Chapitre VII - Electrocinétique

1- Courant et résistance électriques

1.1- Le courant électrique

Nous avons vu qu'il était possible d'électriser un matériau conducteur, par exemple par frottements. Si l'on met ensuite ce conducteur en contact avec un autre, le deuxième devient à son tour électrisé, c'est à dire qu'il a acquis une certaine charge Q. Cela signifie que lors du contact des charges se sont déplacées de l'un vers l'autre. On définit alors le courant par :

$\boldsymbol{I} = \frac{\boldsymbol{dQ}}{\boldsymbol{dt}}$, où les unités sont les Ampères (symbole A). Dans le système international, l'Ampère est l'une des 4 unités fondamentales (avec le mètre, le kilogramme et la seconde), de telle sorte que 1 C =1 As (Ampère seconde).

1.2- La densité de courant électrique

La raison physique du courant est un déplacement de charges, c'est à dire l'existence d'une vitesse organisée (par opposition à la vitesse d'agitation thermique) de celles-ci.

Considérons donc un fil conducteur de section S, dans lequel se trouvent n porteurs de charge q, animés d'une vitesse $\vec{v}$ dans le référentiel du laboratoire. Pendant un instant dt, ces charges parcourent une distance $\vec{v}dt$. Soit $d^2S\vec{n}$ un élément infinitésimal de surface mesuré sur la section du fil, orienté dans une direction arbitraire. La quantité de charge électrique qui traverse cette surface pendant dt est celle contenue dans le volume élémentaire dV associé à :

$$\boldsymbol{d^3Q = nqd^3V = nq\vec{v}dt.d^2S\vec{n}}$$

On voit alors apparaître un vecteur qui décrit les caractéristiques du milieu conducteur et qu'on appelle la densité de courant : $\vec{\boldsymbol{j}} = \boldsymbol{nq\vec{v}}$ exprimée en Ampères par mètre carré (A m^{-2}).

Le courant I circulant dans le fil est relié à la densité par

$$\boldsymbol{I = \frac{dQ}{dt} = \frac{1}{dt}\iint_{Section} d^3Q = \frac{1}{dt}\iint_{Section} \vec{j}.\overrightarrow{d^2S}dt \Rightarrow I = \iint_{Section} \vec{j}.\overrightarrow{d^2S}}$$

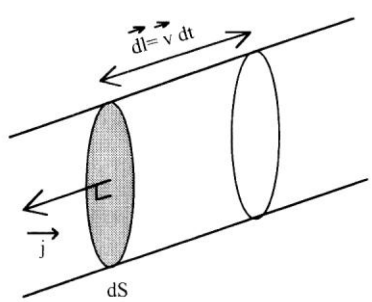


Figure VII,1

On dit que le courant dans un circuit est le flux à travers la section du fil de la densité de courant. Le sens du courant (grandeur algébrique) est alors donné par le sens du vecteur densité de courant.

Un conducteur est un cristal (ex: cuivre) dans lequel se déplacent des particules chargées (ex, électrons). Suivant le matériau, les porteurs de charges responsables du courant peuvent être différents. Dans un métal, ce sont des électrons, dits de conduction (la nature et le signe des porteurs de charge peuvent être déterminés grâce à l'effet Hall). Dans un gaz constitué de particules ionisées, un plasma, ou bien dans un électrolyte, il peut y avoir plusieurs espèces chargées en présence. En toute généralité, on doit donc définir la densité locale de courant de la forme : $\vec{\boldsymbol{j}} = \sum_{\alpha} \boldsymbol{n}_{\alpha}\boldsymbol{q}_{\alpha}\vec{\boldsymbol{v}}_{\alpha}$

où l'on fait une sommation sur toutes les espèces (électrons et ions) en présence. Dans le cas particulier d'un cristal composé d'ions immobiles (dans le référentiel du laboratoire) et d'électrons en mouvement, on a : $\vec{\boldsymbol{j}} = -\boldsymbol{n_e e}\vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{e}}$ où e est la charge élémentaire et n_e la densité locale d'électrons libres. La densité de courant (donc le sens attribué à I) est ainsi dans le sens contraire du déplacement réel des électrons.

1.3- Loi d'Ohm microscopique (ou locale)

Dans la plupart des conducteurs, on observe une proportionnalité entre la densité de courant et le champ électrostatique local,

$\vec{j} = \sigma\vec{E}$ où le coefficient de proportionnalité σ est appelé la conductivité du milieu.

On définit également $\rho = \frac{1}{\sigma}$ la résistivité du milieu. La conductivité est une grandeur locale positive, dépendant uniquement des propriétés du matériau. Ainsi, le Cuivre possède une conductivité $\sigma_{Cu} = 58\ 10^{6}$ S/m, tandis que celle du verre (isolant) vaut $\sigma_{verre} = 10^{-11}$ S/m.

Une telle loi implique que les lignes de champ électrostatique sont également des lignes de courant, indiquant donc le chemin pris par les charges électriques. Par ailleurs, comme σ est positif, cela implique que le courant s'écoule dans la direction des potentiels décroissants.

1.4- Résistance d'un conducteur : loi d'Ohm macroscopique

Considérons maintenant une portion AB d'un conducteur parcouru par un courant I. S'il existe un courant, cela signifie qu'il y a une chute de potentiel entre A et B,

$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{V_A} - \boldsymbol{V_B} = \int_{\boldsymbol{A}}^{\boldsymbol{B}} \vec{\boldsymbol{E}}.\overrightarrow{\boldsymbol{dl}}$. On définit alors la résistance de cette portion par

$$R = \frac{U}{I} = \frac{\int_A^B \vec{E}.\overrightarrow{dl}}{\iint_S \sigma\vec{E}.\overrightarrow{dS}}$$

où l'unité est l'Ohm (symbole Ω). Dans le cas simple d'un conducteur filiforme de section S où, sur une longueur L, le champ électrostatique est uniforme, on obtient le lien entre la résistance d'un conducteur (propriété macroscopique) R et sa résistivité ρ (propriété microscopique) qui montre que les unités de la résistivité sont le Ωm (Ohm mètre).

