باسم الله الرحمان الرحيم

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية

المفتشية العامة للتربية الوطنية

يومان دراسيان لفائدة

أساتذة مادة الرياضيات

لولاية جيجل المقاطعة رقم 3

ثانوية احمد فرانسيس بسيدي عبد العزيز

يومي 19 + 26 جانفي 2023

تحت إشراف مفتش التربية الوطنية : بواب نورالدين

جدول أعمال اليومين الدراسيين

- ✓ الأعداد والحساب في المنهاج
- ✓ هيكلة محور الأعداد والحساب
- ✓ التدرجات و محور الأعداد والحساب
- ✓ أنشطة متنوعة
- ✓ بناء تمرين اختبار في محور الأعداد والحساب

الكفاءات المستهدفة لمحور الأعداد والحساب

أولا : القسمة في $\mathbb{Z}$

- ✓ إثبات أن عددا صحيحا يقسم عددا صحيحا آخر.
- ✓ استعمال خواص قابلية القسمة في $\mathbb{Z}$
- ✓ استعمال خوارزمية إقليدس لتعيين القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين.
- ✓ استعمال خوارزمية إقليدس لتعيين القواسم المشتركة لعددين طبيعيين.
- ✓ حل مشكلات بتوظيف خواص القاسم المشترك الأكبر.

ثانيا : الموافقات في $\mathbb{Z}$ والتعداد

- ✓ معرفة واستعمال خواص الموافقات في $\mathbb{Z}$
- ✓ حل معادلات من الشكل $ax + by = c$
- ✓ نشر عدد طبيعي وفق أساس .
- ✓ الانتقال من نظام أساسه α إلى نظام أساسه β .

ثالثا : المضاعف المشترك الأصغر والأعداد الأولية

- ✓ استعمال خواص المضاعف المشترك الأصغر .
- ✓ استعمال العلاقة بين المضاعف المشترك الأصغر و القاسم المشترك الأكبر
- ✓ التعرف على أوّلية عدد طبيعي .
- ✓ استعمال تحليل عدد طبيعي إلى جداء عوامل أولية لتعيين مضاعفاته وقواسمه .
- ✓ استعمال تحليل عدد طبيعي إلى جداء عوامل أولية لتعيين القاسم المشترك الأكبر والمضاعف المشترك الأصغر
- ✓ استعمال العلاقة بين المضاعف المشترك الأصغر و القاسم المشترك الأكبر
- ✓ استعمال خواص المضاعف المشترك الأصغر

رابعا : مبرهنتا بيزو وغوص والمعادلات من الشكل $ax+by=c$

- ✓ استعمال مبرهنة بيزو .
- ✓ استعمال مبرهنة غوص ونتائجها .
- ✓ استعمال مبرهنة غوص لحل المعادلات من الشكل $ax+by=c$

هيكلة المحور (الأعداد والحساب)

- القسمة في Z
- الموافقات في Z
- التعداد
- المضاعفات والأعداد الأولية
- مبرهنتا بيزو وغوص
- المعادلات من الشكل $ax+by=c$

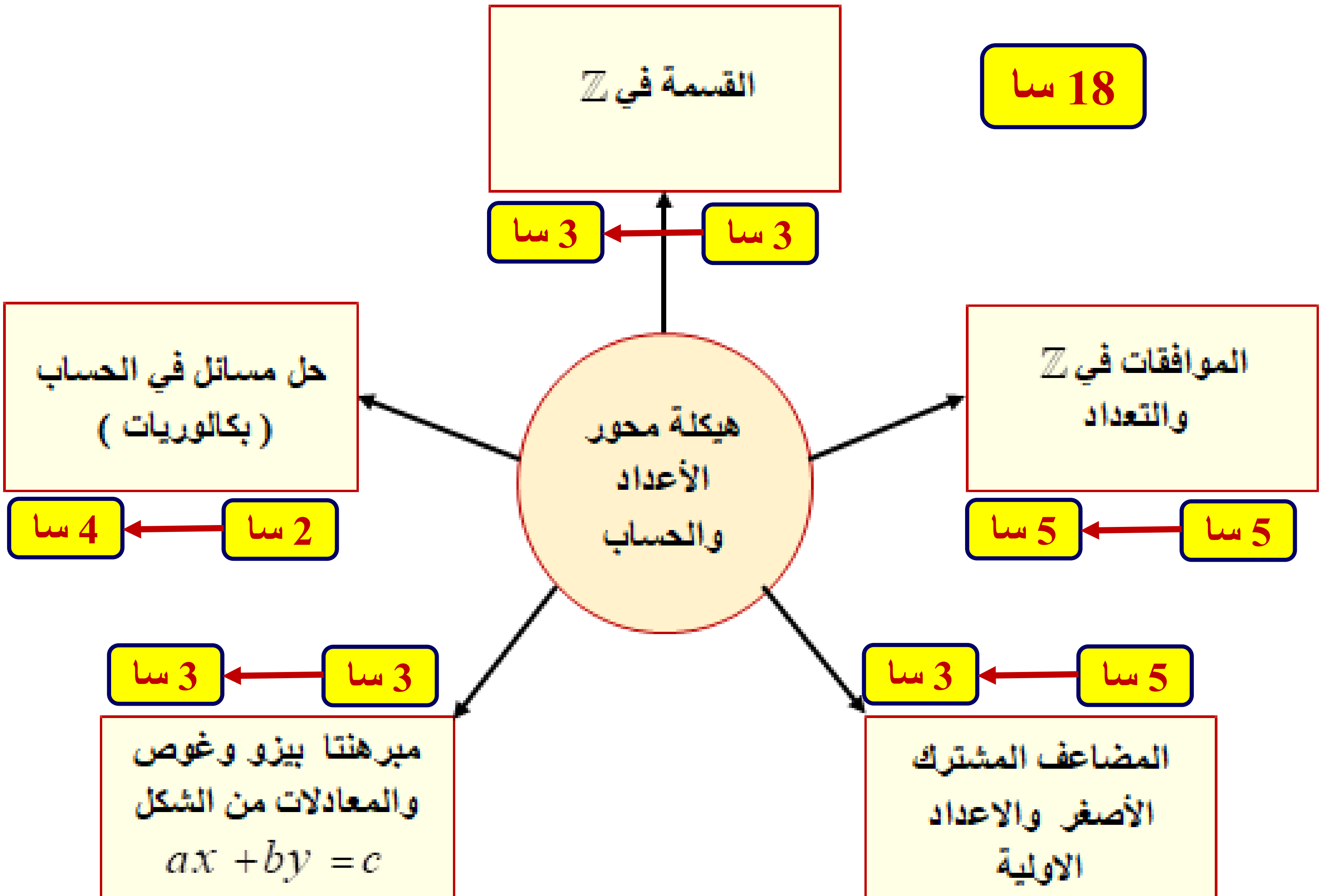
هيكلة محور الأعداد والحساب (الشعبة : رياضيات)

21 سا

هيكلة محور الأعداد والحساب

- القسمة في $\mathbb{Z}$ — 5 سا ← 5 سا
- الموافقات في $\mathbb{Z}$ والتعداد — 4 سا ← 5 سا
- المضاعف المشترك الأصغر والاعداد الاولية — 6 سا ← 3 سا
- مبرهنتا بيزو وغوص والمعادلات من الشكل $ax+by=c$ — 4 سا ← 4 سا
- حل مسائل في الحساب (بكالوريات) — 2 سا ← 4 سا

هيكلة محور الأعداد والحساب (الشعبة : تقني رياضي)



أنشطة متنوعة

النشاط 1 :

n عدد طبيعي غير معدوم . عيّن قيم n في كل حالة من الحالات التالية :

1) 6 يقسم $(3n-6)$

2) $(3n+5)$ قاسم للعدد 8

3) $(2n+27)$ مضاعف لـ $(n+1)$

4) $\frac{10n-4}{3n+1} \in \mathbb{N}$

5) $(2n+27) \equiv 0 [3n+1]$

6) $\frac{3n^2+6n+4}{n+4} \in \mathbb{N}$

7) n^2-2n يقبل القسمة على 7

8) n^2-7n-1 يقبل القسمة على 11

النشاط 2 :

عيّن جميع الثنائيات $(x\ ;y)$ من الأعداد الطبيعية في كل حالة من الحالات التالية :

1) $x^2-4y^2=36$

2) $x^2-2xy=15$

3) $xy+3x-4y-2034=0$

النشاط 3 :

1) جد $PGCD(1444\ ;\ 2023)$

2) باستعمال خوارزمية إقليدس ، جد عددين صحيحين α و β

يحققان المعادلة : $2023\alpha+1444\beta=7$

النشاط 4 :

عيّن جميع الثنائيات $(a;b)$ من الأعداد الطبيعية غير المعدومة في كل حالة من الحالات التالية :

(1
$$\begin{cases} a+b=54 \\ PGCD(a\,;\,b)=9 \end{cases}$$

(2
$$\begin{cases} a^2-b^2=5440 \\ PGCD(a\,;\,b)=8 \end{cases}$$

(3
$$\begin{cases} PPCM(a\,;\,b)-8\times PGCD(a\,;\,b)=4 \\ a>b \end{cases}$$

النشاط 5 : n عدد طبيعي .

أثبت أن العددين $(2n+1)$ و $(9n+4)$ أوليان فيما بينهما .

النشاط 6 : n عدد طبيعي غير معدوم .

1) عين القيم المكنة لـ $PGCD(7n+1\ ;\ 3n-1)$

2) عيّن قيم n التي من أجلها يكون : $PGCD(7n+1\ ;\ 3n-1)=5$

النشاط 7 :

1) بيّن أن العدد A يقبل القسمة على 9 حيث : $A=1954^{2023}+2024^{2973}$

2) ما هو رقم آحاد العدد B حيث : $B=2023^{1444}$ ؟

3) ما هو باقي القسمة الإقليدية للعدد C على 9 حيث :

$C=1441^{2021}+1442^{2022}+1443^{2023}+1444^{2024}$ ؟

النشاط 8 : حل في مجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$ كلا من المعادلات التالية :

1) $3x \equiv 2[7]$ 2) $5x \equiv 2[13]$ 3) $7x \equiv 5[22]$

4) $5x \equiv 2[124]$ 5) $6x \equiv 12[35]$ 6) $4x \equiv 2[10]$

7) $3x \equiv 6[24]$ 8) $x^2 - 5x \equiv 0[6]$ 9) $x^2 - 2x - 3 \equiv 0[15]$

النشاط 9 :

نعتبر المعادلة $(E): 4x - 7y = 3$ ذات المجهول $(x;y)$ حيث x و y عددان صحيحان .

