التمرين الشامل في الإحتمالات إعداد الأستاذ زايدي علاء الدين

يحتوي صندوق U_1 على ستة كريات حمراء مرقمة $2,4,4$ 2 ، 2، 2 و أربع كريات سوداء مرقمة 4 4 ، 2، 0

يحتوي صندوق U_2 على ثلاث كريات حمراء مرقمة 0 0، 1 وكرية سوداء تحمل الرقم 2 و كرية بيضاء تحمل الرقم 3

الجزء الأول : نسحب عشوائيا على التوالي ودون ارجاع 3 كريات من الصندوق U_1

1- شكل شجرة الإحتمالات التي تنمذج هذه الوضعية (شجرة تخص الألوان فقط)

2- أحسب احتمال الحادثة A حادثة الحصول على 3 كرات حمراء

3- أحسب احتمال الحادثة B حادثة الحصول على كرية حمراء على الأقل

الجزء الثاني : نسحب عشوائيا كريتين في ان واحد من الصندوق U_1 و كرية واحدة من الصندوق U_2

1- علما أن الكرية المسحوبة من U_2 سوداء ماهو احتمال سحب كرية حمراء على الأقل

2- ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب عدد الكرات البيضاء المسحوبة

أ- بين أن قيم المتغير العشوائي X هي 0 و 1

ب-احسب الأمل الرياضي ثم استنتج $E(1445X+2024)$

ج- أحسب $P((\ln X)^2-\ln X\leq 0)$

الجزء الثالث : نضيف n كرة سوداء الى الصندوق U_1 و n كرة حمراء الى الصندوق U_2

نسحب كرية واحدة من الصندوق U_1 و كرية واحدة من الصندوق U_2

لتكن C حادثة الحصول على كريتين من نفس اللون . عين قيمة n حتى يكون $P(C)=\dfrac{3}{7}$

الجزء الرابع : نعتبر الحالة الأولى لصندوق ,نسحب عشوائيا أربعة كريات في ان واحد من الصندوق U_1 ونعتبر الحوادث التالية : نعتبر الحادثة D ."حادثة الحصول على اربع كريات من نفس اللون ".

والحادثة E ."حادثة الحصول على اربع كريات تحمل نفس الرقم ".

والحادثة F ."حادثة الحصول على اربع كريات يمكن أن تشكل 2024 ".

1- أحسب $P(D)$ ، $P(E)$ و $P(F)$ احتمال الحوادث D,E,F على الترتيب

2- علما أن الكريات الأربعة المسحوبة من نفس الرقم ما هو احتمال أن تكون من نفس اللون

الجزء الخامس : نسحب عشوائيا كريتين على التوالي بارجاع من الصندوق U_2 ونعتبر الحوادث التالية

نعتبر الحادثة G ."حادثة الحصول على كريتين من نفس اللون ".

والحادثة H ."حادثة الحصول على كريتين تحملان رقما فرديا ".

والحادثة I ."حادثة الحصول على كرية بيضاء على الأقل ".

1- أحسب $P(G)$ ، $P(H)$ و $P(I)$ احتمال الحوادث G,H,I على الترتيب

2- نعتبر المتغير العشوائي Y الذي يرفق بكل عملية سحب كريتين القيمة المطلقة لطرح العددين الظاهرين على الكريتين المسحوبتين

أ- بين أن قيم المتغير العشوائي Y هي $0;1;2;3$

ب- بين أن $P(Y=0)=\dfrac{7}{25}$ ثم عرف قانون الإحتمال للمتغير العشوائي Y

ج- أحسب الأمل الرياضياتي $E(Y)$. التباين $V(Y)$ و الإنحراف المعياري $\delta(Y)$

د- استنتج كل من $V(Y+1962)$ و $V(-2Y)$ و $\delta(-1954Y)$

ه- استنتج احتمال الحادثة $P(e^{2Y}-4e^{Y}+3=0)$

و- أحسب $P(Y > \int_0^1 \frac{1}{Y+1}.dY)$

الجزء السادس : نرمي زهر نرد غير مزيف مرقم 1 من إلى 6 مرة واحدة إذا ظهر أحد الأرقام 6 أو 3 نسحب كريتين على التوالي دون ارجاع من صندوق U_1 و إذا ظهر رقم آخر نسحب كريتين على التوالي بإرجاع من الصندوق U_2

1) شكل شجرة الإحتمال التي تنمذج هذه التجربة

2) ماهو احتمال الحادثة w حادثة سحب كريتين من نفس اللون

3) ماهو احتمال الحادثة S حادثة سحب كريتين مختلفتين في اللون

4) علما أن الكريتين المسحوبتين مختلفتين في اللون ما هو احتمال أن تكونا من الصندوق U_1

الجزء السابع : نجمع كل الكريات الموجودة في الصندوقين U_1 و U_2 و نضعها في صندوق U_3 و نسحب عشوائيا و في ان واحد ثلاث كريات من الصندوق U_3 ونعتبر الحوادث التالية

نعتبر الحادثة J ".حادثة الحصول على ثلاث كريات تحمل رقما فردي ".

والحادثة K ".حادثة الحصول على ثلاث كريات تحمل رقما زوجي ".

والحادثة L ".حادثة الحصول على ثلاث كريات مجموع الأرقام الظاهرة عليها زوجي ".

1- أحسب $P(J)$ ، $P(K)$ و $P(L)$ احتمال الحوادث J,K,L على الترتيب

أ- نعتبر المتغير العشوائي Z الذي يرفق بكل عملية سحب ثلاث كريات عدد الكرات التي تحمل رقما زوجيا عرف قانون الإحتمال للمتغير العشوائي Z

ب - نضيف الى الصندوق n كرية بيضاء , حيث $n \geq 2$ نعتبر الحدث M: الحصول على ثلاث كريات بيضاء

أحسب : $P(M)$ ثم أحسب $\lim_{n\to+\infty} p\ (M)$ و ماذا تستنتج

الجزء الثامن : يتواجد في قاعة النشاطات بالثانوية 30 تلميذا منهم 10 ذكور من بينهم محمد و 20 اناث من بينهم فاطمة نريد تشكيل لجنة تضم ثلاث تلاميذ للمساعدة في انجاح تظاهرت يوم العلم و تسند مهام لهم المنشط و المنظم و مسؤول النشاطات   ماهي عدد اللجان الممكن تشكيلها

