1.

(i) Pour obtenir A, il suffit de prendre les éléments de S comportant un F et un nombre pair : $A = \{F2, F4, F6\}$.

Pour obtenir B, on prend les éléments de S comportant un nombre premier : $B = \{F2, F3, F5, P2, P3, P5\}$.

Pour obtenir C, on prend les éléments de S comportant un P et un nombre impair : $C = \{P1, P3, P5\}$.

(ii) (a) A ou $B = A \cup B = \{F2, F4, F6, F3, F5, P2, P3, P5\}$

(b) B et $C = B \cap C = \{P3, P5\}$

(c) On prend les éléments de B qui ne sont ni dans A, ni dans C : $B \cap \complement A \cap \complement C = \{F3, F5, P2\}$.

(iii) A et C s'excluent mutuellement puisque $A \cap C = \emptyset$.

2. Posons p = P(1)= P(3)= P(5), donc P(2)=P(4)=P(6)=2p. 1 =P({1, 2, 3, 4, 5, 6})= 9p et par suite p = 1/9.
d'où 1) 2/3, 2) 4/9, 3) 1/3, 4) 2/9.

3.

L'événement peut se réaliser de 3 façons (un 2, un 4 ou un 6) parmi 6 cas équiprobables ; par conséquent $p = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Si l'on considère les pièces séparément, il y a 8 cas équiprobables : FFF, FFP, FPF, FPP, PFF, PFP, PPF, PPP. Seul le premier cas est contraire à l'événement considéré ; par conséquent $p = 7/8$.

Il y a $4 + 3 + 5 = 12$ billes, dont 4 sont blanches ; par suite $p = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$.

4.

Il y a $\binom{15}{3} = 455$ possibilités de choisir 3 ampoules parmi les 15 ampoules données.

(i) Puisqu'il y a $15 - 5 = 10$ ampoules non défectueuses, il y a $\binom{10}{2} = 120$ possibilités de choisir 3 ampoules non défectueuses. D'où $p = \frac{120}{455} = \frac{24}{91}$.

(ii) Il y a 5 ampoules défectueuses et $\binom{10}{2} = 45$ couples différents d'ampoules non défectueuses ; par conséquent il y a $5 \cdot 45 = 225$ possibilités de choisir 3 ampoules dont l'une soit défectueuse. D'où $p = \frac{225}{455} = \frac{45}{91}$.

(iii) L'éventualité pour qu'au moins une ampoule soit défectueuse est le complémentaire de l'événement caractérisé par l'absence totale d'ampoule défectueuse, qui d'après (i), a une probabilité de $\frac{24}{91}$. Par conséquent $p = 1 - \frac{24}{91} = \frac{67}{91}$.

5. 1) P(FUA) = P(F)+P(A) – P(F∩A) = 3/4, 2) = $\boldsymbol{P(\overline{F} \cap \overline{A}) = 1 - P(F \cup A) = 1/4}$

6. La fréquence relative = $\frac{\textit{nombre de succès}}{\textit{nombre total de jets}}$ **, 1) 7/50, 2) 24/50, 3) 26/50**

7. Probabilité conditionnelle

La somme est paire si les deux chiffres sont tous les deux pairs ou impairs. Il y a 4 chiffres pairs (2, 4, 6, 8) ; il y a donc $\binom{4}{2} = 6$ cas où l'on peut tirer deux chiffres pairs. Il y a 5 nombres impairs (1, 3, 5, 7, 9) ; il y a donc $\binom{5}{2} = 10$ cas où l'on peut tirer deux chiffres impairs. En conclusion, il y a $6 + 10 = 16$ cas où l'on peut tirer deux chiffres tels que leur somme soit paire ; comme 10 de ces cas correspondent à deux chiffres impairs, $p = \frac{10}{16} = \frac{5}{8}$.

8.

Soit M = {élèves ayant échoué en mathématiques} et C = {élèves ayant échoué en chimie} ; il vient alors

$$P(M) = 0{,}25, \quad P(C) = 0{,}15, \quad P(M \cap C) = 0{,}10$$

(i) La probabilité pour qu'un élève échoue en mathématiques, après avoir échoué en chimie est

$$P(M \mid C) = \frac{P(M \cap C)}{P(C)} = \frac{0{,}10}{0{,}15} = \frac{2}{3}$$

(ii) La probabilité pour qu'un élève échoue en chimie après avoir échoué en mathématiques est

$$P(C \mid M) = \frac{P(C \cap M)}{P(M)} = \frac{0{,}10}{0{,}25} = \frac{2}{5}$$

(iii) $$P(M \cup C) = P(M) + P(C) - P(M \cap C) = 0{,}25 + 0{,}15 - 0{,}10 = 0{,}30 = \frac{3}{10}$$

9.

