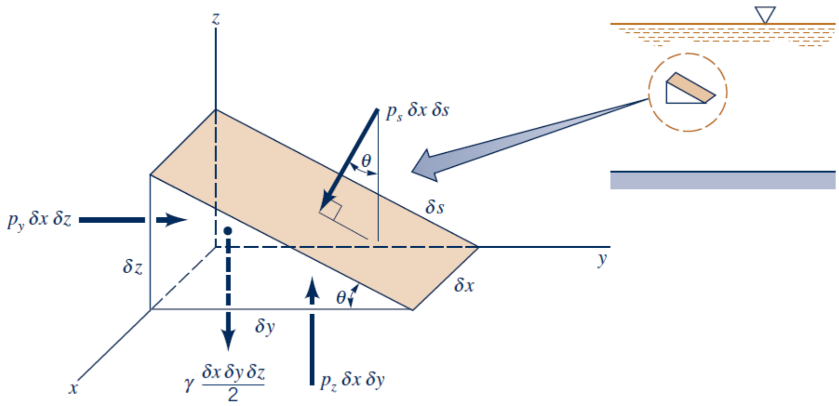
Chapitre II : Statique des fluides

1) Introduction :

On va considérer le cas des fluides au repos ou bien en déplacement sans mouvement relatif entre les particules adjacentes. Dans les deux cas il n'y a pas de forces de frottement dans le fluide, toutes les forces qui se développent sur les surfaces sont dues à la pression. Le but est donc de connaitre la pression et sa variation à travers le fluide et son effet sur les surfaces submergées. L'absence de frottement simplifie l'analyse et permet d'obtenir des solutions relativement simples à quelques problèmes d'intérêt pratique.

2) Pression en un point :

Le terme pression est utilisé pour indiquer la force normale par unité de surface en un point et qui agit sur un plan dans la masse du fluide en question. Nous allons voir comment varie la pression dans un point selon l'orientation des plans passants par ce point. Pour cela prenons la portion quelconque d'un fluide montrée par la figure 1.



Les seules forces qui agissent sur le volume sont celles de pression et le poids du fluide. Pour simplifier l'analyse on ne va pas représenter la direction x. La deuxième équation de Newton ($\sum \vec{F} = m\vec{a}$) s'écrit dans les directions y et z :

$$\sum F_y = P_y\delta x\delta z - P_s\delta x\delta s\ sin\theta = \rho\frac{\delta x\delta y\delta z}{2}a_y \qquad 2.1$$

$$\sum F_z = P_z\delta x\delta y - P_s\delta x\delta s\ cos\theta - \gamma\frac{\delta x\delta y\delta z}{2} = \rho\frac{\delta x\delta y\delta z}{2}a_z \qquad 2.2$$

De la géométrie on a : $\delta y = \delta s\ cos\theta \quad \delta z = \delta s\ sin\theta$

Le remplacement donne :

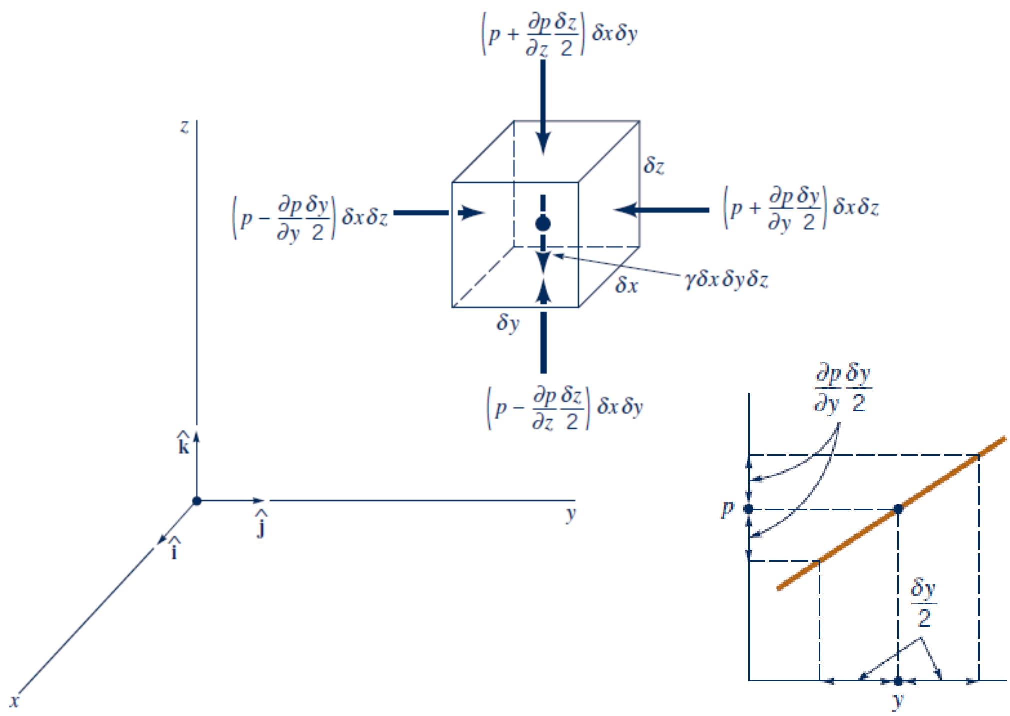
$$P_y - P_s = \rho \frac{\delta y}{2} a_y \tag{2.3}$$