1) حل ، في $\mathbb{Z}^2$ ، المعادلة (E)

2) عيّن الأعداد الطبيعية n التي تحقق الجملة : $\begin{cases} n \equiv 3[4] \\ n \equiv 6[7] \end{cases}$

النشاط 10 :

نعتبر المعادلة $(E): 13x - 9y = 3$ ذات المجهول $(x ; y)$ حيث x و y عددان صحيحان .

حل ، في $\mathbb{Z}^2$ ، المعادلة (E) ثم استنتج الأعداد الطبيعية n التي تحقق الجملة : $\begin{cases} n \equiv 4[9] \\ n \equiv 1[13] \end{cases}$

النشاط 11 :

1) نعتبر المعادلة $(E): 104x - 16y = 280$ ذات المجهول $(x\,;y)$ حيث : x و y عددان صحيحان.

أ) جد القاسم المشترك الأكبر للعددين 104 و 16 ، ثم بيّن أن المعادلة (E) تقبل حلولا في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$

ب) بيّن أنه إذا كانت الثنائية $(x\,;y)$ حلا للمعادلة (E) فإن : $y \equiv 2\,[13]$ ، ثم استنتج حلول المعادلة (E)

2) λ عدد طبيعي يكتب $\overline{1\alpha\alpha\beta\beta\gamma}$ في نظام التعداد الذي أساسه 4 ، ويكتب $\overline{1\alpha\beta13}$ في نظام التعداد الذي أساسه 6

عيّن الأعداد الطبيعية α ، β و γ ، ثم اكتب λ في النظام العشري .

3) أ) حلل العدد 2025 إلى جُداء عوامل أولية واستنتج الأعداد الطبيعية التي مكعب كل منها يقسم 2025

ب) عيّن الثنائيات $(a\,;b)$ من الأعداد الطبيعية التي تحقق : $m^3 + 11d^3 = 2025$

حيث : $d = PGCD(a\,;b)$ وَ $m = PPCM(a\,;b)$

النشاط 12 :

1) x و y عددان صحيحان ؛ نعتبر المعادلة ذات المجهول $(x\,;y)$: $420x-945y=525 \;...(E)$

أ) جد القاسم المشترك الأكبر للأعداد : 420 ، 525 و 945

ب) أثبت أنه إذا كانت الثنائية $(x\,;y)$ من $\mathbb{Z}^2$ حلا للمعادلة (E) فإن $x\equiv 8\,[9]$ ثم استنتج حلول المعادلة (E)

2) أ) ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 9^n على 11

ب) x و y عددان طبيعيان ؛ عيّن الثنائيات $(x\,;y)$ حلول المعادلة (E) بحيث يكون $\left(2022^{x-y}+y+2\right)$ قابلا للقسمة على 11

3) نضع : $a=9n+8$ و $b=4n+3$ حيث n عدد طبيعي وليكن d القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b

أ) عيّن القيم الممكنة للعدد d

ب) عيّن الأعداد الطبيعية n بحيث يكون $d=5$

4) ليكن العددان الطبيعيان : $A=9n^2+17n+8$ و $B=4n^2+7n+3$

أ) بيّن أن العددين A و B يقبلان القسمة على $n+1$

ب) جد بدلالة n وحسب قيم n القاسم المشترك الأكبر للعددين A و B

النشاط 13 :

1) أ) ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 9^n على 11 ، ثم استنتج باقي القسمة الإقليدية للعدد 2022^{2023} على 11

ب) عيّن مجموعة قيّم العدد الطبيعي n التي تحقق الجملة : $\begin{cases} n \equiv 2022[5] \\ 3n + 9^n \equiv 1443[11] \end{cases}$

2) المتتاليتان العدديتان (u_n) و (v_n) معرفتان على $\mathbb{N}$ بـ :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = 9u_n - 16n + 6 \end{cases} \text{ و } v_n = 4u_n - 8n + 2$$

أ) بيّن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدّها الأول .

ب) اكتب كلا من v_n و u_n بدلالة n

3) أ) احسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$

ب) عيّن قيّم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون : $16S_n - (4n+1)^2 - 2 \equiv 0[11]$

حلول الأنشطة

حل النشاط 1 :

تذكير : القول أن a يقسم b يعني وجود عدد صحيح k حيث : $b = k \times a$

1) تعيين الأعداد الطبيعية n بحيث 6 يقسم $(3n-6)$:

6 يقسم $(3n-6)$ يعني وجود عدد طبيعي k حيث : $3n-6=6k$

ومنه : $n = 2k+2$ حيث : $k \in \mathbb{N}$

2) تعيين الأعداد الطبيعية n بحيث $(3n+5)$ قاسم للعدد 8 :

مجموعة القواسم الطبيعية للعدد 8 هي : $\{1\,;2\,;4\,;8\}$

$8|(3n+5)$ معناه : $(3n+5) \in \{1\,;2\,;4\,;8\}$

ومنه : $(3n) \in \{-4\,;-3;\,-1\,;3\}$

وبالقسمة على 3 مع مراعاة أن n عدد طبيعي نستنتج أن $n=1$

3) تعيين الأعداد الطبيعية n بحيث $(2n+27)$ مضاعف لـ $(n+1)$:

$(2n+27)$ مضاعف لـ $(n+1)$ معناه : $(n+1)|(2n+27)$

طريقة : حل مسألة من الشكل $g(n)|f(n)$ ، يؤول إلى حل مسألة من الشكل $\lambda|h(n)$ حيث λ عدد طبيعي مستقل عن n

تذكير : إذا كان $n|a$ و $n|b$ فإن $n|(a+b)$ ، $n|(a-b)$ ، $n|(a\times b)$ ، $n|PGCD(a;b)$

وبشكل عام : $n|(\alpha a+\beta b)$ حيث α و β عددان صحيحان.

طريقة رقم 1 :

لدينا : $(n+1)|(2n+27)$ ومنه : $\begin{cases}(n+1)|(2n+27)\\(n+1)|(n+1)\end{cases}$ وبالتالي : $\begin{cases}(n+1)|(2n+27)\\(n+1)|2(n+1)\end{cases}$

نستنتج أن : $(n+1)|[(2n+27)-2(n+1)]$ أي : $(n+1)|25$

مجموعة القواسم الطبيعية للعدد 25 هي : $\{1;5;25\}$ ومنه : $(n+1)\in\{1;5;25\}$

نستنتج أن : $n\in\{4;24\}$

طريقة رقم 2 :

لدينا : $(n+1)\,|\,(2n+27)$ ومنه : $(n+1)\,|\,[(2n+2)+25]$

وبالتالي : $(n+1)\,|\,[2(n+1)+25]$ وعليه يكون : $(n+1)\,|\,25$

ومنه : $(n+1)\in\{1;5;25\}$ ، نستنتج أن : $n\in\{4;24\}$

طريقة رقم 3 :

$(n+1)\,|\,(2n+27)$ معناه $\dfrac{2n+27}{n+1}\in\mathbb{N}$

ونعلم أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $\dfrac{2n+27}{n+1}=\alpha+\dfrac{\beta}{n+1}=2+\dfrac{25}{n+1}$

ومنه : $(n+1)\,|\,25$ وبالتالي : $(n+1)\in\{1;5;25\}$ ، نستنتج أن : $n\in\{4;24\}$

طريقة رقم 4 :

$(n+1)\,|\,(2n+27)$ معناه : يوجد عدد طبيعي k بحيث : $(2n+27)=k(n+1)$

وبالتالي : $2(n+1)+25=k(n+1)$ أي : $k(n+1)-2(n+1)=25$

و منه : $(n+1)(k-2)=25$ ، نستنتج أن : $(n+1)\,|\,25$ فيكون : $n\in\{4;24\}$

4) تعيين الأعداد الطبيعية n بحيث $\frac{10n-4}{3n+1} \in \mathbb{N}$:

$\frac{10n-4}{3n+1} \in \mathbb{N}$ معناه : $(3n+1) \mid (10n-4)$ وبالتالي : $\begin{cases} (3n+1) \mid (10n-4) \\ (3n+1) \mid (3n+1) \end{cases}$

وعليه فإن : $\begin{cases} (3n+1) \mid 3(10n-4) \\ (3n+1) \mid 10(3n+1) \end{cases}$ ، نستنتج أن : $(3n+1) \mid \left[10(3n+1) - 3(10n-4)\right]$

أي : $22 \mid (3n+1)$ ، مجموعة القواسم الطبيعية للعدد 22 هي : $\{1;2;11;22\}$

لدينا : $22 \mid (3n+1)$ ومنه : $(3n+1) \in \{1;2;11;22\}$ فيكون : $n=7$

5) تعيين الأعداد الطبيعية n بحيث $(2n+27)\equiv 0[3n+1]$:

$(2n+27)\equiv 0[3n+1]$ معناه : $(3n+1)\mid(2n+27)$

وبالتالي : $\begin{cases}(3n+1)\mid(2n+27)\\(3n+1)\mid(3n+1)\end{cases}$ وعليه فإن : $\begin{cases}(3n+1)\mid 3(2n+27)\\(3n+1)\mid 2(3n+1)\end{cases}$

نستنتج أن : $(3n+1)\mid[3(2n+27)-2(3n+1)]$ أي : $(3n+1)\mid 79$

مجموعة القواسم الطبيعية للعدد 79 هي : $\{1;79\}$

لدينا : $(3n+1)\mid 79$ ومنه : $(3n+1)\in\{1;79\}$ فيكون : $n=26$

6) تعيين الأعداد الطبيعية n بحيث $\frac{3n^2+6n+4}{n+4} \in \mathbb{N}$:

$\frac{3n^2+6n+4}{n+4} \in \mathbb{N}$ معناه : $(n+4) \mid (3n^2+6n+4)$

وبملاحظة أن : $\frac{3n^2+6n+4}{n+4} = 3n-6+\frac{28}{n+4}$ ، نستنتج أن : $(n+4) \mid 28$

مجموعة القواسم الطبيعية للعدد 28 هي : $\{1;2;4;7;14;28\}$

لدينا : $(n+4) \mid 28$ ومنه : $(n+4) \in \{1;2;4;7;14;28\}$ فيكون : $n \in \{3;10;24\}$