$$\boldsymbol{R} = \frac{E.L}{\sigma.E.S} = \boldsymbol{\rho}\frac{L}{S}$$

$$\text{avec } \boldsymbol{\rho} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\sigma}}$$

Associations de résistances :

(a) Résistances en série

Soient n résistances R_i mises bout à bout dans un circuit et parcourues par un courant I. La tension aux bornes de la chaîne est simplement

$$U = (V_0 - V_1) + (V_1 - V_2) + \cdots + (V_{n-1} - V_n) = R_1 I + R_2 I + \cdots + R_n I$$

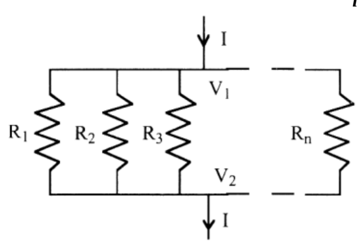
c'est à dire analogue à celle obtenue par une résistance unique dont la valeur est

$$R = \sum_{i=1}^{n} R_i$$

(b) Résistances en parallèle

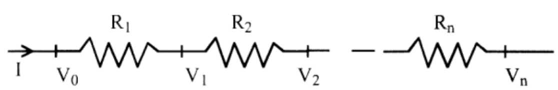
Soient n résistances R_i mises en parallèle sous une tension $U=V_1-V_2$ et alimentées par un courant I. Le courant se sépare alors en n courants

$I_i = \dfrac{U}{R_i}$ dans chacune des n branches. En vertu de la conservation du courant (voir ci-dessous), on a : $I = \sum_{i=1}^{n} I_i = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{U}{R_i} = \dfrac{U}{R}$ c'est à dire que l'ensemble des n branches est analogue à une résistance équivalente en série : $\dfrac{1}{R} = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{1}{R_i}$



Résistances en parallèle

Figure VII,2



Résistances en série

Figure VII,3

2- Eléments d'un circuit électrique

2.1- Notion de circuit électrique

Définitions : Un circuit électrique est constitué d'un ensemble de dispositifs appelés dipôles, reliés entre eux par un fil conducteur et formant ainsi une structure fermée. Un nœud d'un circuit est une interconnexion où arrivent 3 fils ou plus. Une branche est un tronçon de circuit situé entre deux nœuds. Enfin, une maille est un ensemble de branches formant une boucle fermée.

Un dipôle s'insère dans un circuit par l'intermédiaire de deux pôles, l'un par où s'effectue l'entrée du courant (borne plus), l'autre la sortie (borne moins). Il est caractérisé par sa réponse à une différence de potentiel U entre ses bornes : c'est à dire la courbe caractéristique I=f(U). Un dipôle passif a une courbe passant par l'origine. Un dipôle actif fournit un courant (positif ou négatif) même en l'absence d'une tension. Enfin, on appelle dipôle linéaire tout dipôle dont la courbe caractéristique est une droite.

Nous avons vu que dans tout conducteur, la présence d'une résistivité entraîne une chute de tension et, en toute rigueur, il en va de même pour les fils. Mais ceux-ci étant mis en série avec d'autres dipôles, on néglige en général la résistance des fils devant celle des dipôles présents. Donc, les fils situés entre deux dipôles d'un circuit seront supposés équipotentiels.

Remarque :
On s'intéresse à des cas où un courant est établi de façon permanente dans un circuit, c'est à dire dont l'intensité est la même en tout point du circuit. Cela exige évidemment que le circuit soit fermé.

2.2- Puissance électrique disponible
Soit une portion AB d'un circuit, parcourue par un courant permanent I allant de A vers B. L'existence de ce courant implique que le potentiel en A est supérieur à celui en B. Cette différence de potentiel se traduit par l'existence d'un champ électrostatique £E produisant une force de Coulomb $\vec{F} = q\vec{E}$ capable d'accélérer une charge q. Ainsi, soit $P_q = \vec{F}.\vec{v}$ la puissance nécessaire pour communiquer une vitesse $\vec{v}$ à une particule de charge q quelconque. Sachant que dans ce conducteur il y a n porteurs de charge par unité de volume, la puissance totale P mise en jeu dans le brin AB parcouru par un courant I est :

$$\boldsymbol{P} = \iiint_{brinAB} \boldsymbol{nP_q dV} = \int_A^B \boldsymbol{dl} \iint_{section} \boldsymbol{nP_q dS} = \int_A^B \boldsymbol{dl} \iint_{section} \boldsymbol{nq\vec{E}.\vec{v}dS}$$

$$= \int_A^B \iint_{section} \left(\boldsymbol{nq\vec{v}.\overrightarrow{dS}}\right)\boldsymbol{\vec{E}.\overrightarrow{dl}} = \int_A^B \boldsymbol{\vec{E}.\overrightarrow{dl}} \iint_{section} \left(\boldsymbol{\vec{j}.\overrightarrow{dS}}\right)$$

$$= \boldsymbol{I}\int_A^B \boldsymbol{\vec{E}.\overrightarrow{dl}} = \boldsymbol{I}\left[\boldsymbol{V(A) - V(B)}\right] \Rightarrow \boldsymbol{P = UI}$$

où U=V(A)-V(B)>0 puisque le courant s'écoule de A vers B. Cette puissance est donc la puissance électrique disponible entre A et B, du simple fait qu'il y circule un courant I.

Suivant la nature du dipôle placé entre A et B (récepteur), l'énergie électrique disponible sera convertie sous une forme ou une autre. Dans le cas simple où entre A et B ne se trouve qu'une résistance R, la puissance disponible P ne sert qu'à faire chauffer la résistance puisque U =RI. Cela se traduit par une dissipation d'énergie sous forme de chaleur, appelée effet Joule, et dont la puissance vaut : $\boldsymbol{P_j = RI^2}$
Cette énergie électrique peut être également reconvertie en rayonnement (lampe), énergie mécanique (moteur), chimique (bac à électrolyse).