(i) La probabilité de choisir une pièce non défectueuse est $\frac{5}{8}$ pour la boîte A, et $\frac{3}{5}$ pour la boîte B. Comme les événements sont indépendants, $p = \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{8}$.

(ii) **Méthode 1.** La probabilité p de choisir deux pièces détachées défectueuses est $\frac{3}{8} \cdot \frac{2}{5} = \frac{3}{20}$. D'après (i) la probabilité pour que les deux pièces ne soient pas défectueuses est $\frac{3}{8}$. D'où $p = 1 - \frac{3}{8} - \frac{3}{20} = \frac{19}{40}$.

Méthode 2. La probabilité p_1 de choisir une pièce détachée défectueuse dans A et une pièce non défectueuse dans B est $\frac{3}{8} \cdot \frac{3}{5} = \frac{9}{40}$. La probabilité p_2 de choisir une pièce détachée non défectueuse dans A une pièce défectueuse dans B est $\frac{5}{8} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{4}$. D'où $p = p_1 + p_2 = \frac{9}{40} + \frac{1}{4} = \frac{19}{40}$.

(iii) Considérons les événements X = {pièce détachée de A défectueuse} et Y = {une pièce détachée est défectueuse et l'autre ne l'est pas}. On cherche à calculer $P(X/Y)$. D'après (ii) $P(X \cap Y) = p_1 = \frac{9}{40}$ et $P(Y) = \frac{19}{40}$. D'où

$$p = P(X \mid Y) = \frac{P(X \cap Y)}{P(Y)} = \frac{\frac{9}{40}}{\frac{19}{40}} = \frac{9}{19}$$

10. Soit A l'évènement : « le type A de bactéries vive encore 1 heure » et B l'évènement : «le type B de bactéries vive encore 1 heure ». On a P(A) = 1/4, et P(B) = 1/3.

(i) On cherche $P(A \cap B)$. Comme A et B sont indépendants, $P(A \cap B) = P(A)P(B) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$.

(ii) On cherche $P(A \cup B)$. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{12} = \frac{1}{2}$.

(iii) On cherche $P(\complement A \cap \complement B)$. Or $P(\complement A) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ et $P(\complement B) = 1 - P(B) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$. D'autre part, comme $\complement A$ et $\complement B$ sont indépendants, $P(\complement A \cap \complement B) = P(\complement A)\, P(\complement B) = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{2}$.

Ou encore, puisque $\complement(A \cup B) = \complement A \cap \complement B$, $P(\complement A \cap \complement B) = P(\complement(A \cup B)) = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

(iv) On cherche $P(\complement A \cap B)$. Comme $P(\complement A) = 1 - P(A) = \frac{3}{4}$ et que $\complement A$ et B sont indépendants $P(\complement A \cap B) = P(\complement A)\, P(B) = \frac{1}{4}$.

11. épreuves indépendantes ou répétés

(i) A se compose de tous les triplets ordonnés comportant au moins 2V et aucun D. Ainsi

$$A = \{\text{V V V, V V N, V N V, N V V}\}$$

D'autre part,
$$\begin{aligned} P(A) &= P(\text{V V V}) + P(\text{V V N}) + P(\text{V N V}) + P(\text{N V V}) \\ &= (0{,}6)(0{,}6)(0{,}6) + (0{,}6)(0{,}6)(0{,}1) + (0{,}6)(0{,}1)(0{,}6) + (0{,}1)(0{,}6)(0{,}6) \\ &= 0{,}216 + 0{,}036 + 0{,}036 + 0{,}036 = 0{,}324 \end{aligned}$$

(ii) Ici, $B = \{VDN, VND, DVN, DNV, NVD, NDV\}$. Comme chaque élément de B a pour probabilité $(0,6)\ (0,3)\ (0,1)$, on a $P(B) = 6(0,018) = 0,108$.

Exercices supplémentaires :

12. Dans un échantillon de 900 individus nous avons la distribution suivante :

Yeux / Cheveux	Verts	Bleus	Noirs	Somme
Clairs	**140**	**80**	**50**	**270**
Foncés	**60**	**40**	**100**	**200**
Noirs	**50**	**30**	**350**	**430**
Somme	**250**	**150**	**500**	**900**

1/ Une cellule est l'intersection entre deux modalités. Elle représente l'effectif qui possède la modalité de la variable 1 et la modalité de la variable 2. exp : 100 : est le nombre d'individus ayant à la fois des yeux noirs et des cheveux foncés. 2/ La ligne somme désigne les effectifs pour la variable : couleur des cheveux et la colonne somme désigne les effectifs pour la variable : couleur des yeux.

