Solution TD N° 3 : STATIQUE

3.1. Une bille homogène A de poids P = 100 N, conserve leur équilibre dans le plan par deux chaînes AB et AC comme montre la figure 3.1. La ligne d'action de la chaîne AB est inclinée avec l'horizontale par un angle de 50^0.
- Déterminer les tensions dans les deux chaînes AB et AC.

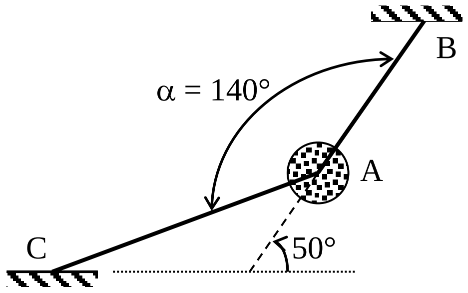


Figure 3.1

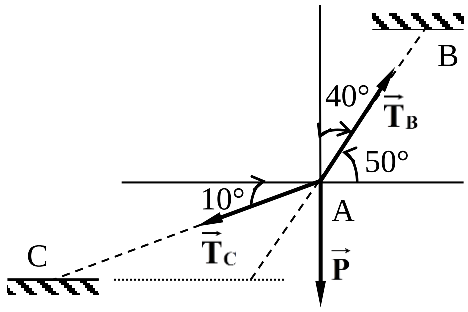


Figure 3.1b

Solution:
On supprime les deux chaînes AB et AC, ensuite, on les remplace par les tensions correspondantes $\vec{T}_B$ et $\vec{T}_C$ respectivement (Figure 3.1b). On représente les forces agissant sur la bille de poids $\vec{P}$ dirigée verticalement vers le bat.

1ere Méthode : Condition d'équilibre analytique

Pour la détermination des deux tensions $\vec{T}_B$ et $\vec{T}_C$, on écrit le torseur des forces concourantes au centre A de la bille (Figure 3.1b). La condition d'équilibre statique du ballon est le torseur nul au centre A. La projection des éléments de ce torseur nul, s'écrit :

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{ix} = \vec{0}, \quad \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{iy} = \vec{0}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{ix} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad T_B \cos 50° - T_C \cos 10° = 0 \qquad (1)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{iy} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad T_B \sin 50° - T_C \sin 10° - P = 0 \qquad (2)$$

On trouve :

$T_C = P = 100$ N
$T_B = 1{,}53P = 153$ N

2ieme méthode : Méthode géométrique

La condition d'équilibre géométrique : on emploi la règle du polygone des forces fermé.
On construit le polygone des forces agissant sur la bille (Figure 3.1c). On trace d'abord la force connue $\vec{P}$ dirigée vers le bas à partir du point A_1 et d'extrémité A_2. Du point A_2, on

trace la force $\vec{T}_B$ dirigée vers le haut d'extrémité A_3, avec un angle de 50° avec l'horizontale. Enfin, on ferme le polygone par la tension $\vec{T}_C$ dirigée en bas vers la gauche avec un angle de 10° avec l'horizontale du point A_3 vers le point A_1 (Figure 3.1c).

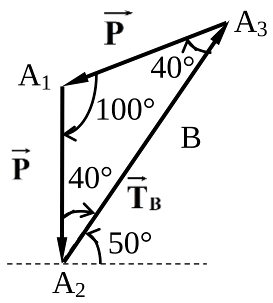


Figure 3.1c

Appliquons la loi de sinus le triangle $A_1A_2A_3$ (Figure 3.1c),

$$\frac{\mathbf{T_B}}{\sin 100°} = \frac{\mathbf{T_C}}{\sin 40°} = \frac{\mathbf{P}}{\sin 40°}$$

On obtient :

$T_C = P = 100$ N
$T_B = 1{,}53P = 153$ N

3.2 Le fardeau de poids $\vec{\mathbf{Q}}$ est maintenu en équilibre au point C par le système représenté dans la Figure 3.2a. Déterminer les réactions dans les barres CA de longueur a, CB de longueur b et la tension de la chaîne CD de longueur d. Les deux barres sont perpendiculaires entre elles et sont contenues dans un plan horizontal. (A.N : AC = a = 0.6m, BC = b = 0.8m, DC = d = 1.41m et **Q** = 100 KN.

