CHAPITRE 01:

Rappels mathématiques

Rappels mathématiques :

1. Dimension et Equation aux dimensions

1.1. Dimension

Chaque grandeur physique est caractérisée par sa dimension qui est une propriété associée à une unité. La dimension de la grandeur G est notée **[G]**. Elle nous renseigne sur la nature physique de la grandeur. Par exemple, si G a la dimension d'une masse, on dit qu'elle est homogène à une masse. La relation [G] = M correspond à **l'équation aux dimensions** de la grandeur G.
Voici les symboles des sept grandeurs fondamentales du système international (SI) :

- la longueur → L
- la masse → M
- le temps → T
- l'intensité du courant électrique → I
- la température → θ
- l'intensité lumineuse → J
- la quantité de matière → N

Donc, si G a la dimension d'une : masse, on note [G]=M
longueur, on note [G]=L
temps, on note [G]=T
intensité du courant électrique, on note [G]=I
température, on note [G]= θ
intensité lumineuse, on note [G]= J
quantité de matière, on note [G]= N

Toutes les autres grandeurs sont liées à ces grandeurs fondamentales. Par exemple, le volume d'un cube V étant le produit de trois longueurs, sa dimension est $[V] = L^3$.

1.2. Equation aux dimensions

Toute équation aux dimensions doit être homogène en dimension, c'est-à-dire que ses deux membres aient la même dimension. Ainsi l'équation A = B + C.D n'a de sens que si les dimensions de A et de (B + C.D) sont identiques. Pour obtenir la dimension du second membre on doit appliquer les règles suivantes :

− la dimension du produit C.D est le produit des dimensions de chacune des grandeurs C et D : [C.D] = [C][D].

− la dimension de la somme B + C.D est la dimension de chacun des deux termes B et C.D : [B + C.D] = [B] = [C.D].

Remarque:
− Toute équation aux dimensions d'une grandeur G peut se mettre sous la forme :
$[G] = L^a M^b T^c I^d \theta^e J^f N^g$

- Lorsque la dimension d'une grandeur G est égale à 1 ([G]=1), on dit que la grandeur G est sans dimension.

- Pour les fonctions sin(f), cos(f), tan(f), log(f) et e^f, l'argument f est sans dimension (adimensionné).

- Les fonctions sin(f), cos(f), tan(f), ln(f), log(f) et e^f sont sans dimensions, ainsi [sin(x)]= [cos(x)]= [tan(x)]= [e^x]= [ln(x)]= [log(x)]=1, aussi, une constante est sans dimension.

Exemples

Une vitesse V est le quotient d'une longueur l par un temps t*:* $[V]=LT^{-1}$
- une accélération : $[\gamma]=LT^{-2}$
- une force : $F = m.\gamma \rightarrow [F]= MLT^{-2}$
- un travail : $W = F.l \rightarrow [W]= ML^2T^{-2}$
- une puissance : $P=\frac{W}{t} \rightarrow [P]= ML^2T^{-2}$
- une quantité de chaleur : $[Q] = ML^2T^{-2}$(comme un travail)
- une pression, une contrainte : $p = \frac{F}{S} \rightarrow [p] = ML^{-1} T^{-2}$
- un moment d'inertie : $[M]=ML^2$

1.3. Utilités de l'analyse dimensionnelle

Les équations aux dimensions permettent :

- **de vérifier l'homogénéité des formules :**

Exemple **:** vérifier l'homogénéité de l'expression de l'énergie cinétique $E=\frac{1}{2}mv^2$

$\frac{1}{2}mv^2$est homogène à une énergie (c'est-à-dire un travail), l'équation aux dimensions d'un travail est $[W] = ML^2T^{-2}$ (voir plus haut)

D'après l'expression de l'énergie cinétique, $[E]=[m].[v]^2$, or la dimension d'une vitesse $[v]=LT^{-1}$

donc, $[v]^2=L^2T^{-2}$
Enfin, $[E]=ML^2T^{-2}$, donc l'équation est bien homogène

- **de déterminer la dimension et l'unité d'une grandeur dérivée en fonction des dimensions et unités des grandeurs fondamentales.**

Exemple**:** vitesse d'arrivée au sol d'un objet lâché sans vitesse initiale d'une hauteur h.
La vitesse d'arrivée au sol d'un objet lâché sans vitesse initiale d'une hauteur h est donnée par la relation, $v = \sqrt{2gh}$
Nous déterminons à l'aide l'analyse dimensionnelle la dimension et l'unité de la vitesse :

$v = \sqrt{2gh}=(2gh)^{\frac{1}{2}}$
$[v]=[2]^{1/2}.[g]^{1/2}[h]^{1/2}$

Une constante est sans dimension, donc $[2]^{1/2}=1$
On a déjà donné : $[g]=LT^{-2}$

$[h]=L$

Alors, $[v]=LT^{-1}$, son unité sera m/s

- **de prévoir une expression traduisant une loi physique :**

Exemple : trouver l'expression de la période d'un pendule simple.

