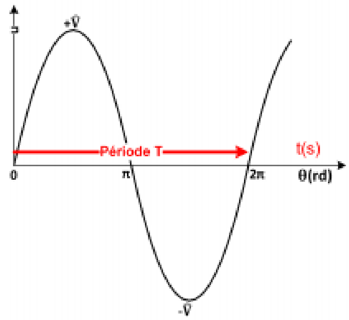
Corrigé TD N°1

Exercice 1

1. Représentation temporelle



$$v(t)=V_{\max}\sin\theta$$

$$V_{moy}=\frac{1}{T}\int_0^T i(t)\,dt=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}V_{\max}\sin\theta\,d\theta=\frac{V_{\max}}{2\pi}\left|-\cos\theta\right|_0^{2\pi}$$

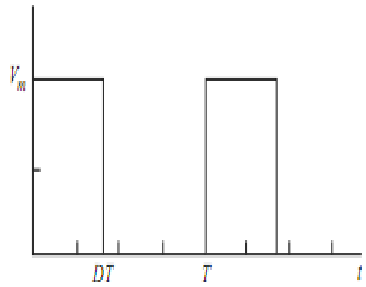
$$=-\frac{V_{\max}}{2\pi}\left[\cos 2\pi-\cos 0\right]=0$$

$$V_{eff}=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T v^2(t)\,dt}=\sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}V_{\max}^2\sin^2\theta\,d\theta}=\sqrt{\frac{V_{\max}^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos 2\theta}{2}\,d\theta}$$

$$=\sqrt{\frac{V_{\max}^2}{4\pi}\int_0^{2\pi}(1-\cos 2\theta)\,d\theta}=\sqrt{\frac{V_{\max}^2}{4\pi}\left|\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right|_0^{2\pi}}$$

$$=\sqrt{\frac{V_{\max}^2}{4\pi}\left(2\pi+\frac{1}{2}\sin 4\pi\right)-\left(0+\frac{1}{2}\sin 0\right)}$$

$$=\sqrt{\frac{V_{\max}^2}{4\pi}(2\pi)}=\frac{V_{\max}}{\sqrt{2}}$$

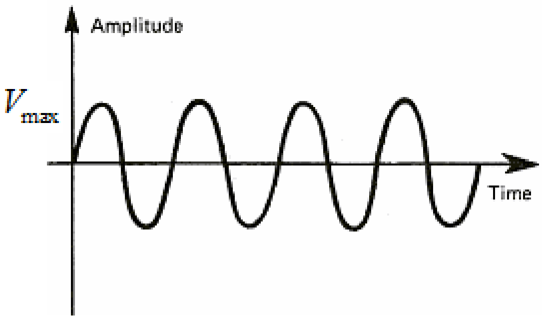


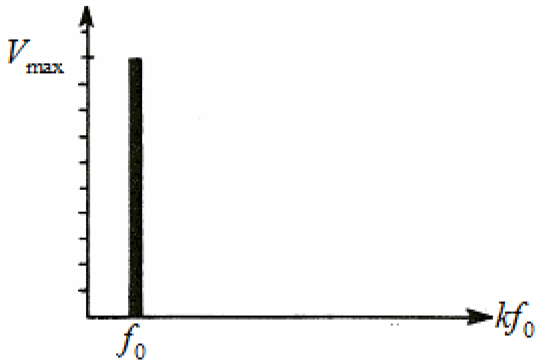
$$v(t)=\begin{cases}V_{\max} & 0<t<DT\\ 0 & DT<t<T\end{cases}$$

$$\langle V\rangle=V_{moy}=\frac{1}{T}\int_0^{DT}V_m\,dt=\frac{V_m}{T}\left|t\right|_0^{DT}=DV_m$$

$$V_{eff}=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T v^2(t)\,dt}=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^{DT}V_{\max}^2\,dt}=\sqrt{\frac{V_{\max}^2}{T}DT}=V_{\max}\sqrt{D}$$

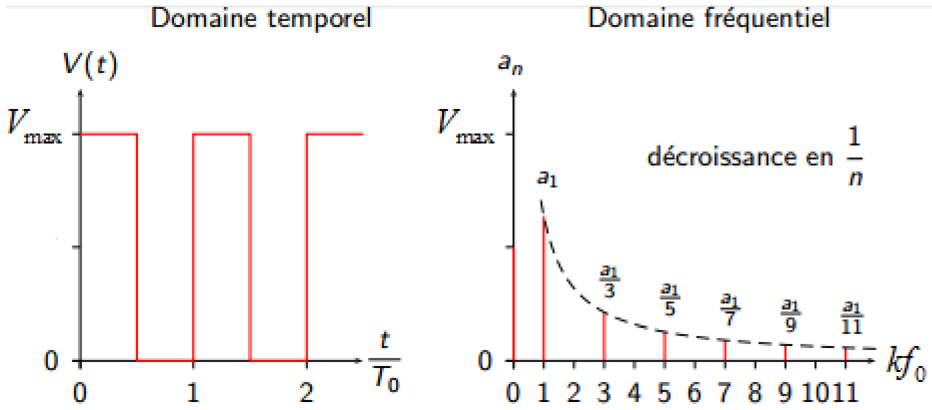
2. Représentation soectrale





$V_{moy}=0$; absence de composante continue dans le spectre

$V = V_{eff} = \frac{V_{max}}{\sqrt{2}}$; la valeur efficace dela composante du fondamentale