ماهو احتمال أن تكون أعضاء اللجنة من نفس الجنس

ماهو احتمال أن تضم اللجنة محمد

ماهو احتمال أن تضم اللجنة محمد و فاطمة معا

ماهو احتمال ان لا تضم اللجنة أحمد و فاطمة معا

ماهو احتمال أن يكون محمد مسؤول النشاطات

الجزء التاسع : نفس أسئلة الجزء الثامن تشكيل لجنة تضم ثلاث تلاميذ دون تحديد المهام

الجزء العاشر : أحسب مايلي :

1- المجموع $S_n = C_{n+2}^{0} 2^{n+2} + C_{n+2}^{1} 2^{n+1} \times 3 + \dots\dots\dots\dots + C_{n+2}^{n+2} 3^{n+2}$

2- المجموع $S_n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (\frac{1}{2})^k$

3- المجموع $S_n = C_{n+2}^{2} 2^2 + C_{n+2}^{3} 2^3 + \dots\dots\dots\dots + C_{n+2}^{n+2} 2^{n+2}$

4- معامل x^5 في منشور العبارة $(2x^2 + \frac{3}{x})^7$

5- الحد الذي درجته 10 في منشور العبارة $(x-2)^{15}$

6- A و B حدثان غير متلائمين من فضاء العينة Ω حيث : $P(\overline{A}) = 2P(\overline{A \cup B}) = 0,75$ أحسب إحتمال الحدث B

7- A و B حدثان مستقلان حيث : $P_A(B) = 0,2$ و $P(A \cup B) = 0,48$ ، أحسب إحتمال الحدث A

بالتوفيق في شهادة البكالوريا 2024   أستاذ المادة علاء الدين زايدي

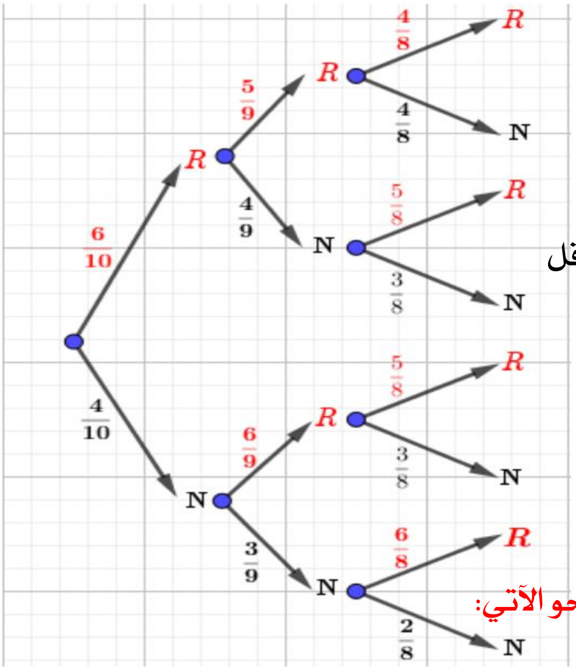
التصحيح المقترح للمسألة الشاملة في الإحتمالات

الجزء الأول :

يحتوي صندوق U_1 على ستة كريات حمراء مرقمة $2,4,4$ ، 2 ، 2 ، 2 و أربع كريات سوداء مرقمة 4 ، 4 ، 2 ، 0

يحتوي صندوق U_2 على ثلاث كريات حمراء مرقمة 0 ، 0 ، 1 وكرية سوداء تحمل الرقم 2 و كرية بيضاء تحمل الرقم 3

نسحب عشوائيا على التوالي ودون ارجاع 3 كريات من الصندوق U_1



1- تشكيل شجرة الإحتمالات التي تنمذج هذه الوضعية

2- حساب احتمال الحادثة A حادثة الحصول على 3 كرات حمراء

$$P(A)=\frac{6}{10}\times\frac{5}{9}\times\frac{4}{8}=\frac{1}{6}$$

3- حساب احتمال الحادثة B حادثة الحصول على كرية حمراء على الأقل

نستخدم الحادثة المعاكسة $\overline{B}$ لم نسحب أي كرة حمراء

أي سحب ثلاث كرات سوداء

$$P(\overline{B})=\frac{4}{10}\times\frac{3}{9}\times\frac{2}{8}=\frac{1}{30}$$

$$P(B)=1-P(\overline{B})=1-\frac{1}{30}=\frac{29}{30}$$

ملاحظة هامة : يمكن استعمال الترتيبات لحل السؤالين السابقين على النحو الآتي:

حساب احتمال الحادثة A حادثة الحصول على 3 كرات حمراء

$$P(A)=\frac{A_6^3}{A_{10}^3}=\frac{1}{6}$$

حساب احتمال الحادثة B حادثة الحصول على كرية حمراء على الأقل **الطريقة الأولى**

أي سحب كرية حمراء وكريتين سوداوين مع مراعاة ترتيبهم (RNN, NRN, NNR) أي نضرب في 3

أو سحب كريتين حمراوين و كرية سوداء مع مراعاة ترتيبهم (RRN, NRR, RNR) أي نضرب في 3

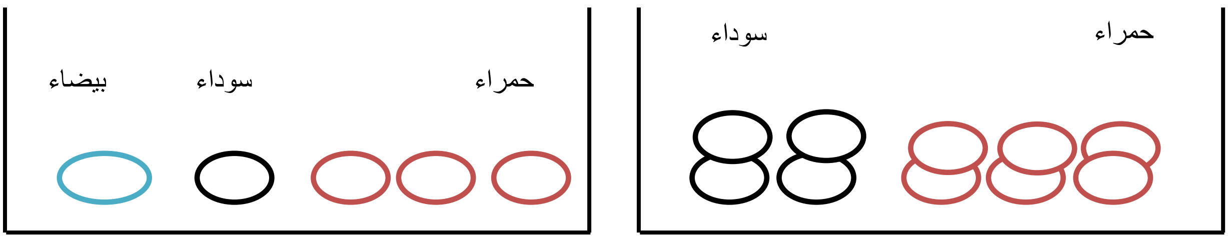
أو سحب ثلاث كريات حمراء RRR

$$P(B)=\frac{3(A_6^1\times A_4^2)+3(A_6^2\times A_4^1)+A_6^3}{A_{10}^3}=\frac{29}{30}$$

