APPLICATIONS:

Cas de systèmes à 1 degré de liberté

Nkesri. VOM

APPLICATIONS: Règles

- 1) Détermination de l'énergie potentielle:
- - de gravitation
- - élastique
- 2) Détermination de l'énergie cinétique
- 3) Assemblage d'un ensemble de ressorts
- - en parallèle : $k=\Sigma_i k_i$
- - en série: $1/k= \Sigma_i(1/k_i)$
- 4) Conditions d'équilibre: stable, instable
- 5) Conditions d'oscillation
- 6) Equations du mouvement et solutions

Détermination de l'énergie potentielle:

Cas où E_p dérive d'une force F

$$\boxed{E_p = -\int \vec{F}\,.d\vec{r}}$$

A/ de gravitation: F = mg

B/ d'un ressort élastique: F=-kx

Nkesri. VOM

C) Conditions d'équilibre:

$$\boxed{\vec{F} = -\vec{\nabla} E_p}$$

Conditions d'équilibre :

$$\boxed{\frac{\partial E_p}{\partial x} = 0 \Rightarrow \vec{F} = -\vec{\nabla} E_p = 0}$$

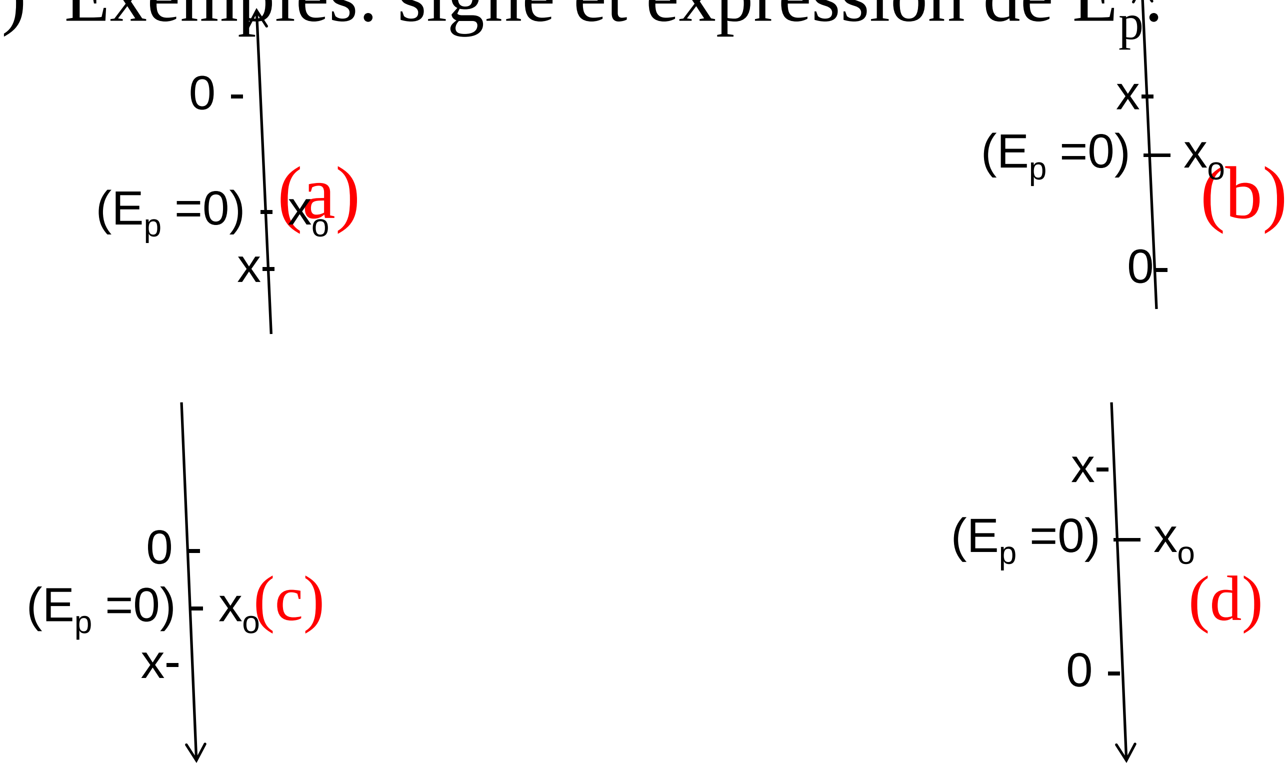
$$\boxed{\frac{\partial^2 E_p}{\partial x^2} > 0 \Rightarrow \textbf{\textit{équilibre stable}} \ ; \ \frac{\partial^2 E_p}{\partial x^2} < 0 \Rightarrow \textbf{\textit{équilibre instable}}}$$