$$P_z - P_s = (\gamma + \rho a_z)\frac{\delta z}{2} \tag{2.4}$$

Puisque nous nous intéressons dans ce qui se passe dans un point, δx, δy et δz vont tendre vers zero et on obtient : $P_y = P_s$ et $P_z = P_s$ or $P_s = P_z = P_y$ quel que soit l'angle θ. Cela prouve que la pression dans un point d'un fluide en stagnation est indépendante de la direction, c'est la loi de Blaise Pascal.

3) <u>Loi fondamentale de la statique (Equation du champ de pression)</u>

On a déjà vu comment varie a pression dans un point selon la direction, maintenant nous allons voir comment varie la pression dans un fluide au repos dans lequel il n'y a pas de forces de frottement. Considérons un élément de volume fluide au repos de forme parallélépipédique, de volume *δV=δxδyδz* dans le repère *(O,x,y,z)*, figure 2.



Deux types de forces s'appliquent sur l'élément de volume :

- **Forces de volume** : Le poids (engendré par un champ dans ce cas de la gravité), $\delta\vec{W}$.
- **Forces de surface** : Les forces engendrée par la pression, $\delta\vec{F}$.

Les forces de volume représentées par le poids du volume de fluide s'écrivent :

$$\delta\vec{W} = \delta m\vec{g} = \rho\delta V\vec{g} = -\rho g\delta V\vec{k} \qquad 2.5$$

Puisque la force du poids est dirigée dans le sens négatif de z.

Les forces de surface peuvent être décomposées dans les trois directions x,y et z comme suit :

$$\delta\vec{F} = \delta F_x\vec{\imath} + \delta F_y\vec{\jmath} + \delta F_z\vec{k} \qquad 2.6$$

Ce sont des forces normales aux surfaces, la somme des forces dans la direction y par exemple et qui agit sur la surface $\delta x\delta z$ donne : $\delta F_y = \left(p - \frac{\partial p}{\partial y}\frac{\delta y}{2}\right)\delta x\delta z - \left(p + \frac{\partial p}{\partial y}\frac{\delta y}{2}\right)\delta x\delta z = -\frac{\partial p}{\partial y}\delta x\delta y\delta z$, et par la même : $\delta F_x = -\frac{\partial p}{\partial x}\delta x\delta y\delta z$ et $\delta F_z = -\frac{\partial p}{\partial z}\delta x\delta y\delta z$.

D'où on obtient la force dans les trois directions :

$$\delta\vec{F} = -\left(\frac{\partial p}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial p}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial p}{\partial z}\vec{k}\right)\delta x\delta y\delta z = -\left(\frac{\partial p}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial p}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial p}{\partial z}\vec{k}\right)\delta V \qquad 2.7$$

On introduit la notation gradient $\vec{\nabla}(\ \ ) = \frac{\partial(\ \ )}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial(\ \ )}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial(\ \ )}{\partial z}\vec{k}$, alors $\delta\vec{F} = -\vec{\nabla}p\delta V$ 2.8

La deuxième loi de Newton pour ce volume de contrôle s'écrit $\sum\delta\vec{F} = \delta m\vec{a}$ donc :

