Système Asservis

Transformées de laplace

$\delta(t) \rightarrow 1$

$a\,U(t) \rightarrow \dfrac{1 \cdot a}{p}$

$t^2 \cdot f(t) \rightarrow F''(p)$

$t^2 u(t-2) = \dfrac{d^2\left(\frac{e^{-2p}}{p}\right)}{dp^2}$

rampe

$at \rightarrow \dfrac{a}{p^2}$

$t^n \rightarrow \dfrac{n!}{p^{n+1}}$

$e^{-at} \rightarrow \dfrac{1}{p+a}$

$t^n e^{-at} \rightarrow \dfrac{n!}{(p+a)^{n+1}}$

$1 - e^{-at} \rightarrow \dfrac{a}{p(p+a)}$

$\sin(\omega t) \rightarrow \dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$

$t \sin(\omega t) \rightarrow \dfrac{2p\omega}{(p^2+\omega^2)^2}$

$\cos(\omega t) \rightarrow \dfrac{p}{p^2+\omega^2}$

$t \cos(\omega t) \rightarrow \dfrac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}$

$\dfrac{d f(t)}{dt} \rightarrow pF(p) - f(0)$

$\dfrac{d^2 f(t)}{dt^2} \rightarrow p^2F(p) - p f(0) - f'(0)$

$\int_n f(t)\, dt^n \rightarrow \dfrac{F(p)}{p^n}$

$f(kt) \rightarrow \dfrac{1}{k} F\left(\dfrac{p}{k}\right)$

$f\left(\dfrac{t}{k}\right) \rightarrow k F(kp)$

Décalage

$f(t-\tau) \rightarrow e^{-p\tau} F(p)$ $\quad t \geq \tau$

$t f(t) \rightarrow -\dfrac{d F(p)}{dp}$

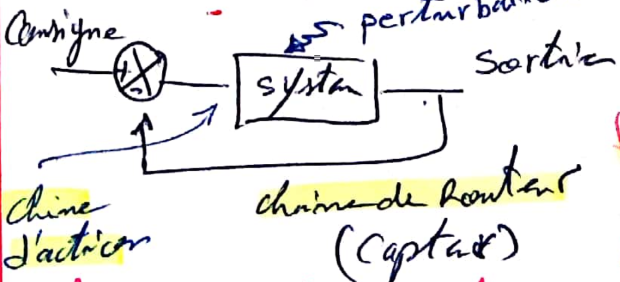
R: pour avoir une bonne réponse de système $\boxed{K_s = 1}$

Gain statique

$$K_s = \frac{\lim\limits_{t\to\infty} y(t)}{\lim\limits_{t\to\infty} u(t)} \quad \Big| \; u(t) \text{ cte}$$

$t \rightarrow \infty \Rightarrow p \cdot F(p) \rightarrow 0$

$t \rightarrow 0 \Rightarrow p \cdot F(p) \rightarrow \infty$



représentation schéma fonctionnel

forme polynomiale

$$G(p) = \frac{b p^n + c p^{n-1} \dots}{a_m p^m + b_m p^{m-1} \dots}$$

forme des pôles et zéros

$$G(p) = \frac{b_n (P - Z_1)(P - Z_2)}{a_m (P^m - P_1)(P - P_2)}$$

$$S(P) = \frac{K_s(1 + \dots b_m p^m)}{p^{\alpha}(1 + \dots + a_n p^n)}$$

classe de sys

La fonction rationnelle

Gain statique K_s

$\frac{2}{p^{3}}$ classe de sys.

