

Rappel

I. Analyse vectorielle :

1. notion élémentaire :

a. Grandeur scalaire :

Une grandeur scalaire est toujours exprimée par une valeur numérique suivie de l'unité correspondante.

Exemple : le volume, la masse, la température, la charge électrique, l'énergie.

b. Grandeur vectorielle :

On appelle grandeur vectorielle toute grandeur qui nécessite un sens, une direction, un point d'application en plus de sa valeur numérique appelée intensité ou module.

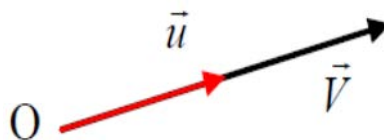
Exemple : le déplacement, la vitesse, la force, le champ électrique...

c. Le vecteur unitaire :

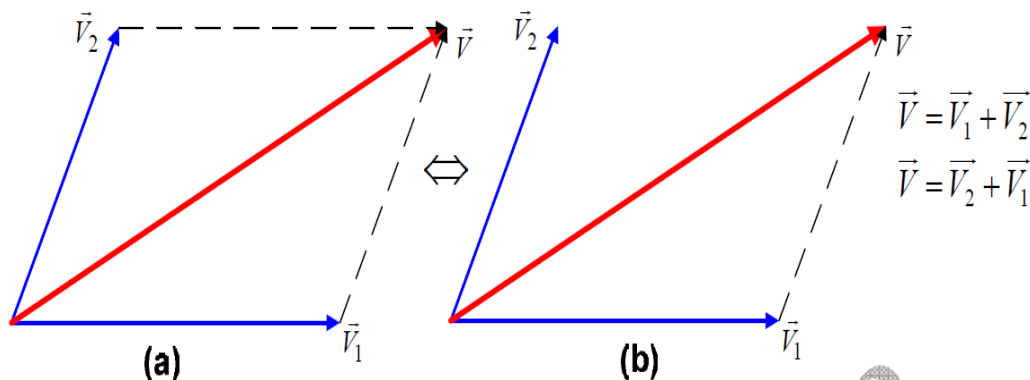
C'est un vecteur de module égal à l'unité (le nombre un).

On peut exprimer un vecteur parallèle au vecteur unitaire sous la forme :

$$\vec{V} = \vec{u} V$$



2. Addition vectoriel :



$$\|V\| = \sqrt{V_1^2 + V_2^2 + 2V_1V_2\cos\theta}$$

$$A (A_x, A_y, A_z)$$

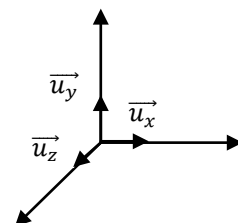
$$B (B_x, B_y, B_z)$$

$$\vec{A} = A_x\vec{u}_x + A_y\vec{u}_y + A_z\vec{u}_z$$

$$\vec{B} = B_x\vec{u}_x + B_y\vec{u}_y + B_z\vec{u}_z$$

$$\vec{A} + \vec{B} = (A_x + B_x)\vec{u}_x + (A_y + B_y)\vec{u}_y + (A_z + B_z)\vec{u}_z$$

$$\vec{A} - \vec{B} = (A_x - B_x)\vec{u}_x + (A_y - B_y)\vec{u}_y + (A_z - B_z)\vec{u}_z$$



3. Le produit scalaire :

Définition : On appelle produit scalaire de deux vecteurs \vec{V}_1 et \vec{V}_2 le nombre réel :

$$\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = V_1 \cdot V_2 \cdot \cos(\vec{V}_1, \vec{V}_2)$$

Cas particulier :

Si $\vec{V}_1 = \vec{0}$ ou $\vec{V}_2 = \vec{0}$, alors $\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = 0$

Si $\vec{V}_1 \neq \vec{0}$ et $\vec{V}_2 \neq \vec{0}$, alors :

$$\vec{V}_1 \perp \vec{V}_2 \Rightarrow (\vec{V}_1, \vec{V}_2) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos \frac{\pi}{2} = 0 \Rightarrow \vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = 0$$

$$\vec{V}_1 // \vec{V}_2 \Rightarrow (\vec{V}_1, \vec{V}_2) = 0 \Rightarrow \cos 0 = 1 \Rightarrow \vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = V_1 V_2$$

Dans l'espace :

Soit les deux vecteurs \vec{V}_1 et \vec{V}_2 dans le repère $\mathbf{R} (O ; \vec{i}, \vec{j})$:

$$\vec{V}_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} ; \vec{V}_2 \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = (x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j}) \cdot (x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j}) = x_1 x_2 \vec{i} \cdot \vec{i} + x_1 y_2 \vec{i} \cdot \vec{j} + x_2 y_1 \vec{j} \cdot \vec{i} + y_1 y_2 \vec{j} \cdot \vec{j}$$

$$\vec{i} \perp \vec{j} \Rightarrow \vec{j} \cdot \vec{i} = \vec{i} \cdot \vec{j} = 0$$

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = x_1 x_2 + y_1 y_2}$$

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{i}^2 = \vec{j}^2 = 1$$

Propriétés du produit scalaire :

Commutatif : $\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = \vec{V}_2 \cdot \vec{V}_1$ ($\cos(\Theta) = \cos(-\Theta)$)

Distributif : $\vec{V}_1 \cdot (\vec{V}_2 + \vec{V}_3) = \vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 + \vec{V}_1 \cdot \vec{V}_3$

4. Le produit vectoriel :

Définition : On appelle produit vectoriel de deux vecteurs \vec{V}_1 et \vec{V}_2 le vecteur \vec{W} perpendiculaire au plan qu'ils constituent.

$$\vec{W} = \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$$

$$\boxed{W = |\vec{W}| = V_1 V_2 \cdot \sin(\vec{V}_1, \vec{V}_2)} \Rightarrow \begin{cases} \vec{i} \wedge \vec{i} = \vec{j} \wedge \vec{j} = \vec{k} \wedge \vec{k} = \vec{0} \\ \vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k} ; \vec{i} \wedge \vec{k} = -\vec{j} ; \vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i} \\ |\vec{i} \wedge \vec{j}| = |\vec{i} \wedge \vec{k}| = |\vec{j} \wedge \vec{k}| = 1 \end{cases}$$

Méthode utilisée pour calculer le produit vectoriel de deux vecteurs :

Soit les deux vecteurs \vec{V}_1 et \vec{V}_2 dans le repère $\mathbf{R} (O ; \vec{i}, \vec{j} ; \vec{k})$:

$$\vec{V}_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} ; \vec{V}_2 \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

En utilisant les coordonnées cartésiennes

$$\vec{W} = \begin{vmatrix} +\vec{i} & -\vec{j} & +\vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$$

$$\vec{W} = (y_1 z_2 - y_2 z_1) \vec{i} - (x_1 z_2 - x_2 z_1) \vec{j} + (x_1 y_2 - x_2 y_1) \vec{k}$$

Propriétés du produit vectoriel

Anticommutatif : $\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = -\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_1 \quad \sin \Theta = -\sin(-\Theta)$

Non associatif : $\vec{V}_1 \wedge (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3) \neq (\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2) \wedge \vec{V}_3$

Distributif : $\vec{V}_1 \wedge (\vec{V}_2 + \vec{V}_3) = (\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2) + (\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_3)$

5. Gradient, divergence et rotationnel :

On définit l'opérateur différentiel vectoriel $\vec{\nabla}$ nabla par :

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$$

Où :

$\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$ sont respectivement les dérivées partielles par rapport à x, y et z .

Nous allons définir le gradient, la divergence et le rotationnel à l'aide de cet opérateur.

a. Le gradient :

Si f (x,y,z) est une fonction scalaire, son gradient est un vecteur défini comme étant :

$$\overrightarrow{grad} f = \vec{\nabla}(f) = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k}$$

Exemple : Calculer le gradient de la fonction f (x, y, z) = f = 3.x² y³ z .

$$\overrightarrow{grad} f = 6xy^3 z \vec{i} + 9x^2 y^2 z \vec{j} + 3x^2 y^3 \vec{k}$$

b. La divergence :

Si $\vec{V} = (V_x, V_y, V_z)$ est une fonction vectorielle, sa divergence est un scalaire défini comme étant :

$$div \vec{V} = \vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

Exemple : Calculer la divergence de la fonction vectorielle :

$$\vec{V} = (x, y, z) = 2xy \vec{i} - 3yz^2 \vec{j} + 9xy^3 \vec{k}$$

$$\text{div} \vec{V} = 2y - 3z^2$$

c. Le rotationnel :

Si $\vec{V} = (V_x, V_y, V_z)$ est une fonction vectorielle, son rotationnel est un vecteur défini comme étant :

$$\overrightarrow{\text{rot}(\vec{V})} = \vec{\nabla} \wedge \vec{V} = \begin{vmatrix} +\vec{i} & -\vec{j} & +\vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix} = +\vec{i} \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \right) - \vec{j} \left(\frac{\partial V_z}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial z} \right) + \vec{k} \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right)$$

d. Le laplacien :

Le Laplacien d'une fonction scalaire est égal à la divergence de son gradient :

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}(f) = \vec{\nabla}^2(f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}$$

Le Laplacien d'une fonction vectorielle est égal à la divergence de son gradient :

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}(\vec{V}) = \vec{\nabla}^2(\vec{V}) = \frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} \vec{i} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2} \vec{j} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} \vec{k}}$$

6. Identités vectorielles :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{\text{grad}} f = \vec{0} \quad (\vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} f = \vec{0})$$

$$\overrightarrow{\text{div}} \overrightarrow{\text{rot}} f = 0 \quad (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = 0)$$

7. Formule de Stokes :

De même en utilisant le rotationnel on peut établir la formule suivante, dite formule de Stokes, pour un champ vectoriel B (typiquement le champ magnétique), et un contour C enserrant une surface S

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \iint_S \text{rot} \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

Cette formule nous sera utile pour établir la forme locale du théorème d'Ampère.

8. Théorème de divergence :

En analyse vectorielle, le théorème de flux-divergence, appelé aussi théorème de Green-Ostrogradski, affirme l'égalité entre l'intégrale de la divergence d'un champ vectoriel sur un volume et le flux de ce champ à travers la frontière du volume (qui est une intégrale de surface).

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint_G (\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) dV$$

THEORIE DU CHAMP ELECTROMAGNETIQUE

INTRODUCTION

Il existe trois régimes distincts en électromagnétisme, chacun différent de l'autre suivant la variation en fonction du temps.

a) Régime stationnaire (R.S)

Phénomènes indépendants du temps $\partial/\partial t = 0$;

Toutes les grandeurs électriques et magnétiques ($E, H, q \dots$) sont constantes.

R.S: Electrostatique + Magnétostatique

b) Régime quasi-stationnaire (RQS)

Phénomènes variables avec le temps $\partial/\partial t \neq 0$

Exemple: $q = q_0 \cos(2\pi f t)$

Si $f < 1 \text{ kHz} \Rightarrow \text{RQS}$

Si $f > 1 \text{ kHz} \Rightarrow \text{Régime variable}$

c) Régime variable (R.V)

Phénomènes très variables avec le temps

Ne concerne que les hautes fréquences $> 1 \text{ kHz}$.