7) تعيين الأعداد الطبيعية n بحيث $\left(n^2-2n\right)$ يقبل القسمة على 7 :

طريقة رقم 1 : في القسمة على 7 ، البواقي الممكنة هي : 0 ، 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 و 6 وبالتالي : كل عدد طبيعي n يوافق 0 أو 1 أو 2 أو 3 أو 4 أو 5 أو 6 بترديد 7 ، وباستعمال خواص الموافقات ، نشكل الجدول التالي :

ترديد 7	$n\equiv$	0	1	2	3	4	5	6
	$n^2\equiv$	0	1	4	2	2	4	1
	$2n\equiv$	0	2	4	6	1	3	5
	$n^2-2n\equiv$	0	$1-2=-1\equiv 6$	0	$2-6=-4\equiv 3$	1	1	$2-5=-3\equiv 4$

من الجدول أعلاه نستنتج أن : $n\equiv 0[7]$ أو $n\equiv 2[7]$

ومنه : $n=7k+2$ مع $k\in\mathbb{N}$ أو $n=7k'$ مع $k'\in\mathbb{N}^*$

طريقة رقم 2 :

($\left(n^2-2n\right)$ يقبل القسمة على 7) معناه : ($\left(n^2-2n\right)\equiv 0[7]$) أي : $n(n-2)\equiv 0[7]$

ومنه : $n\equiv 0[7]$ أو $(n-2)\equiv 0[7]$ فيكون : $n=7k+2$ مع $k\in\mathbb{N}$ أو $n=7k'$ مع $k'\in\mathbb{N}^*$

طريقة 3 :

$\left(\left(n^2-2n\right)\right.$ يقبل القسمة على 7 $\left.\right)$ معناه : $\left(\ \left(n^2-2n\right)\equiv 0[7]\ \right)$ أي : $n^2-2n+1\equiv 1[7]$

وبالتالي : $(n-1)^2\equiv 1[7]$ ومنه : $(n-1)\equiv 1[7]$ أو $(n-1)\equiv 6[7]$

وهذا يعني : $n\equiv 2[7]$ أو $n\equiv 0[7]$ فيكون : $n=7k+2$ مع $k\in\mathbb{N}$ أو $n=7k'$ مع $k'\in\mathbb{N}^*$

8) تعيين الأعداد الطبيعية n بحيث n^2-7n-1 يقبل القسمة على 11 :

$\left(n^2-7n-1\equiv 0[11] \right)$ يكافئ $\left(n^2+4n+10\equiv 0[11] \right)$

وهذا يعني : $n^2+4n+4\equiv 5[11]$

وبالتالي : $(n+2)^2\equiv 5[11]$ ، نستنتج أن : $(n+2)\equiv 4[11]$ أو $(n+2)\equiv 7[11]$

ومنه : $n\equiv 2[11]$ أو $n\equiv 5[11]$ ، فيكون : $n\in\{11k+2\ ;11k+5\ /\ k\in\mathbb{N}\}$

حل النشاط 2 :

1) تعيين جميع الثنائيات $(x\ ;y)$ من الأعداد الطبيعية حيث $x^2-4y^2=36$:

طريقة : بالنسبة للمسائل المعطاة في شكل جمع ، نحاول تحويلها إلى شكل جُداء من الشكل $A\times B\ =\ C$ ، حيث أن قواسم C معروفة .

$\left(x^2-4y^2=36\right)$ يكافئ $\left((x-2y)(x+2y)=36\right)$ وبالتالي فإن $(x-2y)$ و $(x+2y)$ يقسمان العدد 36 ، نحلل العدد 36 إلى جداء عددين طبيعيين : $36=1\times 36=2\times 18=3\times 12=4\times 9=6\times 6$

توجد 9 حالات ممكنة للثنائيات $(x-2y\ ;\ x+2y)$ هي :

$(1\ ;36)$ ، $(2\ ;18)$ ، $(3\ ;12)$ ، $(4\ ;9)$ ، $(6\ ;6)$ ، $(9\ ;4)$ ، $(18\ ;2)$ ، $(12\ ;3)$ ، $(36\ ;1)$

ولأن في المجموعة $\mathbb{N}$: $x-2y\le x+2y$ ، تبقى خمس حالات ممكنة فقط هي :

$\begin{cases}x-2y=1\\x+2y=36\end{cases}$ أو $\begin{cases}x-2y=2\\x+2y=18\end{cases}$ أو $\begin{cases}x-2y=3\\x+2y=12\end{cases}$ أو $\begin{cases}x-2y=4\\x+2y=9\end{cases}$ أو $\begin{cases}x-2y=6\\x+2y=6\end{cases}$

فيكون : $(x\ ;y)\in\{(10\ ;4),(6\ ;0)\}$

2) تعيين جميع الثنائيات $(x\ ;y)$ من الأعداد الطبيعية حيث $x^2-2xy=15$:

لدينا : $x^2-2xy=15$ ومنه : $x(x-2y)=15$ ، نحلل العدد 15 إلى جداء عددين طبيعيين :

$15=1\times15=3\times5=5\times3=15\times1$ ولأن في المجموعة $\mathbb{N}$: $x-2y\leq x$ ، تبقى حالتين ممكنتين فقط

ويكون : $(x\ ;y)\in\{(5;1),(15;7)\}$

3) تعيين جميع الثنائيات $(x\ ;y)$ من الأعداد الطبيعية حيث $xy+3x-4y-2035=0$:

لدينا : $xy+3x-4y-2035=0$ ومنه : $x(y+3)-4y-12+12-2035=0$

أي : $x(y+3)-4(y+3)=2023$ فيكون : $(y+3)(x-4)=2023$

أي : $(x-4)(y+3)=2023$ ، نحلل العدد 2023 إلى جداء عددين طبيعيين :

$$2023=1\times2023=7\times289=17\times119=119\times17=289\times7=2023\times1$$

فيكون : $(x\ ;y)\in\{(5;2020),(11;286),(21;116),(123;14),(293;4)\}$

حل النشاط 3 :

1) إيجاد $PGCD\,(1444\ ;\ 2023)$:

الحاصل		1	2	2	40	1	6
المقسوم و القاسم	2023	1444	579	286	7	6	1
الباقي		579	286	7	6	1	0

إذن : $PGCD\,(2023\ ;\ 1444) = 1$ وبالتالي فإن العددين 2023 و 1444 أوليان فيما بينهما .

2) إيجاد عددين صحيحين α و β يحققان المعادلة $2023\alpha\ +1444\beta = 7$:

تذكير : $\begin{array}{c|c} a & b \\ \hline r & q \end{array} \longrightarrow a = bq + r$

لدينا : $2023 = 1444 \times 1 + 579$ ومنه : $579 = 2023 - 1444$

ولدينا : $1444 = 579 \times 2 + 286$ ومنه : $286 = 1444 - 2 \times 579 = 1444 - 2\left(2023 - 1444\right)$

وبالتالي : $286 = -2 \times 2023 + 3 \times 1444$

ولدينا : $579 = 286 \times 2 + 7$ ومنه : $7 = 579 - 2 \times 286 = \left(2023 - 1444\right) - 2\left(-2 \times 2023 + 3 \times 1444\right)$

وبالتالي : $7 = 5 \times 2023 - 7 \times 1444$

من المساواتين : $2023\alpha\ +1444\beta = 7$ و $5 \times 2023 - 7 \times 1444 = 7$ نستنتج أن : $\alpha = 5$ و $\beta = -7$

حل النشاط 4 :

1) تعيين جميع الثنائيات $(a;b)$ من الأعداد الطبيعية غير المعدومة حيث : $\begin{cases} a+b=54 \\ PGCD(a\,;\,b)=9 \end{cases}$

تذكير : إذا كان $PGCD(a\,;\,b)=d$ فإنه يوجد عددان طبيعيان a' و b' أوليان فيما بينهما حيث : $a=d\times a'$ و $b=d\times b'$

من المساواة : $PGCD(a;b)=9$ نستنتج أنه يوجد عددان طبيعيان a' و b' أوليان فيما بينهما حيث :

$a=9a'$ و $b=9b'$ ، تكتب عندئذ المساواة $a+b=54$ كما يلي : $9a'+9b'=54$ ومنه : $a'+b'=6$

نستنتج أن : $(a';b')\in\{(1;5),(5;1)\}$ فيكون : $(a;b)\in\{(9;45),(45;9)\}$

3) تعيين جميع الثنائيات $(a;b)$ من الأعداد الطبيعية غير المعدومة حيث $\begin{cases} PPCM(a;b)-8\times PGCD(a;b)=4 \\ a>b \end{cases}$

طريقة : لتعيين الثنائيات $(a;b)$ من $\mathbb{N}^2$ نستعين بالخاصتين الآتيتين :

إذا كان $PGCD(a;b)=d$ فإنه يوجد عددان طبيعيان a' و b' أوليان فيما بينهما حيث : $a=d\times a'$ و $b=d\times b'$
إذا كان $PGCD(a;b)=d$ و $PPCM(a;b)=m$ فإن $d\times m=a\times b$

لدينا : $a=d\times a'$ و $b=d\times b'$ ولدينا : $d\times m=a\times b$ ومنه : $d\times m=da'\times db'$ وبالتالي : $m=da'b'$

تكتب عندئذ المساواة $m-8d=4$ كما يلي : $da'b'-8d=4$ أي : $d(a'b'-8)=4$ ومنه : d يقسم 4

فيكون : $d\in\{1;2;4\}$

- الحالة الأولى : $d=1$

تكتب عندئذ المساواة $d(a'b'-8)=4$ كما يلي : $a'b'-8=4$ أي : $a'b'=12$

ومنه : $(a';b')\in\{(4;3),(12;1)\}$ نستنتج أن : $(a;b)\in\{(4;3),(12;1)\}$

- الحالة الثانية : $d=2$

تكتب عندئذ المساواة $d(a'b'-8)=4$ كما يلي : $a'b'-8=2$ أي : $a'b'=10$

ومنه : $(a';b')\in\{(5;2),(10;1)\}$ نستنتج أن : $(a;b)\in\{(10;4),(20;2)\}$

- الحالة الثالثة : $d=4$

تكتب عندئذ المساواة $d(a'b'-8)=4$ كما يلي : $a'b'-8=1$ أي : $a'b'=9$

ومنه : $(a';b')=(9;1)$ نستنتج أن : $(a;b)=(36;4)$

خلاصة : الثنائيات $(a;b)$ المطلوبة هي : $(a;b)\in\{(4;3),(12;1),(10;4),(20;2),(36;4)\}$

حل النشاط 5 :

1) إثبات أن العددين $3n+2$ و $5n+3$ أوليان فيما بينهما :

طريقة 1 : نفرض أن الـ $PGCD(3n+2\,;5n+3)=d$ ونبيّن أن $d=1$

من المساواة : $PGCD(3n+2\,;5n+3)=d$ نستنتج أن : $\begin{cases} d \mid (5n+3) \\ d \mid (3n+2) \end{cases}$

وبالتالي : $\begin{cases} d \mid 3(5n+3) \\ d \mid 5(3n+2) \end{cases}$ ومنه : $d \mid [5(3n+2)-3(5n+3)]$ أي : $d \mid 1$

فيكون : $d=1$

إذن : العددان $3n+2$ و $5n+3$ أوليان فيما بينهما.

