Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université des Sciences et de la Technologie d'Oran Mohammed Boudiaf

---

FACULTÉ CHIMIE L1 UEF Maths2

Fiche de TD 3(2019/2020)

"Structures Algébriques et Espaces vectoriels."

---

**Exercice** 01

1) On définit sur $\mathbb{R} - \{1\}$ la loi $(*)$ comme suit :

$$x * y = xy - x - y + 2$$

(a) Montrer que $*$ est une loi interne.

(b) Montrer que $(\mathbb{R} - \{1\}, *)$ est un groupe commutatif.

**Exercice** 02 On considère dans $\mathbb{R}^3$, le sous ensemble $F$ défini par :

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - y + 2z = 0\}$$

1. Montrer que $F$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. Donner une base de $F$, quelle est sa dimension ?
3. $F$ est-il égale à $\mathbb{R}^3$ ?

**Exercice** 03

On considère dans $\mathbb{R}^3$, le sous ensemble $F$ défini par :

$$F = \{(x, x + y, y + z) /\, x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

1. Montrer que $F$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. Donner une base de $F$, quelle est sa dimension ?
3. $F$ est-il égale à $\mathbb{R}^3$ ?

**Exercice** 04

1. Montrer que la famille $\{(2, 0), (1, 1)\}$ est génératrice de $\mathbb{R}^2$.
2. quelle sont les famille libre parmis les familles suivantes : $F_1 = \{(1, 1, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 1)\}$, $F_2 = \{(0, 1, 1, 0), (1, 1, 1, 0), (2, 1, 1, 0)\}$.
3. Montrer que la famille $\{(2, 0), (1, 1)\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$,
   et que la famille $F_1 = \{(1, 1, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 1)\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Bon courage!

**Dr. I.Medjadj**

Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique
Université des Sciences et de la Technologie d'Oran Mohammed Boudiaf

---

Faculté de chimie L1 Maths2

Solution de la Fiche de TD 3(2019/2020)L1 Chimie

**Exercice** 01

(a) Montrons que $*$ est une loi interne : pour $x, y \in \mathbb{R} - \{1\}$, alors $x * y \in \mathbb{R} - \{1\}$, $x * y = xy - x - y + 2 \in \mathbb{R}$ il ne reste qu'à montrer que $x * y \neq 1$ : par l'absurde on suppose que $x * y = xy - x - y + 2 = 1$ alors :

$$x * y = xy - x - y + 2 = 1 \Rightarrow xy - x - y + 1 = 0 \Rightarrow x(y-1) - (y-1) = 0 \Rightarrow (x-1)(y-1) = 0$$

ainsi $x = 1 \vee y = 1$ d'où la contradiction alors $x * y \neq 1 \Rightarrow x * y \in \mathbb{R} - \{1\}$.

(b) $(\mathbb{R} - \{1\}, *)$ est un groupe si et seulement si

$$\begin{cases} *\text{est associative} \\ *\text{admet un élément neutre} \\ \text{Tout élément de } \ \mathbb{R} - \{1\} \text{ admet un inverse dans } \ \mathbb{R} - \{1\} \end{cases}$$

Il est dit groupe commutatif si et seulement si $*$ est commutative.

1. $*$ est commutative si et seulement si :
   $\forall x, y \in \mathbb{R} - \{1\}/x * y = y * x$.

$$x * y = xy - x - y + 2 = yx - y - x + 2 = y * x.$$

   Car le produit et la somme sont commutatives.

2. $*$ est associative si et seulement si :

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R} - \{1\}, (x * y) * z = x * (y * z).$$

$$\begin{aligned} (x * y) * z &= [xy - x - y + 2] * z \\ &= (xy - x - y + 2)z - z - (xy - x - y + 2) + 2 \\ &= xyz - xz - yz + 2z - xy + x + y - 2 + 2 \\ &= xyz - xy - xz - yz + x + y + z ...(1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x * (y * z) &= x * [yz - y - z + 2] \\ &= x([yz - y - z + 2) - x - (yz - y - z + 2) + 2 \\ &= xyz - xy - xz - yz + x + y + z ...(2) \end{aligned}$$

   $(1) = (2)$ d'où $*$ est associative.

3. $*$ admet un élément neutre si et seulement si

$$\exists e \in \mathbb{R} - \{1\}, \forall x \in \mathbb{R} - \{1\}/x * e = e * x = x.$$

   On prend juste une seule équation car la loi est commutative.

