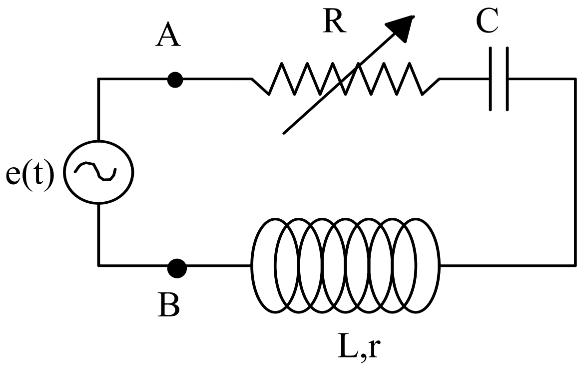
PROBLEMES

PROBLEME n°1

On considère le circuit suivant où R est une résistance variable, C est un condensateur de capacité fixe et L est une bobine d'inductance fixe et de résistance r. Le générateur de résistance interne négligeable délivre une tension sinusoidale de pulsation ω et dont la valeur efficace est 1V.



Les mesures de courant I (en valeur efficace) en fonction de ω ont donné les résultats suivants:

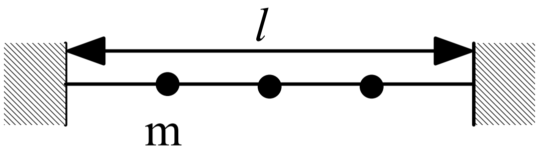
f(Hz)	160	180	200	210	220	230	240	250	270	300
R=0Ω I(mA)	1.0	1.8	4.4	7.6	7.6	5.1	3.3	2.5	1.5	1.0
R=10Ω I(mA)	1.0	1.8	4.3	7.2	7.2	4.7	3.2	2.4	1.5	1.0
R=100Ω I(mA)	1.0	1.7	3.3	4.5	4.5	3.6	2.8	2.2	1.5	1.0

1. Tracer les graphes I= I(ω) sur une même feuille. Conclusion.
2. Quelle est la valeur de la pulsation propre ω_0? Sachant que L=0.1H, calculer C.
3. Déterminer pour les trois cas, les valeurs des pulsations de coupures ω_1 et ω_2. En déduire la bande passante et le coefficient de qualité dans les trois cas.
4. A partir des différentes valeurs de l'intensité maximum I_M, déduire la valeur de la résistance r de la bobine.
5. A la résonance et pour les trois valeurs de R, calculer la puissance moyenne fournie par le générateur .

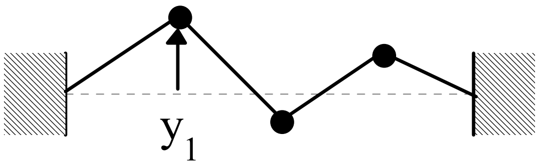
PROBLEME N°2

On considère une corde de longueur l, de masse négligeable, de tension T et horizontale. On colle sur cette corde des masses identiques m régulièrement espacées. Ces masses peuvent glisser sur un plan horizontal avec un frottement très faible. On considère les oscillations transversales des masses.

Exemple d'un système à trois masses:



masses au repos



masses en mouvement

CORDE LIBRE

1/ Corde à une masse: Montrer que la pulsation propre vaut: $\omega_0 = 2\sqrt{\dfrac{T}{ml}}$

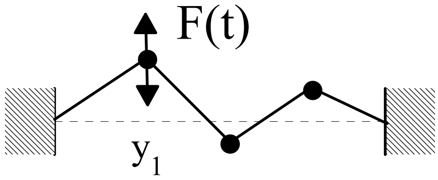
2/ Corde à deux masses: Déterminer les pulsations propres et les modes propres. Dessiner l'aspect de la corde pour chaque mode propre.

3/ Corde à trois masses: Déterminer les pulsations propres et les modes propres. Dessiner l'aspect de la corde pour chaque mode propre.

4/ Que peut-on dire lorsque le système oscille avec sa plus basse fréquence propre et avec sa plus haute fréquence propre?

CORDE EXCITEE

Corde excitée par une force



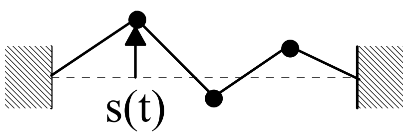
On applique une force sinusoïdale d'amplitude F_0 et de pulsation ω sur la première masse (la plus à gauche sur la figure). On suppose que l'on a atteint le régime permanent.

1/ Corde à une masse: Donner la solution $y_1(t)$ en régime permanent. Quelle est la pulsation caractéristique? Décrire le comportement à cette pulsation.

2/ Corde à deux masses: Donner les solutions $y_1(t)$ et $y_2(t)$ en régime permanent. Quelles sont les pulsations caractéristiques? Décrire le comportement à ces pulsations.

3/ Mêmes questions pour une corde à trois masses.

Excitation par déplacement imposé à une masse

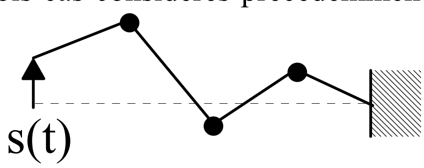


On impose un déplacement s(t) transversal sinusoîdal de pulsation ω et d'amplitude s_0 à la première masse (la plus à gauche). Pour les trois cas considérés précédement (corde à une, deux ou trois masses), déteminer les pulsations pour lesquelles on obtient un régime permanent stable. Représenter la forme des cordes dans ces cas.

Excitation par déplacement imposé à une extrémité

On impose maintenant un déplacement transversal sinusoîdal de pulsation ω et d'amplitude s_0 à l'extrémité gauche de la corde. Pour les trois cas considérés précédemment (corde à une, deux ou trois masses):

- Déterminer les déplacements $y_i(t)$ de chaque masse.



- Donner les pulsations caractéristiques
    - Représenter les formes de ces cordes à ces pulsations.

Eléments de solution

CORDE LIBRE

Pour 3 masses: $\omega_1^2 = \left(2-\sqrt{2}\right)\frac{4T}{ml}$; $\omega_2^2 = \frac{8T}{ml}$; $\omega_3^2 = \left(2+\sqrt{2}\right)\frac{4T}{ml}$

CORDE EXCITEE

Corde excitée par une force

Avec: $\beta = \frac{4T}{ml}$; $y_1 = \frac{\left(2\beta-\omega^2\right)^2-\beta^2}{\left(2\beta-\omega^2\right)\left(\left(2\beta-\omega^2\right)^2-2\beta^2\right)}\frac{F_0}{m}e^{j\omega t}$; $y_2 = \frac{\beta}{\left(2\beta-\omega^2\right)^2-2\beta^2}\frac{F_0}{m}e^{j\omega t}$; et

$$y_3 = \frac{\beta^2}{\left(2\beta-\omega^2\right)\left(\left(2\beta-\omega^2\right)^2-2\beta^2\right)}\frac{F_0}{m}e^{j\omega t}$$

Il y a résonance pour $\omega=\omega_1,\omega_2$, et ω_3. Il y a antirésonance pour $\omega^2=\beta$ et $\omega^2=3\beta$.

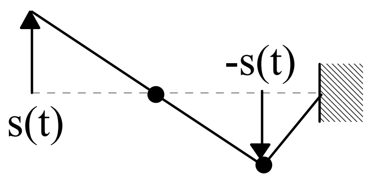
Excitation par déplacement imposé à une masse

Pour 2 masses: $s(t) = s_0 e^{j\omega t}$. Le régime est stable pour: $\omega^2 = \frac{3T}{ml}$ et $\omega^2 = \frac{9T}{ml}$ qui sont les pulsations propres du système.

Excitation par déplacement imposé à une extrémité: (pour 2 masses)

$s(t) = s_0 e^{j\omega t}$: $y_1 = \frac{\beta'\left(2\beta'-\omega^2\right)}{\left(2\beta'-\omega^2\right)^2-\beta'^2}s_0 e^{j\omega t}$; $y_2 = \frac{\beta'^2}{\left(2\beta'-\omega^2\right)^2-\beta'^2}s_0 e^{j\omega t}$ avec: $\beta' = \frac{3T}{ml}$

Il y a résonance pour $\omega^2=\beta'$ et $\omega^2=3\beta'$ et antirésonance pour $\omega^2=2\beta'$. A cette pulsation le mouvement des masses est: $y_1 = 0$ et $y_2 = -s(t)$. L'aspect de la corde est:

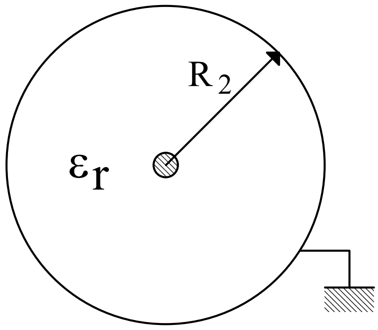


PROBLEME N°3

Lorsque nous avons étudié les circuits électriques, en régime sinusoïdal forcé, nous avons considéré que dans une branche quelconque du circuit, le courant électrique est le même en tout point et ne dépend que du temps. Cette hypothèse n'est valable que si la longueur d'onde associée au signal d'excitation ($\lambda=c/f$) est grande devant les dimensions du circuit. Par exemple pour une fréquence f=50Hz, $\lambda\approx$6000km). Cette hypothèse revient de façon équivalente à négliger le temps de propagation de l'onde électromagnétique (propagation de vitesse infinie). Si λ est du même ordre de grandeur des dimensions du circuit, cette approximation n'est plus valable (si f≈GHz; $\lambda\approx$30cm compatible avec les dimensions d'un circuit ou d'un fil). Dans ce cas, il faut tenir compte de la vitesse finie des ondes électromagnétiques dans les diélectriques qui est de l'ordre de c=3 10^8 m/s.

