TD structures algébriques

Exercice 1

On définit dans Z une loi de composition interne par $a * b = a^2 + b^2$

Etudier les propriétés de cette loi.

Solution

1. La loi est commutative : en effet pour tous a, b dans Z on a
$$a * b = a^2 + b^2 = b^2 + a^2 = b * a$$
2. la loi n'est pas associative en effet :
$$1 * (2 * 3) = 1 * (2^2 + 3^2) = 1 * 13 = 1^2 + 13^2 = 170$$
$$(1 * 2) * 3 = (1^2 + 2^2) * 3 = 5 * 3 = 5^2 + 3^2 = 34$$
Donc $1 * (2 * 3) \neq (1 * 2) * 3$
3. La loi n'admet pas d'élément neutre en effet :
pour tout e dans Z $e \star (e + 1) = e^2 + (e + 1)^2 = e^2 + e^2 + 2e + 1 = 2e^2 + 2e + 1$
si e était neutre alors $e \star (e + 1) = e + 1$ c'est à dire $2e^2 + 2e + 1 = e + 1$ autrement dit $2e^2 + e = 0$ donc soit $e = 0$ soit $e = -1/2$ or $-1/2 \notin Z$ donc $e = 0$ mais 0 n'est pas neutre car $2 * 0 = 4 \neq 2$
Donc la loi n'admet pas d'élément neutre
4. Existence d'élément symétrique : il n'y a pas d'élément neutre donc le concept de symétrique pour cette loi est absurde.

Exercice 2

On définit dans R les lois $a \star b = \inf(a, b)$ et $a \circ b = \sup(a, b)$

1. Montrer que ces deux lois sont commutatives et associatives.
2. Montrer que $\star$ est distributive par rapport à $\circ$
3. Ces lois ont-elles un élément neutre.

Solution

1. La commutativité est évidente.
Associativité de la loi $\star$: pour tous a, b, c dans R on peut supposer que $a \leq b \leq c$ et on a :
$$(a \star b) \star c = \inf(a, b) \star c = a \star c = \inf(a, c) = a$$
$$a \star (b \star c) = a \star \inf(b, c) = a \star b = \inf(a, b) = a$$
Donc la loi inf est associative
Associativité de la loi $\circ$: pour tous a, b, c dans R on peut supposer que $a \leq b \leq c$ et on a :
$$a \circ (b \circ c) = a \circ \sup(b, c) = a \circ c = \sup(a, c) = c$$
$$(a \circ b) \circ c = \sup(a, b) \circ c = b \circ c = \sup(b, c) = c$$
Donc la loi sup est associative
2. Distributivité de la loi $\star$ par rapport à la loi $\circ$
Pour tous a, b, c dans R on peut supposer que $a \leq b \leq c$ et on a :
$$a \star (b \circ c) = \sup(a, \inf(b, c)) = \sup(a, b) = b$$
$$(a \star b) \circ (a \star c) = \sup(a, b) \circ \sup(a, c) = b \circ c = b$$
Et on a $a \star (b \circ c) = (a \star b) \circ (a \star c)$
$$b \star (a \circ c) = b \star \inf(a, c) = b \star a = \sup(b, a) = b$$
$$b \star a) \circ (b \star c) = \sup(b, a) \circ \sup(b, c) = b \circ c = \inf(b, c) = b$$
Et on a $b \star (a \circ c) = (b \star a) \circ (b \star c)$
$$c \star (b \circ c) = c \star \inf(b, c) = c \star b = \sup(c, b) = c$$
$$(c \star b) \circ (c \star a) = \sup(c, b) \circ \sup(c, a) = c \circ c = \inf(c, c) = c$$

Et donc aussi $c \star (b \circ c) = (c \star b) \circ (c \star a)$
Donc dans tous les cas de figure on a $a \star (b \circ c) = (a \star b) \circ (a \star c)$.

3. Existence d'élément neutre pour la loi inf
Supposons que cette loi admette un élément neutre m, alors pourt tout a dans R on a $a \circ m = a$ et si on prend $a = m + 1$ alors $(m + 1) \star m = m + 1$ or $(m + 1) \star m = \inf(m, m + 1) = m$ donc $m + 1 = m$ ce qui est absurde donc cette loi n'admet pas d'élément neutre.
Existence d'élément neutre pour la loi sup
Même raisonnement pour voir qu'elle n'en admet pas.

