# التمرين الشامل الأول في الاحتمالات

يحتوي صندوق على 10 كريات متماثلة، ولا نفرق بينها باللّمس. منها:
- ست كريات حمراء تحمل الأرقام 7، 7، 7، 7، 7 و 9.
- أربع كريات خضراء تحمل الأرقام 7، 7، 7 و 9.

(I) نسحب من الصندوق عشوائيا وفي آن واحد كريتين من الكيس.

**1**- احسب احتمال الأحداث التالية:
- الحدث $A$: " الكريتان المسحوبتان حمراوان ".
- الحدث $B$: " الكريتان المسحوبتان تحملان الرقم 7 ".
- الحدث $C$: " الكريتان المسحوبتان حمراوان أو تحملان الرقم 7 ".
- الحدث $D$: " الحصول على كرية حمراء على الأقل ".
- الحدث $E$: " الحصول على كرية تحمل الرقم 7 على الأكثر".

**2**- نعتبر $X$ المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب كريتين عدد الكريات الحمراء المتبقية في الصندوق.

أ- عيّن قيم المتغيّر العشوائي $X$.

ب- عرّف قانون الاحتمال للمتغيّر العشوائي $X$.

ج- احسب الأمل الرياضياتي للمتغيّر العشوائي $X$.

د- احسب التباين، ثمّ الانحراف المعياري للمتغيّر العشوائي $X$.

ه- احسب: $P\left(x^2-7x+6=0\right)$ و $P\left(7-4\ln x\succeq 0\right)$.

(II) نسحب من الصندوق كريتين على التوالي بدون إرجاع.

**1**- احسب احتمال الأحداث التالية:
- الحدث $F$: " الكريتان المسحوبتان من نفس اللّون ".
- الحدث $G$: " الكريتان المسحوبتان من لونين مختلفين ".
- الحدث $H$: " الكريتان المسحوبتان تحملان رقمين مختلفين ".

**2**- نعتبر $Y$ المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب كريتين عدد الكريات الحمراء المتبقية في الصندوق.
- عرّف قانون الاحتمال للمتغيّر العشوائي $Y$.

(III) نسحب من الصندوق كريتين على التوالي بإرجاع.

**1**- احسب احتمال الأحداث التالية:
- الحدث $I$: " الكريتان المسحوبتان من نفس اللّون ".
- الحدث $J$: " الكريتان المسحوبتان من لونين مختلفين ".
- الحدث $K$: " الكريتان المسحوبتان تحملان رقمين مختلفين ".

(IV) $n$ عدد طبيعي غير معدوم. نضيف إلى الصندوق $n$ كرية حمراء تحمل الرقم 7.
نسحب عشوائيا وفي آن واحد كريتين من الصندوق.

**1**- احسب $p_n$ احتمال الحدث: " الحصول على كريتين حمراوين ".

**2**- احسب $k_n$ احتمال الحدث: " الحصول على كريتين تحملان رقمين مختلفين ".

**3**- احسب: $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} k_n$، ثمّ فسّر النتيجتين.

بالتوفيـــــق والنجاح إن شاء الله في البكالوريـا

قال الإمام عبد الحميد ابن باديس رحمه الله تعالى :
كم عالم يسكن بيتا بالكرا *** وجاهل يملك دورا وقرى
لمّا قرأت قوله سبحانه *** نحن قسمنا بينهم زال المرا

# حل التمرين الشامل الأول في الاحتمالات

**I** في هذا الجزء قال نسحب كريتين عشوائيا وفي آن واحد إذن: نستعمل التوفيقة.

**1** حساب احتمال الأحداث $A$، $B$، $C$، $D$ و $E$

$$\bullet P(A)=\frac{C_6^2}{C_{10}^2}=\frac{\frac{6!}{2!4!}}{\frac{10!}{2!8!}}=\frac{\frac{6\times5\times4!}{2!4!}}{\frac{10\times9\times8!}{2!8!}}=\frac{1}{3}$$

$$\bullet P(B)=\frac{C_8^2}{C_{10}^2}=\frac{\frac{8!}{2!6!}}{\frac{10!}{2!8!}}=\frac{\frac{8\times7\times6!}{2!6!}}{\frac{10\times9\times8!}{2!8!}}=\frac{28}{45}$$

$$\begin{aligned}\bullet P(C)&=P(A\cup B)\\&=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\\&=\frac{1}{3}+\frac{28}{45}-\frac{C_5^2}{C_{10}^2}\\&=\frac{1}{3}+\frac{28}{45}-\frac{10}{45}\\&=\frac{11}{15}\end{aligned}$$

