Chapitre III Champ électrostatique

A partir de la notion de force électrostatique, on définit le champ électrostatique d'une charge ponctuelle puis d'un ensemble de charges.
Le flux du champ électrostatique à travers une surface est ensuite introduit afin de pouvoir énoncer et appliquer le théorème de Gauss.
Des exercices d’application simples de calculs de champs électrostatiques sont ensuite proposés.

1 Le champ électrostatique :
1.1 Champ électrostatique d'une charge ponctuelle
Considérons deux charges électriques ponctuelles q et Q (par exemple de même signe) et supposons Q fixée en un point O et q placée en un point M pouvant prendre différentes positions dans l'espace environnant Q. Quelle que soit la position de M l'interaction entre ces deux charges s'exprime par la loi de Coulomb :

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qq}{r^2}\vec{u}$$

Ainsi, dès que l'on approche une charge q de la charge Q, on constate une manifestation de cette interaction par l'existence d'une force. Cette force nous indique que l'espace environnant la charge Q est modifié.
On appelle champ électrostatique $\vec{E}$ cette propriété de l'espace relativement à la charge Q, et on peut le définir par le vecteur :

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\vec{u}$$

Ce champ électrostatique préexiste donc en l'absence de toute charge autre que Q.
Il se manifeste dès l'approche d'une charge q :

$$\vec{F} = q\vec{E}$$

La figure III.1 illustre cette propriété :

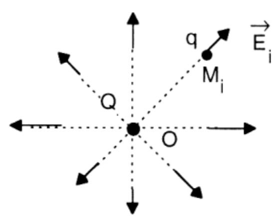


Figure III.1 : champ électrostatique d'une charge ponctuelle

Lors de l'étude des phénomènes électrostatiques on peut donc remplacer l'action entre charges par l'action entre une charge et un champ électrostatique.

1.2 Champ électrostatique d'un ensemble de charges
Supposons que l'on ait maintenant n charges Q_i placées en des points O_i, la résultante des forces s'exerçant sur une charge ponctuelle q est :

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_i q}{r_i^2} \vec{u}_i = q \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_i}{r_i^2} \vec{u}_i$$

D'après ce qui précède, on pose $\vec{E}_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_i}{r_i^2} \vec{u}_i$ par suite :

$$\vec{F} = q \sum_{i=1}^{n} \vec{E}_i = q\vec{E} \ldots avec \ldots \vec{E} = \sum_{i=1}^{n} \vec{E}_i$$

Ainsi le principe de superposition s'applique aux champs électrostatiques.
Naturellement nous pouvons généraliser cette notion aux distributions continues de charges. Par exemple, pour une distribution volumique de densité ρ on écrit :

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint \frac{\rho d\tau}{r^2} \vec{u}$$

1) Tout comme pour les forces électrostatiques étudiées dans le chapitre II, les propriétés de symétrie du champ sont liées aux propriétés de symétrie des sources de ce champ (les charges électriques).
2) Le champ électrostatique proportionnel à $1/r^2$ est un exemple de « champ newtonien » ; le champ de gravitation est un autre exemple.
-Unité : dans le système SI le champ électrostatique s'exprime en volt par mètre (symbole $V.m^{-1}$)

1.3 Lignes de champ ; tubes de champ
1.3.1 Ligne de champ :
On appelle ligne de champ une courbe telle qu'en chacun de ses points elle soit tangente au vecteur $\vec{E}$ (figure III.2).

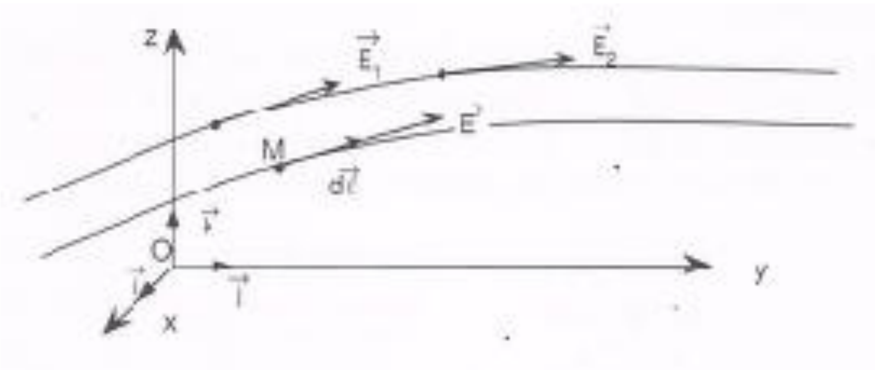


Figure III.2

Si $\vec{dl}$ est un élément orienté de la ligne de champ, on écrit : $\vec{dl} = K\vec{E}$ (K scalaire)
On convient donc d'orienter les lignes de champ dans le même sens que le champ électrostatique.
Par exemple, en coordonnées cartésiennes on écrit :

$$\vec{dl} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k} = K(E_x\vec{i} + E_y\vec{j} + E_z\vec{k})$$

ou encore

$$K = \frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y} = \frac{dz}{E_z}$$

qui représentent deux équations différentielles permettant d'établir les équations des lignes de champ.