On étudiera dans ce problème la propagation d'une onde électrique dans un câble coaxial (câble d'antenne) supposé sans perte (sans résistance) pour simplifier.

Un câble coaxial est constitué d'un conducteur central de rayon R_1 et un conducteur (cuivre tressé) de rayon R_2 et dont on peut négliger l'épaisseur ce conducteur est souvent mis à la terre (potentiel zéro). Entre les deux conducteurs est disposé un diélectrique parfait (isolant) de permittivité relative ε_r et de perméabilité relative $\mu_r=1$.

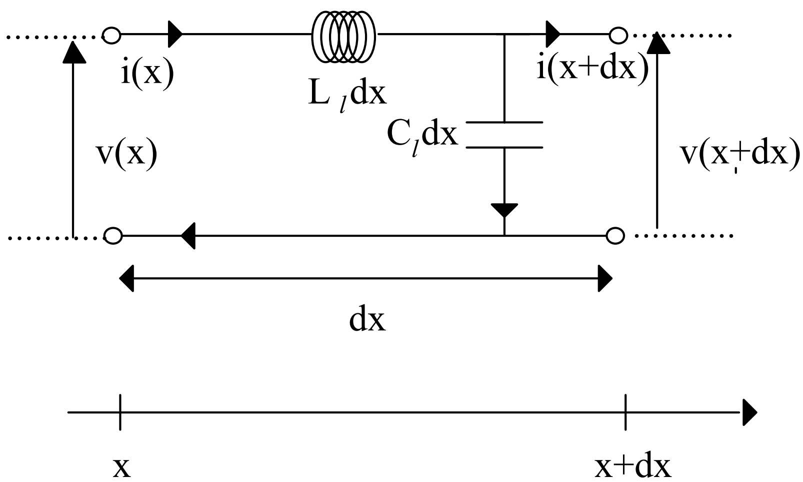


1/ Montrer, en appliquant le théorème de Gauss que la capacité par unité de longueur du câble C_l est:

$$C_l = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}{ln\frac{R_2}{R_1}}$$

2/ Montrer, en appliquant le théorème d'Ampère que la self-induction par unité de longueur du câble L_l est: $L_l = \frac{\mu_0}{2\pi} ln\frac{R_2}{R_1}$

3/ Un élément du câble de longueur dx est représenté ci-contre à un instant t et à une position x.



Etablir les relations suivantes:

$$\frac{\partial v}{\partial x}(x,t) = -L_1\frac{\partial i}{\partial t}(x,t)$$

$$\frac{\partial i}{\partial x}(x,t) = -C_1\frac{\partial v}{\partial t}(x,t)$$

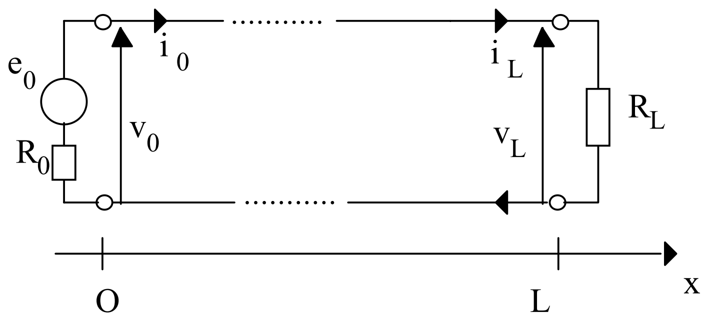
Etablir les équations de propagation de la tension v et du courant i. Déduire que la vitesse de propagation de ces ondes dans ce câble s'écrit: $V = \sqrt{\frac{1}{L_l C_l}}$

A.N.: Calculer V pour un câble coaxial dont l'isolant est constitué de polyéthylène (ε_r =2,3) et $R_2/R_1 = 10$.

4/ Montrer, pour une onde sinusoïdale se propageant dans la direction des x croissants le long d'un câble infini, que l'impédance caractéristique vaut: $R_C = \sqrt{\frac{L_l}{C_l}}$. La calculer pour les valeurs numériques données question 3/.

5/ On branche en un point d'abscisse x=L, une résistance R_L, montrer que le *coefficient de réflexion* r_L *en tension en x=L,* s'écrit: $r_L = \frac{R_L - R_C}{R_L + R_C}$.

6/ On branche en x=0, un générateur de f.e.m. e_0, de résistance interne R_0 et de pulsation ω. Des ondes successives se propagent entre 0 et L où elles sont partiellement réfléchies. En prenant pour origine des phases, la phase de la f.e.m. e_0, montrer que le déphasage pour un aller-retour sur la ligne vaut: $\varphi = \frac{2\omega L}{V}$.



Calculer l'amplitude des différentes ondes v_1, v_2 ..v_i en x=L en fonction des coefficients de réflexion r_L.,r_0 en L et O et de φ
En déduire la tension v_L résultante.

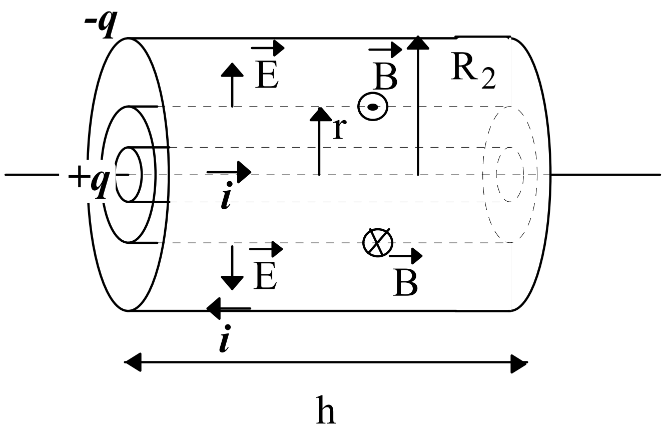
7/ Quelles sont les valeurs de R_0 et R_L pour que la puissance aux bornes de R_L soit maximum.

8/ Calculer le taux d'ondes stationnaires (TOS) pour $R_0 = R_L = 50\Omega$.

9/ Déterminer les fréquences pour lesquelles $\varphi = 2n\pi$ et $\varphi = (2n+1)\pi$. Calculer les tensions de sorties v_L dans ces deux cas en fonction de e_0.

Eléments de réponse

1/ Les deux conducteurs sont en influence totale et portent les charges±q avec: q=ρh (ρ densité linéique de charge). Le théorème de Gauss permet d'obtenir la valeur du champ à une distance r de l'axe du câble:



$$\begin{cases} E(r)=0 & 0<r<R_1 \\ E(r)=\dfrac{1}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\dfrac{\lambda}{r} & R_1<r<R_2 \\ E(r)=0 & r>R_2 \end{cases}$$

La différence de potentiel entre les deux conducteurs vaut alors après intégration: $\Delta V=\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}ln\dfrac{R_2}{R_1}$

$=\dfrac{q}{h2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}ln\dfrac{R_2}{R_1}$; la capacité d'un élément de longueur h est alors: $C=\dfrac{q}{\Delta V}=\dfrac{h2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}{ln\dfrac{R_2}{R_1}}$ et la capacité par unité de longueur: $C_l=\dfrac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}{ln\dfrac{R_2}{R_1}}$.

2/ Le théorème d'Ampère appliqué à un cercle *C* de rayon r permet de calculer la circulation de $\vec{H}$ (ou $\vec{B}$). $\oint_C \vec{H}.\vec{dl}=i\Rightarrow B=\dfrac{\mu i}{2\pi r}\approx\dfrac{\mu_0 i}{2\pi r}$ *pour* $(R_1<r<R_2)$. Le flux Φ du champ magnétique à travers un élément de surface du câble de longueur h vaut:

$\Phi=\iint_S \vec{B}.\vec{dS}=\int_{R_1}^{R_2}B(r)hdr=\dfrac{\mu_0 ih}{2\pi}\int_{R_1}^{R_2}\dfrac{dr}{r}=\dfrac{\mu_0 ih}{2\pi}\ln\dfrac{R_2}{R_1}$. par définition du coefficient de self-indiction L : Φ=Li, on a: $L=\dfrac{\mu_0 h}{2\pi}ln\dfrac{R_2}{R_1}$ et par unité de longueur de câble: $L_l=\dfrac{\mu_0}{2\pi}ln\dfrac{R_2}{R_1}$.

