Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université des Sciences et de la Technologie d'Oran Mohammed Boudiaf

---

FACULTÉ CHIMIE L1 UEF Maths2

Fiche de TD 1(2019/2020)

"Les intégrales simples"

Exercice 01

I)Calculer les primitives suivantes en utilisant l'intégration par parties :

1. $I_1 = \int_0^{\pi} x\sin(x)dx$, 2.$I_2 = \int x\ln(x)dx$. 3. $I_3 = \int arctan(x)dx$ 4. $I_4 = \int \cos(x)e^x dx$.

II) Calculer les primitives suivantes en utilisant le changement de variable :

1. $I_1 = \int \sin(x)\cos(x)dx$ 2. $I_2 = \int_2^3 \frac{1}{\ln(x)x}dx$ 3.$I_3 = \int \frac{e^{\tan x}}{\cos^2(x)}dx$ 4.$I_4 = \int \frac{arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}$.

Exercice 02

Calculer les primitives du type : $\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx$

1. $I_1 = \int \frac{1}{(x^2-x-2)}dx$. 2. $I_2 = \int \frac{1}{(x+1)^2(x-1)}dx$, 3. $I_3 = \int \frac{x+3}{x^2+2x+2}dx$ 4. $I_4 = \int \frac{x^4+1}{x^3+x}dx$.

Exercice 03

Calculer les primitives des fonctions trigonométriques suivantes :

1. $I_1 = \int \sin(2x)\cos(x)dx$, 2. $I_2 = \int_0^{\pi} \sin(x)^3 dx$ 3. $I_3 = \int \cos^2(x)dx$, 4.$I_4 = \int \frac{1}{1+\cos(x)+\sin(x)}dx$.

Exercice 04

Calculer les primitives suivantes :

1. $I_1 = \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}+1}dx$, 2. $I_2 = \int \frac{\sqrt{x-1}}{x}dx$ 3. $I_3 = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$, 4. $I_4 = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x-2}}$.

UTILE :

1. $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) : coco - sisi$ 2. $\cos^2(a) = \frac{1+\cos(2a)}{2}$.
3. $\sin(a+b) = \cos(a)\sin(b) + \cos(b)\sin(a) : cosi + cosi$ 4. $\sin^2(a) = \frac{1-\cos(2a)}{2}$.
5. $\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\cos(a-b) + \cos(a+b))$ 6. $\sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b))$
7. $t = \tan\frac{x}{2}$, alors $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\tan x = \frac{2t}{1-t^2}$, $dx = \frac{2}{1+t^2}dt$.

Bon courage!

Dr. I.Medjadj

Faculté de chimie L1 Maths2

Solution de la Fiche de TD 1(2019/2020)L1 Chimie

Exercice 01 I)

1. $\int_0^{\pi} x\sin(x)$. On pose (IPP) :

$$u'(x) = \sin(x) \Rightarrow u(x) = -\cos(x)$$

$$\text{et } v(x) = x \Rightarrow v'(x) = 1.$$

Donc $I_1 = [-x\cos(x)]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos(x)dx$
$I_1 = \pi + [\sin(x)]_0^{\pi} = \pi.$

1. $I_2 = \int x\ln(x)dx$.On pose (IPP) :

$$u'(x) = x \Rightarrow u(x) = \frac{x^2}{2}$$

$$\text{et } v(x) = \ln(x) \Rightarrow v'(x) = 1/x.$$

Alors $I_2 = \frac{x^2}{2}\ln(x) - \int \frac{x}{2}dx$
$I_2 = \frac{x^2}{2}\ln(x) - \frac{x^2}{4} + c, c \in \mathbb{R}.$

2. $I_3 = \int arctan(x)dx$, on pose (IPP) :

$$u'(x) = 1 \Rightarrow u(x) = x$$

$$\text{et } v(x) = arctg(x) \Rightarrow v'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Alors $I_3 = xarctg(x) - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}dx = xarctg(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + c, c \in \mathbb{R}.$

II)

1. $I_1 = \int \sin(x)\cos(x)dx$

$$\text{On pose} \quad t = \sin(x) \text{ alors } dt = \cos(x)dx$$

$$I_1 = \int tdt = t^2/2 + c = \frac{\sin^2(x)}{2} + c, c \in \mathbb{R}.$$

2. $I_2 = \int_2^3 \frac{1}{\ln(x)x}dx$

$$\text{On pose} \quad t = \ln(x) \text{ alors } dt = \frac{1}{x}dx$$

$$\begin{cases} t = \ln(2), & \text{quand } x = 2 \\ t = \ln(3), & \text{quand } x = 3 \end{cases}$$

