Université de Jijel
Faculté des Sciences et de la Technologie
Département d'Electrotechnique
Systèmes Asservis, L3, TD N°3

EXO : 1 Soient les racines des équations caractéristiques de différents systèmes. Déterminer dans chaque cas si l'ensemble des racines, représente un système stable, marginalement stable ou instable.

a) Quatre pôles (P_1=-5, P_2= -4, P_3= -15, P_4= -7);
b) Trois pôles (P_1= -20, P_2= -12, P_3= +0.0004) ;
c) Quatre pôles (P_1= -2, P_2= -5, P_3= 0, P_4= -20);
d) Trois pôles (P_1= -2-j4, P_2= -2+j4 ; P_3= -5)
e) Quatre pôles (P_1= -3-j2, P_2= -3+j2, P_3= -j5, P_4= +j5);
f) Quatre pôles (P_1= +1-j2, P_2= +1+j2, P_3= -4 -j5, P_4= -4 +j5);

EXO : 2 Soient les équations caractéristiques de différents systèmes. Etudier la stabilité de ces systèmes en utilisant le critère de Routh.

a) $P^3+4P^2+8P+12=0$; b) $P^6 +5P^5+9P^4 +10P^3+12P^2+8P+3=0$; c) $P^4 +6P^3+11P^2+6P+K=0$

EXO : 3 En utilisant le développement en éléments simples ou la méthode des résidus, trouvez la transformée inverse de :

a) $F(p) = \frac{p+2}{p(p+3)(p+4)}$ b) $F(p) = \frac{2p}{(p+3)(p+2)^2}$

EXO : 4 Tracez le lieu de Bode (gain et phase) pour les systèmes donnés par leur fonction de transfert suivante :

a) $F(p) = \frac{5}{(1+0.1p)}$ b) $F(p) = \frac{1}{p^\alpha}$ $\alpha = 1, 2, 3$

EXO : 5 Tracez le lieu de Nyquist pour les systèmes donnés par leur fonction de transfert suivante :

a) $F(p) = k\frac{1-\tau p}{(1+\tau p)}$ b) $F(p) = \frac{1}{p(p+k)}$

EXO : 6 Soit le système asservi linéaire donné par sa FTBO

$$Fo(p) = \frac{4(1 + 0.25p)}{(1 + 0.1p)(1 + 0.4p)(1 + 0.8p)(1 + 0.05p)}$$

1) On demande de tracer le lieu de Bode
2) On demande de déterminer **:**

-La fréquence de coupure ω_c
-La fréquence d'inversion de la phase $\boldsymbol{\omega_\pi}$
-La marge de phase $\boldsymbol{\varphi_m}$
-La marge de gain $\mathbf{A_m}$

Solution TD N°3

EXO 1 :

a) Quatre pôles réels négatifs donc le système est asymptotiquement stable.
b) Deux pôles réels négatifs et un pole réel positif ⇒le système est instable.
c) Trois pôles réels négatifs et un pole nul ⇒ le système est marginalement stable.
d) Deux pôles complexes à parties réelles négatives et un pole réel négatif ⇒ le système est asymptotiquement stable.
e) Deux pôles complexes à parties réelles négatives et deux pôles imaginaires pures ⇒ le système est marginalement stable.
f) Deux pôles complexes à parties réelles négatives et deux pôles complexes à parties réelles positives ⇒ le système est instable.

EXO 2 :

a) $P^3+4P^2+8P+12=0.$

- La 1^{ere} condition de stabilité est satisfaite car tous les A_n (1, 4, 8, 12) sont de même signes

-La 2eme condition, on construit la table de Routh

P^3	1	8
P^2	4	12
P^1	b_1	b_2
P^0	c_1	C_2

$$b_1 = \frac{(4*8)-(1*12)}{4} = 5; \quad b_2 = 0; \quad c_1 = \frac{(5*12)-(4*0)}{5} = 12;$$

Les éléments de la 1^{ere} colonne de la table de Routh (1, 4, 5, 12) sont de même signe donc la deuxième condition de stabilité est satisfaite ⇒ système est asymptotiquement stable.

b) $P^6+5P^5+9P^4+10P^3+11P^2+8P+3=0$

- La 1^{ere} condition de stabilité est satisfaite car tous les A_n (1, 5, 9, 10, 11,10, 3) sont de même signes.