$$\bullet P(D)=\frac{C_6^1\times C_4^1+C_6^2}{C_{10}^2}=\frac{\frac{6!}{1!5!}\times\frac{4!}{1!3!}+\frac{6!}{2!4!}}{\frac{10!}{2!8!}}=\frac{\frac{6\times5!}{5!}\times\frac{4\times3!}{1!3!}+\frac{6\times4\times5!}{2!5!}}{\frac{10\times9\times8!}{2!8!}}=\frac{13}{15}$$

$$\bullet P(E)=\frac{C_8^1\times C_2^1+C_2^2}{C_{10}^2}=\frac{\frac{8!}{1!7!}\times\frac{2!}{1!1!}+\frac{2!}{2!0!}}{\frac{10!}{2!8!}}=\frac{\frac{8\times7!}{7!}\times\frac{2\times1!}{1!}+1}{\frac{10\times9\times8!}{2!8!}}=\frac{17}{45}$$

**2** أ- تعيين قيم المتغير العشوائي $X$

- إذا سحبنا كريتين حمراوين يبقى 4.
- إذا سحبنا كرية حمراء يبقى 5.
- إذا لم نسحب أي كرية حمراء يبقى 6.

إذن قيم المتغير العشوائي $X$ هي: $\{4;5;6\}$.

ب- تعريف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي $X$

$$\bullet P(X=4)=\frac{C_6^2}{C_{10}^2}=\frac{\frac{6!}{2!4!}}{\frac{10!}{2!8!}}=\frac{\frac{6\times5\times4!}{2!4!}}{\frac{10\times9\times8!}{2!8!}}=\frac{1}{3}$$

$$\bullet P(X=5)=\frac{C_6^1\times C_4^1}{C_{10}^2}=\frac{\frac{6!}{1!5!}\times\frac{4!}{1!3!}}{\frac{10!}{2!8!}}=\frac{8}{15}$$

$$\bullet P(X=6)=\frac{C_4^2}{C_{10}^2}=\frac{\frac{4!}{2!2!}}{\frac{10!}{2!8!}}=\frac{2}{15}$$

وعليه نلخص قانون الاحتمال للمتغيّر العشوائي $X$ في الجدول التالي:

| $x_i$ | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|
| $P(X=x_i)$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{8}{15}$ | $\frac{2}{15}$ |

ج-حساب الأمل الرياضياتي للمتغير العشوائي $X$

$$E(X)=\sum_{i=1}^{4}x_iP(X=x_i)=4P(X=4)+5P(X=5)+6P(X=6)=\frac{72}{15}$$

د-حساب التباين الرياضياتي والانحراف المعياري للمتغير العشوائي $X$

$$V(X)=\sum_{i=1}^{4}x_i^2P(X=x_i)-(E(X))^2=16P(X=4)+25P(X=5)+36P(X=6)-\left(\frac{72}{15}\right)^2=\frac{32}{75}$$

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{32}{75}}=0.6532$$

ه- حساب $P(x^2-7x+6=0)$ و $P(7-4\ln x\succeq 0)$

- حلول المعادلة $x^2-7x+6=0$ هي: $\{1;6\}$ لكن $1$ مرفوض لأنه ليس قيمة من قيم المتغير العشوائي $X$ وبالتالي:

$$\begin{aligned}P(x^2-7x+6=0)&=P(X=6)\\&=\frac{2}{15}\end{aligned}$$

- لدينا: $7-4\ln x\succeq 0$ يكافئ:

$$\begin{cases}7-4\ln x\succeq 0\\ \text{و}\\ x\succ 0\end{cases}$$

يكافئ:

$$\begin{cases}\ln x\preceq \frac{7}{4}\\ \text{و}\\ x\succ 0\end{cases}$$

يكافئ:

$$\begin{cases}x\preceq e^{\frac{7}{4}}\\ \text{و}\\ x\succ 0\end{cases}$$

ومنه: $0\prec x\preceq 5.75$ ومنه قيم المتغير العشوائي التي تنتمي إلى هذا المجال هي: $4$ و $5$، وعليه:

$$\begin{aligned}P(7-4\ln x\succeq 0)&=P(X=4)+P(X=5)\\&=\frac{1}{3}+\frac{8}{15}\\&=\frac{13}{15}\end{aligned}$$

**II** في هذا الجزء قال نسحب كريتين عشوائيا على التوالي دون إرجاع إذن: نستعمل الترتيبة ولا ننسى أنّ الترتيب مهمّ لذلك نستعين بمعامل الترتيب.

