Corrigé de la série 4

Exercice 1

Appliquons l'équation de Bernoulli entre les points 1 et 2 :

$$z_1 + \frac{P_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{P_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} + \sum h_{1-2}$$

$v_1 = v_2 = v$ (même débit, même section)

$Z_2 - Z_1 = L.\sin\alpha = 2 \times \sin 30° = 1$ m

$\frac{P_1}{\rho g} = \frac{5x10^5}{10^3 x 9{,}81} = 50{,}97\ m$ et $\frac{P_2}{\rho g} = 1{,}8\ m.$

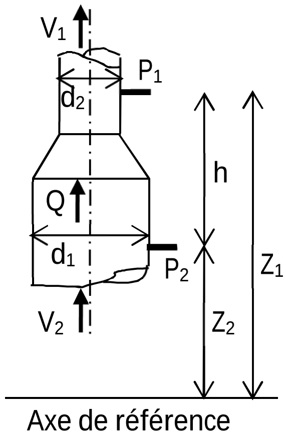
$\sum h_{1-2} = h_{l(1-2)} = \frac{\lambda L}{d}.\frac{v^2}{2g}$ avec $\lambda = \frac{0{,}3164}{R_e^{0{,}25}}$ et $R_e = \frac{v.d}{\nu}$

D'où $\sum h_{1-2} = \frac{\left[\frac{0{,}3164}{\left(\frac{v.d}{\nu}\right)^{0{,}25}}\right]}{d}.L.\frac{v^2}{2g} = 0{,}3164.\frac{\nu^{0{,}25}}{d^{1{,}25}}.\frac{L}{2g}.v^{1{,}75} = 0{,}3164.\frac{(0{,}01x10^{-4})^{0{,}25}}{0{,}02^{1{,}25}}.\frac{2}{2x9{,}81}.v^{1{,}75} = 0{,}1356.v^{1{,}75}$

L'EB devient : $-1 + 50{,}97 - 1{,}8 = 0{,}1356.v^{1{,}75} \Rightarrow v = \left(\frac{48{,}17}{0{,}1356}\right)^{\frac{1}{1{,}75}} = 28{,}67$ m/s

D'où le débit $Q = v.S = v.\frac{\pi d^2}{4} = 28{,}67x\frac{3{,}14x0{,}02^2}{4} = 0{,}009\frac{m^3}{s} = 9$ l/s

Exercice 2



Appliquons l'équation de Bernoulli entre les manomètres 1 et 2 :

$$Z_1 + \frac{P_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} = Z_2 + \frac{P_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} + h_r$$

Avec $Z_2 - Z_1 = h$ et $h_r = K_r\frac{v_2^2}{2g}$

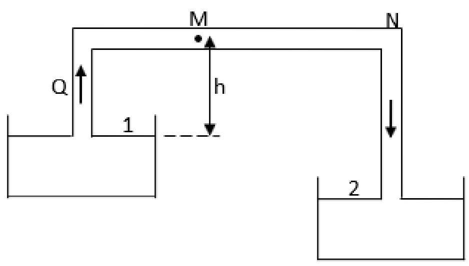
D'où $(1 + K_r)\frac{v_2^2}{2g} = \frac{P_1 - P_2}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} - h$ (1)

Et par continuité $v_1.S_1 = v_2.S_2$ ou $v_1.d_1^2 = v_2.d_2^2$ Donc $v_1 = v_2.\left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2$

On remplace v_1 par leurs expressions dans l'équation (1) : $(1 + K_r)\frac{v_2^2}{2g} = \frac{P_1 - P_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g}.\left(\frac{d_2}{d_1}\right)^4 - h$

D'où finalement la vitesse v_2 :

$$v_2 = \sqrt{\frac{2g}{(1+K_r)}.\frac{\left(\frac{P_1}{\rho g} - \frac{P_2}{\rho g} - h\right)}{\left[1 - \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^4\right]}}$$



A.N : $\boldsymbol{v_2} = \sqrt{\frac{2x9{,}81}{(1+0{,}5)}x\frac{\left(\frac{5x10^5}{10^3x9{,}81} - 45 - 0{,}40\right)}{1 - \left(\frac{0{,}05}{0{,}1}\right)^4}} = \mathbf{8{,}81\ m/s}$

Exercice 3

1) *Détermination du débit Q*

Appliquons l'équation de Bernoulli entre 1 et 2 :

$$Z_1 + \frac{P_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} = Z_2 + \frac{P_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} + \sum h_{1-2}$$

$Z_1 - Z_2 = 20 - 16 = 4$ m

$P_1 = P_2 = 0$ (pression atmosphérique)

$v_1 = v_2 = 0$ (grands réservoirs ; la variation des niveaux d'eau est négligeable)

$$\sum h_{1-2} = \left[\lambda \frac{L}{d} + (K_r + 2K_c + K_e)\right]\frac{v^2}{2g} = \left[0{,}025x\frac{24}{0{,}05} + (0{,}5 + 2x0{,}3 + 1)\right]\frac{v^2}{2g} = 14{,}1\frac{v^2}{2g};$$

v : étant la vitesse de l'eau dans le siphon.