A/ Energie potentielle de gravitation (pesanteur)

E_p dérive d'une force de gravitation agissant sur m

$$\boxed{\vec{F} = m\vec{g}}$$

A_{11}) Exemples: signe et expression de E_p :



Dans les 4 cas, l'origine de Ep(m) est en x_o .

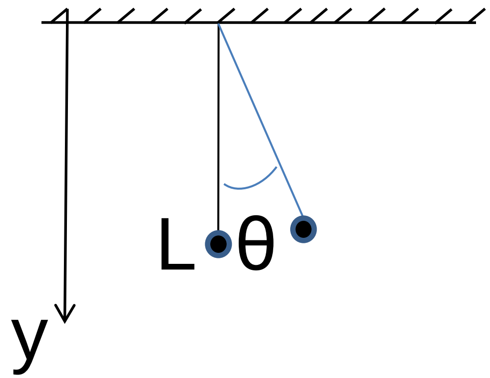
Donner le signe de Ep quand la masse m est déplacée en x.

Nkesri. VOM

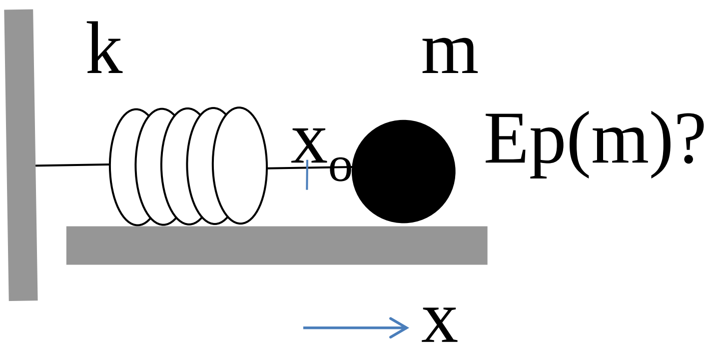
A_{12}) Cas d'un pendule de longueur L:

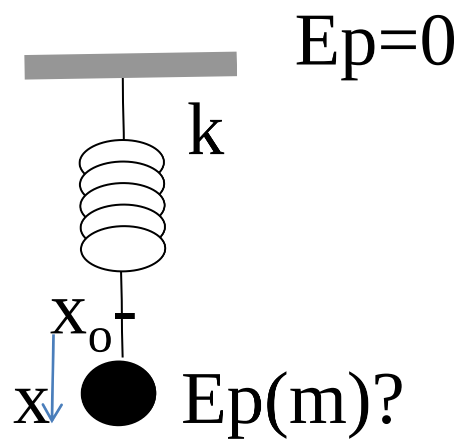
0 i) Ep=0 à y=0: quel est le signe de Ep(m) pour $\theta \neq 0$?

ii) Ep=0 à y =L: ″ ″ ″ ″ ″ ″



A_{13}) Energie potentielle d'une masse accrochée à un ressort:





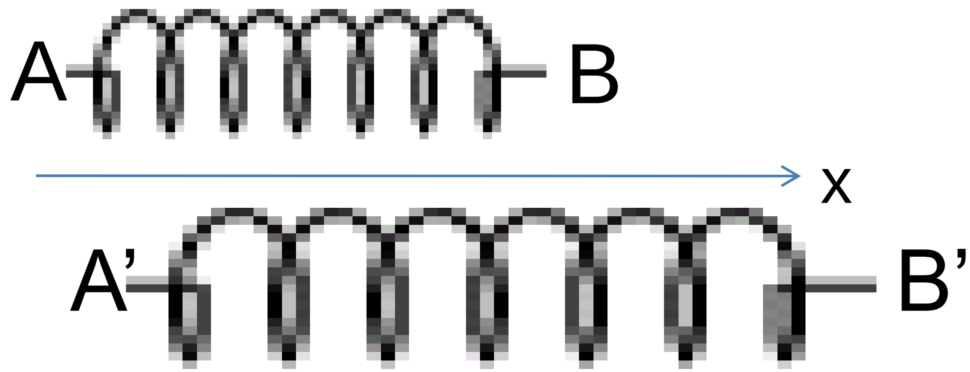
Dans les 2 cas la masse m est en équilibre en x_o