3/ La relation entre tensions est: $v(x,t)=v(x+dx,t)+L_1 dx\dfrac{\partial i}{\partial t}\Rightarrow\dfrac{\partial v}{\partial x}(x,t)=-L_1\dfrac{\partial i}{\partial t}(x,t)$.**[1]**

La relation entre courants est:

$v(x+dx,t)=\dfrac{1}{C_1 dx}\int i'\,dt$; $i'=i(x,t)-i(x+dx,t)=C_1 dx\dfrac{\partial v}{\partial t}(x+dx,t)\approx C_1 dx\dfrac{\partial v}{\partial t}(x,t)$ d'où:

$\dfrac{\partial i}{\partial x}(x,t)=-C_1\dfrac{\partial v}{\partial t}(x,t)$ **[2]**

En dérivant la relation **[1]** par rapport à x et la relation **[2]** par rapport à t on obtient:

$\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x,t)=L_1C_1\dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2}(x,t)$ **[3]**; de même en dérivant la relation **[1]** par rapport à t et la relation **[2]** par rapport à x on obtient: $\dfrac{\partial^2 i}{\partial x^2}(x,t)=L_1C_1\dfrac{\partial^2 i}{\partial t^2}(x,t)$ **[4]**. Ces équations sont les équations de propagation des ondes de tension v et de courant i dont la vitesse de propagation est: $V=\sqrt{\dfrac{1}{L_lC_l}}$.

Pour le câble coaxial: $V=\sqrt{\dfrac{1}{L_l C_l}}=\sqrt{\dfrac{1}{\varepsilon_0\mu_0\varepsilon_r}}=\dfrac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}}$ qui représente la vitesse de propagation des ondes électromagnétiques dans le diélectrique.

A.N.: $V=1{,}98\ 10^8$m/s

4/ pour une onde progressive sinusoïdale: $v_1(x,t)=v_0 e^{j\omega\left(t-x/V\right)}$, $i_1(x,t)=i_0 e^{j\omega\left(t-x/V\right)}$:

l'équation **[1]** s'écrit: $v_1(x,t)=VL_1 i_1(x,t)=\sqrt{\dfrac{L_1}{C_1}}i_1 \Rightarrow \dfrac{v_1(x,t)}{i_1(x,t)}=R_C=\sqrt{\dfrac{L_1}{C_1}}$.

A.N.: Pour un câble coaxial: $R_C=\sqrt{\dfrac{L_l}{C_l}}=\dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{\mu_0}{\varepsilon_0\varepsilon_r}}\,ln\dfrac{R_2}{R_1}=91\Omega$.

5/ Avec une impédance terminale, il y a une onde réfléchie v_2 correspondant à une onde incidente v_1. La tension en tout point s'écrit, compte tenu de la définition de r_L:

$$v(x,t)=v_1(x,t)+v_2(x,t)=a_1e^{j(\omega t-kx)}+a_2e^{j(\omega t+kx)}=a_1e^{j\omega t}\left(e^{-jkx}+r_Le^{-2jkL}e^{jkx}\right)$$

$=a_1e^{j\omega t}e^{-jkL}\left(e^{-jk(x-L)}+r_Le^{jk(x-L)}\right)$; (k=ω/V) de même d'après l'équation **[1]**:

$$i(x,t)=a_1e^{j\omega t}e^{-jkL}\frac{k}{L_1\omega}\left(e^{-jk(x-L)}-r_Le^{jk(x-L)}\right)=\frac{1}{R_C}a_1e^{j\omega t}e^{-jkL}\left(e^{-jk(x-L)}-r_Le^{jk(x-L)}\right)$$

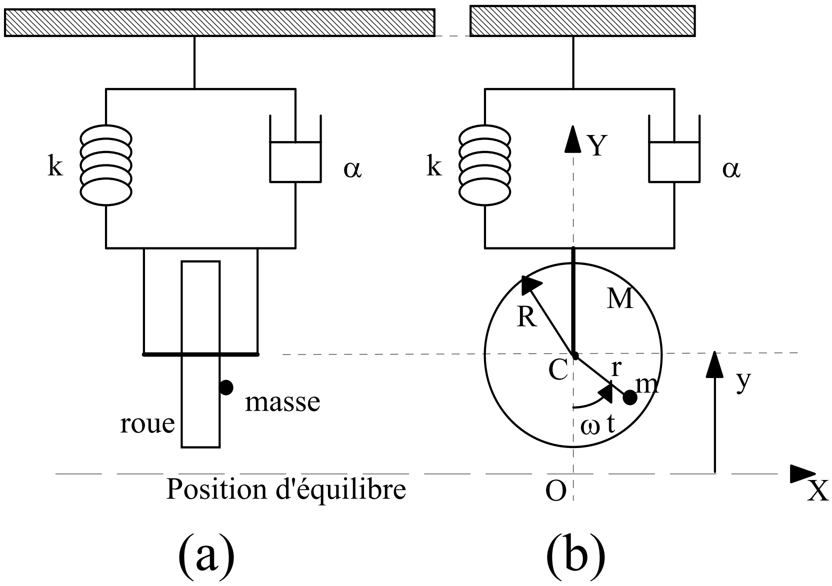
au point x=L; $v(x,t)=R_L i(x,t)$ d'où: $(1+r_L)=\dfrac{R_L}{R_C}(1-r_L)\Rightarrow r_L=\dfrac{R_L-R_C}{R_L+R_C}$

5/ Pour une onde de tension émise en x=0, des ondes réfléchies respectivement en x=L et x=0 vont se superposer. Une onde met un temps $\tau=2L/V$ pour un aller-retour d'où un déphasage $\varphi=\omega\tau=2\omega L/V$

1° Epreuve de moyenne durée Année 94/95

Exercice 1 (sur 16 points):

Une roue cylindrique de masse M et de rayon R peut être mise en rotation autour de son axe par un moteur de masse négligeable. Sur cette roue est fixée une masse m à une distance r de l'axe C de la roue (figure a). Ce système est suspendu par un mécanisme équivalent à un ressort de coefficient de raideur k et un amortisseur de coefficient de frottement visqueux α (figure b). A l'équilibre, le ressort est allongé d'une distance d et la masse m est à la verticale sous C. La vitesse de rotation angulaire ω du moteur est constante. Le centre de masse du système n'etant pas confondu avec l'axe de la roue, cette dernière va osciller suivant l'axe OY. La position du centre C de la roue est repérée par y qui représente son écart par rapport à la position d'équilibre O.



1. Quelles sont dans le repère XOY, les coordonnées de la masse m à l'instant t, lorsque le moteur tourne à une vitesse angulaire ω.
2. Calculer l'énergie potentielle du système lorsque le moteur est en rotation.
3. Calculer l'énergie cinétique totale lorsque le moteur est en rotation.
4. Montrer que le lagrangien peut se mettre sous la forme:

$$L = \frac{1}{2}(M+m)\dot{y}^2 + r\omega m\dot{y}\sin\omega t - \frac{1}{2}ky^2 + A(\omega, t)$$

où $A(\omega,t)$ est une fonction de ω et de t, indépendante de y et $\dot{y}$. Donner l'expression de $A(\omega,t)$.

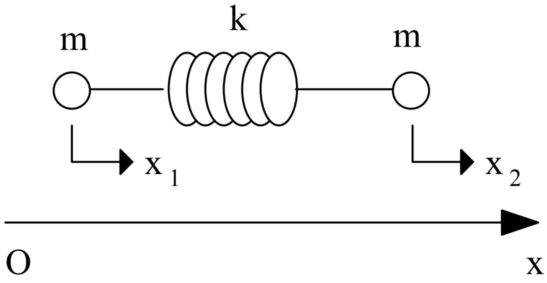
5. Déterminer l'expression de l'amplitude $y_0(\omega)$ du déplacement de la tige en régime permanent pour une vitesse angulaire ω.
6. Application numérique: M=25kg; m=250g; R=25cm; r=4cm; k=252500N/m et α=50kg/s.

L'amortissement est-il fort ou faible? Quelle est la valeur de ω pour laquelle y_0 est maximale? Calculer cette valeur maximale.

7. Pour éliminer ces vibrations quelle que soit la vitesse de rotation ω, on ajoute une masse m' à une distance r'=R. Déterminer sa position par rapport à celle de m ainsi que la valeur de m'.

Exercice2 (sur 4 points):

Une molécule diatomique est schématisée figure ci-contre. Ses deux atomes sont identiques et ne peuvent se déplacer que sur l'axe Ox horizontal. Calculer les pulsations propres. Calculer les rapports d'amplitudes de



chaque mode. Décrire le mouvement des atomes dans chacun des modes.