Nous essayons d'établir la relation qui décrit la variation de la période en fonction d'un certain nombre de paramètres. Il est facile de penser que la période *P* va dépendre de la masse du corps *m*, de la longueur du fil *l* ainsi que de l'accélération de la pesanteur *g* (voir la figure ci-dessous).

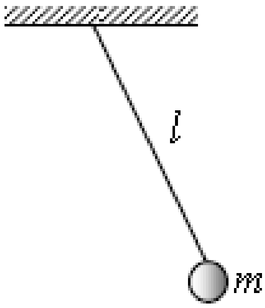

Figure 1 : Pendule simple.

On peut écrire :

$P=k\, m^{a}\, l^{\,b}\, g^{\,c}$

Où *k* est une constante sans dimension et a, b et c sont des exposants à déterminer.

En utilisant l'analyse dimensionnelle

$[P]=[m]^{a}.[l]^{b}.[g]^{c}$

On sait que

$[P]=T$

$[m^{a}]=M^{a}$

$[l^{b}]=L^{b}$

$[g^{c}]=L^{c}\,T^{-2c}$

L'équation aux dimensions devient alors :

$T=M^{a}l^{b+c}T^{-2c}$

En respectant le critère d'homogénéité, il en résulte les relations suivantes

a=0

b+c=0, donc b=-c

-2c=1, donc c=-1/2

D'où, b=1/2
La relation de P devient alors :

$P=k\, l^{1/2} g^{-1/2}$ d'où $P= k\sqrt{\frac{l}{g}}$

Cette analyse montre que la période du pendule ne dépend pas de la masse m.

2. Analyse vectorielle

Pour être caractérisée, une grandeur physique peut être exprimée par une valeur et une unité convenable. Une telle grandeur est appelée : ***grandeur scalaire***, comme : temps, masse, température, pression…etc.
D'autres grandeurs exigent pour leur caractérisation à la fois un point d'application, une direction, un module et un sens. De telles grandeur sont appelées : ***grandeur vectorielles***, comme : vitesse, force, champs électrique…etc.

Les quantités vectorielles sont donc représentées par des ***vecteurs***. Un vecteur est un segment de droit orienté (accompagné d'une flèche pour définir son sens).

2.1. Notion de vecteur

Pour définir un vecteur, nous avons besoin de :

- Une origine (pont d'application), dans le schéma, c'est le point A
- Une direction, c'est la droite (Δ) portant le vecteur
- Un sens, de A vers B, représentée par une flèche
- Un module (appelé aussi : norme ou intensité), c'est la distance entre les deux point A et B. Il représente la quantité vectorielle

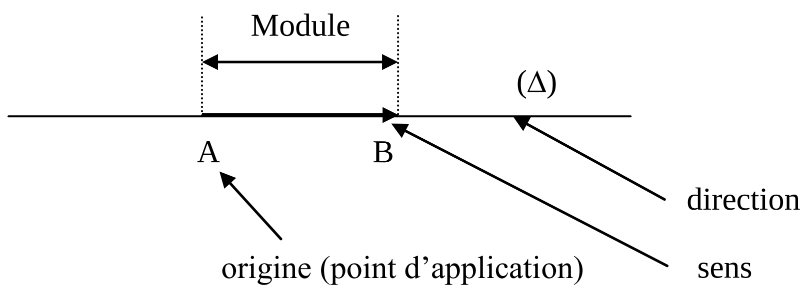

Figure 2 : Représentation d'un vecteur.

Remarque :

- On peut désigner un vecteur par une seule lettre, par exemple $\overrightarrow{AB} = \vec{V}$
- Le module d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$ est noté $|\overrightarrow{AB}|, ou ||\overrightarrow{AB}||$ ou AB

Propriétés

− Un ***vecteur libre*** est un vecteur qui est défini par sa direction, son sens et sa longueur sans fixer son point d'application (son origine).
Exemple: Les vecteurs $\vec{v}, \vec{e}, \vec{f}$ sont des représentants du vecteur libre $\vec{H}$.

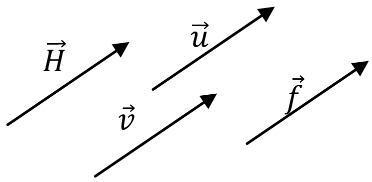

Figure 3 : Vecteurs représentants d'un vecteur libre.

- Un ***vecteur glissant*** est un vecteur qui a un module fixe, un sen fixe et que l'on impose sa droite support (Δ) sans fixer son point d'application.

