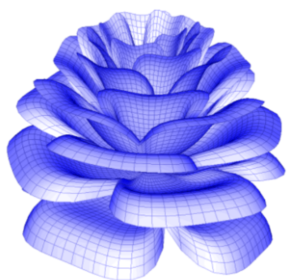
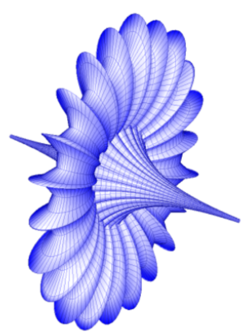
FACULTÉ CHIMIE L1 UEF Maths2

Chapitre 1 : Les intégrales



Imene Medjadj



0.1 Calcul de primitives

Définition 0.1.1 *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. On dit qu'une fonction F est une primitive de f si et seulement si*

$$\forall x \in [a,b] : \quad F'(x) = f(x).$$

Définition 0.1.2 *Soit une fonction $f(x)$ continue sur $[a,b]$ et $F(x)$ une primitive de f. On note l'intégrale de la fonction f sur l'intervalle $[a,b]$ par :*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Propriétés de l'intégrale définie

1. $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$
2. $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ avec $a \leq c \leq b$ (Relation de Chasles).
3. $\displaystyle\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$
4. $\displaystyle\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx,\ \lambda \in \mathbb{R}.$
5. Si $f \geq 0$ sur $[a,b]$ alors $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \geq 0.$

   Si $f \leq 0$ sur $[a,b]$ alors $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \leq 0.$
6. Si $f \geq g$ sur $[a,b]$ alors $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx.$
7. On a $\displaystyle|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$
8. Si f est continue sur $[a,b]$ alors elle est intégrable sur $[a,b]$.
9. Si f est paire alors $\displaystyle\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx.$
10. Si f est impaire alors $\displaystyle\int_{-a}^a f(x)dx = 0.$
11. Si f est périodique, de période T alors $\displaystyle\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx.$

0.2 Intégration par parties

Théorème 0.2.1 *Soient u et v deux fonctions de classe $C^1([a,b])$, alors*

$$\int_a^b u'(x)v(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx.$$

avec $[u(x)v(x)]_a^b = u(b)v(b) - u(a)v(b)$.

Exemple 0.2.2 *1.* $\int_0^{\pi} x\sin(x)$. *On pose (IPP) :*

$$u'(x) = \sin(x) \Rightarrow u(x) = -\cos(x)$$

$$et\, v(x) = x \Rightarrow v'(x) = 1.$$

Donc $I_1 = [-x\cos(x)]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos(x)dx, \quad I_1 = \pi + [\sin(x)]_0^{\pi} = \pi.$

1. $I_2 = \int x\ln(x)dx$. *On pose (IPP) :*

$$u'(x) = x \Rightarrow u(x) = \frac{x^2}{2}$$

$$et\, v(x) = \ln(x) \Rightarrow v'(x) = 1/x.$$

Alors $I_2 = \frac{x^2}{2}\ln(x) - \int \frac{x}{2}dx,\ I_2 = \frac{x^2}{2}\ln(x) - \frac{x^2}{4} + c, c \in \mathbb{R}.$

2. $I_3 = \int arctan(x)dx$, *on pose (IPP) :*

$$u'(x) = 1 \Rightarrow u(x) = x$$

$$et\, v(x) = arctg(x) \Rightarrow v'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Alors $I_3 = xarctg(x) - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}dx = xarctg(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + c, c \in \mathbb{R}.$

0.3 Changement de variables

Théorème 0.3.1 *Soit* $f : I \to \mathbb{R}$ *une fonction continue sur* I *et* $g : J \to I$ *une bijection de classe* C^1 *alors*

$$\forall a, b \in J : \quad \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)dx = \int_a^b f(g(t))g'(t)dt.$$

On pose $x = g(t)$ alors $dx = g'(t)dt$.

