Université de Bordj Bou Arreridj

Département d'électromécanique

Faculté des sciences et de la technologie

Théorie du Champ Électromagnétique

Option : ELT, (3ème Année)

Pr. HAMIMID Mourad

Table des matières

Chapitre 1

Notions Vectorielles

1.1 Calcul vectoriel

1.1.1 Vecteur

Les vecteurs sont habituellement décrits à l'aide de leurs composantes scalaires, de la manière suivante :

$$\overrightarrow{V} : (V_x, V_y, V_z) \tag{1.1}$$

ou en utilisant les vecteurs unitaires

$$\overrightarrow{V} = V_x \overrightarrow{e_x} + V_y \overrightarrow{e_y} + V_z \overrightarrow{e_z} \tag{1.2}$$

1.1.1.1 Norme d'un vecteur

La norme d'un vecteur mesure la longueur de ce dernier

$$\left\|\overrightarrow{V}\right\| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2} \tag{1.3}$$

1.1.1.2 Vecteur unitaire

Un vecteur unitaire $\overrightarrow{u}$ est un vecteur qui présente une grandeur égale a l'unité. La longueur de $\overrightarrow{u}$ est caractérisée par un module : $|\overrightarrow{u}| = 1$. Si $\overrightarrow{u}$ est un vecteur unitaire du vecteur $\overrightarrow{A}$:

$$\overrightarrow{u} = \frac{\overrightarrow{A}}{\left|\overrightarrow{A}\right|} \tag{1.4}$$

1.1.1.3 Addition de deux vecteurs

Deux vecteurs $\overrightarrow{A}(A_x, A_y, A_z)$ et $\overrightarrow{B}(B_x, B_y, B_z)$, leur somme $\overrightarrow{A}+\overrightarrow{B}$ est obtenue en formant un triangle, le vecteur $\overrightarrow{C}(C_x, C_y, C_z)$ résultant de cette somme est un coté du triangle formé. $\overrightarrow{C}(Cx = A_x + B_x, C_y = A_y + B_y, C_z = A_z + B_z)$

1.1.1.4 Soustraction de deux vecteurs

Soient deux vecteurs $\overrightarrow{A}(A_x, A_y, A_z)$ et $\overrightarrow{B}(B_x, B_y, B_z)$, leur soustraction $\overrightarrow{A} - \overrightarrow{B}$ est obtenue par leurs différences donnant ainsi un autre vecteur $\overrightarrow{C}(Cx = A_x - B_x, C_y = A_y - B_y, C_z = A_z - B_z)$

1.1.1.5 Multiplication d'un vecteur par un scalaire

Soient un vecteur $\overrightarrow{A}$ et un scalaire s, leur multiplication noté $s\overrightarrow{A}$ de même direction que $\overrightarrow{A}$, son module est s multiplie par le module de $\overrightarrow{A}$.

1.1.1.6 Le produit scalaire

Le produit scalaire est une multiplication de deux vecteurs $\overrightarrow{A}$ et $\overrightarrow{B}$, noté $\overrightarrow{A} \bullet \overrightarrow{B}$ donnant un scalaire s. On peut le calculer par deux méthodes :

— Méthode analytique :

$$\overrightarrow{A} \bullet \overrightarrow{B} = \left|\overrightarrow{A}\right| \cdot \left|\overrightarrow{B}\right| \cos(\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B}) \tag{1.5}$$

— Méthode cartésienne :

$$\overrightarrow{A} \bullet \overrightarrow{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \tag{1.6}$$

1.1.1.7 Propriétés du produit scalaire

Si $\overrightarrow{A} \bullet \overrightarrow{B} = 0$ alors $\overrightarrow{A}$ et $\overrightarrow{B}$ sont perpendiculaires

$$\overrightarrow{A} \bullet \overrightarrow{B} = \overrightarrow{B} \bullet \overrightarrow{A}$$

$$\overrightarrow{A}\left(\overrightarrow{B} + \overrightarrow{C}\right) = \overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B} + \overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{C}$$

1.1.1.8 Le produit vectoriel

Le produit vectoriel de deux vecteurs $\overrightarrow{A}$ et $\overrightarrow{B}$, noté $\overrightarrow{A} \wedge \overrightarrow{B}$ ou ($\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B}$) est un vecteur.