2.3- Nécessité d'une force électromotrice ou fém
Si on applique le raisonnement précédent à un circuit fermé, c'est à dire si l'on regarde la puissance totale fournie entre A et A par la force de Coulomb, on obtient

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{I}\int_A^A \boldsymbol{\vec{E}.\overrightarrow{dl}} = \boldsymbol{I}\left[\boldsymbol{V(A) - V(B)}\right] = \boldsymbol{0}$$

c'est à dire une puissance nulle ! Cela signifie qu'il ne peut y avoir de courant en régime permanent. Lorsque qu'il y a un courant, alors cela implique que la force de Coulomb n'est pas responsable du mouvement global des porteurs de charge dans un conducteur.
Si on veut constituer un circuit fermé, il faut fournir de l'énergie, donc une force autre que la force électrostatique.

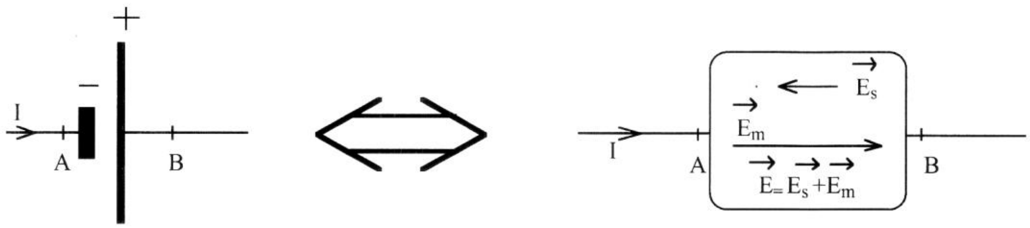


Figure VII,4

Le siège de la force responsable du courant dans un circuit est appelé le générateur.
Regardons donc attentivement ce qui se passe à l'intérieur d'un générateur, où A correspond à la borne « - », B à la borne « + », le courant circulant donc de B vers A à l'extérieur du générateur. En régime permanent, les charges ne s'accumulent en aucun point du circuit, il y a libre circulation des charges : cela implique donc que les charges doivent traverser le générateur. Or, V(B)>V(A), ce qui signifie qu'il y a un champ électrostatique $\vec{E}_s$ dirigé de B vers A à l'intérieur du générateur. Quel que soit le signe des porteurs de charge responsables du courant, si celui-ci va de B vers A à l'extérieur, alors $\overrightarrow{E_s}$ s'oppose au mouvement des charges à l'intérieur. La seule façon d'obtenir un régime stationnaire avec un courant permanent I, c'est donc d'avoir un champ supplémentaire, appelé champ électromoteur $\overrightarrow{E_m}$, supérieur en norme et dirigé en sens inverse de $\overrightarrow{E_s}$.
Mettons maintenant le générateur en circuit ouvert (I=0). Le fait qu'une différence de potentiel (d.d.p.) se maintienne entre ses bornes implique nécessairement la présence d'une autre force compensant l'attraction coulombienne. Ainsi, la force totale s'exerçant sur une charge q doit s'écrire $\vec{F} = q\left(\vec{E}_s + \vec{E}_m\right)$ et, à l'équilibre et en l'absence de courant, on doit donc avoir $\vec{E}_s + \vec{E}_m = \vec{0}$. Cela signifie donc que la ddp ou tension mesurée aux bornes d'un générateur ouvert vaut :

$$V_A - V_B = \int_A^B \vec{E}_s . \vec{dl} = -\int_A^B \vec{E}_m . \vec{dl}$$

où, bien évidemment, V_A-V_B<0. On appelle

$$e = \int_A^B \vec{E}_m . \vec{dl}$$

la force électromotrice ou fém du générateur (e>0 est exprimée en Volts). On utilisera la notation $\overrightarrow{E_s}$ pour le champ électrostatique et $\overrightarrow{E_m}$, pour le champ électromoteur.

A l'équilibre, mais en présence d'un courant I (générateur branché dans un circuit fermé), les porteurs de charge responsables de ce courant subissent une force supplémentaire, due aux collisions se produisant à l'intérieur du conducteur. Pour un générateur idéal, ces collisions sont négligeables et l'on obtient V_A -V_B= -e. En revanche, pour un générateur non idéal, de telles collisions se produisent et se traduisent par l'existence d'une résistance interne r.
D'après le modèle de Drude, on a simplement

$$\int_A^B \left(\vec{E}_s + \vec{E}_m - \frac{k}{q}\vec{v}\right).\vec{dl} = 0$$

$$V_A - V_B + e = \int_A^B \frac{k}{q}\vec{v}.\vec{dl} = \int_A^B \eta\vec{j}.\vec{dl} = rI$$

C'est à dire une tension aux bornes du générateur V_A - V_B = r.I - e. La résistance interne de celui-ci introduit une chute de tension, ce qui fait qu'il délivre une tension inférieure à celle donnée par sa fém. Les générateurs diffèrent selon la source d'énergie utilisée et la méthode de conversion de celle-ci en énergie électrique (autrement dit, selon la nature de E_m). On peut ainsi produire de l'énergie électrique à partir d'une pile (énergie chimique), d'un générateur électrostatique (énergie mécanique, ex machine de Van de Graaf), d'une dynamo (énergie mécanique), d'une pile solaire (énergie du rayonnement) ou d'un thermocouple (chaleur, c'est à dire énergie cinétique désordonnée).

Dans la suite, nous supposerons simplement l'existence d'une fém e dans un circuit, localisée dans un dipôle appelé générateur, sans préciser sa nature.

Reprenons le calcul fait précédemment mais appliquons-le cette fois-ci à l'ensemble du circuit. Soit alors V le volume total occupé par le conducteur formant le circuit et £F la force s'exerçant sur les charges mobiles q et donc responsable de leur mouvement. La puissance totale P qui doit être fournie en régime permanent est alors :

$$P = \iiint_v nP_q dV = \oint_{circuit} dl \iint_{section} n\vec{F}.\vec{v}dS = \oint_{circuit} \iint_{section} (nq\vec{v}.\vec{dS})\frac{\vec{F}.\vec{dl}}{q}$$

$$= \oint_{circuit} \frac{\vec{F}.\vec{dl}}{q} \iint_{section} \vec{j}.\vec{dS} = I \oint_{circuit} \frac{\vec{F}.\vec{dl}}{q} = Ie \quad \text{où } e = \oint_{circuit} \frac{\vec{F}}{q}.\vec{dl} = \oint_{circuit} \vec{E}_m.\vec{dl}$$

est la fém totale du circuit. L'intégrale portant sur l'ensemble du circuit, la fém totale est donc la somme des fém présentes le long du circuit. Si celles-ci sont localisées dans des dipôles, l'expression précédente devient :

$$e = \sum_k e_k$$

où les e_k sont les valeurs algébriques des différentes fém :

1. $e_k>0$ correspond à un générateur (production d'énergie électrique) ;
2. $e_k<0$ correspond à un récepteur (consommation d'énergie électrique).

