Résumé d'Algèbre

I> Polynômes

(1) $P(x) = ax^2 + bx + c$

- $\Delta > 0 \Rightarrow P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

$P(x)$ est divisible par $x - x_1$

" " " " $x - x_2$

- $\Delta = 0 \Rightarrow P(x) = a(x - x_1)^2$

(2) $P(x) = \sum_{i=3}^{10} x = x^3 + x^4 + x^5 + \dots + x^{10}$.

(3) Racines

$\forall a \in \mathbb{R}$; a est une Racine de P si : $P(a) = 0$

(4) Multiplicité d'une Racine

- a est une Racine simple, $P(a) = 0$
- a " " " double, $P'(a) = 0$
- a est une Racine d'ordre 3, $P''(a) = 0$

... etc

Conclusion :

$\boxed{\text{- a est une Racine d'ordre } n \text{ si et seulement si } P^{(n-1)}(a) = 0 \; ; \forall a \in \mathbb{R}}$

(5) Division euclidienne

Soient $A, B \in \mathbb{K}[x]$

Donc B divise A, s'il existe $Q \in \mathbb{K}[x]$ telque.

$A = BQ + R$ avec : $Q \Rightarrow$ Quotient telque : $\deg Q < \deg B$

$R \Rightarrow$ Reste.

Rappel :

$\boxed{\text{a est une Racine d'ordre } n \text{ de } P(x) \text{ donc } (x - a)^n \text{ divise } P(x)}$

(6) Plus grand diviseur Commun (PGCD)

$$A = BQ + R_1 \qquad \deg R_1 < \deg B$$
$$B = R_1 Q_2 + R_2 \qquad \deg R_2 < \deg R_1$$
$$R_1 = R_2 Q_3 + R_3 \qquad \deg R_3 < \deg R_2$$
$$\vdots$$
$$R_{K-2} = R_{K-1} Q_K + R_K \qquad \deg R_K < \deg R_{K-1}$$
$$R_{K-1} = \underline{R_K} Q_{K+1} + \underbrace{\cancel{R}}_{0} \qquad R = 0$$

Donc $\underline{PGCD}$ de : $PGCD(B, A) = PGCD(R_1, R_2)$
$= PGCD(R_K, 0) = R_K$

Conclusion :

$\boxed{\begin{array}{l} \bullet \text{ Le PGCD est le dernier Reste Non-nul } R_K \\ \bullet \text{ Degré du Reste diminue à chaque division} \end{array}}$

⑦ Décomposition de P dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$; Fraction Rationnel

On verra tous celà dans des exercices.

II > Espace Vectoriel :

① Sous-espace Vectoriel : (S-E-V)

On a E est un e-v (espace vectoriel) et F une partie de E.

F est S-E-V => Si et seulement s'il réalise les 3 conditions :

- $0_E \in F$
- $\forall (x, y) \in F ; (x + y) \in F$
- $\forall x \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R} ; \lambda x \in F$.

Exemple :

$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + 2y - z = 0\}$

- Montrez que les 3 conditions est vérifiées
- En déduire F est un S-E-V.

$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + 2y - z = 0\}$

Condition : ① vérifié

. On Remplace X, Y, et Z par 0

$0 + 2\times 0 - 0 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$ ✓

Condition : ② vérifié

. On pose $X = (1, 1, 3)$ tq $X \in F$

et $Y = (0, 1, 2)$ tq : $Y \in F$.

$(X + Y) = (1 + 0 ; 1 + 1 ; 3 + 2)$

$= (1 ; 2 ; 5)$

On le remplace dans F :

$1 + 2\times 2 - 5 = 5 - 5 = 0$ ✓

Condition ③ vérifié

. On pose $\lambda = 2 \in \mathbb{R}$ et $X = (1, 1, 3)$

$\lambda X = (2\times 1, 2\times 1, 2\times 3) = (2, 2, 6)$

On Remplace dans F

$2 + 2\times 2 - 6 = 0 \Leftrightarrow 6 - 6 = 0$ ✓

• Les 3 condition sont vérifiés donc F est un Sous-espace vectoriel.

