Université de Bordj Bou Arreridj

Département d'électromécanique

Faculté des sciences et de la technologie

Matière : Théorie du champ Electromagnétique

Option : Electrotechnique 3 Année

Pr. HAMIMID Mourad

CHAPITRE II

Electrostatique

Table des matières

1 Définition

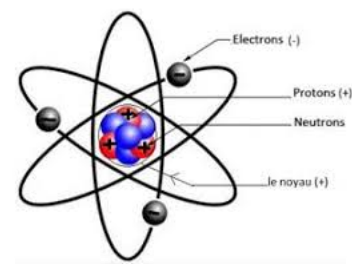
l'électrostatique est la branche de physique qui étudie les phénomènes créés par des charges électriques statiques pour l'observateur.

l'électricité statique consiste en une force provoquée par un objet chargé sur un autre objet.

un phénomène bien connu est la *foudre*. celle ci survient lorsque les nuages sont chargés d'électricité statique.

2 Structure de la matière

La matière est constituée d'atomes eux-même constitués d'un noyau autour duquel gravite une sorte de nuage composé d'électrons et portant l'essentiel de masse.



Le noyau est composé des charges positives appelées (Protons) et autres particules (neutrons) portant une charge électrique nulle.

Les particules constituant le noyau atomique sont appelées les (nucléons).

Un élément chimique X est représenté par la notation ${}^{A}_{Z}X$.

A : Le nombre de masse (protons+neutrons)

Z : Le nombre atomique (nombre de protons)

La charge électrique totale $Q = +Z.e$ (nucléaire), $Q = -Z.e$ charge totale des électrons, assurant la neutralité électrique d'un atome.

-*Electron* : $q = -e = -1.602 \times 10^{-19} C,\ m = 9.1091 \times 10^{-31} kg$

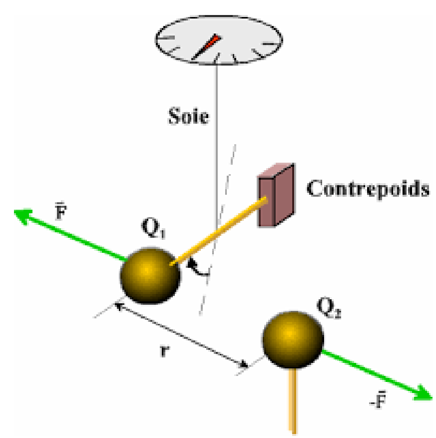
-*Proton* : $q = +e = +1.602 \times 10^{-19} C,\ m = 1.6721 \times 10^{-27} kg$

-*Neutron* : $q = 0\,C,\ m = 1.6741 \times 10^{-27} kg$

3 Loi de Coulomb

Charles Auguste de Coulomb (1736-1806)

Soit deux charges Q_1 et Q_2 placées en M et M' et distantes de r. Ces charges peuvent être positives ou négatives, mais dans le cas de la figure, nous supposerons qu'elles sont de même signe. La loi de Coulomb permet de déterminer la force $\overrightarrow{F_{12}}$ exercée par Q_1 sur Q_2 , ou encore la force $\overrightarrow{F_{21}}$ exercée par Q_2 sur Q_1 , ces deux forces étant égales et opposées, conformément au principe de l'action et la réaction.



Cette loi s'écrit :

$$\overrightarrow{F_{12}} = K\frac{Q_1 Q_2}{r^2}\overrightarrow{u_{12}} = -\overrightarrow{F21} \tag{1}$$

- La force et radiale c'est-à-dire dirigée selon la droite qui joint deux charges.
- Elle est proportionnelle au produit des charges, attractive si elles sont de signes opposés répulsive sinon.
- Elle varie comme l'inverse du carré de la distance entre deux charges

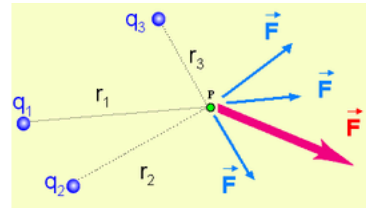
$K = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \approx 9 \times 10^9 (Nm^2C^{-2})$

ε_0 : La permittivité électrique du vide ($8.854 \times 10^{-12} Farad/m$)

> La force est répulsive si les charges sont de même signe, elle est attractive si elles sont de signes contraires.