• Les lignes de champ ne se coupent jamais (hormis les singularités éventuelles telles que la charge ponctuelle).

• Une ligne de champ est une courbe orientée, elle converge vers une charge négative (ou champ centripète) et diverge d'une charge positive (ou champ centrifuge) ; elle ne peut pas être une courbe fermée car elle convergerait et divergerait d'une même charge.

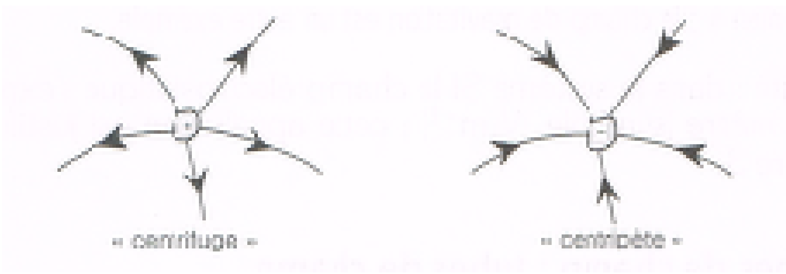


Figure III.3

1.3.2 Tubes de Champ

Un ensemble de lignes de champ s'appuyant sur un contour fermé C forme un tube de champ

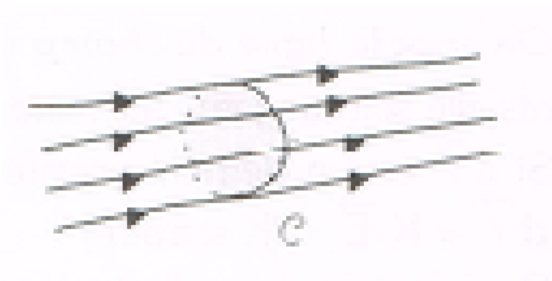


Figure III.4

1.3.3 Exemples

• Les lignes de champ d'une charge ponctuelle sont des droites passant par la charge et les tubes de champ des surfaces coniques.

• Les lignes de champ du champ uniforme sont des droites parallèles et les tubes de champ des surfaces cylindriques.

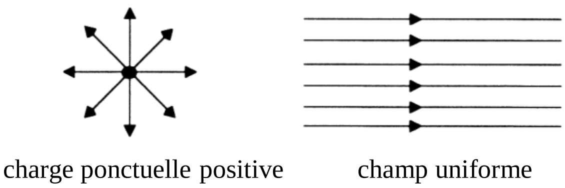


Figure III.5: exemples de lignes de champ

2 Flux du champ électrostatique ; théorème de Gauss
2.1 Orientation d'une surface
L'orientation d'une surface nécessite une conuention.

2.1.1 Elément de surface
Soit un élément de surface dS s'appuyant sur un contour fermé ; le sens conventionnel de la normale positive à cet élément de surface est lié au sens de parcours positif du contour C. Sur la figure III.6 les deux vecteurs unitaires $\vec{T}$ (tangent à C et orienté dans le même sens que C) et $\vec{H}$ (perpendiculaire à $\vec{T}$ et appartenant au plan tangent en M à dS) permettent de construire le vecteur unitaire $\vec{N}$ normale positive en M à dS : le trièdre ($\vec{T}$,$\vec{H}$, $\vec{N}$) est direct.

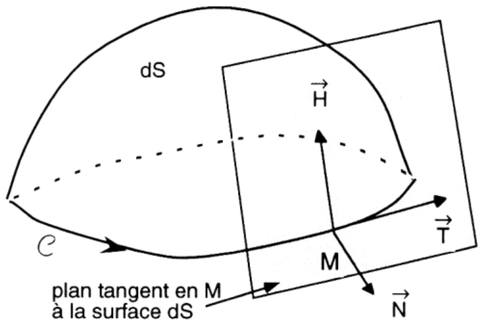


Figure III.6: orientation d'une surface

Par continuité on construit donc la normale $\vec{n}$ en tout point de la surface à partir de la normale $\vec{N}$ en M :

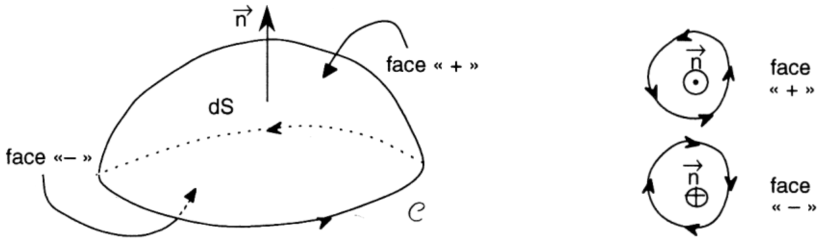


Figure III,7: normale à un élément de surface

2.1.2 Surface fermée
Par conuention, le sens de la normale positive à une surface fermée est le sens de la normale sortante (figure III.8).