Exemple : Les vecteurs $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\ et\ \overrightarrow{v_3}$ sont des représentants du vecteur glissant $\vec{V}$.

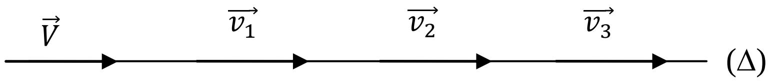

Figure 4 : Vecteurs représentants d'un vecteur glissant.

- deux vecteurs sont égaux s'ils ont même direction, même sens et même module.

Exemple : Les vecteurs $\overrightarrow{v_1}\ et\ \overrightarrow{v_2}$ sont deux vecteurs égaux.

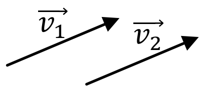

Figure 5 : Deux vecteurs égaux.

- deux vecteurs sont opposés s'ils ont même direction, même module mais des sens opposés; et ils sont "**directement opposés**" s'ils ont même support (Δ).

Exemple : Les vecteurs $\overrightarrow{h_1}$ et $\overrightarrow{h_2}$ sont deux vecteurs opposés.

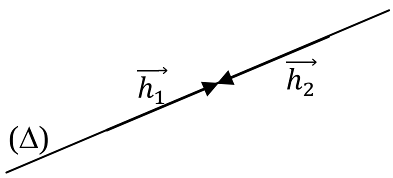

Figure 6 : Deux vecteurs directement opposés.

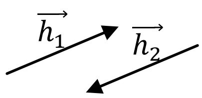

Figure 7 : Deux vecteurs opposés.

- Un vecteur dont le module est égale à 1 (unité) est appelé vecteur unitaire.

Exemple : le vecteur $\vec{u}$ est un vecteur unitaire ($\|\vec{u}\| = 1$)

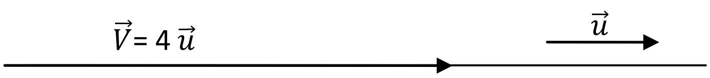

Figure 8 : Vecteur unitaire.

2.2. Opérations sur les vecteurs

2.2.1. Addition vectorielle

Soit deux vecteurs libres $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$, la somme des deux vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ est un vecteur $\vec{w}$, appelé somme ou résultante défini par : $\vec{w} = \overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2}$ et qu'on peut obtenir par :

- ***La méthode du triangle*** : on construit les deux vecteurs de manière à placer l'un après l'autre (l'extrémité du premier coïncide avec l'origine du deuxième) puis on raccorde l'origine du premier avec l'extrémité du deuxième comme suit :

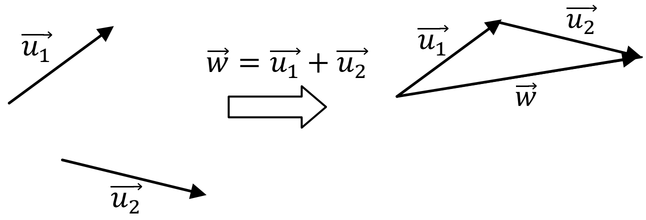

Figure 9 : Addition de deux vecteurs.

Lorsqu'on a plus que deux vecteurs : on doit les placer de manière successive l'un après l'autre comme suit :

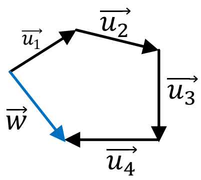

Figure 10 : Addition de plusieurs vecteurs.

- ***La méthode du parallélogramme*** : on construit les deux vecteurs de manière à ramener leurs origines en un seul point, ensuite on construit sur ces deux vecteurs un parallélogramme. Le vecteur somme est la diagonale du parallélogramme partant de l'origine commune des deux vecteurs :

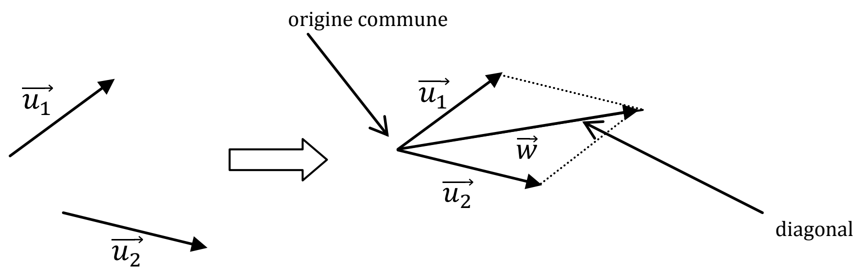

Figure 11 : Addition de deux vecteurs selon la méthode du parallélogramme.

Propriétés

Soient $\vec{u}, \vec{v}$ *et* $\vec{w}$ trois vecteurs quelconques, a et b sont deux constantes.