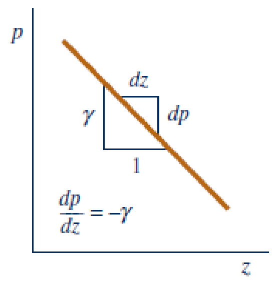
$\delta\vec{W} + \delta\vec{F} = \delta m\vec{a} \leftrightarrow -\rho g\delta V\vec{k} - \vec{\nabla}p\delta V = \rho\delta V\vec{a}$ ce qui donne $-\gamma\vec{k} - \vec{\nabla}p = \rho\vec{a}$ 2.9

puisque $\gamma = \rho g$. Cette équation est valable pour un fluide ou les forces de frottement sont négligeable. Dans notre cas le fluide est aussi au repos, cela veut dire que l'accélération est nulle $\vec{a} = \vec{0}$. On aura $\gamma\vec{k} + \vec{\nabla}p = \vec{0}$ sous forme de composantes $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial p}{\partial y} = 0$ et $\frac{\partial p}{\partial z} = -\gamma$ 2.10

ces équations montrent que la pression ne varie pas dans les plans horizontaux *P≠P(x) et p(y)*.

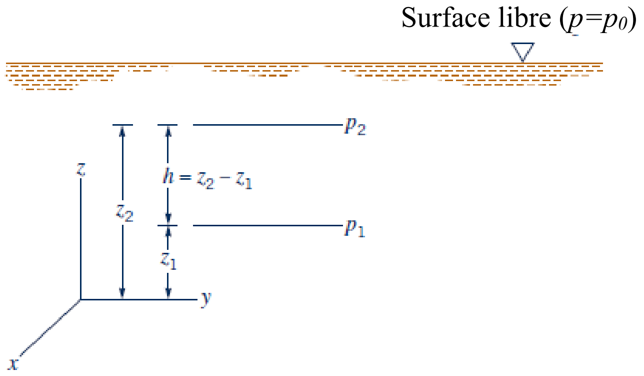
Donc l'équation est : $\frac{dp}{dz} = -\gamma$ 2.11

C'est l'équation à résoudre pour connaitre la pression en tout point du fluide au repos. Pour les liquides ou gaz au repos, le gradient de pression dans la direction verticale à n'importe quel point du fluide est négatif (figure 3), il dépend seulement du poids spécifique du fluide en ce point.



4) **Application aux fluides incompressibles :**

Dans ce cas ***ρ=cste*** partout, on peut aussi considérer g comme constante et donc $\gamma = \rho g = cste$, par conséquent : $\frac{dp}{dz} = -\gamma = cte$. Prenons un fluide (figure 4) et appliquant l'équation trouvée.

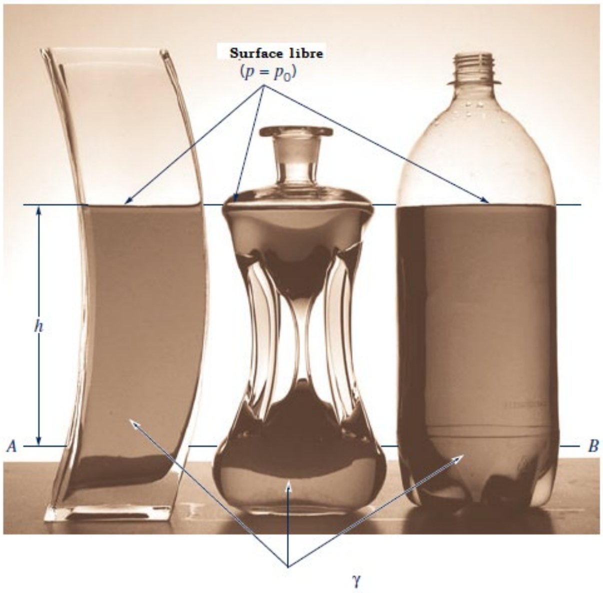


Pour calculer P procédons par intégration

$$\int_{p_1}^{p_2} dp = -\gamma \int_{z_1}^{z_2} dz \quad \text{d'où} \quad p_2 - p_1 = -\gamma(z_2 - z_1) \text{ ou bien } p_1 - p_2 = \gamma(z_2 - z_1) \qquad 2.12$$

Ou p_1 et p_2 sont les pressions aux élévatons z_1 et z_2, on peut aussi écrire l'équation dans une forme compacte $p_1 - p_2 = \gamma h$ ou $p_1 = p_2 + \gamma h$ avec h la distance $z_2 - z_1$.