الطريقة الثانية نستخدم الحادثة المعاكسة $\overline{B}$ لم نسحب أي كرة حمراء أي سحب ثلاث كرات سوداء

$$P(\overline{B})=\frac{A_4^3}{A_{10}^3}=\frac{1}{30} \qquad P(B)=1-P(\overline{B})=1-\frac{1}{30}=\frac{29}{30}$$

الجزء الثاني : نسحب عشوائيا كريتين في ان واحد من الصندوق U_1 و كرية واحدة من الصندوق U_2



U_1 U_2

عدد الحالات الممكنة لهذا السحب هي : $C_{10}^{2}\times C_{5}^{1}=225$

1- علما أن الكرية المسحوبة من U_2 سوداء ماهو احتمال سحب كرية حمراء على الأقل

احتمال شرطي	نسمي الكرية المسحوبة من U_2 سوداء بالحادثة N

نسمي سحب كرية حمراء على الأقل بالحادثة R

$$P_N(R)=\frac{P(R\cap N)}{P(N)}$$

$P(R\cap N)$ ماهو احتمال سحب كرية حمراء على الأقل و الكرية المسحوبة من U_2 سوداء

$$P(R\cap N)=\frac{C_1^1}{C_5^1}\times\frac{C_6^2+C_6^1\times C_4^1}{C_{10}^2}=\frac{39}{225}=\frac{13}{75}$$

$P(N)$ ماهو احتمال سحب كرية سوداء من الصندوق U_2

$$P(N)=\frac{C_1^1}{C_5^1}\times\frac{C_{10}^2}{C_{10}^2}=\frac{1}{5}$$

ومنه الاحتمال الشرطي $P_N(R)=\dfrac{P(R\cap N)}{P(N)}=\dfrac{\frac{13}{75}}{\frac{1}{5}}=\dfrac{13}{15}$

2- ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب عدد الكريات البيضاء المسحوبة

أ- قيم المتغير العشوائي X هي 0 اذا لم نسحب أي كرية بيضاء و 1 اذا سحبنا كرية بيضاء

تعيين قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X

$$P(X=0)=\frac{C_4^1}{C_5^1}\times\frac{C_{10}^2}{C_{10}^2}=\frac{39}{225}=\frac{4}{5}$$ و $$P(X=1)=\frac{C_1^1}{C_5^1}\times\frac{C_{10}^2}{C_{10}^2}=\frac{45}{225}=\frac{1}{5}$$

ب- حساب الأمل الرياضياتي : $E(X)=0\times\frac{4}{5}+1\times\frac{1}{5}=\frac{1}{5}$	استنتاج قيمة $E(1445X+2024)$

$$E(1445X+2024)=1445\times\frac{1}{5}+2024=2313$$

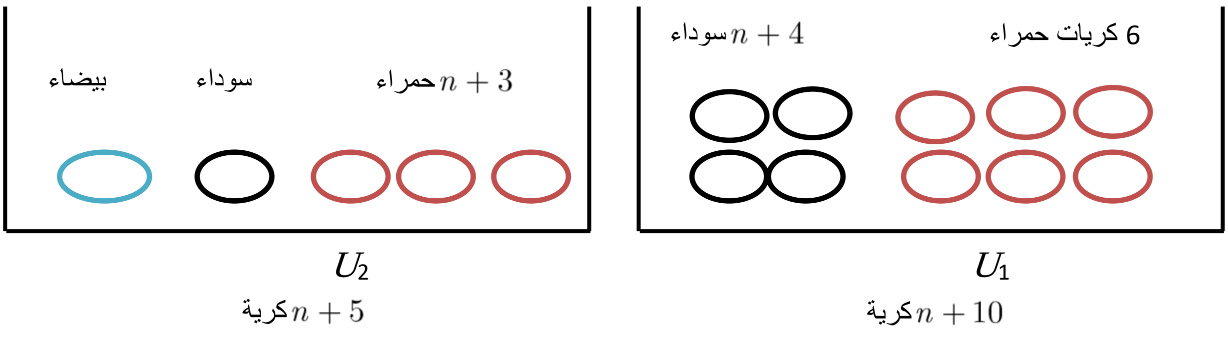
ج- حساب $P((\ln X)^2-\ln X\le 0)$ نقوم أولا بحل المتراجحة $(\ln X)^2-\ln X\le 0$ أي أن

$(\ln X)(\ln X-1)\le 0$

حلول المتراجحة هي : $[1;e]$ ومنه قيم المتغير العشوائي التي تنتمي الى هذا المجال هي $X=1$

ومنه $P((\ln X)^2-\ln X\le 0)=P(X=1)=\frac{1}{5}$

الجزء الثالث : نضيف n كرية سوداء الى الصندوق U_1 و n كرية حمراء الى الصندوق U_2



نسحب كرية واحدة من الصندوق U_1 و كرية واحدة من الصندوق U_2

لتكن C حادثة الحصول على كريتين من نفس اللون ومنه (سحب كرية حمراء من الصندوق U_1 و كرية حمراء من الصندوق U_2) أو (سحب كرية سوداء من الصندوق U_1 و كرية سوداء من الصندوق U_2)

ملاحظة : في حالة سحب كرية واحدة لايهم طريقة السحب نستعمل إما التوفيقة أو القائمة أو الترتيبة أو مخطط لتعيين الإحتمال

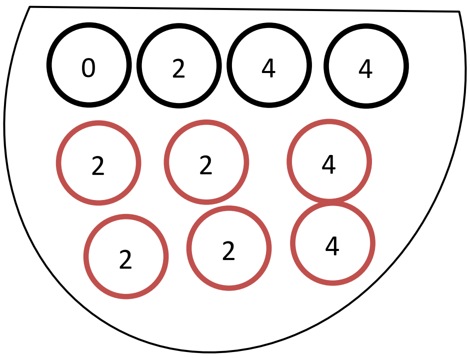
$$P(C)=\frac{6}{n+10}\times\frac{n+3}{n+5}+\frac{n+4}{n+10}\times\frac{1}{n+5}=\frac{7n+22}{n^2+15n+50}$$

تعين قيمة n حتى يكون $P(C)=\frac{3}{7}$ نضع $\frac{7n+22}{n^2+15n+50}=\frac{3}{7}$ تكافئ $3n^2+45n+150=49n+154$

تكافئ $3n^2-4n-4=0$ باستعمال المميز نجد الحل الأول مرفوض لأن n عدد طبيعي $n=-\frac{2}{3}$