Dans le RV le champ électromagnétique devient une onde électromagnétique qui se propage dans l'air.

Chapitre I : Electrostatique

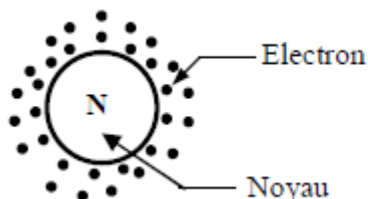
Définition : L'électrostatique est l'étude des interactions électriques entre des charges constantes et immobiles. Autrement dit, pas de courant électrique.

I. STRUCTURE ATOMIQUE DE LA MATIERE

1. L'atome

Il est admis qu'un atome neutre comprend:

- un noyau constitué de Z protons (de charge +e) et de N neutrons (neutre électriquement et de même masse que les protons)
- Z électrons: particule de charge -e et dont la masse est 1836 fois plus faible que celle des nucléons. Ils gravitent autour du noyau.



Le noyau comprend des :

- charges positives appelées protons
- particules neutres appelées neutrons

En valeur absolue, les charges de l'électron et du proton sont égales :

$$e = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

Les caractéristiques des particules sont indiquées dans le tableau ci-dessous.

Particule	Masse	Charge
Electron	$m_e = 9,1091.10^{-31} \text{ kg}$	- e
Proton	$m_p = 1,6725.10^{-27} \text{ kg}$	+ e
Neutron	$m_n = 1,6748.10^{-27} \text{ kg}$	0

A l'état fondamental, il y a autant d'électrons que de protons : l'atome est une particule neutre.

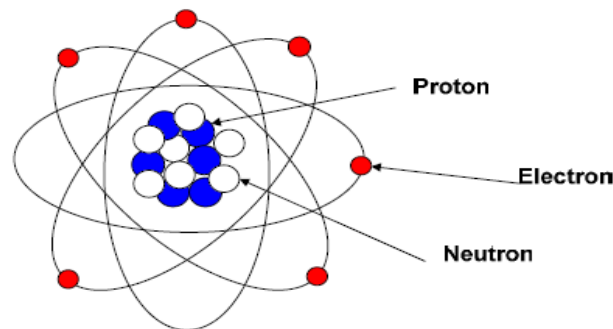
L'atome est ionisé s'il cède ou acquiert un électron :

- c'est un ion positif s'il perd 1 ou plusieurs électrons.
- c'est un ion négatif s'il gagne 1 ou plusieurs électrons.

2. Nuage électronique

Le nuage électronique est formé d'électrons tournant à grande vitesse autour du noyau selon des trajectoires très complexes.

Les électrons sont répartis sur des couches



3. Couches périphériques

Définition : C'est la couche la plus extrême d'un atome. Ses électrons sont appelés électrons périphériques ou électrons de valence.

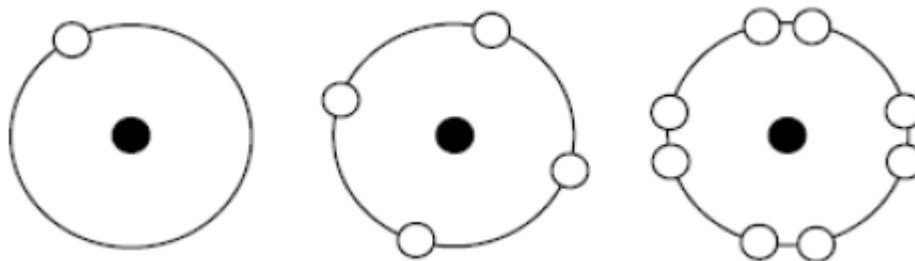
La couche périphérique d'un atome ne peut pas posséder plus de huit électrons.

Important : Les propriétés électriques dépendent des électrons de la couche périphérique.

Conducteurs : 1 à 3 électrons de valence

Semi- Conducteurs : 4 électrons de valence

Isolants : 5 à 8 électrons de valence.



Conducteurs

Semi- Conducteurs

Isolants

Représentation des couches périphériques.

- Les bons conducteurs ont leur dernière couche incomplète. Ils céderont facilement leurs électrons (électrons libres).
- Les isolants ont leur dernière couche saturée ou presque saturée. Ils ne céderont pas facilement leurs électrons (électrons liés).
- Les semi-conducteurs sont des matériaux dont la dernière couche est formée de 4 électrons. Le silicium et le germanium sont les semi-conducteurs les plus utilisés.

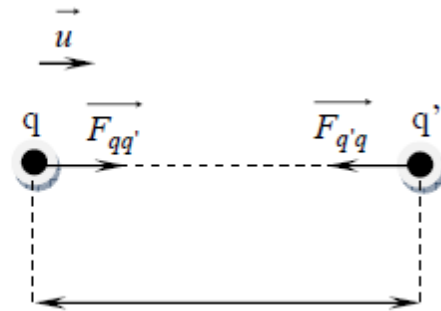
II. LOI DE COULOMB (1785)

Charles A. de Coulomb : ingénieur français (1736 – 1806).

Soient deux charge ponctuelles q et q' séparées par une distance r . Coulomb, par analogie avec la loi d'attraction universelle, a proposé:

$$\vec{F}_{q'q} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q q'}{r^2} \vec{u} = K \frac{q q'}{r^2} \vec{u}$$

avec $K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \text{ NmC}^{-2}$



Unités : F [N] ; q_1, q_2 [C] ; r [m]

ϵ_0 : constante diélectrique du vide.

Vide, air... $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ [F/m]}$

Attraction et répulsion :

Si q_1 et q_2 ont même signe \Rightarrow Force de répulsion.

Si q_1 et q_2 ont des signes opposés \Rightarrow Force d'attraction.

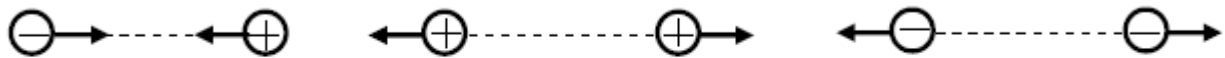
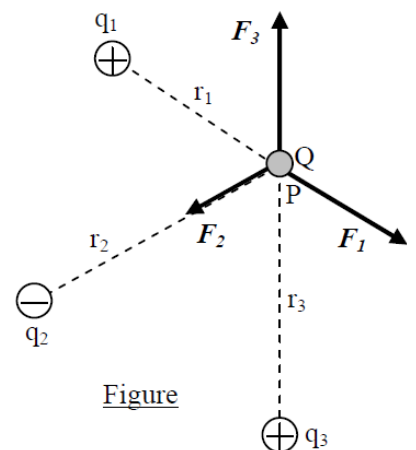


Figure : Forces entre charges électriques de signes identiques ou opposés

Une charge Q placée dans une région où se trouvent plusieurs autres charges est soumise à l'action de toutes ces charges :

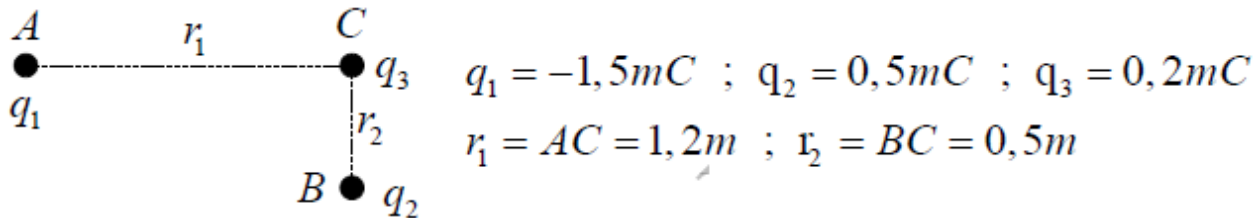
$$F(P) = F_1 + F_2 + F_3 + \dots$$



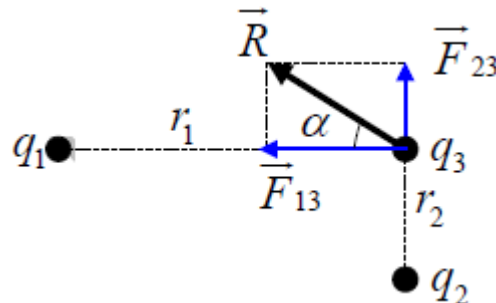
Figure

Exercice :

Etant donné la disposition des charges de la figure, trouver la force résultante appliquée sur la charge q_3 .



Solution :



Puisque $q_1 \cdot q_3 < 0$, donc $\vec{F}_{13} < 0$ est une force d'attraction,

Puisque $q_2 \cdot q_3 > 0$, donc $\vec{F}_{23} > 0$ est une force répulsion.

$$\vec{F}_{13} = -K \frac{q_1 q_3}{r_1^2} \vec{u}_1 ; F_{13} = 9 \cdot 10^9 \frac{1,5 \cdot 10^{-3} \cdot 0,2 \cdot 10^{-3}}{(1,2)^2} \Rightarrow F_{13} = 1,875 \cdot 10^3 N$$

$$\vec{F}_{23} = K \frac{q_2 q_3}{r_2^2} \vec{u}_2 ; F_{23} = 9 \cdot 10^9 \frac{0,5 \cdot 10^{-3} \cdot 0,2 \cdot 10^{-3}}{(0,5)^2} \Rightarrow F_{23} = 3,6 \cdot 10^3 N$$

$$R = \sqrt{F_{13}^2 + F_{23}^2} \Rightarrow \boxed{R = 4,06 \cdot 10^3 N}$$

Quant à l'angle α que forme la résultante \vec{R} avec la droite AC il est égal à :

$$\tan \alpha = \frac{F_{23}}{F_{13}} ; \tan \alpha = 1,92 \Rightarrow \boxed{\alpha = 62.49^\circ}$$

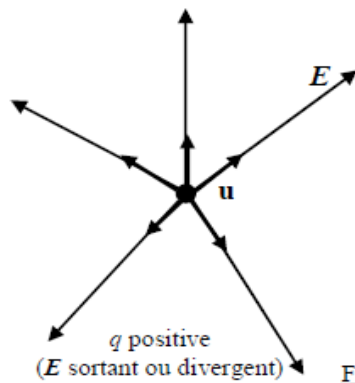
III. Champ électrique

1. Champ électrostatique crée par une charge ponctuelle

Lorsqu'une charge q se trouve au point O , elle crée alors, en tout point M de l'espace qui l'entoure un champ vectoriel, appelé champ électrostatique exprimé par la relation :

$$\boxed{\vec{E}(M) = \frac{\vec{F}_e}{q_M} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2} \vec{u}}$$

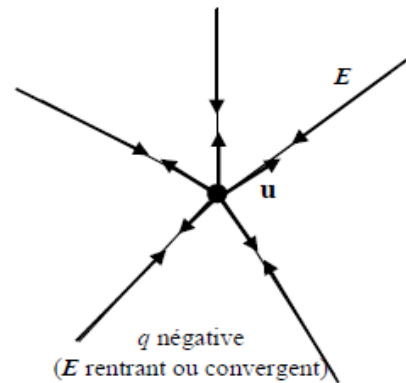
Sens du champ électrique :



$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} u$$

u est un vecteur unitaire radial issu de la charge

Figure : Le champ électrique est un vecteur



Unité de E :

Comme par définition nous avons $E = F / q$: donc $[E] = N / C$.