طريقة 2 : استعمال خوارزمية إقليدس

الحاصل		1	1	1	1	n
المقسوم والقاسم	$5n+3$	$3n+2$	$2n+1$	$n+1$	n	1
الباقي		$2n+1$	$n+1$	n	**1**	0

بما أن آخر باق غير معدوم هو 1 فإن $PGCD(5n+3\ ;\ 3n+2)=1$ فيكون $11n+6$ و $9n+5$ أوليين فيما بينهما .

طريقة 3 : استعمال مبرهنة بيزو

نلاحظ أن : $-3(5n+3)+5(3n+2)=1$ وحسب مبرهنة بيزو فإن العددين $2n+5$ و $n+2$ أوليان فيما بينهما .

طريقة : إثبات أن العددين $3n+2$ و $5n+3$ أوليان فيما بينهما يؤول إلى البحث عن وجود عددين صحيحين u و v

بحيث $u(5n+3)+v(3n+2)=1$.

لدينا : $u(5n+3)+v(3n+2)=1$ ومنه : $5un+3u+3vn+2v=1$

وبالتالي : $(5u+3v)n+(3u+2v)=1$ نستنتج أن : $\begin{cases}5u+3v=0\\3u+2v=1\end{cases}$ وبحل هذه الجملة نجد : $\begin{cases}u=-3\\v=5\end{cases}$

إذن : توجد ثنائية $(-3\,;5)$ بحيث $-3(5n+3)+5(3n+2)=1$

وحسب مبرهنة بيزو فإن العددين $3n+2$ و $5n+3$ أوليان فيما بينهما.

حل النشاط 6 :

1) تعيين القيم الممكنة لـ $PGCD\left(7n+1\ ;\ 3n-1\right)$:

ليكن : $PGCD\left(7n+1\ ;\ 3n-1\right)=d$ ومنه : $\begin{cases} d \mid (7n+1) \\ d \mid (3n-1) \end{cases}$ وبالتالي : $\begin{cases} d \mid 3(7n+1) \\ d \mid 7(3n-1) \end{cases}$

نستنتج أن : $d \mid \left[3(7n+1)-7(3n-1)\right]$ أي : $d \mid 10$.

مجموعة قواسم العدد 10 هي : $\{1;2;5;10\}$ ، فيكون : $d \in \{1;2;5;10\}$

2) قيم n التي من أجلها يكون $PGCD\left(7n+1\ ;\ 3n-1\right)=5$:

لدينا : $PGCD\left(7n+1\ ;\ 3n-1\right)=5$ ومنه : $\begin{cases} 5 \mid (7n+1) \\ 5 \mid (3n-1) \end{cases}$ وبالتالي : $\begin{cases} 5 \mid (7n+1) \\ 5 \mid 2(3n-1) \end{cases}$

نستنتج أن : $5 \mid \left[(7n+1)-2(3n-1)\right]$ أي : $5 \mid (n+3)$

يكون العدد $n+3$ مضاعفا للعدد 5 وليسا مضاعفا للعدد 10 من أجل : $n+3=5k$ مع k عدد طبيعي فردي .

من أجل $n=5k-3$ حيث k عدد طبيعي فردي يكون : $PGCD\left(a\ ;\ b\right)=5$

ملاحظة : k طبيعي فردي معناه : $k=2k'+1$ وبالتالي : يمكن كتابة n على الشكل : $n=10k'+2$ مع $k'\in\mathbb{N}$

خلاصة : من أجل : $n=10k'+2$ مع $k'\in\mathbb{N}$ يكون : $PGCD\left(7n+1\ ;\ 3n-1\right)=5$

حل النشاط 7 :

تذكير : يقبل عدد طبيعي القسمة على 9 إذا وفقط إذا قبل العدد المؤلف من مجموع أرقامه القسمة على 9

تذكير : $a^{np} = (a^p)^n = (a^p)^n$

1) تبيان أن العدد A يقبل القسمة على 9 :

لدينا : $1954 \equiv 1[9]$ ومنه : $1954^{2023} \equiv 1^{2023}\ [9]$ وبالتالي : $1954^{2023} \equiv 1[9]$

ولدينا : $2024 \equiv 8[9]$ ومنه : $2024 \equiv -1[9]$ وبالتالي : $2024^{2973} \equiv (-1)^{2973}\ [9]$

وعليه فإن : $2024^{2973} \equiv -1[9]$ ، فيكون : $A \equiv 1-1[9]$ أي : $A \equiv 0[9]$

وهذا يعني أن العدد A يقبل القسمة على 9

2) تعيين رقم آحاد العدد B :

تذكير : تعيين رقم آحاد عدد يؤول إلى تعيين باقي قسمته عل 10

طريقة 1 : لدينا : $2023 \equiv 3[10]$ ومنه : $2023^{1444} \equiv 3^{1444}\ [10]$ ، لكن : $1444 = 2 \times 722$

وبالتالي : $3^{1444} = \left(3^2\right)^{722} = 9^{722}$ ، ونعلم أن : $9 \equiv -1[10]$ ومنه : $9^{722} \equiv (-1)^{722}\ [10]$

أي : $9^{722} \equiv 1[10]$ ، نستنتج أن : $2023^{1444} \equiv 1[10]$ أي أن رقم آحاد العدد 2023^{1444} هو 1

طريقة 2 : لدينا : $2023 \equiv 3[10]$ ومنه : $2023^{1444} \equiv 3^{1444}\ [10]$ ، لكن : $1444 = 4 \times 361$

وبالتالي : $3^{1444} = \left(3^4\right)^{361} = 81^{361}$ ، ونعلم أن : $81 \equiv 1[10]$ ومنه : $2023^{1444} \equiv 3^{1444} \equiv 81^{361} \equiv 1[10]$

وعليه فإن أن رقم آحاد العدد 2023^{1444} هو 1

طريقة 3 :

لدينا : $2023 \equiv 3[10]$ ومنه : $2023 \equiv -7[10]$ وبالتالي : $2023^{1444} \equiv (-7)^{1444} \equiv 7^{1444}\ [10]$

ولدينا : $7^{1444} = 7^{2\times 722} = \left(7^2\right)^{722} = 49^{722}$ وبما أن : $49 \equiv -1[10]$ فإن : $49^{722} \equiv (-1)^{722} \equiv 1[10]$

وعليه فإن رقم آحاد العدد 2023^{1444} هو 1

3) تعيين باقي القسمة الإقليدية للعدد $C=1441^{2021}+1442^{2022}+1443^{2023}+1444^{2024}$ على 9 :

لدينا : $1441\equiv 1[9]$ ومنه : $1441^{2021}\equiv 1^{2021}\equiv 1[9]$

ولدينا : $1442\equiv 2[9]$ ومنه : $1442^{2022}\equiv 2^{2022}\equiv \left(2^{3}\right)^{674}\equiv (-1)^{674}\equiv 1[9]$

ولدينا : $1442\equiv 2[9]$ ومنه : $1443^{2023}\equiv 3^{2023}\equiv 3\times 3^{2022}\equiv 3\left(3^{2}\right)^{1011}\equiv 3\times 9^{1011}\equiv 0[9]$

ولدينا : $1444\equiv 4[9]$ ومنه : $1444^{2024}\equiv 4^{2024}\equiv \left(4^{4}\right)^{506}\equiv 64^{506}\equiv 1^{506}\equiv 1[9]$

نستنتج أن : $C\equiv 1+1+0+1[9]$ أي أن باقي القسمة الإقليدية للعدد C على 9 هو 3

ملاحظات

1) n عدد طبيعي أكبر تماما من 1 . a و b عددان صحيحان.

في الحالة العامة : $\left(a\times b \equiv 0[n] \right)$ لا يستلزم $\left(a \equiv 0[n] \right.$ أو $\left. b \equiv 0[n] \right)$

2) n عدد طبيعي أكبر تماما من 1 . a ، b و c أعداد صحيحة حيث : $c \neq 0$

في الحالة العامة : $\left(ca \equiv cb[n] \right)$ لا يستلزم $\left(a \equiv b[n] \right)$

3) n عدد طبيعي أكبر تماما من 1 . من أجل كل عددين صحيحين a ، b ومن أجل كل عدد صحيح غير معدوم c : إذا كان $\left(ca \equiv cb[n] \right.$ و c أولي مع $\left. n \right)$ فإن $\left(a \equiv b[n] \right)$

4) a و b عددان صحيحان حيث $a \neq 0$ و n عداد طبيعي أكبر تماما من 1 و $PGCD\left(|a| ; n \right) = d$

تقبل المعادلة $ax \equiv b[n]$ حلولا في $\mathbb{Z}$ إذا وفقط إذا قسم d العدد b

1) حل المعادلة $3x \equiv 2[7]$:

لدينا : $3x \equiv 2[7]$ ومنه : $5\times 3x \equiv 5\times 2[7]$ أي : $15x \equiv 10[7]$

وبالتالي : $x \equiv 3[7]$ فيكون : $x = 7k+3$ مع $k \in \mathbb{Z}$

2) حل المعادلة $5x \equiv 2[13]$:

لدينا : $5x \equiv 2[13]$ ومنه : $5\times 5x \equiv 5\times 2[13]$ أي : $25x \equiv 10[13]$

وبالتالي : $-x \equiv 10[13]$ وعليه فإن : $x \equiv -10[13]$ أي : $x \equiv 3[13]$

فيكون : $x = 13k+3$ مع $k \in \mathbb{Z}$

3) حل المعادلة $7x \equiv 5[22]$:

لدينا : $7x \equiv 5[22]$ ومنه : $3\times 7x \equiv 3\times 5[22]$ أي : $21x \equiv 15[22]$

وبالتالي : $-x \equiv 15[22]$ وعليه فإن : $x \equiv -15[22]$ أي : $x \equiv 7[22]$

فيكون : $x = 22k+7$ مع $k \in \mathbb{Z}$

4) حل المعادلة $5x \equiv 2[124]$:

لدينا : $5x \equiv 2[124]$ ومنه : $25\times 5x \equiv 25\times 2[124]$ أي : $125x \equiv 50[124]$

وبالتالي : $x \equiv 50[124]$ فيكون : $x = 124k + 50$ مع $k \in \mathbb{Z}$

5) حل المعادلة $6x \equiv 12[35]$:

طريقة 1 : لدينا $6x \equiv 12[35]$ ومنه : $x \equiv 2[35]$ فيكون : $x = 35k + 2$ مع $k \in \mathbb{Z}$

طريقة 2 : لدينا $6x \equiv 12[35]$ ومنه : $6\times 6x \equiv 6\times 12[35]$ أي : $36x \equiv 72[35]$

نستنتج أن : $x \equiv 2[35]$ فيكون : $x = 35k + 2$ مع $k \in \mathbb{Z}$

6) حل المعادلة $4x \equiv 2[10]$:

لدينا : $4x \equiv 2[10]$ ومنه : $2x \equiv 1[5]$ وبالتالي : $3\times 2x \equiv 3\times 1[5]$ أي : $6x \equiv 3[5]$

نستنتج أن : $x \equiv 3[5]$ فيكون : $x = 5k + 3$ مع $k \in \mathbb{Z}$

7) حل المعادلة $3x \equiv 6[24]$:

لدينا : $3x \equiv 6[24]$ ومنه : $x \equiv 2[8]$ فيكون : $x = 8k + 2$ مع $k \in \mathbb{Z}$

8) حل المعادلة $x^2 - 5x \equiv 0[6]$:

لدينا : $x^2 - 5x \equiv 0[6]$ ونعلم أن : $-5 \equiv 1[6]$ ومنه : $x^2 + x \equiv 0[6]$

في القسمة الإقليدية على 6 ، البواقي الممكنة هي 0 ، 1 ، 2 ، 3 ، 4 و 5

وبالتالي : كل عدد صحيح x يوافق 0 أو 1 أو 2 أو 3 أو 4 أو 5 بترديد 6

باستعمال خواص الموافقات ، نشكل الجدول التالي :

$x \equiv$	0	1	2	3	4	5
$x^2 \equiv$	0	1	4	3	4	1
$x^2 + x \equiv$	0	2	0	0	2	0

من هذا الجدول نستنتج أن مجموعة حلول المعادلة (E) هي : $S = \{6k\ ; 6k+2 ; 6k+3 ; 6k+5\ / k \in \mathbb{Z}\}$

هام جدا : احذر من اتباع الطريقة الآتية فهي خاطئة في الحالة العامة لأن الموافقة ليست مساواة ، وإذا قبلناها في بعض الحالات فإننا نقبلها بشروط تحددها المعطيات.

لدينا : $x^2 + x \equiv 0[6]$ أي : $x(x+1) \equiv 0[6]$ ومنه : $x \equiv 0[6]$ أو $x+1 \equiv 0[6]$

أي : $x \equiv 0[6]$ أو $x \equiv 5[6]$ وبالتالي : $x = 6k$ أو $x = 6k+5$ فيكون : $S = \{6k\ ; 6k+5\ / k \in \mathbb{Z}\}$

9) حل المعادلة $x^2-5x-5\equiv 0[11]$:

طريقة 1 :

لدينا : $x^2-5x-5\equiv 0[11]$ ونعلم أن : $-5\equiv 6[11]$ ومنه : $x^2+6x+6\equiv 0[11]$

وبالاستعانة بالشكل النموذجي لكثير الحدود x^2+6x+6 نحصل على : $(x+3)^2\equiv 3[11]$

نستنتج أن : $x+3\equiv 5[11]$ أو $x+3\equiv 6[11]$ وبالتالي : $x\equiv 2[11]$ أو $x\equiv 3[11]$

فيكون : $S=\{11k+2\,;11k+3\ /\ k\in\mathbb{Z}\}$

طريقة 2 :

$x\equiv$	0	1	**2**	**3**	4	5	6	7	8	9	10
$x^2\equiv$	0	1	4	9	5	3	3	5	9	4	1
$6x\equiv$	0	6	1	7	2	8	3	9	4	10	5
$x^2+6x+6\equiv$	6	2	**0**	**0**	2	6	1	9	8	9	1

من الجدول السابق نستنتج أن : $S=\{11k+2\,;11k+3\ /\ k\in\mathbb{Z}\}$

حل النشاط 9 :

1) إثبات أنه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ حلا للمعادلة (E) فإن $y \equiv 4[7]$:

باستعمال الموافقة بترديد 7 ، تكتب المعادلة (E) كما يلي : $18y \equiv 9[7]$

ونعلم أن : $18 \equiv 4[7]$ و $9 \equiv 2[7]$ وبالتالي : $4y \equiv 2[7]$

ومنه : $2 \times 4y \equiv 2 \times 2[7]$ أي : $8y \equiv 4[7]$ ، ونعلم أن : $8 \equiv 1[7]$

فيكون : $y \equiv 4[7]$ و هو المطلوب.

2) استنتاج حلول المعادلة (E) :

لدينا : $y \equiv 4[7]$ ومنه : $y = 7k + 4$ مع $k \in \mathbb{Z}$ وبالتعويض في المعادلة (E)

نجد : $x = -18k - 9$ مع $k \in \mathbb{Z}$

إذن : حلول المعادلة (E) هي الثنائيات $(x;y)$ حيث : $(k \in \mathbb{Z})$ $\begin{cases} x = -18k - 9 \\ y = 7k + 4 \end{cases}$

3) حل الجملة $\begin{cases} n \equiv 6[7] \\ n \equiv 15[18] \end{cases}$

طريقة 1 :

لدينا : $\begin{cases} n \equiv 6[7] \\ n \equiv 15[18] \end{cases}$ ومنه : $\begin{cases} n = 7\alpha + 6 \\ n = 18\beta + 15 \end{cases}$ وبالتالي : $7\alpha + 6 = 18\beta + 15$

أي : $7\alpha - 18\beta = 9$ ، هذه المعادلة من نفس شكل المعادلة $7x + 18y = 9$

واعتمادا على السؤال (1) نستنتج أن : $(k \in \mathbb{Z})$ $\begin{cases} \alpha = x = -18k - 9 \\ \beta = -y = -7k - 4 \end{cases}$

فيكون : $n = 7\alpha + 6 = 7(-18k - 9) + 6 = -126k - 57$ مع $k \in \mathbb{Z}$

إذن : مجموعة حلول الجملة المعطاة هي $S = \{-126k - 57 \ / \ k \in \mathbb{Z}\}$

طريقة 2 :

لدينا : $\begin{cases} n \equiv 6[7] \\ n \equiv 15[18] \end{cases}$ ومنه : $\begin{cases} 18n \equiv 18\times 6[18\times 7] \\ 7n \equiv 7\times 15[7\times 18] \end{cases}$ أي : $\begin{cases} 18n \equiv 108[126] \\ 7n \equiv 105[126] \end{cases}$

وبالتالي : $18n + 7n \equiv 108 + 105[126]$ أي : $25n \equiv 213[126]$ وعليه يكون :

$5\times 25n \equiv 5\times 213[126]$ أي : $125n \equiv 1065[126]$ ، لكن : $125 \equiv -1[126]$

و $1065 \equiv 57[126]$ وبالتالي : $-n \equiv 57[126]$

ومنه : $n \equiv -57[126]$ ، فيكون : $n = 126k' - 57$ مع $k' \in \mathbb{Z}$

إذن : مجموعة حلول الجملة المعطاة هي $S = \{126k' - 57 \;/\; k' \in \mathbb{Z}\}$

ملاحظة : من أجل $k' = -k$ نحصل على نفس شكل حلول الطريقة 1

طريقة 3 :

لدينا : $\begin{cases} n \equiv 6[7] \\ n \equiv 15[18] \end{cases}$ ومنه : $\begin{cases} n = 7\lambda + 6 \\ 7\lambda + 6 \equiv 15[18] \end{cases}$ أي : $\begin{cases} n = 7\lambda + 6 \\ 7\lambda \equiv 9[18] \end{cases}$

وبالتالي : $\begin{cases} n = 7\lambda + 6 \\ 5 \times 7\lambda \equiv 5 \times 9[18] \end{cases}$ أي : $\begin{cases} n = 7\lambda + 6 \\ 35\lambda \equiv 45[18] \end{cases}$ ، لكن : $35 \equiv -1[18]$ و $45 \equiv 9[18]$

نحصل على : $\begin{cases} n = 7\lambda + 6 \\ -\lambda \equiv 9[18] \end{cases}$ أي : $\begin{cases} n = 7\lambda + 6 \\ \lambda \equiv -9[18] \end{cases}$

من العلاقة : $\lambda \equiv -9[18]$ نستنتج أن : $\lambda = 18\lambda' - 9$ ، وبالتعويض في العلاقة $n = 7\lambda + 6$ ينتج :

$n = 7(18\lambda' - 9) + 6 = 126\lambda' - 57$ مع $\lambda' \in \mathbb{Z}$

إذن : مجموعة حلول الجملة المعطاة هي $S = \{126\lambda' - 57 \ / \ \lambda' \in \mathbb{Z}\}$

طريقة 4 :

تذكير : a ، b و n أعداد طبيعية غير معدومة . إذا كان $n \equiv 0 [a]$ و $n \equiv 0 [b]$ فإن $n \equiv 0 [PPCM(a;b)]$

لدينا : $\begin{cases} n \equiv 6[7] \\ n \equiv 15[18] \end{cases}$ ومنه : $\begin{cases} n+63 \equiv 6[7] \\ n+72 \equiv 15[18] \end{cases}$ أي : $\begin{cases} n+57 \equiv 0[7] \\ n+57 \equiv 0[18] \end{cases}$

ومنه : $n+57 \equiv 0[PPCM(7;18)]$ أي : $n+57 \equiv 0[126]$ فيكون : $n+57 = 126p$ حيث $p \in \mathbb{Z}$