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R} - \{1\},\ x * e &= x \\ \forall x \in \mathbb{R} - \{1\},\ xe - x - e + 2 &= x \\ \forall x \in \mathbb{R} - \{1\},\ e(x-1) - 2(x-1) &= 0 \\ \forall x \in \mathbb{R} - \{1\},\ (e-2)(x-1) &= 0. \end{aligned}$$

   Alors on a

$$\begin{cases} e - 2 = 0 \\ \vee \\ x = 1 \end{cases}$$

   Alors $e = 2 \in \mathbb{R} - \{1\}$ car $x \in \mathbb{R} - \{1\}$.

4. $\forall x \in \mathbb{R} - \{1\}, \exists x' \in \mathbb{R} - \{1\} / x * x' = x' * x = e = 2$. Comme $*$ est commutative on prend juste une équation :

$$\begin{array}{rcl} x * x' = 2 & \Rightarrow & xx' - x - x' + 2 = 2 \\ xx' - x - x' = 0 & \Rightarrow & x'(x-1) - x = 0 \\ x' & = & \dfrac{x}{x-1}, x \in \mathbb{R}_1. \end{array}$$

ainsi $x'$ est bien défini sur $\mathbb{R}$ montrons que $x' \neq 1$ par l'absude, on suppose que $x' = 1$ alors :

$$x' = \frac{x}{x-1} = 1 \Rightarrow x = x - 1 \Rightarrow 0 = -1$$

ce qui est absurde. Ainsi $x' = \dfrac{x}{x-1} \in \mathbb{R} - \{1\}$. $*$ est un groupe commutatif.

**Exercice** 02 $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x - y + 2z = 0\}$ :

$$\text{F est s.e.v} \Leftrightarrow \begin{cases} F \neq \emptyset, \\ \forall X, Y \in F, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad \lambda.X + \mu.Y \in F \end{cases}$$

1. $0_{\mathbb{R}^3} = (0,0,0) \in F \Rightarrow F \neq \emptyset$, car $0 - 0 + 2.0 = 0$.
2. $\forall X = (x,y,z), Y = (x', y', z') \in F, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ montrons que :

$$\lambda(x,y,z) + \mu(x',y',z') \in^? F,$$

c'est à dire $(\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y', \lambda z + \mu z') \in^? F$

$$(\lambda x + \mu x') - (\lambda y + \mu y') + 2(\lambda z + \mu z') = \lambda(x - y + 2z) + \mu(x' - y' + 2z') = \lambda.0 + \mu.0 = 0,$$

car :

$$(x,y,z) \in F \Rightarrow x - y + 2z = 0,$$
$$\text{et } (x', y'; z') \in F \Rightarrow x' - y' + 2z' = 0.$$

Ainsi $\lambda(x,y,z) + \mu(x',y',z') \in F$, $F$ est sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
3. Base de $F$ : soit $X \in F \Leftrightarrow x - y + 2z = 0 \Rightarrow y = 2z + x$,
$X = (x,y,z) = (x, 2z + x, z) = x(1,1,0) + z(0,2,1)$, ainsi

$$F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x - y + 2z\} = \{x(1,1,0) + z(0,2,1) / x, z \in \mathbb{R}\}.$$

D'où $F$ est engendré par $\{v_1 = (1,1,0), v_2 = (0,2,1)\}$, montrons que cette famille est libre si et seulement si

$$\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = (0,0,0) \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0.$$

$$\lambda_1(1,1,0) + \lambda_2(0,2,1) = (0,0,0) \Rightarrow (\lambda_1, \lambda_1 + 2\lambda_2, \lambda_2) = (0,0,0)$$

d'où le résultat. Alors la dimension de $F$ est égale à 2, car $\{v_1, v_2\}$ est une base ( libre et génératrice) de $\mathbb{R}^3$.
4. $F \neq \mathbb{R}^3$ car $\dim F = 2 \neq 3 = \dim \mathbb{R}^3$.