En général on utilise une autre unite :

Vu que $E = -dV / dx$: Alors $[E] = V / m$.

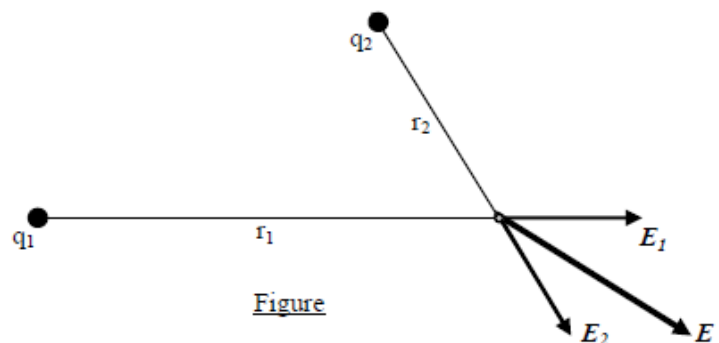
2. Champ d'un ensemble de charges

Le champ électrique produit par un ensemble de charges ponctuelles est égal à la somme vectorielle des champs produits par toutes les charges.

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{r_i^2} u_i$$

Cas de 2 charges :

$$E = E_1 + E_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1}{r_1} u_1 + \frac{q_2}{r_2} u_2 \right)$$



3. Champ électrique crée par une distribution continue de charges

Dans le cas d'un très grand nombre de particules, celles ci peuvent être réparties uniformément suivant une droite, sur une surface plane ou dans un volume.

Dans une telle répartition de charge, le principe de superposition reste toujours valable. On divise cette répartition en un nombre infini de très petits volumes, ou surfaces, ou segments rectilignes élémentaires chargés, puis on calcule le champ dE que chacun de ces éléments crée. On fait ensuite la somme vectorielle des champs élémentaires dE . Comme on prend des éléments infiniment petits, on

transforme la somme (\sum) en une intégrale triple (\iiint), double (\iint) ou simple (\int), selon que l'on considère un volume, une surface ou une longueur.

On aura donc :

$$\vec{E} = \int d\vec{E}$$

Dans un système d'axes cartésiens O_{xyz} , on a :

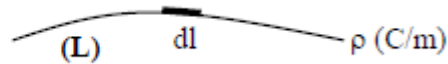
$$d\vec{E} = dE_x \cdot \vec{i} + dE_y \cdot \vec{j} + dE_z \cdot \vec{k}$$

$$d\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{dq}{r^2} \vec{u}$$

IV. Répartition des charges :

1. Ligne chargée

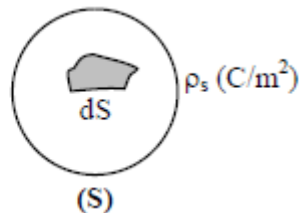
$$dq = \rho dl \Rightarrow q = \int \rho dl$$



avec ρ densité de charge linéique (C/m)

2. Surface chargée

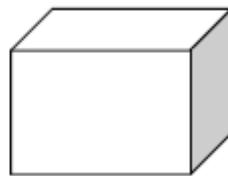
$$dq = \rho_s ds \Rightarrow q = \int_S \rho_s ds$$



avec ρ_s densité de charge surfacique (C/m²)

3. Volume chargé

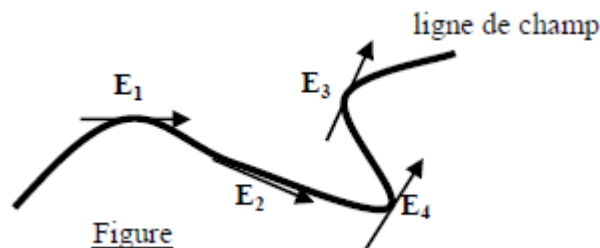
$$dq = \rho_v dv \Rightarrow q = \int_V \rho_v dv$$



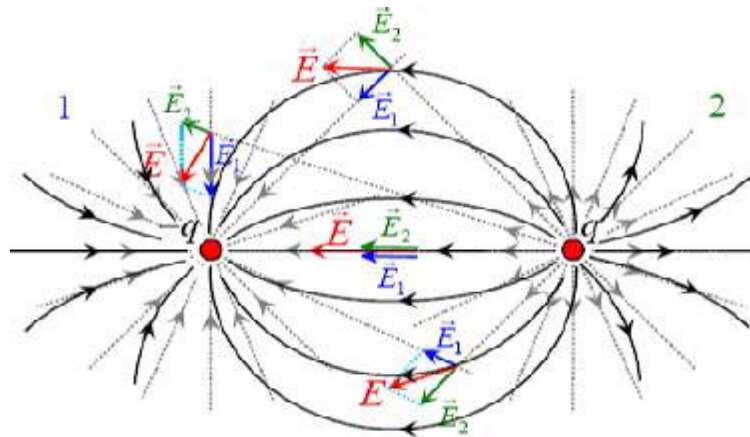
avec ρ_v densité de charge volumique (C/m³)

4. Lignes de champ :

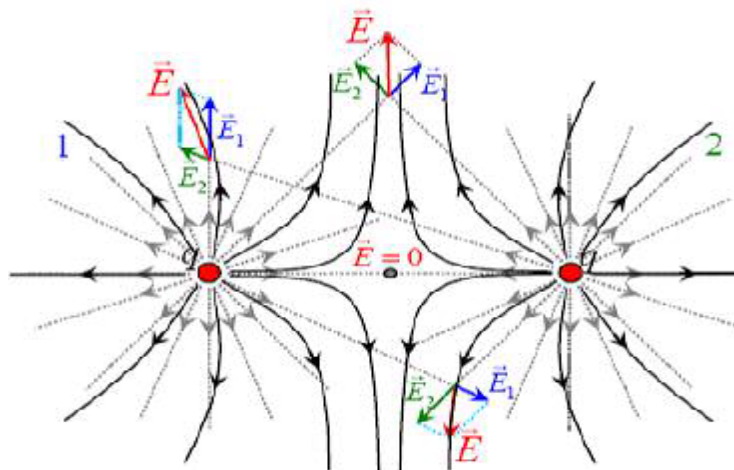
Une ligne de champ est une ligne qui est tangente en chacun de ses points au champ électrique en ce point.



Figure



Lignes de champ de deux charges égales et de signes contraires.



Lignes de champ de deux charges égales

Ligne de champ uniforme :

C'est une ligne de champ où le module est partout le même en chacun de ses points et qui possède une seule direction.

Exemple: Le champ existant entre deux plans chargés est uniforme (sera démontré par la suite).

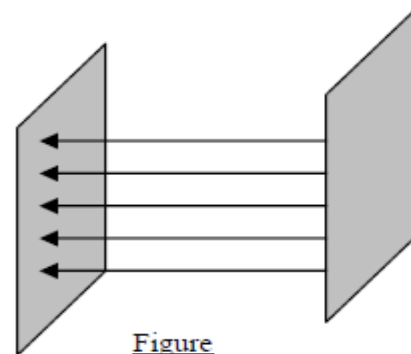
Déplacement électrique

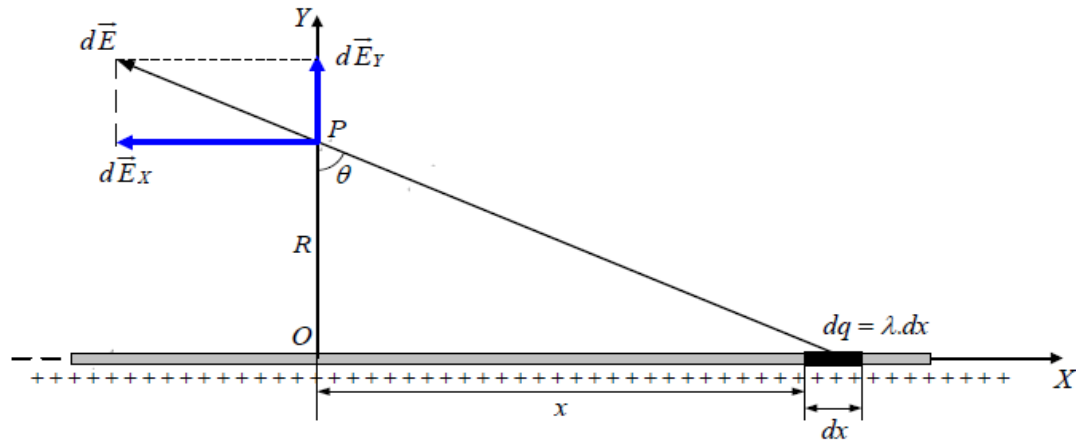
$$D = \epsilon E$$

6. Applications :

a. Première application : Le champ électrostatique produit par un fil fin de longueur infinie et portant une charge linéique positive de densité λ constante.

Solution : le petit élément que l'on doit prendre en considération est un segment rectiligne de longueur dx , portant la charge élémentaire $dq = \lambda \cdot dx$:





Le champ élémentaire dE produit par la charge dq est situé sur le prolongement du segment rectiligne de longueur r et reliant P à dq .

En appliquant la relation du calcul du champ électrostatique on obtient :

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda \cdot dx}{r^2}$$

Sachant que : $d\vec{E} = d\vec{E}_x + d\vec{E}_y$

Et d'après la figure, on a :

$$E_x = \int dE_x = \int dE \cdot \sin \theta$$

$$E_y = \int dE_y = \int dE \cdot \cos \theta$$

Soit :

$$E_x = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dx}{r^2} \cdot \sin \theta$$

$$E_y = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dx}{r^2} \cdot \cos \theta$$

On remarque que r , θ et x sont des variables, tandis que R est constant. On en déduit géométriquement que :

$$x = R \cdot \tan \theta \Rightarrow dx = R \cdot d\theta \cdot \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

$$r = \frac{R}{\cos \theta}$$

Suite à cela, on obtient :

$$E_x = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dx}{r^2} \cdot \sin \theta = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{(R / \cos^2 \theta) \cdot d\theta}{R^2 / \cos^2 \theta} \cdot \sin \theta$$

$$E_x = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{1}{R} \cdot \sin \theta \cdot d\theta = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{R} \cdot [-\cos \theta]_{-\pi/2}^{+\pi/2} \Rightarrow \boxed{E_x = 0}$$

Ce résultat ($E_x = 0$) était prévisible vu la symétrie du problème.