4 Principe de superposition

Lorsqu'un système comporte N charges Ponctuelles $\{Q_i\}_{i=1...N}$ placées en des points $\{A_i\}_{i=1...N}$, la résultante $\overrightarrow{F_P}$ des forces électrostatique sur une charge q_P du système est la somme vectorielle des forces individuelles exercées par chaque charge $\{Q_i\}_{i\neq P}$.



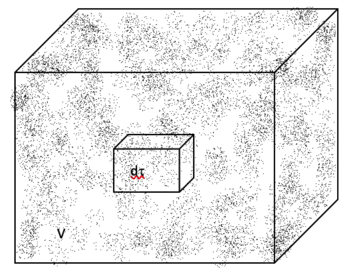
$$\overrightarrow{F_P} = \sum_{\substack{i=1\\ i\neq P}}^{N} \overrightarrow{F_{A_iA_P}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{\substack{i=1\\ i\neq P}}^{N} \frac{q_p Q_I}{(A_iA_P)^3}\overrightarrow{A_iA_P} = \frac{q_p}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{\substack{i=1\\ i\neq P}}^{N} \frac{Q_i}{r^2}\overrightarrow{u_{A_iA_P}} \tag{2}$$

5 Distribution des charges

5.1 Distribution Volumique

$dq = \sum_{i\in d\tau} q_i \implies dq = \rho.d\tau$

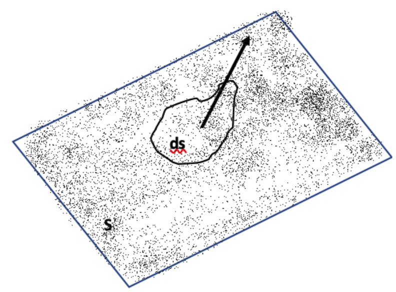
$\rho(C.m^{-3})$ la densité volumique des charge



5.2 Distribution surfacique

$dq = \sum_{i\in ds} q_i \implies dq = \sigma.ds$

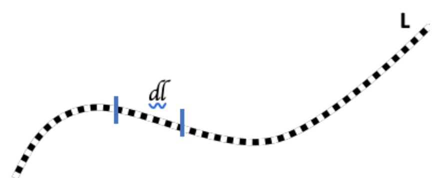
$\sigma(C.m^{-2})$ la densité surfacique des charge



5.3 Distribution linéique

$dq = \sum_{i\in dl} q_i \implies dq = \lambda.dl$

$\lambda(C.m^{-1})$ la densité linéique des charge

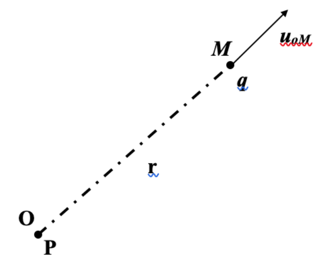


6 Champ électrostatique créé par une charge ponctuelle

La force électrostatique qui s'exerce par la charge Q ,placée en (O) , sur la charge teste en M est donnée par la loi de Coulomb

$$\overrightarrow{F_{O\longrightarrow M}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q.Q}{OM^2}\frac{\overrightarrow{OM}}{OM} \qquad (3)$$

$$\overrightarrow{F_{O\longrightarrow M}} = q\left[\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\overrightarrow{u_{OM}}}{r^2}\right] \qquad (4)$$



Le terme $\left[\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\overrightarrow{u_{OM}}}{r^2}\right]$ ne dépend que de la valeur de la charge Q, du milieu et du point M. C'est une caractéristique liée a la charge Q est représente ***le champ électrique***

$$\overrightarrow{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\overrightarrow{u_{OM}}}{r^2} \qquad (5)$$