$$V(t) = \frac{V_m}{2} + \frac{V_m}{\pi}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1-(-1)^n}{n}\right)\sin 2\pi fnt \quad D = \frac{1}{2}$$

$$1-(-1)^n = \begin{cases} 2 & n\,pair \\ 0 & n\,impair \end{cases}$$

$$V(t) = \frac{V_m}{2} + \frac{2V_m}{\pi}\left(\sin 2\pi ft + \frac{1}{3}\sin 2\pi 3ft + \frac{1}{5}\sin 2\pi 5f + \frac{1}{7}\sin 2\pi 7f\right)$$

$$V_{moy} = \frac{V_m}{2}$$

$$V = V_{eff} = \sqrt{V_{moy}^{\ 2} + \left(\frac{V_{1max}}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{V_{3max}}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{V_{5max}}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{V_{7max}}{\sqrt{2}}\right)^2}$$

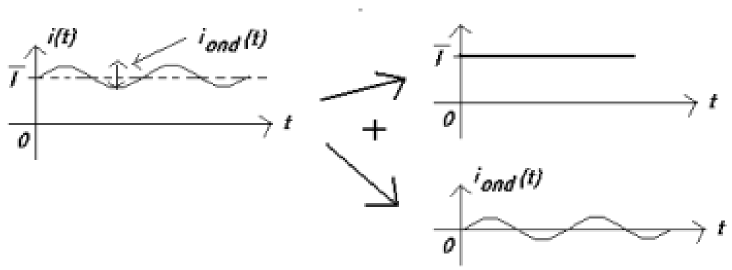
$$= \sqrt{\left(\frac{V_m}{2}\right)^2 + \left(\frac{2V_m}{\sqrt{2}\pi}\right)^2 + \left(\frac{2V_m}{3\sqrt{2}\pi}\right)^2 + \left(\frac{2V_m}{5\sqrt{2}\pi}\right)^2 + \left(\frac{2V_m}{7\sqrt{2}\pi}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{V_m^{\ 2}}{4} + \frac{4V_m^{\ 2}}{2\pi^2} + \frac{4V_m^{\ 2}}{18\pi^2} + \frac{4V_m^{\ 2}}{50\pi^2} + \frac{4V_m^{\ 2}}{98\pi^2}} = V_m^{\ 2}\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{2}{\pi^2} + \frac{2}{9\pi^2} + \frac{4}{50\pi^2} + \frac{4}{98\pi^2}}$$

$$= V_m\sqrt{0.25 + \frac{2}{\pi^2} + \frac{2}{9\pi^2} + \frac{4}{50\pi^2} + \frac{4}{98\pi^2}} = V_m\sqrt{0.49} \approx V_m\sqrt{\frac{1}{2}} = V_m\sqrt{0.5}$$

3.

1.4) ONDULATION



$$\boxed{i(t)=\bar{I}+i_{ond}(t)}$$

$$\boxed{\overline{I_{ond}}=0}$$

$$v(t)=V_{moy}+v_{alt}(t) \quad \langle V_{alt}\rangle=0$$

$$V_{eff}^2=\frac{1}{T}\int_0^T v^2(t)\,dt=\frac{1}{T}\int_0^T\left(V_{moy}+v_{alt}(t)\right)^2 dt=\left[V_{moy}^2+\underbrace{\frac{1}{T}\int_0^T\left(v_{alt}(t)\right)^2 dt}_{V_{alteff}^2}+2\frac{V_{moy}}{T}\underbrace{\int_0^T v_{alt}(t)\,dt}_{0}\right]$$

$$V_{eff}^2=V_{moy}^2+V_{alteff}^2 \Rightarrow \frac{V_{eff}^2}{V_{moy}^2}=1+\frac{V_{alteff}^2}{V_{moy}^2}\Rightarrow F_v^2=1+\tau_v^2$$

Exercice 2

1. En régime périodique une résistance R est le siège d'une tension $u(t)$ et d'un courant $i(t)$. La puissance active dissipée dans R s'exprime donc par :

$$P_R=P_{moy}=\frac{1}{T}\int_0^T p(t)\,dt=\frac{1}{T}\int_0^T u(t)i(t)\,dt=\frac{1}{T}\int_0^T Ri^2(t)\,dt=R\left[\frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)\,dt\right]=RI_{eff}^2$$

On peut aussi écrire :

$$P_R=P_{moy}=\frac{1}{T}\int_0^T p(t)\,dt=\frac{1}{T}\int_0^T u(t)i(t)\,dt=\frac{1}{T}\int_0^T \frac{u^2(t)}{R}\,dt=\frac{1}{R}\left[\frac{1}{T}\int_0^T u^2(t)\,dt\right]=\frac{U_{eff}^2}{R}$$