Cette équation montre que la distribution de pression augmente avec la profondeur h, elle est dite distribution hydrostatique. On remarque aussi que la différence de pression peut être spécifiée par $h = \frac{p_1 - p_2}{\gamma}$ et on la note par « élévation ». Elle est interprétée comme la hauteur de fluide nécessaire pour obtenir la differnce de pression $p_1 - p_2$. Losrsque on travaille avec les liquides ou il y a toujours une surface libre (figure 4) on note l pression à cette surface par p_0, cela implique que la pression à n'importe quelle profondeur h de cette surface est $p = p_0 + \gamma h$. Cette équation montre aussi que la pression ne dépend pas du volume ou la forme du réservoir ou récipient, elle ne dépend que de h, ce qui implique que la pression est constante sur la ligne horizontale AB (figure 5).

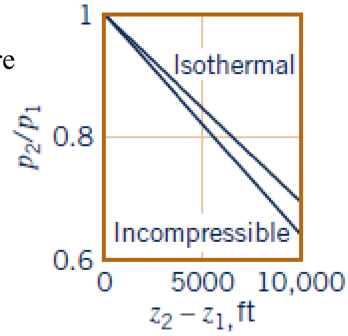


5) Application aux fluides compressibles :

Généralement, c'est les gaz qui sont compressibles puisque leurs masses volumiques varient avec la pression et la température, on prend le cas d'un gaz parfait ou $\rho = \frac{P}{RT}$

d'autre part $\frac{dp}{dz} = -\gamma$ d'où $\frac{dp}{dz} = -\frac{Pg}{RT}$ séparons les variables, supposons que g er R sont constantes et intégrons $\int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{p} = \ln\frac{p_2}{p_1} = -\frac{g}{R}\int_{z_1}^{z_2} \frac{dz}{T}$ si on suppose que la température ne varie pas en fonction de la hauteur z (isotherme), on aura

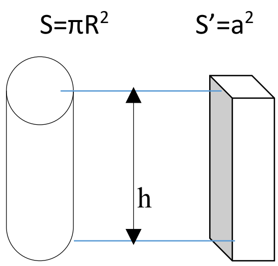
$$p_2 = p_1 exp\left[-\frac{g(z_2 - z_1)}{RT_0}\right]$$



6) Mesure de la pression :

C'est un scalaire très important dans la MDF, la pression en un point d'un fluide est la force en ce point divisée par la surface (contrainte). Elle est toujours normale à la surface en question, on écrit :

$$P = \frac{F}{S} \equiv \left[\frac{N}{m^2}\right] \equiv Pa \quad \text{pascal.}$$



Soient deux réservoirs de hauteur h et de sections différentes S et S' contenant les mêmes fluides.

La force à la base : *F=mg=ρVg=ρShg, F'=m'g=ρV'g=ρS'hg*

La pression à la base : P=F/S= *ρhg* et P'=F/S'= *ρhg*

On remarque qu'à la base on a la même pression pour la même hauteur.

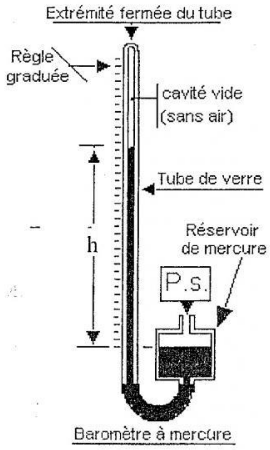
Généralement, on utilise trois types de pressions, la pression absolue, effective ou relative et atmosphérique. Celle absolue est la somme des deux autres :

