Université A. MIRA-Béjaia
Faculté de Technologie
Département de Technologie
Année universitaire 2021-2022

Juin 2022
Durée :01 heure 30

Examen de rattrapage Maths 1

Exercice 1. (**04 pts**)
Montrer par récurrence que :

$$\forall n \geq 1, \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

Exercice 2. (**10 pts**)
Considérons l'application f définie par :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4.$$

I. Soient les ensembles $A = \{-2, 0, 1, 2\}$ et $B = \{4\}$.
1. Calculer $f(A)$ et $f^{-1}(B)$.
2. L'application f est-elle injective ? bijective ?

II. On définit sur $\mathbb{R}$ la relation binaire $\mathcal{R}$ par :

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : x\mathcal{R}y \Leftrightarrow f(x) = f(y).$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Déterminer les classes d'équivalences de -2 et 0.

Exercice 3. (**06 pts**)

Soient a et b deux nombres réels. On définit la fonction f par :

$$f(x) = \begin{cases} ax + b & si \quad x \leq 0, \\ \dfrac{3}{1+x} & si \quad x > 0. \end{cases}$$

1. Déterminer b pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer a et b pour que f soit dérivable sur $\mathbb{R}$.

Bon courage

Corrigé de l'examen de Rattrapage maths 1.

Exercice n° 1 : $\frac{04}{04}$

- Montrons par récurrence que :

$$\underbrace{\forall n \geq 1, \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}}_{P(n)}$$

⊙ Pour $n = 1$, on a : $\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1(1+1)} = \frac{1}{2} = \frac{1}{1+1}$.

Donc : $\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1+1}$ 1

Autrement dit : $P(1)$ est vraie.

⊙ Soit $n \geq 1$, On suppose que $P(n)$ est vraie, c'est à dire

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$$

et on montre que $P(n+1)$ est vraie, c'est à dire. 1

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n+1}{n+2}.$$

On a : $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$

$= \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ (par hypothèse de récurrence)

$= \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)}$ 1,5

$= \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}.$

⊙ Finalement, $\forall n \geq 1$, $P(n)$ est vraie. 0,5

Exercice n° 2 :

Soit $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto x^3 - x^2 - 4x + 4.$

I/ 1). Calculons $f(A)$ et $f^{-1}(B)$.

$f(A) = \{ f(x), x \in A \}$

$= \{ f(-2), f(1), f(2), f(0) \} = \{ 0, 4 \}.$ 1

$f^{-1}(B) = \{ x \in \mathbb{R}, f(x) \in B \}$

$= \{ x \in \mathbb{R}, x^3 - x^2 - 4x + 4 = 4 \}$ 1

$= \{ x \in \mathbb{R}, x(x^2 - x - 4) = 0 \}$

$= \{ 0, \frac{1-\sqrt{17}}{2}, \frac{1+\sqrt{17}}{2} \}.$

2). a). Injectivité de f : d'après la question précédente, on a $f(-2) = 0 = f(1)$ mais $-2 \neq 1$. 1
Donc f n'est pas injective.

b). Bijectivité de f : f n'est pas bijective car elle n'est pas injective. 1

II/. Soit $\mathcal{R}$ la relation binaire définie par :

$\forall x, y \in \mathbb{R}, x \mathcal{R} y \iff f(x) = f(y).$

1). Montrons que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

i). Réflexivité : Soit $x \in \mathbb{R}$, On a $f(x) = f(x)$ d'où $x \mathcal{R} x$ et donc $\mathcal{R}$ est réflexive. 1

ii). Symétrie : Soient $x, y \in \mathbb{R} : x \mathcal{R} y$. On a :

$$x \mathcal{R} y \Rightarrow f(x) = f(y)$$
$$\Rightarrow f(y) = f(x)$$
$$\Rightarrow y \mathcal{R} x.$$

1

Donc : $\mathcal{R}$ est symétrique.

iii). Transitivité : Soient $x, y, z \in \mathbb{R} : x \mathcal{R} y$ et $y \mathcal{R} z$.

On a : $\begin{cases} x \mathcal{R} y \\ \text{et} \\ y \mathcal{R} z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x) = f(y) \ \ldots (1) \\ \text{et} \\ f(y) = f(z) \ \ldots (2) \end{cases}$ 1

En sommant (1) et (2), on obtient : $f(x) = f(z) \Rightarrow x \mathcal{R} z$.

Donc : $\mathcal{R}$ est transitive.

Conclusion : De i), ii) et iii), $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$.

2). Déterminons les classes d'équivalences de -2 et 0.

$$\overline{-2} = \{x \in \mathbb{R} : x \mathcal{R} -2\}$$
$$= \{x \in \mathbb{R} : f(x) = f(-2) = 0\}.$$

1

et d'après la question I-1-, on déduit que :

$$x^3 - x^2 - 4x + 4 = (x-2)(x+2)(x-1).$$

Alors, $\overline{2} = \{x \in \mathbb{R} : (x-2)(x+2)(x-1) = 0\}$

$= \{2, -2, 1\}$.

1

$\overline{0} = \{x \in \mathbb{R} : x \mathcal{R} 0\}$

$= \{x \in \mathbb{R} : f(x) = f(0) = 4\}$

$= \left\{0, \frac{1-\sqrt{17}}{2}, \frac{1+\sqrt{17}}{2}\right\}$.

1

Exercice n° 3.

Soient a et b deux nombres réels. On définit la fonction f par :

$$f(x) = \begin{cases} ax + b, & \text{si } x \leq 0, \\ \dfrac{3}{1+x}, & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

1)- Continuité de f sur $\mathbb{R}$:

a)- Sur $\mathbb{R}^*$, f est continue car $x \longmapsto ax + b$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc en particulier sur $]-\infty, 0[$ et $x \longmapsto \frac{3}{1+x}$ est continue sur $\mathbb{R} - \{-1\}$ donc en particulier sur $]0, +\infty[$.

1

b)- Continuité de f en 0 :

On a : $f(0) = a \times 0 + b = b$.

$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{3}{1+x} = 3$.

1

$\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} f(x) = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} ax + b = b$.

f est continue en 0 $\Leftrightarrow \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} f(x) = f(0) \Leftrightarrow b = 3$. 0,5

Finalement, f est continue sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $b = 3$.

2). Dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$.

a). Sur $\mathbb{R}^*$, f est dérivable car $x \longmapsto ax + b$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc en particulier sur $]-\infty, 0[$ et $x \longmapsto \frac{3}{1+x}$ est dérivable sur $\mathbb{R} - \{-1\}$ donc en particulier sur $]0, +\infty[$.

1

b). Dérivabilité de f en 0 :

Si $b \neq 3$, f n'est pas dérivable en 0 car elle n'est pas continue en 0.

1

Donc posons $b = 3$, donc $f(0) = 3$.

$$\circ \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{\frac{3}{1+x} - 3}{x}$$

$$= \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{3 - 3 - 3x}{x(1+x)}$$

$$= \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{-3}{1+x} = -3 = f'_d(0).$$

$$\circ \lim_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{ax + 3 - 3}{x} = a = f'_g(0).$$

1

f est dérivable en 0 $\iff b = 3$ et $f'_d(0) = f'_g(0)$

$\iff b = 3$ et $a = -3$.

0,5

Finalement f est dérivable sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $b = 3$ et $a = -3$.