**Exercice** 03

1. $(0,0,0) \in F$ car $(0,0,0) = (0, 0+0, 0+0) \Rightarrow F \neq \emptyset$.
2. $\forall X, Y \in F, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ montrons que $\lambda X + \mu Y \in^? F$ ; on a :

$$X \in F \Leftrightarrow \exists (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / X = (x, x+y, y+z),$$

$$Y \in F \Leftrightarrow \exists (x',y',z') \in \mathbb{R}^3 / Y = (x', x'+y', y'+z'),$$

$$\lambda X + \mu Y = (\lambda x, \lambda x + \lambda y, \lambda y + \lambda z) + (\mu x', \mu x' + \mu y', \mu y' + \mu z')$$

$$\lambda X + \mu Y = ((\lambda x + \mu x'), (\lambda x + \mu x') + (\lambda y + \mu y'), (\lambda y + \mu y') + (\lambda z + \mu z)$$

d'où $\exists x'' = \lambda x + \mu x', \exists y'' = \lambda y + \mu y', \exists z'' = \lambda z + \mu z'$, ainsi

$$\lambda X + \mu Y = (x'', x'' + y'', y'' + z'') \in F.$$

3. Base de $F$ : soit $X \in F \Leftrightarrow \exists(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / X = (x, x+y, y+z)$,
$X = (x, x+y, y+z) = x(1,1,0) + y(0,1,1) + y(0,0,1)$, ainsi

$$F = \{x(1,1,0) + y(0,1,1) + z(0,0,1)/x, y, z \in \mathbb{R}\}.$$

D'où $F$ est engendré par $\{v_1 = (1,1,0), v_2 = (0,1,1), v_3 = (0,0,1)\}$, montrons que cette famille est libre si et seulement si

$$\forall \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}, \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = (0,0,0) \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.$$

$$\lambda_1(1,1,0) + \lambda_2(0,1,1) + \lambda_3(0,0,1) = (0,0,0) \Rightarrow (\lambda_1, \lambda_1 + \lambda_2, \lambda_2 + \lambda_3) = (0,0,0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0, \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 0, \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0, \end{cases} \quad \Rightarrow \lambda_1 = 0 \Rightarrow \lambda_2 = \lambda_3 = 0.$$

d'où le résultat. Alors la dimension de $F$ est égale à 3, car $\{v_1, v_2, v_3\}$ est une base ( libre et génératrice) de $\mathbb{R}^3$.

4. $F = \mathbb{R}^3$ car $\dim F = 3 = \dim \mathbb{R}^3$.

**Exercice** 04

1. La famille $\{(1,2), (-1,1)\}$ est génératrice de $\mathbb{R}^2$ si et seulement si

$$\forall X = (x,y) \in \mathbb{R}^2, \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} / X = \lambda(1,2) + \mu(-1,1).$$

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, cherchons $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tel que :

$$(x,y) = \lambda(1,2) + \mu(-1,1) = (\lambda - \mu, 2\lambda + \mu)$$

ainsi

$$\begin{cases} x = \lambda - \mu, & \text{....(1)} \\ y = 2\lambda + \mu, & \text{....(2)} \end{cases} \quad (1) + (2) \Rightarrow \lambda = \frac{x+y}{3} \text{et } \mu = \frac{-2x+y}{3}$$

d'où cette famille est génératrice.

2. quelle sont les famille libre parmis les familles suivantes : $F_1 = \{(1,1,0), (1,0,0), (0,1,1)\}$,
$F_2 = \{(0,1,1,0), (1,1,1,0), (2,1,1,0)\}$.
i) $F_1 = \{(1,1,0), (1,0,0), (0,1,1)\}$ est libre si et seulement si

$$\forall \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}, \lambda_1(1,1,0) + \lambda_2(1,0,0) + \lambda_3(0,1,1) = (0,0,0) \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.$$

$\lambda_1(1,1,0) + \lambda_2(1,0,0) + \lambda_3(0,1,1) = (0,0,0)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$F_1$ est libre.
ii) $F_2 = \{(0,1,1,0), (1,1,1,0), (2,1,1,0)\}$ est n'est pas libre car

$$\exists \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = 1 \in \mathbb{R}, \lambda_1(0,1,1,0) + \lambda_2(1,1,1,0) + \lambda_3(2,1,1,0) = (0,0,0,0).$$

3. La famille $\{(1,2), (-1,1)\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$, car quand le nombre de vecteurs=2=dim $\mathbb{R}^2$ il suffit de montrer qu'elle est soit génératrice ou bien libre pour qu'elle puisse être une base or d'après la question (1) elle est génératrice d'où le résultat.
La famille $F_1 = \{(1,1,0), (1,0,0), (0,1,1)\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$, car le cardinale de $F_1$ est égale à $3 = \dim \mathbb{R}^3$ est $F_1$ étant libre, alors c'est une base de $\mathbb{R}^3$.

**Dr. I.Medjadj**