Nkesri. VOM

B) Energie potentielle de déformation élastique

d'un ressort de c^{te} d'élasticité $\boxed{F = -kx}$

B$_{11}$)



A comprimé en A'; B allongé en B'

$$x_B - x_A = l_o\ ;\ \ x_{B'} - x_{A'} = l\ ;\ \ \Delta l = l - l_o \equiv x$$

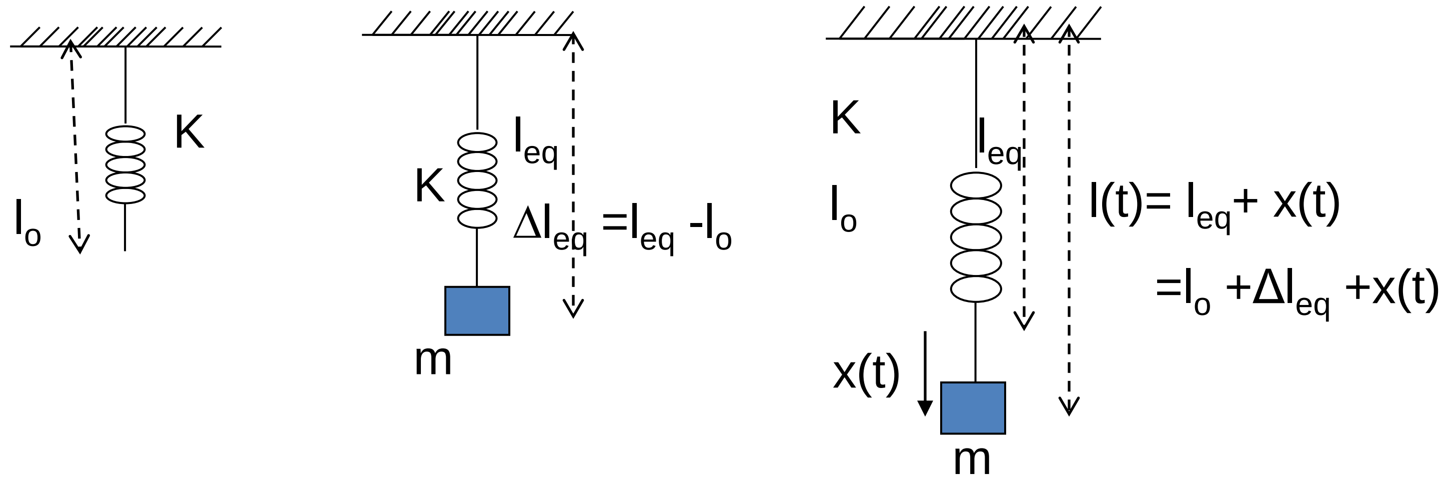
Si la déformation coté A est X_A et celle coté B est X_B

$$x = l - l_o = |X_A| + |X_B|$$

$$\boxed{E_{p,déformation} = \frac{1}{2}k(l - l_o)^2 + constante}$$

Applications (suite)

- Ex.1: masse ponctuelle+ ressort



Résolution: i) par la **mécanique de Newton**: $mx''+kx=0$ avec $kl_{eq} = mg$

ii) par **application de l'équation de Lagrange**: ($q_1 = x$):

$E_c = ½mx'^2$; $E_p = E_{pm} + E_{pk}$; $E_{pm} = -mgx + c^{te}$;

$$\boxed{E_{pk} = -\int -K(x+\Delta l_{eq})dx = \frac{1}{2}K(x+\Delta l_{eq})^2 + C^{te}}$$