Exemple 0.3.2 *1.* $I_1 = \int (\sin(x))^{303}\cos(x)dx$, *On effectue le (C.V) changement de variable suivant, on pose*

$$t = \sin(x) \Rightarrow dt = \cos(x)dx.$$

Ainsi I_1 *devient :*

$$I_1 = \int t^{303}dt = \frac{t^{304}}{304} + c = \frac{(\sin(x))^{304}}{304} + c, c \in \mathbb{R}.$$

2. $I_2 = \int \frac{1}{x\ln(x)}dx$, *(C.V) : on pose*

$$t = \ln(x) \Rightarrow dt = \frac{1}{x}dx.$$

Ainsi I_2 *devient :* $I_2 = \int \frac{1}{t}dt = \ln|t| + c = \ln|\ln(x)| + c, c \in \mathbb{R}.$

0.4 Intégration des fractions rationnelles

Décomposition en éléments simples et intégrations

Soit $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ où $P(x)$ et $Q(x)$ sont des polynômes où le degré de $P(x)$ est inférieur strictement à celui de $Q(x)$ (sinon on fait la division euclidiènne).

1. Si $Q(x) = (x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n)$ alors
$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-a_1} + \frac{A_2}{x-a_2} + \dots + \frac{A_n}{x-a_n}.$$
Ainsi
$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = A_1 \ln|x-a_1| + A_2 \ln|x-a_2| + \dots + A_n \ln|x-a_n| + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$
2. Si $P(x) = 1$ et $Q(x) = (x-a)^k$, alors
$$\int \frac{dx}{(x-a)^k} dx = \begin{cases} \ln|x-a|, \quad si \quad k=1 & ; \\ \frac{1}{1-k}(x-a)^{1-k} + c \quad c \in \mathbb{R}, si \quad k \neq 1 & . \end{cases}$$
3. Si $Q(x) = (x-a)^{k_1}(x-b)^{k_2}\dots(x-c)^{k_n}$, alors
$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{A_{k_1}}{(x-a)^{k_1}} + \frac{B_1}{x-b} + \frac{B_2}{(x-b)^2} + \dots + \frac{B_{k_2}}{(x-b)^{k_2}}$$
$$+ \frac{C_1}{x-c} + \frac{C_2}{(x-c)^2} + \dots + \frac{C_{k_n}}{(x-c)^{k_n}}$$
4. Si $Q(x) = ax^2 + bx + c$ dans ce type on a trois cas
   - Si le dominateur admet deux racines réelles distinctes x_1 et x_2 alors $Q(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$. D'où
   $$\frac{\alpha x + \beta}{ax^2+bx+c} = \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{x-x_2}$$
   ainsi
   $$\int \frac{\alpha x + \beta}{ax^2+bx+c} dx = A_1 \ln|x-x_1| + A_2 \ln|x-x_2| + k, \quad k \in \mathbb{R}.$$
   - Si le dominateur admet une racine double $x_0 \in \mathbb{R}$, alors
   $$\frac{\alpha x + \beta}{ax^2+bx+c} = \frac{A_1}{x-x_0} + \frac{A_2}{(x-x_0)^2}$$
   ainsi
   $$\int \frac{\alpha x + \beta}{ax^2+bx+c} dx = A_1 \ln|x-x_0| - \frac{A_2}{x-x_0} + k, \quad k \in \mathbb{R}.$$
   - Si le dominateur n'admet pas de racine dans $\mathbb{R}$, alors on écrit
   $$\frac{\alpha x + \beta}{ax^2+bx+c} = \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c} + \frac{\gamma}{ax^2+bx+c}.$$
   On fait un changement de variable $u(x) = u$ tel que
   $$\frac{\gamma}{ax^2+bx+c} = \frac{A}{u^2+1}.$$
   Ainsi
   $$\int \frac{\alpha x + \beta}{ax^2+bx+c} = \ln|ax^2+bx+c| + A \arctan(u) + k, \quad k \in \mathbb{R}.$$

5. Si $Q(x) = (x - x_0)^k (ax^2 + bx + c)$, alors

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x - x_0} + \frac{A_2}{(x - x_0)^2} + \cdots + \frac{A_{k_1}}{(x - x_0)^k} + \frac{\alpha x + \beta}{ax^2 + bx + c}$$

Après on décompose $\frac{\alpha x+\beta}{ax^2+bx+c}$ en éléments simple suivant le cas précédent.