CORRIGE

Exercice1:

1. $m\begin{cases} r\sin\omega t \\ y - r\cos\omega t \end{cases}$

2. Condition d'équilibre: $(M+m)g = kd$

   Energie potentielle totale: $V = Mgy + mg(y - r\cos\omega t) + \frac{1}{2}k(d-y)^2$

   Avec la condition d'équilibre: $V = \frac{1}{2}ky^2 - mgr\,cos\,\omega t$

3. Energie cinétique de la roue $T_R = \frac{1}{2}M\dot{y}^2 + \frac{1}{2}J_C\omega^2 = \frac{1}{2}M\dot{y}^2 + \frac{1}{4}MR^2\omega^2$

   Vitesse de la masse m: $\mathbf{v}_m\begin{cases} r\omega\cos\omega t \\ \dot{y} + r\omega\sin\omega t \end{cases}$

   Energie cinétique de m: $T_m = \frac{1}{2}m\left(r^2\omega^2 + \dot{y}^2 + 2r\omega\dot{y}\sin\omega t\right)$

   Energie cinétique totale:

   $T = T_R + T_m = \frac{1}{2}M\dot{y}^2 + \frac{1}{4}MR^2\omega^2 + \frac{1}{2}m\left(r^2\omega^2 + \dot{y}^2 + 2r\omega\dot{y}\sin\omega t\right)$

4. Le Lagrangien vaut:

$$L = T - V = \frac{1}{2}M\dot{y}^2 + \frac{1}{4}MR^2\omega^2 + \frac{1}{2}m\left(r^2\omega^2 + \dot{y}^2 + 2r\omega\dot{y}\sin\omega t\right) - \frac{1}{2}ky^2 + mgr\cos\omega t$$

   qui s'écrit: $L = \frac{1}{2}(M+m)\dot{y}^2 + r\omega m\dot{y}\sin\omega t - \frac{1}{2}ky^2 + A(\omega,t)$; avec:

   $A(\omega,t) = \frac{\omega^2}{2}\left(mr^2 + \frac{MR^2}{2}\right) + mgr\cos\omega t$

5. La fonction A(ω,t) n'intervient pas dans l'équation de Lagrange qui s'écrit:

   $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial L}{\partial y} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{y}}$ avec: $D = \frac{1}{2}\alpha\dot{y}^2$

   $(M+m)\ddot{y} + mr\omega^2\cos\omega t + ky = -\alpha\dot{y}$

   $\ddot{y} + 2\delta\dot{y} + \omega_0^2 y = -\frac{m}{M+m}r\omega^2\cos\omega t$ avec : $\omega_0^2 = \frac{k}{M+m}$ et $\delta = \frac{\alpha}{2(M+m)}$

   En notation complexe pour le régime forcé: $cos\,\omega t \rightarrow e^{j\omega t}$; $y = Ye^{j\omega t}$ et $Y = y_0e^{j\varphi}$

   L'équation de Lagrange s'écrit: $-\omega^2 y + 2j\omega\delta y + \omega_0^2 y = -\frac{m}{M+m}r\omega^2 e^{j\omega t}$

   $y = -\frac{m}{M+m}r\omega^2 e^{j\omega t}\frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2) + 2j\omega\delta}$ d'où l'amplitude :

   $y_0(\omega) = \frac{m}{M+m}r\omega^2\frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\delta^2}}$

6. : $\omega_0 = 100\text{s}^{-1}; \delta = 1\text{s}^{-1} \Rightarrow \delta << \omega_0$

   Mouvement faiblement amorti ⇒ la pulsation de résonance $\omega_R \approx \omega_0$

d'où:

$$y_0^{\max} = y_0(\omega_0) = \frac{m}{M+m} r\omega_0^2 \frac{1}{2\omega_0\delta} = \frac{mr\omega_0}{2(M+m)\delta} = 0.02m = 2cm$$

7. Pour éliminer la "force" extérieure:il faut placer une masse m' diamétralement opposée et à une distance r' de l'axe telle que: mr=m'r' soit m'=40g.

Exercice2:

Le système d'équations linéaire s'écrit: $\begin{cases} (k - m\omega^2)x_1 - kx_2 = 0 \\ -kx_1 + (k - m\omega^2)x_2 = 0 \end{cases}$

L'équation séculaire s'écrit: $(k - m\omega^2)^2 = k^2 \Leftrightarrow (k - m\omega^2) = \pm k$;

Les pulsations propres sont: $\omega_1 = 0$ et $\omega_2^2 = \dfrac{2k}{m}$

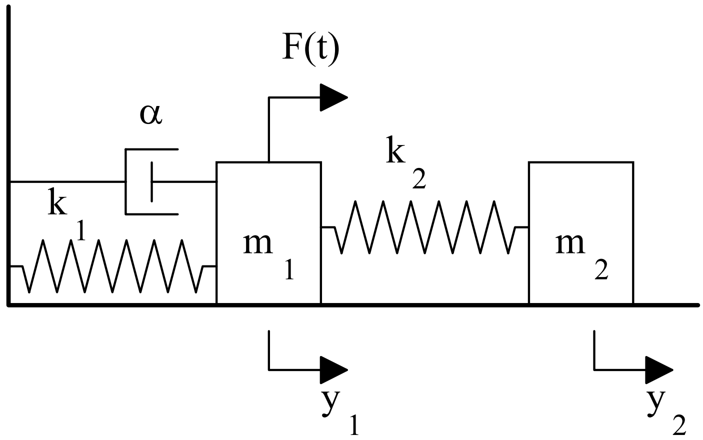
La première correspond à un mouvement de translation uniforme (accélération nulle) et $x_1=x_2$. Ce mode correspond à une translation uniforme de la molécule sans vibration.

Pour le deuxième mode $x_1=-x_2$, les deux molécules vibrent en opposition de phase et le centre de masse reste immobile.

2° Epreuve de moyenne durée   Année 94/95

Exercice 1 (sur 13 points):

On considère le système représenté sur la figure ci-contre. Sur la masse m_1 agit une force horizontale sinusoïdale de pulsation ω et d'amplitude F_0. Les déplacements des masses m_1 et m_2 par rapport à leurs positions d'équilibre sont respectivement $y_1(t)$ et $y_2(t)$.



Partie 1:

1/ Etablir les équations différentielles qui régissent le mouvement du système.

2/ En utilisant les notations complexes, déduire les équations algébriques satisfaites par $\dot{y}_1(t)$ et $\dot{y}_2(t)$ en régime sinusoïdal permanent.

3/ En calculant le rapport $\dot{y}_1(t) / \dot{y}_2(t)$, montrer que le mouvement des masses m_1 et m_2 , ne peuvent être qu'en phase ou en opposition de phase. Déterminer les pulsations pour lesquelles $\dot{y}_1(t)$ et $\dot{y}_2(t)$ sont en phase.

4/ Donner le circuit électrique équivalent dans l'analogie force-tension en précisant la correspondance entre les éléments électriques et mécaniques.

Partie 2:

Pour la suite de l'exercice la pulsation de la force est: $\omega = \sqrt{k_2 / m_2}$

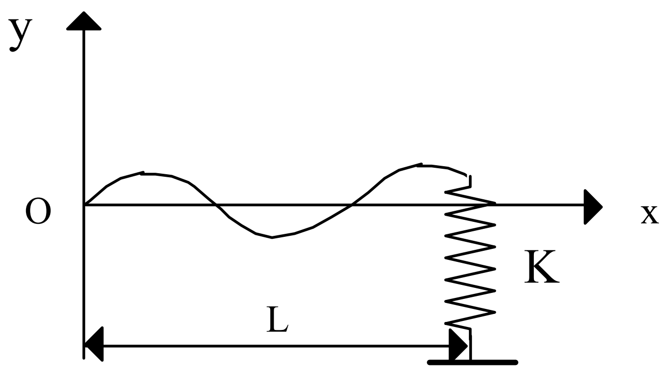
5/ En utilisant soit les équations obtenues question (2/) soit le schéma électrique équivalent, calculer $\dot{y}_1(t)$ et $\dot{y}_2(t)$.

6/ Quelle est alors l'impédance d'entrée $Z_e = F(t) / \dot{y}_1(t)$.

7/ Quelle est la force appliquée par le ressort k_2 sur la masse m_1 ?

Exercice 2 (sur 7 points):

Une corde de longueur L est tendue entre deux points situés respectivement en x=0 et x=L. Le point situé en x=0 est fixe et le point situé en x=L est relié à un ressort de raideur K. La tension de la corde est T. La corde est horizontale à l'équilibre et on



pourra négliger son poids. On étudie les ondes transverses stationnaires sinusoïdales de pulsation ω. La vitesse de propagation est V.

1/ Ecrire le déplacement y(x,t) en un point quelconque d'abscisse x et à l'instant t.

2/ En écrivant la condition limite pour x=0, montrer que y(x,t) peut se mettre sous la forme: $y(x,t) = A\, e^{j\omega t}\ \mathrm{f}(\mathrm{x})$; où f(x) est une fonction que l'on explicitera.