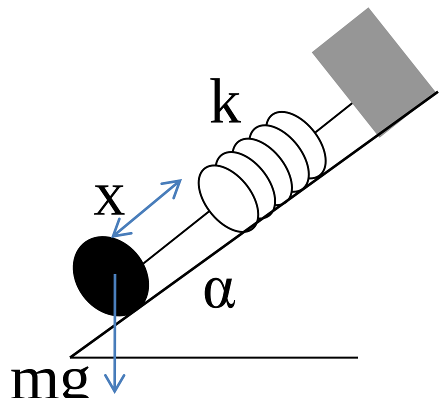
$Ep = -mgx + ½K(x+\Delta l_{eq})^2 + c^{te}$: La condition d'équilibre: $\partial Ep/\partial x|_{x=0} = 0$ donne $K\Delta l_{eq} = mg$

$$\boxed{\Rightarrow m\ddot{x} + kx = 0}$$

La solution x(t) est sinusoïdale

Applications (suite)

2) Masse ponctuelle + ressort sur un plan incliné d’angle



$Ec = \frac{1}{2} m x'^2$, $Ep = Ep_m + Ep_k$

$Ep_k = \frac{1}{2} k (x + \Delta l)^2$

Le poids mg est décomposé en 2 composantes, l’une // au plan $\Rightarrow$ $mg_{//} = mg\sin\alpha$, l’autre perpendiculaire

$Ep_m = -\int^{x+\Delta l} mg\sin\alpha \, dx = -mg(x+\Delta l)\sin\alpha + C^{te} \Rightarrow$

$Ep = \frac{1}{2} k (x+\Delta l)^2 - mg(x+\Delta l)\sin\alpha + C^{te}$

Condition d’équilibre: $k(x+\Delta l)|_{x=0} + mg\sin\alpha = 0$ ou

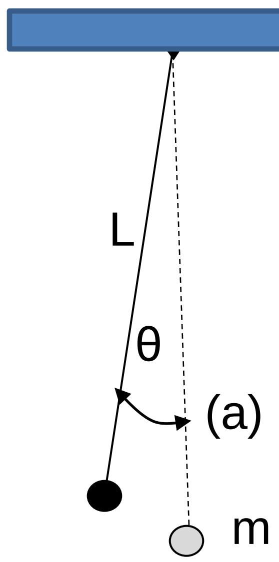
$k\Delta l + mg\sin\alpha = 0 \Rightarrow$ $Ep = \frac{1}{2} k^2 x + C^{te}$

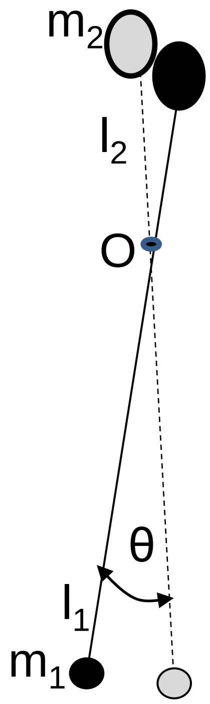
$\Rightarrow$ l’équation du mouvement est inchangée par rapport au cas (1) précédent.

Ex.3:Le pendule

- simple (a)
- le métronome (b)

1)Exprimer l'énergie potentielle du système. Conditions d'équilibre
2) Exprimer l'énergie cinétique du système
3) Equation de Lagrange et équation différentielle du mouvement