و الحل الثاني مقبول $n=2$

أي ان قيمة n حتى يكون $P(C)=\frac{3}{7}$ هي $n=2$



الجزء الرابع :

نسحب عشوائيا أربعة كريات في ان واحد من الصندوق U_1

عدد الحالات الممكنة لهذا السحب $C_{10}^4=\frac{10!}{4!(10-4)!}=210$

نعتبر الحادثة D "حادثة الحصول على اربع كريات من نفس اللون ." $RRRR$ أو $NNNN$

$$P(D)=\frac{C_6^4+C_4^4}{210}=\frac{16}{210}=\frac{8}{105}$$

الحادثة E "حادثة الحصول على اربع كريات تحمل نفس الرقم ." 4444 أو 2222

$$P(E)=\frac{C_5^4+C_4^4}{210}=\frac{6}{210}=\frac{1}{35}$$

الحادثة F "حادثة الحصول على اربع كريات يمكن أن تشكل 2024 ."

كريتان تحملان الرقم 2 وكرية تحمل الرقم 0 و كرية تحمل الرقم 4

$$P(E)=\frac{C_5^2\times C_1^1\times C_4^1}{210}=\frac{40}{210}=\frac{4}{21}$$

علما أن الكريات الأربعة المسحوبة من نفس الرقم ما هو احتمال أن تكون من نفس اللون

احتمال شرطي الكريات المسحوبة من نفس الرقم هي الحادثة E

الكريات المسحوبة من نفس اللون هي الحادثة D

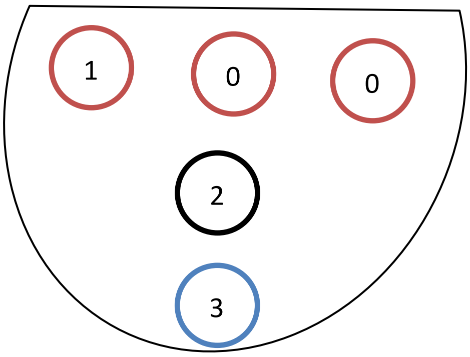
$$P_E(D)=\frac{P(D\cap E)}{P(E)}$$

$P(D\cap E)$ ماهو احتمال أن تكون الكريات الأربع المسحوبة من نفس اللون و من نفس الرقم

$$P(D\cap E)=\frac{C_4^4}{210}=\frac{1}{210}$$

الحادثة E "حادثة الحصول على اربع كريات تحمل نفس الرقم ." 4444 أو 2222

$$P(E)=\frac{C_5^4+C_4^4}{210}=\frac{6}{210}=\frac{1}{35}$$



ومنه الاحتمال الشرطي $P_E(D)=\frac{P(D\cap E)}{P(E)}=\frac{\frac{1}{210}}{\frac{1}{35}}=\frac{1}{6}$

الجزء الخامس: نسحب عشوائيا كريتين على التوالي بارجاع

من الصندوق U_2 نستعمل القائمة $5^2=25$

ملاحظة يمكن إستعمال الشجرة لحل هذا الجزء ". التكرار موجود ".

الحادثة G ". حادثة الحصول على كريتين من نفس اللون ".

RR أو NN أو BB $P(G)=\frac{3^2+1^2+1^2}{5^2}=\frac{11}{25}$

الحادثة H ". حادثة الحصول على كريتين تحملان رقما فرديا ".

طريقة01 31 أو 13 أو 11 أو 33 $P(H)=\frac{1^1\times1^1+1^1\times1+1^2+1^2}{5^2}=\frac{4}{25}$

طريقة 02 كريتان تحملان رقما فرديا من بين كريتين $P(H)=\frac{2^2}{5^2}=\frac{4}{25}$

الحادثة I ". حادثة الحصول على كرية بيضاء على الأقل ".

طريقة 01 كرة بيضاء وكرة لون آخر ". أو العكس الترتيب مهم ". أو كريتين بيضاوين

$$P(I)=\frac{2(1^1\times4^1)+1^2}{5^2}=\frac{9}{25}$$

طريقة 02 نستعمل الحادثة المعاكسة لم نسحب أي كرة بيضاء

$$P(I)=1-\frac{4^2}{5^2}=1-\frac{16}{25}=\frac{9}{25}$$

نعتبر المتغير العشوائي Y الذي يرفق بكل عملية سحب كريتين القيمة المطلقة لطرح العددين الظاهرين على الكريتين المسحوبتين

تبيان أن قيم المتغير العشوائي Y هي $0;1;2;3$

$Y=0$ معناه سحب كريتين من نفس الرقم

$Y=1$ معناه سحب 01 او العكس أو 21 أو العكس أو 32 أو العكس

$Y=2$ معناه سحب 20 او العكس أو 31 أو العكس

$Y=3$ معناه سحب 30 أو العكس   ملاحظة العكس يعني الترتيب 30 أو 03

والجدول الآتي يشرح كيفية تعيين قيم المتغير العشوائي

$\lvert\alpha-\beta\rvert$	0	0	1	2	3
0	0	0	1	2	3
0	0	0	1	2	3
1	1	1	0	1	2
2	2	2	1	0	1
3	3	3	2	1	0

تبيان أن $P(Y=0)=\frac{7}{25}$ $P(Y=0)=\frac{2^2+1^2+1^2+1^2}{25}=\frac{7}{25}$ يمكن الاستعانة بالجدول لحل السؤال

تعريف قانون الإحتمال للمتغير العشوائي Y

$$P(Y=0)=\frac{7}{25}$$

$$P(Y=1)=\frac{2(2^1\times1^1)+2(1^1\times1^1)+2(1^1\times1^1)}{25}=\frac{8}{25}$$

$$P(Y=2)=\frac{2(2^1\times1^1)+2(1^1\times1^1)}{25}=\frac{6}{25}$$

$$P(Y=3))=\frac{2(2^1\times1^1)}{25}=\frac{4}{25}$$

Y	0	1	2	3
$P(Y=Y_i)$	$\frac{7}{25}$	$\frac{8}{25}$	$\frac{6}{25}$	$\frac{4}{25}$

حساب الأمل الرياضياتي $E(Y)$.

$$E(Y)=\sum_{i=0}^{3}Y_iP_i=0\times\frac{7}{25}+1\times\frac{8}{25}+2\times\frac{6}{25}+3\times\frac{4}{25}=\frac{32}{25}=\boxed{1,28}$$