Ainsi : $I_3 = \int_{\ln(2)}^{\ln(3)} \frac{dt}{t} = [\ln|t|]_{\ln(2)}^{\ln(3)} = \ln(\ln(3)) - \ln(\ln(2)).$

3. $I_3 = \int \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x}dx$. On pose $t = \tan x$ alors $dt = \frac{dx}{\cos^2 x}$.

$$\int \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x}dx = \int e^t dt = e^t + c = e^{\tan x} + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Exercice 02

1.$I_1 = \dfrac{1}{x^2-x-2} = \displaystyle\int \frac{1}{(x+1)(x-2)}, \Delta \geq 0$. On décompose la fraction en éléments simples, c'est à dire on cherche a et b tels que :

$$\frac{1}{(x+1)(x-2)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-2}.$$

Pour calculer **a**, on multiplie les deux membres par $(x+1)$, on obtient

$$\frac{1}{(x-2)} = a + \frac{b(x+1)}{x-2}$$

on tend $x \to -1$ alors

$$\frac{-1}{3} = a.$$

Pour calculer **b**,on multiplie les deux membres par $(x-2)$, on obtient

$$\frac{1}{(x+1)} = \frac{a(x-2)}{x+1} + b$$

on tend $x \to 2$ alors

$$\frac{1}{3} = b.$$

(On peut utiliser l'indentification)

$$\frac{1}{(x+1)(x-2)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-2} = \frac{x(a+b)+b-2a}{(x+1)(x-2)}.$$

$$\begin{cases} a+b=0, \\ b-2a=1 \end{cases} \quad \Rightarrow 3a=-1, a=-1/3, b=1/3$$

$$I_1 = \frac{-1}{3}\int \frac{1}{x+1}dx + \frac{1}{3}\frac{b}{x-2},$$

$$I_1 = \frac{-1}{3}\ln|x+1| + \frac{1}{3}\ln|x-2| + c, c \in \mathbb{R}.$$

2.$I_2 = \dfrac{1}{(x+1)^2(x-1)}$, On décompose la fraction en éléments simples,

$$\frac{1}{(x+1)^2(x-1)} = \frac{a}{(x+1)} + \frac{b}{(x+1)^2} + \frac{c}{(x-1)}$$

même principe

$$c = \lim_{x\to 1}\frac{1}{(x+1)^2}, b = \lim_{x\to -1}\frac{1}{1-x},$$

mais pour a on peut pendre $x=0$ car c'est bien définie en 0 , on remplaçe dans les membres.

$$a = -\frac{1}{4}, b = -\frac{1}{2}, c = \frac{1}{4}.$$

Ainsi

$$I_2 = -\frac{1}{4}\ln|x+1| + \frac{1}{4}\ln|x-1| + \frac{1}{2(1+x)} + c, c \in \mathbb{R}.$$

3. $I_3 = \displaystyle\int \frac{x+3}{x^2+2x+2}dx$ on remarque $(x^2+2x+2)' = 2x+2$

Ainsi $I_3 = \frac{1}{2}\displaystyle\int \frac{2x+2}{x^2+2x+2}dx + \int \frac{2}{x^2+2x+2}dx = \frac{1}{2}\ln|x^2+2x+2| + I'$,

$I' = \displaystyle\int \frac{2}{x^2+2x+2}dx$ sachant que $\Delta < 0$ on écrit le dénominateur sous la forme u^2+1,

$x^2+2x+2 = (x+1)^2+1$ Ainsi on pose $u=(x+1) \Rightarrow du = dx$.

$I' = 2\displaystyle\int \frac{1}{1+u^2}du = 2arctg(u) + c; c \in \mathbb{R}$

$$I_3 = \frac{1}{2}\ln|x^2+2x+2| + 2arctg(1+x) + c.$$

4. $I_4 = \displaystyle\int \frac{x^4+1}{x^3+x}dx$. On fait une division euclidienne $x^4+1 = x(x^3+x) - x^2 + 1$, ainsi
$I_4 = \displaystyle\int x dx - \int \frac{-x^2+1}{x^3+x}dx = x^2/2 - \underbrace{\int \frac{1-x^2}{x(x^2+1)}dx}_{J}$. sachant que $\Delta < 0, x^2+1$ On décompose :

$$\frac{1-x^2}{x(x^2+1)} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{x^2+1}$$

