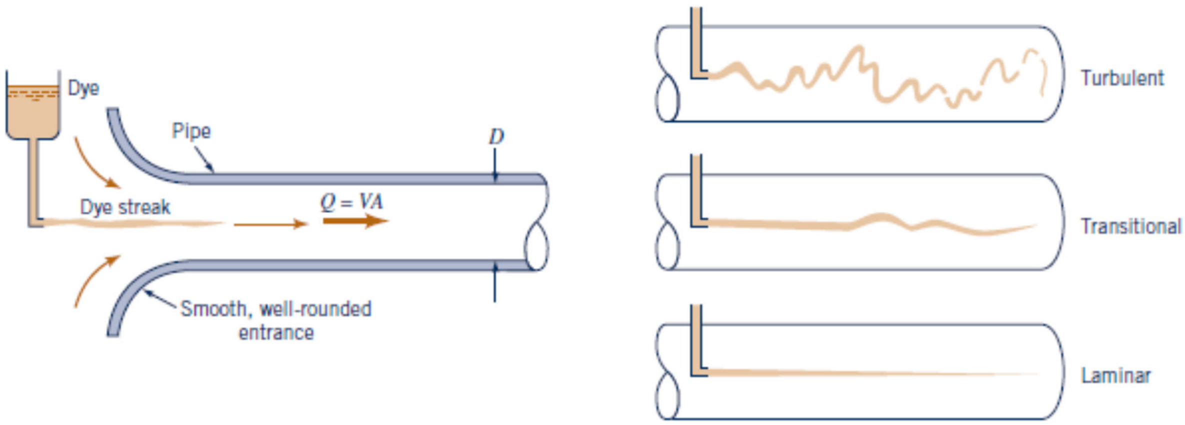
Chapitre 4 : Dynamique des fluides incompressibles réels

1. Régimes d'écoulements et expérience de Reynolds

Il existe deux régimes d'écoulement pour les fluides : Laminaire et turbulent, Dans le premier régime le fluide s'écoule en lamelles qui glissent les unes sur les autres ; les lignes de courant sont bien définies. Par contre, dans le régime turbulent les lignes de courant se mélangeant donnant des formes chaotiques. Osborne Reynolds (1842-1912) est le premier à distinguer la différence entre ces deux régimes d'écoulements. Il utilise un écoulement d'eau dans une conduite circulaire de diamètre D avec une vitesse V. Reynolds injecte un filet neutre de colorant dans l'eau ; pour les petites vitesses le filet reste bien distinct avec un léger épaississement dû à la diffusion du colorant dans l'eau. Pour un débit plus important (vitesse plus grande), le filet de colorant commence à fluctuer dans le temps et dans l'espace avec des ruptures intermittentes et irrégulières le long de la conduite. Pour les grands débits, le filet devient rapidement non distinct et diffuse dans la conduite de façon aléatoire. Ces trois phénomènes sont dits régimes : laminaire, transitoire et turbulent.

