IUT Digne — Année 2007-2008
DUT Génie biologique — TD Proba-Stat **feuille n° 2**

Dénombrements et (équi)-probabilité

Exercice 1 Pour accéder à un service sur Internet, vous devez taper un mot de passe de 4 lettres choisies dans l'alphabet latin majuscule (26 caractères).

1. Combien de mots de passe de 4 lettres peut-on créer ?
2. Combien de mots de passe de 4 lettres distinctes peut-on créer ?

Exercice 2 La société YOPMILK fabrique des yaourts aux fruits avec dix parfums différents. Le directeur des ventes propose de constituer des lots de quatre pots de parfums tous différents.

1. Combien de lots distincts peut-on former de cette façon ?
2. Combien de lots distincts peut-on former de cette façon sachant qu'ils ne doivent pas contenir simultanément un pot à la fraise et un à la framboise ?
3. Le service commercial a abandonné cette idée. Désormais il souhaite des lots de quatre pots avec quatre parfums quelconques, c'est-à-dire non tous différents. Combien de lots distincts peut-on former de cette façon ?

Exercice 3 Une étagère contient trois romans, deux livres de mathématique et un de chimie. Combien de manières peut on ranger l'étagère si :

1. aucune restriction n'est mise,
2. les livres de mathématique doivent être rangés ensemble et les romans aussi,
3. seuls les romans doivent être rangés ensemble,
4. aucune restriction n'est mise, mais les ouvrages d'une même collection sont indiscernables,
5. les livres de mathématique doivent être rangés ensemble et les romans aussi, mais les ouvrages d'une même collection sont indiscernables ?

Exercice 4 Soit $n \in \mathbb{N}$, montrer les égalités suivantes :

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^k C_n^k = 0, \qquad \sum_{i=0}^{n} C_n^k C_n^{n-k} = C_{2n}^n, \qquad \sum_{i=0}^{n} \left(C_n^k\right)^2 = C_{2n}^n.$$

Exercice 5 Dans un club de sport, 36 membres jouent au tennis, 28 jouent au squash et 18 jouent au badminton. En outre, 22 membres jouent au tennis et au squash, 12 pratiquent le tennis et le badminton, 9 jouent au squash et au badminton et pour finir 4 pratiquent les 3 sports. Combien de membres de ce club pratiquent au moins un des trois sports ?

Exercice 6 Quelle est la probabilité pour que, dans un groupe de n personnes choisies au hasard, deux au moins aient la même date d'anniversaire ? On considère que l'année a 365 jours tous équiprobable. Quelle est la probabilité pour la promo du DUT Génie Biologique de Digne ?

Exercice 7 Un groupe composé de 8 hommes et 6 femmes doit désigner 4 de ses membres pour les représenter. Si la désignation se fait au hasard, quelle est la probabilité pour que le groupe des représentant

1. ne comporte que des hommes ?
2. ne comporte que des femmes ?
3. comporte un nombre égal d'hommes et de femmes ?

Exercice 8 Lors d'une collecte de sang, 18 personnes se sont présentées. Parmi celles-ci, on a noté 11 personnes du groupe O, 4 personnes du groupe A, 2 personnes du groupe B et une personne du groupe AB. A l'issue de la collecte, on prélève au hasard 3 flacons parmis les 18 obtenus. Calculer la probabilité des événements suivants :

1. les sangs des 3 flacons appartiennent au même groupe ;
2. parmi les 3 flacons prélévés, il y a au moins 1 flacon contenant du sang du groupe A ;
3. les sangs des 3 flacons appartiennent à trois groupes différents.

Exercice 9 On lance cinq fois une pièce de monnaie bien équilibrée. Quel est l'ensemble des résultats possibles ? Trouver un univers Ω et une probabilité $\mathbf{P}$ permettant de modéliser l'expérience. Quelle est la probabilité :

1. d'obtenir exactement une fois "face" ?
2. d'obtenir au moins une fois "face" ?
3. d'obtenir quatre "pile" au moins ?
4. d'obtenir "pile" au premier tirage puis au moins une fois "face" dans les quatre suivants ?
5. d'obtenir "pile" au premier tirage ou "face" au troisième tirage ?
6. d'obtenir plus de "face" que de "pile" ?
7. d'obtenir une série de longueur 3 au moins (c'est à dire : au moins trois "pile" consécutives ou trois "face" consécutives) ?

Exercice 10 Une école propose trois cours de langue : un en espagnol, un en français et un en allemand. Ces cours sont ouverts aux 100 élèves de l'école. Il y a 28 étudiants en espagnol, 26 en français et 16 en allemand. Il y a 12 étudiants qui suivent l'espagnol et le français, 4 qui suivent l'espagnol et l'allemand et 6 qui étudient le français et l'allemand. De plus, 2 élèves suivent les trois cours.

1. On choisit un élève au hasard, quelle est la probabilité qu'il fasse partie d'aucun de ces cours ?
2. On choisit un élève au hasard, quelle est la probabilité qu'il suive exactement un cours de langue ?
3. On choisit 2 élèves au hasard, quelle est la probabilité qu'au moins un des deux suivent un cours de langue ?

Exercice défi 1 Charlotte descend les marches d'un escalier une ou deux à la fois. Combien y a t-il de manières de descendre cet escalier sachant qu'il y a n marches ?

Exercice défi 2 Les probabilités des différents totaux qu'on peut obtenir en lançant deux dés et sommant les résultats obtenus sur les deux faces étonnent les personnes non familière aux probabilités. En effet, par exemple, la probabilité d'obtenir un total de 2 est de $\frac{1}{36}$ alors que la probabilité d'obtenir un total de 4 est de $\frac{1}{12}$, c'est à dire trois fois plus grande !