Quant à la composante normale elle est calculée de la même façon :

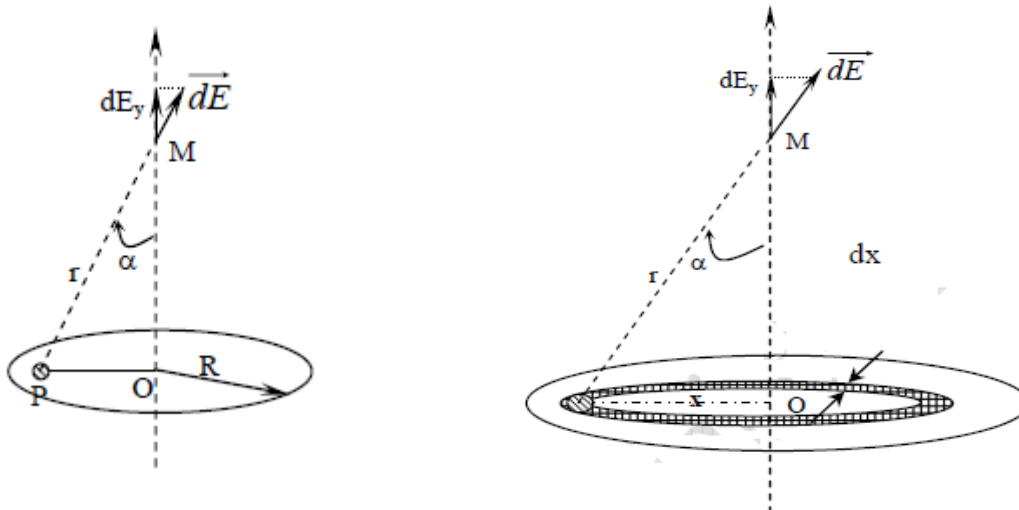
$$E_y = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dx}{r^2} \cdot \cos \theta = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{(R / \cos^2 \theta) \cdot d\theta}{R^2 / \cos^2 \theta} \cdot \cos \theta$$

$$E_y = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{1}{R} \cdot \cos \theta \cdot d\theta = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{R} \cdot [\sin \theta]_{-\pi/2}^{+\pi/2} \Rightarrow \boxed{E_y = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda}{R}}$$

Finalement on obtient :

$$d\vec{E} = d\vec{E}_x + d\vec{E}_y \Rightarrow \boxed{\vec{E} = \vec{E}_y = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda}{R} \vec{j}}$$

b. Deuxième application : Le champ électrostatique produit par un disque circulaire portant une charge surfacique positive de densité σ constante.



Un élément de surface dS , centré en P, porte charge:

$$dq = \sigma ds$$

Cet élément de surface crée au point M, situé sur l'axe, un champ dE donné par:

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma ds}{r^2}$$

Ce champ est porté par PM, mais le champ total, par raison de symétrie, est porté par Oy. En conséquence:

$$E = \int dE_y = \int dE \cos \alpha$$

Soit une couronne circulaire comprise entre les cercles de rayon x et $x+dx$ et portant la charge:

$$dq = \sigma 2\pi x dx$$

Cette charge constitue un champ:

$$dE_y = k \frac{\sigma 2\pi x dx}{r^2} \cos \alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma 2\pi x dx}{r^2} \frac{y}{r}$$

$$dE_y = \frac{\sigma y}{2\epsilon_0} \frac{x dx}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

On obtient E, en sommant dE_y pour toutes les valeurs de x comprises entre 0 et R

$$E = \int_0^R dE_y = \frac{\sigma y}{2\epsilon_0} \int_0^R \frac{x dx}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = \left[-\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{y}{(x^2 + y^2)^{1/2}} \right]_{x=0}^{x=R} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{y}{(R^2 + y^2)^{1/2}} \right)$$

Cas particulier

- ✓ Si le point M est au centre du cercle:

$$E = 0$$

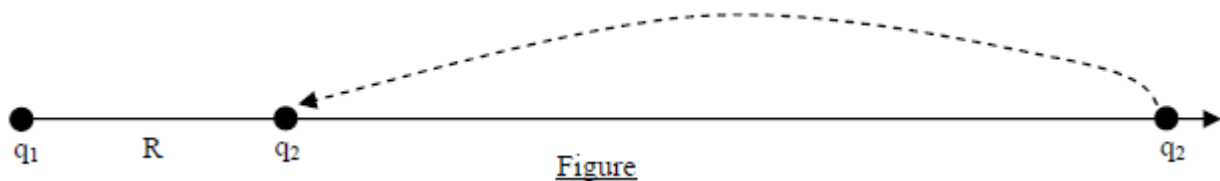
- ✓ Si $R \rightarrow \infty$, le disque devient un plan de dimension infinie et quel que soit la position de M, le champ est constant :

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

V. Potentiel électrique

On considère une charge q_1 placée à l'origine d'un repère. On apporte une autre charge q_2 de l'infini jusqu'à une distance $r = R$ de q_1 .

Supposons q_1 et q_2 positives.



Le travail fourni W pour vaincre la force de répulsion de q_1 est :

$$W = -\int_{\infty}^R \mathbf{F} d\mathbf{r} = -\int_{\infty}^R F dr = -\int_{\infty}^R q_2 E_1 dr$$

avec $E_1 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2}$

$$W = - \int_{\infty}^R \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = - \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^R \frac{dr}{r^2} = - \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{r} \right]_{\infty}^R = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 R}$$

Suivant le principe de conservation de l'énergie, le travail fourni W est emmagasiné par la charge q_0 sous forme d'énergie potentielle E_p ,

Soit $W = E_p$.

On pose donc : $E_p = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 R} = q_1 V_2$

avec $V_2 = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 R}$ potentiel crée par q_2

On peut également écrire : $E_p = q_2 V_1$

avec $V_1 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 R}$ potentiel crée par q_1

$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}$ est donc l'expression du potentiel crée par une charge q

et $E_p = qV$ est l'énergie potentielle d'une charge q soumise à un potentiel V.

Unité :

soit en J/C car par définition $V = E_p / q$

ou bien en Volt, qui est l'unité la plus utilisée.

Le potentiel crée par plusieurs charges en un point P peut être déterminé à partir de l'expression suivante :

$$V = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_1} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r_2} + \frac{q_3}{4\pi\epsilon_0 r_3} + \dots = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{r_i}$$

Conclusion : Une charge ponctuelle produit :

- Un champ (vectoriel) $E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{u}$.
- Un potentiel (scalaire) $V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$.

VII. Relation entre E et V

Pour placer une charge q en un point où règne un potentiel V, il faut fournir un travail W :

$$W = - \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

Ce travail est emmagasiné par la charge q sous forme d'énergie potentielle E_p :

$$E_p = q V$$

$$W = E_p \Rightarrow dW = dE_p \Rightarrow -\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = q dV \Rightarrow -q \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = q dV \Rightarrow dV = -\mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} \quad (1)$$

D'autre part, on peut poser que :

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz = \left(\frac{\partial V}{\partial x} \mathbf{u}_x + \frac{\partial V}{\partial y} \mathbf{u}_y + \frac{\partial V}{\partial z} \mathbf{u}_z \right) (dx \mathbf{u}_x + dy \mathbf{u}_y + dz \mathbf{u}_z) = \mathbf{grad} V \cdot d\mathbf{r} \quad (2)$$

D'après les équations 1 et 2, on obtient:

$$\mathbf{E} = -\text{grad } V$$

Conclusions :

$$1) \mathbf{E} = -\text{grad } V = -\frac{\partial V}{\partial x} \mathbf{u}_x - \frac{\partial V}{\partial y} \mathbf{u}_y - \frac{\partial V}{\partial z} \mathbf{u}_z$$

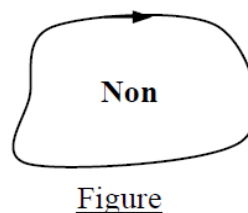
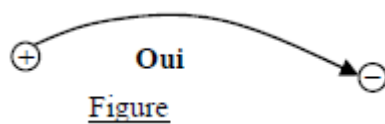
Le champ électrostatique a le sens des potentiels décroissants.

Suivant l'axe des x, nous avons : $E = -\frac{\partial V}{\partial x}$.

Le champ électrique est toujours dirigé du potentiel le plus élevé au potentiel le plus bas.

$$2) \text{rot } \mathbf{E} = \text{rot}(-\text{grad } V) = 0$$

D'après cette relation mathématique, on déduit que le champ électrostatique est non rotationnel. C'est-à dire que la ligne de champ électrique ne se referme jamais sur elle-même. Les lignes de champ électrique ne se referment que sur des charges électriques.

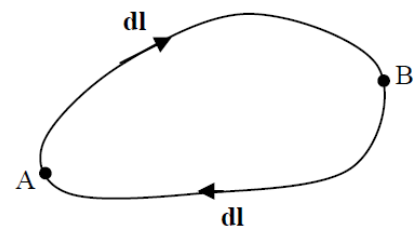


$$3) \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

$$\text{En effet, nous avons : } \text{rot } \mathbf{E} = 0 \Rightarrow \int \text{rot } \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 0 \Rightarrow \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

Le long d'un contour fermé quelconque, dans le quel on définit Deux points A et B :

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \int_B^A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = (V_A - V_B) + (V_B - V_A) = 0$$



Figure

VII. Surface équipotentielle

C'est une surface où le potentiel est constant et partout le même.

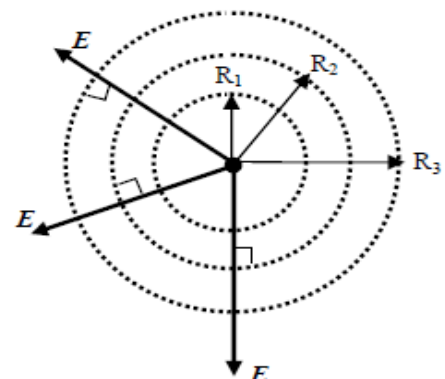
Exemple : charge ponctuelle q.

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Le potentiel est constant si on pose $r = R = \text{constante}$;

Chaque sphère de rayon R constant (R_1, R_2, R_3) représente donc une surface équipotentielle.

Règle de base : le champ électrique est toujours perpendiculaire à la surface équipotentielle.



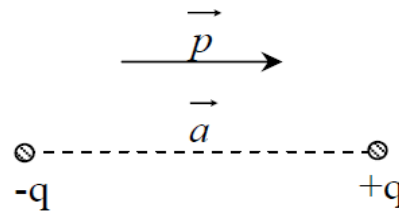
Figure

VIII. Dipôle électrique

Un dipôle électrique est l'ensemble de deux charges égales, de signes contraires et séparées par une très petite distance.