-La 2eme condition, on construit la table de Routh

P^6	1	9	12	3
P^5	5	10	8	0
P^4	b_1	b_2	b_3	
P^3	C_1	C_2		
P^2	d_1	d_2	0	
P^1	e_1	e_2		
P^0	f_1	0		

$$b_1 = \frac{(5*9)-(1*10)}{5} = 7; \quad b_2 = \frac{(5*12)-(1*8)}{5} = 10.2; \; b_3 = \frac{(5*3)-(1*0)}{5} = 3$$

$$C_1 = \frac{(b_1 * 10) - (5 * b_2)}{b_1} = \frac{15}{7};\ C_2 = \frac{(b_1 * 8) - (5 * b_2)}{b_1} = \frac{41}{7};$$

$$d_1 = \frac{(C_1 * b_2) - (b_1 * C_2)}{C_1} = \frac{\left(\frac{15}{7} * 10.2\right) - (7 * \frac{41}{7})}{15/7} = -\frac{134}{7};\ d_2 = \frac{(C_1 * b_3) - (b_0 * 0)}{C_1} = b_3$$

$$e_1 = \frac{(d_1 * C_2) - (C_1 * d_2)}{d_1} == -\frac{134}{7};\ e_2 = 0;\ f_1 = \frac{(e_1 * d_2) - (d_1 * e_2)}{e_1} = d_2$$

Il y a un changement de signe dans la 1^{ere} colonne de la table de Routh donc il existe une racine à partie réelle positive ⇒ le système est instable.

c) $P^4 + 6P^3 + 11P^2 + 6P + K = 0$

- La 1^{ere} condition de stabilité est satisfaite si K>0

-La 2eme condition, on construit la table de Routh

P^4	1	11	K
P^3	6	6	0
P^2	b_1	b_2	
P^1	c_1	C_2	
P^0	d_1		

$$b_1 = \frac{(6 * 11) - (1 * 6)}{6} = 10; \quad b_2 = \frac{(6 * K) - (1 * 0)}{6} = K;$$

$$c_1 = \frac{(b_1 * 6) - (6 * b_2)}{b_1} = \frac{(10 * 6) - (6 * K)}{10};\ c_2 = 0; \quad d_1 = \frac{(C_1 * b_2) - (b_1 * C_2)}{b_1} = b_2 = K;$$

la 1^{ere} colonne de la table de Routh est (1, 6, 10, $\frac{60-6K)}{10}$, K), ses éléments seront de même signe si $\frac{60-6K)}{10} > 0\ et\ K > 0\ \ donc\ le\ système\ sera\ asymptotiquement\ \ stable\ pour\ \ 0 < K < 10$

EXO 3 :

a) $F(p) = \frac{p+2}{p(p+3)(p+4)}$ On utilise le développement en éléments simples

$$F(p) = \frac{p + 2}{p(p + 3)(p + 4)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p + 3} + \frac{C}{p + 4}$$

$$A = \lim_{p \to 0} p\, F(p) = \lim_{p \to 0} p\ \frac{p + 2}{p(p + 3)(p + 4)} = 2/12$$

$$B = \lim_{p \to -3} (p + 3)\, F(p) = \lim_{p \to -3} (p + 3) \frac{p + 2}{p(p + 3)(p + 4)} = 1/3$$

$$C = \lim_{p \to -4} (p + 4)\, F(p) = \lim_{p \to -4} (p + 4) \frac{p + 2}{p(p + 3)(p + 4)} = -1/2$$

$$F(p) = \frac{A}{p} + \frac{B}{p + 3} + \frac{C}{p + 4} = \frac{2/12}{p} + \frac{1/3}{p + 3} + \frac{-1/2}{p + 4}$$

$$\Rightarrow f(t) = \left(\frac{2}{12}\right) u(t) + \left(\frac{1}{3}\right) e^{-3t} - \left(\frac{1}{2}\right) e^{-4t}$$

b) $F(p) = \frac{2p}{(p+3)(p+2)^2}$ On utilise la méthode des résidus, on a un pole simple (P_1=-3) et un pole double (p_2=p_3=-2)