La force $\overrightarrow{F_{O\longrightarrow M}} = \overrightarrow{F}(M) = q.\overrightarrow{E}(M)$

6.1 Champ créé par un ensemble de charges

$\overrightarrow{E}(M) = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_i}{r_i^2}\overrightarrow{u_i}$

— Si on a un conducteur et dq la charge élémentaire en un point P, le champ électrostatique totale créé en un point M par cette distribution de charges est :

$\overrightarrow{E}(M) = \int d\overrightarrow{E}(M)$ avec $d\overrightarrow{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r^2}\overrightarrow{u}$.

— On définit $\rho = \frac{dq}{dv}$ la densité volumique de charges $(C.m^{-3})$ le champ électrostatique créé par cette distribution est donc :

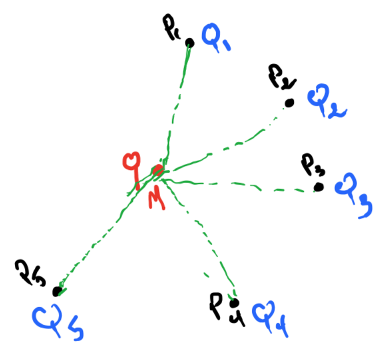
$\overrightarrow{E}(M) = \iiint \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho}{r^2}\overrightarrow{u}.dv$

— Si on a une distribution surfacique des charges $\sigma = \frac{dQ}{dS}$ produisant un champ total

$\overrightarrow{E}(M) = \iint \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma}{r^2}\overrightarrow{u}.ds$

— Pour une distribution linéique de charges $\lambda = \frac{dQ}{dl}$ le champ total est

$\overrightarrow{E}(M) = \int \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{r^2}\overrightarrow{u}.dl$

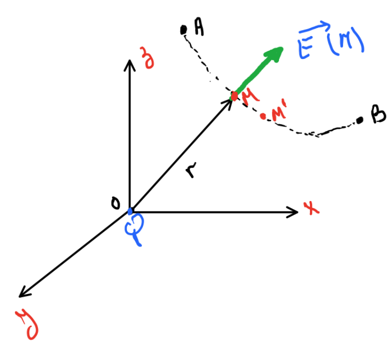


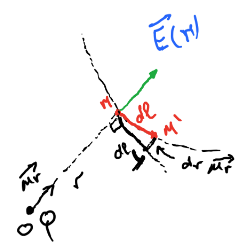
7 Potentiel électrostatique créé par une charge ponctuelle

(A,B) une courbe quelconque (M) point de cette courbe.

la charge électrique Q créé un champ $\overrightarrow{E}(M)$ dont l'expression est $\overrightarrow{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\overrightarrow{u_r}$. un déplacement élémentaire sur la courbe (A,B) de (M à M') suffisamment proche pour pouvoir considérer que le champ $\overrightarrow{E}$ ne change pas : $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{dl} = dr.\overrightarrow{u_r} + \overrightarrow{dl_\perp}$.

on note δC la circulation élémentaire du champ $\overrightarrow{E}(M)$.





$$\delta C = \overrightarrow{E}(M) \cdot \overrightarrow{dl} \tag{6}$$

donc :

$$\delta C = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2} \overrightarrow{u_r} \cdot \left(dr.\overrightarrow{u_r} + \overrightarrow{dl_\perp} \right) \tag{7}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2} \cdot \left(dr.\overrightarrow{u_r}\overrightarrow{u_r} + \overrightarrow{u_r}\overrightarrow{dl_\perp} \right) \tag{8}$$

avec : $\overrightarrow{u_r} \cdot \overrightarrow{dl_\perp} = 0$

$$\delta C = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{dr}{r^2} \tag{9}$$

et : $\frac{dr}{r^2} = -d(\frac{1}{r})$
donc :

