Exercice 01 :

On considère un mobile M. Son mouvement est donné par son vecteur de position $\overrightarrow{OM}$:

$$\overrightarrow{OM} = \vec{r} = b.\cos(\omega.t)\,\vec{i} + a.t.\vec{j} + b.\sin(\omega.t)\,\vec{k}$$

a, b et ω sont des constantes, t : temps, O : l'origine.

- Calculer le rayon de courbure de la trajectoire

Solution (6 pts)

- $\overrightarrow{OM} = \vec{r} = b.\cos(\omega.t)\,\vec{i} + a.t.\vec{j} + b.\sin(\omega.t)\,\vec{k}$

- $\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = -b.\omega.sin(\omega.t)\vec{i} + b.\omega.cos(\omega.t)\vec{k} + a\,\vec{j}$

$$\|\vec{V}\| = \sqrt{(-b.\omega.sin(\omega.t))^2 + (b.\omega.cos(\omega.t))^2 + (a)^2}$$

$$\|\vec{V}\| = \sqrt{(-b.\omega)^2.(sin(\omega.t))^2 + (b.\omega)^2.(cos(\omega.t))^2 + (a)^2}$$

$$\|\vec{V}\| = \sqrt{(b.\omega)^2.\left((sin(\omega.t))^2 + (cos(\omega.t))^2\right) + (a)^2}$$

$$\|\vec{V}\| = \sqrt{(b.\omega)^2. + (a)^2}$$

$$\|\vec{V}\| = \sqrt{b^2.\omega^2. + a^2}$$

2.5

- $\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = -b.\omega^2.cos(\omega.t)\vec{i} - b.\omega^2.sin(\omega.t)\vec{k}$

$$a = \sqrt{\left(-b.\omega^2.cos(\omega.t)\right)^2 + \left(-b.\omega^2.sin(\omega.t)\right)^2}$$

$$a = \sqrt{(-b.\omega^2)^2((cos(\omega.t))^2 + sin(\omega.t)^2)}$$

$$a = (b.\omega^2)\sqrt{cos^2(\omega.t) + sin^2(\omega.t)}$$

$$a = b.\omega^2$$

2.5

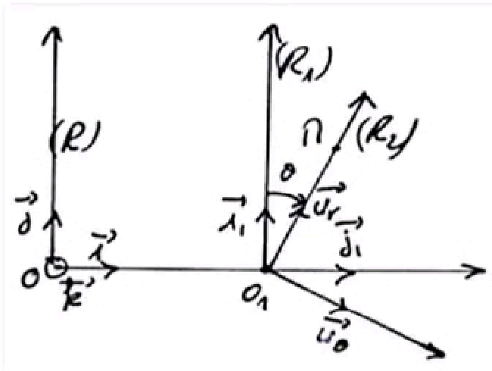
Mais a $= \frac{V^2}{R}$

donc :

$$R = \frac{V^2}{a} = \frac{\left(\sqrt{b^2.\omega^2. + a^2}\right)^2}{b.\omega^2} = \frac{b^2.\omega^2. + a^2}{b.\omega^2}$$

1

Exercice 02 : (6pts)



Soient $R(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ un référentiel fixe et $R_1(O_1,\vec{\imath}_1=\vec{\imath},\vec{\jmath}_1=\vec{\jmath},\vec{k}_1=\vec{k})$ un référentiel mobile tel que : $\vec{V}(O_1/R)=a\,t\,\vec{J}_1$; où a est une constante positive.

Considérer $R(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ comme référentiel absolu et $R_1\left(O_1,\vec{\imath}_1,\vec{\jmath}_1,\vec{k}_1\right)$ comme référentiel relatif : (fig. ci-contre), R_2 n'est pas considéré comme référentiel relatif dans cette étude. M est lié à (R_2) par : $\overrightarrow{O_1M}=l.\overrightarrow{U_r}$, l=constante

1. Déterminer l'expression de la vitesse relative $\vec{V}(M/R_1)$ et de la vitesse d'entraînement $\overrightarrow{V_e}(M)$. En déduire la vitesse absolue $\vec{V}(M)$
2. Quelle est la nature du mouvement de R_1 par rapport à R ?
3. Déterminer l'expression des vecteurs accélérations relatives $\vec{a}_r(M/R_1)$, d'entraînement $\overrightarrow{a_e}(M)$ et de Coriolis $\overrightarrow{a_c}$. En déduire l'accélération absolue $\overrightarrow{a_a}(M)$

