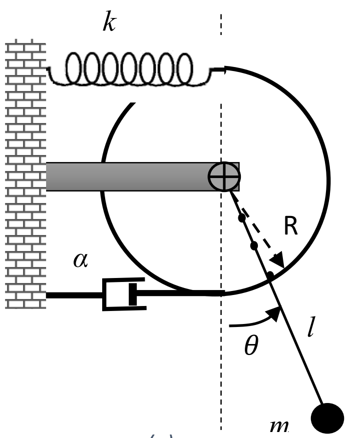
Contrôle continu (durée : 1h00)

Exercice 1 : Système libre 1ddl amorti (7.5)

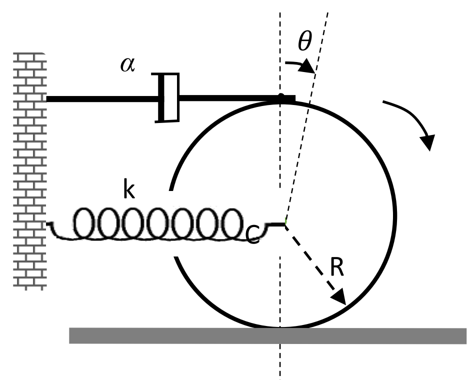
Un oscillateur 1ddl libre amorti possède les quantités physiques suivantes.

$$E_c = \frac{1}{2}a\dot{q}^2 \ , \ E_p = \frac{1}{2}bq^2 \ , \ D = \frac{1}{2}c\dot{q}^2$$

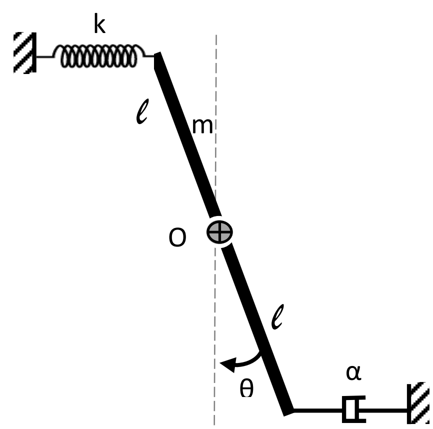
1. Déterminer l'équation de mouvement en fonction de la variable généralisée q.
2. Exprimer la pulsation propre ω_0 et le facteur d'amortissement δ en fonction de a, b et c.
3. Choisir un des trois systèmes suivants et déterminer les expressions de a, b et c.



(a)



(b)

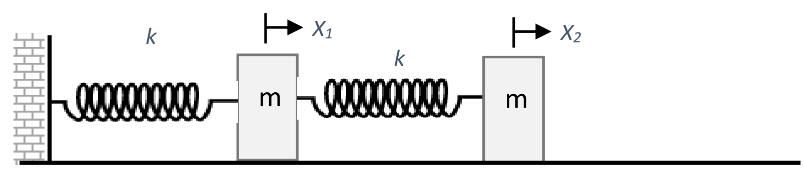


(c)

4. En déduire les expressions de ω_0 et δ pour l'oscillateur choisi.
5. L'amplitude des oscillations observées lorsque l'oscillateur évolue librement diminue de 20% pendant une période. Si la pseudo-période mesurée est $T_a = 1s$ en déduire les valeurs de ω_0 et δ.

Exercice 2 : Système libre non amorti à 2 DDL (7.5)

Deux masses identiques sont reliées comme sur la figure ci-après par des ressorts identiques sans masses de raideur k. L'ensemble peut se déplacer horizontalement sans frottement.
Les déplacements par rapport aux positions d'équilibre des deux masses sont notés $x_1(t)$ et x_2 (t).



1. En utilisant le formalisme de Lagrange établir les équations différentielles de mouvement qui régissent les positions $x_1(t)$ et $x_2(t)$ des deux masses.
2. Trouver les deux pulsations propres ω_1 et ω_2 du système en fonction de $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$.
3. Déterminer les rapports d'amplitudes et en déduire les expressions générales de $x_1(t)$ et $x_2(t)$.
   (4 : Question bonus)
4. On suppose que $x_1(0)$=1cm, $x_2(0)$=−1cm, $\dot{x}_1(0)$=0 et $\dot{x}_2(0)$=0, trouver les expressions de $x_1(t)$ et $x_2(t)$.