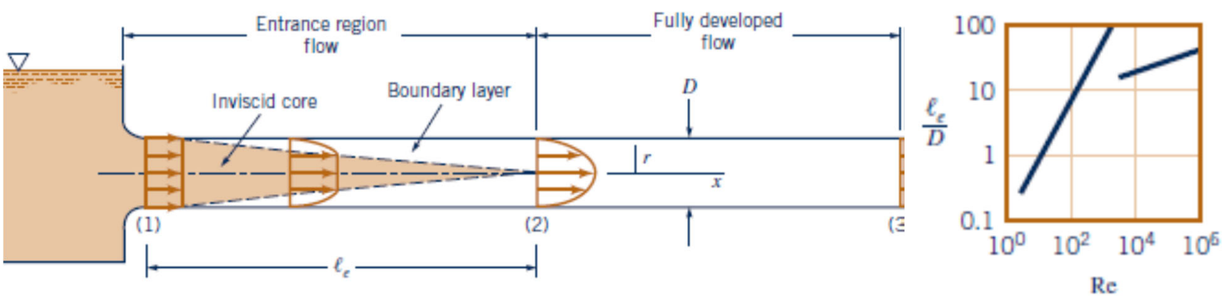


Les fluctuations turbulentes sont la cause de la dispersion du colorant dans la conduite. En écoulement laminaire la vitesse a une seule composante $\vec{V} = u\vec{\imath}$. Pour celui turbulent la direction prédominante est celle le long de la conduite accompagnée des composantes normales à la conduite $\vec{V} = u\vec{\imath} + v\vec{\jmath} + w\vec{k}$. Le paramètre important qui détermine le régime d'écoulement dans la conduite est dit « nombre de Reynolds » : $Re = \frac{\rho V D}{\mu}$ où v est la vitesse moyenne dans la conduite, ainsi l'écoulement est laminaire si $Re < 2100$, il est turbulent si $Re > 4000$ entre les deux c'est la transition.

2. Longueur d'entrée et écoulement développé :

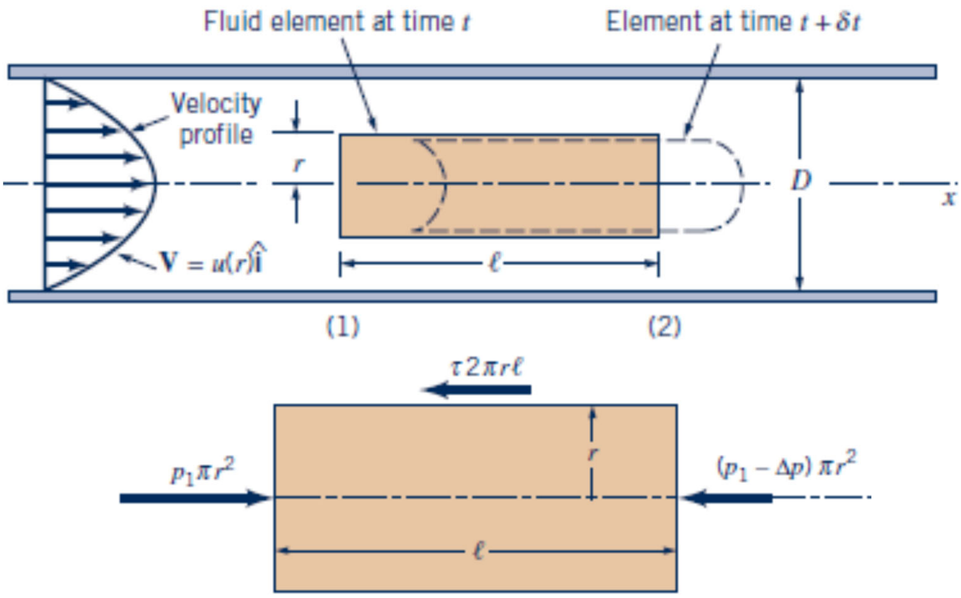
L'entrée d'une conduite est dite région « d'entrée », le fluide entre avec une vitesse presque constante (section (1)). Lors de son mouvement, les effets visqueux forment une couche près de la paroi dite « couche limite », dans cette couche la vitesse diminue vers la paroi jusqu'à s'annuler sur cette dernière sous l'effet de la viscosité. A partir d'une distance de l'entrée le profil de vitesse reste inchangé, l'écoulement est dit alors « totalement développé ». Pour un écoulement laminaire, la longueur d'entrée est donnée par : $l_e = 0.06DRe$

Pour l'écoulement turbulent elle est : $l_e = 4.4DRe^{\frac{1}{6}}$



3. Pertes de charges linéaires dans les conduites

Dans cette partie on va calculer les pertes de pression ou de hauteur dites « pertes de charges », ces dernières sont dues aux frottements entre les particules fluides et les parois solides des conduites. On va considérer l'écoulement totalement développé dans les conduites, ensuite on calculera les pertes de charges (ΔP) le long de la conduite qui sont causés par le frottement entre les particules fluides et les parois. Pour cela prenons un élément cylindrique de fluide de longueur ***l*** et de rayon ***r*** centré à l'axe ***x*** horizontal dans une conduite de diamètre ***D***.



