Université de Mohamed Boudiaf /M'sila
Faculté des Sciences et Technologies
Module : Stat et Proba

Année Universitaire: 2016/2017
Le 16/01/2017 à 08:00h
Durée 1 h 30 min

**EPREUVE DU 3ème SEMESTRE**

**Question de cour** :(02)*points*

1-Démontrer que : $V(x) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i(x_i - \bar{x})^2 = \left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i x_i^2\right] - \bar{x}^2$

***Exercice N°01*** : (05)*points*

On a consigné les primes de fin d'année attribuées aux salariés d'une entreprise dans le tableau suivant :

| Primes / mille DA | [0; 6[ | [6; 10[ | [10; 14[ | [14; 16[ |
|---|---|---|---|---|
| Effectifs | 41 | 79 | 78 | 2 |

1)Quelle est la population étudiée?
2)Quel est le caractère étudié?
3)Quelle est la nature de ce caractère?
4)Pourquoi a-t-on regroupé les primes en classes ?
5)Déterminer la moyenne..
6)Déterminer la variance et l'écart-type
7)Tracer la courbe cumulative des effectifs.
8)Déterminer graphiquement la médiane et interpréter....

***Exercice N°02*** : (05)*points*

Le tableau suivant donne la dépense, en millions de dinars, des ménages en produits informatiques (matériels, logiciels, réparations) de 1991 à 1995

| Année | 1991 | 1992 | 1993 | 1994 | 1995 |
|---|---|---|---|---|---|
| Rang $x_i$ de l'année | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| Depense $y_i$ | 360 | 610 | 720 | 800 | 910 |

1-Représenter le nuage de points $M_i(x_i; y_i)$ dans un repère orthogonal.
2-L'ajustement affine vous parait-il justifié ?
3-Faire un ajustement par la méthode des moindres carrés.
4-Vérifier que le point moyen est sur la droite d'ajustement.
5-Quelle est la dépense en 1999?

***Exercice N°3*** : (04)*points*

On jette une pièce de monnaie 3 fois de suite., soit X le nombre de piles obtenus.
1)Déterminer la loi de probabilité de X
2)Déterminer l'espérance mathématique, et la variance.

***Exercice N°4*** : (04)*points*

Calculer les probabilité $P(A)$, $P(B)$ . si événements $A$ et $B$ sont:
$A$ : Obtenir au moins deux 6 en lançant 10 dés ?
$B$ : Obtenir au moins une paire de 6 en lançant 5 paires de dés ?
Quel est l'événement le plus probable ?

بالتوفيق

**CORRIGEE-TYPE D'EPREUVE DU TROISIEME SEMESTRE**

**MODULE STAT ET PROBA . ANNEE SCOLAIRE 2016/2017**

## Question de cour : (2 points)

$$V(x) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i(x_i - \overline{x})^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i({x^2}_i - 2x_i\,\overline{x} + \overline{x}^2) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i {x^2}_i - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} 2\,n_i x_i\,\overline{x} + \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} \overline{x}^2\,n_i$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i {x^2}_i - 2\overline{x}\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i\,x_i\right) + \overline{x}^2\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i\right) = \left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i {x^2}_i\right] - 2\overline{x}\;(\overline{x}) + \overline{x}^2(1) = \left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i {x^2}_i\right] - \overline{x}^2$$

## Exercice N°01: (5 points)

1) La population etudiée est l'ensemble des salariées de l'entreprise considérée…………………………… (0.5 point)

2) Il s'agit du montant de la prime de fin d'année……………………………………………………… (0.5 point)

3) Ce caractère pouvant prendre toutes les valeurs d'un intervalle, le caractère est quantitatif continue.. (0.5 point)

4) Le caractère étant continu, les modalités sont regroupées en intervalle(les classes)………………………. (0.5 point)

5) Notons $\overline{x}$ la moyenne cherchée. Pour calculer cette moyenne, on complète le tableau en calculant les milieux des classes. On a :

$\overline{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i c_i = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} n_i c_i = \frac{(41X3)+(79X8)+(78X12)+(2X15)}{41+79+78+2} = 8.6$ *mille DA*. …………………………. (0.5 point)