$$\delta C = -d \left(\frac{Q}{4\pi r \varepsilon_0} \right) \tag{10}$$

finalement on a :

$$C_{\overrightarrow{AB}} = \int_A^B \overrightarrow{E}(M) \cdot \overrightarrow{dl} = -\int_A^B d\left(\frac{Q}{4\pi r \varepsilon_0} \right) = -\left(\frac{Q}{4\pi r \varepsilon_0} \right)_A^B \tag{11}$$

$$C_{\overrightarrow{AB}} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_A} - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_B} \tag{12}$$

La circulation du champ ne dépend pas du chemin suivi mais uniquement de la position initiale et finale.

Ce résultat conduit à définir ***le potentiel électrostatique*** par :

$$V(M) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} + Const \tag{13}$$

$V(\infty) = 0 \implies Const = 0$ et $V(M) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$ (Volt)

8 Relation différentielle

On a $V(M) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$, $dV(M) = d\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}\right) = -\delta C = -\overrightarrow{E(M)} \cdot \overrightarrow{dl}$
$dV(M) = -\overrightarrow{E(M)} \cdot \overrightarrow{dl} \implies$ on dit que $\overrightarrow{E}$ dérive une fonction scalaire qui est le potentiel électrique

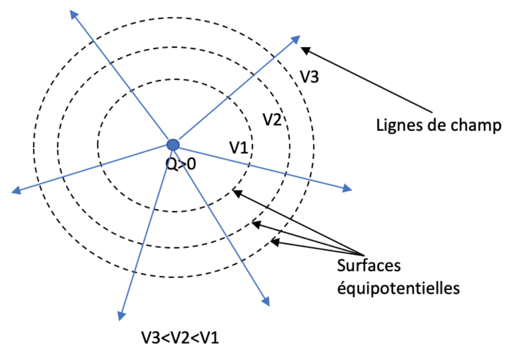
9 Relation locale

$$\left(\frac{dV}{dx}\overrightarrow{e_x} + \frac{dV}{dx}\overrightarrow{e_y} + \frac{dV}{dx}\overrightarrow{e_z} \right) (dx \cdot \overrightarrow{e_x} + dy \cdot \overrightarrow{e_y} + dz \cdot \overrightarrow{e_z}) = -\overrightarrow{E(M)} \cdot \overrightarrow{dl} \tag{14}$$

$$\overrightarrow{grad}(V) \cdot \overrightarrow{dl} = -\overrightarrow{E(M)} \cdot \overrightarrow{dl} \implies \overrightarrow{E(M)} = -\overrightarrow{grad}(V) \tag{15}$$

10 Surface équipotentielles

Surface a le même potentiel électrostatique.



11 Théorème de Gauss

Dans le vide , le flux (sortant) du champ électrostatique à travers une surface fermée S quelconque délimitant un volume intérieur fini V_{int} est égal à la somme algébrique Q_{int} des charges dans ce volume divisé par ε_0.

$$\phi_{sortant} = \oint \overrightarrow{E}(M) \cdot \overrightarrow{ds} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} \tag{16}$$

La surface fermée choisie est appelée *« surface de Gauss »*.

11.1 Intérêt et utilisation du théorème de Gauss

l'intérêt de théorème est de pouvoir déterminer le champ électrostatique en tout point M de l'espace crée par une répartition de charge connue.

Pour cela il faut trouver une surface fermée dite de Gauss qui passe par le point M. Si le champ est en tout point perpendiculaire à la surface choisie on aura $\overrightarrow{E}(M) \perp$ à $ds \implies \overrightarrow{E}(M) \,/\!\!/\, \overrightarrow{ds} \implies \overrightarrow{E}(M).\overrightarrow{ds} = E(M).ds$. Les surfaces répondant à ce critère sont les surfaces équipotentielles. Si de plus la valeur du champ est constante en tout point de cette surface alors $E(M) = E$.

$$\phi_{sortant} = \oint \overrightarrow{E}(M) \cdot \overrightarrow{ds} = \oint E(M).ds = E \oint ds = E.S \tag{17}$$

11.2 Application du théorème de Gauss

11.2.1 Champ et potentiel électrostatique créés par une sphère chargée

La sphère chargée ($S_C : surface; V_C : Volume$) définie par son centre O et son rayon R. Elle porte une charge totale Q répartie uniformément soit en surface (avec σ_0) soit en volume (avec ρ_0).

