Solution de la série N 3

1 a) Considérons un élément dx de ligne et appliquons la loi d'ohm entre les points M et M'

$$V(x,t) - V(x+dx,t) = L\,dx\,\frac{\partial I}{\partial t}$$

d'où $\boxed{\frac{\partial V}{\partial x} = -L\,\frac{\partial I}{\partial t}}$ (1,1)

La charge du condensateur est donnée par : $dQ = C\,dx\,V(x+dx,t)$ soit, au second ordre près : $dQ = C\,dx\,V(x,t)$. En dérivant par rapport au temps, nous obtenons : $dI = C\,dx\,\frac{\partial V}{\partial t}$

dI représente l'intensité qui traverse le condensateur,

$$dI = I(x,t) - I(x+dx,t) = -\left(\frac{\partial I}{\partial x}\right) dx$$

d'où $\boxed{\frac{\partial I}{\partial x} = -C\,\frac{\partial V}{\partial t}}$ (1,2)

En combinant les relations (1,1) et (1,2) nous trouvons :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = -L\,\frac{\partial^2 I}{\partial t\,\partial x} = LC\,\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \qquad \boxed{\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = LC\,\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}} \quad (1)$$

L'intensité I vérifie la même équation différentielle

$$\frac{\partial^2 I}{\partial x^2} = -C\,\frac{\partial^2 V}{\partial t\,\partial x} = LC\,\frac{\partial^2 I}{\partial t^2} \qquad \boxed{\frac{\partial^2 I}{\partial x^2} = LC\,\frac{\partial^2 I}{\partial t^2}} \quad (1')$$

c) La ddp $V = \rho I_0\, e^{i(\omega t - kx)} - \rho I_1\, e^{i(\omega t + kx)}$ est solution de l'équation (1) si

De plus, l'intensité $I = I_0\, e^{i(\omega t - kx)} + I_1\, e^{i(\omega t + kx)}$ est solution de (1') à la

Enfin, I et V doivent vérifier la relation (1,1) :

$$-ik\rho I_0\, e^{i(\omega t - kx)} - ik\rho I_1\, e^{i(\omega t + kx)} = -L\left[i\omega I_0\, e^{i(\omega t - kx)} + i\omega I_1\, e^{i(\omega t +}\right.$$

Ce qui est réalisé quels que soient x et t si l'on prend : $\rho k = L\omega$ d'où $\rho = \frac{L\omega}{k}$

Dans ces conditions, I et V satisfont également à la relation (1,2)

Nous pouvons écrire I et V sous la forme :

$$I = I_0\, e^{i\omega\left(t - \frac{x}{v_\varphi}\right)} + I_1\, e^{i\omega\left(t + \frac{x}{v_\varphi}\right)}$$

$$V = \rho I_0\, e^{i\omega\left(t - \frac{x}{v_\varphi}\right)} - \rho I_1\, e^{i\omega\left(t + \frac{x}{v_\varphi}\right)}$$

et faire apparaître ainsi la vitesse de propagation de l'onde v_φ (vitesse de phase)

$$\boxed{v_\varphi = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$$

Les premiers termes de V et I définissent une onde électrique plane progressive dans le sen

les seconds termes une onde progressive dans le sens des x décroissants (voir exerci

2. Le rapport $\frac{V(x,t)}{I(x,t)}$, indépendant de t, est homogène à une impédance :

$$Z(x) = \frac{V(x,t)}{I(x,t)} = \rho\,\frac{I_0\, e^{-ikx} - I_1\, e^{+ikx}}{I_0\, e^{-ikx} + I_1\, e^{+ikx}} \qquad (2,1)$$

A l'extrémité de la ligne, $x = \ell$, l'impédance doit être : $Z(\ell) = Z = \rho\,\frac{I_0\, e^{-ik\ell} - I_1\, e^{+i}}{I_0\, e^{-ik\ell} + I_1\, e^{+i}}$

(2,2) nous permet de calculer $\frac{I_1}{I_0}$ soit $\frac{I_1}{I_0} = \frac{\rho - Z}{\rho + Z}\, e^{-2ik\ell}$

Nous en déduisons :

$$I(x,t) = I_0\, e^{i(\omega t - k\ell)}\left[e^{ik(\ell - x)} + \frac{\rho - Z}{\rho + Z}\, e^{ik(x - \ell)}\right]$$

$$V(x,t) = \rho I_0\, e^{i(\omega t - k\ell)}\left[e^{ik(\ell - x)} - \frac{\rho - Z}{\rho + Z}\, e^{ik(x - \ell)}\right]$$

d'où l'impédance "ramenée en x" : $Z(x) = \frac{V(x,t)}{I(x,t)} = \rho\,\frac{Z + i\rho\,\mathrm{tg}\,k(\ell - x)}{\rho + iZ\,\mathrm{tg}\,k(\ell - x)}$

Nous constatons que si nous prenons $Z = \rho$, l'impédance $Z(x)$ ne dépend plus de x,

ρ est <u>l'impédance caractéristique</u> de la ligne

Dans ces conditions, $I_1 = 0$

$$I(x,t) = I_0\, e^{i(\omega t - kx)} \quad \text{et} \quad V(x,t) = \rho I_0\, e^{i(\omega t - kx)}$$