Au pôle simple on aura

$$résidu_{p\to -3} = \lim_{p\to -3}(p+3)\frac{2p}{(p+2)^2(p+3)}e^{-3t} = -6\,e^{-3t}$$

Au pôle double on aura (m=2)

$$residu_{p\to -2} = \frac{1}{(2-1)!}\lim_{p\to 0}\frac{d^{2-1}}{dp^{2-1}}[\,(p+2)^2\frac{2p}{(p+2)^2(p+3)}e^{pt}] = \lim_{p\to 0}\frac{d}{dp}\frac{2p}{(p+3)}e^{pt}$$
$$= (6-4t)e^{-2t}$$

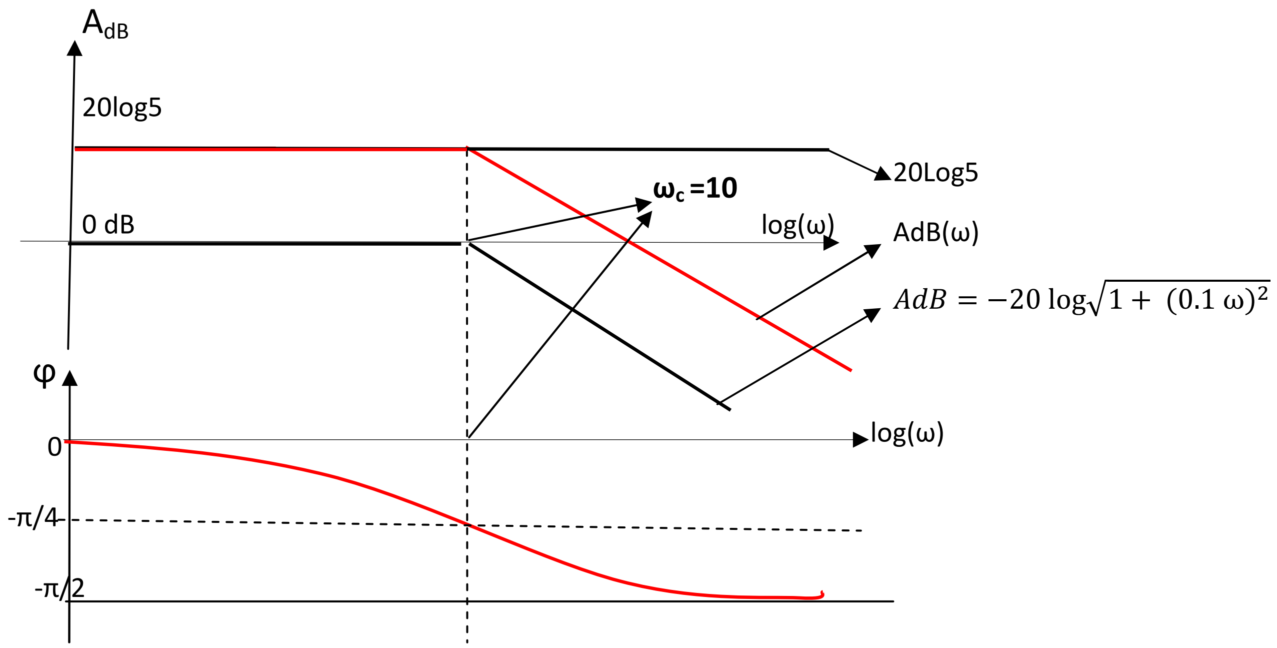
f(t) =∑ résidus = $-6e^{-3t} + (6-4t)e^{-2t}$

EXO 4 :

a) Diagramme de Bode de : $F(p) = \frac{5}{(1+0.1p)} \Rightarrow F(j\omega) = \frac{5}{(1+j0.1\omega)}$

Le gain $A_{dB}(\omega) = 20\log|F(j\omega)| = 20\log 5 - 20\log\sqrt{1+(0.1\,\omega)^2}$
$0.1\,\omega \ll 1 \Rightarrow A_{dB}(\omega) = 20\log(5)$
$0.1\omega = 1 \Rightarrow A_{dB}(\omega) = 20\log(5) - 20\log(\sqrt{2})$
$0.1\omega \to \infty \Rightarrow A_{dB}(\omega) = -20\log(0.1\omega) \to -\infty$ avec une pente de -20dB/décade