Le moment électrique dipolaire est défini par:

$$\vec{p} = q \vec{a}$$



Le potentiel au point M dû au dipôle s'écrit:

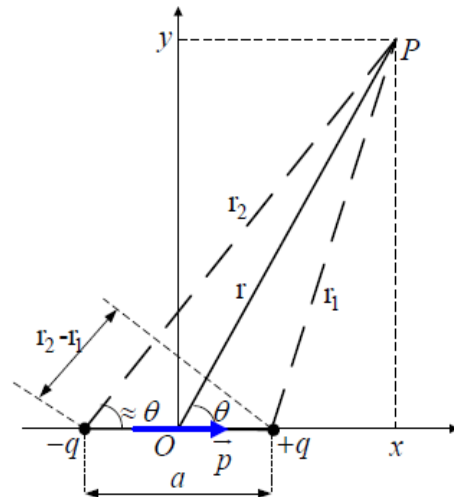
$$V = k \left(\frac{q}{r_1} - \frac{q}{r_2} \right) = kq \left(\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2} \right)$$

Si la distance r est grande par rapport à a, on peut écrire:

$$r_2 - r_1 \approx a \cos \theta \quad \text{et} \quad r_1 r_2 \approx r^2$$

et l'on aura:

$$V = kq \frac{a \cos \theta}{r^2} = kqa \frac{\cos \theta}{r^2} = kp \frac{\cos \theta}{r^2} \quad (p = qa)$$



Champ électrique produit par un dipôle électrique :

On va essayer de calculer E à partir de l'équation $\vec{E} = -\text{grad } V$

En coordonnées cartésiennes:

$$r_1 = \left[y^2 + (x - a/2)^2 \right]^{1/2} ; \quad r_2 = \left[y^2 + (x + a/2)^2 \right]^{1/2}$$

D'où :

$$V = K.q \left[\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right]$$

Donc :

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} . q \left[\frac{1}{\left[y^2 + (x - a/2)^2 \right]^{1/2}} - \frac{1}{\left[y^2 + (x + a/2)^2 \right]^{1/2}} \right]$$

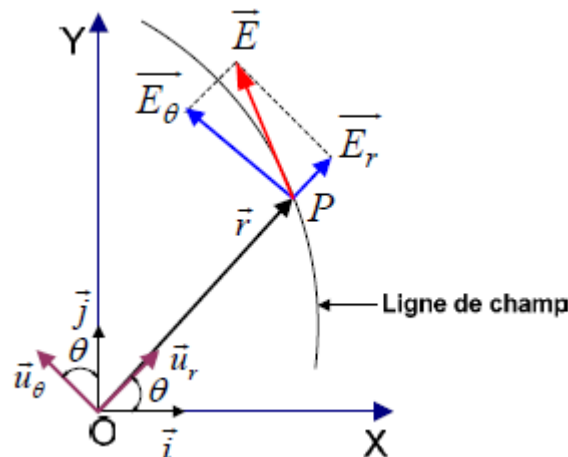
Il reste maintenant à effectuer les opérations de dérivation :

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} . q \left[\frac{x - a/2}{\left[y^2 + (x - a/2)^2 \right]^{3/2}} - \frac{x + a/2}{\left[y^2 + (x + a/2)^2 \right]^{3/2}} \right]$$

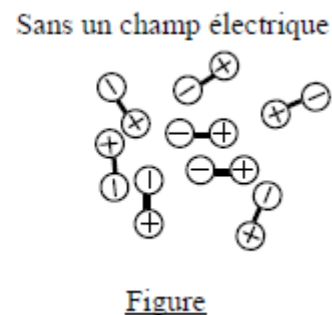
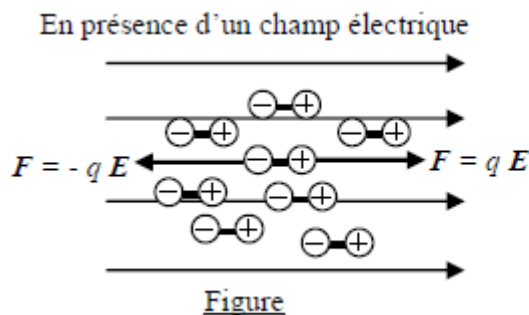
$$E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot q \left[\frac{y}{\left[y^2 + \left(x - a/2\right)^2\right]^{3/2}} - \frac{y}{\left[y^2 + \left(x + a/2\right)^2\right]^{3/2}} \right]$$

En coordonnées polaires:

- Une composante radiale E_r : $E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{2p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}$;
- Une composante transversale E_θ : $E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{p \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}$



Un dipôle placé dans un champ électrique est soumis à un couple qui tend à l'aligner suivant la ligne de ce champ.



IV. Théorème de Gauss

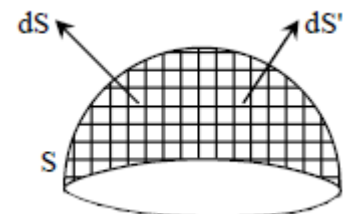
1. Représentation d'une surface

On décompose (S) en élément dS très petits;
chaque élément dS est représenté par un vecteur dS :

- appliqué sur dS
- de grandeur dS
- dirigé selon la normale au plan dS
- sur une direction arbitraire qui sera conservée pour tous les éléments de S.

Ainsi :

$$S = \iint |dS|$$



2. Flux électrique

Flux électrique : $\Phi_e = \int E \cdot ds$

Flux magnétique : $\Phi_m = \int B \cdot ds$

Surface non fermée :

$$\int E \cdot ds = \int E ds \cos \theta$$

Surface fermée :

Surface globale = surface S1 (base supérieure)
+ surface S2 (base inférieure) + surface latérale S3.

$$\Phi_e = \int_{S_1} E \cdot dS_1 + \int_{S_2} E \cdot dS_2 + \int_{S_3} E \cdot dS_3$$

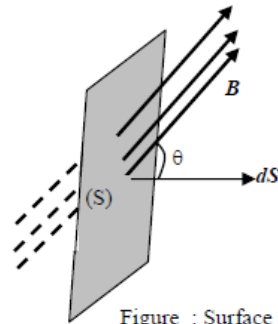


Figure : Surface non fermée

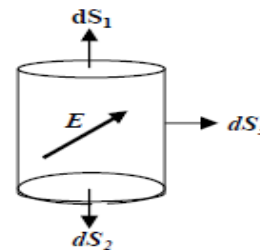


Figure : Surface fermée

Remarques:

- Les vecteurs dS relatifs à la surface fermée sont perpendiculaires à la surface considérée et sortants.
- Quand le flux est positif, il est « sortant ». Quand il est négatif, le flux est « entrant ».
- La notion de « flux » ne signifie pas vraiment qu'il y a un mouvement de quelque chose à travers la surface.

3. Théorème de Gauss

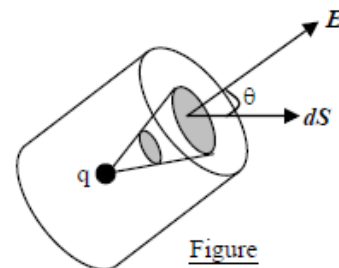
$d\Omega$: Angle solide sous lequel on voit dS à partir de q (cône).

Pour une surface fermée $\oint d\Omega = 4\pi$

On obtient alors :

$$\Phi_e = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} 4\pi = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$\text{Donc } \oint E \cdot ds = \frac{q}{\epsilon}$$



Figure

Théorème de Gauss:

Le flux électrique à travers une surface fermée quelconque est égal au rapport q/ϵ_0 , où q représente la somme des charges se trouvant à l'intérieur de cette surface.

Autre démonstration (plus simple) :

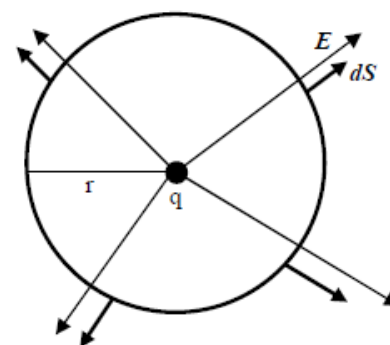
On considère comme surface fermée une sphère de rayon r.

Les vecteurs E et dS sont tous les deux radiaux

$$\text{Donc : } \varphi = \oint E \cdot dS = \oint E dS = \oint \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dS$$

comme r est constant sur toute la surface de la sphère :

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \oint dS = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}$$



Figure

Cas général :

Les charges se trouvant à l'extérieur de la surface fermée ne sont pas considérées dans le théorème de Gauss.

$$\varphi = \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_1}{\epsilon_0} + \frac{q_2}{\epsilon_0} + \dots + \frac{q_n}{\epsilon_0} = \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{\epsilon_0}$$

Forme différentielle :

$$\Phi_e = \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_V \text{div} \vec{E} \, dv ;$$

(Théorème de divergence)

Si la charge est uniformément répartie dans un volume V on pose :

$$q = \int_V \rho_v \, dv$$

où ρ_v densité de charge volumique

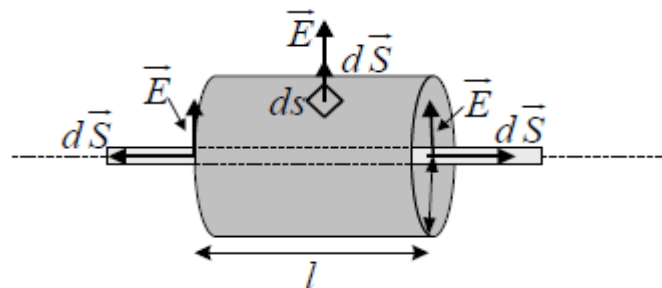
$$\text{D'où } \int_V \text{div} \vec{E} \, dv = \frac{q}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho_v \, dv$$

$$\text{Soit donc, } \text{div} \vec{E} = \frac{\rho_v}{\epsilon_0}$$

Le champ électrique produit par une tige de longueur infinie uniformément chargée :

La surface de Gauss qui convient à ce cas est celle d'un cylindre de longueur l , et dont l'axe coïncide avec la tige.

Il y a trois surfaces : la surface de base S_1 , la surface de base S_2 , et la surface latérale S_L :

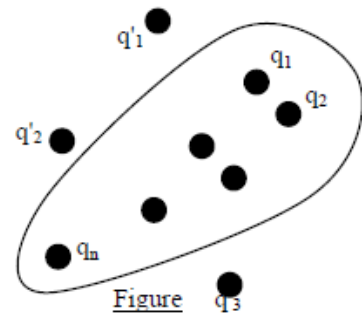


Le flux à travers toutes les surfaces qui constituent le cylindre de Gauss est la somme des flux à travers chaque surface, soit $\Phi = \sum \phi_i$:

$$\Phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \underbrace{\oint_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{S}}_0 + \underbrace{\oint_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{S}}_0 + \oint_{S_L} \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

Sur les surfaces des bases (S_1) et (S_2), le champ est perpendiculaire au vecteur $d\vec{S}$, donc il n'y a aucun flux qui traverse ces deux surfaces ($\cos \pi / 2 = 0$). Mais, par contre sur la surface latérale (S_L), les vecteurs $d\vec{S}$ sont tous radiaux comme \vec{E} ($\cos 0 = 1$). D'où l'on obtient :

$$\Phi = \oint_{S_L} \vec{E} \cdot d\vec{S} = E \cdot S_L = \frac{Q_i}{\epsilon_0}$$



Figure

Sachant que $Q_i = \lambda.l$ et $S_L = 2\pi Rl$, donc :

$$E.2\pi R.l = \frac{\lambda.l}{\epsilon_0} \Rightarrow \boxed{E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}}$$

4. Equations de Laplace et de Poisson

$$\text{div}\vec{E} = \text{div}(-\text{grad}V) = -\Delta V = -\Delta V = \frac{\rho_v}{\epsilon_0}$$

$$\text{Soit } \Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{\rho_v}{\epsilon_0}$$

Cette relation porte le nom de « **équation de Poisson** », elle permet le calcul de V si on connaît la répartition de la charge ou l'inverse.

Exemple : Dans une région de l'espace règne un champ électrique de la forme :

$$\vec{E} = x\vec{i} + 2y\vec{j} + 3\vec{k}$$

Trouver l'expression de la densité volumique de la charge.

Réponse : L'application de l'équation de Poisson, nous donne :

$$\text{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow \rho = \epsilon_0 \left[\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right]$$

$$\rho = \epsilon_0 [1 + 2 + 0] \Rightarrow \rho = 3\epsilon_0$$

Quand est-il s'il n'y avait aucune charge ?

