Corrigé de Rattrapage
Mathématiques
1ière année LMD
2013 / 2014
08/09/2014

§ EXO n° 1 : Soit f défini par

$$f(x) = \begin{cases} ax+b & \text{si } x \leq 0 ; \\ \dfrac{1}{1+x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

1) f est continue sur $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$ car (0,5)

$x \mapsto ax+b$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc sur $\mathbb{R}^*_-$ (0,5)

et $x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$ est continue sur $\mathbb{R} - \{-1\}$ donc continue sur $\mathbb{R}^*_+$

Au point 0 :

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} (ax+b) = b$ (0,5)

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \left(\dfrac{1}{1+x}\right) = 1$ (0,5)

et $f(0) = b$

Donc f est continue si et seulement si $\boxed{b = 1}$. (1)

2) f est dérivable sur $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$ car (0,5)

$x \mapsto ax+b$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*_-$ et (0,5)

$x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*_+$

Au point 0 : $f(0) = b$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{ax + \cancel{b} - \cancel{b}}{x} = a = f'_g(0) \quad (1)$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{1+x} - b}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1 - b - bx}{x(1+x)}$$

si $b = 1$ alors

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{-x}{x(1+x)} = \lim_{x \to 0^+} \frac{-1}{1+x}$$

$$= -1 = f'_d(0) \quad 1$$

Si $b = 1$ (0,5) et si $a = -1$ (0,5) alors f est continue en 0.

et $f'_g(0) = f'_d(0) = f'(0)$ (0,5)

Donc f est dérivable en 0. Finalement f dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(0) = -1$ (0,5)

Exo n° 2 : soit la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ x + \dfrac{x \ln x}{1-x} & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

1) si $x \in]0,1[$ alors f est continue car

$x \mapsto x$ continue sur $\mathbb{R}$ donc sur $]0,1[$ (1)

$x \mapsto x \ln x$ continue sur $]0,+\infty[$ donc sur $]0,1[$

$x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ continue sur $\mathbb{R} - \{1\}$ donc sur $]0,1[$.

Au point 0 :

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \left(x + \frac{x \ln x}{1-x}\right) = 0 \quad (1) \text{ car } \lim_{x \to 0^+} x \ln x = 0$$

Au point 1 :

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \left(x + \frac{x \ln x}{1-x}\right) = F.I$$

On pose $y = 1 - x$ donc $x = 1 - y$ (0,5)

si $x \to 1^-$ alors $y \to 0^+$

et $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{y \to 0^+} f(y) = \lim_{y \to 0^+} (1-y) + \frac{(1-y)\ln(1-y)}{y}$

1,5

$$= \lim_{y \to 0^+} \left(1 - \cancel{y}^{\to 0} + \frac{\ln(1-y)}{y}^{\to -1} - \frac{\cancel{y}\ln(1-y)}{\cancel{y}}^{\to 0} \right)$$

$$= 1 - 1 = 0$$

car $\lim_{y \to 0^+} \frac{\ln(1-y)}{y} = -1$

On prolonge f en $x = 0$ par $f(0) = 0$
et en $x = 1$ par $f(1) = 0$
donc f est continue sur $[0, 1]$. 0,5

1,5

2) f est continue sur $[0,1]$ et manifestement dérivable sur $]0,1[$, de plus $f(0) = f(1)$, d'après le théorème de Rolle, il existe $c \in]0,1[$ tel que $f'(c) = 0$

Exo n° 3 : Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^n \, dx$$

1) On calcul I_{n+2} : $I_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{n+2} \, dx$

En utilisant l'intégration par parties :

$$I_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{n+1} \sin x \, dx$$

On pose : $f(x) = (\sin x)^{n+1} \Rightarrow f'(x) = (n+1)(\sin x)^n \cdot \cos x$
$g'(x) = \sin x \Rightarrow g(x) = -\cos x$ 2pts

alors

« 3 page »

$$I_{n+2} = \left[-\cos x \cdot \cancel{(\sin x)^{n+1}} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^n \cos^2 x \, dx$$

on a : $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ 1

$$\Leftrightarrow I_{n+2} = (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \,(1 - \sin^2 x)\, dx$$

$$\Leftrightarrow I_{n+2} = (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx - (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+2} x \, dx$$

$$\Leftrightarrow I_{n+2} = (n+1) I_n - (n+1) I_{n+2}$$

$$\Leftrightarrow I_{n+2} + (n+1) I_{n+2} = (n+1) I_n$$

$$\Leftrightarrow (n+2) I_{n+2} = (n+1) I_n$$ 1

$$\Leftrightarrow \boxed{I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n}$$

2) $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx = \left[-\cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\cos\frac{\pi}{2} + \cos 0$

$\boxed{I_1 = 1}$ 1

$I_3 = \frac{2}{3} I_1 \Leftrightarrow \boxed{I_3 = \frac{2}{3}}$ 1

En utilisant la relation $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$ pour $n = 1$