La phase $\varphi(\omega) = \arg(F(j\omega)) = arctg(0/5) - arctg(0.1\omega/1) = -arctg0.1\omega$
$0.1\omega \ll 1 \Rightarrow \varphi(\omega) \to 0$
$0.1\omega = 1 \Rightarrow \varphi(\omega) = -\pi/4$
$0.1\omega \gg 1 \Rightarrow \varphi(\omega) \to -\pi/2$



b) Diagramme de Bode de : $F(p)=\frac{1}{p^{\alpha}}$ $\quad \alpha = 1, 2, 3 \quad \Rightarrow F(j\omega)=\frac{1}{(j\omega)^{\alpha}}$

$$\alpha = 1 \Rightarrow F(j\omega)=\frac{1}{j\omega} \Rightarrow AdB(\omega) = -20\log(\omega) = \begin{Bmatrix} +20dB \ \text{si } \omega = 0.1, \\ 0 \text{ dB} \ \text{si } \omega = 1 \\ -20dB \ \text{si } \omega = 10 \end{Bmatrix}$$

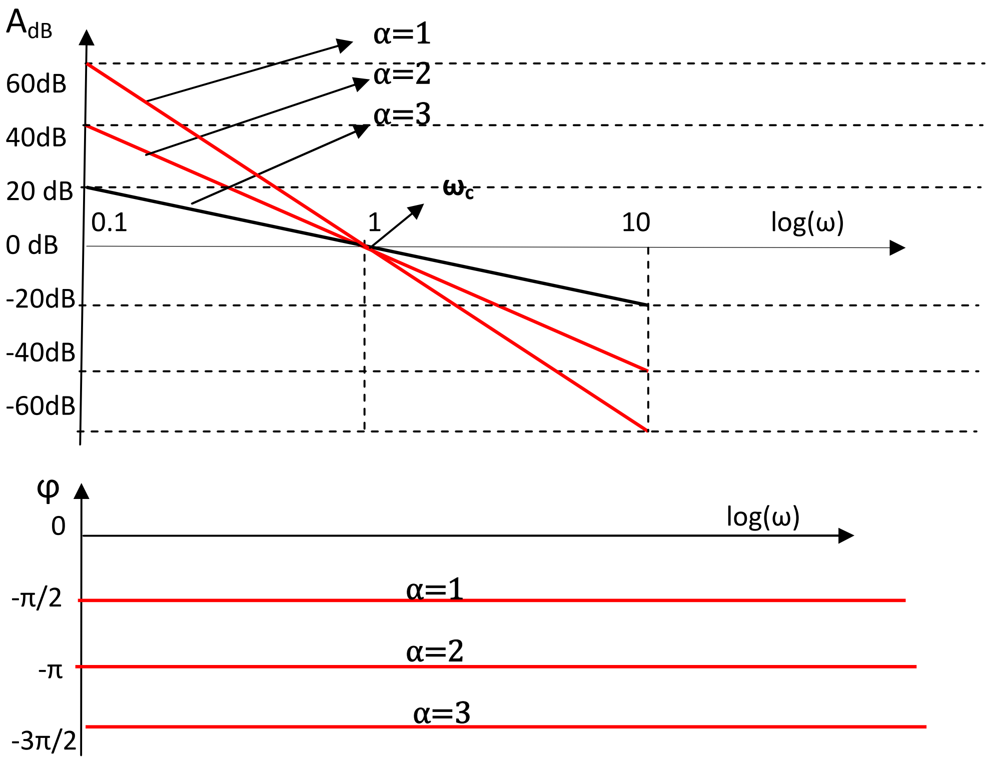
$$\varphi(j\omega) = artg1 - arct\left(\frac{\omega}{0}\right) = -\pi/2=$$

$$\alpha = 2 \Rightarrow F(j\omega)=\frac{1}{(j\omega)^2} \Rightarrow AdB(\omega) = -20\log(\omega)^2 = -40\log\omega = \begin{Bmatrix} +40dB \ \text{si } \omega = 0.1, \\ 0 \text{ dB} \ \text{si } \omega = 1 \\ -40dB \ \text{si } \omega = 10 \end{Bmatrix}$$