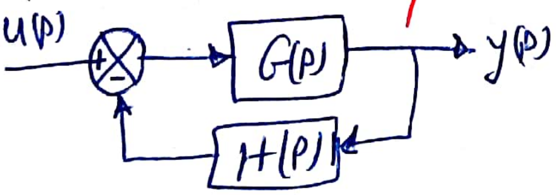
les poles : les racines de Denumérateur

les zeros : les racines de Numérateurs

Si $U(P) = 0$ l'équation Caractéristique de système

$$H(P) = \frac{S(P)}{E(P)}$$

Schéma Canonique



$$G(P) = \frac{G}{1 + GH}$$

fonction de Transfert en boucle ouvert :

$$\frac{X(P)}{\varepsilon(P)} = G(P) \cdot H(P)$$

l'errer

$$\frac{\varepsilon(P)}{U(P)} = \frac{1}{1 + G(P) + H(P)}$$

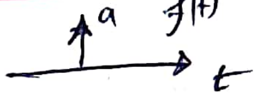
$$\varepsilon(P) = \frac{U(P)}{1 + G(P) \cdot H(P)}$$

* Réponse indicielle

$$a\,e(t) \longrightarrow \frac{1 \cdot a}{p}$$

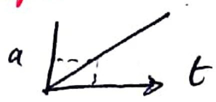
* Réponse impulsionnell.

$$\delta(t) \longrightarrow 1$$



* Réponce à une rampe

$$a\,t \longrightarrow \frac{a}{p^2}$$

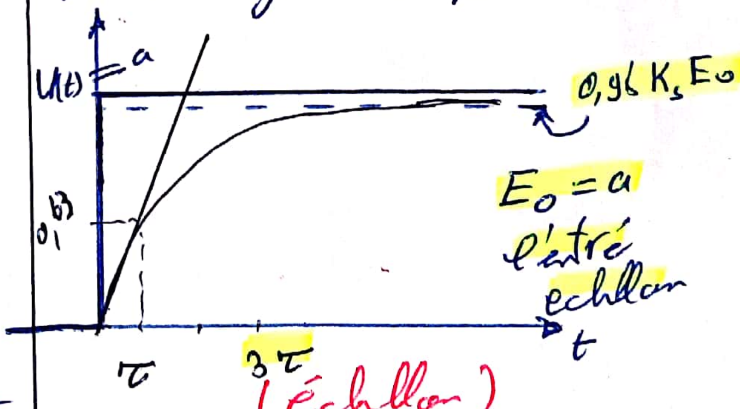


Système 1er ordre

La forme générale :

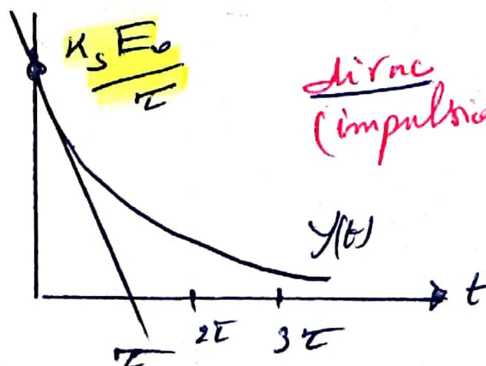
$$H(P) = \frac{K_s}{1 + \tau P}$$

* le Temps de réponse 3τ

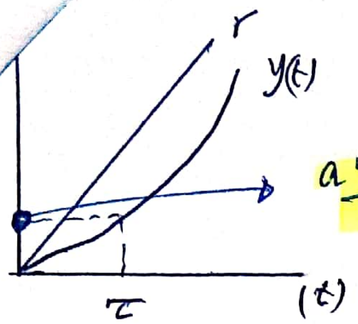


$E_0 = a$ l'entré echllon

(Échllon) indicielle



dirac (impulsionnelle)



Système 2eme ordre

$D = K_s E_0 \, e^{-\frac{t}{\tau_n}}$

La forme générale

$$G(p) = \frac{K_s \omega_n^2}{p^2 + 2\xi\omega_n p + \omega_n^2}$$

K_s : Gain statique

ω_n : pulsation Naturelle [rad/s]