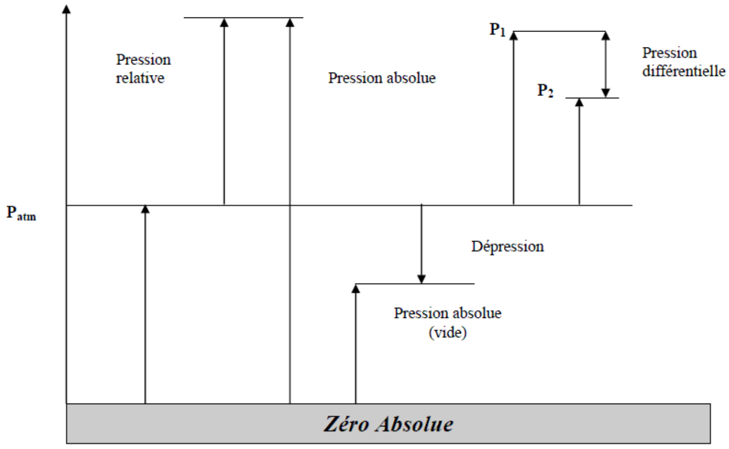
$$P_{abs} = P_{atm} + P_{eff} \qquad 2.13$$

La pression est dite :

- <u>Pression absolue</u>, si elle est mesurée par rapport au vide absolu (pression nulle), elle est toujours positive.

- <u>Pression effective</u> (manométrique), si elle est mesurée par rapport à la pression atmosphérique locale, elle peut être positive ou négative (au-dessus ou au-dessous de celle atmosphérique). La pression atmosphérique est généralement mesurée par un baromètre à mercure.

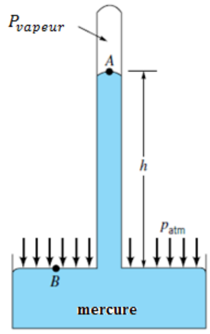




Les différents types de pression

7.1 Mesure de la pression atmosphérique :

La pression atmosphérique est donnée par un baromètre, de nos jours il existe plusieurs types. Le plus simple c'est le baromètre à mercure, ou la pression atmosphérique est égale à la pression de la hauteur de la colonne de mercure :



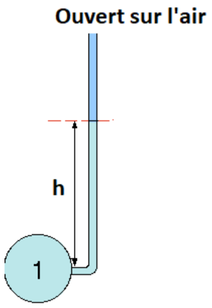
$$P_B = \rho g h + P_A \rightarrow P_{atm} = \rho g h + P_{vapeur} \approx \rho g h \qquad 2.14$$

7.2 Mesure de la pression effective et absolue

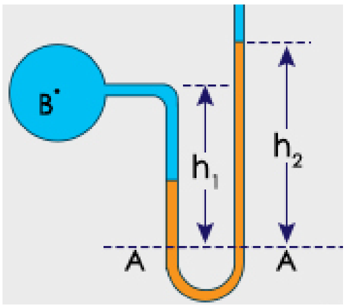
La pression absolue est la somme de la pression atmosphérique et effective, puisque celle atmosphérique est donnée directement par un baromètre, il reste à mesurer la pression effective, pour cela on utilise des <u>manomètres</u> formés par des tubes <u>piézométriques.</u>

<u>Définition de la manométrie</u> : C'est une technique standard pour la mesure des pressions, elle utilise des colonnes de liquides dans des tubes piézométriques verticaux ou inclinés.

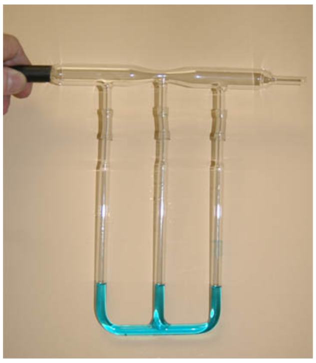
<u>Définition du tube piézométrique</u> : C'est un tube vertical ouvert, il est connecté à un récipient ou on veut mesurer la pression.



(a)



(b)



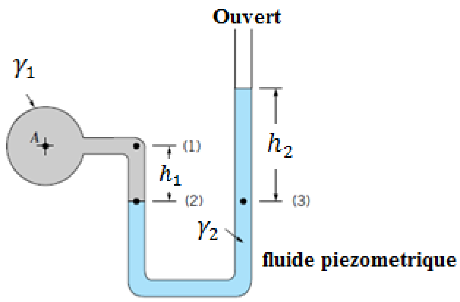
Manometres formé par des tube piezometriques (a) simple et (b) en U.

Pour le cas d'un manomètre formé par un tube piézométrique vertical (Fig.(a)) ouvert *P=Patm* en haut,

On a : $P_{abs1} = P_{atm} + \rho g h$ et la pression effective est : $P_{eff} = P_{abs1} - P_{atm} = \rho g h$ on la note par P, elle est dite aussi pression piézométrique : $P_{eff} = P = \rho g h$ 2.15

Manomètre en U : C'est un tube en U qui utilise un fluide dit « manométrique ou piézométrique ».