On représente le cylindre aux temps ***t*** et ***t+Δt*** ; l'écoulement étant développé alors le profil de vitesse est constant ce qui veut dire que l'accélération locale est nulle (***dv/dt=0***). Si les effets de la gravité sont négligés (***g=0***), la pression est constante dans les sections transversales et varie le long de la conduite d'une section à une autre. Prenons deux points ***(1)*** et ***(2)***, au point ***(1)*** $P=P_1$ au point ***(2)*** $P=P_2$. Puisqu'il y'a perte de charge (de pression) alors $P_2= P_1- \Delta P$ avec ΔP est la chute de pression entre les points ***(1)*** et ***(2)*** ($\Delta P > 0$).

La contrainte visqueuse est fonction de ***r***, ***τ=τ(r)***, appliquons la deuxième loi de Newton ***F=ma*** au cylindre dans la direction ***x*** : $F_x=\Sigma m.a_x$ dans ce cas $a_x=0$ (écoulement totalement développé), on a donc : $p_1\pi r^2 - (p_1 - \Delta p)\pi r^2 - \tau 2\pi r l = 0$ cela donne $\frac{\Delta p}{l} = \frac{2\tau}{r}$. Puisque $\frac{\Delta p}{l}$ ne dépendent pas de ***r***, il faut que $\frac{2\tau}{r}$ n'en dépendent pas aussi, c.a.d. que ***τ*** doit être égale ***τ=cte.r***. Appliquons les conditions aux limites pour calculer cette constante.

A ***r=0*** on a, ***τ=0*** pas de frottement, et à ***r=D/2*** (sur la paroi de la conduite) la contrainte est maximale, elle est notée τ_p ou τ_w donc $\tau_w = cte.D/2$ ce qui donne $cte=2\tau_w/D$ et on obtient la contrainte en fonction de ***r*** : $\tau = \frac{2\tau_w}{D} r$ cette contrainte varie linéairement en fonction de ***r***. Si on remplace ***τ*** dans la relation :

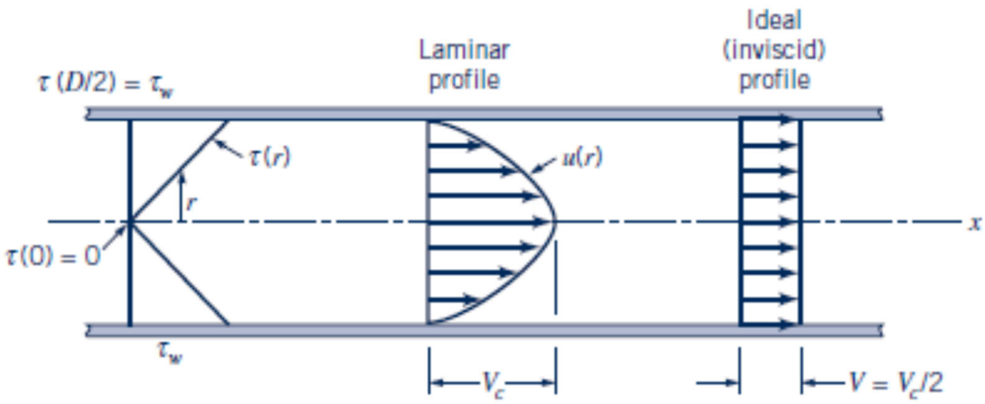
$$p_1\pi r^2 - (p_1 - \Delta p)\pi r^2 - 4\pi \frac{\tau_w}{D} l r^2 = 0.$$

On trouve : $\Delta p = 4\frac{l\tau_w}{D}$.

Cette formule veut dire qu'une valeur modérée (petite) de $\boldsymbol{\tau_w}$ peut produire une perte de charge importante si la conduite est suffisamment longue ***l/D>>1***.

3.1 Calcul du profil de vitesse et du débit en fonction de la perte de charge

Prenons un écoulement développé dans une conduite circulaire comme le montre la figure.