Solution 02

0.25 0.25

1. Expression des vitesses :

i. de la vitesse relative $\vec{V}(M/R_1)$

$$\overrightarrow{V_r}=\vec{V}(M/R_1)=\left.\frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt}\right]_{R_1}=\left.\frac{dl.\overrightarrow{U_r}}{dt}\right]_{R_1}=l.\left.\frac{d\overrightarrow{U_r}}{dt}\right]_{R_1}=l.\dot{\theta}.\overrightarrow{U_\theta}$$

0.5

$$\overrightarrow{V_r}=l.\dot{\theta}.\overrightarrow{U_\theta}$$

0.25

ii. de la vitesse d'entraînement $\overrightarrow{V_e}(M)$

$$\overrightarrow{V_e}(P\equiv M)=\left.\frac{d\overrightarrow{OO_1}}{dt}\right]_R+\vec{\omega}\,\Lambda\,\overrightarrow{O_1M}$$

0.25 0.5

Il n' y a pas de rotation de R_1 autour de R , alors :

$$\vec{\omega}=\vec{0}$$

$$\overrightarrow{V_e}(P\equiv M)=\left.\frac{d\overrightarrow{OO_1}}{dt}\right]_R=\vec{V}(O_1/R)=a\,t\,\vec{J}_1=a\,t\,(\sin(\theta)\,\overrightarrow{U_r}+\cos(\theta)\,\overrightarrow{U_\theta})$$

0.5

iii. la vitesse absolue $\overrightarrow{V_a}$

$$\overrightarrow{V_a}=\overrightarrow{V_r}+\overrightarrow{V_e}=l.\dot{\theta}.\overrightarrow{U_\theta}+a\,t\,(\sin(\theta)\,\overrightarrow{U_r}+\cos(\theta)\,\overrightarrow{U_\theta})$$

0.25

2. Nature du mouvement

0.25

- **Le référentiel R_1 ne fait aucune rotation par rapport à R_2. Alors le mouvement représente une translation.**
- $\vec{V}(O_1/R) = a\ t\,\vec{J}_1$ la translation est rectiligne

0.5

La nature du mouvement : c'est un mouvement de translation rectiligne

3. Expression des accélérations :

i. de l'accélération relative $\vec{a}(M/R_1)$

0.5 0.5

$$\overrightarrow{a_r} = \vec{a}(M/R_1) = \left.\frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt}\right]_{R_1} = \left.\frac{d\,\overrightarrow{V_r}}{dt}\right]_{R_1} = \left.\frac{d\,l.\dot{\theta}.\overrightarrow{U_\theta}}{dt}\right]_{R_1} = l.\ddot{\theta}.\,\overrightarrow{U_\theta} - l.\dot{\theta}^2.\overrightarrow{U_r}$$

ii. de l'accélération d'entrainement $\vec{a}_e$

0.25

$$\vec{a}_e = \vec{a}((P \equiv M)/R) = \left.\frac{d^2\overrightarrow{OO_1}}{dt^2}\right]_R + \frac{d\vec{\varpi}}{dt}\Lambda\,\overrightarrow{O_1M} + \vec{\varpi}\,\Lambda\left(\vec{\varpi}\,\Lambda\,\overrightarrow{O_1M}\right)$$

0.25

$$\vec{a}_e = \left.\frac{da.t.\vec{J}_1}{dt}\right]_R + \vec{0} + \vec{0} = a.\vec{J}_1 = a.(\sin(\theta)\,\overrightarrow{U_r} + cos(\theta)\,\overrightarrow{U_\theta})$$

iii. de l'accélération de Coriolis $\vec{V}(M/R_1)$

0.5

$$\vec{a}_C = 2.\left(\vec{\varpi}\,\Lambda\,\overrightarrow{V_r}\right) = \vec{0}$$

iv. de l'accélération absolue $\vec{V}(M/R_1)$

0.25

$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_C = l.\ddot{\theta}.\,\overrightarrow{U_\theta} - l.\dot{\theta}^2.\overrightarrow{U_r} + a.(\sin(\theta)\,\overrightarrow{U_r} + cos(\theta)\,\overrightarrow{U_\theta}) + \vec{0}$$

0.25

$$\vec{a} = \left(a.\sin(\theta) - l.\dot{\theta}^2\right).\overrightarrow{U_r} + (l.\ddot{\theta} + a.cos(\theta))\,\overrightarrow{U_\theta}$$

Exercice 3

Dans la trajectoire indiquée sur la figure ci-contre, la partie AB est le quart d'un cercle de rayon L=1 m. On libère un corps ponctuel M de masse m du point A sans vitesse initiale et sans frottement sur la trajectoire AB. On donne g=10 m/s².