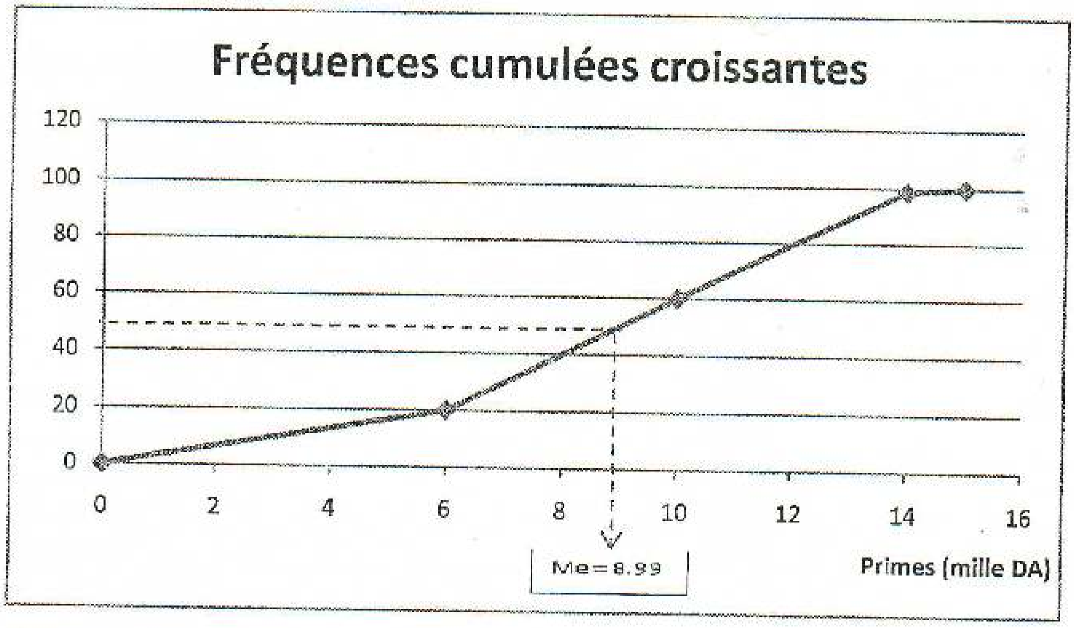
6) Notons V (x) la variance de la série statistique et σ(x) son écart-type. On a :

$V(x) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i(c_i - \overline{x})^2 = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} n_i(c_i - 8.6)^2 = \frac{41X(3-8.6)^2+79X(8-8.6)^2+78X(12-8.6)^2+2X(15-8.6)^2}{41+79+78+2} =$

$V(x) = 11.48$ ………………………………………………………………………………………… (0.5 point)

On a donc : $\sigma(x) = \sqrt{V(x)} = \sqrt{11.48} = 3.38$ mille DA. ……………………………………………… (0.5 point)

7) Tracer la courbe cumulative des effectifs……………………………………………………………… (0.5 point)



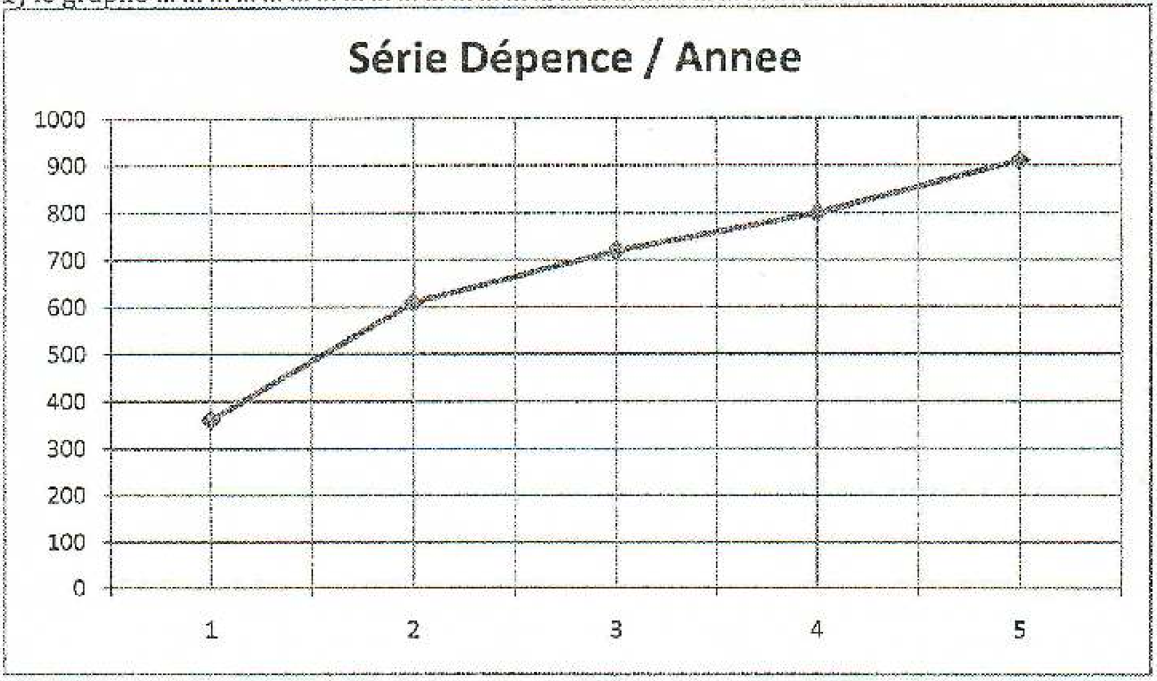

8) On obtient Me ≈ 8.89 mille DA ………………………………………………………………(0.5 point)

50% des salariés touchent une prime inférieure à 8.89 mille DA.