On sait que la contrainte de frottement dans un fluide newtonien est proportionnelle au gradient de la vitesse : $\tau = \mu\frac{du}{dr}$ pour notre cas $\tau = -\mu\frac{du}{dr}$, le signe ***(-)*** est inclus pour donner $\boldsymbol{\tau>0}$ pour ***du/dr < 0***. En combinant les équations : $\frac{\Delta p}{l} = \frac{2\tau}{r}$ et $\tau = -\mu\frac{du}{dr}$ on aura $\frac{du}{dr} = -\frac{\Delta p}{2\mu l}r$

L'intégration donne le profil de la vitesse : $\int du = -\frac{\Delta p}{2\mu l}\int rdr$ d'où $u(r) = -\frac{\Delta p}{4\mu l}r^2 + c_1$

c_1 est constante, pour la trouver appliquons les conditions aux limites.

A la paroi de la conduite la vitesse est nulle : Pour $r = \frac{D}{2} \rightarrow u = 0 \rightarrow c_1 = \frac{\Delta p D^2}{16\mu l}$

Le profil de vitesse est donc :

$$u(r) = \frac{\Delta p D^2}{16\mu l}\left[1 - \left(\frac{2r}{D}\right)^2\right] = V_a\left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right]$$

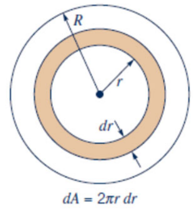
On note $V_a = \frac{\Delta p D^2}{16\mu l}$, la vitesse sur l'axe de la conduite et $R = \frac{D}{2}$ son rayon.

Une autre expression alternative peut être trouvée en utilisant la relation $\Delta p = 4\frac{l\tau_w}{D}$:

$$u(r) = \frac{\tau_w D}{4\mu}\left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right]$$

Le débit volume à travers la conduite est calculé par :

$$\dot{Q} = \int u(r)d\,A = \int_0^R u(r)2\pi r dr = 2\pi V_a \int_0^R u\left[1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right] rdr = \frac{\pi R^2 V_a}{2}$$



Par définition, la vitesse moyenne est le débit divisé par la section transversale :

$$V_m = \frac{\dot{Q}}{A} = \frac{V_a}{2} = \frac{\Delta p D^2}{32\mu l}$$

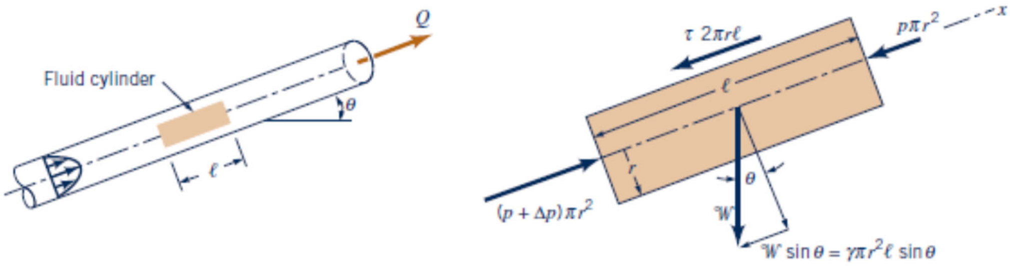
Le débit est donc

$$\dot{Q} = \frac{\pi D^4 \Delta p}{128\mu l}$$ qui est dite relation de Poiseuille

Cette relation montre que pour un écoulement laminaire dans une conduite horizontale, le débit est directement proportionnel à la chute de pression $\Delta \boldsymbol{P}$ et au diamètre $\boldsymbol{D}$ de la conduite ; inversement proportionnel à la viscosité $\boldsymbol{\mu}$ et à la longueur de la conduite **l**.

3.2 Cas d'une conduite inclinée

L'extension pour les conduites inclinées sera faite en prenant une conduite inclinée avec l'angle $\boldsymbol{\theta}$ par rapport à l'horizontale.