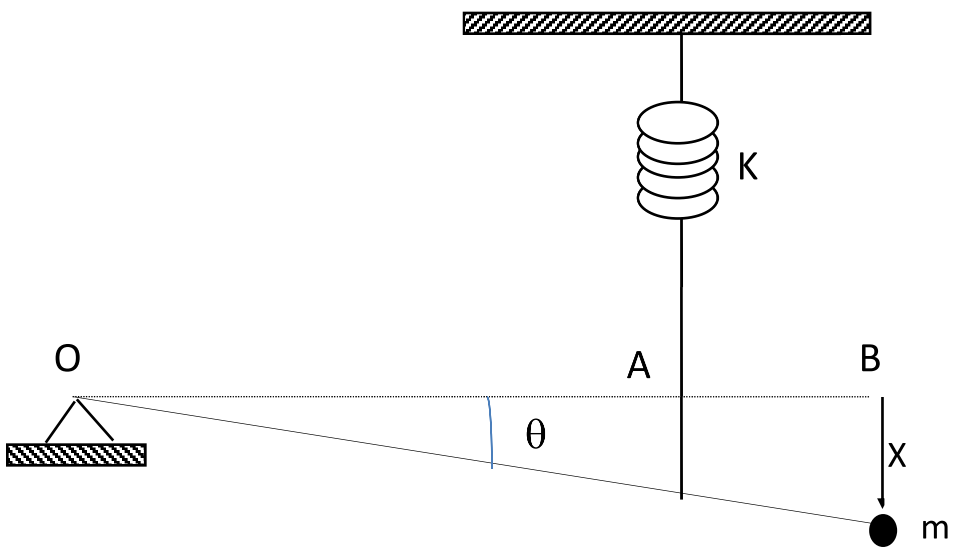




Nkesri. VOM

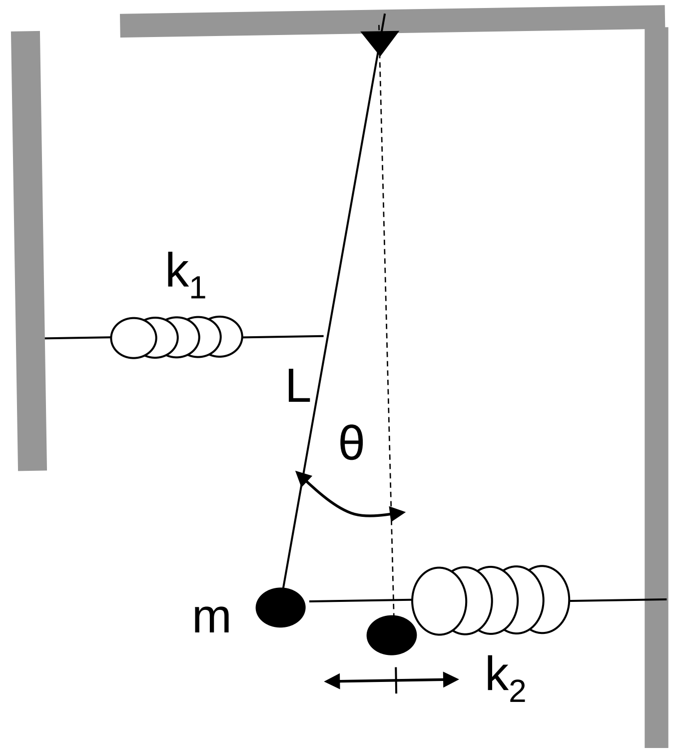
4) Masse +tige (sans poids)+ressort

1)Exprimer l'énergie potentielle du système. Déduire les conditions d'équilibre
2) Exprimer l'énergie cinétique du système
3) Equation de Lagrange et équation différentielle du mouvement



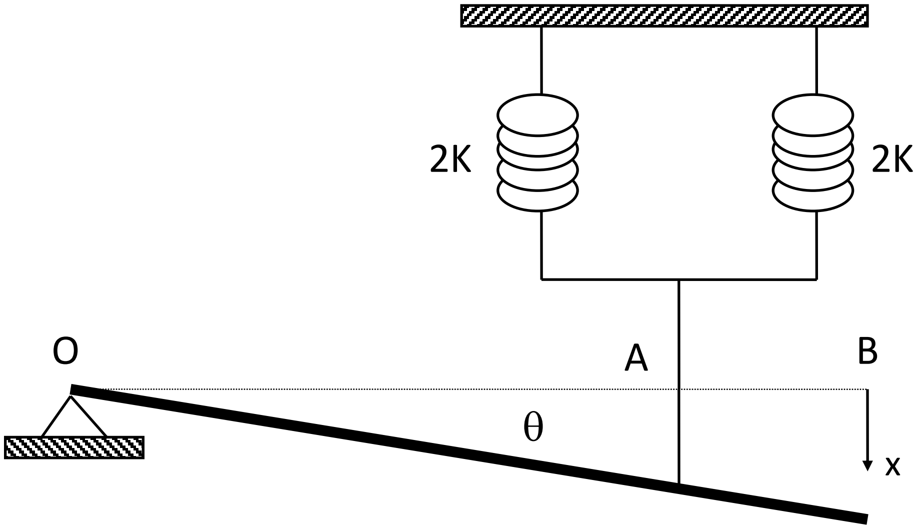
4bis) Masse +tige (sans poids)+ressorts

1)Exprimer l'énergie potentielle du système.Conditions d'équilibre?
2) Exprimer l'énergie cinétique du système
3) Equation de Lagrange et équation différentielle du mouvement