$\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$ Loi de commutativité

$\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})=(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}$ Loi d'associativité

a.$\vec{u}$ est un vecteur qui a :

- même direction que $\vec{u}$
- même sens que $\vec{u}$ si a est positif, et sens opposé à $\vec{u}$ si a est négatif
- son module est égal à $|a|.\ \|\vec{u}\|$

a.$(\vec{u}+\vec{v})=a.\vec{u}+a.\vec{v}$ Loi de distributivité par rapport à la somme des vecteurs

(a+b). $\vec{u}=a.\vec{u}+b.\vec{u}$ Loi de distributivité par rapport à la somme des scalaires

$\vec{u}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{u}=\vec{u}$ $\vec{0}$ *est le vecteur nul*

$\vec{u}+(-\vec{u})=\vec{0}$ $-\vec{u}$ est le vecteur opposé à $\vec{u}$

$\vec{u}-\vec{v}=\vec{u}+(-\vec{v})$ La soustraction vectorielle revient à une addition vectorielle tout en remplaçant $\vec{v}$ par son opposé. Pour sa définition géométrique, voir plus haut (addition vectorielle)

$\frac{\vec{u}}{u}$ est un vecteur unitaire définissant le sens de $\vec{u}$ (on rappelle que u est le module de $\vec{u}$)

2.3. Repère de l'espace

Un repère de l'espace est un repère tridimensionnel constitué d'un quadruplet $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, avec :
O : est l'origine du repère.
$(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$: un triplet de vecteurs non colinéaires, orientés positivement suivant les axes (Ox), (Oy) et (Oz) respectivement. Ils forment la base du repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.

- Si les vecteurs $((\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ sont deux à deux perpendiculaires, on parle alors d'un repère orthogonal, et si en plus $\|\vec{\imath}\|=\|\vec{\jmath}\|=\|\vec{k}\|=1$ on parle d'un repère orthonormé, appelé aussi un repère cartésien.

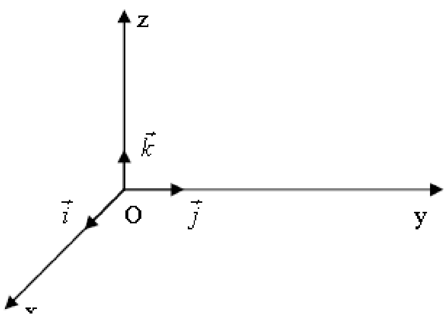

Figure 12 : Système d'axes orthogonaux avec vecteurs unitaires.

2.4. Composantes d'un vecteur

Soit $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ un repère orthogonal direct de l'espace. Soit M un point dans l'espace. La position du point M est caractérisée par le vecteur $\overrightarrow{OM}$. Soient Mx, My et M_z les projections de M sur les axes Ox, Oy et Oz, respectivement. Remarquons que, par construction :

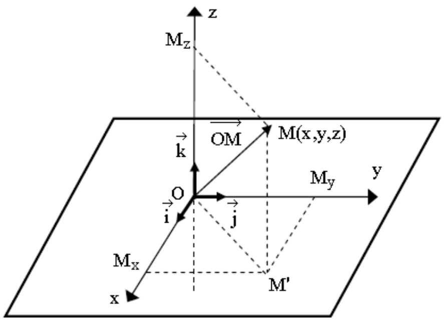

Figure 13 : Composantes d'un vecteur.

Le vecteur $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM`}+\overrightarrow{M`M}$, or $\overrightarrow{OM`}=\overrightarrow{OM_x} + \overrightarrow{OM_y}$ et $\overrightarrow{M`M}=\overrightarrow{OM_z}$
Ainsi, $\overrightarrow{OM}= \overrightarrow{OM_x} + \overrightarrow{OM_y} + \overrightarrow{OM_z}$

On note $\overrightarrow{OM_x}$=x.$\vec{\imath}$
$\overrightarrow{OM_y}$=y.$\vec{\jmath}$
$\overrightarrow{OM_z}$=z.$\vec{k}$

Il revient, $\overrightarrow{OM}$= x.$\vec{\imath}$+ y.$\vec{\jmath}$+ z.$\vec{k}$

Le triplet (x,y,z) est appelé les composantes du vecteur $\overrightarrow{OM}$ ou les coordonnées cartésiennes du point M, avec :
x : abscisse du point M
y : ordonnée du point M
z : côte du point M
On représente alors le vecteur $\overrightarrow{OM}(x, y, z)$ ou couramment $\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$
Le module du vecteur $\overrightarrow{OM}$ est $\|\overrightarrow{OM}\|=\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Cette fois-ci, nous considérons, non pas un point de l'espace mais un vecteur quelconque $\vec{v}$ de l'espace muni d'un repère cartésien.