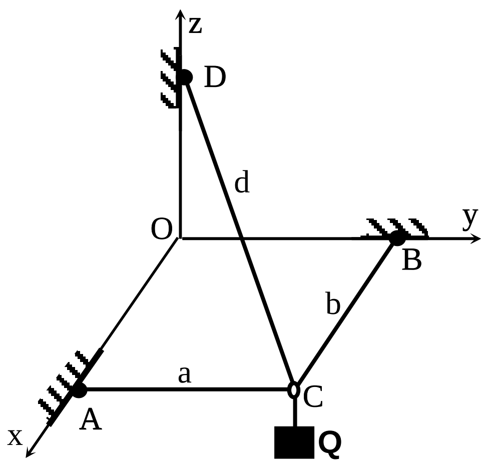


Figure 3.2a

Solution :

Pour la représentation des deux réactions dans les barres CA et CB ainsi que la tension dans le câble CD, on supprime les liaisons et on les remplace par les réactions qui leurs correspondent

(Figure 3.2b). La tension $\vec{T}_D$ fait un angle β avec la verticale et sa projection sur le plan l'horizontale (OACB), $\mathbf{T_D \sin\beta}$ fait un angle α avec AC (AC//Oy) (Figure 3.2c).

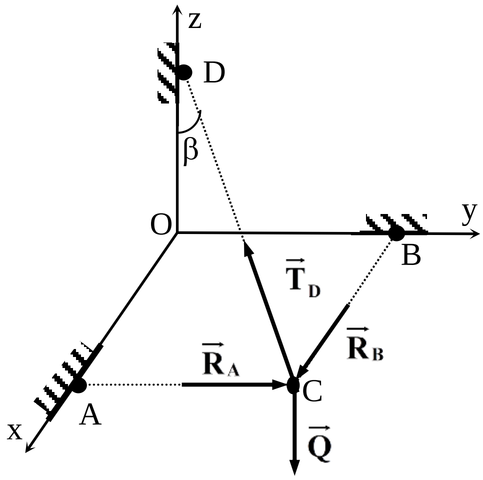


Figure 3.2b

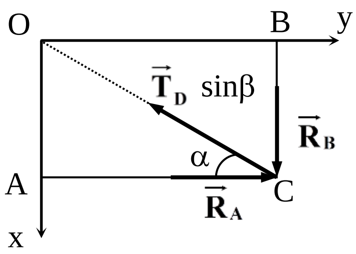


Figure 3.2c

Nous avons :

$$\sin\beta = \frac{OC}{CD} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{d}, \quad \cos\beta = \frac{OD}{CD} = \frac{\sqrt{d^2-(a^2+b^2)}}{d}$$

Et

$$\sin\alpha = \frac{BC}{OC} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \cos\alpha = \frac{AC}{OC} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

A fin de calculer les réactions R_A et R_B et la tension T_D, on écrit la projection des éléments du torseur des forces nuls au nœud C, soit :

$$\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_{ix} = \vec{0}, \quad \sum_{i=1}^{n}\vec{F}_{iy} = \vec{0}, \quad \sum_{i=1}^{n}\vec{F}_{iz} = \vec{0}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_{ix} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow +R_B - T_D \sin\beta\sin\alpha = 0 \qquad (1)$$

$$\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_{iy} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow +R_A - T_D \sin\beta\cos\alpha = 0 \qquad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_{iz} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow -Q - T_D \cos\beta = 0 \qquad (3)$$

La résolution de ces trois équations, donne :

$T_D = \frac{Q}{\cos\beta} = \frac{d}{OD}Q$	$R_A = +\frac{a}{OD}Q$	$R_B = +\frac{b}{OD}Q$
T_D = 1.41Q = 141 KN	**R_A = 0.6Q = 60 KN**	**R_B = 0.8Q = 80 KN**

3.3 Déterminer les réactions des appuis de la poutre représentée dans la Figure 3.3a. Le poids propre de la poutre est supposé négligeable.