3/ Probabilité assimilée à la fréquence relative : a/ 250/900=0.277 ; b/ 200/900=0.222 ; c/ (270+430)/900=0.777 ;

d/ 80/900=0.088 ; e/ 80/270=0.296

13. 1/ On désigne par M l'évènement « milieu pollué au cours d'une journée » ; M= B1∪B2. (B1 et B2 sont indépendants). P(M)= P(B1∪B2)=P(B1)+P(B2) – P(B1∩B2)= P(B1)+P(B2) – P(B1).P(B2)=0.1168

2/ Désignons par E_2 l'évènement « milieu pollué au bout de 2 journées » et par M_1 l'évènement « milieu pollué au cours du 1[er] jour » et par M_2 l'évènement « milieu pollué au cours du 2[ème] jour » ; $P(M)=P(M_1)=P(M_2)=0.1168$

On a alors : $P(E_2) = P(M_1 \cup (\overline{M_1} \cap M_2)) = P(M_1) + P(\overline{M_1} \cap M_2) - P(M_1 \cap (\overline{M_1} \cap M_2)$

$$P(E_2) = P(M_1) + P(\overline{M_1}).P(M_2) - P(\emptyset) = 0.1168 + (0.8832 * 0.1168) = 0.22$$

3/ On désigne par E_n l'évènement « milieu pollué au bout de n jours » ;

$P(E_n) = 1 - P(\overline{E_n}) = 1 - P(\overline{E_1} \cap \overline{E_2} \cap \ldots \cap \overline{E_n}) = 1 - P(\overline{E_1}) * P(\overline{E_2}) * \ldots \cap P(\overline{E_n}) = 1 - (0.8832)^n$ car les évènements E_i sont indépendants.

4/ $P(E_n) \geq 0.5 \Leftrightarrow 1 - (0.8832)^n \geq 0.5 \Rightarrow n = 6$

14. Trois machines A, B et C produisent respectivement 60%, 30% et 10% de la production d'un produit. La machine A (respectivement B & C) produit 2% (respectivement 3% et 4%) d'objets défectueux. La machine A (respectivement B & C) produit 8% (respectivement 5% et 9%) d'objets de moyenne qualité.

1.

machine / qualité	A	B	C	Somme
Bonne	**0.9*600=540**	**0.92*300=276**	**0.87*100=87**	**903**
Moyenne	**0.08*600=48**	**0.05*300=15**	**0.09*100=9**	**72**
Défectueuse	**0.02*600=12**	**0.03*300=9**	**0.04*100=4**	**25**
Somme	**1000*.06=600**	**1000*.3=300**	**1000*01=100**	**N=1000**

2. Soit D : « la pièce tirée est défectueuse » P(D)= $\frac{cardD}{N} = \frac{25}{1000}$0.025,

B : « la pièce tirée est de bonne qualité » P(B)= $\frac{card\ B}{N} = \frac{903}{1000}$0.903

P(B/C)= $\frac{P(B\cap C)}{P(C)} = \frac{NbreB\cap C}{NbreC} = \frac{87}{100}$; $P((M/A) \cup (M/C))$= $\frac{P(M\cap A)}{P(A)} + \frac{P(M\cap C)}{P(C)} - P\big((M/A) \cap (M/C)\big) =$ $\frac{card(M\cap A)}{cardA} + \frac{card(M\cap C)}{cardC} - \big(P(M/A) * P(M/C)\big)$=$\frac{card(M\cap A)}{cardA} + \frac{card(M\cap C)}{cardC} - \frac{card(M\cap A)}{cardA} * \frac{card(M\cap C)}{cardC}$

P((D/A)∪(D/C)

15. On sait qu'à une date donnée, 3% d'une population est atteinte d'hépatite. On dispose de tests de dépistage de la maladie :

- Si la personne est malade, alors le test est positif avec une probabilité de 95%.

- Si la personne est saine, alors le test est positif avec une probabilité de 10%.

1. Quelle est la probabilité pour une personne d'être malade si son test est positif?
2. Quelle est la probabilité pour une personne d'être saine si son test est positif?
3. Quelle est la probabilité pour une personne d'être malade si son test est négatif?
4. Quelle est la probabilité pour une personne d'être saine si son test est négatif?

1. La probabilité pour une personne d'être malade si son test est positif est $P(M/T^+) = P(T^+/M)P(M)/P(T^+)$ or $P(T^+) = P(T^+/M)P(M) + P(T^+/S)P(S) = 0.95 \cdot 0.03 + 0.1 \cdot 0.97 = 0.1255$. D'où : $P(M/T^+) = 23.7\%$.
2. La probabilité pour une personne d'être saine si son test est positif est $P(S/T^+) = 1 - P(M/T^+) = 76.3\%$.
3. La probabilité pour une personne d'être malade si son test est négatif est $P(M/T^-) = 0.0017$.
4. La probabilité pour une personne d'être saine si son test est négatif est $1 - P(M/T^-) = 0.998 = 99.8\%$.