Un moteur convertit de l'énergie électrique en énergie mécanique et correspond donc à un récepteur de fém négative : on dit également qu'il possède une force contre-électromotrice ou fcém.

3- Lois régissant les circuits électriques

3.1- Loi d'Ohm généralisée

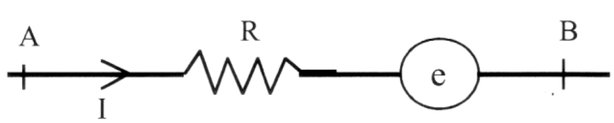


Figure VII,5

Considérons un brin AB d'un circuit électrique fermé, parcouru par un courant I, de résistance R et ayant une fém e. La loi d'Ohm généralisée s'écrit

$V_A - V_B = RI - e$

Remarques

1. Cette expression n'est valable que lorsque le courant s'écoule de A vers B.
2. On peut réinterpréter la résistance R comme étant la résistance totale du brin AB (fil, résistance et résistance interne du générateur) et e comme la fém totale (somme algébrique de toutes les fém).
3. L'effet Joule fait chuter le potentiel tandis que le générateur (e>0) remonte le potentiel.
4. Si e<0, cela signifie que le dipôle associé fait chuter le potentiel. On appelle alors e la force contre-électromotrice (fcém). Elle peut être due soit à un moteur (récepteur pur) , soit à un générateur dont la polarité est opposée à celle du générateur principal, responsable du courant circulant entre A et B.

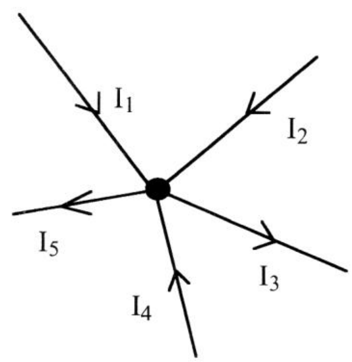
3.2- Lois de conservation dans un circuit (lois de Kirchhoff)

Les lois de l'électrocinétique, connues sous le nom de lois de Kirchhoff, sont en fait de simples lois de conservation.

1) Conservation du courant (loi des nœuds) :

Soit un nœud quelconque du circuit sur lequel arrive un certain nombre de fils. Sur chacun de ces fils, circule un courant. En régime permanent, la conservation de la charge électrique se traduit par la conservation du courant: en aucun point du circuit il ne peut y avoir accumulation (ou perte) de charges. Cela signifie donc que l'ensemble des courants entrants compense exactement les courants sortants,

$$\sum \boldsymbol{I}_{entrants} = \sum \boldsymbol{I}_{sor\ tants}$$



$$I_1 + I_2 + I_4 = I_3 + I_5$$

Figure VII,6

Ceci constitue la loi des noeuds ou l'équation aux noeuds.

2) Conservation de l'énergie (loi des mailles) :

Soit une maille d'un circuit constituée de n branches. L'équation aux branches pour la k-ième branche s'écrit :

$\boldsymbol{U_k = R_k I_k - e_k}$

où R_k , I_k et e_k sont respectivement la résistance totale, le courant et la fém contenues dans cette branche. La conservation de l'énergie pour cette maille s'exprime par le fait que, partant du noeud 1 et revenant à ce noeud, on retrouve le même potentiel, c'est à dire

$V_1 - V_1 = V_1 - V_2 + \ldots\ldots\ldots V_n - V_1 = 0$

La loi des mailles (ou équation de maille) s'exprime tout simplement par

$$\sum_{k=1}^{n}(R_k I_k - e_k) = 0$$

3.3- Résolution pratique des équations en électrocinétique :

En général, on cherche à calculer les courants I_k qui circulent dans chacune des branches d'un circuit, étant donné ses résistances R_k et ses générateurs (ou récepteurs, selon le sens de branchement) e_k. Du fait des lois de conservation ci-dessus, un circuit comportant n branches n'a pas n courants I_k indépendants les uns des autres. Le nombre réel d'inconnues est en fait

$$\mathbf{M = B - N + 1}$$

où B est le nombre de branches du circuit et N le nombre de nœuds.

Pour résoudre ce problème on utilisera la méthode suivante :

1. Choisir M mailles indépendantes, c'est à dire ayant au moins une branche non partagée avec une autre maille.

2. Sur chacune de ces mailles, définir un sens de parcours arbitraire pour le courant de maille I_m .

3. Ecrire les M équations de maille $\sum_{k=1}^{n}(R_k I_k - e_k) = 0$ en suivant le sens de parcours choisi pour I_m . Pour être en accord avec la convention de la loi d'Ohm généralisée, le signe de chaque fém e_k doit dépendre de la polarité rencontrée en suivant le courant. Ainsi, si l'on rencontre la borne +, on met un signe + $(R_k I_m + e_k = 0)$, tandis que si l'on rencontre la borne -, on met le signe - $(R_k I_m - e_k = 0)$.

En suivant cette méthode, on obtient M équations à M inconnues (les courants de maille). Si, après calculs, un courant de maille est positif, cela signifie qu'il est effectivement dans le sens choisi initialement.

On détermine enfin les courants réels I_k circulant dans chaque branche (courants de branches), en choisissant arbitrairement leur sens, puis en exprimant ceux-ci en fonction des M courants de maille I_m.

On pourra vérifier que cette méthode permet de satisfaire automatiquement la conservation du courant (loi des nœuds).

Exemple : Le pont de Wheatstone

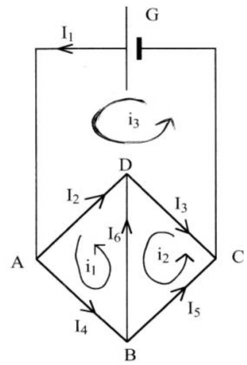


Figure VII,7

Le pont de Wheatstone possède M = 6 – 4 + 1 = 3 mailles indépendantes. On choisit par exemple les 3 mailles suivantes :

- ABDA, de courant de maille i_1 allant de A vers B.
- BCDB, de courant de maille i_2 allant de B vers C.
- GADCG, de courant de maille i_3 allant de A vers C.