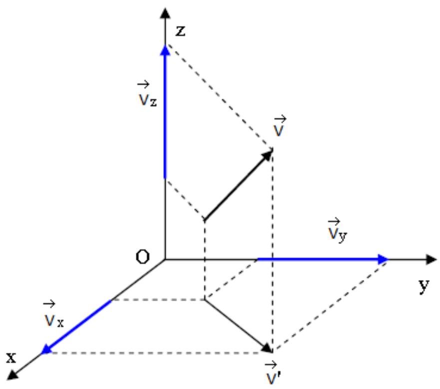

Figure 14 : Représentation d'un vecteur ne partant pas de l'origine du repère orthogonal.
Ramenons le vecteur $\vec{v}$ et ses projections à l'origine O comme suit :

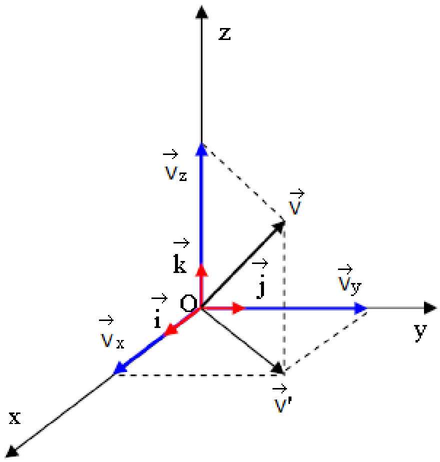

Figure 15 : composantes d'un vecteur.

$\vec{v} = \overrightarrow{v'} + \overrightarrow{v_z}$, or $\overrightarrow{v'} = \overrightarrow{v_x} + \overrightarrow{v_y}$ donc $\vec{v} = \overrightarrow{v_x} + \overrightarrow{v_y} + \overrightarrow{v_z}$

Sachant que :

$\overrightarrow{v_x} = v_x . \vec{\imath}$
$\overrightarrow{v_y} = v_y . \vec{\jmath}$
$\overrightarrow{v_z} = v_z . \vec{k}$
Ainsi, $\vec{v} = v_x . \vec{\imath} + + v_y . \vec{\jmath} + v_z . \vec{k}$
v_x, v_y et v_z sont les composantes du vecteur $\vec{v}$, elles représentent les projections algébriques sur les axe (Ox), (Oy) et (Oz) respectivement.
On note :
$\vec{v}(v_x, v_y, v_z)$ ou $\vec{v}\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$

Le module du vecteur $\vec{v}$ est $\|\vec{v}\| = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2 + {v_z}^2}$

Propriétés

Soient deux points $M(M_x, M_y, M_z)$, $N(N_x, N_y, N_z)$ quelconques et deux vecteurs quelconques $\vec{u}\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$ dans l'espace muni d'un repère cartésien $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$

- Le vecteur $\overrightarrow{MN}$ a pour composantes : $\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix} N_x - M_x \\ N_y - M_y \\ N_z - M_z \end{pmatrix}$
- Le milieu I de MN a pour coordonnées : $I(\frac{N_x + M_x}{2}, \frac{N_y + M_y}{2}, \frac{N_z + M_z}{2})$

- L'addition des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ qu'on note $\vec{u}+\vec{v}=\vec{c}$ a pour composante $\vec{c}\begin{pmatrix} u_x+v_x \\ u_y+v_y \\ u_z+v_z \end{pmatrix}$
- La soustraction des deux vecteurs $\vec{u}-\vec{v}$=$\vec{c}$ a pour composante $\vec{c}\begin{pmatrix} u_x-v_x \\ u_y-v_y \\ u_z-v_z \end{pmatrix}$
- Soit α un scalaire, α.$\vec{u}$ aura pour composante $\begin{pmatrix} \alpha u_x \\ \alpha u_y \\ \alpha u_z \end{pmatrix}$

2.5. Produit scalaire

2.5.1. Définition

Le produit scalaire entre deux vecteurs $\vec{u}\ et\ \vec{v}$ est défini comme suit :

$\vec{u}\,.\vec{v}=||\vec{u}||\,.||\,\vec{v}||cos\alpha$

Avec, α est l'angle que forme les deux vecteurs

Il se lit $\vec{u}$ scalaire $\vec{v}$ et le résultat est un scalaire

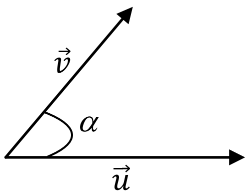

Figure 16 : Deux vecteurs non colinéaires.