2.1.3 Vecteur surface

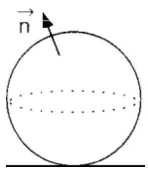


Figure III,8

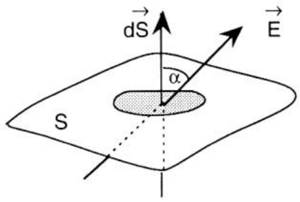
Le vecteur $\overrightarrow{dS}$, vecteur élément de surface est porté par la normale $\vec{n}$ à cette surface :
$\overrightarrow{dS}$ = dS$\vec{n}$, dS étant la valeur de l'élément de surface.

2.2 Flux

2.2.1 Définition du flux du champ électrostatique :

On appelle flux du champ électrostatique à travers l'élément de surface dS le scalaire (figure III.9) : $d\phi = \vec{E}.\overrightarrow{dS} = E.dS\cos\alpha$

Le flux total à travers la surface S s'écrira donc : $\phi = \iint_S \vec{E}.\overrightarrow{dS}$



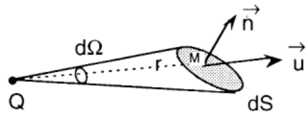


Figure III,9 Figure III,10

- Unité : dans le système SI, le flux du champ électrostatique a les dimensions du volt.mètre (symbole V.m).

L'application du principe de superposition nous permet d'écrire :

si $\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i \cdots alors \cdots d\phi = \sum_i d\phi_i = \sum_i \vec{E}_i.\overrightarrow{dS}$

2.2.2 Flux du champ d'une charge ponctuelle :

Soit Q une charge ponctuelle placée à (a distance r d'un point M où se trouve un élément de surface dS (figure III.10). Le flux du champ électrostatique créé par cette charge à travers dS est :

$$d\phi = \vec{E}.\overrightarrow{dS} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{u}.\overrightarrow{dS}}{r^2} \text{ car } \vec{E} = E.\vec{u}$$

On appelle angle solide dΩ l'expression : $d\Omega = \frac{\vec{u}.\overrightarrow{dS}}{r^2} = \frac{d\Sigma}{r^2} \cdots où \cdots d\Sigma = dS\cos\alpha$ représente la projection de dS sur la sphère de centre Q passant par M.

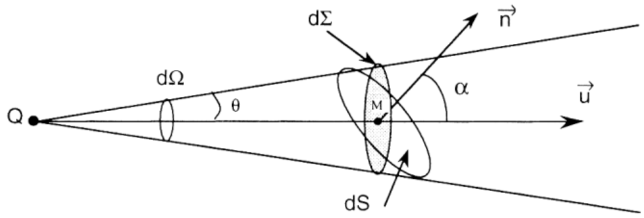


Figure III.11: angle solide

Dans ces conditions, le flux du champ électrostatique créé par une charge ponctuelle s'écrit : $d\phi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} d\Omega$ (1)

Exemples d'angles solides :

a) dΣ est un élément de surface d'une sphère de rayon R. Dans ces conditions :

$$\Omega = \int d\Omega = \frac{1}{R^2}\int d\Sigma = \frac{\Sigma}{R^2} = \frac{4\pi R^2}{R^2} = 4\pi .$$

b) Σ est une calotte sphérique d'angle au sommet θ (figure III.11) :

$\Omega = 2\pi(1 - \cos\theta)$. Si $\theta = \pi/2$ (demi-sphère), $\Omega = 2\pi$.

- L'angle solide s'exprime en stéradians.

2.3 Théorème de Gauss

2.3.1 Flux à travers une surface fermée :

D'après la relation (1) ci-dessus, le flux du champ électrostatique créé par une charge ponctuelle Q à travers une surface dS, ne dépend que de Q et de l'angle solide dΩ sous lequel on voit la surface dS du point où se trouve la charge Q.

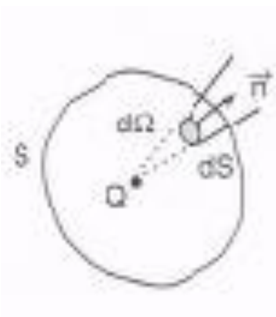
Pour une surface fermée, on peut envisager trois cas :

a) La surface fermée entoure la charge Q (figure III.12)

Le flux total à travers la surface S est : $\phi = \int d\phi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int d\Omega \Rightarrow \phi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} 4\pi \Rightarrow \phi = Q/\varepsilon_0$

Ceci quelle que soit la position de la charge Q à l'intérieur de la surface S.

b) La surface fermée n'entoure pas la charge Q (figure III.13)