حساب التباين $V(Y)$

$$V(Y)=E(Y^2)-(E(Y))^2=\sum_{i=0}^{3}Y_i^2P_i-\left[\sum_{i=0}^{3}Y_iP_i\right]^2=0^2\times\frac{7}{25}+1^2\times\frac{8}{25}+2^2\times\frac{6}{25}+3^2\times\frac{4}{25}-(\frac{32}{25})^2=\frac{676}{625}=\boxed{1,0816}$$

حساب الإنحراف المعياري $\delta(Y)=\sqrt{V(Y)}=\sqrt{\frac{676}{625}}=\frac{26}{25}=\boxed{1,04}$

استنتاج $V(Y+1962)$

نعلم أن $Var(Y+b)=Var(Y)$ ومنه. $V(Y+1962)=V(Y)=1,0816$

استنتاج $V(-2Y)$

نعلم أن $Var(aY)=a^2\ \ Var(Y)$ ومنه. $V(-2Y)=4V(Y)=4\times1,0816=\frac{2704}{625}$

استنتاج $\delta(-1954Y)$

نعلم أن $\delta(aY)=|a|\delta(Y)$ ومنه $\delta(-1954Y)=|-1954|\delta(Y)=1954\times\frac{26}{25}=2032,16$

استنتاج احتمال الحادثة $P(e^{2Y}-4e^Y+3=0)$

نحل المعادلة $e^{2Y}-4e^Y+3=0$ نضع $e^Y=t$ تكافئ $t^2-4t+3=0$ نستعمل المميز لتعيين حلول t

$t_1=1$ أو $t_2=3$ تكافئ $e^Y=1$ أي $Y=0$ أو $e^Y=3$ أي $Y=\ln3$ مرفوض

ومنه $P(e^{2Y}-4e^Y+3=0)=P(Y=0)=\frac{7}{25}$

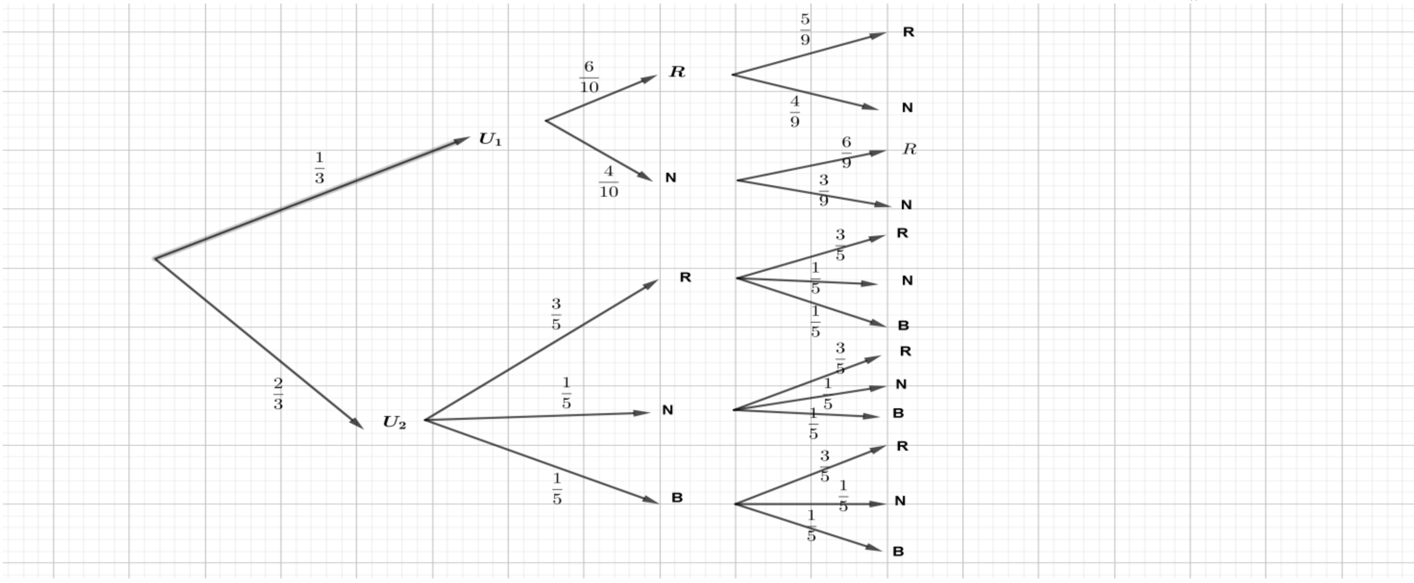
حساب $P(Y>\int_0^1\frac{1}{Y+1}.dY)$ نقوم بحساب التكامل و حل المتراجحة

$\int_0^1\frac{1}{Y+1}.dY=[\ln(Y+1)]_0^1=\ln2$ $Y>\ln2$ حلول المتراجحة هي : $]\ln2;+\infty[$ ومنه قيم المتغير العشوائي التي تنتمي الى هذا المجال $Y=1;Y=2;Y=3$

ومنه $P(Y>\int_0^1\frac{1}{Y+1}.dY)=P(Y=1)+P(Y=2)+P(Y=3)=\frac{18}{25}$

الجزء السادس نرمي زهر نرد غير مزيف مرقم 1 من إلى 6 مرة واحدة إذا ظهر أحد الأرقام 6 أو 3 نسحب كريتين على التوالي دون ارجاع من صندوق U_1 و إذا ظهر آخر نسحب كريتين على التوالي بإرجاع من الصندوق U_2

شجرة الإحتمال التي تنمذج هذه التجربة



احتمال سحب كريتين من نفس اللون RR من الصندوق U_1 أو NN من الصندوق U_1 أو RR من الصندوق U_2 أو NN من الصندوق U_2 أو BB من الصندوق U_2

$$P(w)=(\frac{1}{3}\times\frac{6}{10}\times\frac{5}{9})+(\frac{1}{3}\times\frac{4}{10}\times\frac{3}{9})+(\frac{2}{3}\times\frac{3}{5}\times\frac{3}{5})+(\frac{2}{3}\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{5})+(\frac{2}{3}\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{5})=\frac{101}{225}$$