2.5.2. Interprétation géométrique

Utilisons l'expression du produit scalaire

$\vec{u}\,.\vec{v}=||\vec{u}||\,.||\,\vec{v}||cos\alpha$

Connaissant la définition du cosinus ($\frac{adjacent}{hypothénus}$)

Alors, $||\,\vec{v}||cos\alpha$ représente la projection perpendiculaire du vecteur $\vec{v}$ sur le vecteur $\vec{u}$

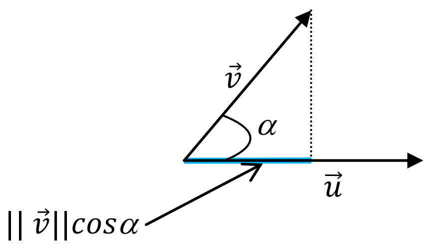

Figure 17 : Projection perpendiculaire d'un vecteur sur un autre.

On peut donc énoncer le produit scalaire comme suit :

$\vec{u}$ scalaire $\vec{v}$ est égale au produit du module de $\vec{u}$ par la projection perpendiculaire de $\vec{v}$ sur $\vec{u}$

2.5.3. Expression analytique

Soient deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace cartésien, muni d'un repère orthogonal direct $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.
Soient, u_x, u_y, u_z les composantes du vecteur $\vec{u}$ dans ce repère, et v_x, v_y, v_z les composantes du vecteur $\vec{v}$, rappelons l'expression d'un vecteur en utilisant ses composantes
$\vec{u}= u_x.\vec{\imath} + u_y.\vec{\jmath} + u_z.\vec{k}$ et $\vec{v}= v_x.\vec{\imath} + v_y.\vec{\jmath} + v_z.\vec{k}$

Donc, $\vec{u}.\vec{v} = (u_x.\vec{\imath} + u_y.\vec{\jmath} + u_z.\vec{k}).(v_x.\vec{\imath} + v_y.\vec{\jmath} + v_z.\vec{k})$

Sachant que $\vec{\imath}.\vec{\jmath}=\begin{cases}1, & si\ i=j\\ 0, & si\ i\neq j\end{cases}$
Il en résulte :

$$\vec{u}.\vec{v} = u_x.v_x + u_y.v_y + u_z.v_z$$

On peut en déduire l'expression du cosinus

$$cos\alpha = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{||\vec{u}||\,.\,||\vec{v}||} = \frac{u_x.v_x + u_y.v_y + u_z.v_z}{\sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}\,.\,\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}}$$

Propriétés
Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace cartésien muni d'un repère orthogonal direct $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, le produit scalaire satisfait les propriétés suivantes :

$\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$ Loi de commutativité
$\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w}) = (\vec{u}.\vec{v}+\vec{u}.\vec{w})$ Loi d'associativité
Si $\vec{u}.\vec{v} = 0$, soit l'un des deux vecteur (ou les deux) est nul, soit $\vec{u}$ est perpendiculaire à $\vec{v}$ ($\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux)
$\vec{u}.\vec{u}=||\vec{u}||^2 = u^2$

2.6. Produit vectoriel
Le produit vectoriel deux vecteurs $\vec{u}\ et\ \vec{v}$ est un vecteur $\vec{w}$ défini comme suit :

$\vec{u}\wedge\vec{v} = \vec{w}$,
- Son module : $\|\vec{w}\|=\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|\sin\alpha$, Avec, α est l'angle que forme les deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$
- Sa direction est perpendiculaire au plan formé par les deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ($\vec{w}\perp\vec{u}$ et $\vec{w}\perp\vec{v}$)
- Son sens est soumis à la règle du tire-bouchon (le tire-bouchon tournant de $\vec{u}$ vers $\vec{v}$ avance vers $\vec{w}$)

On peut définir le sens du vecteur $\vec{w}$ par un vecteur unitaire $\vec{k}$. On écrit alors $\vec{w} = w\vec{k}$

Le sens du vecteur $\vec{w}$ (ou du vecteur $\vec{k}$) peut être défini par la règle du trièdre direct. Les trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ forment un trièdre. Si un observateur allongé sur le premier vecteur $\vec{u}$, regardant le second vecteur $\vec{v}$ le troisième vecteur $\vec{w}$ est à sa gauche, dans le cas inverse on dit que le trièdre est indirect.

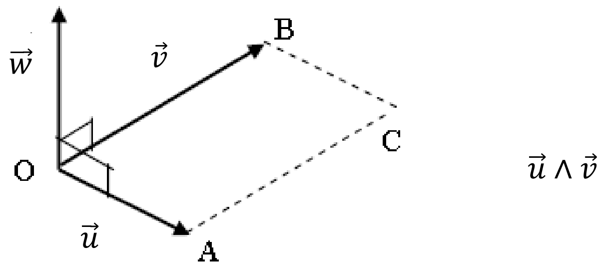

Figure 18 : Produit vectoriel selon un trièdre direct.

Dans le cas de $\vec{u} \wedge \vec{v}$, le tire-bouchon tourne de A vers B, il avance donc vers le haut suivant $\vec{w}$.