En choisissant arbitrairement le sens des 6 courants de branche I_k comme sur la figure, on obtient les relations suivantes:

$I_1 = i_3$; $I_2 = i_3 - i_1$; $I_3 = i_3 - i_2$

$I_4 = i_1$; $I_5 = i_2$; $I_6 = i_1 - i_2$

qui satisfont bien automatiquement la conservation du courant aux 4 noeuds

$I_1 = I_2 + I_4$; $I_3 = I_2 + I_6$; $I_4 = I_5 + I_6$; $I_1 = I_3 + I_5$

Il ne nous reste plus qu'à écrire les 3 équations de maille (étape 3) pour calculer les 3 courants de maille, puis en déduire les courants réels I_k circulant dans chaque branche. En utilisant cette méthode, on se ramène à la résolution d'un système linéaire de 3 équations à 3 inconnues, au lieu d'un système linéaire de 6 équations à 6 inconnues...

Exercice d'application :

Un pont de Wheatstone est constitué de résistances R_1, R_2,R_3,R_4, r et d'un générateur de f.e.m. E et de résistance interne négligeable (figure a).

1) Ecrire les équations aux mailles CADE,CBDE,CAB et en déduire le courant i dans la branche AB.

2) Donner la condition d'équilibre du pont (i=0).

3) Calculer R_{CD},la résistance équivalente entre C et D à l'équilibre du pont.

On débranche la résistance r :

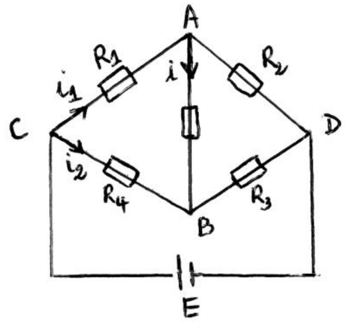
4) Calculer la différence de potentiel (d.d.p) V_{AB} à vide.

La résistance r étant toujours débranchée,on court-circuite le générateur E (figure b):

5) Donner la résistance équivalente R_{AB} entre A et B.

On réalise un circuit comportant un générateur f.e.m. = V_{AB} et de résistance interne R_{AB}, en série avec la résistance r.

6) Quel est le courant i' qui circule dans ce circuit? Que remarque-t-on?



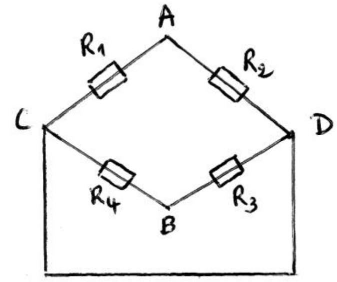


Figure VII,8a Figure VII,8b

Solution :

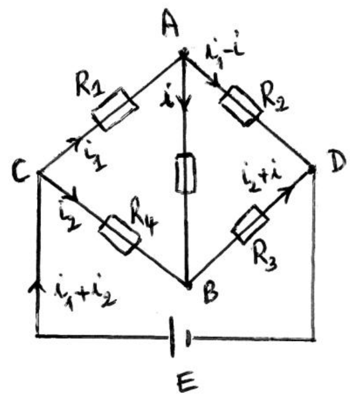


Figure VII,9

1) Maille CADE : $(R_1+R_2)i_1-R_2i = E$
   Maille CBDE : $(R_3+R_4)i_2+R_3i = E$
   Maille CAB: $R_1i_1-R_4i_2+ri = 0$

$$\boldsymbol{i} = \frac{\boldsymbol{E}\left(\boldsymbol{R}_2\boldsymbol{R}_4 - \boldsymbol{R}_1\boldsymbol{R}_3\right)}{\boldsymbol{r}\left(\boldsymbol{R}_1+\boldsymbol{R}_2\right)\left(\boldsymbol{R}_3+\boldsymbol{R}_4\right)+\boldsymbol{R}_1\boldsymbol{R}_2\left(\boldsymbol{R}_3+\boldsymbol{R}_4\right)+\boldsymbol{R}_3\boldsymbol{R}_4\left(\boldsymbol{R}_1+\boldsymbol{R}_2\right)}$$

2) Equilibre du pont: $i = 0 \Rightarrow R_1R_3=R_2R_4$
3) A l'équilibre $V_{AB}=0 \Rightarrow$ A et B même nœud :
   $$\boldsymbol{R}_{CD} = \frac{\boldsymbol{R}_1\boldsymbol{R}_4}{\boldsymbol{R}_1+\boldsymbol{R}_4} + \frac{\boldsymbol{R}_2\boldsymbol{R}_3}{\boldsymbol{R}_2+\boldsymbol{R}_3}$$ (R_1 parallèle à R_4 et R_2 parallèle à R_3)

4) $(R_1+R_2)i_1 = (R_3+R_4)i_2 = E$

$$\boldsymbol{V}_{AB} = \frac{\boldsymbol{E}\left(\boldsymbol{R}_2\boldsymbol{R}_4 - \boldsymbol{R}_1\boldsymbol{R}_3\right)}{\left(\boldsymbol{R}_1+\boldsymbol{R}_2\right)\left(\boldsymbol{R}_3+\boldsymbol{R}_4\right)}$$

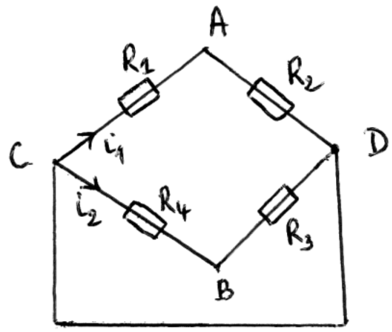


Figure VII,10

5) $\boldsymbol{R_{AB}} = \dfrac{\boldsymbol{R_1R_2}}{\boldsymbol{R_1+R_2}} + \dfrac{\boldsymbol{R_3R_4}}{\boldsymbol{R_3+R_4}}$ (R_1 parallèle à R_2 et R_3 parallèle à R_4)

