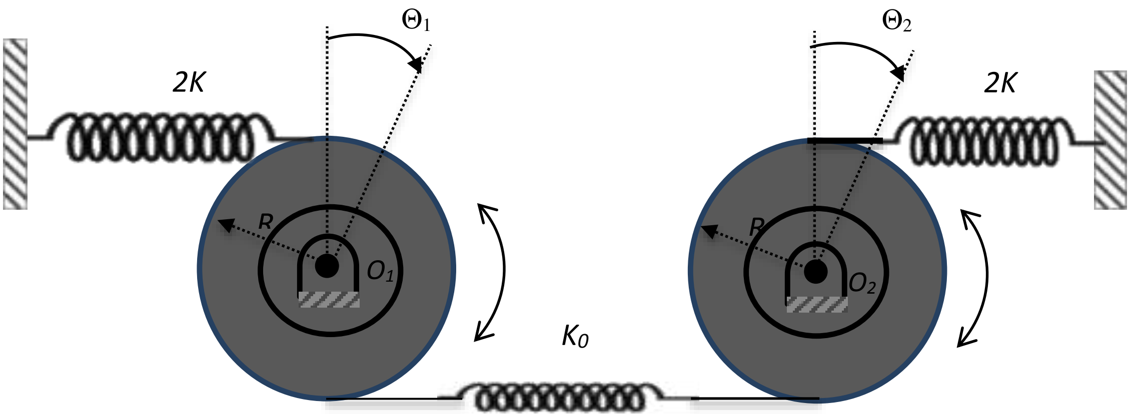
USTHB, Fac. de Physique V.O.M : Contrôle N°2 - **SUJET B** 2017 /2018

Nom et prénom :

NOTE : **/ 20**

Section : **Groupe :**

Deux disques de masse m et de moment d'inertie $\mathbf{J_0= mR^2}$ chacun sont libres de tourner autour de leurs axes de rotation passant par O1 et O2 comme dans la figure ci-dessous.
On suppose que pour θ1=0 et θ2=0 les ressorts sont au repos. On se propose d'étudier le mouvement du système lorsqu'un disque est écarté par rapport à sa position d'équilibre d'un angle de 10° puis relâchée sans vitesse initiale.



1) Exprimer Le Lagrangien du système (4 pts)
2) Ecrire les équations de mouvement (4 pts)
3) Trouver les pulsations propres de ce système (4 pts)
4) Exprimer la forme générale des solutions du système (2 pts)
5)
    a. A partir de l'énoncé de l'exercice exprimer les conditions initiales (2 pts)
    b. Trouver donc les solutions exactes du système. (4 pts)

Solution :

1) $L = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}_2^2 - \frac{1}{2}(2k+k_0)R^2\theta_1^2 - \frac{1}{2}(2k+k_0)R^2\theta_2^2 + k_0R^2\theta_1\theta_2$
2) Les équations de mouvements : c'est un système libre non amorti à 2DDL, on obtient après simplification

$$\begin{cases} m\ddot{\theta}_1 + (2k+k_0)\theta_1 - k_0\theta_2 = 0 \quad (1) \\ m\ddot{\theta}_2 + (2k+k_0)\theta_2 - k_0\theta_1 = 0 \quad (2) \end{cases}$$

3) On remarque aisément que c'est un système symétrique donc on peut utiliser le changement de variable

$$\begin{matrix} \Phi_1 = \theta_1 + \theta_2 \\ \Phi_2 = \theta_1 - \theta_2 \end{matrix} \quad (3)$$

On obtient en faisant (1) + (2) : $m\Phi_1 + k\Phi_1 = 0\,, \quad SHM \quad \Phi_1 = Acos(\omega_1 t + \phi_1) \quad et\ \omega_1 = \sqrt{\frac{2k}{m}}$

On obtient en faisant (1) - (2) : $m\Phi_2 - (2k + 2k_0)\Phi_2 = 0\,, SHM \quad \Phi_2 = Bcos(\omega_2 t + \phi_2) \quad et\ \omega_2 = \sqrt{\frac{2k+2k_0}{m}}$

$$\omega_1 et\ \omega_2\ \ sont\ les\ pulsations\ propres\ du\ système.$$

4) On utilisant le système (3) on remonte à la forme générale des deux solutions $\theta_1\ et\ \theta_2$, on obtient :

$$\begin{cases} \theta_1 = \frac{1}{2}\left(Acos(\omega_1 t + \phi_1) + Bcos(\omega_2 t + \phi_2)\right) \\ \theta_2 = \frac{1}{2}\left(Acos(\omega_1 t + \phi_1) - Bcos(\omega_2 t + \phi_2)\right) \end{cases}$$

5) a) d'après l'énoncé on déduit $\theta_1(0) = \frac{\pi}{18}$ $,\theta_2(0) = 0$ $,\dot{\theta}_1(0) = \dot{\theta}_1(0) = 0$

b) on utilise les conditions initiales pour déterminer les 4 constantes

$$\begin{cases} Acos(\phi_1) + Bcos(\phi_2) = \frac{\pi}{9} & (1) \\ Acos(\phi_1) - Bcos(\phi_2) = 0 & (2) \end{cases} \qquad \begin{cases} A\omega_1 sin(\phi_1) + B\omega_2 sin(\phi_2) = 0 & (3) \\ A\omega_1 sin(\phi_1) - B\omega_2 sin(\phi_2) = 0 & (4) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1) + (2) \rightarrow \ Acos(\phi_1) = \frac{\pi}{18} & (5) \\ (1) - (2) \rightarrow Bcos(\phi_2) = \frac{\pi}{18} & (6) \end{cases} \qquad \begin{cases} (3) + (4) \rightarrow Asin(\phi_1) = 0 & (7) \\ (3) + (4) \rightarrow Bsin(\phi_2) = 0 & (8) \end{cases}$$

Si on fait $(5)^2 + (7)^2 = \left(\frac{\pi}{36}\right)^2$ $on\ déduit\ que\ A = \pm\ \frac{\pi}{18} \neq 0 \quad car\ cos(\phi_1)^2 +\ sin(\phi_1)^2 = 1$

De (7) on déduit que $sin(\phi_1) = 0$ $\boxed{\phi_1 = 0}$

Si on remplace dans (5) on a $\boxed{A = \frac{\pi}{18}}$

De même $(6)^2 + (8)^2 = \left(\frac{\pi}{36}\right)^2$ $on\ déduit\ que\ B = \pm\ \frac{\pi}{36} \neq 0 \quad car\ cos(\phi_2)^2 +\ sin(\phi_2)^2 = 1$

De (8) on déduit que $sin(\phi_2) = 0$ $\boxed{\phi_2 = 0}$

Si on remplace dans (6) on a $\boxed{B = \frac{\pi}{18}}$

Les solutions sont donc :

$$\begin{cases} \theta_1(t) = \frac{\pi}{36}\big(cos(\omega_1 t) + cos(\omega_2 t)\big) \\ \theta_2(t) = \frac{\pi}{36}\big(cos(\omega_1 t) - cos(\omega_2 t)\big) \end{cases}$$