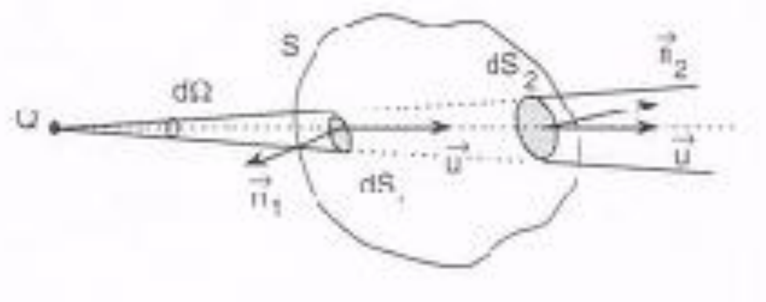


Figure III,12 Figure III,13

Le flux total s'écrit : $d\phi = d\phi_{S1} + d\phi_{S2}$ avec (Q > 0 par exemple) :

$$d\phi_{S1} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{u}.\overrightarrow{dS_1}}{r_1^2} = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} d\Omega \prec 0$$ car on voit la face « + »

$$d\phi_{S2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{u}.\overrightarrow{dS_2}}{r_2^2} = +\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} d\Omega \succ 0$$ car on voit la face «-»

donc au total : dΦ = 0

Nous pouvons répéter cette opération pour tous les couples

(dS_1 ; dS_2) appartenant à la surface S. Au total nous avons donc : $\Phi=0$
quelle que soit la position de la charge Q à l'extérieur de S.

c) La surface fermée comporte des charges superficielles (figure III.14)
Si la surface S comporte des charges superficielles Q_{sup}, alors la relation (1) précédente nous donne : $\phi = \int d\phi = \frac{Q_{sup}}{4\pi\varepsilon_0}\int d\Omega = \frac{Q_{sup}}{4\pi\varepsilon_0}2\pi \Rightarrow \phi = \frac{Q_{sup}}{2\varepsilon_0}$

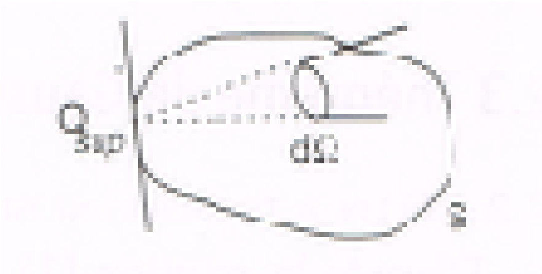


Figure III.14

2.3.2 Théorème de Gauss :
a) Cas d'une distribution discrète de charges ponctuelles
Soit un ensemble de charges ponctuelles réparties à l'intérieur et à l'extérieur d'une surface fermée S. On note Q_{ext} l'ensemble des charges extérieures et Q_{int} l'ensemble des charges intérieures.

• Pour une charge intérieure Q_i , nous avons : $\phi_i = \frac{Q_i}{\varepsilon_0}$

• Pour une charge extérieure Q_j : $\phi_j = 0$

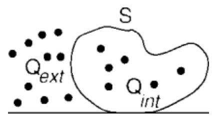


Figure III,15

Par conséquent, pour l'ensemble des charges le flux total sera :

$$\phi = \sum_i \phi_i + \sum_j \phi_j = \frac{\sum_i Q_i}{\varepsilon_0} + 0 = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} \cdots avec \cdots Q_{int} = \sum_i Q_i$$

b) Cas d'une distribution continue de charges
• La distribution ayant la densité volumique ρ, la charge intérieure s'écrit : $Q_{int} = \iiint_V \rho d\tau$.

Dans ces conditions le flux à travers la surface fermée s'écrit : $\phi = \iiint_V \frac{\rho d\tau}{\varepsilon_0}$

• Pour une répartition superficielle de densité a nous écrivons : $Q_{sup} = \iint_S \sigma dS$.

Par suite : $\emptyset = \iint_S \sigma dS/2\varepsilon_0$

Dans ces conditions :

c) Enoncé du théorème de Gauss :

« Le flux du champ électrostatique sortant d'une surface fermée (« surface de Gauss ») quelconque est égal à la diuision par ε_0, de la somme des charges intérieures au volume délimité par la surface, ceci quelles que soient les charges extérieures.»

$$\phi = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

Pour des charges superficielles nous écririons $\phi = \frac{Q_{sup}}{2\varepsilon_0}$

2.3.3 Conservation du flux :

Considérons un tube de champ (figure III.16) limité par les surfaces S_1 et S_2 et situé dans une région dépourvue de charges.

Le flux total sortant de la surface totale (S_1 + S_2 + surface latérale) est :

Φ = Flux (S_1) + flux (S_2) + flux (surface latérale)

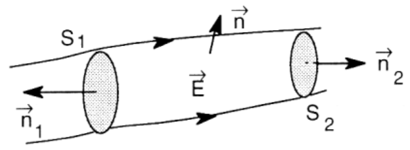


Figure III,16: flux conservatif

Le flux à travers la surface latérale est nul car la normale $\vec{n}$ est constamment perpendiculaire à $\vec{E}$. Il reste Φ=-$\Phi(S_1)$+$\Phi(S_2)$

Mais il n'y a aucune charge dans le volume délimité par ces surfaces, donc Φ = 0.

Par suite :$\Phi(S_1)$=$\Phi(S_2)$ ou $\vec{E}_1.\vec{S}_1 = \vec{E}_2.\vec{S}_2$

Ce qui signifie que :

« Le flux est conseruatif dans un tube de champ, et plus généralement dans toute région de l'espace ne contenant pas de charges. »

Ainsi, si les lignes de champ sont parallèles, $\left|\vec{E}\right| = Cte$.

