Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université des Sciences et de la Technologie d'Oran Mohammed Boudiaf
Faculté de Chimie Socle commun ST.
Année Universitaire (2019/2020)

Examen final de : **Mathématiques 2** [Durée : 1h]

Exercice 01(6 points)

Calculer les intégrales suivants :

$$I = \int \frac{dx}{(1+x)(x-2)}, \; J = \int \frac{e^x}{1+e^x}dx$$

Exercice 02 (08 points)

Résoudre les équations différentielles suivantes :

$$1)\; y' - y = x, \quad 2)\; y'' - 2y' + y = 0.$$

Donner l'expression de la solution particulière de l'équation suivante :

$$y'' - 2y' + y = (1+x^2)e^x.$$

Exercice 03 (06 points) :

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \; I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1) Calculer $A + I_3, A^2, A^3$.
2) Montrer que $A^2 = 2I_3 - A$.
3)Montrer que A est inversible puis déduire A^{-1}.

Bon ☺ courage!

Dr. I.Medjadj

Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique
Université des Sciences et de la Technologie d'Oran Mohammed Boudiaf

---

Faculté de chimie L1 Maths1

Solution de l'Examen (2019/2020)L1 Chimie

Exercice 01

$I = \displaystyle\int \frac{dx}{(1+x)(x-2)}$, on décompose la fraction en éléments simples :

$$\frac{1}{(1+x)(x-2)} = \frac{a}{(1+x)} + \frac{b}{(x-2)} \text{....}\mathbf{(0.5{+}0.5{=}1pt)}$$

$$a = \lim_{x\to -1} \frac{1}{(x-2)} = -\frac{1}{3}\text{...}\mathbf{(0.5)pt}, \_;\ b = \lim_{x\to 2} \frac{1}{(x+1)} = \frac{1}{3}\text{....}\mathbf{(0.5)pt}$$

$$\int \frac{1}{(x+1)(x-2)}dx = -\frac{1}{3}\int \frac{1}{1+x}dx + \frac{1}{3}\int \frac{1}{x-2}dx.$$

$$J = \int \frac{1}{x(x+1)^2}dx = \underbrace{\frac{1}{3}\ln|x-2|}_{\text{...}\mathbf{(0.5)pt}} - \underbrace{\frac{1}{3}\ln|x+1|}_{\text{...}\mathbf{(0.5)pt}} + \underbrace{c}_{\text{...}\mathbf{(0.5)pt}}, c \in \mathbb{R}.$$

$J = \displaystyle\int \frac{e^x}{1+e^x}dx$, on pose $\underbrace{u = e^x}_{\mathbf{(0.5)pt}} \Rightarrow \underbrace{du = e^x dx}_{\mathbf{(0.5)pt}}$ ainsi J devient : $J = \displaystyle\int \frac{du}{1+u}$

D'où

$$J = \underbrace{\ln|1+u|}_{\mathbf{(0.5)pt}} + \underbrace{c}_{\mathbf{(0.5)pt}} = \underbrace{\ln|1+e^x|}_{\mathbf{(0.5)pt}} + c, c \in \mathbb{R}.$$

Exercice 02

1)Pour résoudre l'équation $y' - y = x$....(E) on doit d'abord résoudre l'équation sans second membre c'est à dire homogène :

(E_h) : $y' - y = 0$**(0.25)pt** on a :

$$\underbrace{\frac{dy}{dx} = y}_{\mathbf{(0.25)pt}} \Rightarrow \underbrace{\ln|y| = x + c}_{\mathbf{(0.25)pt}} \Rightarrow \underbrace{y = Ke^x}_{\mathbf{(0.5)pt}}, \underbrace{k = \pm e^c}_{\mathbf{(0.25)pt}}, c \in \mathbb{R}.$$

On cherche ensuite une solution particulière en ulilisant la méthode de la variation de la constante notée M.V.C, on pose :

$$y(x) = k(x)e^x\text{....}\mathbf{(0.5)pt}$$

En remplaçant dans (E) on aura :

$$y' + y = \underbrace{k'(x)e^x + k(x)e^x - k(x)e^x = x}_{\mathbf{(0.5)pt}} \Rightarrow \underbrace{k'(x) = xe^{-x}}_{\mathbf{(0.5)pt}} \Rightarrow k(x) = \int xe^{-x}dx.$$

On utilise l'intégration par parties on pose :

$$u' = e^{-x}, u = -e^{x}.....\textbf{(0.5)pt}$$
$$v = x, v' = 1.....\textbf{(0.5)pt}$$

Ainsi $\displaystyle\int xe^{-x}dx = -xe^{-x} + \int e^{-x}dx = -xe^{-x} - e^{-x}....\textbf{(0.5)pt}$ Alors $k(x) = -e^{-x}(x+1) \Rightarrow y_p(x) = -e^{-x}(x+1)e^{x} = -(x+1)...\textbf{(0.5)pt}$

$$y_g(x) = y_h(x) + y_p(x) = ke^{x} - (1+x)...\textbf{(1)pt}$$

2.$y'' - 2y' + y = 0...(E)$ commençons par déterminer équation caractéristique associée à (E_h) qui définie par

$$E_r : r^2 - 2r + 1 = 0...\textbf{(0.25)pt}$$

les solutions de cette équations sont : $r = 1....\textbf{(0.25)pt}$ est une solution double ainsi la solution est donnée comme suit

$$y(x) = (c_1x + c_2)e^{x}, c_1, c_2 \in \mathbb{R}....\textbf{(0.75)pt}$$

Donner l'expression de la solution particulière de l'équation suivante : $y'' - 2y' + y = (x^2+1)e^{x}$, sachant que $r = 1$ est une solution double alors

$$y_p = \underbrace{x^2}_{\textbf{(0.25)pt}} \underbrace{(ax^2 + bx + c)}_{\textbf{(0.25)pt}} \underbrace{e^{x}}_{\textbf{(0.25)pt}}, a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Exercice 04 1)$A + I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ **(1)pt** $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ **(1)pt**

2)$2I_3 - A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = A^2\textbf{(1)pt}$

On a : $|A| = 4 \neq 0...\textbf{(1)pt}$, ainsi A est inversible..**(1)pt**

De plus $A^2 = 2I_3 - A \Rightarrow A^2 + A = 2I_3 \Rightarrow A(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}I_3)$, Alors $A^{-1} = \underbrace{\frac{1}{2}(A + I_3)}_{\textbf{(0.5)pt}}$.

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}..\textbf{(0.5)pt}$$