3/ Démontrer que pour x=L, on a la relation: $-T\dfrac{\partial y}{\partial x}(L,t) = Ky(L,t)$.

4/ Montrer que les pulsations propres doivent vérifier la condition: $\mathrm{tg}\left(\dfrac{\omega L}{V}\right) = C\dfrac{\omega L}{V}$ où C est une constante que l'on précisera.

5/ Déterminer les trois premières pulsations propres ω_1 , ω_2 et ω_3 dans le cas où $\dfrac{\mathrm{T}}{\mathrm{KL}} \to \infty$.

CORRIGE

Exercice 1 (sur 13 points):

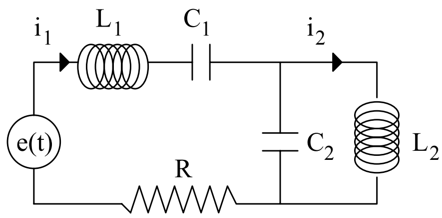
1/ $$\begin{cases} m_1\ddot{y}_1 + \alpha\dot{y}_1 + k_1 y_1 + k_2(y_1 - y_2) = F(t) \\ m_2\ddot{y}_2 + k_2(y_2 - y_1) = 0 \end{cases}$$

2/ $$\begin{cases} \left(\alpha + j\left(m_1\omega - \dfrac{k_1 + k_2}{\omega}\right)\right)\dot{y}_1 + j\dfrac{k_2}{\omega}\dot{y}_2 = F(t) \\ j\left(m_2\omega - \dfrac{k_2}{\omega}\right)\dot{y}_2 + j\dfrac{k_2}{\omega}\dot{y}_1 = 0 \end{cases}$$

3/ $\dfrac{\dot{y}_1}{\dot{y}_2} = 1 - \dfrac{m_2\omega^2}{k_2}$ ce rapport est réel, les deux mouvements sont en phase.ou en opposition de phase suivant le signe du rapport.

en phase si $0 < \omega < \sqrt{k_2/m_2}$

4/ $m_1 \leftrightarrow L_1$, $m_2 \leftrightarrow L_2$, $\alpha \leftrightarrow R$, $k_1 \leftrightarrow 1/C_1$, $k_2 \leftrightarrow 1/C_2$, $\dot{y}_1 \leftrightarrow i_1$, $\dot{y}_2 \leftrightarrow i_2$, $F(t) \leftrightarrow e(t)$.



5/ $$\begin{cases} \dot{y}_1 = 0 \\ \dot{y}_2 = -j\dfrac{\omega}{k_2}F(t) \end{cases}$$

6/ $\dot{y}_1 = 0 \Rightarrow Z_e = \infty$

7/ $\dot{y}_1 = 0 \Rightarrow$ somme des forces sur $m_1 = \vec{0} \Rightarrow$ action de $k_2 = -\vec{F}(t)$

Exercice 2 (sur 7 points):

1/ $y(x,t) = ae^{j\omega\left(t - x/V\right)} + be^{j\omega\left(t + x/V\right)}$

2/ $y(0,t) = 0 \Rightarrow b = -a \Rightarrow y(x,t) = -2jae^{j\omega t}\sin\left(\dfrac{\omega x}{V}\right)$

$y(x,t) = Ae^{j\omega t}\sin\left(\dfrac{\omega x}{V}\right)$ et $\mathrm{f}(\mathrm{x}) = \sin\left(\dfrac{\omega x}{V}\right)$

3/ Projection sur y du principe d'action et réaction entre corde et ressort:

$$F_y = -F_R \Leftrightarrow -T\frac{\partial y}{\partial x}(L,t) = -(-ky(L,t))$$

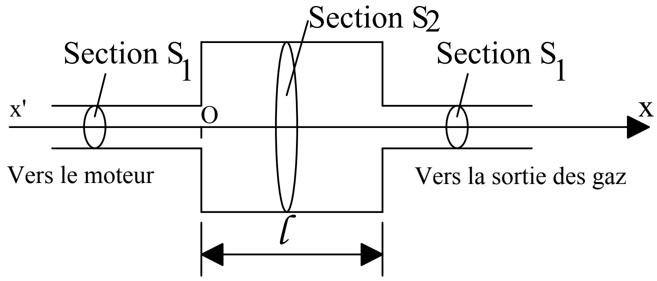
4/ $-TAe^{j\omega t}\,\dfrac{\omega}{V}\cos\left(\dfrac{\omega L}{V}\right) = -KAe^{j\omega t}\sin\left(\dfrac{\omega L}{V}\right)$ d'où: $\mathrm{tg}\left(\dfrac{\omega L}{V}\right) = -\dfrac{T}{KL}\left(\dfrac{\omega L}{V}\right) \Rightarrow C = -\dfrac{T}{KL}$

5/ pour $\dfrac{\mathrm{T}}{\mathrm{KL}} \rightarrow \infty$: $\mathrm{tg}\left(\dfrac{\omega L}{V}\right) \rightarrow \infty \Rightarrow \left(\dfrac{\omega_n L}{V}\right) = (2n+1)\dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \omega_n = (2n+1)\dfrac{\pi V}{2L}$; n=0, 1, 2,...∞ d'où:

$$\omega_0 = \frac{\pi V}{2L};\ \omega_1 = \frac{3\pi V}{2L};\ \omega_2 = \frac{5\pi V}{2L}$$

Troisième Epreuve de Moyenne Durée (1h 30mn) **1994-95**

Exercice 1 : (/ 14 points)



Dans tous les véhicules disposant d'un moteur à explosion (essence, diesel,...), les gaz de combustion sont évacués par un tuyau d'échappement. L'explosion provoquée par la combustion du mélange essence-air donne naissance à une onde de pression qui se propage à l'intérieur de ce tuyau et peut donner lieu à des bruits extrêmement désagréables. Pour limiter l'intensité de ce son, on utilise un pot d'échappement (ou "silencieux") qui est tout simplement constitué d'un tuyau de section supérieure à la section du tuyau d'échappement. On se propose ici d'étudier le fonctionnement d'un tel dispositif qui peut être modélisé par le schéma ci-dessus.

Ce système simplifié est constitué d'un tuyau de longueur semi-infinie et de section S_1, terminé en x = 0 par un second tuyau de longueur ℓ et de section $S_2 > S_1$. En $x = \ell$, ce tuyau est prolongé par un tuyau de longueur infinie et de section S_1. Ces tuyaux contiennent le même mélange gazeux de masse volumique ρ dans lequel les ondes acoustiques se propagent à la vitesse V. Les impédances acoustiques caractéristiques respectives des tuyaux de section S_1 et S_2 sont respectivement $Z_1 = \rho V/S_1$ et $Z_2 = \rho V/S_2$.

1°) L'onde acoustique issue du moteur est représentée par : $A_1\, e^{j\omega(t - x/V)}$.Expliquer pourquoi le champ de pression acoustique peut s'écrire :

$$\text{région}\, a\, (x \leq 0):\ p_1 = A_1 e^{j\omega(t-x/V)} + B_1 e^{j\omega(t+x/V)}$$

$$\text{région}\, b\, (0 \leq x \leq \ell):\ p_2 = A_2 e^{j\omega(t-x/V)} + B_2 e^{j\omega(t+x/V)}$$

$$\text{région}\, c\, (\ell \leq x):\ p_3 = A_3 e^{j\omega(t-x/V)}$$

Que représentent A_1, B_1, A_2, B_2 et A_3 ?

2°) Calculer, en fonction des données du 1°) et des impédances Z_1 et Z_2, les débits $d_1 = S_1 \dot{u}_1$, $d_2 = S_2 \dot{u}_2$ et $d_3 = S_1 \dot{u}_3$ correspondant respectivement aux régions a, b et c. $\dot{u}_1$, $\dot{u}_2$ et $\dot{u}_3$ représentent la vitesse de particules dans chacune de ces régions.

3°) Ecrire les relations de continuité (débit et pression) en x = 0 et en déduire l'expression de A_1 en fonction de A_2 et B_2 .

4°) Ecrire les relations de continuité (débit et pression) en $x = \ell$ et en déduire l'expression de A_2 et B_2 en fonction de A_3 .

5°) Montrer que dans le cas où $S_2 = 4\, S_1$, le coefficient de transmission en intensité acoustique défini par $\alpha_t = |A_3/A_1|^2$ peut se mettre sous la forme :

$$\alpha_t = \frac{1}{1 + \beta \sin^2\left(\dfrac{\omega \ell}{V}\right)}$$

où β est une constante positive dont on précisera la valeur.

6°) ω et V étant données, pour quelles valeurs de la longueur ℓ le coefficient α_t est minimal? Calculer cette valeur minimale et conclure.

Exercice 2 : (/ 6 points)

Une onde électromagnétique plane sinusoïdale et linéairement polarisée, correspondant à de la lumière de longueur d'onde $\lambda = 5.0\ 10^{-7}$ m se propage dans le vide. Son intensité (puissance moyenne par unité de surface) est $I = 0.1\ W.m^{-2}$. Sa direction de propagation se trouve dans le plan xOy et fait un angle $\alpha = 30°$ avec l'axe Ox. La direction de polarisation (champ $\vec{E}$) est contenue dans le plan xOy.