Exercice 3

On définit sur [0,1] la loi $a \circ b = a + b - ab$

1. Montrer que cette loi est interne
2. Etudier les propriétés de cette loi.

Solution

1. $a + b - ab = a(1 - b) + b = a(1 - b) + (b - 1) + 1 = (b - 1)(1 - a) + 1$

Or [$0 \leq a \leq 1$ et $0 \leq b \leq 1$] donc [$0 \leq 1 - a \leq 1$ et $-1 \leq b - 1 \leq 0$] donc si on multiplie les deux membres de cette dernière inégalité par (1-a) alors
$-1 + a \leq (b - 1)(1 - a) \leq 0$ or $-1 \leq -1 + a$ donc $-1 \leq (b - 1)(1 - a) \leq 0$ on ajoute 1 aux deux membres pour obtenir $0 \leq (b - 1)(1 - a) + 1 \leq 1$ c'est-à-dire $0 \leq a \circ b \leq 1$ et donc la loi est interne dans [0,1].

2. la loi est commutative : $a \circ b = a + b - ab \overbrace{\underbrace{=}_{\times commut}}^{+\, commut} b + a - ba = b \circ a$

la loi admet un élément neutre : c'est visiblement 0 : $0 \circ a = 0 + a - 0.a = a$
et 0 est bien dans [0,1].
La loi est associative :
$(a \circ b) \circ c = (a + b - ab) \circ c = (a + b - ab) + c - (a + b - ab)c$
$\overset{+\, assoc}{=} a + b - ab + c - ac - bc + abc \overset{+\, commut}{=} a + b + c - ab - ac - bc + abc$
$a \circ (b \circ c) = a \circ (b + c - bc) = a + (b + c - bc) - a(b + c - bc)$
$= a + b + c - bc - ab - ac + abc = a + b + c - ab - ac - bc + abc$
On a bien donc $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$
Recherche des éléments symétrisables
a admet un symétrique a^{-1} si et seulement si $a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = 0$ et il suffit de vérifier une seule de ses égalités :
$a \circ a^1 = 0 \Leftrightarrow a + a^{-1} - a.a^{-1} = 0 \Leftrightarrow a^{-1}(1 - a) = -a$
Si $a = 1$: on obtient $0 = -1$ ce qui est faux, donc 1 n'a pas de symétrique
Si $a \neq 1$: $a^{-1} = -\frac{a}{1-a}$, mais $-\frac{a}{1-a} \leq 0$ donc
si $a = 0$ alors $a^{-1} = 0$,
et si $a \neq 0$ alors $-\frac{a}{1-a} < 0$ donc $-\frac{a}{1-a} \in [0,1]$ et donc a n'a pas de symétrique.
Donc seul l'élément neutre 0 admet un symétrique.

Exercice 4

On définit dans $J =]-1,1[$ la loi $a * b = \frac{a+b}{1+ab}$

1. Montrer que cette loi est bien interne dans J.
2. Vérifier que $(J,*)$ est un groupe commutatif.

Solution

Dans cet exercice il suffit de remarquer que $(a+b)$ et $1+ab$ font partie d'un développement du produit de facteur $(1 \pm a)(1 \pm b)$

1. La loi est interne dans J :
   $a \in J \Longrightarrow -1 < a \leq 1 \Longrightarrow (1-a) > 0$
   $a, b \in J \Longrightarrow (1-a)(1-b) > 0$ or $[(1-a)(1-b) = 1 + ab - (a+b)]$ donc
   $1 + ab - (a+b) > 0] \Longrightarrow [1 + ab > a + b] \Longrightarrow 1 > \frac{a+b}{1+ab}$ ceci d'une part ;
   D'autre part remarquons que $[(1+a)(1+b) = 1 + ab + (a+b) > 0]$ donc
   $1 + ab + (a+b) > 0] \Longrightarrow [1 + ab > -(a+b)] \Longrightarrow -1 < \dfrac{a+b}{1+ab}$
   On a donc $-1 \leq \frac{a+b}{1+ab} < 1$, autrement dit pour tous a, b dans J on a $a * b \in J$ et la loi est donc interne dans J.
2. Commutativité : pour tous a, b dans J : $a * b = \frac{a+b}{1+ab} \overbrace{\underbrace{=}_{\times\, commut}}^{+\, commut} \frac{b+a}{1+ba} = b * a$
3. Element neutre : si on regarde bien $\frac{a+b}{1+ab} = a$, on voit que $b = 0$ réalise l'égalité, autrement dit $b = 0 \;\Longrightarrow a * 0 = a$ et comme la loi est commutative alors $a * 0 = 0 * a = a$ donc 0 est l'élément neutre.
4. Element symétrique :si on observe bien $\frac{a+b}{1+ab} = 0$ on voit que $b = -a$ et on a $a * (-a) = (-a) * a = 0$, de plus $(-1 < a < 1) \Longrightarrow (-1 < -a < 1)$, c'est-à-dire que $-a \in J$, donc pour tout a dans $(-a)$ est le symétrique de a.
5. Associativité : pour tout a, b,c dans J on a :