— Si la répartition est surfacique on a :

$$Q = \iint \sigma_0 ds = \sigma_0 \iint ds = \sigma_0 S_C = 4\pi R^2 \sigma_0 \implies \sigma_0 = \frac{Q}{4\pi R^2}$$

— Si la répartition est volumique on a :

$$Q = \iiint \rho_0 dv = \rho_0 \iiint dv = \rho_0 V_C = \frac{4\pi R^3}{3} \rho_0 \implies \rho_0 = \frac{3Q}{4\pi R^3}$$

On cherche le champ électrostatique créé par cette sphère en un point M situé à la distance $(OM = r)$

- *Choix de la surface de Gauss*

La surface de Gauss à prendre est donc une sphère de Centre O de rayon $r = OM$

- *Expression du flux sortant à travers la surface de Gauss.*

Une surface élémentaire sur la sphère autour de point M s'écrit : $\overrightarrow{dS} = dS.\overrightarrow{u_r}$ on a donc :

$$\phi_c = \oint \overrightarrow{E}.\overrightarrow{ds} = \oint E(r).\overrightarrow{u_r}.\overrightarrow{u_r}.ds = E(r).S$$

La surface de la sphère de Gauss de rayon $r$est $S = 4\pi r^2$ on a donc :

$\phi_S = E(r).4\pi r^2$

D'après le théorème de Gauss : $\phi_S = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$ on a alors : $\phi_S = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} \implies E(r).4\pi r^2 = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$

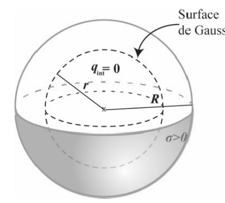
$$E(r) = \frac{Q_{int}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

Il reste de déterminer la charge Q_{int} (charge intérieur de la surface de Gauss « sphère de rayon r »).

Deux cas se présentent, suivant la position du Point M.

1) Le point M est à l'intérieur de la sphère :

$(r < R)$ la sphère de gauss est donc à l'intérieur de la sphère chargé.



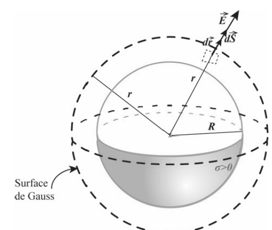
2) Le point M est à l'extérieur de la sphère chargée :

$(r > R)$ la sphère de gauss entoure complètement la sphère chargée

— Calcul de Q_{int} dans le cas $(r > R)$

c-à-d M est à l'extérieur de la sphère chargée, dans ce cas il est facile de voir que la charge Q_{int} correspond à la charge totale de la sphère,

pour $r > R$ on a $Q_{int} = Q$



Ce résultat est valable soit la charge surfacique ou volumique

— Calcul de Q_{int} dans le cas $(r < R)$

c-à-d M est à l'intérieur de la sphère chargée,

- Si la répartition de charge est surfacique et uniforme $\sigma_0 = \frac{Q}{S} = \frac{Q}{4\pi R^2} \implies Q = \sigma_0 4\pi R^2$,

Dans ce cas si $r < R$ il n'y a aucune charge à l'intérieur de la surface de Gauss : $(Q_{int} = 0)$.