Les forces appliquées sur l'élément cylindrique sont :

$$(p+\Delta p)\pi r^2 - p\pi r^2 - 2\pi r l\tau - \rho g \pi r^2 l \sin\theta = 0$$

$$\Delta p r - 2l\tau - \rho g r l \sin\theta = 0 \rightarrow \frac{\Delta p - \rho g l \sin\theta}{l} = \frac{2\tau}{r}$$

Donc tous les résultats de la conduite horizontale sont valides pourvu que $\Delta \boldsymbol{P}$ sera remplacée par

$\Delta p - \rho g l \sin\theta$, d'où la vitesse moyenne sera :

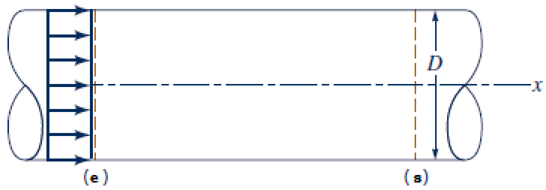
$$V_m = \frac{(\Delta p - \rho g l \sin\theta)D^2}{32\mu l}$$

Et le débit : $$\dot{Q} = \frac{\pi D^4(\Delta p - \rho g l \sin\theta)}{128\mu l}$$

5. Equation d'énergie pour l'écoulement dans une conduite avec perte de charge.

5.1 Premier principe pour un écoulement 1D, stationnaire et sans travail extérieur.

Le bilan d'énergie s'écrit : $\Delta\dot{Q} + \Delta\dot{W} = \Delta\dot{E} = \Delta(\dot{m}e)$



Avec $\dot{m}$ est le débit masse. Dans ce cas, il y perte de chaleur causée par le frottement, le seul travail non nul est celui des forces de pression à l'entrée et à la sortie du volume de contrôle. La puissance nette perdue sous forme de chaleur est : $\Delta\dot{Q} = \dot{Q}_s - \dot{Q}_e = \dot{Q}_{net}$

La puissance développée sous forme de travail est égale :

$$\Delta\dot{W} = -\Delta(pvs) = -[(pvs)_s - (pvs)_e],\ v \text{ étant le volume massique.}$$

Si on applique l'équation du premier principe au volume de contrôle montré par la figure, on trouve : $\dot{Q}_{net} - [(pvs)_s - (pvs)_e] = \Delta(\dot{m}e) = \left[\dot{m}\left(u + \frac{\mathrm{v}^2}{2} + gz\right)\right]$

avec $\dot{m} = \rho \mathrm{v}s$, (v vitesse et u énergie interne). Le réarrangement des termes donne :

$$\dot{q}_{net} - (u_s - u_e) = \left(\frac{p_s}{\rho_s} + \frac{\mathrm{v}_s^2}{2} + gz_s\right) - \left(\frac{p_e}{\rho_e} + \frac{\mathrm{v}_e^2}{2} + gz_e\right) \text{ avec } \dot{Q}_{net} = \frac{\dot{q}_{net}}{\dot{m}}$$

S'il n'y a pas de frottement, on doit retrouver la relation d Bernoulli, alors le terme :

$$\dot{q}_{net} - (u_s - u_e) = 0$$

Selon le deuxième principe de la thermodynamique s'il y'a du frottement, alors Δs=ΔQ/T>0:

$$\dot{q}_{net} - (u_s - u_e) > 0 \quad \text{et} \quad \dot{q}_{net} - (u_s - u_e) = pertes\ par\ frottment$$

En général, l'équation d'énergie pour un écoulement incompressible stationnaire entre deux stations (1) et (2) s'écrit :

$$\frac{p_1}{\rho g} + \alpha_1 \frac{\mathrm{v}_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\rho g} + \alpha_1 \frac{\mathrm{v}_2^2}{2g} + z_2 + h_L$$

Les facteurs α_1 et α_2 compensent le profil de vitesse qui n'est pas uniforme, si ce dernier est uniforme $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$. La hauteur de pertes est due aux pertes visqueuses, pour trouver cette hauteur comparons l'équation trouvée avec l'équation : $\frac{\Delta p - \rho g l \sin\theta}{l} = \frac{2\tau}{r}$ qui s'écrit aussi

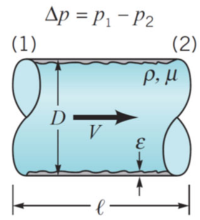
$$\frac{\Delta p}{\rho g} - l \sin\theta = \frac{2\tau l}{\rho g r}$$

On note que $\Delta p = p_1 - p_2,\ z_2 - z_1 = l\sin\theta$ et $\mathrm{v}_1 = \mathrm{v}_2$ pour une conduite de section constante. D'autre part on a : $\tau = \frac{2\tau_w}{D} r$, ce qui donne : $h_L = \frac{2\tau l}{\rho g r} = \frac{4 l \tau_w}{\rho g D}$.