2.3.4 Forme locale du théorème de Gauss :

Limitons nous aux seules charges intérieures à la surface S :

$$\phi = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = \iint_S \vec{E}.\overrightarrow{dS} = \frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_V \rho d\tau$$

Appliquant le théorème de Green-Ostrogradsky : $\iint_S \vec{E}.\overrightarrow{dS} = \iiint_V div\vec{E}.d\tau$

nous pouvons écrire, quel que soit le volume V contenu dans la surface S :

$$\iiint_V \left(div\vec{E} - \frac{\rho}{\varepsilon_0}\right)d\tau = 0.$$

par suite : $div\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ (Relation de Poisson)

Cette relation très importante en électromagnétisme, relie le champ électrostatique à sa source (les charges). En dehors des charges $div\,\vec{E} = 0$ (Relation de Laplace)

3. Exercices d'application: Calculs de champs électrostatiques :

Le problème général posé est le calcul du champ électrostatique créé par une distribution de charges donnée. Ce calcul peut être abordé de trois manières :

• Le calcul direct à partir de l'expression du champ créé par une charge ponctuelle et en utilisant le principe de superposition. Cette procédure est très similaire à celle utilisée dans le chapitre II où l'on exploite la relation : $\vec{F} = q\vec{E}$.

• L'utilisation du théorème de Gauss est possible lorsque le système présente certaines propriétés de symétrie.

• À partir de la fonction potentiel : ce sera l'objet du chapitre IV.

3.1 Calculs directs de champs électrostatiques; lignes de champ :

On considère une charge ponctuelle +q placée en un point O.

a) Déterminer l'équation des lignes de champ.

b) Représenter un tube de champ.

<u>*Solution :*</u>

a) Le champ électrostatique s'écrit : $\vec{E} = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\vec{u}}{r^2} = E.\vec{u}$

Le problème présente une symétrie par rapport au point O où se trouve la charge (symétrie dite « sphérique »). Nous pouvons donc faire une étude préalable dans un plan P passant par O pour lequel ∅ = Cte (figure III.17) car les lignes de champ sont radiales.

Un point M appartient à une ligne de champ $\vec{E}$ si la condition $d(\overrightarrow{OM}) = k.\vec{E}$ est satisfaite.

Dans le plan P nous écrivons :

$\overrightarrow{OM} = r\vec{u}$ (figure III.18) donc $d(\overrightarrow{OM}) = dr\vec{u} + rd\vec{u} = dr\vec{u} + rd\theta\vec{v}$

(où $\vec{v}$ est le vecteur unitaire orthoradial) et par suite : $d(\overrightarrow{OM}) = KE\vec{u} \Rightarrow rd\theta = 0 \Rightarrow \theta = Cte$

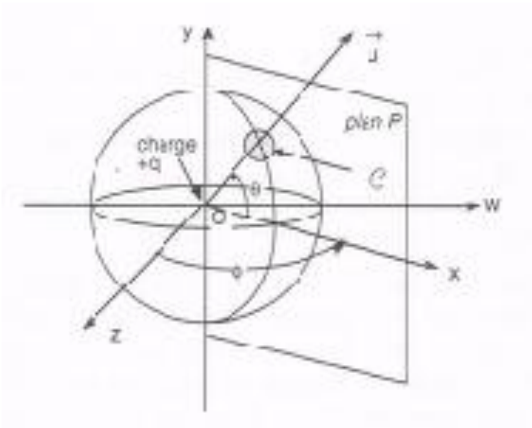


Figure III.17: symétrie sphérique

Mais nous pouvons également écrire :

$$E_x = E\vec{u}.\vec{i} = E\cos\theta = E\frac{x}{r}$$

$$E_y = E\vec{u}.\vec{j} = E\sin\theta = E\frac{y}{r}$$

$$donc\ \frac{dy}{dx} = \frac{E_y}{E_x} = \frac{y}{x} \Rightarrow y = Cte\ x\ ou\ \frac{y}{x} = tg\theta = Cte \Rightarrow \theta = Cte$$

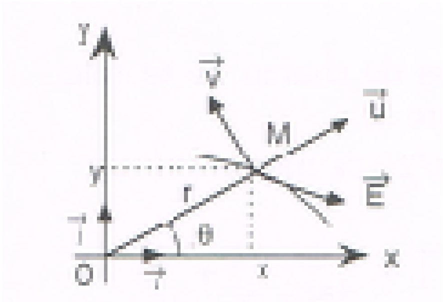


Figure III.18

On retrouve le résultat précédent.

b) Les lignes de champ s'appuyant sur un contour fermé forment un tube de champ (figure III.19). Les lignes de champ passant toutes par le point O, un tube sera une surface conique s'appuyant par exemple sur la courbe C. Lorsque les lignes de champ se resserrent, cela signifie que le champ est plus intense (le champ est plus intense en C'qu'en C.

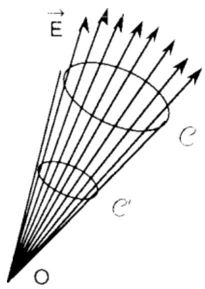


Figure III,19

3.2 Utilisation du théorème de Gauss

Le théorème de Gauss est utilisé pour le calcul de champs électrostatiques, lorsque la surface de Gauss a la même symétrie que l'ensemble des charges, source du champ.