**1** حساب احتمال الأحداث $F$، $G$ و $H$

$$\bullet P(F)=\frac{A_6^2+A_4^2}{A_{10}^2}=\frac{42}{90}$$

$$\bullet P(G)=\frac{A_6^1\times A_4^1}{A_{10}^2}\times\frac{2!}{1!1!}=\frac{48}{90}$$

$$\bullet P(H)=\frac{A_8^1\times A_2^1}{A_{10}^2}\times\frac{2!}{1!1!}=\frac{16}{45}$$

**2** تعريف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي $Y$

- إذا سحبنا كريتين حمراوين يبقى $4$.
- إذا سحبنا كرية حمراء يبقى $5$.
- إذا لم نسحب أي كرية حمراء يبقى $6$.

إذن قيم المتغير العشوائي $Y$ هي: $\{4;5;6\}$ وبالتالي يكون كمايلي:

$$\bullet P(Y=4)=\frac{A_6^2}{A_{10}^2}=\frac{1}{3}$$
$$\bullet P(Y=5)=\frac{A_6^1\times A_4^1}{A_{10}^2}\times\frac{2!}{1!1!}=\frac{48}{90}$$
$$\bullet P(Y=6)=\frac{A_4^2}{A_{10}^2}=\frac{6}{45}$$

وعليه نلخص قانون الاحتمال للمتغيّر العشوائي $Y$ في الجدول التالي:

| $y_i$ | $4$ | $5$ | $6$ |
|---|---|---|---|
| $P(Y=y_i)$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{48}{90}$ | $\frac{6}{45}$ |

ملاحظة: يمكن استعمال شجرة الاحتمالات

**III** في هذا الجزء قال نسحب كريتين عشوائيا على التوالي بإرجاع إذن: نستعمل القائمة ولا ننسى أنّ الترتيب مهمّ لذلك نستعين بمعامل الترتيب.

**1** حساب احتمال الأحداث $I$، $J$ و $K$

$$\bullet P(F)=\frac{6^2+4^2}{10^2}=\frac{13}{25}$$
$$\bullet P(G)=\frac{6^1\times 4^1}{10^2}\times\frac{2!}{1!1!}=\frac{1}{5}$$
$$\bullet P(H)=\frac{8^1\times 2^1}{10^2}\times\frac{2!}{1!1!}=\frac{8}{25}$$

ملاحظة: يمكن استعمال شجرة الاحتمالات

**IV** في هذا الجزء قال نسحب كريتين عشوائيا في آن واحد إذن: نستعمل التوفيقة

**2** حساب $p_n$ احتمال الحدث: " الحصول على كريتين حمراوين ".

$$p_n=\frac{C_{n+6}^2}{C_{n+10}^2}=\frac{\frac{(n+6)!}{2!(n+4)!}}{\frac{(n+10)!}{2!(n+8)!}}=\frac{\frac{(n+6)(n+5)(n+4)!}{2(n+4)!}}{\frac{(n+10)(n+9)(n+8)!}{2(n+8)!}}=\frac{\frac{(n+6)(n+5)}{2}}{\frac{(n+10)(n+9)}{2}}=\frac{(n+6)(n+5)}{(n+10)(n+9)}$$

**3** حساب $k_n$ احتمال الحدث: " الحصول على كريتين تحملان رقين مختلفين ".

$$k_n=\frac{C_{n+8}^1\times C_2^1}{C_{n+10}^2}=\frac{\frac{(n+8)!}{1!(n+7)!}\times\frac{2!}{1!1!}}{\frac{(n+10)!}{2!(n+8)!}}=\frac{\frac{(n+8)(n+7)!}{(n+7)!}\times 2}{\frac{(n+10)(n+9)(n+8)!}{2(n+8)!}}=\frac{(n+8)\times 2}{\frac{(n+10)(n+9)}{2}}=\frac{4(n+8)}{(n+10)(n+9)}$$

**4** حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} k_n$

$$\bullet \lim_{n\to+\infty} k_n=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{(n+6)(n+6)}{(n+10)(n+9)}\right)=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^2}{n^2}\right)=1$$
$$\bullet \lim_{n\to+\infty} k_n=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{4(n+8)}{(n+10)(n+9)}\right)=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{4n}{n^2}\right)=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{4}{n}\right)=0$$

تفسير النتيجتين

- عندما $n$ يؤول إلى $+\infty$، $p_n$ يؤول إلى $1$ أي يصبح الحدث " الحصول على كريتين حمراوين " أكيـــد .
- عندما $n$ يؤول إلى $+\infty$، $k_n$ يؤول إلى $0$ أي يصبح الحدث " الحصول على كريتين تحملان رقين مختلفين " مستحيـــل .