5) Ressorts + tige pesante (horizontale)

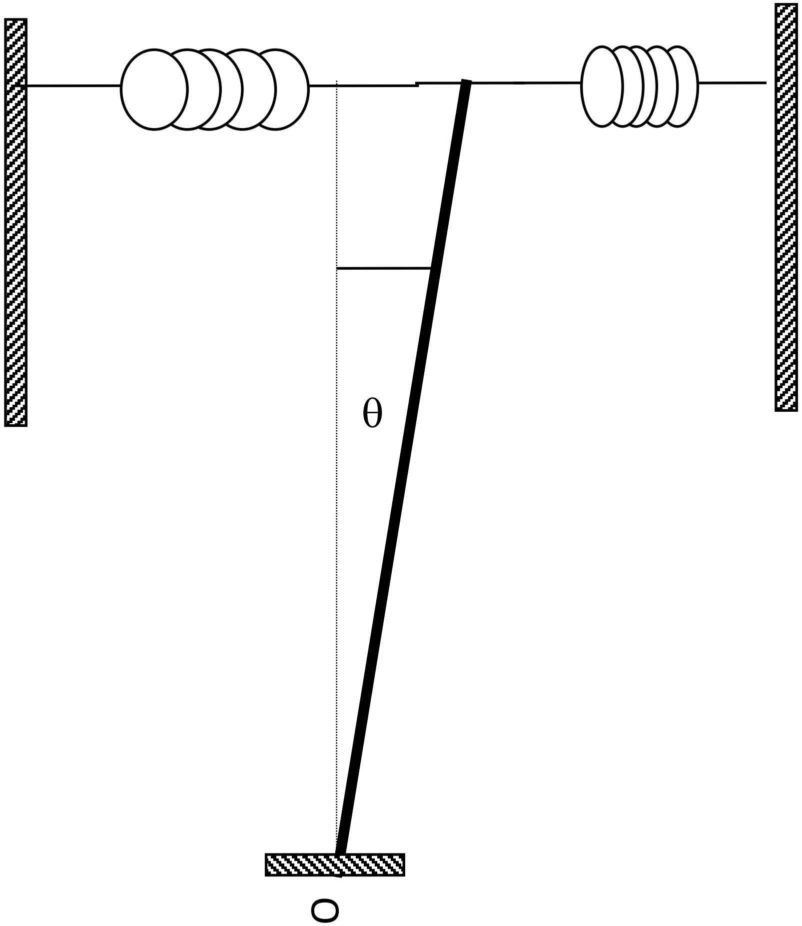
1)Exprimer l'énergie potentielle du système. Conditions d'équilibre
Condition d'oscillation
2) Exprimer l'énergie cinétique du système
3) Equation de Lagrange et équation différentielle du mouvement



Nkesri. VOM

5bis) Ressorts + tige pesante (verticale)

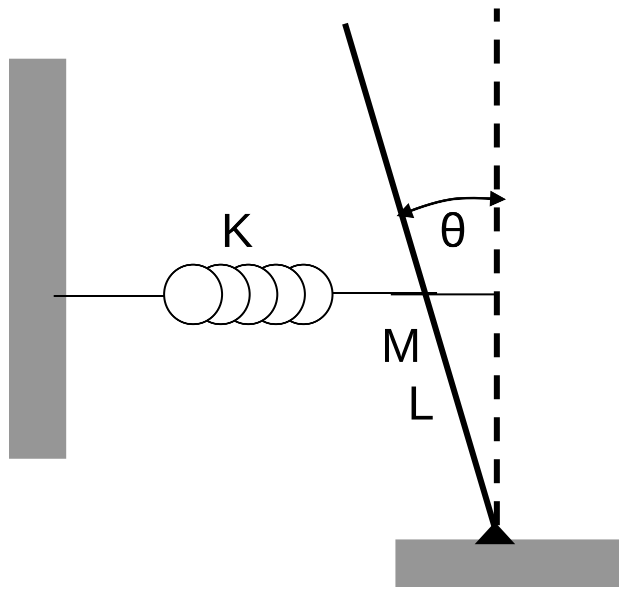
1)Exprimer l'énergie potentielle du système. Conditions d'équilibre
Condition d'oscillation
2) Exprimer l'énergie cinétique du système
3) Equation de Lagrange et équation différentielle du mouvement