50% des salariés touchent une prime supérieure à 8.89 mille DA. ……………………………………(0.5 point)

**Exercice N°02:** (5 points)

1) le graphe ........................................................................................................ (0.5 point)




2) le nuage de points est allongé, l'ajustement affine est justifié ............................................ (0.5 point)

3) la méthode des moindres carrés

$\overline{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} x_i = 3$ ............... (0.5 point) , $V(X) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} x_i^2 \ - \overline{x^2} = 2$ ................................(0.5 point)

$\overline{y} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} y_i = 680$ ............ (0.5 point) , $\mathrm{cov}(X) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} x_i y_i - \overline{xy} = 258$ ............................ (0.5 point)

$a = \frac{\mathrm{cov}(X)}{V(X)} = 129$ ....................(0.5 point) $b = \overline{y} - 129\overline{x} = 293$ ................................................ (0.5 point)

Donc la droite d'ajustement est : $y = 129x + 293$

4) $129 \times 3 + 293 = 680$ donc le point moyen $Gm(3\ ;\ 680)$ est sur la droite d'ajustement...... (0.5 point)

5) pour $x_i = 9$ on a $y = 129 \times 9 + 293 = 1454$ ................................................ (0.5 point)

| | x | x² | y | y² |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 1 | 360 | 129600 |
| | 2 | 4 | 610 | 372100 |
| | 3 | 9 | 720 | 518400 |
| | 4 | 16 | 800 | 640000 |
| | 5 | 25 | 910 | 828100 |
| **moyenne** | 3 | 9 | **680** | **462400** |
| **variance** | v(x) | 2 | v(y) | 35240 |
| **covariance** | cov(x;y) | **258** | | |
| **la droite** | a | **129** | | |
| | b | **293** | | |

**Exercice N°03:** (4 points)

1) $\Omega = \{(p ; p, p) ; (p ; p ,f) ; (p, f ; p) ; (p ,f ; f), (f, p; p), (f, p,f) ,(f, f ; p), (f, f ; f)\}$

Card $\Omega$ =8 ................................................................................................................... (0.5 point)

$X \in \{0 ;1 ;2 ;3\}$, donc $P(X=0) = \frac{1}{8}$, $P(X=1) = \frac{3}{8}$ , $P(X=2) = \frac{3}{8}$, $P(X=3) = \frac{1}{8}$
la loi de probabilité de X est ............................................................................................. (1.5 points)

| x | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| P | 1/8 | 3/8 | 3/8 | 1/8 |

2) l'espérance mathématique $E(X) = 0 \times \frac{1}{8} + 1 \times \frac{3}{8} + 2 \times \frac{3}{8} + 3 \times \frac{1}{8} = \mathbf{1.5}$ ................................ (1 point)

La variance $V(X) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} \mathbf{p}i x_i^2 \quad - \mathbf{E}^2(X) \quad = 0.75\ \bar{A}$ ...........................................(1 point)

**Exercice N°04**(4 points)

1)Elle correspondent a un lancement successif et avec remise c-a-d : Les répétitions sont possibles , l'ordre est important donc on a des listes :

Card $\Omega_1 = 6^{10}$

A : « Obtenir au moins deux 6 en lançant 10 dés » et si on pose :

$A_1$ : « ne pas obtenir de 6 en lançant 10 dés » le numéro 6 est absent dans les résultats on trouve

$(6-1)^{10} = 5^{10}$ *de 10 – uplets ne contient pas le numero 6 donc* :

$P(A_1) = \frac{5^{10}}{6^{10}}$ ............................................................................................ (0.5 point),

et si on pose :

$A_2$ : « Obtenir exactement un 6 en lançant 10 dés » Il ya 10 positions possibles pour le 6 et chaque autre élément peut prendre 5 valeurs possibles cela fait donc 10x( $5^9$ ) *element Alors* :

$P(A_2) = \frac{5^9}{6^{10}} \times 10$ ............................................................................................ (0.5 point)

La probabilité qu'il u ait au plus un 6 est donc : $P(A_1) + P(A_2) = \frac{5^{10}}{6^{10}} + \frac{5^9}{6^{10}} \times 10 = \frac{5^{10}}{6^{10}} \times 3$

(puisque $A_1$ et $A_2$ sont disjoints .) ............................................................................ (0.5 point)

La probabilité d' obtenir au moins deux 6 est alors

$P(A) = 1 - P[(A_1 \cup A_2)^c] = 1 - \frac{5^{10}}{6^{10}} \times 3 \approx 0.5154$ ...................................... (0.5 point)

**2-(meme chose)** Les répétitions sont possibles , l'ordre est important donc on a des listes

Card$\Omega_2 = 36^5$

B : Obtenir au moins une paire de 6 en lançant 5 paires de dés

$B^c$ : pas de paires de 6............................................................................................ (0.5 point)

$P(B^c) = \frac{35^5}{36^5}$ ............................................................................................ (0.5 point)

donc $P(B) = 1 - P(B^c) = 0.131$ ............................................................................................ (0.5 point)

Donc le plus probable est l'événement : A ............................................................................(0.5 point)