6. Pertes de charges linéaires

Soit une conduite circulaire dans laquelle s'écoule un fluide. Si l'écoulement est développé, la chute de pression est : $\Delta p = F(\rho, \mathrm{v}, D, \mu, l, \varepsilon)$

Avec ε est la rugosité de la surface interne de la conduite.



L'analyse dimensionnelle donne : $\frac{\Delta p}{\rho\frac{\mathrm{v}^2}{2}} = F\left(\frac{\mu}{\rho \mathrm{v} D}, \frac{\varepsilon}{D}, \frac{l}{D}\right)$

Si on suppose que la chute de pression est proportionnelle à *l/D* on peut écrire :

$$\frac{\Delta p}{\rho\frac{\mathrm{v}^2}{2}} = \frac{l}{D}\phi\left(\frac{\mu}{\rho \mathrm{v} D}, \frac{\varepsilon}{D}\right) = \frac{l}{D}\phi\left(R_e, \frac{\varepsilon}{D}\right)$$

Le terme $\frac{\Delta p}{\rho\frac{\mathrm{v}^2}{2}}$ est dit coefficient de frottement *f*. Alors pour une conduite horizontale :

$\Delta p = f\frac{l}{D}\rho\frac{\mathrm{v}^2}{2}$ où $f = \phi\left(R_e, \frac{\varepsilon}{D}\right)$

Pour un écoulement laminaire totalement développé $f = \frac{64}{Re}$ indépendamment de ε/D. Pour un écoulement turbulent $f = \phi\left(R_e, \frac{\varepsilon}{D}\right)$.

L'équation d'énergie s'écrit :

$$\frac{p_1}{\rho g} + \alpha_1\frac{\mathrm{v}_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\rho g} + \alpha_1\frac{\mathrm{v}_2^2}{2g} + z_2 + h_L$$

Avec h_l est la perte de charge linéaire, si la conduite est horizontale et la section est constante :

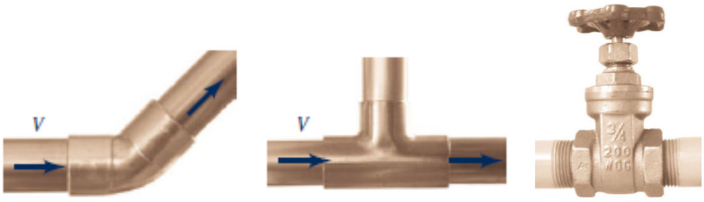
$$\Delta p = p_1 - p_2 = \rho g h_L \quad \text{avec} \quad h_L = f\frac{l}{D}\frac{\mathrm{v}^2}{2g}$$

Cela donne $$p_1 - p_2 = \rho g(z_2 - z_1) + \rho g h_L = \rho g(z_2 - z_1) + f\frac{l}{D}\rho\frac{\mathrm{v}^2}{2}$$

La dépendance de *f* du R_e et *ε/D* est tracé sur un diagramme dit de MOODY où *f* est donné en fonction du *Re* et de la rugosité relative *ε/D*.

7. **Pertes de charge singulières**

Elles sont présentes lors du passage du fluide à travers les vannes, coudes, té,… La perte de charge dans ces organes est notée par h_{Lmin}.



Pour déterminer cette perte de charge on spécifie un coefficient de perte singulière K_L qui est défini par :

$$K_L = \frac{h_{Lmin}}{\frac{v^2}{2g}} = \frac{\Delta p}{\rho\frac{v^2}{2}}$$

Telle que $\Delta p = K_L \rho \frac{v^2}{2}$ or $h_{Lmin} = K_L \frac{v^2}{2g}$

En général K_L dépend de la géométrie et de la vitesse, parfois les pertes singulières sont données en terme d'une longueur équivalente, l_{eq}, d'où: $h_{Lmin} = K_L \frac{v^2}{2g} = f\frac{l_{éq}}{D}\frac{v^2}{2g}$.

