$ 1pt

soit 3 ne divise pas $x^2 + y^2$.

3pts

Par absurde: Supposons:

(3 divise $x^2 + y^2$) et [(3 ne divise pas x) ou (3 ne divise pas y)]. 1pt

Comme dans la contraposition on a:

[(3 ne divise pas x) ou (3 ne divise pas y)] nous donne;

$x^2 + y^2 = 3k'' + r$, $k'' \in \mathbb{N}$, $r \in]0, 3[$. Ceci contredit le fait que:

3 divise $x^2 + y^2$.

1pt

2pts

EXERCICE3: 5 Pts

Soient E, F et G trois parties d'un ensemble X .

1) Montrer que: $(E \Delta F) \Delta G =$

$$(E \cap nF \cap nG) \cup (F \cap nE \cap nG) \cup (G \cap nE \cap nF) \cup (G \cap E \cap F)$$

2) Dédurre que: $(E \Delta F) \Delta G = (G \Delta F) \Delta E$

nA est le complémentaire de A dans X

SOLUTION:

$$1) (E \Delta F) \Delta G = ((E \cap nF) \cup (F \cap nE)) \Delta G$$

$$= (((E \cap nF) \cup (F \cap nE)) \cap nG) \cup (G \cap n[(E \cap nF) \cup (F \cap nE)]) \text{ 1pt}$$

$$= (E \cap nF \cap nG) \cup (F \cap nE \cap nG) \cup (G \cap ((nE \cap nF) \cup (F \cap E))) \text{ 1pt}$$

$$= (E \cap nF \cap nG) \cup (F \cap nE \cap nG) \cup (G \cap nE \cap nF) \cup (G \cap F \cap E) \text{ 1pt}$$

3 Pts

2) Dans l'égalité précédente on échange E et G . On remarquera

très aisément que $(E \Delta F) \Delta G = (G \Delta F) \Delta E$

2 Pts

EXERCICE 4 4 pts Soit $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^2$ une application
 $n \rightarrow (n, (n+1)^2)$

1) g est-elle injective ?

DEFINITION DE L'INJECTION = 1pt

La démonstration ci-dessous = 1pt.

Soient n_1 et n_2 deux entiers naturels.

$g(n_1) = g(n_2)$ implique $(n_1, (n_1+1)^2) = (n_2, (n_2+1)^2)$

d'où $n_1 = n_2$ et $(n_1+1)^2 = (n_2+1)^2$, soit

$n_1 = n_2$ et $[n_1+1 = n_2+1 \text{ ou } n_1+1 = -n_2-1]$

Soit $n_1 = n_2$ et $[n_1 = n_2 \text{ ou } n_1 = -n_2-2]$.

Or $n_1 = -n_2-2 < 0$ (impossible).

Donc $[n_1 = n_2 \text{ ou } n_1 = -n_2-2]$ équivaut $n_1 = n_2$,

d'où $(n_1 = n_2 \text{ et } [n_1 = n_2 \text{ ou } n_1 = -n_2-2])$ équivaut

$n_1 = n_2$. g est donc injective. 2pts

2) Déterminer l'image réciproque de $\{(1, 1)\}$.

L'image réciproque de l'ensemble $\{(1, 1)\}$ est l'ensemble des entiers naturels n tel que $(n, (n+1)^2) = (1, 1)$. 0.5pt Soit :

$n = 1$ et $(n+1)^2 = 1$, d'où : $n = 1$ et $n^2 + 2n = 0$. Ce qui est faux. Donc l'image réciproque de l'ensemble $\{(1, 1)\}$ est

vide. 0.5pt

1pt

3) A-t-on $g(\mathbb{N}) = \mathbb{N}^2$? Justifier

Le couple $(1, 1) \in \mathbb{N}^2$ n'a pas d'antécédent dans \mathbb{N} . Ceci suffit pour dire qu'on a pas $g(\mathbb{N}) = \mathbb{N}^2$. 0.5pt

4) Que peut-on dire quand à la surjection de g ?

DEFINITION DE LA SURJECTION = 0.5pt même si la réponse à la question est fausse

D'après 2) g n'est pas surjective. 0.5pt