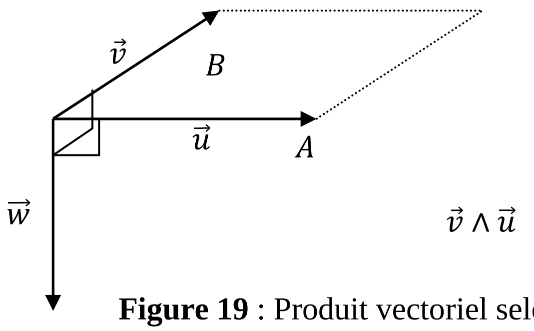

Figure 19 : Produit vectoriel selon un trièdre indirect.

Dans le cas de $\vec{v} \wedge \vec{u}$, le tire-bouchon tourne de B vers A, il avance dons vers le bas suivant $\vec{w}$

2.6.1. Propriétés

$\vec{u} \wedge \vec{v}$ = -$\vec{u} \wedge \vec{v}$ le produit vectoriel n'est pas commutatif

$\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) \neq (\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w}$ le produit vectoriel n'est pas associatif

$\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} \wedge \vec{v}) + (\vec{u} \wedge \vec{w})$ le produit vectoriel est distributif par rapport à l'addition

$(\alpha.\vec{u}) \wedge (\beta.\vec{v}) = \alpha\beta.(\vec{u} \wedge \vec{v})$ loi de la linéarité

Si $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$ soit l'un des deux vecteurs est un vecteur nul, soit les deux vecteurs sont parallèles

Les vecteurs unitaires de la base cartésienne satisfont les relations suivantes :

$\vec{\imath} \wedge \vec{\imath} = \vec{\jmath} \wedge \vec{\jmath} = \vec{k} \wedge \vec{k} = \vec{0}$

$\vec{\imath} \wedge \vec{\jmath} = \vec{k}$, $\vec{\jmath} \wedge \vec{k} = \vec{\imath}$, $\vec{k} \wedge \vec{\imath} = \vec{\jmath}$. Pour retrouver ces formules, on peut utiliser la "Règle des trois doigts" de la main droite.

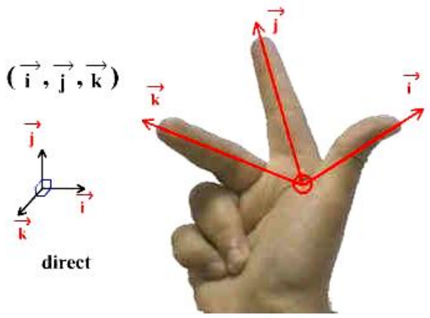

Figure 20 : Règles des trois doigts" de la main droite.

On associe les vecteurs de base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ aux axes d'un trièdre rectangle formé par les trois doigts de la main droite comme montré plus haut sur la figure. Pour former un **trièdre direct**, on oriente le vecteur

- $\vec{\imath}$ dans la direction du pouce
- $\vec{\jmath}$ dans la direction de l'index
- $\vec{k}$ dans la direction du majeur

Remarques

- $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|$ est l'aire d'un parallélogramme de côtés u et v.

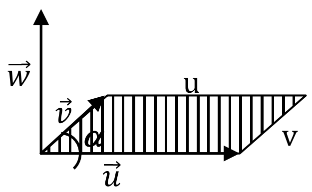

Figure 21 : Module du produit vectoriel.

$w = u.v.sin\alpha$, $\vec{w}$ est appelé vecteur surface orienté perpendiculairement à la surface définie par $\vec{u}$ et $\vec{v}$

2.6.2. Expression analytique

Considérons deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ définis dans un repère orthogonal direct de base cartésienne (O, $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$) par leurs composantes (u_x,u_y,u_z) et (v_x,v_y,v_z) respectivement, leur produit vectoriel est définie par la relation:

$$\vec{u}\wedge\vec{v}=\begin{bmatrix}\vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k}\\ u_x & u_y & u_z\\ v_x & v_y & v_z\end{bmatrix}=(u_y.v_z-u_z.v_y)\vec{\imath}+(u_z.v_x-u_x.v_z)\vec{\jmath}+(u_x.v_y-u_y.v_x)\vec{k}$$

2.7. Double produit vectoriel

On appelle double produit vectoriel entre trois vecteurs $\vec{U}$, $\vec{V}$, $\vec{W}$ le vecteur $\vec{D}$ ou $\vec{D'}$, où le vecteur $\vec{D}\ ou\ \vec{D}$ est défini par :

$$\vec{D}=\vec{U}\wedge(\vec{V}\wedge\vec{W})=(\vec{U}.\vec{W})\vec{V}-(\vec{U}.\vec{V})\vec{W}$$

$$\vec{D'}=(\vec{U}\wedge\vec{V})\wedge\vec{W}=(\vec{U}.\vec{W})\vec{V}-(\vec{V}.\vec{W})\vec{U}$$