1°) Ecrire les expressions littérales et numériques du champ électrique $\vec{E}$,du champ magnétique $\vec{B}$ et du vecteur de Poynting. Faire un dessin représentant la structure de cette onde électromagnétique.

2°) Calculer la puissance moyenne reçue par un cadre carré de 1cm de côté perpendiculaire à la direction de propagation.

N.B. On donne la vitesse de propagation de la lumière dans le vide $c = 3\ 10^{8}\ m.s^{-1}$ ainsi que l'impédance caractéristique du vide $Z_0 = 377\ \Omega$.

CORRIGE

Exercice 1

1. Région a: Supperposition de l'onde émise par le moteur plus celle réfléchie par les parties b et c.

   Région b: Premier terme :superposition des ondes se propageant dans le sens des x croissants. Deuxième terme: superposition des ondes se propageant dans le sens des x décroissants.

   Région c: Onde transmise dans le dernier tuyau et se propageant dans le sens des x croissants.

   A_1, B_1, A_2, B_2, et A_3 sont les amplitudes complexes de ces différentes ondes.

2. $$d_1 = \frac{1}{Z_1}\left(A_1 e^{j\omega\left(t - x/V\right)} - B_1 e^{j\omega\left(t + x/V\right)}\right)$$

   $$d_2 = \frac{1}{Z_2}\left(A_2 e^{j\omega\left(t - x/V\right)} - B_2 e^{j\omega\left(t + x/V\right)}\right)$$

   $$d_3 = \frac{1}{Z_1}\left(A_3 e^{j\omega\left(t - x/V\right)}\right)$$

3. $$\begin{cases} A_1 + B_1 = A_2 + B_2 \\ \dfrac{1}{Z_1}\left(A_1 - B_1\right) = \dfrac{1}{Z_2}\left(A_2 - B_2\right) \end{cases} \Rightarrow A_1 = \frac{A_2}{2}\left(1 + \frac{Z_1}{Z_2}\right) + \frac{B_2}{2}\left(1 - \frac{Z_1}{Z_2}\right)$$

4. $$\begin{cases} A_2 e^{-j\frac{\omega l}{V}} + B_2 e^{+j\frac{\omega l}{V}} = A_3 e^{-j\frac{\omega l}{V}} \\ \dfrac{1}{Z_2}\left(A_2 e^{-j\frac{\omega l}{V}} - B_2 e^{+j\frac{\omega l}{V}}\right) = \dfrac{1}{Z_1}\left(A_3 e^{-j\frac{\omega l}{V}}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_2 = \dfrac{A_3}{2}\left(1 + \dfrac{Z_2}{Z_1}\right) \\ B_2 = \dfrac{A_3}{2}\left(1 - \dfrac{Z_2}{Z_1}\right) e^{-2j\frac{\omega l}{V}} \end{cases}$$

5. $S_2/S_1=4 \Rightarrow A_1 = \frac{5A_2}{2} - \frac{3B_2}{2}$; $A_2 = \frac{5A_3}{8}$ et $B_2 = \frac{3A_3}{8} e^{-2j\frac{\omega l}{V}}$

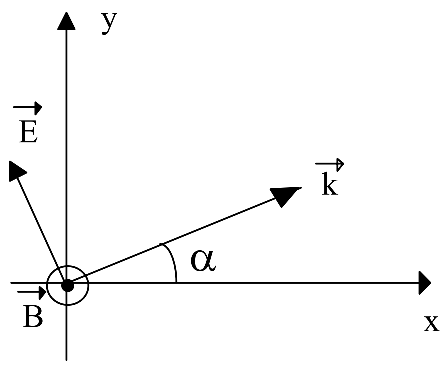
$$\frac{A_3}{A_1} = \frac{16}{25 - 9e^{-2j\frac{\omega 1}{V}}} = \frac{16e^{+j\frac{\omega 1}{V}}}{25e^{+j\frac{\omega 1}{V}} - 9e^{-j\frac{\omega 1}{V}}} = \frac{16e^{+j\frac{\omega 1}{V}}}{16\cos\left(\frac{\omega 1}{V}\right) - 34j\sin\left(\frac{\omega 1}{V}\right)}$$

$$\left|\frac{A_3}{A_1}\right|^2 = \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\omega 1}{V}\right) + \left(\frac{17}{8}\right)^2 \sin^2\left(\frac{\omega 1}{V}\right)} = \frac{1}{1 + \beta\sin^2\left(\frac{\omega 1}{V}\right)}; \beta = 3.515$$

6. α_t minimum pour $\sin^2\left(\frac{\omega 1}{V}\right) = 1 \Rightarrow \frac{\omega 1}{V} = (2n+1)\frac{\pi}{2}$. La valeur $(\alpha_t)_{\min} = \frac{1}{1+3.515} = 0.221$

L'intensité sonore a été atténuée d'un facteur important d'où le nom de "silencieux".

Exercice 2



1. $I = \frac{E_0^2}{2Z_0} \Rightarrow E_0 = 8.68 V/m$; $B_0 = \frac{E_0}{c} = 2.9\ 10^{-8} T$

$\omega = \frac{2\pi c}{\lambda} = 3.77\ 10^{15} Hz$; $k_x = \frac{2\pi}{\lambda}\frac{\sqrt{3}}{2} = 1.09\ 10^7 m^{-1}$;

$k_y = \frac{2\pi}{\lambda}\frac{1}{2} = 6.3\ 10^6 m^{-1}$

$$\vec{E} = \begin{cases} E_x = -\frac{E_0}{2}\exp j(\omega t - k_x x - k_y y) \\ E_y = \frac{\sqrt{3}E_0}{2}\exp j(\omega t - k_x x - k_y y) \\ E_z = 0 \end{cases}$$

$$\text{et } \vec{B} = \begin{cases} B_x = 0 \\ B_y = 0 \\ B_z = B_0 \exp j(\omega t - k_x x - k_y y) \end{cases}$$

$$\vec{R} = \vec{E} \times \vec{H} \Rightarrow \vec{R} = \begin{cases} R_x = E_y B_z \frac{c}{Z_0} = 0.173\cos^2(\omega t - k_x x - k_y y) \\ R_y = -E_x B_z \frac{c}{Z_0} = 0.10\cos^2(\omega t - k_x x - k_y y) \\ R_z = 0 \end{cases}$$ (en W/m²)

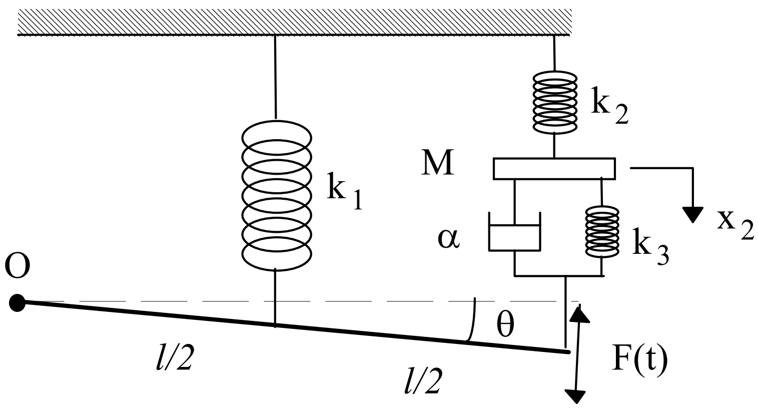
On vérifie que: $|\vec{R}| = I$

2. $\overline{P} = Is = 10^{-5}W$

EPREUVE DE SYNTHESE (DUREE 2h) Année 94/95

Exercice 1 (sur 9 pts)

Sur la figure ci-contre, la masse M est reliée à un bâti par un ressort de raideur k_2. La barre homogène de masse m et de longueur l oscille autour d'un point fixe O dans le plan de la figure. Elle est reliée au bâti, en son milieu par un ressort de raideur k_1, et elle est couplée à la masse M par un ressort de raideur k_3 et un amortisseur de coefficient α. Par ailleurs, elle est soumise à une force F(t) perpendiculaire à la barre sinusoidale, d'amplitude F_0 et de pulsation ω. En considérant les oscillations de faibles amplitudes et sachant qu'à l'équilibre la barre est horizontale:



1/ Déterminer le Lagrangien du système.

2/ Déterminer les équations différentielles du mouvement en $x_1(t)=l\theta(t)$ et $x_2(t)$.