Trouver la vitesse de M au point B par deux différentes méthodes :

1. En utilisant le théorème le principe de conservation de l'énergie mécanique (théorème de l'énergie mécanique) ;
2. En utilisant le principe fondamental de la dynamique.

Solution

La vitesse de M au point B par deux différentes méthodes :

1. **En utilisant le théorème le principe de conservation de l'énergie mécanique (théorème de l'énergie mécanique) ;**

En appliquant le principe de conservation de l'énergie mécanique on obtient : 1

$\Delta(E_C + E_P) = \Delta E_M = \Delta E_{Tot} = 0$

(Puisque : $E_C + E_P = E_M = E_{Tot}$)

$E_C(A) + E_P(A) = E_C(A) + E_P(A)$ 0.5

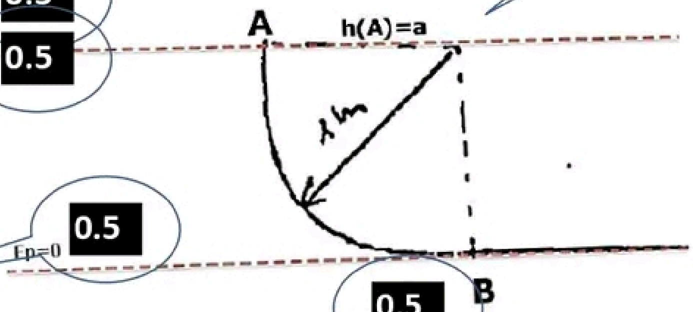
au point A : $V = 0$ donc $Ec(A) = 0$ 0.5

au point B : h(B)=0, alors Ep(B)=0

Donc :

$\frac{1}{2} m V_B{}^2 + m.g.h(B) = \frac{1}{2}.m\, V_A{}^2 + m.g.h(A)$

$$V_B = \sqrt{2.g\,.(h(A) - h(B))}$$ 0.5



Application Numérique : 0.5

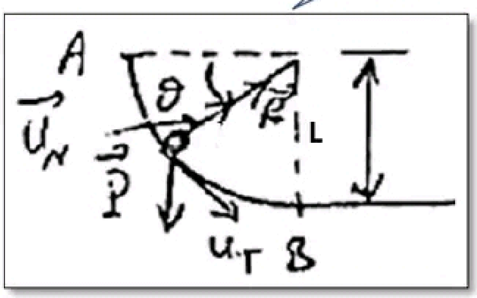
$$V_B = \sqrt{2.10\,.(1-0)} = 4.47\ m/s$$

2. **En utilisant le principe fondamental de la dynamique.**

En appliquant le principe fondamental dela dynamique 0.5

$$\sum_{f.appl.} \vec{F} = m\,.\vec{a}$$

$$\vec{P} + \vec{R} = m.\vec{a}$$



Par projection : $/\vec{U}_r : m.g.\cos(\theta) = m\,.a_T = m.\frac{dV}{dt}$ ....(1)

0.5 $/\vec{U}_\theta : R - m.g.\sin(\theta) = m\,.a_N = m.\frac{V^2}{L}$ .....(2)

De (1) $g.\cos(\theta) = \frac{dV}{dt} = \frac{dV}{d\theta}.\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}.\frac{dV}{d\theta}$ mais : $\mathrm{dv} = \mathrm{L}.\mathrm{d}\dot{\theta}$

0.5 0.5

$\Rightarrow \mathrm{L}.g.\cos(\theta)\, d\theta = \mathrm{V}\,.\mathrm{dV}$

$\int_0^V V\,dV = \int_0^\theta a.g.cos\theta d\theta \;\Rightarrow\; \frac{1}{2}V^2\Big]_0^V = a.g.sin\theta]_0^\theta \;\Rightarrow\; \mathrm{V} = \sqrt{2.g.L.\sin(\theta)}$ 0.5

En B : $\theta = \frac{\pi}{2} \;\Rightarrow\; \mathrm{V(B)} = \sqrt{2.g.L}$ 0.5

A.N. : $\mathrm{V(B)} = \sqrt{2.10.1} = 4.47\ m/s$