إذن : مجموعة حلول الجملة المعطاة هي : $S = \{126p - 57 \ / \ p \in \mathbb{Z}\}$

المعادلات من الشكل $ax+by=c$

نعتبر ، في $\mathbb{Z}^2$ ، المعادلة (E) : $ax+by=c$ حيث a ، b و c
أعداد صحيحة غير معدومة ، وليكن $PGCD(|a|;|b|)=d$

الحالة الأولى : إذا كان d لا يقسم c فإن المعادلة (E) لا تقبل حلولا في $\mathbb{Z}^2$

الحالة الثانية : إذا كان d يقسم c فإن المعادلة (E) تقبل حلولا في $\mathbb{Z}^2$

بقسمة طرفي المعادلة (E) على العدد d نحصل على معادلة (E') من الشكل :

$a'x+b'y=c'$ حيث $PGCD(|a'|;|b'|)=1$ ، نقوم بحل المعادلة (E') بإتباع :

- طريقة 1 : استعمال مبرهنة غوص (في غالب الأحيان ، نبدأ بتعيين حل خاص)

- طريقة 2 : استعمال الموافقة (نختار ترديد $|a'|$ أو ترديد $|b'|$)

حل النشاط 10 :

1) حل المعادلة (E) :

طريقة 1 : (استعمال المرافقة بترديد 7)

باستعمال الموافقة بترديد 7 ، تكتب المعادلة (E) كما يلي : $4x \equiv 3\,[7]$ ومنه : $2\times 4x \equiv 2\times 3\,[7]$

أي : $8x \equiv 6[7]$ وبالتالي : $x \equiv 6[7]$ فيكون : $x = 7k+6$ مع $k \in \mathbb{Z}$

وبالتعويض في المعادلة (E) نجد : $y = 4k+3$ مع $k \in \mathbb{Z}$

إذن : حلول المعادلة (E) هي الثنائيات $(x;y)$ حيث : $\begin{cases} x = 7k+6 \\ y = 4k+3 \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$

طريقة 2 : (استعمال المرافقة بترديد 4)

باستعمال الموافقة بترديد 4 ، تكتب المعادلة (E) كما يلي : $-7y \equiv 3[4]$ ونعلم أن $-7 \equiv 1[4]$

وبالتالي : $y \equiv 3[4]$ فيكون : $y = 4k+3$ مع $k \in \mathbb{Z}$

وبالتعويض في المعادلة (E) نجد : $y = 4k+3$ مع $k \in \mathbb{Z}$

إذن : حلول المعادلة (1) هي الثنائيات $(x;y)$ حيث : $\begin{cases} x = 7k+6 \\ y = 4k+3 \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$

طريقة 3 : (استعمال مبرهنة غوص دون تعيين حل خاص)

يمكن كتابة العدد 3 كمجموع أو فرق عددين أحدهما مضاعف للعدد 4 والآخر مضاعف للعدد 7

لدينا : $4x - 7y = 3$ ومنه : $4x - 7y = 7 - 4$ وبالتالي : $4x + 4 = 7y + 7$

فيكون : $4(x+1) = 7(y+1) \quad ... \quad (*)$

من المعادلة $(*)$ نستنتج أن 7 يقسم الجداء $4(x+1)$ ، وبما أن 7 أولي مع 4 وحسب مبرهنة غوص فإن

7 يقسم $(x+1)$ ومنه : $x + 1 = 7\alpha$ فيكون : $x = 7\alpha - 1$ مع $\alpha \in \mathbb{Z}$

من المعادلة $(*)$ نستنتج أن 4 يقسم الجداء $7(y+1)$ ، وبما أن 4 أولي مع 7 وحسب مبرهنة غوص فإن

4 يقسم $(y+1)$ ومنه : $y + 1 = 7\alpha$ فيكون : $y = 7\alpha - 1$ مع $\alpha \in \mathbb{Z}$

إذن : حلول المعادلة (E) هي الثنائيات $(x;y)$ حيث : $\begin{cases} x = 7\alpha - 1 \\ y = 4\alpha - 1 \end{cases} (\alpha \in \mathbb{Z})$

ملاحظة : من أجل $\alpha = k + 1$ نجد : $\begin{cases} x = 7k + 6 \\ y = 4k + 3 \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$

طريقة 4 : (استعمال مبرهنة غوص بعد تعيين حل خاص)

واضح أن الثنائية $(x_0\,;\,y_0)=(6;3)$ حل خاص للمعادلة (E) وبالتالي:

لدينا : $\begin{cases} 4x - 7y = 3 \\ 4x_0 - 7y_0 = 3 \end{cases}$ وبالطرح طرفا من طرف ينتج : $4(x - x_0) - 7(y - y_0) = 0$

وبالتالي : $4(x - x_0) = 7(y - y_0) \quad \cdots \quad (*)$

من المعادلة $(*)$ نستنتج أن العدد 7 يقسم الجداء $4(x - x_0)$ ، وبما أن 7 أولي مع 4 وحسب مبرهنة غوص فإن 7 يقسم $(x - x_0)$ ومنه : $x - x_0 = 7k$ وبالتالي : $x = 7k + x_0 = 7k + 6$ مع $k \in \mathbb{Z}$

من المعادلة $(*)$ نستنتج أن العدد 4 يقسم الجداء $7(y - y_0)$ ، وبما أن 4 أولي مع 7 وحسب مبرهنة غوص فإن 4 يقسم $(y - y_0)$ ومنه : $y - y_0 = 4k$ وبالتالي: $y = 4k + y_0 = 4k + 3$ مع $k \in \mathbb{Z}$

ملاحظة : بعد تعيين x ، يمكن التعويض في المعادلة (E) للحصول على y

إذن : حلول المعادلة (1) هي الثنائيات $(x;y)$ حيث : $(k \in \mathbb{Z})\begin{cases} x = 7k + 6 \\ y = 4k + 3 \end{cases}$

2) استنتاج الأعداد الطبيعية n التي تحقق الجملة $\begin{cases} n \equiv 3[4] \\ n \equiv 6[7] \end{cases}$:

لدينا : $\begin{cases} n \equiv 3[4] \\ n \equiv 6[7] \end{cases}$ ومنه : $\begin{cases} n = 4\alpha + 3 \\ n = 7\beta + 6 \end{cases}$ وبالتالي : $4\alpha + 3 = 7\beta + 6$ أي : $4\alpha - 7\beta = 3$

نلاحظ أن المعادلة الأخيرة من نفس شكل المعادلة (E) ، واعتمادا على السؤال (1) نستنتج أن :

$$\begin{cases} \alpha = 7k + 6 \\ \beta = 4k + 3 \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

فيكون : $n = 4\alpha + 3 = 4(7k + 6) + 3 = 28k + 27$ مع $k \in \mathbb{Z}$

التعداد

● **تعريف :**

x عدد طبيعي أكبر تماما من 1 .

ليكن a_n ، a_{n-1} ، ... ، a_2 ، a_1 ، a_0 أعدادا طبيعية أصغر تماما من x .

القول أن عدد N يكتب $\overline{a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1 a_0}$ في النظام ذي الأساس x يعني :

$$N = \overline{a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1 a_0} = a_n \times x^n + a_{n-1} \times x^{n-1} + \cdots + a_2 \times x^2 + a_1 \times x + a_0$$

ملاحظات :

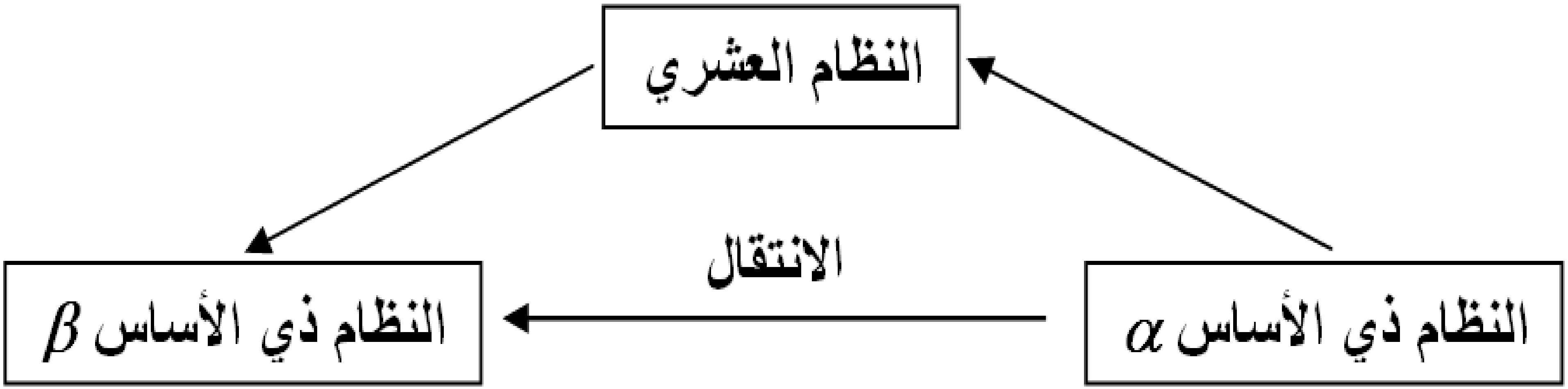
● يمثل كل عدد طبيعي أصغر تماما من x برمز وحيد يسمى رقما .

● في كل نظام تعداد ذي الأساس x ، الرقمان 0 و 1 يمثلان على الترتيب العددين « صفر » و « واحد » .