- Si la répartition est volumique , $V = \frac{4}{3}\pi R^3$; $\rho_0 = \frac{Q}{V} = \frac{3Q}{4\pi R^3} \implies Q = \frac{4}{3}\rho_0 \pi R^3$;

Dans ce cas si $r < R$, il faut calculer la charge qui se trouve uniquement dans la sphère de rayon r (*sphère de Gauss*). $Q_{int} = \frac{4}{3}\rho_0 \pi r^3$

12 Equations de MAXWELL (Electrostatique)

D'après le théorème de Gauss : $\oiint \overrightarrow{E}.\overrightarrow{ds} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$ avec Q_{int} la charge totale à l'intérieur de S_G ; $Q_{int} = \iiint \rho dv$.

et d'après le théorème de Green-Ostogradsky :

$\oiint \overrightarrow{E}.\overrightarrow{ds} = \iiint div\overrightarrow{E}.dv$ donc $\oiint \iiint div\overrightarrow{E}.dv = \iiint \frac{\rho}{\varepsilon_0} dv \implies div\overrightarrow{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$

Dans le vide $div\overrightarrow{E} = 0$.

Maxwell a introduit en électromagnétisme un vecteur $\overrightarrow{D}$ qu'il a appelé déplacement électrique : $\overrightarrow{D} = \varepsilon\overrightarrow{E}$

où ε : est la permittivité électrique du milieu. Si on revient au théorème de Stokes,

$\oint \overrightarrow{E}.\overrightarrow{dl} = \oiint \overrightarrow{rot}\overrightarrow{E}.\overrightarrow{ds}$, $\oint \overrightarrow{E}.\overrightarrow{dl} = 0 \implies \overrightarrow{rot}\overrightarrow{E}.\overrightarrow{ds} = 0$

$\overrightarrow{rot}\overrightarrow{E} = 0$ en (électrostatique) .

13 Equation de Poisson et de Laplace

Nous avons trouvé que $\overrightarrow{E(M)} = -\overrightarrow{grad}(V)$ (Eq.15) donc : $div\overrightarrow{E} = -div\overrightarrow{grad}V = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$

En électrostatique le potentiel électrique V associé à une distribution de charge ρ est donné par :

$$\Delta V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{18}$$

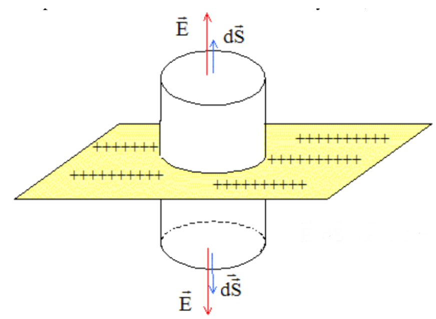
avec Δ : est l'opérateur Laplacian

Si $\rho = 0$ (exemple dans le vide) on a $\Delta V = 0$ c'est l'équation de Laplace.

14 Capacité électrique

La capacité représente la quantité de charges électrique portée par un conducteur pour potentiel électrique donné.

Si on prend un plan chargé par $+\sigma$, D'après le théorème de Gauss $\phi_S = \sum \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$, $E.S + E.S = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0} \implies |E| = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$.



Si on prend un deuxième plan chargé par $-\sigma$, même calcule on trouve que $|E| = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$

Si on prend les deux plans : $|E| = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$, on a aussi que $\overrightarrow{E(M)} = -\overrightarrow{grad}(V)$, $\overrightarrow{E} = -\frac{dV}{dz}\overrightarrow{e_z} \implies -dV = E.dz$

$-\int_{V_1}^{V2} dV = E.e \implies (V_1 - V_2) = E.e$, avec e est la distance entre les deux plans.

donc $(V_1 - V_2) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} e \implies U = \frac{\sigma e}{\varepsilon_0}$ si en multiple par S et en divise par S, On trouve $U = \frac{\sigma e.S}{\varepsilon_0 S} = \frac{Q.e}{\varepsilon_0 S}$ on trouve finalement que : $\frac{Q}{U} = \frac{\varepsilon_0 S}{e} = C\ (Farad)$.