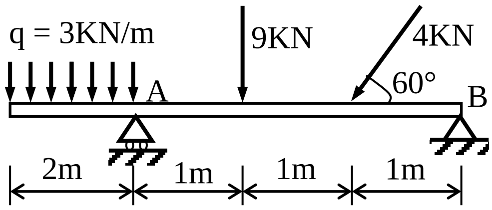
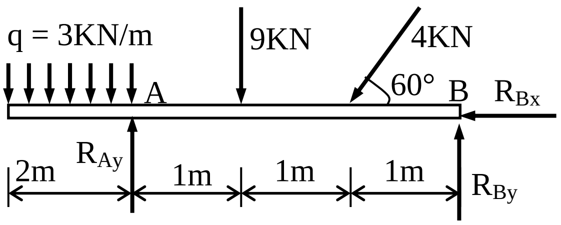


Figure 3.3a

Solution :

On supprime les liaisons dans la Figure 3.3a et on les remplace par les réactions qui leur correspondent dans la Figure 3.3b. D'après l'axiome des liaisons, la poutre devient libre sous l'action du système de forces en plan.



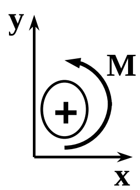


Figure 3.3b

Pour la détermination des réactions R_{Ay}, R_{Bx} et R_{By}, on écrit la projection des éléments du torseur des forces extérieurs en A :

$$\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_{ix}=\vec{0},\quad \sum_{i=1}^{n}\vec{F}_{iy}=\vec{0},\quad \sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{M}_{A}(\vec{F}_i)=\vec{0}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_{ix}=\vec{0} \qquad \Leftrightarrow \; -R_{Bx}-4\cos 60° = 0 \qquad (1)$$

$$\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_{iy}=\vec{0} \qquad \Leftrightarrow -3.2+R_{Ay}-9-4\sin 60° + R_{By} = 0 \qquad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{M}_{A}(\vec{F}_i)=\vec{0} \qquad \Leftrightarrow 3.2x1 - 9x1 - 4\sin 60° x2 + R_{By}x3 = 0 \qquad (3)$$

La solution des équations d'équilibres (1), (2) et (3) donne :

$$R_{Bx} = 2\ \mathrm{KN},\quad R_{By} = 3.31\ \mathrm{KN},\quad R_{Ay} = 15.15\ \mathrm{KN}$$

3.4 Déterminer les réactions de l'encastrement A du portique (Figure 3.4a). Le poids propre du portique est négligeable et les données nécessaires sont illustrées sur la figure 3.4a.

- Définir le corps solide représenté sur la figure 3.4a et ces liaisons ;
- Définir le système des forces appliquées sur le corps solide ;
- Illustrer les réactions des liaisons sur la figure
- Ecrire la condition d'équilibre statique du corps solide

Déterminer les réactions dans les liaisons.

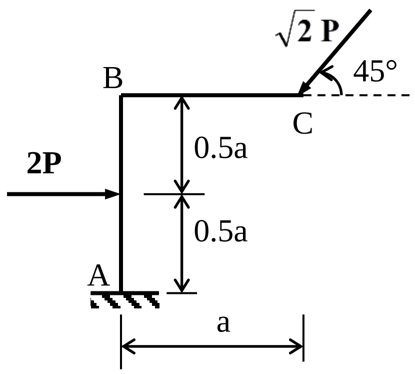


Figure 3.4a

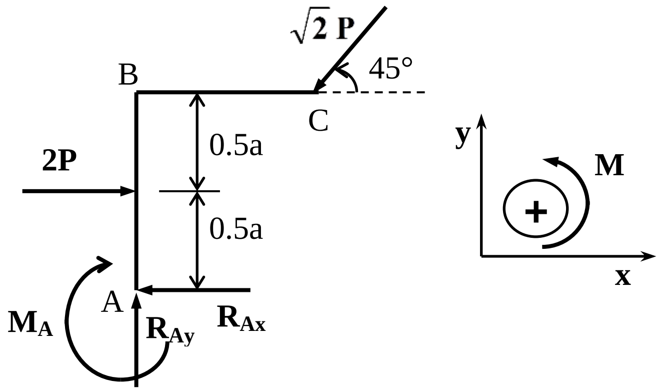


Figure 3.4b

Solution:

- Le corps solide est le portique ABC,
- La liaison est : l'encastrement en A,
- Le système de forces est plan.
- On supprime les liaisons dans la Figure 3.4a, et on les remplace par les réactions qui leurs correspondent dans la Figure 3.4b. D'après l'axiome des liaisons, le portique ABC devient libre sous l'action du système de forces en plan.

Pour la détermination des réactions de l'encastrement A du portique (Figure 3.4b) : R_{Ay}, R_{Ax} et M_A, on écrit la condition d'équilibre statique du corps solide qui est le torseur des forces extérieures en A nul, où bien la projection de ces éléments sur les axes est nulle:

La projection des éléments du torseur nul des forces extérieures dans le point A, s'écrit :

$$\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_{ix}=\vec{0},\quad \sum_{i=1}^{n}\vec{F}_{iy}=\vec{0},\quad \sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{M}_A(\vec{F}_i)=\vec{0}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_{ix}=\vec{0} \Leftrightarrow -R_{Ax}+2P-\sqrt{2}P\cos 45° = 0 \qquad (1)$$

$$\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_{iy}=\vec{0} \Leftrightarrow R_{Ay}-\sqrt{2}P\sin 45° = 0 \qquad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{M}_A(\vec{F}_i)=\vec{0} \Leftrightarrow -M_A-2P\,x\,0.5a+\sqrt{2}P\cos 45°\,xa-\sqrt{2}P\sin 45°\,xa=0 \qquad (3)$$

De l'équation (1), on obtient : $\mathbf{R_{Ax} = P}$

Et de l'équation (2), : $\mathbf{R_{Ay} = P}$

De l'équation (3) : $\mathbf{M_A = -Pa}$

3.5 Soit l'arc AB en béton armé, de rayon R, représenté dans la Figure 3.5. Le poids propre de l'arc est négligeable, le reste des données nécessaires est représenté la Figure 3.5.

1. Définir le corps solide représenté sur la Figure 3.5 et ces liaisons ;
2. Définir le système des forces appliquées sur le corps solide ;
3. Illustrer les réactions des liaisons sur la Figure
4. Écrire la condition d'équilibre statique du corps solide
5. Déterminer les réactions dans les liaisons.

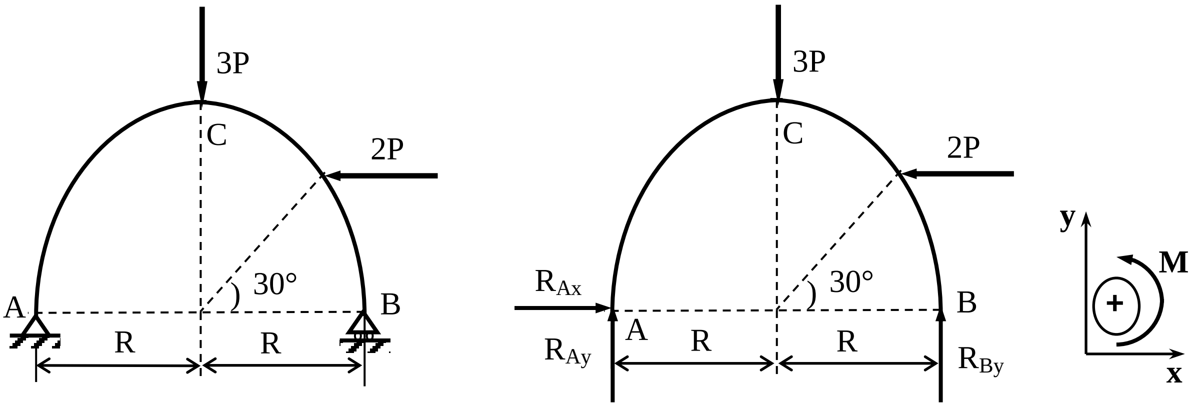


Figure 3.5a **Figure 3.5b**

Solution:

- Le corps solide est l'arc AB en béton armé,
- Les liaisons sont : l'appui double en A et l'appui simple en B,
- Le système de forces est plan.
- On supprime les liaisons dans la Figure 3.5a, et on les remplace par les réactions qui leurs correspondent dans la Figure 3.5b. D'après l'axiome des liaisons, le portique AB devient libre sous l'action du système de forces en plan.
- Pour la détermination des réactions R_{Ay}, R_{Ax} et R_{By}, on écrit la condition d'équilibre statique du corps solide qui est le torseur des forces extérieures en A nul, où bien la projection de ces éléments sur les axes est nulle:

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{ix} = \vec{0}, \quad \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{iy} = \vec{0}, \quad \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_A(\vec{F}_i) = \vec{0}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{ix} = \vec{0} \qquad \Leftrightarrow \; R_{Ax} - 2P = 0 \qquad \textbf{(1)}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{iy} = \vec{0} \qquad \Leftrightarrow R_{Ay} - 3P + R_{By} = 0 \qquad \textbf{(2)}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{M}_A(\vec{F}_i) = \vec{0} \qquad \Leftrightarrow -3P\,x\,R + 2PxR\sin 30° + R_{By}x2R = 0 \qquad \textbf{(3)}$$

La solution des équations d'équilibres (1), (2) et (3) donne :

$$\mathbf{R_{Ax} = 2P, \quad R_{Ay} = 2P, \quad R_{By} = P}$$

3.6 Soit le portique AB en béton armé représenté dans la Figure 3.6. Le poids propre du portique est négligeable, le reste des données nécessaires est représenté la figure 3.6a.

- Définir le corps solide représenté sur la figure 3.6a et ces liaisons ;
- Définir la nature des différentes forces appliquées sur le corps solide ;
- Illustrer les réactions des liaisons sur la figure
- Ecrire la condition d'équilibre statique du corps solide
- Déterminer les réactions dans les liaisons (P = q*l*).

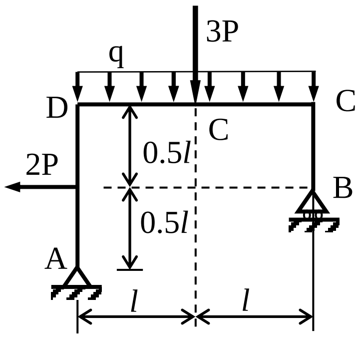
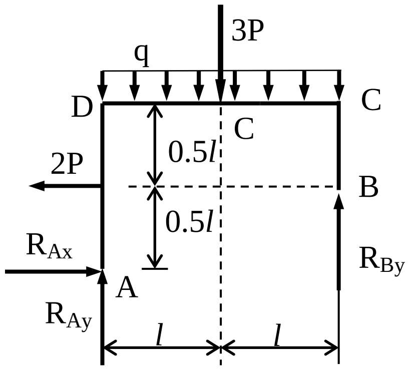


Figure 3.5a



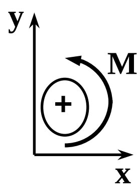


Figure 3.5b

Solution:

- Le corps solide est le portique AB,
- Les liaisons sont : l'appui double en A et l'appui simple en B,
- Le système de forces est plan.
- On supprime les liaisons dans la Figure 3.6a, et on les remplace par les réactions qui leurs correspondent dans la Figure 3.6b. D'après l'axiome des liaisons, le portique AB devient libre sous l'action du système de forces en plan.
- Pour la détermination des réactions R_{Ay}, R_{Ax} et R_{By}, on écrit la condition d'équilibre statique du corps solide qui est le torseur des forces extérieures en A nul, où bien la projection de ces éléments sur les axes est nulle:

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{ix} = \vec{0}, \quad \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{iy} = \vec{0}, \quad \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{M}_A(\vec{F}_i) = \vec{0}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{ix} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{R_{Ax}} - 2\mathbf{P} = 0 \qquad \mathbf{(1)}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{iy} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{R_{Ay}} - \mathbf{q.}2\mathbf{l} - 3\mathbf{P} + \mathbf{R_{By}} = 0 \qquad \mathbf{(2)}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{M}_A(\vec{F}_i) = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad 2\mathbf{P}\mathrm{x}0{,}5\mathbf{l} - \mathbf{q.}2\mathbf{l}\mathrm{x}\mathbf{l} - 3\mathbf{P}\mathrm{x}\mathbf{l} + \mathbf{R_{By}}\mathrm{x}2\mathbf{l} = 0 \qquad \mathbf{(3)}$$

La solution des équations d'équilibres (1), (2) et (3) donne :

$$\mathbf{R_{Ax} = 2P, \quad R_{Ay} = 3P, \quad R_{By} = 2P}$$

- Déterminer les réactions dans les liaisons représentées dans la figure 3.7a. Toutes les données nécessaires sont représentées sur la figure 3.7a.

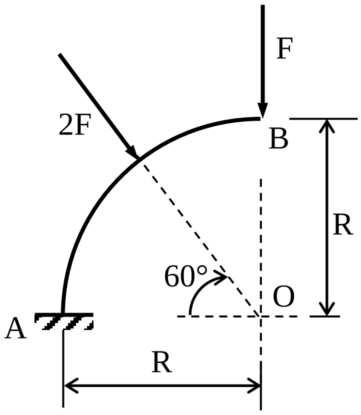


Figure 3.7a

Solution :

On supprime l'encastrement dans la Figure 3.7a et on le remplace par les réactions qui leur correspondent dans la Figure 3.7b. D'après l'axiome des liaisons, l'arc AB devient libre sous l'action du système de forces en plan.

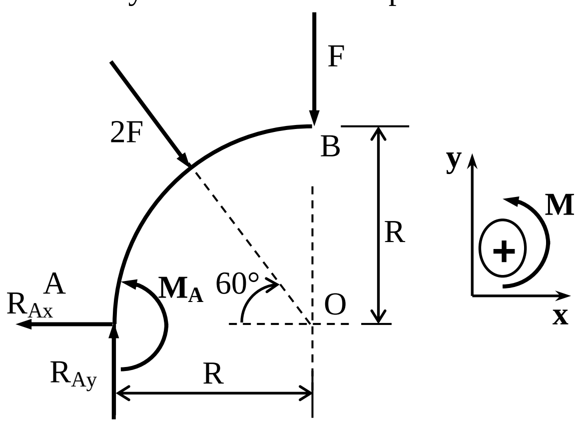


Figure 3.7b

Pour la détermination des réactions R_{Ay}, R_{Ax} et le moment d'encastrement M_A, on écrit la projection des éléments du torseur des forces extérieurs en A:

$$\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_{ix}=\vec{0},\quad \sum_{i=1}^{n}\vec{F}_{iy}=\vec{0},\quad \sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{M}_{A}(\vec{F}_i)=\vec{0}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_{ix}=\vec{0} \quad \Leftrightarrow \; -R_{Ax}+F\cos 60° = 0 \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_{iy}=\vec{0} \quad \Leftrightarrow \; +R_{Ay}-F\sin 60°-F = 0 \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{M}_{O}(\vec{F}_i)=\vec{0} \quad \Leftrightarrow \; M_A - 1.87FxR = 0 \quad (3)$$

La solution des équations d'équilibres (1), (2) et (3) donne :

R_{Ax} = 0.5 F, R_{Ay} = 1.87F , M_A = 1.87 FR