$$\boxed{\tau_n = \frac{1}{\omega_n}}$$

ξ : le coefficient d'amortissement

pôles

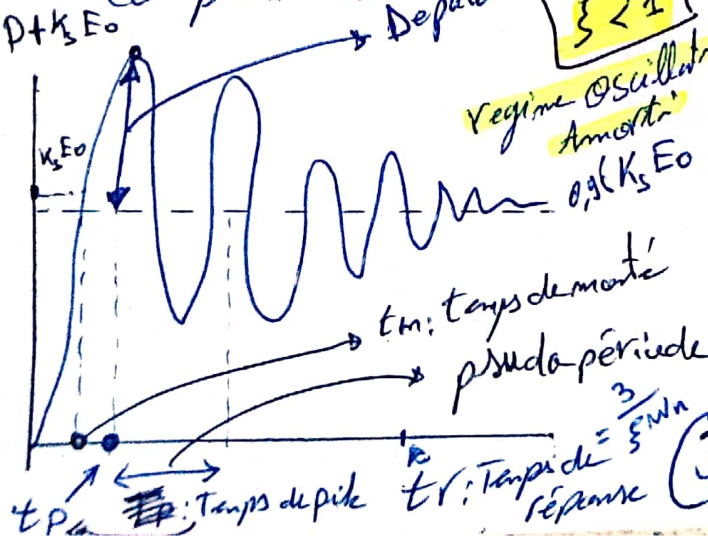
$p^2 + 2\xi\omega_n p + \omega_n^2 = 0$

* $\xi > 1$ les pôles sont réels $-\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}$

* $\xi = 1$ les deux pôles égaux $-\omega_n$

* $\xi < 1$ les deux pôles sont complexe $P_{1,2} = -\omega_n(\xi \pm j\sqrt{1-\xi^2})$

$\boxed{\xi < 1}$ régime Oscillatoire Amorti



$$y(t) = KE_0\left[1 - \frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \cdot \sin(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\,t + \varphi)\right] \cdot e(t)$$

* $\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right)$ [rad]

* $\omega_p = \omega_n\sqrt{1-\xi^2}$ pseudo pulsation

* pseudo période

$$T_p = \frac{2\pi}{\omega_p} = \frac{2\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}$$

* Temps de montée

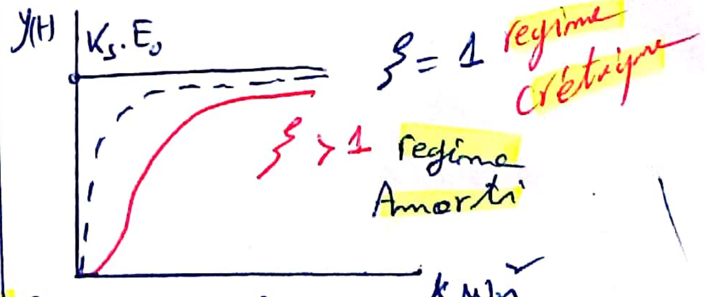
$$T_m = \frac{T_p}{2}\left[1 - \frac{\varphi}{\pi}\right] \quad \varphi\,[rad]$$

Temps de pic (l'instant de premier dépassement)

$$t_p = \frac{T_p}{2} = \frac{\pi}{\omega_p} = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}$$ Temps de pik

Réponse

$$y(t) = KE_0\left(1 + e^{\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \cdot t}\right)$$



$\xi = 1$ $$G(p) = \frac{K\omega_n^2}{(p+\omega_n)^2}$$

$$y(t) = KE_0\left[1 - (1+\omega_n t)e^{-\frac{t}{\tau_n}}\right] \cdot e(t)$$

$\xi \gg 1$ $\quad t_r = \frac{6\xi}{\omega_n}$ $\quad \tau_1 = -\frac{1}{P_1}$

$\xi \ll 1$ $\quad t_r = \frac{3}{\xi\omega_n}$ $\quad \tau_2 = -\frac{1}{P_2}$

Table des Transformées de Laplace

$f(t) \quad (t \geq 0)$	$F(p) = \mathcal{L}\{f(t)\}$
Impulsion unitaire $\delta(t)$	1
Echelon unitaire $u(t)$	$\frac{1}{p}$
rampe t	$\frac{1}{p^2}$
t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
e^{-at}	$\frac{1}{p+a}$
te^{-at}	$\frac{1}{(p+a)^2}$
$t^n e^{-at}$	$\frac{n!}{(p+a)^{n+1}}$
$1-e^{-at}$	$\frac{a}{p(p+a)}$ ✓
$e^{-at} - e^{-bt}$	$\frac{b-a}{(p+a)(p+b)}$ ✓
$sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$
$cos(\omega t)$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$
$t.sin(\omega t)$	$\frac{2p\omega}{(p^2+\omega^2)^2}$
$t.cos(\omega t)$	$\frac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}$
$e^{-at}.sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(p+a)^2+\omega^2}$
$e^{-at}.cos(\omega t)$	$\frac{p+a}{(p+a)^2+\omega^2}$