$$a * (b * c) = a * \frac{b+c}{1+bc} = \frac{a + \dfrac{b+c}{1+bc}}{1 + a.\dfrac{b+c}{1+bc}} = \frac{a+b+c+abc}{1+bc+ab+ac}$$

$$(a * b) * c = \frac{a+b}{1+ab} * c = \frac{\dfrac{a+b}{1+ab} + c}{1 + \dfrac{a+b}{1+ab}c} = \frac{a+b+c+abc}{1+ab+ac+bc}$$

   On a bien $a * (b * c) = (a * b) * c$ et donc la loi est associative.

Ainsi $(J\,,*)$ est bien un groupe commutatif.

Exercice 5

On considère les quatre applications suivantes de R dans R :

$f_1 : x \rightarrow x, \quad f_2 : x \rightarrow -x, \quad f_3 : x \rightarrow \frac{1}{x} \quad f_4 : x \rightarrow -\frac{1}{x}.$

Montrer que ces applications forment un groupe pour la loi $\circ$ de composition des fonctions.

Solution

Il est facile de voir que la loi de composition des fonctions est internes dans $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ en composants les fonctions entre-elles, la fonction f_1 est l'élement neutre, et en remarquant que l'inverse de l'inverse est neutre, ainsi que l'opposé de l'opposé est neutre aussi. On a le tableau de composition suivant construit en composant les fonctions de la colonne gauche avec celles de la igne horizontale du haut :

	f_1	f_2	f_3	f_4
f_1	f_1	f_2	f_3	f_4
f_2	f_2	f_1	f_4	f_3
f_3	f_3	f_4	f_1	f_2
f_4	f_4	f_3	f_2	f_1

la loi est commutative, la fonction f_1 est l'élément neutre, toute fonction est son propre symétrique, et je vous laisse le soin de vérifier que la loi est associative.

Exercice 6

Soit $(G,*)$ un groupe tel que $\forall x \in G: x * x = e$ où e est l'élément neutre

Montrer que la loi est commutative.

Solution

Pour tous x, y dans G on a :

$x * x = e = y * y = (x * y) * (x * y) = (x * x) * (y * y)$

$(x * y) * (x * y) = (x * x) * (y * y) \overset{assoc}{\Longleftrightarrow} x * (y * x) * y = x * (x * y) * y$

$\Longrightarrow x^{-1} * x * (y * x) * y * y^{-1} = x^{-1} * x * (x * y) * y * y^{-1}$

$\overset{Assoc}{\Longleftrightarrow} (x^{-1} * x) * (y * x) * (y * y^{-1}) = (x^{-1} * x) * (x * y) * (y * y^{-1})$

$\Longrightarrow e * (y * x) * e = e * (x * y) * e$

$\Longrightarrow y * x = x * y$

La loi est donc bien commutative.

Exercice 7

1. Est-ce que $(]0,1],\times)$ est un sous-groupe de $(R^*,\times)$.
2. Est-ce que le cercle $C(O\,;1)$, d'équation $x^2 + y^2 = 1$, muni de l'addition dans R^2 , est un sous-groupe de R^2.
3. Est-ce que $E = \{(x, y) \in R^2 : xy = 0\}$ muni de l'addition est un sous-groupe de R^2
4. Même question pour $(A \cup B, +)$ avec $A = \{(x, y) \in R^2 : y = 0\}$ et $B = \{(x, y) \in R^2 : x = 0\}$.
5. Est-ce que la droite $D_a = \{(x, y) \in R^2 : y = ax\}$ muni de l'addition dans R^2.
6. Meme question pour la droite $D_{a,b} = \{(x, y) \in R^2 : y = ax + b\}$ où $b \neq 0$.
7. Est –ce que le plan $P = \{x, y, z) \in R^3 : ax + by + cz = 0\}$ muni de l'addition dans R^3.
8. Meme question pour le plan $P_c = \{x, y, z) \in R^3 : ax + by + cz = c\}$ où $c \neq 0$.