Cela veut dire que :

$$\rho = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0}$$

Cette expression est connue sous le nom de « **équation de Laplace** », elle est surtout utilisée en mécanique des fluides. Dans cette équation apparaît un opérateur appelé « **le laplacien** » qui est :

$$\boxed{\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}}$$

X. CAPACITE- CONDENSATEUR

1. Conducteur unique

$$C = q/V$$

C : capacité du conducteur ; q: charge du conducteur ; V: potentiel du conducteur

Unité : [C] = C / V ;

En général on utilise comme unité le Farad et ses sous multiples

[C]=Farad F

Exemple: Sphère chargée (que ce soit en volume ou en surface)

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} \Rightarrow C = 4\pi\epsilon_0 R$$

Si V_1 et V_2 sont les potentiels de ces conducteurs, la capacité du système est définie par :

$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2}$$

Tout système constitue de deux conducteurs quelconques séparés par un isolant est un condensateur.

La capacité du condensateur est $C = q/U$.

ou $U = V_1 - V_2$ représente la d.d.p entre les deux conducteurs.

V_1, V_2 potentiels des deux conducteurs.

Les condensateurs les plus connus sont :

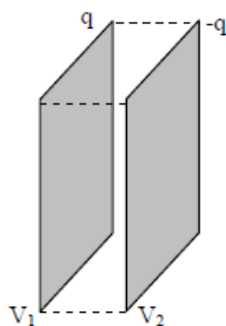


Figure : Condensateur plan

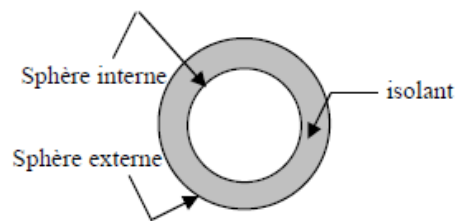


Figure : Condensateur sphérique

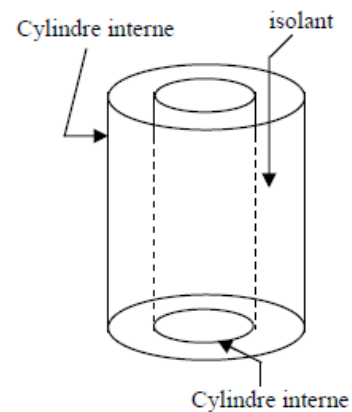


Figure : Condensateur cylindrique

Remarques :

- Les deux armatures portent des charges Q égales mais opposées. Q est la charge du condensateur.
- La capacité est indépendante de la tension et de la charge : elle constitue seulement le facteur de proportionnalité (constant) entre les deux. Elle dépend des paramètres géométriques du condensateur.

XI. Energie électrostatique

Soient q, V : charge et potentiel du condensateur à un instant t .

Pour amener une charge supplémentaire dq au condensateur, on doit fournir un travail dW , afin de vaincre la répulsion des charges existantes.

Rappel $W = -\int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = qV$

Si nous apportons une charge supplémentaire dq , le travail effectuée est :

$$dW = V dq$$

$$dW = -\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = V dq \Rightarrow W = \int_0^{q_m} V dq = \int_0^{q_m} \frac{q}{C} dq = \frac{1}{C} \left(\frac{q^2}{2} \right)_0^{q_m} = \frac{q_m^2}{2C}$$

avec q_m : charge maximale

soit en général :

$$W = \frac{q^2}{2C},$$

ou bien comme $V = q/C$:

$$W = \frac{1}{2} qV.$$

Dans le cas d'un conducteur sphérique, par exemple, où $C = 4\pi\epsilon_0 R$, l'énergie du champ électrique est :

$$W_E = \frac{1}{2} \left(\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 R} \right)$$

Remarques :

- $W = \frac{1}{2} qV$ est l'énergie emmagasinée par un système (condensateur, ensemble de charges...) suite à un travail fourni.
- $W = qV$ est l'énergie potentielle que possède une charge q dans un potentiel V .

Densité de l'énergie électrique :

On considère à titre d'exemple un condensateur plan :

Sa capacité est :

$$C = \epsilon_0 \frac{S}{d}$$

L'énergie qu'il emmagasine est :

$$W_E = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2} CU^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{S}{d} U^2$$

Si on divise cette énergie par le volume du condensateur, on obtient ce que l'on appelle densité de l'énergie électrique :

$$w = \frac{W_E}{v} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{SU^2}{dSd} \Rightarrow w = \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{U^2}{d^2} \rightarrow (1)$$

On sait que l'intensité du champ électrique entre les armatures est :

$$E = \frac{U}{d}$$

Après substitution, l'équation (1) de la densité de l'énergie électrique s'écrit :

$$\boxed{w = \frac{\epsilon_0}{2} E^2}$$

w représente la **densité de l'énergie électrique dans le vide**. Son unité est le joule par mètre cube (Jm^{-3}).

En présence d'un isolant, autre que le vide, on remplace ϵ_0 par $\epsilon = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r$, où ϵ_r représente la permittivité relative de l'isolant, tandis que ϵ désigne la permittivité absolue.

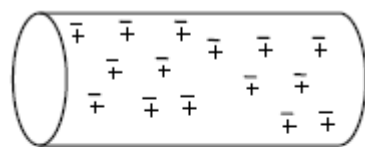
On peut donc écrire la densité de l'énergie sous la forme :

$$w = \frac{\epsilon}{2} E^2$$

XII. Interaction entre champ électrique et la matière

1. Conducteur :

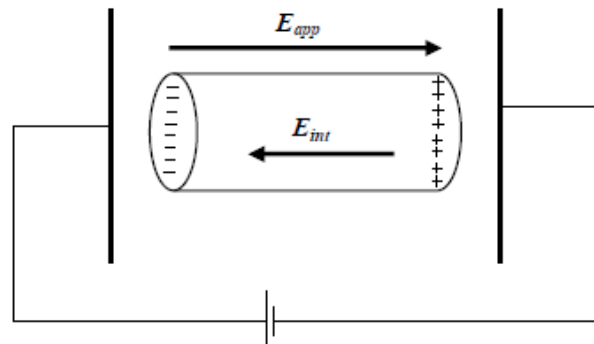
Considérons un conducteur cylindrique placé entre deux plaques métalliques soumises à une tension U . Le conducteur est en équilibre électrostatique, c'est-à-dire qu'il ne touche pas les deux électrodes. Autrement, les charges seront mises en mouvement et naîtra un courant. Le conducteur n'est plus en équilibre électrostatique.



pas de champ appliqué

$$E_{int} = 0$$

Figure



Figure

$$E_r = E_{app} - E_{int} = 0$$

E_{app} : champ appliqué externe;

E_{int} : champ interne créée par la nouvelle répartition de charges ;

E_r : champ résultant

Dans un conducteur les électrons sont libres de mouvement. Dès qu'on applique un champ électrique, les électrons se déplacent sous l'action de ce champ, il en résulte une nouvelle distribution de charges qui donne naissance à un champ interne qui annule le champ appliqué.

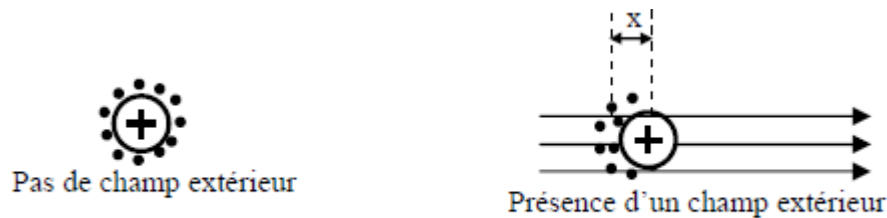
Conclusion : le champ électrique dans un conducteur en équilibre est nul.

2. Isolant (diélectrique) :

Polarisation électrique :

Dans un atome, les centres de gravité du noyau et des électrons coïncident, par conséquent le moment dipolaire moyen de l'atome est nul (Figure). Par contre après l'application d'un champ électrique externe, le centre de gravité des électrons est déplacé d'une certaine distance x par rapport au noyau : l'atome est alors polarisé et devient un dipôle électrique de moment p (Figure). Dans chaque atome est créé un champ E_p de sens opposé au champ appliqué.

Les molécules peuvent avoir un moment dipolaire permanent, de telles molécules sont dites polaires.



Figure

Les électrons dans l'isolant sont liés aux atomes. Quand on applique un champ électrique, les électrons ne se libèrent pas mais sont légèrement déplacés par rapport au centre de gravité de l'atome, c'est la polarisation.

E_p est appelé champ de polarisation ($E_p \ll E$)

$E_r = E_{app} - \sum E_p$ diminue légèrement mais ne s'annule pas.

Conclusion

Le champ électrique passe à travers un isolant et s'annule dans le conducteur.

Dans le vide $E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$

Dans un diélectrique matériel : $E = \frac{q}{4\pi\epsilon_r\epsilon_0 r^2}$

La polarisation fait diminuer E dans le diélectrique matériel car $\epsilon = \epsilon_r\epsilon_0 > \epsilon_0$

$\epsilon_r = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} > 1$: permittivité relative ; ϵ permittivité du verre.

FORMULAIRE D'ELECTROSTATIQUE

- Charges :

Ponctuelles : Q [C] ; linéiques : λ [C/m]

Surfaciques : σ [C/m²] ; volumiques : ρ [C/m³]

- Champs : D Déplacement ou Induction électrique [C/m²]

E Champ électrique [V/m].

$$D = \epsilon E$$

- Loi de Coulomb :

$$F = qE$$

Charge ponctuelle : $E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{u}$ et $V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$

- Lois de base :

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho \quad \text{ou} \quad \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0 \quad \text{ou} \quad \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

- Potentiel :

$$V = -\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} ; \quad dV = -\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} ; \quad \mathbf{E} = -\operatorname{grad} V = -\frac{\partial V}{\partial x} \mathbf{u}_x - \frac{\partial V}{\partial y} \mathbf{u}_y - \frac{\partial V}{\partial z} \mathbf{u}_z$$

- Tension :

$$U_{AB} = V_A - V_B = \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

- Travail :

$$W_{BA} = q U_{AB}$$

- Capacité :

$$C = \frac{q}{U}$$

- Densité d'énergie électrique : $w = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$.

Chapitre II : Magnétostatique

- Une charge électrique immobile crée un champ électrique seulement;
- Une charge en mouvement (un courant) crée un champ électrique et un champ magnétique.

Définition : la magnétostatique est l'étude des phénomènes magnétiques statiques, générés par des courants constants uniquement (courant continu).

I. Loi d'ampère

Le physicien danois Hans C. Oersted (1777 – 1851), en remarquant la déviation d'une boussole placée près d'un conducteur traversé par un courant, fut le premier à observer le magnétisme créé par un courant électrique.

Conducteur rectiligne :

$$\mathbf{H} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{I d\mathbf{l} \wedge \mathbf{u}_r}{4\pi r^2} ;$$

\mathbf{H} : champ magnétique

$r = OP$; \mathbf{u}_r : vecteur unitaire de r

$$\mathbf{B} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu_0 I d\mathbf{l} \wedge \mathbf{u}_r}{4\pi r^2}$$

\mathbf{B} : Induction magnétique

Remarque : La loi d'Ampère est valable si l'on suppose que le conducteur est infiniment long, donc les bornes de l'intégrale sont de $-\infty$ à $+\infty$.