SOLUTION

Exercice 1 :

1. C'est un oscillateur amorti à 1 DDL donc : (1)
$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)-\left(\frac{\partial L}{\partial q}\right)=-\left(\frac{\partial D}{\partial \dot{q}}\right)$ $avec\ \ L=\frac{1}{2}a\dot{q}^2-\frac{1}{2}bq^2\quad et\ \ ,\ D=\frac{1}{2}c\dot{q}^2$
$$a\ddot{q}+c\dot{q}+bq=0\rightarrow\ \ \ddot{q}+\frac{c}{a}\dot{q}+\frac{b}{a}q=0$$
2. C'est l'équation d'un système amorti de la forme : $\ddot{q}+2\delta\dot{q}+\omega_0^2q=0$ avec : (0.5 + 0.5)
$$\omega_0=\sqrt{\frac{b}{a}}\quad et\ \ \delta=\frac{c}{2a}$$
3. Système (a) : (1 + 1 + 1)

système	a	b	c
(a)	$\boldsymbol{m(R^2+l^2)}$	$\boldsymbol{kR^2+mgl}$	$\boldsymbol{\alpha R^2}$
(b)	$\boldsymbol{\frac{3}{2}mR^2}$	$\boldsymbol{kR^2}$	$\boldsymbol{4\alpha R^2}$
(c)	$\boldsymbol{\frac{ml^2}{3}}$	$\boldsymbol{kl^2}$	$\boldsymbol{\alpha l^2}$

4. $\omega_0=\sqrt{\frac{b}{a}}\quad et\ \ \delta=\frac{c}{2a}$ (0.75 + 0.75)

système	ω_0	δ
(a)	$\sqrt{\frac{kR^2+mgl}{m(R^2+l^2)}}$	$\frac{\alpha R^2}{2m(R^2+l^2)}$
(b)	$\sqrt{\frac{2k}{3m}}$	$\frac{4\alpha}{3m}$
(c)	$\sqrt{\frac{3k}{m}}$	$\frac{3\alpha}{2m}$

5. (0.5 + 0.5) $D=\ln\left(\frac{100\%}{100\%-20\%}\right)=0.22=\delta T_a\rightarrow\delta=\frac{D}{T_a}=0.22\ s^{-1}\ \ or\ \ \omega_0=\sqrt{\omega_a^2+\delta^2}=\sqrt{\left(\frac{2\pi}{T_a}\right)^2+\delta^2}=$ $6.28\ rad.s^{-1}$

Exercice2 :

1. $L=\frac{1}{2}m\dot{x}_1^2+\frac{1}{2}m\dot{x}_2^2-\frac{1}{2}kx_1^2-\frac{1}{2}k(x_1-x_2)^2$ (0.5 +0.5 + 0.5)
$$\begin{cases}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right)-\left(\frac{\partial L}{\partial x_1}\right)=0\\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right)-\left(\frac{\partial L}{\partial x_2}\right)=0\end{cases}\rightarrow\ \begin{cases}m\ddot{x}_1+2kx_1-kx_2=0\\ m\ddot{x}_2+kx_2-kx_1=0\end{cases}$$
2. On cherche des solutions du type sinusoïdal : $\begin{cases}x_1=Acos(\omega t+\phi_1)\rightarrow\ \ x_1=-\omega^2x_1\\ x_2=Bcos(\omega t+\phi_2)\rightarrow x_2=-\omega^2x_2\end{cases}$ (0.5)
Les équations de mvt deviennent : (0.5 + 0.5 + 0.5)

$$\begin{cases}(2k-m\omega^2)x_1-kx_2=0\\(k-m\omega^2)x_1-kx_2=0\end{cases}\rightarrow\begin{cases}(2\omega_0^2-m\omega^2)x_1-\omega_0^2x_2=0\\(\omega_0^2-m\omega^2)x_2-\omega_0^2x_1=0\end{cases}\equiv\begin{cases}(2\omega_0^2-\omega^2)x_1-\omega_0^2x_2=0\\-\omega_0^2x_1+(\omega_0^2-\omega^2)x_2=0\end{cases}\ (I)$$

C'est un système homogène qui n'a de solutions non nul que si le déterminant est nul. (0.5)

$$(2\omega_0^2-\omega^2)(\omega_0^2-\omega^2)-(-\omega_0^2)(-\omega_0^2)=0$$
$$\omega^4-3\omega_0^2\omega^2+\omega_0^2=0\rightarrow\Omega=\omega^2\rightarrow\Omega^2-3\omega_0^2\Omega+\omega_0^2=0$$