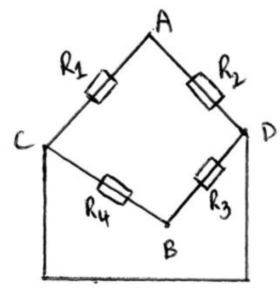


Figure VII,11

6) $\boldsymbol{i'} = \dfrac{\boldsymbol{V_{AB}}}{\boldsymbol{R_{AB}+r}} = \dfrac{\boldsymbol{E\left(R_2R_4 - R_1R_3\right)}}{\boldsymbol{r\left(R_1+R_2\right)\left(R_3+R_4\right)+R_1R_2\left(R_3+R_4\right)+R_3R_4\left(R_1+R_2\right)}}$

i'=i (théorème de Thévenin)

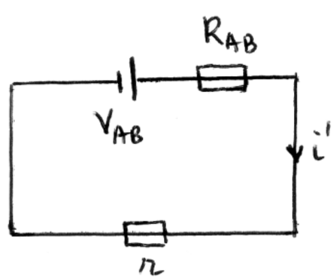


Figure VII,12

Exercices du chapitre VII

Exercice VII.1 :
Calculer l'intensité du courant dans chaque branche en précisant son sens de passage (figure).
A.N: $E_1 = E_2 = 2V$, $R=5\ \Omega$, $R_1=4\ \Omega$, $R_2 = 6\Omega$.

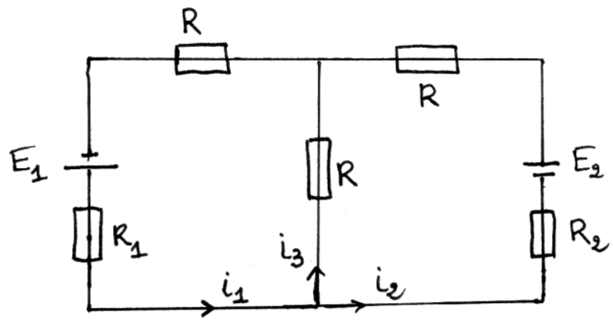


Figure VII,13

Exercice VII. 2 :
Soit le circuit ci-dessous (figure).
1- On appelle R la résistance équivalente entre A et B. Calculer R
2) Calculer la constante de temps du circuit.
3) A l'instant t=0, on ferme K. Sachant qu'à l'instant $t = 2\tau$, *la d.d.p* V_R *vaut l volt, calculer E.*
4) Que vaut alors V_C*(aux bornes du condensateur à ce même temps ?*
5) A quel instant la tension V_C *vaut-elle le double de* V_R *?*

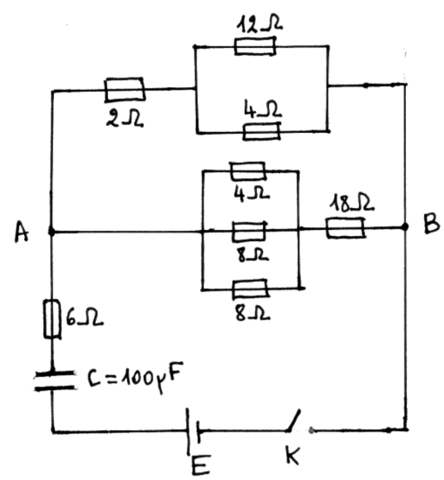


Figure VII,14

Exercice VII.3 :
Soit le circuit ci-dessous (figure 4). On ferme K.
1) Déterminer l'intensité du courant dans chaque branche lorsque le condensateut est entièrement chargé.
2) Déterminer alors la d.d.p aux bornes de C. Quelle est l'énergie emmagasinée dans ce condensateur ?

3) Le condensateur étant entièrement chargé, on ouvre K à un instant que l'on prendra comme origine des temps (t = 0) :
a) Ecrire l'équation différentielle donnant l'évolution de la charge q(t) du condensateur.
b) En déduire l'expression de q(t) du condensateur.
c) Caiculer !'énergie dissipée dans R_2 et R_3 pendant la décharge du condensateur.
Comparer cette énergie avec celle calculée à la $2^{ème}$ question, Conclure.

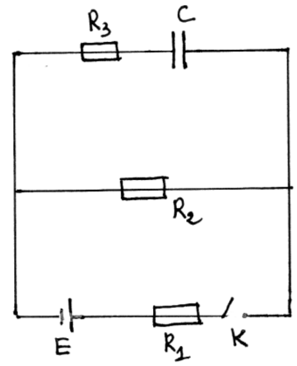


Figure VII,15

Exercice VII.4 :
N piles identiques de f.e.m E et de résistance interne r peuvent être groupés en série ou en paralléle. Démontrez que tout arrangement de ces piles produit le même courant à travers une résistance extérieure R_0 si R_0 = r (figure 6).

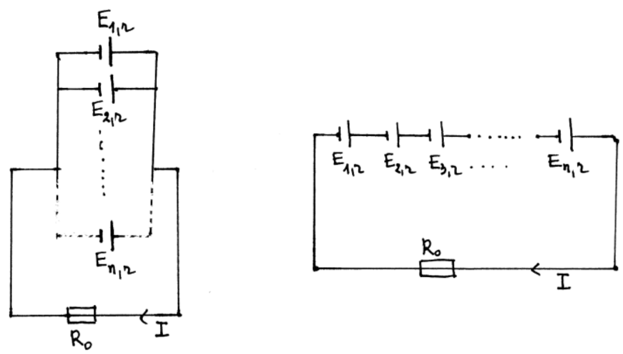


Figure VII,16

Exercice VII.5 : Déterminer les caractéristiques e, r du générateur équivalent à l'association de deux générateurs en paralléle de caractéristiques respectives e_1, r_1, et e_2, r_2,
Calculer e et r si e_1=6V, r_1 =1.5 Ω, e_2 = 2V, r_2 = 0.5Ω (figure7).