احتمال سحب كريتين مختلفتين في اللون: هي الحادثة المعاكسة لسحب كريتين من نفس اللون

$$P(S)=1-\frac{101}{225}=\frac{124}{225}$$

- علما أن الكريتين المسحوبتين مختلفتين في اللون ما هو احتمال أن تكونا من الصندوق U_1

نسمي الكريتين المسحوبتين مختلفتين في اللون الحادثة S

نسمي الكريتين المسحوبتين من الصندوق U_1 الحادثة T

$$P_S(T)=\frac{P(T\cap S)}{P(S)}$$

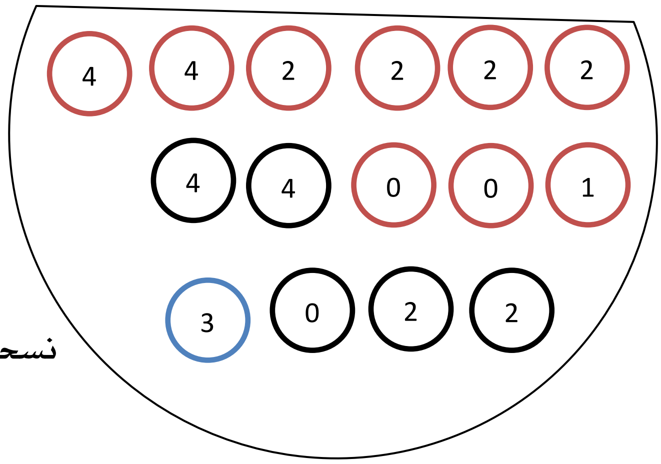
$P(T\cap S)$ الكريتين المسحوبتين مختلفتين في اللون و من الصندوق U_1

$$P(T\cap S)=\frac{1}{3}\times\frac{6}{10}\times\frac{4}{9}+\frac{1}{3}\times\frac{4}{10}\times\frac{6}{9}=\frac{48}{270}=\frac{8}{45}$$

الحادثة S ".الكريتين المسحوبتين مختلفتين في اللون نعلم أن $P(S)=\frac{124}{225}$

ومنه $$P_S(T)=\frac{P(T\cap S)}{P(S)}=\frac{\frac{8}{45}}{\frac{124}{225}}=\frac{10}{31}$$

الجزء السابع : نجمع كل الكريات الموجودة في الصندوقين U_1 و U_2 و نضعها في صندوق U_3



ثلاثة عشر كرية تحمل رقم زوجي

كريتين تحملان رقم فردي

نسحب عشوائيا و في ان واحد ثلاث كريات من الصندوق U_3

عدد الحالات الممكنة لهذا السحب هي $C_{15}^3 = 455$

الحادثة J ".حادثة الحصول على ثلاث كريات تحمل رقما فردي ".

حادثة مستحيلة $P(J) = 0$

الحادثة K ".حادثة الحصول على ثلاث كريات تحمل رقما زوجي ".

$$P(K) = \frac{C_{13}^3}{455} = \frac{286}{455} = \frac{22}{35}$$

الحادثة L ".حادثة الحصول على ثلاث كريات مجموع الأرقام الظاهرة عليها زوجي ".

ثلاث كرات تحمل رقما زوجيا أو كريتان تحملان رقما فرديا و كرية تحمل رقم زوجي

$$P(L) = \frac{C_{13}^3 + C_2^2 \times C_{13}^1}{455} = \frac{299}{455} = \frac{23}{35}$$

نعتبر المتغير العشوائي Z الذي يرفق بكل عملية سحب ثلاث كريات عدد الكرات التي تحمل رقما زوجيا

قيم المتغير العشوائي Z هي $1;2;3$

قانون الإحتمال للمتغير العشوائي Z

$$P(Z=1) = \frac{C_2^2 \times C_{13}^1}{455} = \frac{13}{455} = \frac{1}{35}$$

$$P(Z=2) = \frac{C_2^1 \times C_{13}^2}{455} = \frac{156}{455} = \frac{12}{35}$$

$$P(Z=3) = \frac{C_{13}^3}{455} = \frac{286}{455} = \frac{22}{35}$$

Z	1	2	3
$P(Z=Z_i)$	$\frac{1}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{22}{35}$

نضيف الى الصندوق n كرية بيضاء , نعتبر الحدث M :الحصول على ثلاث كريات بيضاء

عدد الحالات الممكنة لهذا السحب $\frac{n+15\ \ n+14\ \ n+13}{3!} = \frac{n+15\ !}{3!\ n+15-3\ !} = C_{n+15}^3$

عدد الحالات الملائمة لهذا السحب هي $\frac{n+1\ \ n\ \ n-1}{3!} = \frac{n+1\ !}{3!\ n+1-3\ !} = C_{n+1}^3$

$$P(M) = \frac{C_{n+1}^3}{C_{n+15}^3} = \frac{(n+1)(n)(n-1)}{(n+15)(n+14)(n+13)}$$

النهاية $\lim_{n\to+\infty} P(M) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^3}{n^3} = 1$

نستنتج أن حادثة الحصول على ثلاث كرات بيضاء هي حادثة أكيدة لما n يكون كبير بالقدر الكافي

الجزء الثامن : يتواجد في قاعة النشاطات بالثانوية 30 تلميذا منهم 10 ذكور من بينهم محمد و 20 اناث من بينهم فاطمة نريد تشكيل لجنة تضم ثلاث تلاميذ للمساعدة في انجاح تظاهرت يوم العلم و تسند مهام لهم المنشط و المنظم و مسؤول النشاطات

عدد اللجان الممكن تشكيلها هو $A_{30}^{3}=24360$ نستعمل الترتيبة لأن المهام محددة

احتمال أن تكون أعضاء اللجنة من نفس الجنس هو : $\dfrac{A_{20}^{3}+A_{10}^{3}}{A_{30}^{3}}=\dfrac{7560}{24360}=\dfrac{9}{29}$

احتمال أن تضم اللجنة محمد $\dfrac{3\times A_{1}^{1}\times A_{29}^{2}}{A_{30}^{3}}=\dfrac{2436}{24360}=\dfrac{1}{10}$

احتمال أن تضم اللجنة محمد و فاطمة معا $\dfrac{6\times A_{1}^{1}\times A_{1}^{1}\times A_{28}^{1}}{A_{30}^{3}}=\dfrac{168}{24360}=\dfrac{1}{145}$