Nkesri. VOM

5bis) Tige pesante (verticale) + ressort

1)Exprimer l'énergie potentielle du système. Conditions d'équilibre
2) Exprimer l'énergie cinétique du système
3) Equation de Lagrange et équation différentielle du mouvement



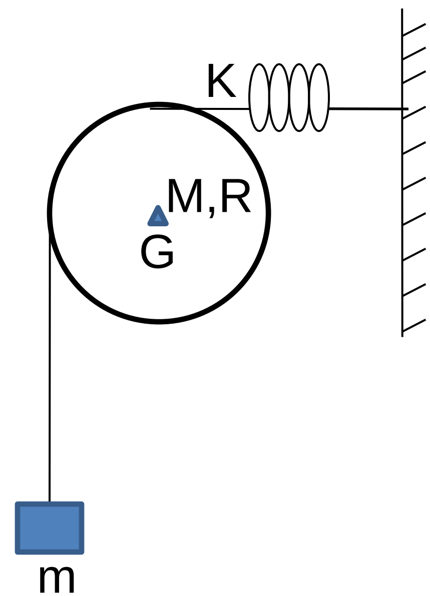
6) Cylindre (M,R) +ressort k
Axe de rotation fixe (+masse m)

L'axe de rotation passe par G et est fixe:

1)Exprimer l'énergie potentielle du ressort

2) Exprimer l'énergie cinétique du système

3) Equation de Lagrange et équation différentielle du mouvement



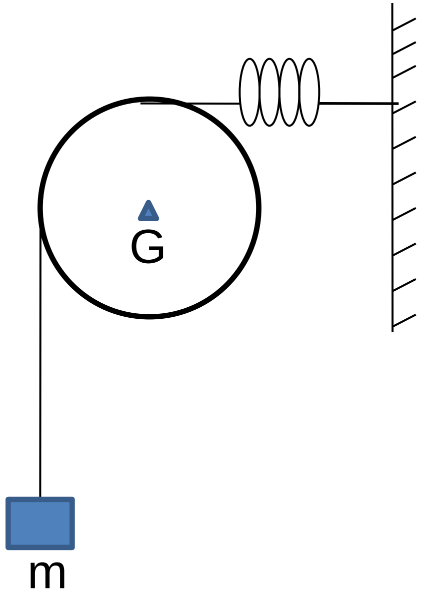
6) Cylindre (M,R) +ressort k
Axe de rotation fixe (+masse m)

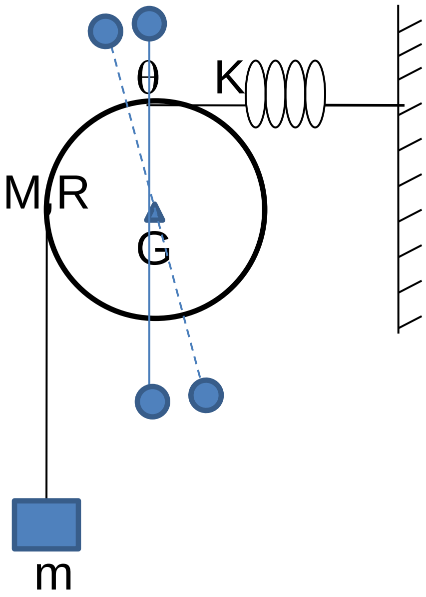
L'axe de rotation passe par G et est fixe:

1)Exprimer l'énergie potentielle du ressort

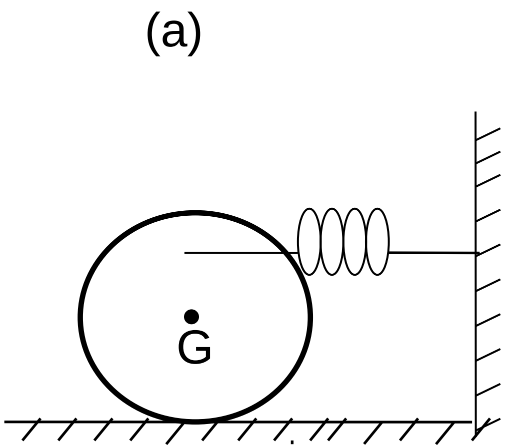
2) Exprimer l'énergie cinétique du système