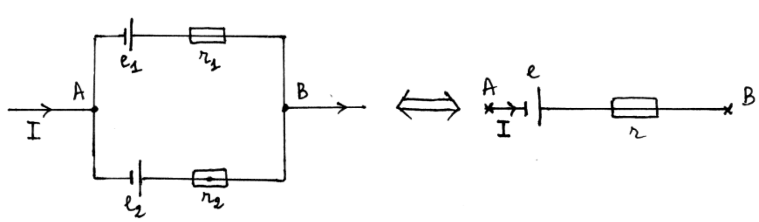


Figure VII,17

ExerciceVII.6 :

Soit le circuit suivant constitué d'un générateur de tenion E , d'une résistance interne négligeable et de deux résistances R_1 et R_2.

1) U_0 étant la différence de potentiel (d.d.p) entre A et B ; on pose $a = \frac{E}{U_0}$; donner l'expression de « a » en fonction des éléments du circuit.

2) On insère entre A et B une résistance R ; Quel est le courant « i » circulant à travers cette résistance en fonction de E, a, R, R_2.

3) On suppose que ce courant « i » est délivré par un générateur équivalent de tension U_0 et de résistance interne R_i ; donner l'expression de R_i.

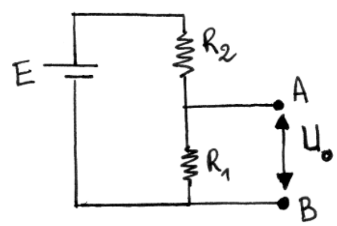


Figure VII,18

Exercice VII.7 :

Soit le circuit électrique suivant :

$r = 2\Omega$, $r' = 1\Omega$, $e = 12V$, $e' = 4V$, $R_1 = 8\Omega$, $R_2 = R_3 = 16\Omega$, $R_4 = 4\Omega$, $R = 20\Omega$

1) *Calculer la résistance équivalente entre A et B.*
2) *Après simplification du circuit donner le nombre de nœuds et de mailles et poser les équations correspondantes.*
3) *Calculer les différents courants.*

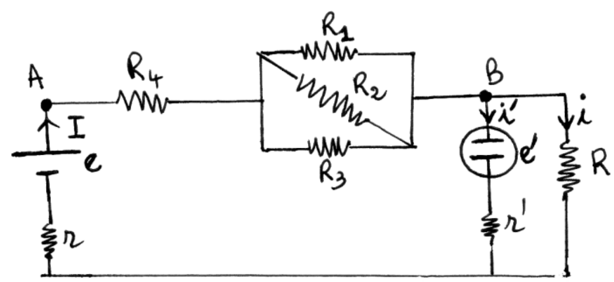


Figure VII,19

ExerciceVII. 8 :

Calculer les courants du circuit suivant en prenant deux sens opposés au courant qui parcourt la résistance R3 ; e3 étant un recepteur.

1) *Sens $M \rightarrow N$*
2) *Sens $N \rightarrow M$*

$E_1 = 6V$, $E_2 = 4V$, $e_3 = 1V$, $R_1 = 20\Omega$, $R_2 = 8\Omega$, $R_3 = 10\Omega$.

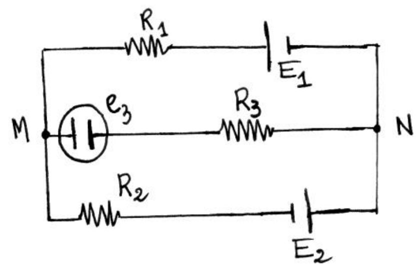


Figure VII,20

Exercice VII. 9 :

Déterminer la résistance équivalente entre A et B, et calculer les courants I, i et i'du circuit électrique de la figure ci-dessous (figure 5).

Données : $R_1 = 8\Omega$, $R_2 = R_3 = 16\Omega$, $R_4 = 20\Omega$, $R_5 = 6\Omega$, $R_6 = 9\Omega$, $R_7 = 18\Omega$, $R = 20\Omega$.

$R = 2\Omega$, $r' = 1\ \Omega$, $E = 12V$, $e = 4V$.

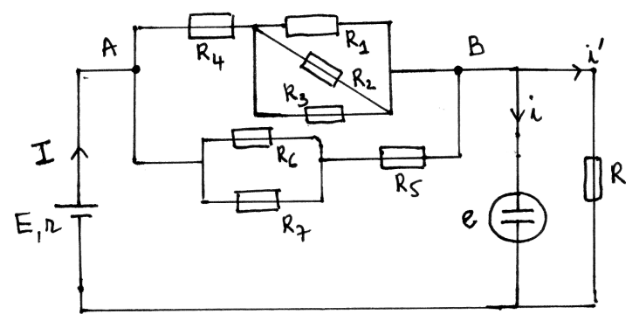


Figure VII,21

Exercice VII.10 :

Calculer dans chaque cas la résistance équivalente entre A et B sachant que chaque résistance vaut l Ω (figure 8).

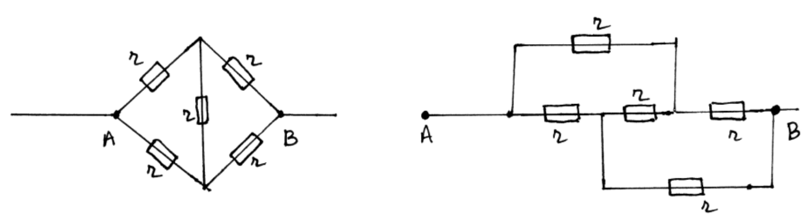


Figure VII,22

Solutions des exercices du chapitre VII

Exercice VII.1
$E_1=(R+R_1)i_1+R(i_1-i_2)$
$E_2=(R+R_2)i_2+R(i_2-i_1)$
$I_1=0.21A$; $i_2=0.19A$; $i_3=0.02A$

Exercice VII.2

1) $R_{eq}=10\Omega$; 2) $\tau=RC=1\mu s$; 3) $i(t)=\frac{E}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}$; $V_R=Ee^{-\frac{t}{\tau}}$

à $t=2\tau$, $V_R=1V\Rightarrow E=e^2=9V$; 4) $V_C(t)=E\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$ à $t=2\tau$; $V_C=E(1-e^{-2})=8V$

La charge q de C à $t=2\tau$ est : $q=CV_C=0.8\mu C$

4) Lorsque V_C vaut le double de V_R ; on a :$Vc(t)=2V_R(t)$ ou :