(n : entier positif)

$\lim_{t \to 0} f(t) = \lim_{p \to \infty} p F(p)$

$\lim f(t) = \lim_{p \to 0} p F(p)$

Propriétés des Transformées de Laplace

$f(t) \quad (t \geq 0)$	$F(p) = \mathcal{L}\{f(t)\}$
$f(t)$	$\int_0^\infty e^{-pt} f(t) dt$
$\lambda_1 f_1(t) + \lambda_2 f_2(t)$	$\lambda_1 F_1(p) + \lambda_2 F_2(p)$
$\frac{df(t)}{dt}$	$pF(p) - f(0)$
$\frac{d^2 f(t)}{dt^2}$	$p^2 F(p) - pf(0) - \dot{f}(0)$
$\frac{d^n f(t)}{dt^n}$	$p^n F(p) - \sum_{r=n+1}^{r=2n} p^{2n-r} . \frac{d^{(r-n-1)} f(0)}{dt^{(r-n-1)}}$
$\int_0^t \int_0^t \cdots \int_0^t f(t).dt^n$ (avec conditions initiales nulles)	$\frac{F(p)}{p^n}$
$f(kt)$	$\frac{1}{k}.F\left(\frac{p}{k}\right)$
$f(\frac{t}{k})$	$k.F(kp)$
$e^{-at} f(t)$	$F(p+a)$
$f(t-\tau)$ pour $(t \geq \tau)$	$e^{-p\tau}.F(p)$
$\int_0^t f_1(t-\tau).f_2(\tau) d\tau$	$F_1(p).F_2(p)$
$t.f(t)$	$-\frac{d}{dp} F(p)$

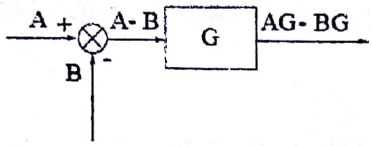
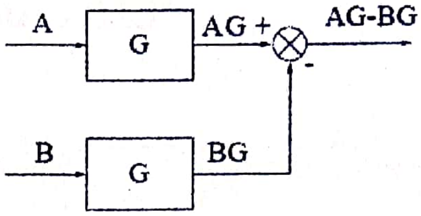
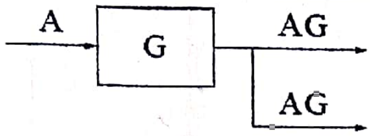
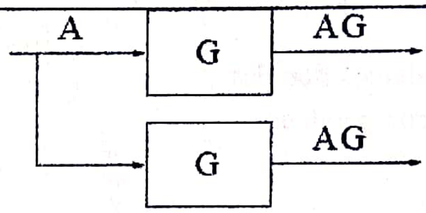
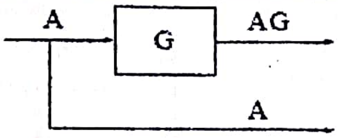
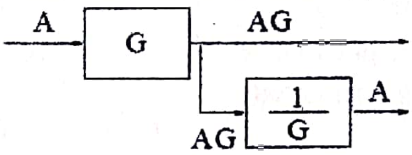
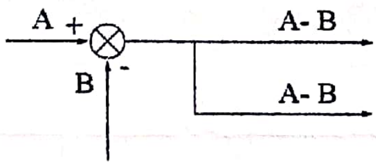
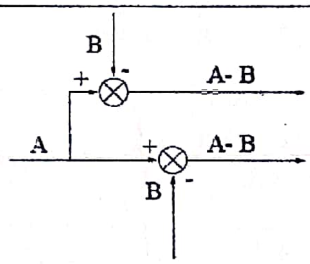
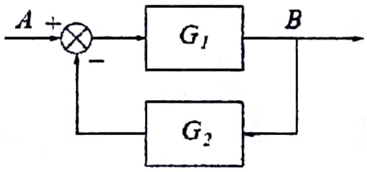
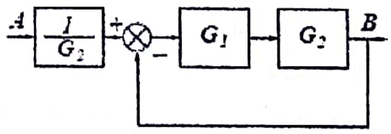
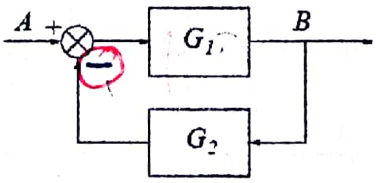
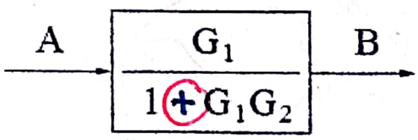
- $f(t)$ fonction périodique de période T.
- $f_1(t)$ fonction définie sur la $1^{ère}$ période de $f(t)$.