احتمال ان لا تضم اللجنة أحمد و فاطمة : معناه اللجنة تضم أحمد و شخصين أو فاطمة و شخصين أو 3 أشخاص اخرين

$$\frac{3\times A_{1}^{1}\times A_{28}^{2}+3\times A_{1}^{1}\times A_{28}^{2}+A_{28}^{3}}{A_{30}^{3}}=\frac{144}{145}$$

طريقة أخرى نستعمل الحادثة المعاكسة اللجنة تضم محمد وفاطمة معا $1-\dfrac{1}{145}=\dfrac{144}{145}$

احتمال أن يكون محمد مسؤول النشاطات $\dfrac{A_{1}^{1}\times A_{29}^{2}}{A_{30}^{3}}=\dfrac{812}{24360}=\dfrac{1}{30}$

الجزء التاسع : يتواجد في قاعة النشاطات بالثانوية 30 تلميذا منهم 10 ذكور من بينهم محمد و 20 اناث من بينهم فاطمة نريد تشكيل لجنة تضم ثلاث تلاميذ للمساعدة في انجاح مناسبة يوم العلم

عدد اللجان الممكن تشكيلها هو $C_{30}^{3}=4060$ نستعمل التوفيقة لأن المهام غير محددة

احتمال أن تكون أعضاء اللجنة من نفس الجنس هو : $\dfrac{C_{20}^{3}+C_{10}^{3}}{C_{30}^{3}}=\dfrac{1260}{4060}=\dfrac{9}{29}$

احتمال أن تضم اللجنة محمد $\dfrac{C_{1}^{1}\times C_{29}^{2}}{C_{30}^{3}}=\dfrac{1}{10}$

احتمال أن تضم اللجنة محمد و فاطمة معا $\dfrac{C_{1}^{1}\times C_{1}^{1}\times C_{28}^{1}}{C_{30}^{3}}=\dfrac{28}{4060}=\dfrac{1}{145}$

احتمال ان لا تضم اللجنة أحمد و فاطمة : معناه اللجنة تضم أحمد و شخصين أو فاطمة و شخصين أو 3 أشخاص اخرين

$$\frac{C_{1}^{1}\times C_{28}^{2}+C_{1}^{1}\times C_{28}^{2}+C_{28}^{3}}{C_{30}^{3}}=\frac{144}{145}$$

طريقة أخرى نستعمل الحادثة المعاكسة اللجنة تضم محمد وفاطمة معا $1-\dfrac{1}{145}=\dfrac{144}{145}$

الجزء العاشر

السؤال الأول

1- المجموع $S_n = C_{n+2}^{0} 2^{n+2} + C_{n+2}^{1} 2^{n+1} \times 3 + ... + C_{n+2}^{n+2} 3^{n+2}$

نعلم أن $(a+b)^n = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + ... + C_n^n a^0 b^n$

نلاحظ أن $a = 2$ و $b = 3$ ومنه المجموع

$$S_n = C_{n+2}^{0} 2^{n+2} + C_{n+2}^{1} 2^{n+1} \times 3 + ... + C_{n+2}^{n+2} 3^{n+2} = (a+b)^{n+2} = (2+3)^{n+2} = (5)^{n+2}$$

السؤال الثاني

المجموع $S_n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (\frac{1}{2})^k$

نعلم أن $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$

نلاحظ أن $a = 1$ و $b = \frac{1}{2}$ ومنه المجموع $S_n = (a+b)^n = \left[(1+\frac{1}{2})\right]^n = \left[(\frac{3}{2})\right]^n$

السؤال الثالث

المجموع $S_n = C_{n+2}^{2} 2^2 + C_{n+2}^{3} 2^3 + ... + C_{n+2}^{n+2} 2^{n+2}$

نلاحظ أن $a = 1$ و $b = 2$ ومن جهة أخرى نلاحظ أن المجموع بدأ من $C_{n+2}^{2} 2^2$ أي سنقوم بإضافة و طرح $C_{n+2}^{0} 2^0 + C_{n+2}^{1} 2^1$

$$S_n = \underbrace{C_{n+2}^{0} 2^0 + C_{n+2}^{1} 2^1 + C_{n+2}^{2} 2^2 + C_{n+2}^{3} 2^3 + ... + C_{n+2}^{n+2} 2^{n+2}}_{(1+2)^{n+2}} - \underbrace{C_{n+2}^{0} 2^0}_{1} - \underbrace{C_{n+2}^{1} 2^1}_{2(n+2)}$$

ومنه المجموع : $S_n = (3)^{n+2} - 1 - 2n - 4 = (3)^{n+2} - 2n - 5$

السؤال الرابع

ايجاد معامل x^5 في نشر العدد $(2x^2 + \frac{3}{x})^7$ نستعمل الحد العام $C_n^k a^{n-k} b^k$

نلاحظ أن $a = 2x^2$ و $b = \frac{3}{x}$ و $n = 7$ بالتعويض في الحد العام نجد $C_7^k (2x)^{7-k} (\frac{3}{x})^k$

$$C_7^k (2x^2)^{7-k} (\frac{3}{x})^k = C_7^k (2)^{7-k} (x^2)^{7-k} (x^{-1})^k (3)^k = C_7^k (2)^{7-k} (x)^{14-2k} (x)^{-k} (3)^k = C_7^k (3)^k (2)^{7-k} (x)^{14-3k}$$

نضع $14 - 3k = 5$ (معامل x^5) تكافئ $k = 3$ بالتعويض في الحد العام نجد $C_7^3 (3)^3 (2)^{7-3} (x)^{14-3\times3}$

تكافئ $C_7^3 (3)^3 (2)^4 (x)^5$ ومنه معامل x^5 في نشر العبارة $(2x^2 + \frac{3}{x})^7$ هو $C_7^3 (3)^3 (2)^4 = 15120$

السؤال الخامس

الحد الذي درجته 10 في نشر العبارة $(x-2)^{15}$ نستعمل الحد العام $C_n^k a^{n-k} b^k$

نلاحظ أن $a = x$ و $b = -2$ و $n = 15$ بالتعويض في الحد العام نجد $C_{15}^k (x)^{15-k} (-2)^k$

نضع $15 - k = 10$ الحد الذي درجته 10 تكافئ $k = 5$ بالتعويض في الحد العام نجد $C_{15}^5 (x)^{15-5} (-2)^5$