— Méthode analytique :

$$\overrightarrow{A} \wedge \overrightarrow{B} = \left|\overrightarrow{A}\right| \left|\overrightarrow{B}\right| \sin(\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B})$$

— Méthode cartésienne :

$$\overrightarrow{A} \wedge \overrightarrow{B} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{e_x} & \overrightarrow{e_y} & \overrightarrow{e_z} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_y & A_z \\ B_y & B_z \end{vmatrix} \overrightarrow{e_x} - \begin{vmatrix} A_x & A_z \\ B_x & B_z \end{vmatrix} \overrightarrow{e_y} + \begin{vmatrix} A_x & A_y \\ B_x & B_y \end{vmatrix} \overrightarrow{e_z}$$

$$\overrightarrow{A} \wedge \overrightarrow{B} = (A_y B_z - A_z B_y)\overrightarrow{e_x} - (A_x B_z - A_z B_x)\overrightarrow{e_y} + (A_x B_y - A_y B_x)\overrightarrow{e_z}$$

1.1.1.9 Propriétées du produit vectoriel

1. $\overrightarrow{A} \wedge \overrightarrow{B} = -\overrightarrow{B} \wedge \overrightarrow{A}$
2. Si $\overrightarrow{A} \wedge \overrightarrow{B} = 0$ Alors $\overrightarrow{A}$ et $\overrightarrow{B}$ sont parallèle.

1.2 Opérateurs Vectoriels

1.2.1 Nabla

L'opérateur vectoriel, symbolisé par un triangle avec la pointe vers le bas $\overrightarrow{\nabla}$, est appelé **nabla**, "Vectoriel", cela signifie que l'opérateur mathématique en question effectue des opérations mathématiques sur les trois axes du repère.

— Coordonnées cartésiennes

Repère orthonormé : trois axes (Ox, Oy, Oz) perpendiculaires, vecteurs unitaires ($\overrightarrow{e}_x$, $\overrightarrow{e}_y$, $\overrightarrow{e}_z$) de mêmes grandeurs.

$$\overrightarrow{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\overrightarrow{e_x} + \frac{\partial}{\partial y}\overrightarrow{e_y} + \frac{\partial}{\partial z}\overrightarrow{e_z} \tag{1.7}$$

— Coordonnées cylindriques

Un rayon r, un angle θ (lettre grecque theta) par rapport à l'axe (Ox) et au plan (Oxy), une hauteur z. Point de coordonnées (r, θ, z).

1.3 Gradient

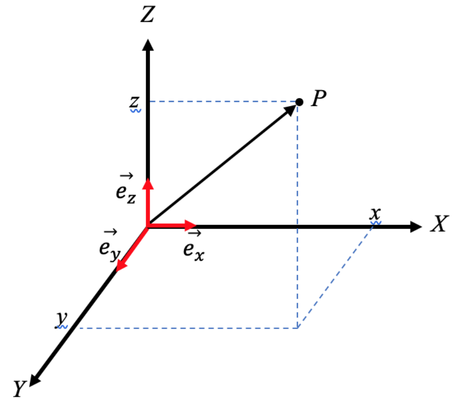
Soit un trièdre orthonormé ($\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, $\vec{e}_z$) et P un point de l'espace, de coordonnées (x, y, z) :

$$\overrightarrow{OP} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z \tag{1.8}$$

La fonction $f(P)$ est dite fonction scalaire de point ou champ scalaire si

$$f(P) = f(x, y, z) \tag{1.9}$$

Le vecteur $\vec{V}(P)$ est dite fonction vectorielle de point ou champ vectoriel si :



$$\vec{V}(P) = v_x(x, y, z)\vec{e}_x + v_y(x, y, z)\vec{e}_y + v_z(x, y, z)\vec{e}_z \tag{1.10}$$

L'opérateur $\overrightarrow{grad}$ associé à une fonction scalaire $f(x, y, z)$ est un vecteur de composantes $\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$

— *Coordonnées cartésiennes*

$$\overrightarrow{grad}\, f = \vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e}_z \tag{1.11}$$

— *Coordonnées cylindriques*

$$\overrightarrow{grad}\, f = (\overrightarrow{grad} f)_r\vec{e}_r + (\overrightarrow{grad} f)_\theta\vec{e}_\theta + (\overrightarrow{grad} f)_z\vec{e}_z \tag{1.12}$$

$$\overrightarrow{grad} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e_r} \\ \vec{e_\theta} \\ \vec{e_z} \end{pmatrix}$$