$$F(p) = \frac{F_1(p)}{1-e^{-pT}}$$

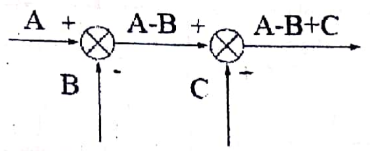
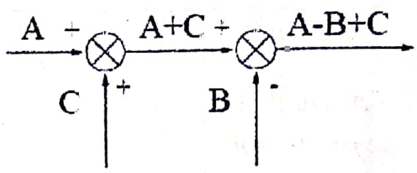
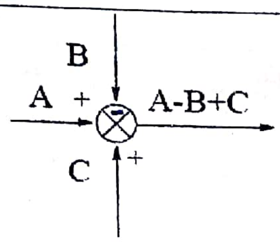
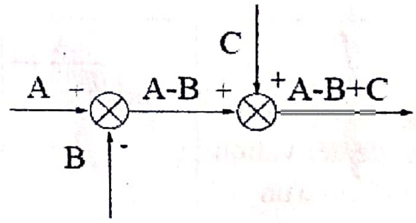
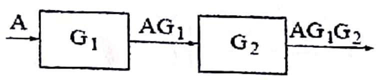
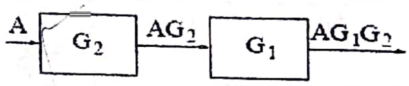
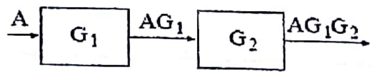
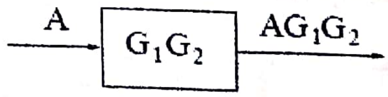
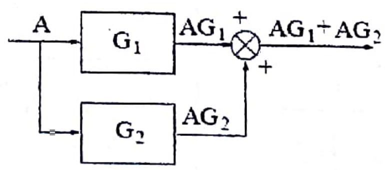
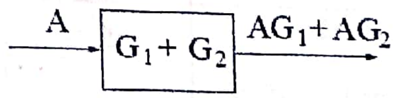
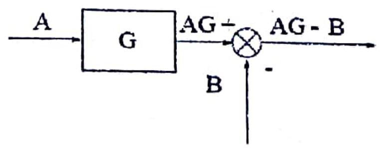
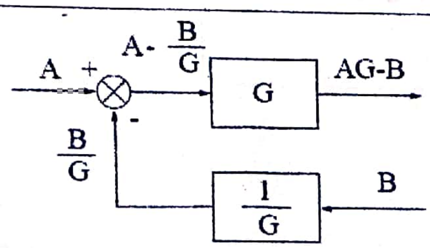
$f(0^+) = \lim_{p \to \infty} \{pF(p)\}$ $\quad$ $f(\infty) = \lim_{p \to 0} \{pF(p)\}$

Si les limites existent

REZIG ALLA

7 Déplacement d'un comparateur en aval d'un élément		
8 Déplacement d'un point de dérivation en amont d'un élément		
9 Déplacement d'un point de dérivation en aval d'un élément		
10 Déplacement d'un point de dérivation en amont d'un comparateur		
11 Retrait d'un élément d'une boucle de retour		
12 Elimination d'une boucle de retour		