1 - Calculer le champ électrostatique créé par un plan infini (fig III.20 a) uniformément chargé avec la densité surfacique $+\sigma$.

2 - On considère une sphère de rayon R (figure III.20 b) de charge Q répartie uniformément sur sa surface avec la densité surfacique σ. Évaluer le champ électrostatique en fonction de r = OM.

3 - Reprendre la question précédente en considérant maintenant la même sphère chargée uniformément en volume avec la densité volumique $+\rho$.

AN : calculer E(R) pour R = 10 cm et $\rho = 10^{-10}$ $C.m^{-3}$.

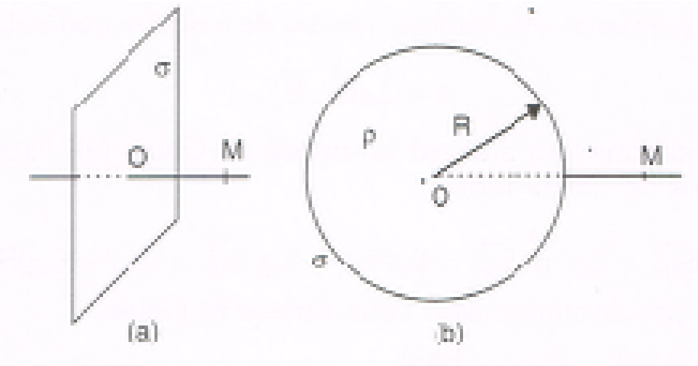


Figure III,20

Solution :

1 - Le plan étant infini et uniformément chargé, le champ électrostatique est nécessairement perpendiculaire à ce plan :

$\vec{E} = E.\vec{k}$

Les lignes de champ sont des droites parallèles entre elles et perpendiculaires au plan.

A priori, le module E du champ ne dépend que de la distance z à ce plan : il est centrifuge par rapport au plan (en M il est dirigé vers z > 0, en M' il est dirigé vers z < 0) :

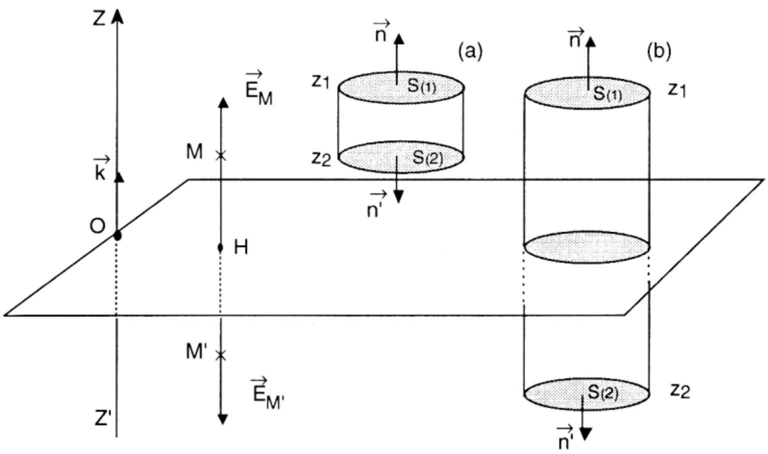


Figure III,21

On choisit comme surface de Gauss un tube de champ limité par deux sections parallèles au plan (par exemple des cercles) et de surface S.

Le flux à travers cette surface s'écrira de manière générale :

$$\phi = \sum_i \left(\vec{E}_i.\vec{S}_i\right)$$

• Considérons tout d'abord la surface de Gauss (a), l'application du théorème de Gauss donne :

$$\phi = E_{z1}\vec{n}.\vec{S}_{(1)} + E_{z2}\vec{n}'.\vec{S}_{(2)} = E_{z1}S_{(1)} - E_{z2}S_{(2)} = \left(E_{z1} - E_{z2}\right)S = 0$$

car il n'y a pas de charge dans cette surface de Gauss. On en déduit : $E(z_1) = E(z_2)$

Le champ est donc uniforme (des deux côtés du plan).

• Pour la surface de Gauss (b). le théorème de Gauss donne :

$$\emptyset = \overrightarrow{E_{z1}}.\overrightarrow{S_1} + \overrightarrow{E_{z2}}.\overrightarrow{S_2} = E_{z1}.S_1 + E_{z2}S_2$$

$$(E_{z1} + E_{z2}).S = \frac{somme\ des\ charges}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma\, S}{\varepsilon_0}$$

$$\boldsymbol{E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}}$$

L'intensité du champ est constante en tout point de l'espace, les lignes de champ sont des droites parallèles donc : le champ est uniforme

Lorsque le point M se déplace sur l'axe Z'OZ, la composante normale E du champ (la seule composante non nulle) subit une discontinuité égale à σ/ε_0 puisque de part et d'autre du plan, les champs sont de sens opposés :