Conducteur fermé :

$$\mathbf{B} = \oint \frac{\mu_0 I d\mathbf{l} \wedge \mathbf{u}_r}{4\pi r^2}$$



Figure : Courant circulaire

Avec

μ_0 perméabilité magnétique (vide, air...) : $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m}$

$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$

Unités :

$[B] = \text{Tesla } T$; $[A] = \text{A/m}$

Cas d'un courant volumique :

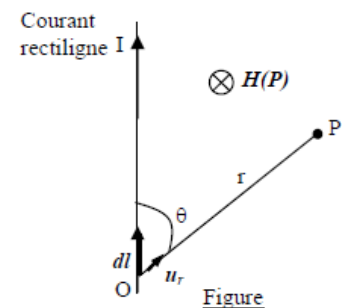
J densité de courant (A/m) ;

$J = I / S$

soit $I = J S$

ou bien plus généralement :

$$I = \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} \Rightarrow Idl = \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} dl = J S dl = J dV$$



Figure

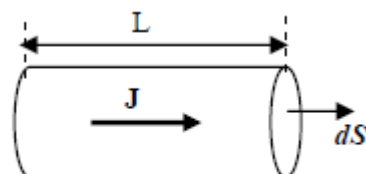


Figure : Conducteur volumique

Le champ magnétique d'un courant cylindrique (volumique) est donné par :

$$\mathbf{H} = \int \frac{\mathbf{J} \wedge \mathbf{u}_r}{4\pi r^2} dv$$

soit donc : $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} = \mu_0 \int \frac{\mathbf{J} \wedge \mathbf{u}_r}{4\pi r^2} dv$

Loi de Biot savart :

Tout élément de circuit de longueur, parcouru par un courant crée, à son voisinage, un champ élémentaire donné par la formule de Biot et Savart

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{l} \wedge \vec{u}}{r^2}$$

Exercice 01 : (Champ magnétique créée par un courant rectiligne)

Calculer le champ magnétique produit par un fil rectiligne vertical parcouru par un courant I.

Solution :

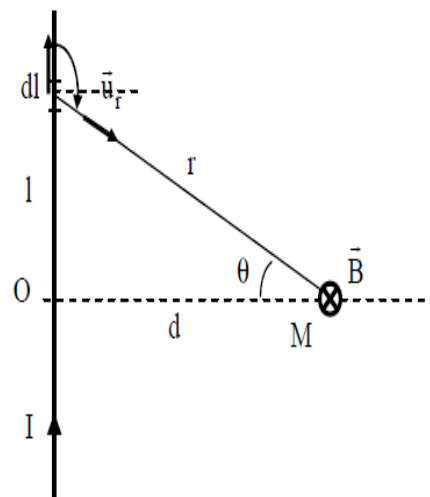
Soit un segment de longueur dl à la distance l du point O.

L'élément de courant $I d\vec{l}$ ($d\vec{l}$ orienté dans le sens du courant I) crée un champ magnétique élémentaire $d\vec{B}$.

Ce champ magnétique élémentaire au point M à la distance r a pour expression (loi de Biot-Savart) $d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \wedge \vec{u}_r}{r^2}$

Les caractéristiques du vecteur $d\vec{B}$ sont :

- direction : \perp à $I d\vec{l}$ et \vec{u}_r
- sens : règle des 3 doigts main droite
- norme : $dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dl \sin(I d\vec{l}, \vec{u}_r)}{r^2}$



L'angle que forment les vecteurs $I d\vec{l}$ et \vec{u}_r est égale à $\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$

$$\sin(I d\vec{l}, \vec{u}_r) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \cos \theta$$

$$\text{donc } dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dl \cos \theta}{r^2}$$

Le vecteur champ est perpendiculaire au plan de la feuille et « rentrant » (Symbole \otimes)

Le champ magnétique créé par le fil est la somme des champs élémentaires créés par chaque élément de courant $I d\vec{l}$

$$\mathbf{B} = \int d\mathbf{B}$$

Pour sommer l'ensemble des éléments de courant $I d\vec{l}$, on choisit comme variable d'intégration l'angle $\theta = (\overrightarrow{OM}, \vec{r})$

On fera varier θ de $\frac{-\pi}{2}$ à $\frac{+\pi}{2}$

Il s'agit d'exprimer dl et r en fonction de θ .

- $\cos \theta = \frac{d}{r} \Rightarrow r = \frac{d}{\cos \theta}$
- $\tan \theta = \frac{l}{d} \Rightarrow l = d \cdot \tan \theta \Rightarrow \frac{dl}{d\theta} = \frac{d}{\cos^2 \theta} \Rightarrow dl = \frac{d}{\cos^2 \theta} d\theta$

On remplace dl et r dans l'expression de $d\vec{B}$

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{\left(\frac{d}{\cos \theta}\right)^2} \frac{d}{\cos^2 \theta} \cos \theta d\theta = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{d} \cos \theta d\theta$$

$$B = \int d\vec{B} = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{d} \cos \theta d\theta = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{d} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos \theta d\theta = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{d} [\sin \theta]_{-\pi/2}^{+\pi/2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{d} 2 \Rightarrow \boxed{B = \frac{\mu_0}{2\pi d} I}$$

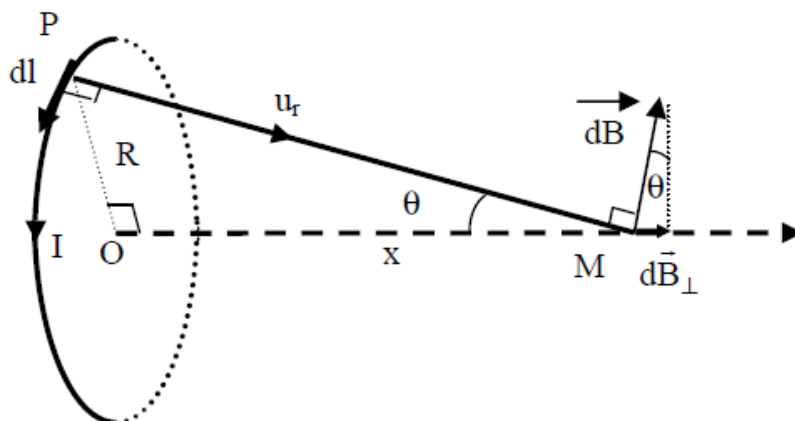
Exercice02 : (Champ magnétique crée par une spire)

Soit une spire circulaire de rayon $\ll R \gg$ traversée par un courant I .

Déterminer le champ magnétique dans un point M siue sur l'axe de la spire.

Solution :

L'élément de courant $I d\vec{l}$ crée un champ magnétique élémentaire $d\vec{B}$



Les caractéristiques du vecteur $d\vec{B}$ sont :

- direction : \perp à $I d\vec{l}$ et \vec{u}_r
- sens : règle des 3 doigts main droite
- norme : $dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dl \sin(\vec{I d\vec{l}}, \vec{u}_r)}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dl \sin(\pi/2)}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dl}{r^2}$

Il existe pour chaque élément de courant $I \cdot d\vec{l}$ son symétrique par rapport à O. Par conséquent, les composantes parallèles au plan de la spire s'annulent deux à deux. Le champ magnétique résultant aura donc une direction perpendiculaire au plan de la spire.

$$B = \int dB_{\perp} = \int dB \cdot \sin \theta = \int \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \cdot dl}{r^2} \sin \theta$$

Lorsqu'on somme l'ensemble des segments dl qui constitue la spire, r et θ restent constant.

$$\Rightarrow B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \cdot dl}{r^2} \sin \theta \int dl = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{r^2} \sin \theta [2\pi R]$$

$$\left| \begin{array}{l} \sin \theta = \frac{R}{r} \\ r^2 = x^2 + R^2 \end{array} \right. \Rightarrow B = \frac{\mu_0}{2} R \frac{I}{r^2} \frac{R}{r} = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{r^3} = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(x^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Le champ magnétique créé par une spire circulaire de rayon R à la distance x de l'axe de la spire a pour expression :

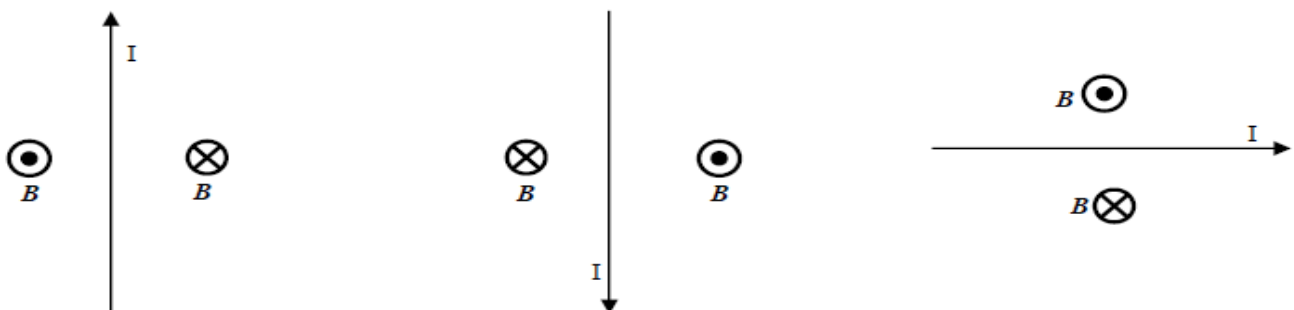
$$B = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(x^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}}$$

En particulier, au centre de la spire ($x = 0$) :

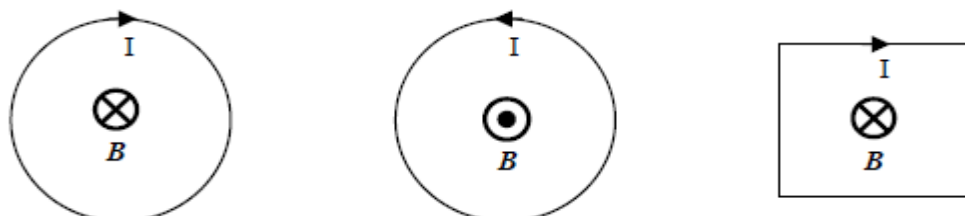
$$B = \frac{\mu_0 I}{2 R}$$

II. Direction du champ magnétique (Règle de la main droite)

a) Fil rectiligne : (Règle de la main droite)



b) Spire : (Règle du tournevis)



III. Potentiel magnétique

Comme q est un scalaire, qui produit un potentiel électrique scalaire V ;

Par analogie avec l'électrostatique :

L'élément $d\mathbf{l}$ est un vecteur, produit un potentiel magnétique vectoriel \mathbf{A} .

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$$

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}}{r} dV$$

qui représente l'expression du potentiel \mathbf{A} .