Pour un dipole R

$$U_{eff}=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u^2(t)\,dt}=\sqrt{R^2\frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)\,dt}=R\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)\,dt}=RI_{eff}$$

Donc :

$$P_R=RI_{eff}^2=\frac{U_{eff}^2}{R}=\frac{U_{eff}^2}{\frac{U_{eff}}{I_{eff}}}=U_{eff}I_{eff}$$

Pour une inductance :

$$P_L = P_{moy} = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)i(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T \left(L\frac{di(t)}{dt}\right)i(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{d\left(\frac{1}{2}Li^2\right)}{dt}dt$$

$$= \frac{L}{2T}\left|i(t)^2\right|_0^T = \frac{L}{2T}\left[i(T)^2 - i(0)^2\right]$$

En régime périodique: $i(T) = i(0) \Rightarrow P_L = 0$

La puissance active dans une inductance est nulle

Pour unecondensateur :

$$P_C = P_{moy} = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)i(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T \left(C\frac{du(t)}{dt}\right)u(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{d\left(\frac{1}{2}Cu^2\right)}{dt}dt$$

$$= \frac{C}{2T}\left|u(t)^2\right|_0^T = \frac{C}{2T}\left[u(T)^2 - u(0)^2\right]$$

En régime périodique: $u(T) = u(0) \Rightarrow P_C = 0$

2. Un dipole en régime alternatif sinusoidal est le siège d'une tension $u(t) = U\cos(\omega t + \varphi)$ et d'un courant $i(t) = I\cos(\omega t)$.

$$P_{moy} = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)i(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T U_{\max}\cos(\omega t + \varphi)I_{\max}\cos(\omega t)dt$$

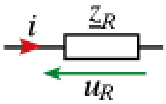
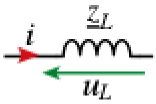
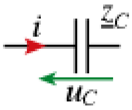
$$= \frac{U_{\max}I_{\max}}{T}\int_0^T \cos(\omega t + \varphi)\cos(\omega t)dt = \frac{U_{\max}I_{\max}}{T}\int_0^T \frac{\left[\cos(\omega t + \varphi + \omega t) + \cos(\omega t + \varphi - \omega t)\right]}{2}dt$$

$$= \frac{U_{\max}I_{\max}}{2T}\int_0^T \left[\cos(2\omega t + \varphi) + \cos(\varphi)\right]dt = \frac{U_{\max}I_{\max}}{2T}\int_0^T \cos(\varphi)dt + \frac{U_{\max}I_{\max}}{2T}\underbrace{\int_0^T \cos(2\omega t + \varphi)dt}_{=0}$$

$$= \frac{U_{\max}I_{\max}}{2T}\int_0^T \cos(\varphi)dt = \frac{U_{\max}I_{\max}\cos(\varphi)T}{2T} = \frac{U_{\max}}{\sqrt{2}}\frac{I_{\max}}{\sqrt{2}}\cos(\varphi) = U_{eff}I_{eff}\cos(\varphi)$$

On rappelle que : $\cos(a)\cos(b) = \dfrac{\cos(a+b) + \cos(a-b)}{2}$

Puissance active pour les dipoles élémentaires :

Résistance $\varphi = 0 \Rightarrow \cos(\varphi) = 1$ $P_{moy} = U_{eff} I_{eff} \cos(\varphi) = U_{eff} I_{eff}$	 $Z_R = R; \varphi_R = 0$
Inductance L'intensité est en retard de 90° sur la tension $\varphi = 90° \Rightarrow \cos(\varphi) = 0$ $P_{moy} = U_{eff} I_{eff} \cos(\varphi) = 0$ Une inductance ne consomme pas de puissance active.	 $Z_L = jL\omega; \varphi_L = \frac{\pi}{2}$
Condensateur L'intensité est en avance de 90° sur la tension $\varphi = 90° \Rightarrow \cos(\varphi) = 0$ $P_{moy} = U_{eff} I_{eff} \cos(\varphi) = 0$ Un condensateur ne consomme pas de puissance active.	 $Z_C = \frac{1}{jC\omega} \quad ; \varphi_C = -\frac{\pi}{2}$

Exercice 3

La puissance moyenne d'un redresseur monophasé sur charge résistive.

$$P_{moy} = \frac{U_{eff}^2}{R} = \frac{\left(\frac{U_{\max}}{2}\right)^2}{R} = \frac{U_{\max}^2}{4R}$$

La puissance apparente d'un redresseur monophasé sur charge résistive.

$$S = U_{eeff} I_{seff} = \frac{U_{\max}}{\sqrt{2}} \frac{U_{\max}}{2R} = \frac{U_{\max}^2}{2\sqrt{2}R}$$

Le facteur de puissance :

$$k = \frac{P}{S} = \frac{\frac{U_{\max}^2}{4R}}{\frac{U_{\max}^2}{2\sqrt{2}R}} = \frac{2\sqrt{2}R}{4R} = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.707$$

Ce dispositif assure l'augmentation de la tension moyenne mai il demande à etre amélioré afin d'atteindre une valeur proche de la tension crete avec un facteur de puissance bien meilleur que 0.71