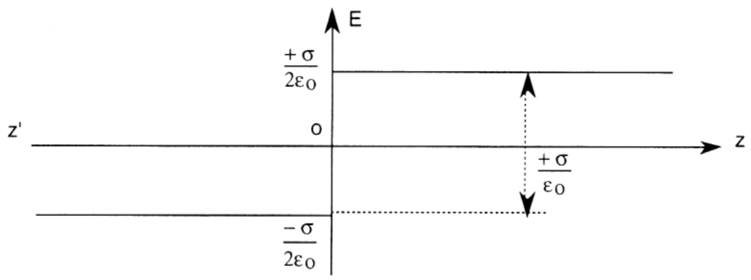


Figure III,22

L'existence d'une couche chargée de densité superficielle σ entraîne une discontinuité du champ égale à σ/ε_0

2 - La symétrie étant sphérique, nous choisissons comme surface de Gauss une sphère de centre O et de rayon r (figure III.23).

Nous considérons trois cas :

- Premier cas : le point M est extérieur à la sphère (r > R)

Le flux 0 à travers Σ est : $\phi = \int_{\Sigma} \vec{E}_{ext}.\vec{dS} = E_{ext}\ \Sigma = 4\pi r^2 E_{ext}$

car le champ électrique est radial (en tout point il est colinéaire à la normale $\vec{n}$ à la surface Σ).

Par ailleurs, (théorème de Gauss) $\phi = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{4\pi R^2 \sigma}{\varepsilon_0}$

En égalant ces deux expressions, on obtient :

$$E_{ext} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\frac{R^2}{r^2} \quad \boldsymbol{ou} \quad \vec{E}_{ext} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\frac{R^2}{r^3}\vec{r}$$

On retrouve l'expression du champ (radial) créé par une charge ponctuelle : ce résultat était prévisible compte tenu des éléments de symétrie similaires.

En un point infiniment voisin de la surface de la sphère, r $\rightarrow$ R

donc le champ électrostatique tend vers la valeur : $E = \sigma/\varepsilon_0$

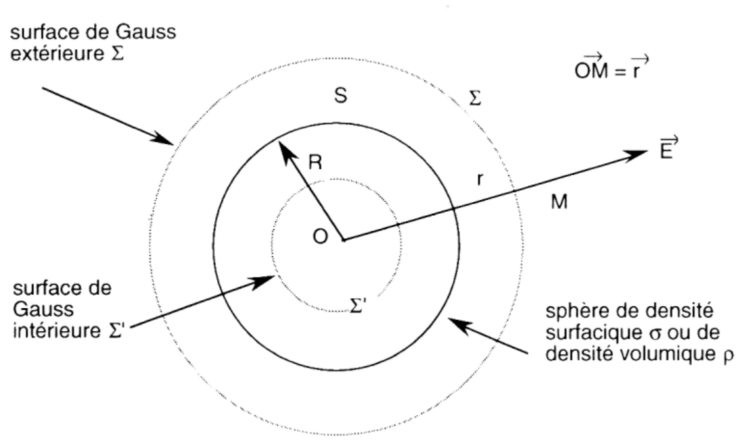


Figure III,23

- Deuxième cas : le point M est intérieur à la sphère (r < R)
Le flux à travers Σ' est : $\Phi = 4\pi r^2 E_{int}$
Le théorème de Gauss nous donne : Φ = 0 car il n'y a pas de charge à l'intérieur de Σ'.
En conséquence

$$E_{int} = 0 \quad ou \quad \vec{E} = \vec{0}$$

- Troisième cas : le point M est sur la sphère (r = R).
L'application du théorème de Gauss donne dans ce cas :

$$\phi = 4\pi R^2 E_{surf} = \frac{Q}{2\varepsilon_0} = \frac{4\pi R^2\sigma}{2\varepsilon_0} \quad donc \quad E_{surf} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

Ainsi, lorsque le point M se déplace de l'intérieur vers l'extérieur,
le champ électrostatique subit une double discontinuité : $\sigma/2\varepsilon_0$, de l'intérieur vers la couche puis de nouveau $\sigma/2\varepsilon_0$ de la couche vers l'extérieur.
Au total la discontinuité est de $\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ à la traversée de la couche uniformément chargée :

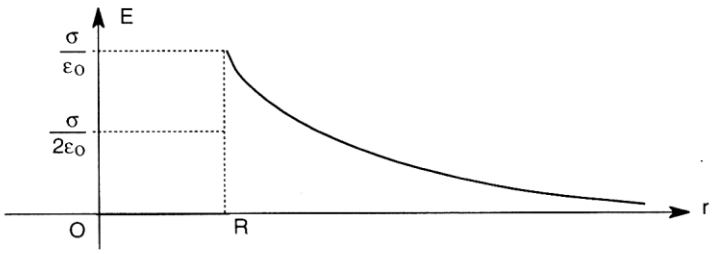


Figure III,24

3 - La symétrie est également sphérique puisque la densité volumique de charge est constante. Le champ est donc radial.
- Premier cas : le point M est extérieur à la sphère (r > R)
Voir la figure III.23 la sphère étant chargée en volume.
L'application du théorème de Gauss est identique au cas précédent :

$$\phi = 4\pi R^2 E_{ext} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \quad avec \quad Q = \rho V = \rho \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$\Rightarrow E_{ext} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\frac{R^3}{r^2} \quad ou \quad E_{ext} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\frac{R^3}{r^3}\vec{r}$$