L'équation s'écrit :



$P_{absA} + \rho_1 g h_1 - \rho_2 g h_2 = P_{atm}$

On a $P_{absA} = P_A + P_{atm}$ ce qui donne :

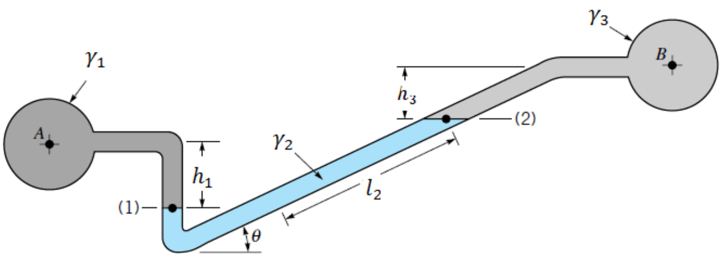
$P_A + \rho_1 g h_1 - \rho_2 g h_2 = 0$

En général l'équation d'un manomètre en U s'écrit :

$P_A + \sum_{descendant} \rho_i g h_i - \sum_{montant} \rho_i g h_i = P_B$ 2.15

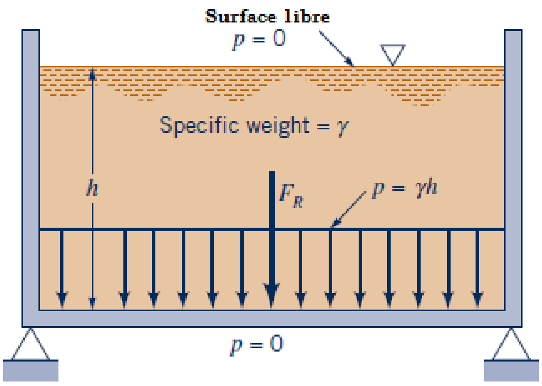
Manomètre incliné : Pour amplifier la plage de lecture dans le cas des faibles pressions, on incline les manomètres. L'équation pour cet exemple s'écrit :

$$P_A + \gamma_1 h_1 - \gamma_2 l_2 sin\theta + \gamma_3 h_3 = P_B$$
$$P_A - P_B = \gamma_2 l_2 sin\theta + \gamma_3 h_3 - \gamma_1 h_1$$

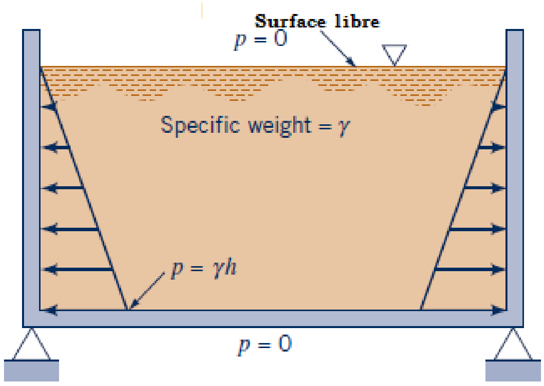


7) **Forces hydrostatiques sur une surface plane:**

Lorsqu'une surface est submergée dans un fluide, des forces se développent sur la surface due à la pression du fluide. Le calcul de ces forces est important dans la conception des réservoirs, bateaux, barrages et d'autres structures hydrauliques. On sait que lorsque les fluides sont au repos, les forces sont perpendiculaires aux surfaces car les forces de frottement sont nulles. Aussi, la pression varie linéairement en fonction de la profondeur dans les fluides incompressibles. Au fond du réservoir (figure 5 (a)) la pression est $p = p_0 + \gamma h$ si la pression effective ou manométrique $p_0 = 0$ à la surface libre, ona $p = \gamma h$. Pour calculer la force résultatnte au fond du réservoir F_R, qui agit au centre de gravité, il suffit de multiplier p par la surface du fond $F_R = pS = \gamma hS$. Dans le cas de la figure (b), la distribution d e la pression n'est pas uniforme, la calcul e la force fera l'objet de la partie suivante.