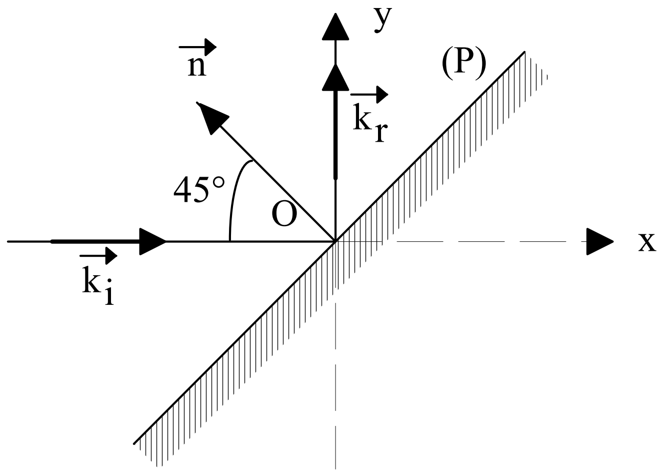
3/ En déduire le schéma électrique équivalent dans l'analogie Force-Tension (On précisera l'équivalence entre les différents éléments).

4/ Calculer l'impédance d'entrée $Z_e = \dfrac{F(t)}{\dot{x}_1(t)}$ du système mécanique dans le cas où $\omega^2 = \dfrac{k_2}{M}$

5/ Déterminer les vitesses $\dot{x}_1(t)$ et $\dot{x}_2(t)$ à cette pulsation. Décrire le comportement du système dans ce cas.

Exercice 2 (sur 11 pts)

Une onde acoustique plane de pulsation ω se propage à la vitesse V dans un fluide parfait de densité ρ. La direction de propagation correspond à la direction Ox. L'amplitude de l'onde de pression acoustique est p_0. Cette onde rencontre un plan (P) parfaitement rigide et parfaitement réfléchissant faisant un angle de 45° avec la direction de propagation de l'onde incidente. L'onde réfléchie se propage donc dans la direction Oy (voir figure ci-contre). Les vecteurs $\vec{n}, \vec{k}_i$ et $\vec{k}_r$ représentent respectivement la normale au plan (P), le vecteur d'onde de l'onde incidente et de l'onde réfléchie. p'_0 est l'amplitude de l'onde de pression réfléchie.



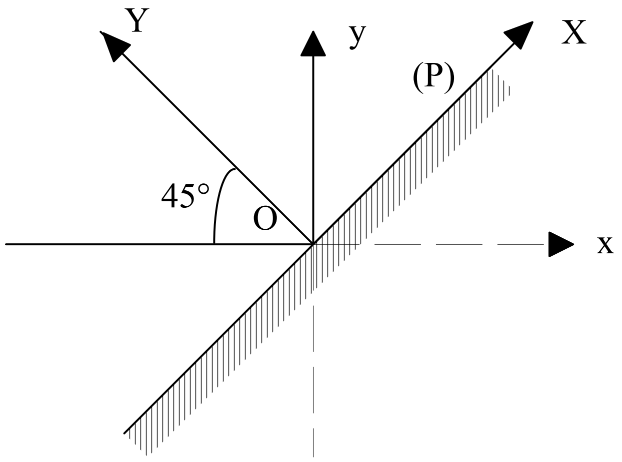
1/ Donner l'expression des ondes de pression incidente et réfléchie.

2/ Donner l'expression des ondes de vitesses de particules, incidente et réfléchie. Calculer les projections normales au plan (P) (selon $\vec{n}$) de ces vitesses.

3/ Expliquer pourquoi la résultante des vitesses normales doit être nulle sur le plan (P) d'équation y=x.

4/ A partir de cette condition sur le plan (P), déterminer la pression acoustique totale $p_T(x,y,t)$ en tout point du milieu fluide.

5/ En effectuant le changement de variables $x = \frac{X-Y}{\sqrt{2}}$ et $y = \frac{X+Y}{\sqrt{2}}$, où X et Y sont les coordonnées représentées sur la figure ci-contre.



a/ Donner l'expression de la pression totale

b/ Déterminer l'amplitude de la pression acoustique totale sur le plan (P). Déterminer les positions pour lesquelles la pression acoustique totale est nulle. Les représenter schématiquement.

c/ Quelle est la direction de propagation de l'onde totale $p_T(X,Y,t)$? Quelle est la vitesse de propagation de cette onde?

CORRIGE

Exercice 1

$$p_i(x,t) = p_0 \exp j\omega\left(t - \frac{x}{V}\right)$$

$$p_r(y,t) = p'_0 \exp j\omega\left(t - \frac{y}{V}\right)$$

2/ $$\begin{cases} \dot{\vec{u}}_i(x,t) = \dfrac{p_0}{\rho V} \exp j\omega\left(t - \dfrac{x}{V}\right)\vec{e}_x \\ \dot{\vec{u}}_r(x,t) = \dfrac{p'_0}{\rho V} \exp j\omega\left(t - \dfrac{y}{V}\right)\vec{e}_y \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{u}_{in}(x,t) = -\dfrac{p_0}{\sqrt{2}\rho V} \exp j\omega\left(t - \dfrac{x}{V}\right) \\ \dot{u}_{rn}(y,t) = \dfrac{p'_0}{\sqrt{2}\rho V} \exp j\omega\left(t - \dfrac{y}{V}\right) \end{cases}$$

3/ Le plan y=x étant rigide $\Rightarrow \dot{u}_{Tn}(x,y,t) = 0$ pour y=x

4/ $$\dot{u}_{Tn}(x,y,t) = -\frac{p_0}{\sqrt{2}\rho V} \exp j\omega\left(t - \frac{x}{V}\right) + \frac{p'_0}{\sqrt{2}\rho V} \exp j\omega\left(t - \frac{y}{V}\right)$$

$$\dot{u}_{Tn}(x,y,t)=\frac{\exp j\omega t}{\sqrt{2}\rho V}\left(p'_0\exp\left(-j\frac{\omega y}{V}\right)-p_0\exp\left(-j\frac{\omega x}{V}\right)\right)$$ sur le plan (P) x=y

$$\dot{u}_{Tn}(P,t)=\frac{\exp j\omega t}{\sqrt{2}\rho V}\exp\left(-j\frac{\omega x}{V}\right)(p'_0-p_0)=0\Rightarrow p'_0=p_0$$

$$p_T(x,y,t)=p_0\exp j\omega t\left(\exp\left(-j\frac{\omega y}{V}\right)+\exp\left(-j\frac{\omega x}{V}\right)\right)$$

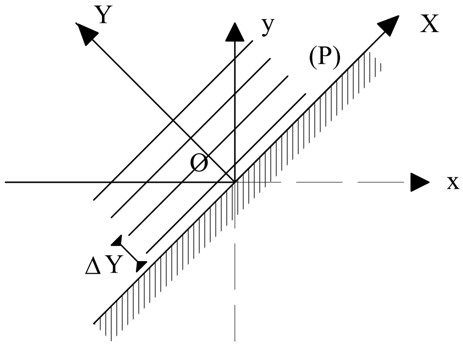
5/ a/ $p_T(x,y,t)=2p_0\exp j\omega\left(t-\frac{\omega X}{\sqrt{2}V}\right)\cos\left(\frac{\omega Y}{\sqrt{2}V}\right)$

b/sur (P):Y=0 $\Rightarrow \left|p_T(P,t)\right|=2p_0$

$$p_T(x,y,t)=0\Rightarrow\cos\left(\frac{\omega Y}{\sqrt{2}V}\right)=0$$

$$\Rightarrow\frac{\omega Y_n}{\sqrt{2}V}=(2n+1)\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow Y_n=\frac{\sqrt{2}V}{\omega}(2n+1)\frac{\pi}{2}$$



pour n=0,1...famille de plans parralleles à (P) distants de

$$\Delta Y=\frac{\sqrt{2}V}{\omega}\pi$$

c/ Onde qui se propage selon OX

Vitesse de propagation $V'=\sqrt{2}V$

Epreuve de Synthèse - Juin 1998 (Durée 2h)

Exercice (/ 6 points)

1. On considère le champ électrique $\vec{E}$, dans le vide, défini par ses coordonnées dans un repère cartésien Oxyz :

$$E_x = 0 \; ; \qquad E_y = E_0 \cos\frac{\pi y}{a} \exp[j(\omega t - kz)] \; ; \qquad E_z = \alpha E_0 \sin\frac{\pi y}{a} \exp[j(\omega t - kz)]$$

E_0 est réel et α peut être complexe. Quelles relations doivent vérifier α, k, a d'une part et a, k, ω et c d'autre part pour que $\vec{E}$ soit le champ électrique d'une onde électromagnétique dans le vide? Quelle est alors l'expression de la vitesse de phase V_ϕ en fonction de α? (c est la vitesse de propagation de la lumière dans le vide).

2. **a.** Dans quels plans le champ électrique est-il polarisé transversalement?

b. Dans quels plans le champ électrique est-il polarisé longitudinalement?

3. Montrer qu'une telle onde satisfait aux conditions aux limites si l'espace est limité par deux plans conducteurs parfaits, parallèles à xOz et situés en y_1=pa et y_2=-pa (p entier).