L'EB devient : $4 = 14{,}1\frac{v^2}{2g} \quad \Longrightarrow \quad v = \sqrt{\frac{8g}{14{,}1}} = \sqrt{\frac{8x9{,}81}{14{,}1}} = 2{,}36\ m/s$

D'où $\quad Q = v.S = v.\frac{\pi d^2}{4} = 2{,}36x\frac{3{,}14x0{,}05^2}{4} = 4{,}63\ x\ 10^{-3}\ m^3/_s = 4{,}63\ l/s$

2) *Détermination de P_{Mv} et h_{Mv} – point ou P_v est la plus grande*

Appliquons l'EB entre 1 et M :

$$Z_1 + \frac{P_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} = Z_M + \frac{P_M}{\rho g} + \frac{v_M^2}{2g} + \sum h_{1-M}$$

$Z_1 - Z_M = -h$; $P_1 = 0$ (P_{atm}) ; $v_1 = 0$; $v_M = v$ calculée précédemment.

$$\sum h_{1-M} = \left[\lambda \frac{(h+l)}{d} + (K_r + K_c)\right]\frac{v^2}{2g} = \left[0{,}025x\frac{(2+8)}{0{,}05} + (0{,}5 + 0{,}3)\right]\frac{v^2}{2g} = 5{,}8\frac{v^2}{2g}$$

D'où $\quad \frac{P_M}{\rho g} = h_{Mv} = -h - \frac{v^2}{2g} - 5{,}8\frac{v^2}{2g} = -h - 6{,}8\frac{v^2}{2g} = -2 - 6{,}8x\frac{2{,}36^2}{2x9{,}81} = -3{,}93m$

Donc $\quad h_{MV} = \frac{P_M}{\rho g} = -3{,}93$ m

D'où $\quad \mathbf{P_{Mv}} = P_M = -3{,}93\rho g = -3{,}93x10^3x9{,}81 = \mathbf{-38553{,}3\ Pa}$

Le point ou la pression du vide est la plus grande est le point N.

Remarque

On peut aussi appliquer l'EB entre M et 2 :

$$Z_M + \frac{P_M}{\rho g} + \frac{v_M^2}{2g} = Z_2 + \frac{P_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} + \sum h_{M-2}$$

$Z_2 - Z_M = -(2 + 4) = -6$; $P_2 = v_2 = 0$; $v_M = v$;

$$\sum h_{M-2} = \left[\lambda \frac{L'}{d} + (K_c + K_e)\right]\frac{v^2}{2g} = \left[0{,}025x\frac{14}{0{,}05} + (0{,}3 + 1)\right]\frac{v^2}{2g} = 8{,}3\frac{v^2}{2g}$$

$$\Longrightarrow \frac{P_M}{\rho g} = Z_2 - Z_M - \frac{v^2}{2g} + 8{,}3\frac{v^2}{2g} = -6 + [-1 + 8{,}3]\frac{v^2}{2g} = -6 + 7{,}3\frac{v^2}{2g} = -6 + 7{,}3\frac{2{,}36^2}{2x9{,}81} = -3{,}93\ m$$

On aura donc les mêmes valeurs de h_{Mv} et P_{Mv}.

Exercice 4

Les caractéristiques nécessaires des écoulements dans les conduites 1, 2 et 3 sont déterminées et présentées dans le tableau (v=Q/S, $R_e = \frac{v.D}{\nu}$, λ à partir diagramme MOODY ou de l'équation non linéaire de COLEBROOK : $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2\log\left[\frac{\varepsilon}{3{,}7\mathrm{d}} + \frac{2{,}51}{\mathrm{R_e}\sqrt{\lambda}}\right]$).

Conduite i	D_i (m)	Q_i (m^3/s)	V_i (m/s)	Re_i	λ_i*
1	0,3	0,05	0,7077	212310	0,02775
2	0,15	0,03	1,6985	254775	0,03366
3	0,1	0,02	2,5478	254780	0,03828

1- Détermination de H_D

L'équation de Bernoulli entre A et D donne : $z_A + \frac{P_A}{\rho g} + \frac{v_A^2}{2g} = z_D + \frac{P_D}{\rho g} + \frac{v_D^2}{2g} + \sum h_{A-D} \Rightarrow H_A = H_D + \sum h_{A-D}$

$$H_D = H_A - \sum h_{A-D} = 1110 - \left(\frac{\lambda_1 L_1}{D_1} - K_p\right)\frac{V_1^2}{2g} = 1110 - \left(\frac{0{,}02775x1400}{0{,}3} - 1{,}6\right)\frac{0{,}7077^2}{2x9{,}81} = 1106.74\ m$$

Note : $K_p.\frac{V_1^2}{2g} = \Delta H_p$ = gain de charge attribué par la pompe à l'écoulement, il est donc soustrait à $\sum h_{A-D}$.

2- Détermination de H_E Avec le même raisonnement entre E et B, on obtient :

$$H_E = H_B + \sum h_{E-B} = 1175 + \left(\frac{\lambda_2 L_2}{D_2} + K_{r1}\right)\frac{V_2^2}{2g} = 1175 + \left(\frac{0{,}03366x1000}{0{,}15} + 0{,}5\right)\frac{1{,}6985^2}{2x9{,}81} = 1208\ m$$

3- Détermination de L_3

De même, entre E et C on a : $H_E = H_C + \sum h_{E-C} \Rightarrow \sum h_{E-C} = H_E - H_C = 1208 - 1150 = 58\ m$

D'autre part, les pertes de charge entre E et C s'écrivent :

$$\sum h_{E-C} = \left(\frac{\lambda_3 L_3}{D_3} + K_{r2}\right)\frac{V_3^2}{2g} \quad \Rightarrow \quad L_3 = \left(\frac{2g.\sum h_{E-C}}{V_3^2} - K_{r2}\right)\frac{D_3}{\lambda_3} = \left(\frac{2x9{,}81x58}{2{,}5478^2} - 0{,}5\right)\frac{0{,}1}{0{,}03828} = 456{,}7\ m$$