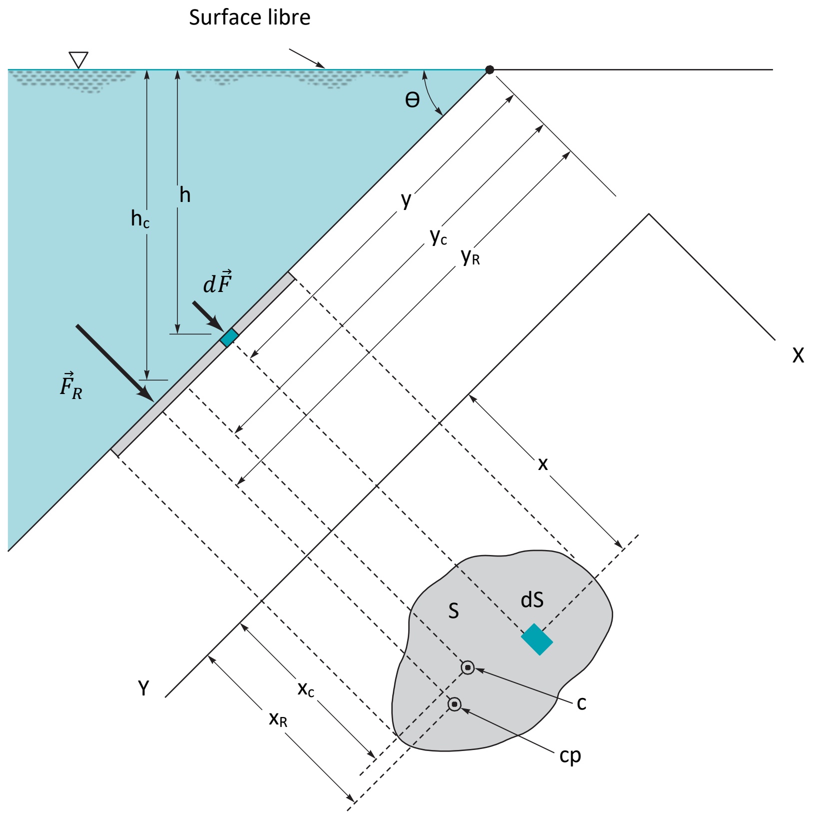
(a) Pression en bas du réservoir



(b) Pression sur le côté du réservoi

8) Détermination de la force hydrostatique et sa position :

Soit une surface S inclinée avec un angle ϴ soumise à la pression d'un liquide de masse volumique ρ, la pression ambiante étant P_{atm} partout. Le but est de calculer la valeur de la force résultante F_R ainsi que les coordonnés x_R et y_R de son point d'application. Prenons un repère *X-Y* tel que l'axe *Y* soit parallèle à la surface S et perpendiculaire à la force F_R.



a) Calcul de la valeur de la force F_R:

La force résultante est $F_R = \int_S dF = \int_S \rho g h dS$ avec $h = y sin\theta$

D'où $$F_R = \int_S \rho g y sin\theta dS = \rho g sin\theta \int_S y dS$$

L'intégrale $\int_S ydS$ représente le moment du premier ordre de la surface S (barycentre) calculé par rapport à l'axe *x*. On écrit $\int_S yds = y_c S$ avec y_c la coordonnée *y* du barycentre de la surface *S* par rapport à l'axe x et qui passe par *O*, on a donc :

$$F_R = \rho g sin\theta y_c S \quad 2.16$$

Puisque $h_c = sin\theta y_c$ $$F_R = \rho g h_c S \quad 2.17$$

L'intensité de la force du fluide est égale à la pression agissante au barycentre de la surface multipliée par la surface totale.

b) <u>Calcul de la position de la force F_R:</u>

Commençant par la direction *Y*, la position de F_R est obtenue par le calcul du moment :

$$F_R\, y_R = \int_S \; ydF = \int_S \; \rho g y^2 sin\theta dS \;\text{ car } dF = \rho g y sin\theta dS \qquad 2.18$$

En remplaçant F_R par sa valeur $F_R = \rho g sin\theta y_c S$ cela donne $\rho g sin\theta y_c S y_R = \int_S \; \rho g y^2 sin\theta dS$

on obtient $$y_R = \frac{\int_S \; y^2 dS}{y_c S} \qquad 2.19$$

L'intégrale $\int_S \; y^2 dS$ est dite moment quadratique de la surface S (moment d'inertie) par rapport à l'axe OX, elle est notée I_x, on a donc $\boldsymbol{y_R = \frac{I_x}{y_c S}}$

