Université Mohamed Boudiaf - M'sila
Faculté des Sciences et Technologies
Département de Genie Civil
Année Universitaire 2021-2022

Matière : Probabilités-Statistiques

Correction de TD n◦ 3

Exercice n°1 :

1) Soit $C_n^p = \dfrac{n!}{p!\,(n-p)!}$, avec $n, p \in \mathbb{N}$ et $p \leq n$.

Montrer que : a) $C_n^0 = C_n^n$, $\quad b)$ $C_n^p = C_n^{n-p}$; $\quad$ c) $C_{n+1}^{p+1} = C_n^{p+1} + C_n^p$.
a) On a

$$C_n^0 = \frac{n!}{0!\,(n-0)!} = \frac{n!}{0!n!} = \frac{n!}{n!0!} = \frac{n!}{n!\,(n-n)!} = C_n^n = 1$$

$b)$ On a :

$$C_n^p = \frac{n!}{p!\,(n-p)!} = \frac{n!}{(n-p)!p!} = \frac{n!}{(n-p)!\,(n-(n-p))!} = C_n^{n-p}$$

c) Rappel : $(p+1)\,p! = (p+1)!$, $(n-p)\,(n-p-1)! = (n-p)!$
On a :

$$\begin{aligned}
C_n^{p+1} + C_n^p &= \frac{n!}{(p+1)!\,(n-p-1)!} + \frac{n!}{p!\,(n-p)!} \\
&= \frac{n!}{(p+1)\,p!\,(n-p-1)!} + \frac{n!}{p!\,(n-p)\,(n-p-1)!} \\
&= \frac{n!}{p!\,(n-p-1)!}\left[\frac{1}{(p+1)} + \frac{1}{(n-p)}\right] \\
&= \frac{n!}{p!\,(n-p-1)!}\left[\frac{(n-p)+(p+1)}{(p+1)\,(n-p)}\right] \\
&= \frac{n!}{p!\,(n-p-1)!}\left[\frac{n+1}{(p+1)\,(n-p)}\right] \\
&= \frac{n!\,(n+1)}{p!\,(p+1)\,(n-p)\,(n-p-1)!} \\
&= \frac{(n+1)!}{(p+1)!\,(n-p)!} \\
&= \frac{(n+1)!}{(p+1)!\,(n+1-(p+1))!} \\
&= C_{n+1}^{p+1}
\end{aligned}$$

2) En utilisant la formule du Binôme de Newton $(a+b)^n = \sum\limits_{p=0}^{n} C_n^p a^{n-p} b^p$:

a) Pour $a = 1$ et $b = 1$, on obtient

$$\begin{aligned}
2^n &= (1+1)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p 1^{n-p} 1^p \\
&= \sum_{p=0}^{n} C_n^p \\
&= A
\end{aligned}$$

Pour $a = 1$ et $b = -1$, on obtient

$$\begin{aligned} 0 &= (1-1)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p 1^{n-p} (-1)^p \\ &= \sum_{p=0}^{n} C_n^p (-1)^p \\ &= B. \end{aligned}$$

Pour $a = 1$ et $b = 2$, on obtient

$$\begin{aligned} 3^n &= (1+2)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p 1^{n-p} 2^p \\ &= \sum_{p=0}^{n} C_n^p 2^p \\ &= D \end{aligned}$$

Pour $a = 1$ et $b = \alpha$, on obtient

$$\begin{aligned} (1+\alpha)^n &= \sum_{p=0}^{n} C_n^p 1^{n-p} \alpha^p \\ &= \sum_{p=0}^{n} C_n^p \alpha^p \\ &= M \end{aligned}$$

b) Montrer que : $\sum\limits_{p=0}^{n} C_n^p 4^p = \sum\limits_{p=0}^{n} C_n^p 2^{n-p} 3^p$.

On a

$$\begin{aligned} 5^n &= (1+4)^n \\ &= \sum_{p=0}^{n} C_n^p 1^{n-p} 4^p \\ &= \sum_{p=0}^{n} C_n^p 4^p \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} 5^n &= (2+3)^n \\ &= \sum_{p=0}^{n} C_n^p 2^{n-p} 3^p \end{aligned}$$

d'où l'égalité.

c) Montrer que $\forall n, p \in \mathbb{N}^*($ avec $p \leq n) : pC_n^p = nC_{n-1}^{p-1}$,

On a

$$\begin{aligned} pC_n^p &= p\frac{n!}{p!\,(n-p)!} \\ &= p\frac{n\,(n-1)!}{p\,(p-1)!\,(n-1-(p-1))!} \\ &= n\frac{(n-1)!}{(p-1)!\,(n-1-(p-1))!} \\ &= nC_{n-1}^{p-1} \end{aligned}$$

On a
$$\begin{cases} 1C_n^1 = nC_{n-1}^0 \\ 2C_n^2 = nC_{n-1}^1 \\ 3C_n^3 = nC_{n-1}^2 \\ \quad\vdots \\ nC_n^n = nC_{n-1}^{n-1} \end{cases}, \text{ donc}$$

$$\begin{aligned} F &= C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + ... + nC_n^n \\ &= nC_{n-1}^0 + nC_{n-1}^1 + nC_{n-1}^2 + ... + nC_{n-1}^{n-1} \\ &= n\left[C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1 + C_{n-1}^2 + ... + C_{n-1}^{n-1}\right] \\ &= n2^{n-1} \end{aligned}$$

.