$$\varphi(j\omega) = \arg\left(\frac{1}{j\omega}\right) + arg\left(\frac{1}{j\omega}\right) = 2\arg\left(\frac{1}{j\omega}\right) = -\pi$$

$$\alpha = 3 \Rightarrow F(j\omega)=\frac{1}{(j\omega)^3} \Rightarrow AdB(\omega) = -20\log(\omega)^3 = -60\log\omega = \begin{Bmatrix} +60dB \ \text{si } \omega = 0.1, \\ 0 \text{ dB} \ \text{si } \omega = 1 \\ -60dB \ \text{si } \omega = 10 \end{Bmatrix}$$

$$\varphi(j\omega) = \arg\left(\frac{1}{j\omega}\right) + arg\left(\frac{1}{j\omega}\right) + arg\left(\frac{1}{j\omega}\right) = 3\arg\left(\frac{1}{j\omega}\right) = -3\pi/2$$

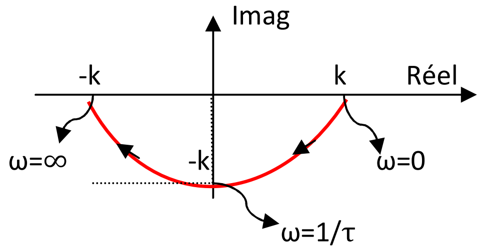


EXO : 5

a) Diagramme de Nyquist de :

$$F(p) = k\frac{1-\tau p}{(1+\tau p)} \Rightarrow F(j\omega) = k\frac{1-j\omega\tau}{(1+j\omega\tau)} = k\frac{(1-\omega^2\tau^2)}{(1+\omega^2\tau^2)} - j\frac{2k\omega\tau}{(1+\omega^2\tau^2)}$$

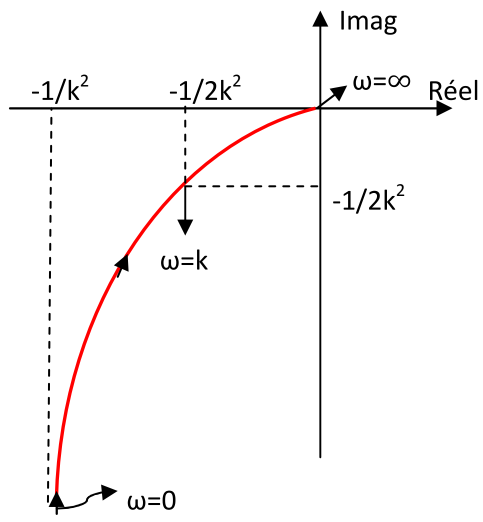
ω	0	1/τ	∞
Réel	k	0	-k
Imaginaire	0	-k	0



b) Diagramme de Nyquist de :

$$F(p) = \frac{1}{p(p+k)} \Rightarrow F(j\omega) = \frac{1}{j\omega(j\omega+k)} = \frac{-1}{\omega^2+k^2} - j\frac{k}{\omega^3+\omega k^2}$$