6. Si $Q(x) = (ax^2 + bx + c)^k$, alors

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = A\frac{2ax + b}{(ax^2 + bx + c)^k} + \frac{B}{(ax^2 + bx + c)^k}$$

pour le cas où le dominateur n'admet pas racines dans $\mathbb{R}$ alors on fait un changement de variable $u(x)$ dans la deuxième fraction ($\frac{B}{(ax^2+bx+c)^k}$) tel que

$$\frac{B}{(ax^2 + bx + c)^k} = \frac{C}{(u^2 + 1)^k}.$$

Ainsi
Si $k = 1$ alors

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = A \ln |ax^2 + bx + c| + C \arctan(u) + K, \quad K \in \mathbb{R}$$

Si $k \neq 1$ alors $\int A\frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^k} dx = \dfrac{A}{1-k}(ax^2 + bx + c)^{1-k}$
et

$$\int \frac{B}{(ax^2 + bx + c)^k} dx = \int \frac{C}{(u^2 + 1)^k} dx = I_k.$$

On calcule cette intégrale par récurrence : on fait une intégration par partie qui permet de passer de I_{k-1} à I_k.

Exemple 0.4.1 *1.* $\displaystyle\int \frac{dx}{x^+ 2x + 3} = \int \frac{dx}{(x+2)(x+1)}$,*On décompose la fraction en éléments simples, c'est à dire on cherche a et b tels que :*

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x+2}.$$

*Pour calculer **a**, on multiplie les deux membres par* $(x+1)$*, on obtient*

$$\frac{1}{(x+2)} = a + \frac{b(x+1)}{x+2}$$

on tend $x \to -1$ *alors*

$$1 = a.$$

*Pour calculer **b**, on multiplie les deux membres par* $(x+2)$*, on obtient*

$$\frac{1}{(x+1)} = \frac{a(x+2)}{x+1} + b$$

on tend $x \to -2$ *alors*

$$-1 = b.$$

(On peut utiliser l'indentification)

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x+2} = \frac{x(a+b)+b+2a}{(x+1)(x+2)}.$$

$$\begin{cases} a+b=0, \\ b+2a=1 \end{cases} \quad \Rightarrow a=1, b=-1$$

(On peut aussi remplacer deux valeurs de x pour obtenir deux équations à deux inconnus)

$$x=0: \frac{1}{2} = a + \frac{b}{2}, x=1: \frac{1}{6} = \frac{a}{2} + \frac{b}{3} \Rightarrow a=1, b=-1.$$

$$I_1 = \int \frac{1}{x+1}dx - \frac{1}{x-2},$$
$$I_1 = \ln|x+1| - \ln|x-2| + c, c \in \mathbb{R}.$$

2. $I_2 = \frac{1}{x^2(x-1)}$, *On décompose la fraction en éléments simples,*

$$\frac{1}{x^2(x-1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{(x-1)}$$

même principe

$$c = \lim_{x\to 1}\frac{1}{x^2} = 1, b = \lim_{x\to 0}\frac{1}{1-x} = 1,$$

mais pour a on peut pendre $x=-1$ car c'est bien définie en -1 , on remplaçe dans les membres.

$$a=-1, b=1, c=1.$$

Ainsi

$$I_2 = -\ln|x| + \ln|x-1| + \frac{1}{x} + c, c \in \mathbb{R}.$$

3. $I_3 = \int \frac{x+3}{x^2+2x+2}dx$ *on remarque* $(x^2+2x+2)' = 2x+2$
Ainsi $I_3 = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+2}dx + \int \frac{2}{x^2+2x+2}dx = \frac{1}{2}\ln|x^2+2x+2| + I'$,
$I' = \int \frac{2}{x^2+2x+2}dx$ *sachant que* $\Delta < 0$ *on écrit le dénominateur sous la forme* u^2+1,
$x^2+2x+2 = (x+1)^2+1$ *Ainsi on pose* $u=(x+1) \Rightarrow du = dx$.
$I' = 2\int \frac{1}{1+u^2}du = 2arctg(u) + c; c \in \mathbb{R}$

$$I_3 = \frac{1}{2}\ln|x^2+2x+2| + 2arctg(1+x) + c.$$

4. $I_4 = \int \frac{x^4+1}{x^3+x}dx$. *On fait une division euclidienne* $x^4+1 = x(x^3+x) - x^2+1$, *ainsi* $I_4 = \int xdx - \int \frac{-x^2+1}{x^3+x}dx = x^2/2 - \underbrace{\int \frac{1-x^2}{x(x^2+1)}dx}_{J}$. *sachant que* $\Delta < 0, x^2+1$ *On décompose :*

$$\frac{1-x^2}{x(x^2+1)} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{x^2+1}$$