تكافئ $C_{15}^5 (x)^{10} (-2)^5$ الحد الذي درجته 10 في نشر العبارة هو $C_{15}^5 (x)^{10} (-2)^5 = -96096x^{10}$

السؤال السادس

A و B حدثان غير متلائمين من فضاء العينة Ω حيث : $P(\overline{A}) = 2P(\overline{A \cup B}) = 0,75$ أحسب إحتمال الحدث B

لدينا $P(\overline{A}) = 0,75$ ومنه $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - 0,75 = 0,25$

لدينا $2P(\overline{A \cup B}) = 0,75$ ومنه $P(\overline{A \cup B}) = \frac{3}{8}$ ومنه $P(A \cup B) = 1 - P(\overline{A \cup B}) = 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$

نعلم أن $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ ومنه $P(B) = P(A \cup B) - P(A) + \cancel{P(A \cap B)}$ ومنه

$P(B) = \frac{5}{8} - \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$ ملاحظة هامة : احتمال التقاطع معدوم لأن الحدثان غير متلائمان

توجد طرق أخرى للحل

السؤال السابع

A و B حدثان مستقلان حيث : $P_A(B) = 0,2$ و $P(A \cup B) = 0,48$، أحسب إحتمال الحدث A

بما أن A و B حدثان مستقلان فإن $P_A(B) = P(B) = 0,2$.

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \times P(B)$

$P(A \cup B) = P(A)(1 - P(B)) + P(B)$

ومن جهة أخرى

$P(A \cup B) - P(B) = P(A)(1 - P(B))$

$$P(A) = \frac{P(A \cup B) - P(B)}{(1 - P(B))}$$

$$P(A) = \frac{P(A \cup B) - P(B)}{1 - P(B)}$$

$$P(A) = \frac{P(A \cup B) - P(B)}{1 - P(B)} = \frac{0,48 - 0,2}{1 - 0,2} = \frac{7}{20} = 0,35$$

إنتهى التصحيح المقترح للمسألة الشاملة في الإحتمالات

أعتذر عن أي خطأ حسابي يمكن أن يكون في التصحيح

رابط حسابي على الأنستغرام لمزيد من الأفكار   بالتوفيق في شهادة البكالوريا BAC 2024

@LILOUU_ZD_PROF_MATH

ملخص شامل لأهم مفردات الإحتمال

إذا كان	نقول إن
$A=\Omega$	A هي الحادثة الأكيدة.
$A=\phi$	A هي الحادثة المستحيلة.
$C=A\cap B$	C هي الحادثة A و B.
$C=A\cup B$	C هي الحادثة A أو B.
$B=\overline{A}$ ، $B=\Omega-A$	B الحادثة المعاكسة لـ A .
$A\cap B=\phi$	الحادثتين A و B غير متلائمتين.
نقول عن p إنه قانون احتمال على Ω إذا وفقط إذا كان : $\sum_{i=1}^{n} p_i=1$	
من أجل كل حادثتين غير متلائمتين A و B فإن :	$p(A\cup B)=p(A)+p(B)$
(Ω,p) فضاء احتمالي و A و B حادثتان. **1.** $p(\phi)=0$. **2.** $0\leq p(A)\leq 1$. **3.** $p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)$. **4. إذا كان** $A\subset B$ **فإن :** $p(A)\leq p(B)$. **5.** $p(\overline{A})=1-p(A)$.	**الأمل الرياضياتي للمتغير العشوائي X هو العدد الحقيقي المعرف بـ :** $E(X)=\sum p_i x_i$. **التباين:** $V(X)=\sum p_i(x_i-E(X))^2=E(X^2)-(E(X))^2$ **الانحراف المعياري:** $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$ **خواص** $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$ $E(aX+b)=aE(X)+b$ $Var(aX)=a^2\ Var(X)$ و $\sigma(aX)=\lvert a\rvert\sigma(X)$ $Var(X+b)=Var(X)$ و $\sigma(X+b)=\sigma(X)$
الأحتمال الشرطي احتمال الحادثة B علما أن A (أي الحادثة A محققة) هو العدد الحقيقي $p_A(B)$ المعرف كما يلي	$p_A(B)=\frac{p(A\cap B)}{p(A)}$ **الأحتمال الشرطي**
الحوادث المستقلة نقول عن الحادثتين A و B إنهما مستقلتان إذا وفقط إذا كان تحقق إحداهما لا يغير من احتمال تحقق الأخرى.	$P_B(A)=P(A)$ و $P_A(B)=P(B)$ $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$
دستور الاحتمالات الكلية	$p(B)=\sum_{1}^{n} p(B\cap A_i)=\sum_{1}^{n} p(A_i)\times p_{A_i}(B)$
دستور ثنائي الحد : من أجل كل عددين حقيقيين a و b و من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n	$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$ $(a+b)^n=C_n^0 a^n b^0+C_n^1 a^{n-1}b^1+.......+C_n^n a^0 b^n$

الطريقة/ المطلوب	تشكيل أعداد	تشكيل لجان	سحب من كيس	مجموعات
القوائم عدد القوائم n^p يمكن استعمال شجرة الإحتمالات	الأرقام يمكن أن تتكرر	//	على التوالي مع الإعادة	//
الترتيبات يمكن استعمال شجرة الإحتمالات عدد الترتيبات $A_n^p = n(n-1)(n-2)...(n-p+1)$ وهي جداء p حد انطلاقا من العدد الطبيعي n نزولا مثال $A_4^2 = 4\times 3 = 12$ أي جداء عددين انطلاقا من العدد 4 نزولا مثال $A_n^3 = n\times(n-1)\times(n-2)$ أي جداء ثلاث أعداد انطلاقا من العدد n نزولا نستعمل الالة الحاسبة لحساب الترتيبة	الأرقام لا تتكرر	المهام محددة	على التوالي دون إعادة	//
التوفيقات عدد التوفيقات $C_n^k = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{A_p^n}{p!}$ مثال $C_4^2 = \frac{A_4^2}{2!} = \frac{4\times 3}{2} = 6$ أي جداء عددين انطلاقا من العدد 4 نزولا قسمة 2 عاملي مثال $C_n^3 = \frac{A_n^3}{3!} = \frac{n\times(n-1)\times(n-2)}{6}$ أي	//	المهام غير محددة	في آن واحد	أجزاء مجموعة

@LILOUU_ZD_PROF_MATH