Solution

1. Le symétrique de $1/2$ est 2 mais 2 n'appartient pas à $]0,1]$, donc ($]0,1]$,$\times$) n'est pas un sous-groupe de (R^*,$\times$).
2. $A = (0;1) \in C(O,1)$, $B = (1;0) \in C(O,1)$ voyons si A+B est dans le cercle C(O,1) :
$(A+B) = (1{,}1)$ et $1^2 + 1^2 = 2 \neq 1$ donc $A + b \notin C(O;1)$ donc l'addition dans C(O,1) n'est pas interne dans C(O ;1) n'est pas un sous-groupe de R^2
3. $1 \times 0 = 0$ et $0 \times 1 = 0$ donc $(1{,}0) \in E$ et $(0{,}1) \in E$ mais $(1{,}0) + (0{,}1) = (1{,}1)$ et
$1 \times 1 \neq 0$ donc $(1{,}0) + (0{,}1) \notin E$ donc l'addition n'est pas interne dans E donc E n'est pas un sous-groupe de R^2.
4. Remarquer que $A \cup B = E$
5. D_a est un sous-groupe de (R^2 ,+) en effet :
   - $(x,y) \in D_a$ et $(x',y') \in D_a \Leftrightarrow y = ax$ et $y' = ax'$
   $(x,y) + (x',y') = (x + x', y + y')$ or $y + y' = a(x + x')$ donc $(x,y) + (x',y') \in D_a$
   - Le symétrique de (x,y) est $(-x,-y)$ pour l'addition dans R^2, donc si $(x,y) \in D_a$ alors $y = ax$ donc $-y = a(-x)$, ce qui signifie que $(-x,-y) \in D_a$

   Ainsi D_a est un sous-groupe de$(R^2,+)$
6. L'élément neutre$(0{,}0)$ de R^2 n'est pas dans $D_{a,b}$ en effet $0 \neq 0 + b$ car $b \neq 0$ donc $D_{a,b}$ n'est pas un sous-groupe de $(R^2,+)$
7. P est un osu-groupe de (R^3,+) en effet :
   - $(x,y,z) \in P$ et $(x',y',z') \in P \Leftrightarrow ax + by + cz = 0$ et $ax' + by' + cz' = 0$
   $(x,y,z) + (x',y',z') = (x + x', y + y', z + z')$ or $a(x + x') + b(y + y') + c(z + z') = 0$
   Donc $(x + x', y + y', z + z') \in P$ autrement dit $(x,y,z) + (x',y',z') \in P$
   - Le symétrique de (x,y,z) est $(-x,-y,-z)$ pour l'addition dans R^2, donc si $(x,y,z) \in P$ alors $ax + by + cz = 0$ donc $a(-x)b(-y) + c(-z) = 0$, ce qui signifie que $(-x,-y,-z) \in P$

   Ainsi P est bien un sous-groupe de $(R^3,+)$.
8. P_c n'est pas un sous-groupe de $(R^3,+)$ en effet vu que $a.0 + b.0 + c.0 = 0 \neq c$, l'élément neutre $(0{,}0{,}0) \notin P_c$

Exercice 8

On considère l'ensemble des fonctions $\mathcal{F}$: $\{f_a: C \to C$ telles que $f(z) = az$ avec $a \in C$ et $|a| = 1\}$.
Montrer que ($\mathcal{F}$,$\circ$) est un groupe commutatif, où $\circ$ représente la composition des fonctions.

Solution

La loi est interne : en effet pour tout z dans C on a
$(f_a \circ f_b)(z) = f_a(f_b(z)) = f_a(bz) = a(bz) = (ab)z$, donc $f_a \circ f_b = f_{ab\,,}$ et si $f_a \in C$ et $f_a \in C$ alors $|a| = 1 = |b|$, et comme $|a| \times |b| = |ab|$, alors $|ab| = 1$, ainsi $f_{ab} \in \mathcal{F}$, c'est-à-dire $f_a \circ f_b \in \mathcal{F}$

La loi est commutative

D'après ce qui vient d'être vu on a $f_a \circ f_b = f_{ab} = f_{ba} = f_b \circ f_a$