$a = \lim_{x\to 0} \frac{1-x^2}{(x^2+1)} = 1$. Pour b, c deux inconnus on remplaçe par deux valeurs $x=1, x=-1$ on retrouve un système à deux équations $0 = 1 + \frac{b+c}{2} \wedge 0 = -1 + \frac{-b+c}{2}, b=-2, c=0$

$$J = \ln|x| - \ln(x^2+1) + c, c \in \mathbb{R}.$$

$$I_3 = x^2/2 - \ln|x| + \ln(x^2+1) + c, c \in \mathbb{R}.$$

Solution Exercice 03 :

1. $I_1 = \displaystyle\int \sin(2x)\cos(x)dx$, On utilise les formules trigonométriques :
   $I_1 = \frac{1}{2}\displaystyle\int(\sin(3x)+\sin(x))dx = \frac{1}{2}[-\cos(x) - \cos(3x)/3)] + c, c \in \mathbb{R}$.
1. $I_2 = \displaystyle\int_0^{\pi} \sin(x)^3 dx$. On a $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, ainsi

$$I_2 = \int_0^{\pi}(1-\cos^2(x))\sin(x)dx =$$

$$= \int_0^{\pi}\sin(x)dx + \int_0^{\pi}\cos^2(x)(-\sin(x))dx$$

$$= [-\cos(x)]_0^{\pi} + [\cos^3(x)/3]_0^{\pi} = \frac{4}{3}.$$

2. $I_3 = \displaystyle\int \cos^2(x)dx = \int \frac{1+\cos(2x)}{2}dx$ $I_3 = x/2 + \frac{\sin(2x)}{4} + c, c \in \mathbb{R}$.
3. $I_4 = \displaystyle\int \frac{1}{1+\cos(x)+\sin(x)}dx$. On pose $t = \tan\frac{x}{2}$, alors

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \tan x = \frac{2t}{1-t^2}, \quad dx = \frac{2}{1+t^2}dt.$$

$$I_4 = \int \frac{dt}{1+t} = \ln|1+t| + c = \ln|1+\tan\frac{x}{2}| + c, c \in \mathbb{R}.$$

Exercice 04
Calculer les primitives suivantes :

1. $I_1 = \displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}+1}dx$, le $PGCD(3,2) = 6 = k$ on pose $x = t^6 \Rightarrow dx = 6t^5 dt$. $I_1 = 6\displaystyle\int \frac{t^3}{t^2+1}t^5 dt$ On fait une division euclidienne $t^8 = (1+t^2)(t^6 - t^4 + t^2 - 1) + 1$. Alors

$$I_1 = 6\frac{t^7}{7} - 6\frac{t^5}{5} + 6\frac{t^3}{3} - 6t + 6\int \frac{1}{1+t^2}dt.$$

$$I_1 = 6\frac{t^7}{7} - 6\frac{t^5}{5} + 6\frac{t^3}{3} - 6t + 6arctg(t) + c.$$

$$I_1 = 6\frac{x^{\frac{7}{6}}}{7} - 6\frac{x^{\frac{5}{6}}}{5} + 6\frac{x^{\frac{3}{6}}}{3} - 6x^{\frac{1}{6}} + 6arctg(x^{\frac{1}{6}}) + c$$

2. $I_2 = \displaystyle\int \frac{\sqrt{x-1}}{x}dx$ on pose $t^2 = x-1 \Rightarrow 2tdt = dx$,

$$I_2 = \int \frac{t}{t^2+1}2tdt = 2\int \frac{t^2+1-1}{t^2+1}dt$$

$$I_2 = 2t - 2arctg(t) + c = 2\sqrt{x-1} - 2arctg(\sqrt{x-1}) + c, c \in \mathbb{R}.$$

3. $I_3 = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$, $a > 0$ on pose $\sqrt{x^2+1} = x + t \Rightarrow x^2 + 1 = x^2 + 2xt + t^2$.

$$x = \frac{1-t^2}{2t} \Rightarrow dx = -\frac{t^2+1}{2t^2}dt$$

$$I_3 = -\ln|t| + c = -\ln|\sqrt{x^2+1} - x| + c.$$

4. $I_4 = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x-2}}$ sachant que $\Delta \geq 0$ on choisit l'une des racines on pose

$$\sqrt{x^2+x-2} = (x-1)t \Rightarrow x = \frac{t^2+2}{t^2-1} = 1 + \frac{3}{t^2-1}$$

$$\Rightarrow dx = -6\frac{t}{(t^2-1)^2}dt.$$

$$I_4 = -2\int \frac{dt}{t^2-1} = \ln|1+t| - \ln|1-t| + c.$$

$$I_4 = \ln|1 + \sqrt{|\frac{x+2}{x-1}|} - \ln|1 - \sqrt{|\frac{x+2}{x-1}|} + c.$$