II.3.5.4. Algèbre des Schémas Fonctionnels :

Transformation	Schéma de départ	Schéma équivalent
1 Redisposition des comparateurs		
2 Redisposition des comparateurs		
3 Association d'éléments en cascade		
4 Association d'éléments en cascade		
5 Association d'éléments en parallèle		
6 Déplacement d'un comparateur en amont d'un élément		

DEZTG

Décomposition d'un quotient de polynôme en fractions partielles

Lorsque le degré du polynôme $P(s)$ est supérieur à celui de $Q(s)$, il faut d'abord effectuer la division de $P(s)$ par $Q(s)$. On obtient alors

$$\frac{P(s)}{Q(s)} = d(s) + \frac{R(s)}{Q(s)}$$

La décomposition en fractions partielles s'effectue alors sur le quotient $\frac{R(s)}{Q(s)}$.

Toutefois, dans le contexte de la résolution des ED avec les transformées de Laplace, le degré du polynôme $P(s)$ sera généralement inférieur à celui du polynôme $Q(s)$ de sorte que le développement se fera directement sur le quotient obtenu lorsqu'on détermine l'expression de $Y(s)$, la transformée de Laplace de la solution de l'ED.

$$Y(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$$

Les règles suivantes s'appliquent dans la décomposition en fractions partielles. Il faut tout en premier lieu décomposer $Q(s)$ en facteurs qui seront linéaire(s) ou quadratique(s), ces derniers étant ou non répétés. Les cas suivants peuvent se présenter

1) Si $Q(s)$ est un produit de facteurs linéaires non répétés, on aura la décomposition comme dans le cas suivant pour lequel $Q(s) = (s+\alpha)(s+\beta)(s+\gamma)$

$$\frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{P(s)}{(s+\alpha)(s+\beta)(s+\gamma)} = \frac{A}{s+\alpha} + \frac{B}{s+\beta} + \frac{C}{s+\gamma}$$

Exemple (cas de 2 facteurs non répétés) : $\frac{2s+5}{(s+1)(s+2)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2} = \frac{3}{s+1} - \frac{1}{s+2}$

2) Si $Q(s) = (s+\alpha)(s+\beta)^2$, les facteurs sont linéaires, mais le facteur $(s+\beta)$ est répété 2 fois, comme sont exposant l'indique. Alors on aura

$$\frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{P(s)}{(s+\alpha)(s+\beta)^2} = \frac{A}{s+\alpha} + \frac{B}{s+\beta} + \frac{C}{(s+\beta)^2}$$

Exemple : $\frac{s^2+3s}{(s+1)(s+2)^2} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{(s+2)^2} = -\frac{2}{s+1} + \frac{3}{s+2} + \frac{2}{(s+2)^2}$

Exemple : le cas d'un facteur linéaire répété 3 fois :

$$\frac{s^2+3s}{(s+2)^3} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{(s+2)^2} + \frac{C}{(s+2)^3} = \frac{1}{s+2} - \frac{1}{(s+2)^2} - \frac{2}{(s+2)^3}$$

3) Si $Q(s) = (s+\alpha)(s^2+\beta^2)$, alors on a un facteur quadratique non répété (en plus d'un facteur linéaire non répété), alors :

$$\frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{P(s)}{(s+\alpha)(s^2+\beta^2)} = \frac{A}{s+\alpha} + \frac{Bs+C}{s^2+\beta^2}$$

ALLA

Exemple : $$\frac{5s+15}{(s-1)(s^2+9)} = \frac{A}{s-1} + \frac{Bs+C}{s^2+3^2} = \frac{2}{s-1} + \frac{-2s+3}{s^2+9}$$

Dans le cas de deux facteurs quadratique non répété :

$$\frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{P(s)}{(s^2+\alpha^2)(s^2+\beta^2)} = \frac{As+B}{s^2+\alpha^2} + \frac{Cs+D}{s^2+\beta^2}$$

Exemple : $$\frac{s+3}{(s^2+4)(s^2+9)} = \frac{As+B}{s^2+4} + \frac{Cs+D}{s^2+9} = \frac{1}{5}\left(\frac{s+3}{s^2+4}\right) - \frac{1}{5}\left(\frac{s+3}{s^2+9}\right)$$