② Combinaison linéaire :

Soit $\{v_1, v_2, v_3 \dots, v_p\}$ une Famille d'un EV. On dit v est un combinaison linéaire de E si :

$v = \sum \lambda_i v_i = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_p v_p$.

③ Famille Génératrice :

La famille $\{v_1, v_2 \dots v_p\}$ est une famille génératrice de E, si tout le vecteurs de E est une Combinaison linéaire.

④ Famille libre :

$F = \{v_1, v_2, v_3\}$ est une famille libre si et seulement si $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0$

Donc

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$

$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + 2y - z = 0\}$

Condition ① Vérifié

. On Remplace X, Y, et Z par 0

$0 + 2\times 0 - 0 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$ ✓

Condition ② Vérifié

. On pose $X = (1, 1, 3)$ tq $X \in F$

et $Y = (0, 1, 2)$ tq : $Y \in F$.

$(X + Y) = (1+0; 1+1; 3+2)$

$= (1; 2; 5)$

On le remplace dans F :

$1 + 2\times 2 - 5 = 5 - 5 = 0$ ✓

Condition ③ Vérifié

. On pose $\lambda = 2 \in \mathbb{R}$ et $X = (1, 1, 3)$

$\lambda X = (2\times 1, 2\times 1, 2\times 3) = (2, 2, 6)$

On Remplace dans F

$2 + 2\times 2 - 6 = 0 \Leftrightarrow 6 - 6 = 0$ ✓

• Les 3 condition sont vérifiés donc F est un Sous-espace vectoriel.

② Combinaison linéaire :

Soit $\{v_1, v_2, v_3 \dots, v_p)$ une Famille d'un EV. On dit v est un combinaison linéaire de E si :

$v = \sum \lambda_i v_i = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_p v_p$.

③ Famille Génératrice :

La famille $\{v_1, v_2 \dots v_p\}$ est une famille génératrice de E, si tout le vecteurs de E est une Combinaison linéaire.

④ Famille libre :

$F = \{v_1, v_2, v_3\}$ est une famille libre si et seulement si $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0$

Donc

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$

III > Produit Vectoriel ; Scalaire et mixte

① Produit Scalaire

Soit $\vec{u} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$

$\vec{v} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ avec $n \in \mathbb{R}$.

Donc Produit Scalaire de $\vec{u}$ par $\vec{v}$:

$\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + \ldots + x_n y_n$

Donc Produit Scalaire donne un nombre.

Si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ donc $\vec{u} \perp \vec{v}$

② Produit Vectoriel :

Soit $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$; $\vec{u} = (x_1, x_2, x_3)$ et $\vec{v} = (y_1, y_2, y_3)$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \left(\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} , \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} , \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right)$$

$$= \left((x_2 y_3 - x_3 y_2) ; (x_3 y_1 - x_1 y_2) ; (x_1 y_2 - x_2 y_1) \right)$$

③ Produit Mixte :

$\det\{\vec{u}, \vec{w}, \vec{v}\} = \vec{u} \cdot (\vec{w} \wedge \vec{v})$

Quelques Notions :

- $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{v} \times \vec{u}$
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$
- $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$
- $\|\vec{u}\| = \sqrt{(\vec{u})^2}$
- $\vec{u} \wedge \vec{v} \neq \vec{v} \wedge \vec{u}$
- $\vec{u} \wedge \vec{u} = 0$
- $\det(\vec{u}, \vec{v}) = -\det(\vec{v}, \vec{u})$
- $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \det(\vec{u}, \vec{v}) + \det(\vec{v}, \vec{w})$
- $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$

$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \neq 0 \Rightarrow$ Famille est libre

$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0 \Rightarrow$ " " liée.