$a = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-x^2}{(x^2+1)} = 1$. *Pour b, c deux inconnus on remplaçe par deux valeurs $x = 1, x = -1$ on retrouve un système à deux équations* $0 = 1 + \frac{b+c}{2} \wedge 0 = -1 + \frac{-b+c}{2}, b = -2, c = 0$

$$J = \ln|x| - \ln(x^2+1) + c, c \in \mathbb{R}.$$

$$I_4 = x^2/2 - \ln|x| + \ln(x^2+1) + c, c \in \mathbb{R}.$$

5. $I_5 = \displaystyle\int \frac{1}{(x^2-1)(x^2+1)}$ *On décompose :*

$$\frac{1}{(x-1)(x+1)(x^2+1)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1} + \frac{cx+d}{x^2+1}.$$

$$a = \lim x \to 1 \frac{1}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{1}{4}, b = \lim_{x\to -1} \frac{1}{(x-1)(x^2+1)} = -\frac{1}{4}, c = 0, d = -\frac{1}{2}$$

Ainsi

$$I_5 = \frac{1}{4}\ln|x-1| - \frac{1}{4}\ln|x+1| - \frac{1}{2}\arctan(x) + c.$$

0.5 Intégration des fonctions trigonométriques

- **Méthode 1 : Les règles de Bioche**
  On pose $\omega(x) = f(x)dx$, on a alors
  $\omega(-x) = -f(-x)dx$
  $\omega(\pi - x) = -f(\pi - x)dx$.
  1. Si $\omega(-x) = \omega(x)$, alors on fait un changement de varialble tel que on pose $u(x) = \cos x$.
  2. Si $\omega(\pi - x) = \omega(x)$, alors on fait un changement de variable tel que on pose $u(x) = \sin x$.
  3. Si $\omega(\pi + x) = \omega(x)$, alors on fait un changement de variable tel que on pose $u(x) = \tan x$.
- **Méthode 2 :** on fait un changement de variable suivant : $t = \tan\frac{x}{2}$, alors

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \tan x = \frac{2t}{1-t^2}, \quad dx = \frac{2}{1+t^2}dt.$$

Exemple 0.5.1 1. $I_1 = \sin(x)\cos^2(x)dx$ *on pose* $t = \cos(x) \Rightarrow dt = -\sin(x)dx$ I_1 *devient* $I_1 = -\displaystyle\int t^2 dt = -\frac{t^3}{3} + c = -\frac{\cos^3(x)}{3} + c.$

2. $I_2 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^3(x)dx$, *on pose* $t = \sin(x) \Rightarrow dt = \cos(x)dx, x = 0 \Rightarrow t = 0, x = \pi/2 \Rightarrow t = 1$ I_2 *devient* $I_2 = \displaystyle\int_0^1 (1-t^2)dt = [t - \frac{t^3}{3}]_0^1 = \frac{2}{3}.$

3. $I_3 = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \tan(x^3)dx$ *on pose* $t = \tan(x) \Rightarrow x = \arctan(t) \Rightarrow dx = \dfrac{dt}{1+t^2}, x = 0 \Rightarrow t = 0, x = \pi/4 \Rightarrow t = 1$ *Ainsi* I_3 *devient*

$$I_3 = \int_0^1 \frac{t^3}{1+t^2}dt = \int_0^1 \frac{t(1+t^2)-t}{1+t^2}dt = \int_0^1 tdt - \frac{1}{2}\int_0^1 2t1+t^2dt = [\frac{t^2}{2} - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)]_0^1 = \frac{1}{2}(1-\ln(2).$$

4. $I_4 = \displaystyle\int \frac{1}{1+\sin(x)}dx$ *on pose n pose* $t = \tan\frac{x}{2}$, *alors*

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2},\quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2},\quad \tan x = \frac{2t}{1-t^2},\quad dx = \frac{2}{1+t^2}dt.$$

$$I_4 = \int \frac{1}{1+\dfrac{2t}{1+t^2}}\frac{2dt}{1+t^2} = 2\int \frac{1}{(1+t)^2}dt = -\frac{2}{1+t} + c.$$