La loi admet un élément neutre

$f_a \circ f_b = f_{ab}$ et si on prend b=1 alors $f_a \circ f_1 = f_{a\times 1} = f_a$. La loi est commutative donc f_1 est l'élément neutre, rappelons que $f_1(z) = 1 \times z = z$

La loi est associative

$(f_a \circ f_b) \circ f_c = f_{ab} \circ f_c = f_{(ab)c} = f_{a(bc)} = f_a \circ f_{bc} = f_a \circ (f_b \circ f_c)$

Calcul du symétrique de f_a

Soit f_a, f_b, f_c dans $\mathcal{F}$:

f_b est le symétrique de f_a si et seulement si $(f_a \circ f_b) = (f_b \circ f_a) = f_1$ autrement dit $f_{ab} = f_{ba} = f_1$
On a $f_{ab} = f_1$ lorsque pour tout z dans C, $f_{ab}(z) = f_1(z)$, c'est à dire $(ab)z = z$ d'où $ab = 1$, et comme $|a| = 1 \neq 0$ donc $a \neq 0$ d'où $b = \frac{1}{a}$ de plus $\left|\frac{1}{a}\right| = \frac{1}{|a|} = 1$ donc $f_{\frac{1}{a}} \in \mathcal{F}$. Et comme la loi est commutative alors $(f_a \circ f_{\frac{1}{a}}) = (f_{\frac{1}{a}} \circ f_a) = f_1$ donc tout fonction $f_a\ de\ \mathcal{F}$ admet un symétrique.
Ainsi $(\mathcal{F},\circ)$ est un groupe commutatif.

Exercice 9

Déterminer toutes les bijections $f: \{0,1\} \to \{0,1\}$
Montrer que l'ensemble de ces bijections muni de la composition des fonctions forment un groupe.

Solution

Il y deux bijections : $f_1 = \begin{pmatrix} 0 & \to & 0 \\ 1 & \to & 1 \end{pmatrix}$ et $f_2 = \begin{pmatrix} 0 & \to & 1 \\ 1 & \to & 0 \end{pmatrix}$

$f_1{}^\circ f_1 = f_1,\quad f_1{}^\circ f_2 = f_2 \qquad f_2{}^\circ f_1 = f_2 \qquad f_2{}^\circ f_2 = f_1$

On voit que la loi est une loi de composition interne, elle est commutative. Son élément neutre est f_1. Le symétrique de f_2 est f_2 lui-même. De meme pour f_1.
Reste a vérifier l'associativité :

$(f_1{}^\circ f_1){}^\circ f_2 = f_1{}^\circ f_2 = f_2$ et $f_1{}^\circ(f_1{}^\circ f_2) = f_1{}^\circ f_2 = f_2$ donc $(f_1{}^\circ f_1){}^\circ f_2 = f_1{}^\circ(f_1{}^\circ f_2)$.
$(f_1{}^\circ f_2){}^\circ f_1 = f_2{}^\circ f_1 = f_2$ et $f_1{}^\circ(f_2{}^\circ f_1) = f_1{}^\circ f_2 = f_2$ donc $(f_1{}^\circ f_2){}^\circ f_1 = f_1{}^\circ(f_2{}^\circ f_1)$
$f_2{}^\circ(f_2{}^\circ f_1) = f_2{}^\circ f_2 = f_1$ et $(f_2{}^\circ f_2){}^\circ f_1 = f_1{}^\circ f_1 = f_1$ donc $f_2{}^\circ(f_2{}^\circ f_1) = (f_2{}^\circ f_2){}^\circ f_1$
Etc…

Exercice10

Soit $(G,\star)$ un groupe, e son élément neutre, et a un élément de G.

1. Soit $H = \{x \in G: a * x = x * a\}$. Montrer que $(H,\star)$ est un sous-groupe.
2. On suppose de plus que G est commutatif. Montrer que Test un sous-groupe.
   $T = \{x \in G: \exists n \in N, x^n = e\}$, $x^n = \underbrace{x * x * \ldots * x}_{n\ fois}$

Solution

H est un sous-groupe

- Pour tout x, y dans H on a : $a * x = x * a$ et $a * y = y * a$ d'où
  $a * (x * y) = (a * x) * y = (x * a) * y = x * (a * y) = x * (y * a) = (x * y) * a$
  Donc $x * y \in H$, donc la loi est interne dans H
- Soit x dans , donc $a * x = x * a$, il s'agit de montrer que x^{-1} appartient à H :
  $$\begin{aligned} a * x = x * a &\Longrightarrow x^{-1} * (a * x) * x^{-1} = x^{-1} * (x * a) * x^{-1} \\ &\Longrightarrow (x^{-1} * a) * (x * x^{-1}) = (x^{-1} * x) * (a * x^{-1}) \\ &\Longrightarrow (x^{-1} * a) * e = e * (a * x^{-1}) \\ &\Longrightarrow x^{-1} * a = a * x^{-1} \end{aligned}$$
  Donc $x^{-1} \in H$. Donc H est bien un groupe.