● مهما يكن الأساس x لدينا $x = 1 \times x + 0$ وعليه فإن العدد x يكتب في النظام ذي الأساس x هكذا $\overline{10}$

● عندما يكون الأساس « عشرة » يكتب العدد N كما يلي : $a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1 a_0$ عوضا عن : $\overline{a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1 a_0}$

• الانتقال من النظام ذي الأساس α إلى النظام ذي الأساس β :



• قابلية القسمة على 2 ، 5 و 10 :

- يقبل عدد طبيعي القسمة على 2 إذا وفقط إذا قبل رقم آحاده القسمة على 2
- يقبل عدد طبيعي القسمة على 5 إذا وفقط إذا قبل رقم آحاده القسمة على 5
- يقبل عدد طبيعي القسمة على 10 إذا وفقط إذا قبل رقم آحاده القسمة على 10

• قابلية القسمة على 4 و 25 :

- يقبل عدد طبيعي القسمة على 4 إذا وفقط إذا قبل العدد المؤلف من رقمي آحاده وعشراته القسمة على 4
- يقبل عدد طبيعي القسمة على 25 إذا وفقط إذا قبل العدد المؤلف من رقمي آحاده وعشراته القسمة على 25

• قابلية القسمة على 3 و 9 :

- يقبل عدد طبيعي القسمة على 3 إذا وفقط إذا قبل العدد المؤلف من مجموع أرقامه القسمة على 3

- يقبل عدد طبيعي القسمة على 9 إذا وفقط إذا قبل العدد المؤلف من مجموع أرقامه القسمة على 9

• قابلية القسمة على 11 :

- يقبل عدد طبيعي القسمة على 11 إذا وفقط إذا قبل العدد الناتج عن الفرق بين مجموع الأرقام ذات الرتب الفردية ومجموع الأرقام ذات الرتب الزوجية القسمة على 11

حل النشاط 11 :

1) أ) إيجاد الـ $PGCD(104\ ;\ 16)$: $PGCD(104\ ;\ 16) = 8$

• تبيان أن المعادلة (E) تقبل حلولا : بما أن الـ $PGCD(104\ ;\ 16)$ يقسم العدد 280

(أي 8 يقسم 280) فإن المعادلة (E) تقبل حلولا في المجموعة $\mathbb{Z}^2$.

ب) تبيان أنه إذا كانت الثنائية $(x\ ;\ y)$ حلا للمعادلة (E) فإن $y \equiv 2[13]$:

بقسمة طرفي المعادلة (E) على العدد 8 نحصل على المعادلة (E') التالية : $13x - 2y = 35$

باستعمال الموافقة بترديد 13 ، تكتب المعادلة (E') كما يلي : $-2y \equiv 35[13]$

لكن $-2 \equiv 11[13]$ و $35 \equiv 9[13]$ وبالتالي : $11y \equiv 9[13]$

ومنه : $6 \times 11y \equiv 6 \times 9[13]$ أي : $66y \equiv 54[13]$

ونعلم أن $66 \equiv 1[13]$ و $54 \equiv 2[13]$ ومنه : $y \equiv 2[13]$

• استنتاج حلول المعادلة (E):

لدينا $y \equiv 2[13]$ ومنه $y = 13k + 2$ وبالتعويض في (E') نجد $x = 2k + 3$

إذن : حلول المعادلة (E) هي الثنائيات $(x; y)$ حيث : $(k \in \mathbb{Z})$ $\begin{cases} x = 2k + 3 \\ y = 13k + 2 \end{cases}$

2) تعيين الأعداد الطبيعية α ، β و γ :

$$(1)\ldots \quad \lambda = \overline{1\alpha\alpha\beta\beta\gamma}^{4} = \gamma + \beta\times 4^1 + \beta\times 4^2 + \alpha\times 4^3 + \alpha\times 4^4 + 1\times 4^5$$
$$= 320\alpha + 20\beta + \gamma + 1024$$

$$(2)\ldots \quad \lambda = \overline{1\alpha\beta 13}^{6} = 3 + 1\times 6^1 + \beta\times 6^2 + \alpha\times 6^3 + 1\times 6^4$$
$$= 216\alpha + 36\beta + 1305$$

<u>الشروط :</u> $0 \le \alpha \le 3$ ، $0 \le \beta \le 3$ و $0 \le \gamma \le 3$

من (1) و (2) ينتج : $320\alpha + 20\beta + \gamma + 1024 = 216\alpha + 36\beta + 1305$

ومنه : $(3)\ \ldots\ 104\alpha - 16\beta = 281 - \gamma$

الحالة 1 : لمّا $\gamma = 0$ ، تكتب عندئذ المعادلة (3) كما يلي : $104\alpha - 16\beta = 281$

وبما أن الـ $PGCD(104\ ;\ 16)$ لا يقسم 281 فإن المعادلة $104\alpha - 16\beta = 281$ لا تقبل حلولا في $\mathbb{N}^2$

الحالة 2 : لمّا $\gamma = 1$ ، تكتب عندئذ المعادلة (3) كما يلي : $104\alpha - 16\beta = 280$

وحسب السؤال رقم (1- ب) نستنتج أن : $(k \in \mathbb{N})$ $\begin{cases} \alpha = x = 2k + 3 \\ \beta = y = 13k + 2 \end{cases}$

لكن $0 \le \alpha \le 3$ و $0 \le \beta \le 3$ وعليه يكون : $\alpha = 3$ و $\beta = 2$

الحالة 3 : لمّا $\gamma = 2$ ، تكتب عندئذ المعادلة (3) كما يلي : $104\alpha - 16\beta = 279$

وبما أن الـ $PGCD(104\ ;\ 16)$ لا يقسم 279 فإن المعادلة $104\alpha - 16\beta = 279$ لا تقبل حلولا في $\mathbb{N}^2$

الحالة 4 : لمّا $\gamma = 3$ ، تكتب عندئذ المعادلة (3) كما يلي : $104\alpha - 16\beta = 278$

وبما أن الـ $PGCD(104\ ;\ 16)$ لا يقسم 278 فإن المعادلة $104\alpha - 16\beta = 278$ لا تقبل حلولا في $\mathbb{N}^2$

خلاصة : $\alpha = 3$ و $\beta = 2$ و $\gamma = 1$

- كتابة λ في النظام العشري : $\lambda = 320 \times 3 + 20 \times 2 + 1 + 1024 = 2025$

3) أ) تحليل العدد 2025 إلى جداء عوامل أولية : $2025 = 3^4 \times 5^2$

• استنتاج الأعداد الطبيعية التي مكعب كل منها يقسم 2025 :

من المساواة $2025 = 3^4 \times 5^2$ ، نستنتج أنه يوجد عددان طبيعيان مكعب كل منهما يقسم العدد 2025 هما : 1 و 3

ب) تعيين الثنائيات $(a\,;b)$ التي تحقق $m^3 + 11\,d^3 = 2025$:

طريقة : لإيجاد الثنائيات $(a\,;b)$ التي تحقق $m^3 + 11\,d^3 = 2025$ ، نستعمل الخاصتين :

• $PGCD(a\,;b) = d$ نستنتج أنه يوجد عددان طبيعيان a' و b' أوليان فيما بينهما حيث $a = d \times a'$ و $b = d \times b'$

• $d \times m = a \times b$

لدينا : $d\times m=a\times b$ ومنه : $d\times m=da'\times db'$ وبالتالي : $m=da'b'$

تكتب المساواة : $m^3+11d^3=2025$ كما يلي : $(da'b')^3+11d^3=2025$

ومنه : $d^3\left[(a'b')^3+11\right]=2025 \quad ...(*)$

نستنتج أن d^3 يقسم 2025 واعتمادا على السؤال السابق نستنتج أن $d\in\{1;3\}$

- الحالة 1 : لمّا $d=1$

تكتب عندئذ المساواة $(*)$ كما يلي : $(a'b')^3+11=2025$

أي : $(a'b')^3=2014$ وهي مستحيلة ($\sqrt[3]{2014}\notin\mathbb{N}$) .

- الحالة 2 : لمّا $d=3$

تكتب عندئذ المساواة $(*)$ كما يلي : $(a'b')^3+11=75$ أي : $(a'b')^3=64$

ومنه : $a'b'=4$ وبالتالي : $(a';b')\in\{(1;4),(4;1)\}$

نستنتج أن : $(a;b)\in\{(3;12),(12;3)\}$

حل النشاط 12 :

1) أ) إيجاد القاسم المشترك الأكبر للأعداد 420 ، 525 و 945 :

$$PGCD\left(945\ ;\ 525\ ;\ 420\right)=105$$

ب) إثبات أنه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ حلا للمعادلة (E) فإن $x\equiv 8\,[9]$:

بقسمة طرفي المعادلة (E) على العدد 105 نحصل على المعادلة (E') التالية : $4x-9y=5$

باستعمال الموافقة بترديد 9 ، تكتب المعادلة (E') كما يلي : $4x\equiv 5[9]$ ومنه : $7\times 4x\equiv 7\times 5[9]$

أي : $28x\equiv 35[9]$ ، لكن : $28\equiv 1[9]$ و $35\equiv 8[9]$ فيكون : $x\equiv 8\,[9]$

• استنتاج حلول المعادلة (E):

لدينا : $x\equiv 8\,[9]$ ومنه : $x=9k+8$ وبالتعويض في (E') نجد $y=4k+3$

إذن : حلول المعادلة (E) هي الثنائيات $(x;y)$ حيث : $(k\in\mathbb{Z})$ $\begin{cases}x=9k+8\\ y=4k+3\end{cases}$

2) أ) دراسة بواقي القسمة الإقليدية للعدد 9^n على 11 :

$9^0 \equiv 1[11]$ ، $9^1 \equiv 9[11]$ ، $9^2 \equiv 4[11]$ ، $9^3 \equiv 3[11]$ ، $9^4 \equiv 5[11]$ ، $9^5 \equiv 1[11]$

من العلاقة : $9^5 \equiv 1[11]$ نستنتج أن : $(9^5)^k \equiv 1^k[11]$ أي : $9^{5k} \equiv 1[11]$

فيكون : $9^{5k+1} \equiv 9[11]$ ، $9^{5k+2} \equiv 4[11]$ ، $9^{5k+3} \equiv 3[11]$ ، $9^{5k+4} \equiv 5[11]$

نلخص بواقي القسمة الاقليدية للعدد 9^n على 11 في الجدول الآتي :

n	$5k$	$5k+1$	$5k+2$	$5k+3$	$5k+4$
البواقي	1	9	4	3	5

(في هذا الجدول $k \in \mathbb{N}$)

ب) تعيين الثنائيات $(x\,;y)$ حلول المعادلة (E) بحيث يكون $\left(2022^{x-y}+y+2\right)$ قابلا للقسمة على 11 :

لدينا : $\left(2022^{x-y}+y+2\right)=2022^{(9k+8)-(4k+3)}+(4k+3)+2=2022^{5(k+1)}+4k+5$

وبالتالي : $\left(2022^{x-y}+y+2\right)=2022^{5k'}+4k+5$

ولدينا : $2022\equiv 9[11]$ وبالتالي : $2022^{5k'}\equiv 9^{5k'}\equiv 1[11]$

$\left(2022^{x-y}+y+2\right)$ قابلا للقسمة على 11 يكافئ $1+4k+5\equiv 0[11]$ ومنه : $4k\equiv 5[11]$