Problème (/ 14 points)

Première partie :

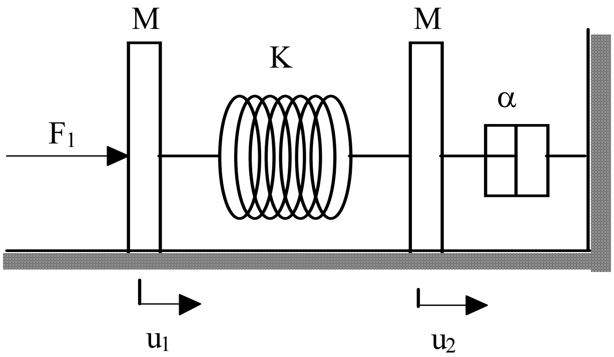


Figure 1

On considère le système à deux degrés de liberté représenté par la figure 1. Il est constitué par deux masses identiques M reliées par un ressort de raideur K. La seconde masse est reliée à un bâti fixe par un amortisseur de coefficient de frottement visqueux α, tandis que la première masse est soumise à une force sinusoïdale F_1 de pulsation ω. Les deux masses glissent sans frottement sur le plan horizontal. u_1 et u_2 représentent les positions respectives de chacune des masses par rapport à l'équilibre.

I.1. Etablir les équations différentielles du mouvement pour les coordonnées u_1 et u_2.

I.2. Dans le cas où α est négligeable devant $M\omega - \frac{K}{\omega}$, calculer en régime permanent sinusoïdal l'amplitude complexe $\overline{V}_2$ de la vitesse de la seconde masse en fonction de l'amplitude de F_1.

I.3. En déduire l'amplitude complexe $\overline{F}_2$ de la force transmise à l'amortisseur.

I.4. Calculer le coefficient de transmission $\beta = \left|\frac{\overline{F}_2}{\overline{F}_1}\right|$.

I.5. Si $\omega >> \sqrt{\frac{K}{M}}$, montrer que le coefficient de transmission β s'écrit sous la forme : $\beta = \frac{a}{M^2\omega^3}$; donner l'expression de a en fonction de α et K.

Deuxième partie :

Le système décrit ci-dessus symbolise un dispositif d'isolation acoustique par une double paroi. Un tel dispositif peut être représenté par deux masses rigides M, de section S, séparées, à l'équilibre, par une distance e (figure 2.a). On suppose qu'à l'équilibre, la pression est égale à P_0 dans chacune des trois régions La première masse M se met en mouvement lorsqu'elle est soumise à l'action d'une onde de pression. Ce mouvement entraîne la compression de l'air compris entre les deux masses, ce qui met en mouvement la seconde masse. Une partie de l'onde acoustique est ainsi transmise vers la droite.. Lorsque une onde acoustique arrive de la gauche vers la droite, la pression acoustique résultante dans le milieu de gauche est égale à p_1, la pression acoustique transmise est égale à p_2; la pression acoustique entre les deux parois est supposée uniforme et est notée p (figure 2b). On supposera que la succession de compressions et de détentes de la tranche de fluide limitée par les deux masses, est un processus adiabatique. ρ est la masse volumique de l'air et C la vitesse de propagation des ondes acoustiques dans l'air

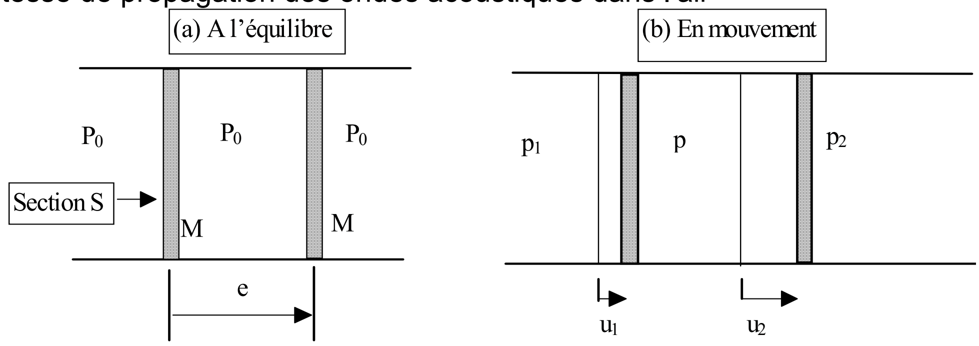


Figure 2

II.1. Si l'onde acoustique incidente de pulsation ω, est supposée progressive harmonique et plane, quelle est la nature de l'onde acoustique transmise au troisième milieu supposé infini? Montrer qu'en chaque point de ce milieu l'impédance acoustique est réelle. Préciser la valeur de cette impédance.

II.2. Calculer le volume v_0 de la tranche de fluide limitée par les deux masses, à l'équilibre. Calculer le volume v occupé par cette tranche de fluide en fonction de u_1 et u_2, lorsqu'elle est en mouvement. En déduire la dilatation volumique $\theta = \frac{v - v_0}{v_0}$.

II.3. Sachant que $p = -\gamma P_0\, \theta$, montrer que la force exercée par le fluide intermédiaire sur chacune des masses M s'écrit $F = -K(u_2 - u_1)$. Donner l'expression de K en fonction de P_0, S , e et de γ qui représente le rapport des chaleurs spécifiques de l'air.

II.4. Montrer alors que la figure 2.b. est équivalente à la configuration donnée par la figure 1. Donner l'expression de $F_1=F_1(p_1,S)$, de $K=K(\gamma,P_0,S,e)$ et de $\alpha=\alpha(\rho,C,S)$.

II.5. En tenant compte des résultats de la première partie, calculer le coefficient de transmission en pression $\beta = \left|\frac{P_2}{P_1}\right|$ où P_2 représente l'amplitude de la pression transmise par la paroi.

II.6. Application numérique : On donne les valeurs numériques suivantes :

$P_0=10^5$ Pa, $\rho=1.21$ kg/m^3, C=340 m/s, $\gamma=1.4$, M= 10kg , S=4 m^2, e=0.2m, f=1000 Hz et 5000 Hz.

a. Pour chacune de ces fréquences, comparer α et $M\omega$, puis comparer ω et $\sqrt{\frac{K}{M}}$. Les approximations faites plus haut sont-elles valables ?

b. Calculer β pour chacune de ces fréquences. Conclusion.

Corrigé

Exercice (/6 points)

1. $\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\pi}{a}+jk\alpha=0$

$$\nabla^2\vec{E}-\frac{1}{c^2}\ddot{\vec{E}}=0 \quad \Rightarrow \quad k^2=\frac{\omega^2}{c^2}-\frac{\pi^2}{a^2}$$

$$V_\phi=c\sqrt{1-\alpha^2}$$

2. Polarisation transversale dans les plans : $y=na$

Polarisation longitudinale dans les plans : $y=(2n+1)\frac{a}{2}$

3. Continuité de la composante E_y en y=$\pm$a

Problème (/14 points)

Première partie :

I.1. $$\begin{cases} M\ddot{u}_1+Ku_1-Ku_2=F_1 \\ -Ku_1+M\ddot{u}_2+\alpha\dot{u}_2+Ku_2=0 \end{cases}$$

I.2. $$\overline{V}_2=\frac{jKF_1}{M^2\omega\left(\frac{2K}{M}-\omega^2\right)}$$

I.3. $$\overline{F}_2=\frac{j\alpha KF_1}{M^2\omega\left(\frac{2K}{M}-\omega^2\right)}$$

I.4. $$\beta=\frac{\alpha K}{M^2\omega\left|\frac{2K}{M}-\omega^2\right|}$$

I.5. $$\beta=\frac{\alpha K}{M^2\omega^3} \quad \Rightarrow \quad a=\alpha K$$

Deuxième partie :

II.1. L'onde acoustique transmise est une onde progressive, plane harmonique.

$$\rho\frac{\partial\dot{u}}{\partial t}=-\frac{\partial p_2}{\partial x} \quad \Rightarrow Z=\frac{p_2}{\dot{u}}=\rho C\ (\text{réel}) \qquad \left[x\text{: direction de propagation}\right]$$

II.2. $v_0=Se$

$$v=v_0\left[1+\frac{u_2-u_1}{e}\right]$$

$$\theta=\frac{u_2-u_1}{e}$$

II.3. $$F=pS=-\frac{\gamma P_0 S}{e}\left(u_2-u_1\right) \quad \Rightarrow \quad K=\frac{\gamma P_0 S}{e}$$

II.4. $F_1=p_1S$

$$K = \frac{\gamma P_0 S}{e}$$

$$\alpha = \rho C S$$

II.5. $$\beta = \frac{\rho C \gamma P_0 S^2}{e M^2 \omega^3}$$

II.6.

f=1000 Hz	ω=6280 rad/s	Mω=62800 kg/s	α=1646 kg/s	$\sqrt{K/M}$=529 rad/s	β=1.9 10^{-4}
f=5000 Hz	ω=31400 rad/s	Mω=314000 kg/s	α=1646 kg/s	$\sqrt{K/M}$=529 rad/s	β=1.5 10^{-6}