Est-il possible de truquer deux dés de façon à ce que la probabilité d'obtenir chacun des résultats $2, 3, \ldots, 12$, *soit égal à* $\frac{1}{11}$ *?*

Cette question a une interprétation mathématique et une interprétation physique. Du point de vue mathématique, on demande s'il est possible d'attribuer des probabilités $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6$ aux faces de l'un des dés et des probabilités $q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6$ aux faces de l'autre dé de façon que l'on obtienne toujours $\frac{1}{11}$ lorsqu'on calcule les probabilités des résultats de la somme des deux dés. Du point de vue physique, on demande s'il est possible de répartir des plombs d'une certaine façon, puis de couler du plastique autour des plombs de manière à obtenir exactement ces probabilités. Bien sûr, on ne s'intéresse ici qu'à la question mathématique.

IUT Digne Année 2007-2008
DUT Génie biologique TD Proba-Stat **feuille n° 2**

Dénombrements et (équi)-probabilité (Solutions)

Correction 1 1. $26^4 = 456976$

2. $A_{26}^4 = 358800$

Correction 2 1. $C_{10}^4 = 210$.

2. $C_8^4 + C_8^3 + C_8^3 = 182$ ou $C_{10}^4 - C_8^2 = 182$.
3. $K_{10}^4 = C_{10+4-1}^4 = 715$.

Correction 3 1. $6!$,

2. $3!3!2! = 72$,
3. $4!3! = 148$,
4. $\frac{6!}{3!2!} = 15$,
5. $3! = 6$.

Correction 6 $p = 1 - \frac{A_{365}^n}{365^n} = 1 - (1 - \frac{1}{365}) \dots (1 - \frac{n-1}{365})$.

Correction 7 1. $\frac{C_8^4}{C_{14}^4} = \frac{5}{13\times6\times11} \approx$

2. $\frac{C_6^4}{C_{14}^4} =\approx$
3. $\frac{C_8^2 \times C_6^2}{C_{14}^4} =\approx$

Correction 8 1. $\frac{C_4^3 + C_{14}^2}{C_{11}^3} = \frac{169}{816} \approx 0,207$;

2. $\frac{C_4^1 \times C_{14}^2 + C_4^2 \times C_{14}^1 + C_4^3}{C_{18}^3} = \frac{452}{816} \approx 0,554$ ou $1 - \frac{C_{14}^3}{C_{18}^3} = \frac{452}{816} \approx 0,554$;
3. $\frac{11\times4\times2}{816} + \frac{11\times4\times1}{816} + \frac{11\times2\times1}{816} + \frac{4\times2\times1}{816} + = \frac{162}{816} \approx 0,199$.

Correction 9 $\Omega = \{P, F\}^5$, $\mathrm{Card}(\Omega) = 2^5$ et on munit Ω de l'équiprobabilité.

1. $\frac{C_5^1}{2^5} = \frac{5}{32}$
2. $1 - \frac{C_5^0}{2^5} = \frac{31}{32}$
3. $\frac{C_5^4 + C_5^5}{2^5}$
4. $\frac{2^4 - 1}{2^5} = \frac{15}{32}$
5. $1 - \frac{2^3}{2^5} = \frac{3}{4}$
6. $\frac{C_5^3 + C_5^4 + C_5^5}{2^5} = \frac{1}{2}$
7. $\frac{2\times(3+2+1)}{2^5} = \frac{3}{8}$

Correction 10 1. $\frac{1}{2}$

2. $\frac{14}{100} = \frac{7}{50}$
3. $1 - \frac{C_{50}^2}{C_{100}^2} = \frac{149}{198}$

IUT Digne
DUT Génie biologique

Année 2007-2008
TD Proba-Stat **feuille n° 2**

Dénombrements et (équi)-probabilité (Méthodes)

☞ **Comment calculer des probabilités sous l'hypothèse d'équiprobabilité ?**

Soit $\mathbf{P}$ l'équiprobabilité défini sur un univers fini Ω. On souhaite calculer $\mathbf{P}(A)$ pour un événement $A \subset \Omega$:

1. Dénombrer le cardinal de Ω.
2. Dénombrer le cardinal de A.
3. Calculer $\mathbf{P}(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}$

☞ **Comment déterminer le cardinal d'un ensemble ?**

- On rappelle trois principes :
  1. Pour dénombrer une **réunion disjointe** de sous-ensembles, ce qui revient à considérer un cas **ou bien** un autre ou bien un autre, etc..., on effectue la **somme** des cardinaux de chaque sous-ensemble.
  2. Pour dénombrer un **produit cartésien** d'ensembles, ce qui revient à considérer un cas **puis** un autre puis un autre, etc..., on effectue le **produit** des cardinaux de chaque ensemble.
  3. Parfois il est plus facile de dénombrer le complémentaire d'un ensemble. Par exemple, si $A \subset B$ et que l'on connaît $\text{Card}(B)$ et $\text{Card}(\overline{A})$, alors $\text{Card}(A) = \text{Card}(B) - \text{Card}(\overline{A})$.
- On se ramène à un des deux cas suivants :
  1. Tirages de p éléments parmi n :

Tirages	Ordonnés	Non ordonnés
Sans remise	A_n^p	C_n^p
Avec remise	n^p	K_n^p

  2. Rangement de p objets dans n cases :

Objets	Discernables	Indiscernables
Un seul dans chaque case	A_n^p	C_n^p
Éventuellement plusieurs dans chaque case	n^p	K_n^p