ω	0	k	∞
Réel	$-1/k^2$	$-1/2k^2$	0
Imaginaire	$-\infty$	$-1/2k^2$	0



EXO : 6

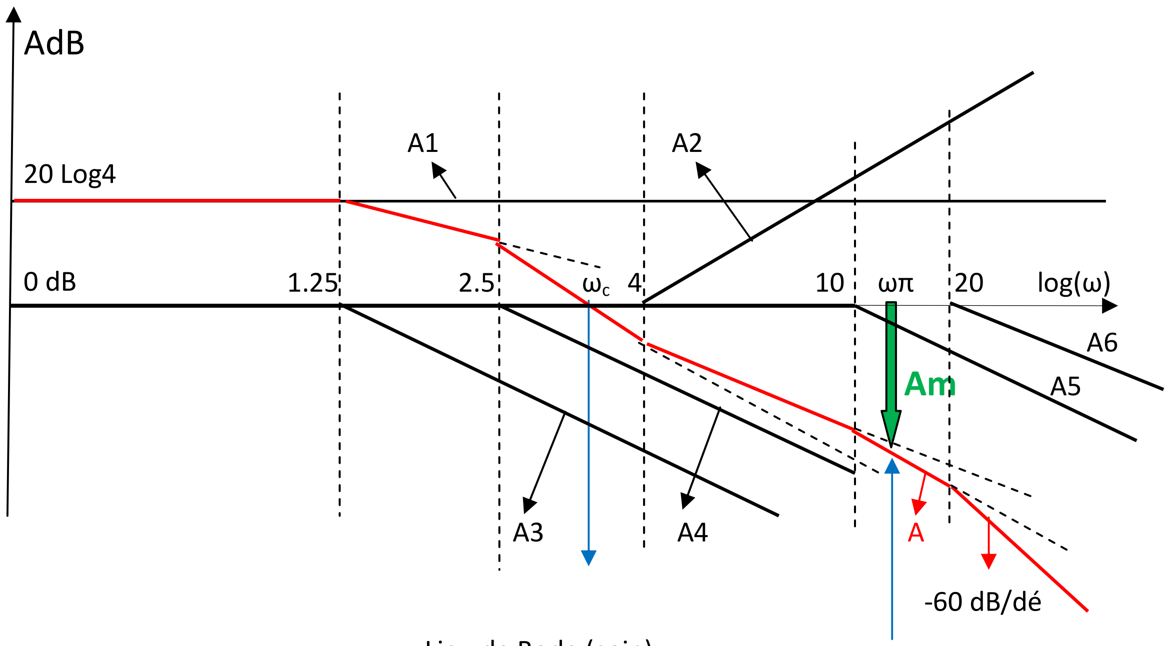
1) Diagramme de Bode de : $F(p) = \frac{4(1+0.25p)}{(1+0.8p)(1+0.4p)(1+0.1p)(1+0.05p)}$

Le Gain

$$A_{dB}(\omega) = 20\log|F(j\omega)| = 20\log 4 + 20\log\sqrt{1+(0.25)^2\omega^2} - 20\log\sqrt{1+(0.8)^2\omega^2}$$

$$-20\log\sqrt{1+(0.4)^2\omega^2} - 20\log\sqrt{1+(0.1)^2\omega^2} - 20\log\sqrt{1+(0.05)^2\omega^2}$$

$$= A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6$$



Lieu de Bode (gain)

Les pentes de AdB(ω) seront :

Entre (0 et 1.25) c'est 0 dB/décade
Entre (1.25 et 2.5) c'est -20dB/décade
Entre (2.5 et 4) c'est -40 dB/décade
Entre (4 et 10) c'est -20 dB/décade
Entre (10 et 20) c'est -40 dB/décade
Entre (20 et ∞) c'est -60 dB/décade

La phase

$$\varphi_1(\omega) = arctg\left[\frac{0}{4}\right] = arctg0 = 0;$$

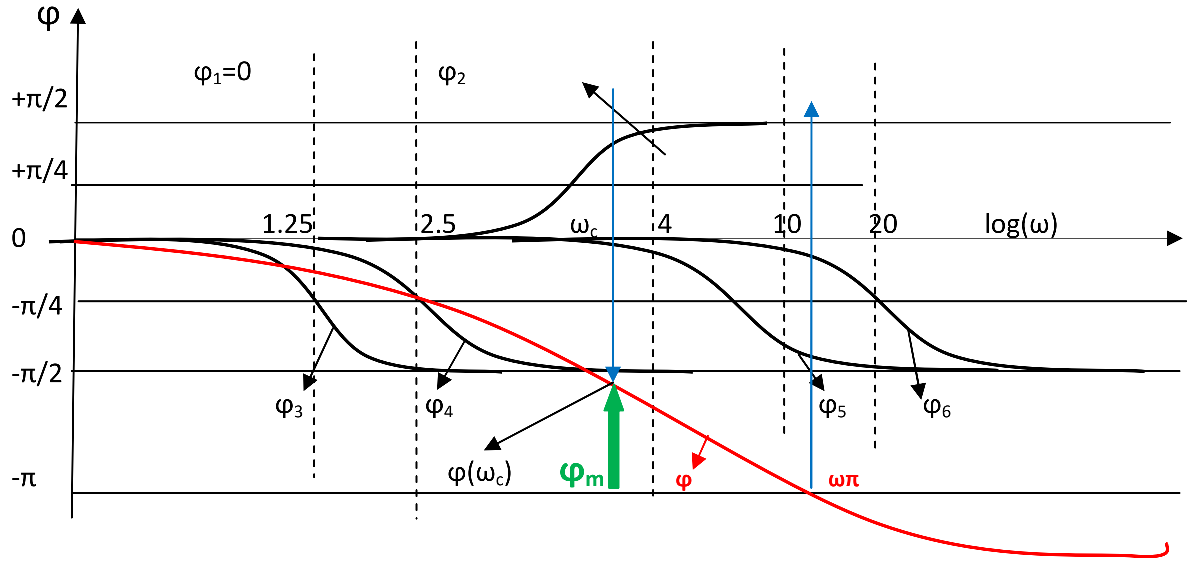
$$\varphi_2(\omega) = arctg\left[\frac{0.25\omega}{1}\right] \Rightarrow \varphi_2(0) = 0, \quad \varphi_2(4) = +\frac{\pi}{4}, \quad \varphi_2(\infty) = +\pi/2$$