Dans le cas de la base orthonormée directe :

$$(\vec{\imath}\wedge\vec{\jmath})\wedge\vec{k}=(\vec{k}\wedge\vec{\imath})\wedge\vec{\jmath}=(\vec{\jmath}\wedge\vec{k})\wedge\vec{\imath}=\vec{0}$$

2.8. Produit mixte

Le produit mixte de trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ est noté : $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]$ tel que :

$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=\vec{u}.(\vec{v}\wedge\vec{w})$. C'est un scalaire qui représente le volume du parallélépipède formé par les trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ de cotés u, v et w

2.8.1. Expression analytique

Considérons trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ définis dans un repère orthogonal direct de base cartésienne (O, $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$, $\vec{k}$) par leurs composantes (u_x,u_y,u_z), (v_x,v_y,v_z) et (w_x,w_y,w_z) respectivement, leur produit mixte est définie par la relation:

$$\vec{u}.(\vec{v}\wedge\vec{w})=\begin{bmatrix}u_x & u_y & u_z\\ v_x & v_y & v_z\\ w_x & w_y & w_x\end{bmatrix}=(u_y.v_z-u_z.v_y)u_x+(u_z.v_x-u_x.v_z)u_y+(u_x.v_y-u_y.v_x)u_z$$

2.8.2. Propriétés

En utilisant l'expression analytique, on peut vérifier facilement que le produit mixte satisfait les propriétés suivantes :

- En permutant l'ordre de deux vecteurs, le produit mixte change de signe :
  $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]$=- $[\vec{v},\vec{u},\vec{w}]$= $[\vec{v},\vec{w},\vec{u}]$

- En faisant une permutation circulaire, le produit mixte reste inchangé

2.9. Dérivés de vecteurs

Soit le vecteur $\vec{u}$, défini dans un repère orthogonal direct de base $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ fixe, par ses composantes dépendantes d'une variable t (le temps par exemple) :

Pour simplifier l'écriture, on va considérer les composantes de $\vec{u}$(t) :

$$\vec{u}(\mathrm{t})\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

On dit que le vecteur $\vec{u}$ est une fonction vectorielle,

$$\frac{d\vec{u}(\mathrm{t})}{dt} = \frac{dx(\mathrm{t})}{dt}\vec{\imath} + \frac{dy(\mathrm{t})}{dt}\vec{\jmath} + \frac{dz(\mathrm{t})}{dt}\vec{k}$$

2.9.1. Propriétés

Soit deux fonctions vectorielles $\vec{u}(\mathrm{t})$ et $\vec{v}(\mathrm{t})$

$$\frac{d(\vec{u}(\mathrm{t})+\vec{v}(\mathrm{t}))}{dt} = \frac{d\vec{u}(\mathrm{t})}{dt} + \frac{d\vec{v}(\mathrm{t})}{dt}$$

$$\frac{d(\vec{u}(\mathrm{t}).\vec{v}(\mathrm{t}))}{dt} = \frac{d\vec{u}(\mathrm{t})}{dt}.\vec{v}(\mathrm{t}) + \vec{u}(\mathrm{t}).\frac{d\vec{v}(\mathrm{t})}{dt}$$

$$\frac{d(\vec{u}(\mathrm{t})\wedge\vec{v}(\mathrm{t}))}{dt} = \frac{d\vec{u}(\mathrm{t})}{dt}\wedge\vec{v}(\mathrm{t}) + \vec{u}(\mathrm{t})\wedge\frac{d\vec{u}(\mathrm{t})}{dt}$$

Soit f(t) une fonction scalaire, alors $\frac{d(f(t)\vec{u}(\mathrm{t}))}{dt} = \frac{df(t)}{dt}\vec{u}(\mathrm{t}) + \mathrm{f}(\mathrm{t})\,\frac{d\vec{u}(\mathrm{t})}{dt}$

2.10. Intégrales de vecteurs

Soit un vecteur $\vec{u}(\mathrm{t})$ défini dans un repère fixe. Ce vecteur est une fonction de t (donc une fonction vectorielle), ses composantes sont :

$$\vec{u}(\mathrm{t})\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

On définit une intégrale de $\vec{u}(\mathrm{t})$ par :

$$\int\vec{u}(\mathrm{t})\,dt = \vec{\imath}\int x(t)\,dt + \vec{\jmath}\int y(t)\,dt + \vec{k}\int z(t)\,dt$$

Donc l'intégrale d'un vecteur $\vec{u}(\mathrm{t})$ est un vecteur dont les composantes sont les intégrales des composantes du vecteur $\vec{u}(\mathrm{t})$.