Qui a pour solution $\Omega_{1,2}=(3\pm\sqrt{5})\omega_0^2\ \ d'ou\ \ \omega_{1,2}=\sqrt{(3\pm\sqrt{5})}\,\omega_0\rightarrow\omega_1=0.76\omega_0\ et\ \omega_2=5.24\omega_0$ (0.5 +0.5)

Donc $\cos(\omega_1t+\phi_1)\ est\ une\ solution\ \cos(\omega_2t+\phi_1)\ est\ une\ solution$

3. Les solutions générales s'écrivent donc grâce au principe de superposition comme suit : (0.5)

$$x_1=A_1\cos(\omega_1t+\phi_1)+A_2\cos(\omega_2t+\phi_2)$$
$$x_2=B_1\cos(\omega_1t+\phi_1)+B_2\cos(\omega_2t+\phi_2)$$

Les 6 constantes$A_1,A_2,B_1,B_2,\phi_1\ \ et\ \ \phi_2\ peuvent\ \hat{e}tre\ r\acute{e}duites\ \grave{a}\ 4\ gr\hat{a}ce\ aux\ rapports\ d'amplitudes.$

Du système (I) on déduit

$$\frac{x_2}{x_1}=\frac{(2\omega_0^2-\omega^2)}{\omega_0^2}=2-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}$$

- Lorsque $\omega=\omega_1\rightarrow 1er\ solution\rightarrow\begin{matrix}x_1=A_1\cos(\omega_1t+\phi_1)\\x_2=B_1\cos(\omega_1t+\phi_1)\end{matrix}$ (0.5)

$$\text{Dans ce cas }\mu_1=\frac{x_2}{x_1}=\frac{B_1}{A_1}=2-\frac{\omega_1^2}{\omega_0^2}=2-(3-\sqrt{5})=(-1+\sqrt{5})=1.24$$

- Lorsque $\omega=\omega_1\rightarrow 2e\ solution\rightarrow\begin{matrix}x_1=A_2\cos(\omega_2t+\phi_2)\\x_2=B_2\cos(\omega_2t+\phi_2)\end{matrix}$ (0.5)

$$\text{Dans ce cas }\mu_2=\frac{x_2}{x_1}=\frac{B_2}{A_2}=2-\frac{\omega_2^2}{\omega_0^2}=2-(3+\sqrt{5})=-(1+\sqrt{5})=-3.24$$

D'où les solutions générales s'écrivent : (0.5 + 0.5)

$$x_1=A_1\cos(\omega_1t+\phi_1)+A_2\cos(\omega_2t+\phi_2)$$
$$x_2=1.24A_1\cos(\omega_1t+\phi_1)-3.24A_2\cos(\omega_2t+\phi_2)$$

4. (0.5 + 0.5 + 0.5 + 0.5)

$$\begin{matrix}x_1(0)=1\\x_2(0)=-1\end{matrix}\rightarrow\begin{matrix}A_1\cos\phi_1+A_2\cos\phi_2=1 & (1)\\\mu_1A_1\cos\phi_1+\mu_2A_2\cos\phi_2=-1 & (2)\end{matrix}$$

$$\begin{matrix}\dot{x}_1(0)=0\\\dot{x}_2(0)=0\end{matrix}\rightarrow\begin{matrix}A_1\omega_1\sin\phi_1+A_2\omega_2\sin\phi_2=0 & (3)\\\mu_1A_1\omega_1\sin\phi_1+\mu_2A_2\omega_2\sin\phi_2=0 & (4)\end{matrix}$$

$$\mu_2(1)-(2)=(\mu_2-\mu_1)A_1\cos\phi_1=2\qquad(5)$$

$$\mu_1\,(1)-(2)=(\mu_1-\mu_2)A_2\cos\phi_2=2\qquad(6)$$

$$\mu_2(3)-(4)=(\mu_2-\mu_1)\omega_1A_1\sin\phi_1=0\qquad(7)$$

$$\mu_1\,(1)-(2)=(\mu_1-\mu_2)A_2\omega_2\sin\phi_2=0\qquad(8)$$

De (7) et (8) on déduit $\phi_1=\phi_2=0$

On remplace dans (5) et (6) on trouve $A_1=\frac{2}{\mu_2-\mu_1}=0.45\quad et\ \ A_2=\frac{2}{\mu_1-\mu_2}=-0.45$

D'où les solutions s'écrivent

$$x_1=0.45\cos\omega_1t-0.45\cos\omega_2t$$
$$x_2=0.55\cos\omega_1t-1.46\cos\omega_2t$$