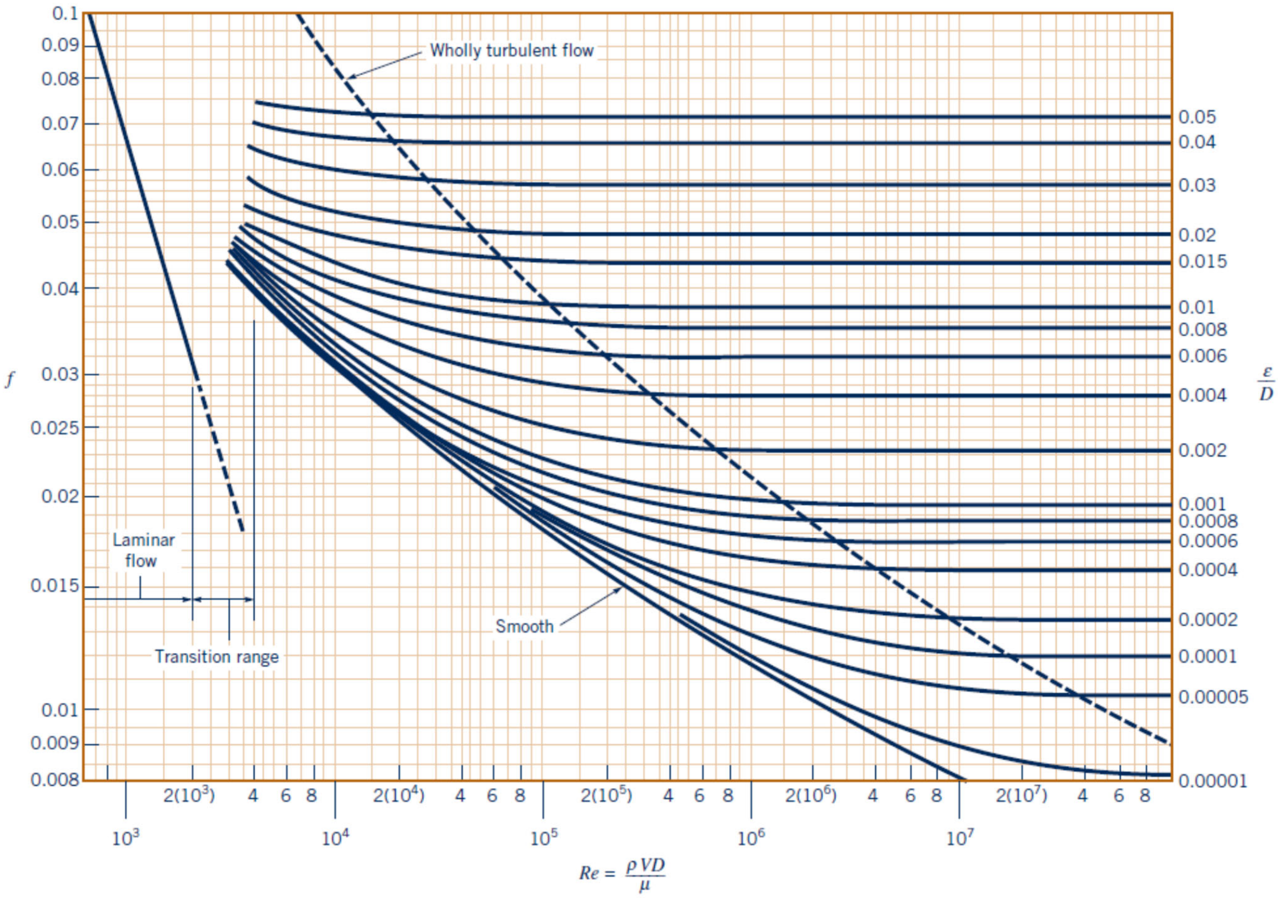


Diagramme de Moody