1.4 Divergence

l'opérateur *div* ou $(\vec{\nabla}\bullet)$ associe à un vecteur $\vec{V}$ le produit scalaire par ce vecteur par $\vec{\nabla}$, $div\vec{V} = \vec{\nabla}\vec{V} =$ scalaire

— *Coordonnées cartésiennes*

$div\vec{V} = \vec{\nabla}\bullet\vec{V}$

$\vec{V} = \underbrace{V_x\vec{e}_x}_{v_x} + \underbrace{V_y\vec{e}_y}_{v_y} + \underbrace{V_z\vec{e}_z}_{v_z}$

$$div\vec{V} = \frac{\partial v_x}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial v_y}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial v_z}{\partial z}\vec{e}_z = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \tag{1.13}$$

— *Coordonnées cylindriques*

$$div\vec{V} = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rV_r)}{\partial r} + \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta}\right) + \frac{\partial V_z}{\partial z} \tag{1.14}$$

1.5 Rotationnel

l'opérateur $\overrightarrow{rot}$ ou $(\vec{\nabla}\wedge.)$ associé à un vecteur, le produit vectoriel de $\vec{\nabla}$ par le vecteur $\vec{V}$

$\overrightarrow{rot}\vec{V} = \vec{\nabla}\wedge\vec{V}$

— *Coordonnées cartésiennes*

$$\vec{\nabla}\wedge\vec{V} = \overrightarrow{rot}\vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z}\right)\vec{e}_x + \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x}\right)\vec{e}_y + \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial z}\right)\vec{e}_z \tag{1.15}$$

— *Coordonnées cylindriques*

$\left(\overrightarrow{rot}\vec{V}\right)_r = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial V_z}{\partial \theta} - \frac{\partial V_\theta}{\partial z}\right)\vec{e}_r$

$\left(\overrightarrow{rot}\vec{V}\right)_\theta = \left(\frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial r}\right)\vec{e}_\theta$

$\left(\overrightarrow{rot}\vec{V}\right)_z = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rV_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial V_r}{\partial \theta}\right)\vec{e}_z$

1.6 Le Laplacian

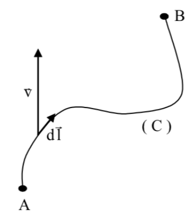
l'opérateur noté ($\triangle$) est défini par :
$\triangle = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$
il peut s'applique à une fonction scalaire

$$\triangle f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \tag{1.16}$$

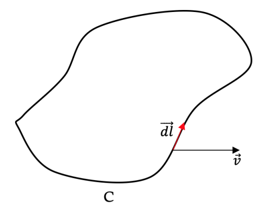
1.7 Circulation d'un champ vectoriel

On définit la circulation d'un vecteur $\overrightarrow{v}$ le long d'un contour (C) , par l'intégrale curviligne :

$$C_{\overrightarrow{AB}}(\overrightarrow{v}) = \int_{\overrightarrow{AB}} \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{dl} \tag{1.17}$$



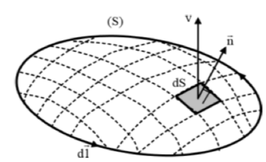
La circulation de long d'un contour fermé est notée :



$$C(\overrightarrow{v}) = \oint \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{dl} \tag{1.18}$$

1.8 Flux d'un champ vectoriel

On définit le flux d'un vecteur $\overrightarrow{v}$ à travers une surface (s) par l'intégrale double
$\phi(s) = \iint_{(s)} \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{n} ds$
Lorsque la surface (S) est fermée, le vecteur unitaire $\overrightarrow{n}$ est dirigé de l'intérieur vers l'extérieur.



1.9 Théorème de Stokes-Théorème

La circulation d'un vecteur le long d'un contour fermé (C) limitant une surface (S) est égal au flux de son rotationnel à travers cette surface.

$$\oint \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{dl} = \iint_{(s)} \overrightarrow{rot}(\overrightarrow{v}) \cdot \overrightarrow{n} ds \tag{1.19}$$

Le vecteur unitaire $\overrightarrow{n}$ est orienté selon la convention du tire-bouchon de Maxwell.

1.10 Théorème de Gauss-Ostrogradski (ou théorème de la divergence)

Le flux d'un champ vectoriel à travers une surface fermée (S) est égal à l'intégrale de sa divergence dans le volume (τ) limité par la surface fermée (S)

$$\oiint_{(s)} \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{n} \, ds = \iiint_{(\tau)} div(\overrightarrow{v}) \, d\tau \tag{1.20}$$