T est un sous-groupe

- Soient x, y dans T, alors il existe n, m dans N tels que : $x^n = e$ et $y^m = e$.
  donc $(x^n)^m = e^m = e$ et $(y^m)^n = e^n = e$ autrment dit $x^{nm} = y^{nm} = e$
  On a $(x * y)^{nm} = \underbrace{(x * y) * (x * y) * \ldots * (x * y)}_{nm\ fois} \overset{*\ commut}{\triangleq} \underbrace{(x * x * \ldots * x)}_{nm\ fois} * \underbrace{(y * y * \ldots * y)}_{nm\ fois}$
  $= x^{nm} * y^{nm} = e * e = e$

Donc $x * y \in T$

- Si $x^n = e$ alors $(x^n)^{-1} = e^{-1} = e$ or $(x^n)^{-1} = (x * x * \dots * x)^{-1} = x^{-1} * \dots * x^{-1} = (x^{-1})^n$
  Donc $x^{-1} \in T$
  T est bien un sous-groupe.

Exercice 11

Montrer que la fonction $exp : (C, +) \to (C^*, \times)$ est un homomorphisme de groupe. Déterminer son image et son noyau.

Solution

$e^{z+z'} = e^z \times e^{z'}$, donc exp est un un homomorphisme de $(C, +)$ dans (C^*, x).

- Ker(exp) :
  L'élément neutre du groupe $(C^*, \times)$ est 1 ; donc $ker(exp) = \{z \in (C, +): e^z = 1\}$
  Posons $z = re^{i\theta}$. On a $e^z = 1 \Leftrightarrow \left(re^{i\theta} = 1\right) \Leftrightarrow \left(re^{i\theta} = 1e^{i0}\right) \Leftrightarrow (r = 1$ et $\theta = 2k\pi)$
  Donc $z = 1e^{2ik\pi}$ d'où $Ker(exp) = \{2ik\pi: k \in Z\}$
- Im(exp) :
  Soit $w = re^{i\theta}$, posons $a = lnr$ et et $z = a + i\theta$ alors $e^z = e^{a+i\theta} = e^a . e^{i\theta} = re^{i\theta} = w$, ce qui veut dire que exp est surjectif et donc $Im(exp) = C^*$

Exercice 12

Déterminer tous les homomorphisme de $(Z, +)$ dans lui-même. Quels sont ceux qui sont injectifs ?surjectif ?

Solution

Tous morphisme f doit vérifier $f(x + y) = f(x) + f(y)$

Si $x = y = 0$ alors $f(0 + 0) = f(0) + f(0)$ autrement dit $f(0) = 2f(o)$ donc $f(0) = 0$.

Posons f(1)=a

$f(1 + 1) = f(1) + f(1)$ c'est-à-dire $f(2) = 2f(1) = 2a$

Par récurrence on peut prouver que pour tout n dans N, $f(n) = an$ (faites-le).

$f(1 + (-1)) = f(1) + f(-1)$ d'où $0 = a + f(-1)$ donc $f(-1) = -a$

$f(-2) = f((-1) + (-1)) = f(-1) + f(-1) = -2a$

et par récurrence on prouve que pour tout n dans N on a $f(-n) = -an$.

Donc pour tout x dans Z on a $f(x) = ax$ avec $a = f(1)$

- Caractérisations des morphismes surjectif
  f est surjectif si et seulement si il pour tout m dans Z existe un entier relatif n tel que $m = f(1). n$ donc $f(1)$ divise tout les entiers relatifs donc $f(1) = 1$ ou $f(1) = -1$, donc $f(n) = n$ ou $f(n) = -n$.
  Cette condition reste suffisante vu que clairement ces deux fonctions sont surjectives.
- Caractérisation des morphismes injectifs
  Si $f(1) \neq 0$ alors f est injective, sinon si $f(1) = 0$ alors f est la fonction nulle et donc f n'est pas injective.