وبالتالي : $3\times 4k\equiv 3\times 5[11]$ أي : $k\equiv 4[11]$ فيكون : $k=11\alpha+4$ ومنه : $\begin{cases} x=99\alpha+44 \\ y=44\alpha+19 \end{cases}(\alpha\in\mathbb{N})$

3) أ) تعيين القيم الممكنة للعدد d :

لدينا : $PGCD(a\,;b)=d$ ومنه : $d\,|\left(4a-9b\right)$ أي : $d\,|5$ فيكون : $d\in\{1\,;5\}$

ب) تعيين الأعداد الطبيعية n بحيث يكون $d=5$:

لدينا : $PGCD(a\,;b)=5$ ومنه : $\begin{cases} 5\,|\,a \\ 5\,|\,b \end{cases}$ أي : $\begin{cases} 5\,|\,(9n+8) \\ 5\,|\,(4n+3) \end{cases}$ وبالتالي : $\begin{cases} 5\,|\,(9n+8) \\ 5\,|\,2(4n+3) \end{cases}$

نستنتج أن : $5\,|\left[(9n+8)-2(4n+3)\right]$ أي : $5\,|\,(n+2)$ فيكون : $n=5\beta-2$ مع $\beta\in\mathbb{N}^*$

4) أ) تبيان أن العددين A و B يقبلان القسمة على $n+1$:

لدينا : $A=9n^2+17n+8=(n+1)(9n+8)$ و $B=4n^2+7n+3=(n+1)(4n+3)$

نستنتج أن كلا من العددين A و B يقبل القسمة على $(n+1)$

ب) إيجاد بدلالة n وحسب قيم n القاسم المشترك الأكبر للعددين A و B :

$$PGCD(A;B)=(n+1)\times PGCD((9n+8);(4n+3))=(n+1)\times d$$

من السؤال (3 - أ) وجدنا أن : $d\in\{1;5\}$

- لمّا $n=5\beta-2$ مع $\beta\in\mathbb{N}^*$ يكون $d=5$ ومنه : $PGCD(A;B)=(n+1)\times 5=5(n+1)$

- لمّا $n\neq 5\beta-2$ مع $\beta\in\mathbb{N}^*$ يكون $d=1$ ومنه : $PGCD(A;B)=(n+1)\times 1=(n+1)$

حل النشاط 13 :

1) أ) دراسة بواقي القسمة الإقليدية للعدد 9^n على 11 :

n	$5k$	$5k+1$	$5k+2$	$5k+3$	$5k+4$
البواقي	1	9	4	3	5

(في هذا الجدول $k \in \mathbb{N}$)

- استنتاج باقي القسمة الإقليدية للعدد 2022^{2023} على 11 :

لدينا : $2022 \equiv 9\,[11]$ ومنه : $2022^{2023} \equiv 9^{2023}\,[11]$ ، ولدينا : $2023 = 5k+3$

فيكون : $2022^{2023} \equiv 3\,[11]$ أي أن باقي القسمة الإقليدية للعدد 2022^{2023} على 11 هو 3

ب) تعيين قيم n التي تحقق الجملة : $\begin{cases} n \equiv 1444[5] \\ 3n + 2022^n \equiv 2973[11] \end{cases}$

لدينا : $\begin{cases} n \equiv 1444[5] \\ 3n + 2022^n \equiv 2973[11] \end{cases}$ ومنه : $\begin{cases} n \equiv 4[5] \\ 3n + 9^n \equiv 3[11] \end{cases}$

وبالتالي : $\begin{cases} n = 5k + 4 \\ 3(5k+4) + 9^{5k+4} \equiv 3[11] \end{cases}$ وعليه فإن : $\begin{cases} n = 5k + 4 \\ 4k \equiv 8[11] \end{cases}$ وبالتالي : $\begin{cases} n = 5k + 4 \\ k \equiv 2[11] \end{cases}$

من العلاقة : $k \equiv 2[11]$ نجد : $k = 11k' + 2$ فيكون : $n = 55k' + 14$ مع $k' \in \mathbb{N}$

2) أ) (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = 9$ وحدّها الأول $v_0 = 2$

ب) $v_n = v_0 \times q^n = 2 \times 9^n$ و $u_n = \frac{1}{4} v_n + 2n - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times 9^n + 2n - \frac{1}{2}$

3) أ) $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \frac{1}{16}\left(9^{n+1} - 1\right) + \frac{1}{2}(n+1)(2n-1)$

ب) تعيين قيّم n التي من أجلها يكون $16S_n - (4n+1)^2 - 5 \equiv 0[11]$:

$16S_n - (4n+1)^2 - 5 \equiv 0[11]$ يكافئ $9^{n+1} \equiv 4[11]$

ويكون : $n = 5\alpha + 1$ مع $\alpha \in \mathbb{N}$

إعداد تمرين اختبار في محور الأعداد والحساب

$$1444 = \overline{113310}^{4} = \overline{21234}^{5} = \overline{12404}^{6} = \overline{4132}^{7} = \overline{2644}^{8} = \overline{1874}^{9}$$

$$1444 = \overline{12404}^{6} = \overline{2644}^{8}$$

$$1444 = \overline{21234}^{5} = \overline{4132}^{7}$$

$$1444 = \overline{12404}^{\,6} = \overline{2644}^{\,8}$$

$$\lambda = \overline{1\beta\alpha0\alpha}^{\,6} = \overline{\beta6\alpha\alpha}^{\,8}$$

النشاط 14 :

1) نعتبر المعادلة (E) : $28x - 296y = 912$ ذات المجهول $(x\,;y)$ حيث : x و y عددان صحيحان.

أ) جد القاسم المشترك الأكبر للعددين 296 و 28 ، ثم بيّن أن المعادلة (E) تقبل حلولا في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$

ب) بيّن أنه إذا كانت الثنائية $(x\,;y)$ حلا للمعادلة (E) فإن : $y \equiv 1[7]$ ، ثم استنتج حلول المعادلة (E)

2) λ عدد طبيعي يكتب $\overline{1\beta\alpha0\alpha}$ في نظام التعداد الذي أساسه 6 ويكتب $\overline{\beta6\alpha\alpha}$ في نظام التعداد الذي أساسه 8

عيّن العددين الطبيعيين α و β ، ثم اكتب λ في النظام العشري .

3) أ) حلل العدد 1444 إلى جداء عوامل أولية واستنتج الأعداد الطبيعية التي مربع كل منها يقسم 1444

ب) عيّن الثنائيات $(a\,;b)$ من الأعداد الطبيعية التي تحقق : $m^2+37d^2=1444$

حيث : $d=PGCD(a\,;b)$ وَ $m=PPCM(a\,;b)$

$$1444=\overline{21234}^{5}=\overline{4132}^{7}$$

$$\lambda=\overline{2\beta\alpha 34}=\overline{4\beta 3\alpha}$$

النشاط 15 :

1) نعتبر المعادلة (E): $26x-76y=124$ ذات المجهول $(x;y)$ حيث : x و y عددان صحيحان.

أ) جد القاسم المشترك الأكبر للعددين 76 و 26 ، ثم بيّن أن المعادلة (E) تقبل حلولا في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$

ب) بيّن أنه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ حلا للمعادلة (E) فإن : $y\equiv 1\,[6]$ ، ثم استنتج حلول المعادلة (E)

2) λ عدد طبيعي يكتب $\overline{2\beta\alpha 34}$ في نظام التعداد الذي أساسه 5 ويكتب $\overline{4\beta 3\alpha}$ في نظام التعداد الذي أساسه 7

عيّن العددين الطبيعيين α و β ، ثم اكتب λ في النظام العشري .

3) أ) حلل العدد 1444 إلى جداء عوامل أولية واستنتج الأعداد الطبيعية التي مربع كل منها يقسم 1444

ب) عيّن الثنائيات $(a;b)$ من الأعداد الطبيعية التي تحقق : $m^2+37d^2=1444$

حيث : $d=PGCD(a;b)$ وَ $m=PPCM(a;b)$

$$2023 = \overline{133213}^{4} = \overline{31043}^{5} = \overline{13211}^{6} = \overline{5620}^{7} = \overline{3747}^{8} = \overline{2687}^{9}$$

$$2023 = \overline{133213}^{4} = \overline{13211}^{6}$$

$$2023 = \overline{133213}^{4} = \overline{13211}^{6}$$

النشاط 16 :

1) نعتبر المعادلة (E) : $104x - 20y = 272$ ذات المجهول $(x ; y)$ حيث : x و y عددان صحيحان.

أ) جد القاسم المشترك الأكبر للعددين 104 و 20 ، ثم بيّن أن المعادلة (E) تقبل حلولا في $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

ب) بيّن أنه إذا كانت الثنائية $(x ; y)$ حلا للمعادلة (E) فإن : $x \equiv 3\,[5]$ ، ثم استنتج حلول المعادلة (E)

2) λ عدد طبيعي يكتب $\overline{1\alpha\alpha\beta13}$ في نظام التعداد الذي أساسه 4 ويكتب $\overline{1\alpha\beta11}$ في نظام التعداد الذي أساسه6

عيّن العددين الطبيعيين α و β ، ثم اكتب λ في النظام العشري .

3) عيّن جميع الثنائيات $(a ;b)$ من الأعداد الطبيعية التي تحقق : $2ab - 2a - 2b - 2021 = 0$

$$2023 = \overline{133213}^{4} = \overline{13211}^{6}$$

النشاط 17 :

1) نعتبر المعادلة (E) : $104x - 20y = 272$ ذات المجهول $(x\,;y)$ حيث : x و y عددان صحيحان.

أ) جد القاسم المشترك الأكبر للعددين 104 و 20 ، ثم بيّن أن المعادلة (E) تقبل حلولا في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$

ب) بيّن أنه إذا كانت الثنائية $(x\,;y)$ حلا للمعادلة (E) فإن : $x \equiv 3[5]$ ، ثم استنتج حلول المعادلة (E)

2) λ عدد طبيعي يكتب $\overline{1\alpha\alpha\beta\gamma3}$ في نظام التعداد الذي أساسه 4 ويكتب $\overline{1\alpha\beta\gamma1}$ في نظام التعداد الذي أساسه 6

عيّن الأعداد الطبيعية α ، β و γ ، ثم اكتب λ في النظام العشري .

3) عيّن جميع الثنائيات $(a\,;b)$ من الأعداد الطبيعية التي تحقق : $2ab - 2a - 2b - 2021 = 0$