- Deuxième cas : le point M est inférieur à la sphère (r < R)

La surface de Gauss Σ' étant intérieure à la sphère, la charge électrique contenue dans Σ' est :

$$Q_{int} = \rho \frac{4}{3}\pi r^3 .$$

Le théorème de Gauss nous donne :

$$\phi = 4\pi r^2 E_{int} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{4\rho}{3\varepsilon_0}\pi r^3 \quad on\ aura\ alors :$$

$$E_{int} = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0} \quad ou \quad \vec{E}_{int} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{r}$$

• Sur la surface de la sphère r = R le champ est : $E_{surf} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}R$.

AN: E(R) = 0.38 $V.m^{-1}$

Il y a continuité du champ électrostatique pour r = R ; ce fait est général.

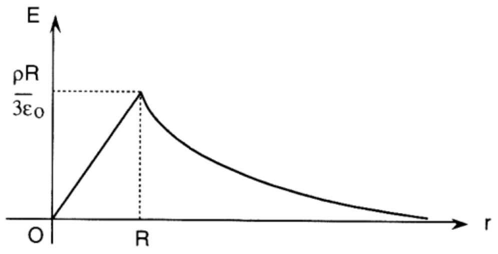


Figure III,25

Résumé :

Le champ électrostatique $\vec{E}$ est une propriété de l'espace relativement aux charges électriques immobiles.

Les lignes de champ, courbes tangentes au vecteur champ électro-statique ne se coupent jamais et ne sont pas des lignes fermées ; elles se resserrent là où le champ est plus intense.

Le champ électrostatique est discontinu à la traversée d'une couche superficielle chargée mais est continu en présence d'une distribution volumique de charges.

Le théorème de Gauss que l'on peut résumer par $\phi = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$ est utile pour le calcul des champs électriques. On l'applique chaque fois que la symétrie de la distribution de charges est suffisamment élevée pour que le calcul du flux à travers la « surface de Gauss » soit simple.

Exercices du chapitre III

On notera E le module du champ électrostatique $\vec{E}$. Lorsqu'on demande de a calculer E » cela signifie de déterminer entièrement le vecteur $\vec{E}$ (intensité, direction, sens).

Exercice 3:

Un cylindre de rayon R et d'axe zz' est chargé par une distribution volumique de charge ρ.
En utilisant le théorème de Gauss , donner l'expression du champ électrique E(r) à l'intérieur et à l'extérieur du cylindre lorsque :
1) $\rho = \rho_0$ (constante)
2) $\rho = \rho_0(1- (r/R)^2)$

Exercice 4 :

Un fil rectiligne infini est chargé uniformément (densité linéaire de charge λ).
Calculer en utilisant le théorème de Gauss le champ crée en un point M placé à une distance a de ce fil, vérifier votre résultat en utilisant le calcul direct ; enfin, évaluez le potentiel V.

Exercice 5 :

Déterminer le champ électrostatique créé par un plan infini chargé d'une densité surfacique de charge constante σ. Déterminer le champ électrostatique dans tout l'espace créé par deux plans parallèles et chargés respectivement de la densité σ et $-\sigma$.

Exercice 6 :

Une sphère de rayon R est chargée d'une densité volumique de charge $\rho(r) = \rho_0\left[1-\alpha\dfrac{r^2}{R^2}\right]$

ρ_0 *et* α *étant des constantes.*

a) Evaluer la charge totale Q de la sphère.
b) Donner le champ électrostatique à l'extérieur de la sphère.
c) Donner le champ électrostatique à l'intérieur de la sphère et sa valeur maximale ; pour quelle valeur de r obtient-on ce résultat ? En déduire dans ce cas la condition que doit vérifier la constante α .

Exercice 7 :

Deux sphères concentriques de rayons a et b (a < b) chargées uniformément avec une densité surfacique de charge $+\sigma$ et $-\sigma$.
Déterminer et présenter graphiquement le champ électrique E en tout point de l'espace.

Exercice 8 :

Soit une distribution de charges avec un potentiel électrostatique : $v(r) = \dfrac{A}{r}e^{-\frac{r}{\lambda}}$ λ *et A sont des constantes positives.*
Déterminer le flux du champ E à travers la surface d'une sphère de centre O et de rayon R ; calculer la charge à l'intérieur la surface fermée en utilisant le théorème de Gauss et déterminer par la suite la valeur de cette charge
quand $R \to 0$ et $R \to \infty$; que peut-on en déduire?

Exercice 9 :

Soit une distribution volumique de charges positives à symétrie sphérique par rapport à O, de densité volumique de charge ρ telle que:

$$\rho = \begin{cases} \rho_0 ; & 0 \leq r \prec R_1 \\ \alpha / r; & R_1 \prec r \prec R_2 ; \\ 0; & r \succ R_2 \end{cases}$$

où r désigne la distance au centre O ; déterminer et représenter le champ E dans tout l'espace