$E\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right)=2Ee^{-\frac{t}{\tau}}\Rightarrow e^{\frac{t}{\tau}}=3\Rightarrow t=\tau Ln3=1\mu s$

Exercice VII.3
1) C complètement chargé : le courant dans le condensateur est nul : $i = E/(R_1+R_2)=6mA$
2) la d.d.p aux bornes de C : $V_C=V_{R2}=R_2i$; $(V_{R3})=0 \Rightarrow V_C=R_2E/(R_1+R_2)=6V$
L'énergie emmagasinée dans le condensateur est : $Ep=(1/2)CV_C^2= 18.10^{-6}J$
a) lorsqu'on ouvre K (l'interrupteur) C se décharge dans R_2 et R_3 avec la constante de temps $\tau=(R_2+R_3)C$; et l'équation qui régit la décharge s'écrit : $(R_2+R_3)dq/dt+q/C=0$
b) la solution de l'équation différentielle nous donne l'expression de $q(t)=q_0e^{-t/\tau}$
$q_0=CV_C$; $\tau=(R_2+R_3).C$, d'où $q(t)=\frac{R_2}{R_1+R_2}ECe^{-\frac{t}{(R_2+R_3)C}}$
A.N.$q(t)=6.10^{-6}e^{-t/\tau}$; $\tau=2.10^{-3}s$
c) l'énergie dissipée dans R2 et R3 pendant la décharge est : $dW=(R_2+R_3)i^2dt$
avec $i=-\frac{dq}{dt}=\frac{R_2}{R_1+R_2}\cdot\frac{E}{R_2+R_3}e^{-\frac{t}{\tau}}\Rightarrow W=\int_0^{\infty}dW=\frac{(R_2+R_3)}{(R_1+R_2)^2}\frac{R_2^2E^2}{(R_2+R_3)^2}\int_0^{\infty}e^{-\frac{2t}{\tau}}dt$
$W=\frac{CR_2^2}{(R_1+R_2)^2}\frac{E^2}{2}\Rightarrow W=\frac{1}{2}CV_C^2$
Conclusion : toute l'énergie emmagasinée dans le condensateur est dissipée dans R_2 et R_3.

Exercice : VII.4

- Groupement en série : $nrI-ne+R_0I=0 \Rightarrow I=nE/(nr+R_0)$
- Groupement en parallèle : $R_0I-E+(r/n)I=0\Rightarrow I=E/(R_0+r/n)$

I (groupement en parallèle) = I (groupement en série)$\Rightarrow$ $nE/(nr+R_0)=E/(R_0+r/n) \Rightarrow r=R_0$

Exercice: VII.5:
$V_{AB}=-e_1+r_1i_1=-e_2+r_2i_2=-e+rI$ avec $I=i_1+i_2$
$V_{AB}=-6+(3/2)i_1=-2+(1/2)i_2$ d'où $(2/3)V_{AB}=(-12/3)+i_1$, et $2V_{AB}=-4+i_2\Rightarrow-8+I=(8/3)V_{AB}\Rightarrow$
$V_{AB}=-3+(3/8)I$ et $V_{AB}=-e+rI\Rightarrow e=3V$, et $r=(3/8)\Omega$

Exercice: VII.6

1) $(R_1+R_2)I=E \Rightarrow I=E/(R_1+R_2)$ et $R_1I=U0 \Rightarrow I=U_0/R1$

$E/(R_1+R_2)=U_0/R1 \Rightarrow U_0=R_1E/(R_1+R_2)$ avec $a=E/U_0=(R_1+R_2)/R_1$

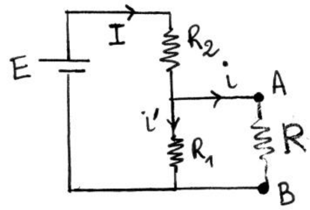


Figure VII,23

2) $I=i+i'$; $R_1i'=Ri \Rightarrow i'=Ri/R_1$; $E=(R_2+R_{eq})I \Rightarrow I=E/(R_2+R_{eq})$ avec $R_{eq}=RR_1/(R+R_1)$

$E/(R_2+R_{eq})=i+Ri/R_1=i(1+R/R_1) \Rightarrow i=R_1E/(R_2+R_{eq})(R_1+R)$;

$i=R_1E/R_2(R+R_1)+RR_1=R_1E/R(R_1+R_2)+R_1R_2=R_1E/aRR_1+R_1R_2 \Rightarrow i=E/(aR+R_2)$.

3) Générateur équivalent:$U_0-R_ii=Ri \Rightarrow i=U_0/(R+R_i)$

en outre $i=(E/a)/(R+(R_2/a))=U_0/(R+(R_2/a)) \Rightarrow R_i=R_2/a$

Exercice VII.7

$R_{AB}=R_4+(1/R_1+1/R_2+1/R_3)^{-1}=8\Omega$; le circuit est simplifiée, on a donc 2 nœuds et 2 mailles :

$I=i+i'$ (1)

$e'+r'i'-e+R_{eq}I=0$ (2)

$e'+r'i'-Ri=0$ (3)

Après résolution de ces équations, on trouve : i'==0.521A ; i=0.226A ; I=0.747A

Exercice VII.8

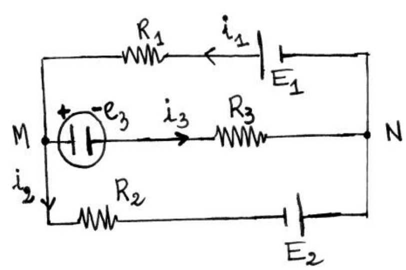


Figure VII,24

$i_1 = i_2+i_3$

Si $i_3=i_{M\to N} \Rightarrow$ $E_1-e_3=R_3i_3+R_1i_1$

$E_2+e_3=R_2i_2-R_3i_3$

Après calcul; on trouve i_3=-0.136A, il faut donc poser $i_3=i_{N\to M}$ et refaire les calculs en posant de nouvelles équations:

$I_2 = i_1+i_3$

Si $i_3=i_{N\to M} \Rightarrow$ $E_{1+}e_3=R_1i_1$

$E_2-e_3=R_2i_2+R_3i_3$

On trouvera enfin: i_3=0.09A; i_1=0.354A; i_2=O.363A.