Il est plus commode d'écrire le moment quadratique I_x par rapport à un axe qui passe par le barycentre de la surface *S* noté par I_{xc}. La position y_R est calculée en fonction de I_{xc} en utilisant la relation $I_x = I_{xc} + y_c^2 S$, cela donne :

$$\boldsymbol{y_R = y_c + \frac{I_{xc}}{y_c S}} \qquad 2.20$$

Sauf pour les surfaces horizontales, on voit que la force résultante ne passe pas par le barycentre mais au-dessous car $\frac{I_{xc}}{y_c S} > 0$.

Pour déterminer la coordonnée $\boldsymbol{x_R}$, on procède de la même façon, calculons le moment de la force :

$$F_R\, x_R = \int_S \; xdF = \int_S \; \rho g x y sin\theta dS \;\text{ car }\; dF = \rho g y sin\theta dS$$

Remplaçant F_R par sa valeur $F_R = \rho g sin\theta y_c S$ on obtient

$$\rho g sin\theta y_c S x_R = \int_S \; \rho g x y sin\theta dS$$

Ce qui donne $$x_R = \frac{\int_S \; xydS}{y_c S} = \frac{I_{xy}}{y_c S}$$

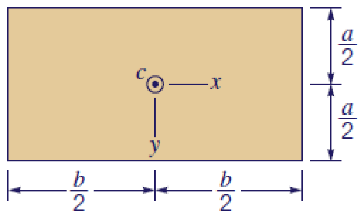
Avec $I_{xy} = \int_S \; xydS$ est le produit d'inertie par rapport aux axes *x* et *y*. Changeons d'axe par l'application de la relation $I_{xy} = I_{xyc} + x_c y_c S$.

$$\boldsymbol{x_R = x_c + \frac{I_{xyc}}{y_c S}}$$

I_{xyc} est le produit d'inertie par rapport à un système orthogonal passant par le barycentre de la surface S et formé par une translation du système *X-Y*.

Si la surface est symétrique par rapport à un axe passant par le barycentre et parallèle à *X* ou *Y*, F_R doit se trouver le long de x_c car $I_{xyc} = 0$.

c) Propriétés géométriques de quelques surfaces usuelles.



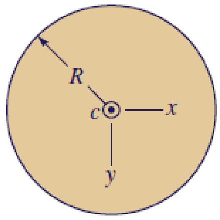
$A = ba$

$I_{xc} = \frac{1}{12} ba^3$

$I_{yc} = \frac{1}{12} ab^3$

$I_{xyc} = 0$

(*a*) Rectangle

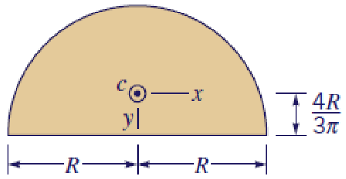


$A = \pi R^2$

$I_{xc} = I_{yc} = \frac{\pi R^4}{4}$

$I_{xyc} = 0$

(*b*) Circle



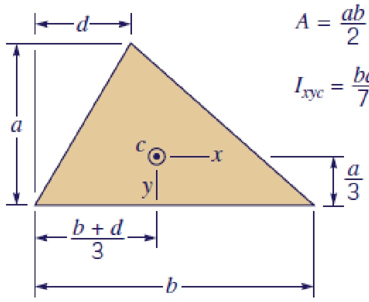
$A = \frac{\pi R^2}{2}$

$I_{xc} = 0.1098 R^4$

$I_{yc} = 0.3927 R^4$

$I_{xyc} = 0$

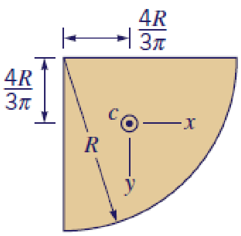
(*c*) Semicircle



$A = \frac{ab}{2}$ $\quad I_{xc} = \frac{ba^3}{36}$

$I_{xyc} = \frac{ba^2}{72}(b - 2d)$

(*d*) Triangle



$A = \frac{\pi R^2}{4}$

$I_{xc} = I_{yc} = 0.05488 R^4$

$I_{xyc} = -0.01647 R^4$

(*e*) Quarter circle