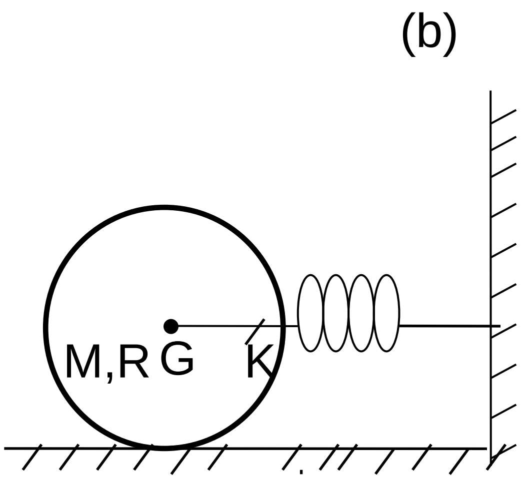
3) Equation de Lagrange et équation différentielle du mouvement





6) Cylindre (M,R) +ressort k
Axe de rotation mobile



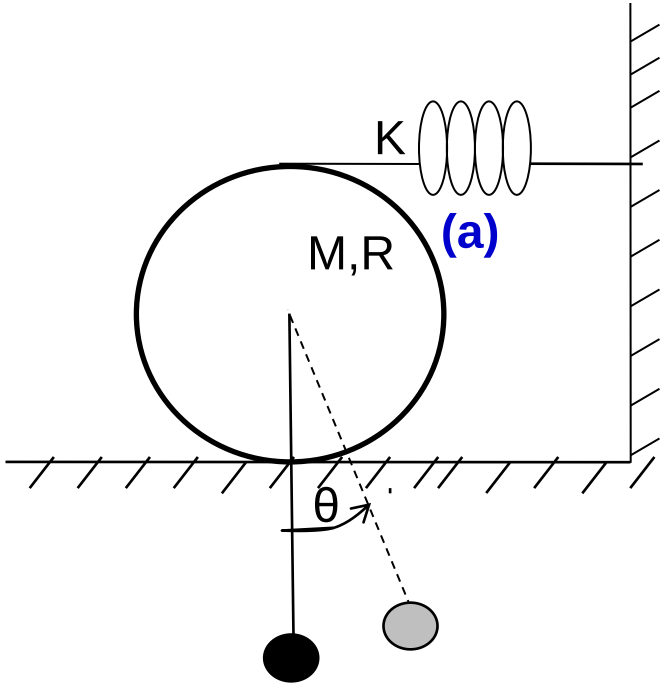


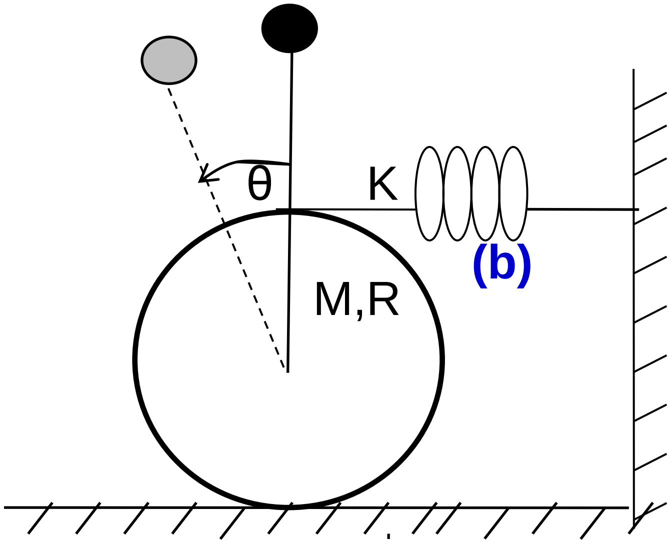
Le cylindre peut rouler sans glisser (2 cas a,b)
1)Exprimer l'énergie potentielle du ressort
2) Exprimer l'énergie cinétique du système
3) Equation de Lagrange et équation différentielle du mouvement

Nkesri. VOM

7) Cylindre +masse + ressort:

- Axe de rotation mobile: le cylindre peut rouler sans glisser (exemples (a), (b))





1)Exprimer l'énergie potentielle du système. Conditions d'équilibre
2) Exprimer l'énergie cinétique du système
3) Equation de Lagrange et équation différentielle du mouvement