$$\varphi_3(\omega) = -arctg\left[\frac{0.8\omega}{1}\right] \Rightarrow \varphi_3(0) = 0, \quad \varphi_3(1.25) = -\frac{\pi}{4}, \quad \varphi_3(\infty) = -\pi/2$$

$$\varphi_4(\omega) = -arctg\left[\frac{0.4\omega}{1}\right] \Rightarrow \varphi_4(0) = 0, \quad \varphi_4(2.5) = -\frac{\pi}{4}, \quad \varphi_4(\infty) = -\pi/2$$

$$\varphi_5(\omega) = -arctg\left[\frac{0.1\omega}{1}\right] \Rightarrow \varphi_5(0) = 0, \quad \varphi_5(10) = -\frac{\pi}{4}, \quad \varphi_5(\infty) = -\pi/2$$

$$\varphi_6(\omega) = -arctg\left[\frac{0.05\omega}{1}\right] \Rightarrow \varphi_5(0) = 0, \quad \varphi_5(20) = -\frac{\pi}{4}, \quad \varphi_5(\infty) = -\pi/2$$



Lieu de Bode (phase)

2) En utilisant MATLAB on détermination
   - La fréquence (pulsation) de coupure **ω_c=4.42 rd/s**
   - La fréquence d'inversion de la phase **ω_π=14.1 rd/s**
   - La marge de phase **φ_m=φ(ωc)-(-π)=-112+180=68°**
   - La marge de gain **A_m=-20LogIFo(jωπ)I=19.3 dB**

-Pour déterminer la pulsation de coupure **(ω_c)** on doit résoudre l'équation :

$$\mathrm{A_{dB}}(\omega) = 20\log|\mathrm{F_o}(\mathrm{j}\omega)| = 20\log 4 + 20\log\sqrt{1+(0.25)^2\omega^2} - 20\log\sqrt{1+(0.8)^2\omega^2}$$

$$-20\log\sqrt{1+(0.4)^2\omega^2} - 20\log\sqrt{1+(0.1)^2\omega^2} - 20\log\sqrt{1+(0.05)^2\omega^2} = 0 \qquad (1)$$

-Pour déterminer la pulsation d'inversion de la phase **(ω_π)** on doit résoudre l'équation :

$$\varphi(\omega) = \varphi_1(\omega) + \varphi_2(\omega) + \varphi_3(\omega) + \varphi_4(\omega) + \varphi_5(\omega) + \varphi_6(\omega) = -\pi$$

$$= arctg\left[\frac{0.25\omega}{1}\right] - arctg\left[\frac{0.8\omega}{1}\right] - arctg\left[\frac{0.4\omega}{1}\right] - arctg\left[\frac{0.1\omega}{1}\right] arctg\left[\frac{0.05\omega}{1}\right] = -\pi \qquad (2)$$

-Pour déterminer la marge de phase (**φ_m**) on remplace '**ω**' par '**ω_c**' dans l'équation (2), ce qui nous donne **$\varphi(\omega_c)$** puis on calcule **φm= $\varphi(\omega_c)$+π=68°**

-Pour déterminer la marge de gain (**A_m**) on remplace '**ω**' par '**ω_π**' dans l'équation (1), ce qui nous donne **A_m=-20LogIFo(jωπ)I=19.3 dB**