0.6 Intégration des fonctions Rationnelles

1. Intégrale de type $\int R(x, x^{\frac{m}{n}}, \ldots, x^{\frac{r}{s}})dx$, où R est une fonction rationnelle.
   On cherche le dénominateur commun entre $n, \ldots, s$ on le note k. En suite, on fait le changement de variable :
   $$x = t^k \text{ alors } dx = kt^{k-1}dt.$$
2. Intégrale de type $\int R(x, (\frac{ax+b}{cx+d})^{\frac{m}{n}}, \ldots, (\frac{ax+b}{cx+d})^{\frac{r}{s}})dx$
   On pose $\frac{ax+b}{cx+d} = t^k$ avec k le dénominateur commun entre $n, \ldots, s$.
3. Intégrale de type $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$ avec $a \neq 0$
   i Si $a > 0$ on pose $\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm\sqrt{a}x + t$ alors
   $$ax^2+bx+c = ax^2+t^2 \pm 2\sqrt{a}xt \text{ d'où } x = \frac{t^2-c}{b \pm 2\sqrt{a}t}.$$
   ii Si $c > 0$ On pose $\sqrt{ax^2+bx+c} = xt \pm \sqrt{c}$ alors $x = \frac{\pm 2\sqrt{c}t - b}{a-t^2}$.
   iii Si ax^2+bx+c admet deux racines distinctes dans $\mathbb{R}$ α, β alors on pose
   $$\sqrt{ax^2+bx+c} = (x-\alpha)t \text{ ou } \sqrt{ax^2+bx+c} = (x-\beta)t.$$

Exemple 0.6.1 *1.* $I_1 = \displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}+1}dx$, *le* $PGCD(3,2) = 6 = k$ *on pose* $x = t^6 \Rightarrow dx = 6t^5dt$.

$I_1 = 6\displaystyle\int \frac{t^3}{t^2+1}t^5dt$ *On fait une division euclidienne* $t^8 = (1+t^2)(t^6-t^4+t^2-1)+1$. *Alors*

$$I_1 = 6\frac{t^7}{7} - 6\frac{t^5}{5} + 6\frac{t^3}{3} - 6t + 6\int \frac{1}{1+t^2}dt.$$

$$I_1 = 6\frac{t^7}{7} - 6\frac{t^5}{5} + 6\frac{t^3}{3} - 6t + 6arctg(t) + c.$$

$$I_1 = 6\frac{x^{\frac{7}{6}}}{7} - 6\frac{x^{\frac{5}{6}}}{5} + 6\frac{x^{\frac{3}{6}}}{3} - 6x^{\frac{1}{6}} + 6arctg(x^{\frac{1}{6}}) + c$$

2. $I_2 = \displaystyle\int \frac{\sqrt{x-1}}{x}dx$ *on pose* $t^2 = x-1 \Rightarrow 2tdt = dx$,

$$I_2 = \int \frac{t}{t^2+1}2tdt = 2\int \frac{t^2+1-1}{t^2+1}dt$$

$$I_2 = 2t - 2arctg(t) + c = 2\sqrt{x-1} - 2arctg(\sqrt{x-1}) + c, c \in \mathbb{R}.$$

3. $I_3 = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}, a > 0$ *on pose* $\sqrt{x^2+1} = x + t \Rightarrow x^2 + 1 = x^2 + 2xt + t^2.$

$$x = \frac{1-t^2}{2t} \Rightarrow dx = -\frac{t^2+1}{2t^2}dt$$

$$I_3 = -\ln|t| + c = -\ln|\sqrt{x^2+1} - x| + c.$$

4. $I_4 = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x-2}}$ *sachant que* $\Delta \geq 0$ *on choisit l'une des racines on pose*

$$\sqrt{x^2+x-2} = (x-1)t \Rightarrow x = \frac{t^2+2}{t^2-1} = 1 + \frac{3}{t^2-1}$$

$$\Rightarrow dx = -6\frac{t}{(t^2-1)^2}dt.$$

$$I_4 = -2\int \frac{dt}{t^2-1} = \ln|1+t| - \ln|1-t| + c.$$

$$I_4 = \ln|1 + \sqrt{|\frac{x+2}{x-1}|} - \ln|1 - \sqrt{|\frac{x+2}{x-1}|}| + c.$$