***d)** On a de façon générale :

$$(x+2)^8 = \sum_{p=0}^{8} C_8^p 2^{8-p} x^p$$

Le coefficient de x^6est donc (p=6)

$$\begin{aligned} C_8^6 2^{8-6} &= \frac{8!}{6!2!} 2^2 \\ &= 112 \end{aligned}$$

On a de façon générale :

$$\left(x^2-5\right)^7 = \sum_{p=0}^{7} C_7^p (-5)^{7-p} x^{2p}$$

Le coefficient de $x^6 = (x^2)^3$est donc (p=3)

$$\begin{aligned} C_7^3 (-5)^{7-3} &= \frac{7!}{3!4!} (-5)^4 \\ &= 35 \times 625 \\ &= 21\,875 \end{aligned}$$

Exercice n°2 :

À l'aide des six chiffres : 2 ; 3 ; 5 ; 6 ; 7 ; 9 :

a) combien de nombres de trois chiffres peut-on former ?
Réponse : $6^3 = 216$

b) combien de ces nombres sont inférieurs à 400 ?
Réponse : un nombre a 3 chiffres <400

$$6^2 + 6^2 = 72$$

***c)** combien de ces nombres sont supérieurs à 600 ?
Réponse : un nombre a 3 chiffres >600

$$6^2 + 6^2 + 6^2 = 108$$

d) combien de ces nombres sont pairs ?
Réponse : un nombre pair

$$6^2 + 6^2 = 72$$

***e)** combien de ces nombres sont impairs ?

Réponse : un nombre impair

$$6^3 - 2 \times 6^2 = 144$$

Exercice n°3 :

Une classe contient 7 garçons et 3 filles,

a) De combien de manières le professeur peut-il faire un choix de 4 élèves ?

Réponse : $\left\{ \begin{array}{l} \text{les répitions sont impossibles} \\ \text{L/ordre n/importe pas} \end{array} \right.$, *alors* C'est le nombre de combinaisons simples

$$C_{10}^4 = \frac{10!}{4!6!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{24} = 210$$

b) Combien de ces choix comportent au moins une fille ?

Réponse :

$$\begin{aligned} C_3^1 \times C_7^3 + C_3^2 \times C_7^2 + C_3^3 \times C_7^1 &= 3 \times 35 + 3 \times 21 + 1 \times 7 \\ &= 175 \end{aligned}$$

c) Combien comportent exactement une fille ?

Réponse :

$$C_3^1 \times C_7^3 = 3 \times 35 = 105$$

Exercice n°4 :

Une urne contient 12 boules numérotées de 1 à 12. On en tire 3 simultanément.

a) Déterminer le nombre de tirages différents.

Réponse : $\left\{ \begin{array}{l} \text{Les répititions ne sont pas possibles} \\ \text{L'ordre n'importe pas} \end{array} \right.$, *alors* c'est le nombre de combinaisons

$$C_{12}^3 = \frac{12!}{3!9!} = \frac{12 \times 11 \times 10}{6} = 220$$

b) Même question si l'on tire successivement ces trois boules.

Réponse : $\left\{ \begin{array}{l} \text{Les répitions ne sont pas possibles} \\ \text{l'ordre importe} \end{array} \right.$, *alors* c'est le nombre d'arrangements simples

$$A_{12}^3 = \frac{12!}{9!} = 12 \times 11 \times 10 = 1320$$

c) Qu'en est-il, si après chaque tirage, on remet la boule dans l'urne.

Réponse : $\left\{ \begin{array}{l} \text{Les répitions sont possibles} \\ \text{l'ordre importe} \end{array} \right.$, *alors* c'est le nombre d'arrangements avec répitition

$$12^3 = 1728$$

Exercice n°5 :

On considère l'ensemble $E = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$. À l'aide des 6 chiffres de cet ensemble, chacun étant pris une seule fois, combien peut-on former de nombres distincts dans chacun des cas suivants : :

a) Nombres de 6 chiffres ?

Réponse : C'est le nombre de permutations $6\,!{=}720$

b) Nombres de 4 chiffres

Réponse : C'est le nombre d'arrangements simples

$$A_6^4 = \frac{6!}{(6-4)!} = \frac{720}{2} = 360$$

c) Nombres de 4 chiffres commençant par le chiffre 3 ?

Réponse : :C'est le nombre d'arrangements simples

$$A_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{120}{2} = 60$$

1**d)** Nombres de 4 chiffres contenant le chiffre 3 ?

Réponse : $4 \times A_5^3 = 240$
e) Nombres de 4 chiffres contenant les chiffres 3 et 6 ?
Réponse : :

$$4 \times 3 \times A_4^2 = 144$$

Le responsable de la matière : Merini Abdelaziz