Rappelons qu'un facteur quadratique peut être de la forme suivante :

$$as^2+bs+c \quad \text{où} \quad (b^2-4ac)<0$$

Exemple : $$\frac{2s+3}{(s^2+4s+5)(s^2+9)} = \frac{As+B}{s^2+4s+5} + \frac{Cs+D}{s^2+9} = \frac{1}{8}\left(\frac{s+1}{s^2+4s+5}\right) - \frac{1}{8}\left(\frac{s-3}{s^2+9}\right)$$

4) Si la factorisation de $Q(s)$ comporte un facteur quadratique répété comme dans le cas suivant, la décomposition se fait comme suit (on a ajouté un facteur linéaire)

$$\frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{P(s)}{(s+\alpha)(s^2+\beta^2)^2} = \frac{A}{s+\alpha} + \frac{Bs+C}{s^2+\beta^2} + \frac{Ds+E}{(s^2+\beta^2)^2},$$

Exemple :

$$\frac{2s-1}{(s+2)(s^2+1)^2} = \frac{A}{s+2} + \frac{Bs+C}{s^2+1} + \frac{Ds+E}{(s^2+1)^2} = -\frac{1}{5}\left(\frac{1}{s+2}\right) + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{s^2+1}\right) + \frac{s}{(s^2+1)^2}$$

Autre exemple :

$$\frac{2s^2+3s}{(s^2+4s+5)^2} = \frac{As+B}{s^2+4s+5} + \frac{Cs+D}{(s^2+4s+5)^2} = \frac{2}{s^2+4s+5} - 5\frac{s+1}{(s^2+4s+5)^2}$$

Finalement, signalons que le développement en fraction partielle du quotient de deux polynôme s'effectue simplement avec la calculatrice : on utilise la fonction « expand(P(s)/Q(s)) ». Le résultat peut « inspirer » la décomposition en fractions partielles et effectuer le calcul des valeurs de A, B, C … qui figurent dans les termes de la décomposition.

$\xi < 1$

$$y(t) = KE_0\left[1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi \omega_n t} \sin\left(\omega_n \sqrt{1-\xi^2}(t) + \varphi\right)\right]$$

Stabilité des systèmes

les pôles (Racines) Négatif

$\Rightarrow$ sys stable

si un seul positif sys instable

Si $-5+i$ -2 $-2i$

sys stable la partie réel Négatif

1 - seul pôle Nul : Réponse en rampe, instable

2 - deux pôle imaginaire purs instable

*Critère de Routh

1er Condition : tout les éléments coefficients de l'équation caractéristique même signe

2ème Condition : tout les éléments de la premier Colonne de la table de Routh ont le même signe

- sys stable
- sys instable
- marginale stable.

Exemple

$1p^3 + 2p^2 + 3p + 4p^0$

p^3	1	3	0
p^2	2	4	0
p^1	$A_1 = 1$	$A_2 = 0$	
p^0	$B_1 = \boxed{4}$		

$$A_1 = -\frac{|(1\cdot 4)-(2\cdot 3)|}{2}$$

$$A_2 = -\frac{|(1\cdot 0)-(2\cdot 0)|}{2}$$

$$B_1 = -\frac{|(2\cdot A_2)-(4\cdot A_1)|}{A_1}$$

A la fin il faut voire le dernier Num $4p^0$

Si on a

$G(p) = p^4 + 2p^2 + 5 \Rightarrow$

$G(p) = p^4 + 0p^3 + 2p^2 + 0p + 5p^0$

p^4	1	2	5
p^3	0	0	0
p^2			
p^1			
p^0			

Si on a 0 dans la 1er Colonne

marginalement stable

1

3

3

0 $\rightarrow$ on pose ε tq $\boxed{\varepsilon > 0}$ $\varepsilon \simeq 0$ $\varepsilon = 0^+$

1

2 Changer signe

(1) C_0 -6 il y a deux pole à partie réel

(2) C_3 4 positif (non stable)