Exercice :

a/ montrez que $\text{grad}(1/r) = -\mathbf{u}_r/r^2$

b/ déduire à partir de H l'expression de \mathbf{A}

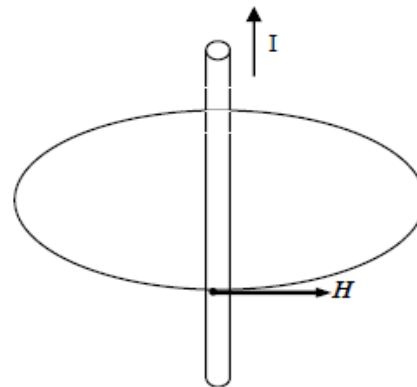
IV. Théorème d'Ampère

1. Théorème d'Ampère :

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = ?$$

$$\mathbf{H} = \frac{I}{2\pi r} \mathbf{u}$$

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \oint \frac{I}{2\pi r} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l}$$



Figure

Rappel :

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{u}_x = (A_x \mathbf{u}_x + A_y \mathbf{u}_y + A_z \mathbf{u}_z) \cdot \mathbf{u}_x = A_x$$

soit donc, la composante de \mathbf{A} suivant l'axe des x . Par analogie : $d\mathbf{l} \cdot \mathbf{u} = dl'$ est la composante de $d\mathbf{l}$ suivant \mathbf{u} .

Comme par ailleurs, $\mathbf{u} \perp \mathbf{u}_r$, soit $\mathbf{u} \perp \mathbf{r}$, donc aussi $dl' \perp r$;

dl' représente donc un arc de cercle de rayon $r \Rightarrow dl' = r d\theta$

Par conséquent :

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \oint H dl = \frac{I}{2\pi} \oint \frac{r d\theta}{r} = \frac{I}{2\pi} \oint d\theta = \frac{I}{2\pi} \theta \Big|_0^{2\pi} = I$$

$$\text{Donc } \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I$$

qui représente le théorème d'Ampère.

Remarque importante : I est un courant circulant à l'intérieur du contour fermé.

Théorème : La circulation de \mathbf{B} le long d'une courbe C quelconque, orientée et fermée, appelée contour d'Ampère, est égale à μ_0 fois la somme algébrique des courants qui traversent la surface délimitée par C :

$$\oint \vec{B} \times d\vec{l} = \mu_0 I$$

2. Forme différentielle :

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I \text{ est la forme intégrale du théorème d'Ampère.}$$

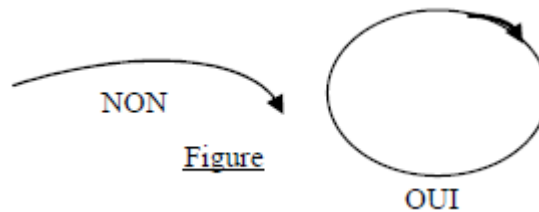
Comme $\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \text{rot} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S}$

et que $I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$,

On peut écrire : $\int_S \text{rot} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S} = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$

Soit donc : $\boxed{\text{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J}}$ qui représente la forme différentielle du théorème d'Ampère.

Conclusion : $\text{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J}$ implique que le champ magnétique est rotationnel, c'est à dire que les lignes de champ sont fermées, contrairement aux lignes de champ électrique.



Remarque :

- Les lignes de champ magnétique sont des courbes fermées car contrairement au champ électrique qui a pour source des charges électriques (part de la charge positive et arrive à la charge négative), il n'y a pas de charges magnétiques.

Exercice 03 :

Déterminer le champ magnétique \mathbf{H} à l'intérieur et à l'extérieur d'un conducteur cylindrique plein traversé par un courant I , de densité uniforme J .

Solution :

Le conducteur considéré présente une symétrie cylindrique, cela nous autorise à appliquer le théorème d'Ampère.

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I$$

Traçons un cercle de rayon r passant par le point M (Figure 11).

Remarque importante : De la même façon que le théorème de Gauss en électrostatique impose de ne prendre que la charge située à l'intérieur de la surface fermée choisie, le courant I dans le théorème d'Ampère ne représente que la partie circulant à l'intérieur du contour choisi.

L'application du théorème d'Ampère donne :

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = H \oint dl$$

car par raison de symétrie, le champ magnétique sur la périphérie du cercle reste constant.

Champ H_m au point m : $r < a$

$$H_m \oint dl = H_m \cdot 2\pi r = I_m$$

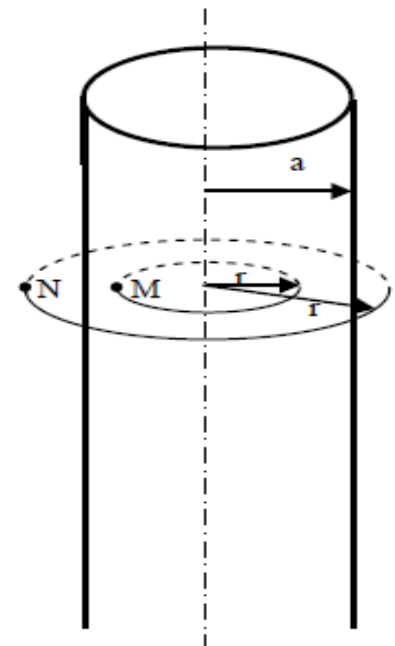


Figure 11

Dans ce cas le courant I_m à considérer passant à travers le cercle de rayon r

Sachant que :

$$J = \frac{I}{S} = \frac{I}{\pi(a^2)}$$

On obtient :

$$I_m = J.S_m = J.\pi(r^2) = \frac{I}{\pi(a^2)}\pi(r^2) = I \frac{(r^2)}{(a^2)}$$

soit,

$$H_m = \frac{I_m}{2\pi r} = \frac{I}{2\pi} \frac{(r)}{(a^2)}$$

Champ H_n au point p : $r > a$

En traçant un cercle de rayon r passant par le point n et en appliquant le théorème d'Ampère nous avons :

$$H_n = \frac{I_n}{2\pi r}$$

Il est facile de voir dans ce cas que le courant I_n passant à travers ce cercle n'est autre que le courant total I .

Soit donc,

$$H_n = \frac{I}{2\pi r}$$

Exercice 04:

On considère une bobine torique de n spires traversée par un courant statique I . Déterminer le sens, la direction et la valeur du champ magnétique créée à l'intérieur de la bobine.

Solution :

Le champ étant perpendiculaire aux spires, c'est donc un cercle passant par le centre de chaque spire, dont le centre coïncide avec celui de la bobine.

$$\oint H dl = nI \Rightarrow$$

$$H \oint dl = H 2\pi r = HL = nI \quad \text{avec } L = 2\pi r$$

$$\text{d'où } H = \frac{nI}{L}$$

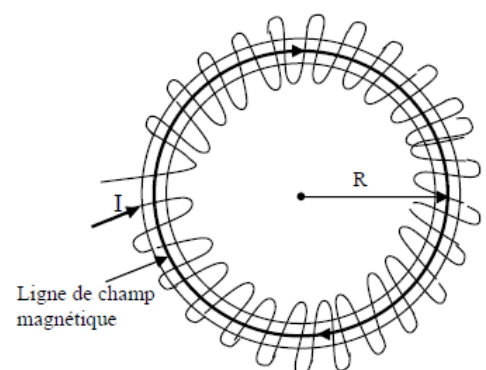
IV. Flux magnétique

$$\Phi_m = \int B \cdot dS ;$$

Unité : $[\Phi_m] = \text{Weber } Wb ;$

a) Surface non fermée

Flux: représente la quantité de lignes de champ passant à travers la surface.



Figure

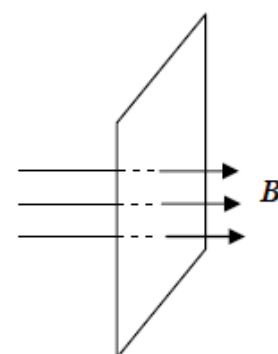


Figure : Surface non fermée

b) Surface fermée

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int \text{div} \mathbf{B} dV = \int \text{div}(\text{rot} \mathbf{A}) dV = 0 ; \text{ car } \mathbf{B} = \text{rot} \mathbf{A}$$

$$\boxed{\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0}$$

Forme différentielle :

$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$ est la forme intégrale de cette loi.

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int \text{div} \mathbf{B} dv = 0 \Rightarrow \text{div} \mathbf{B} = 0$$

$$\boxed{\text{div} \mathbf{B} = 0}$$

est la forme différentielle.

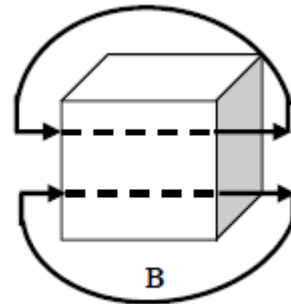


Figure : Surface fermée

V. Force magnétique

1. Force de Lorentz :

Une charge électrique animée d'une vitesse v et placée dans un champ électrique et magnétique, subit la force suivante :

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}) ;$$

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \wedge \mathbf{B} = \mathbf{F}_e + \mathbf{F}_m$$

avec :

$\mathbf{F}_e = q\mathbf{E}$ est la Force électrique;

Si $q = 0 \Rightarrow \mathbf{F}_e = 0$

La force électrique s'annule si la charge est nulle.

$\mathbf{F}_m = q(\mathbf{v} \wedge \mathbf{B})$ est la Force magnétique.

La force magnétique s'annule si la charge est nulle ou immobile.

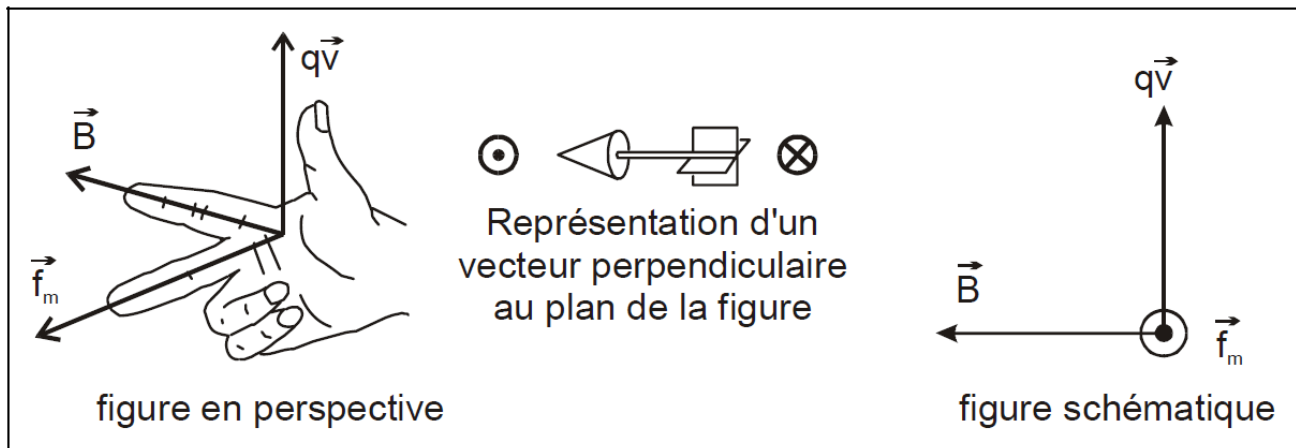
L'induction magnétique n'exerce de force que sur une particule chargée en mouvement (ou un courant).

Conclusion:

La force magnétique n'agit que sur une charge en mouvement, ou un conducteur traversé par un courant.

b) Caractéristiques de la force de Lorentz

- **direction** : perpendiculaire à $q\vec{v}$ et à \vec{B} , donc au plan formé par $q\vec{v}$ et \vec{B}
- **sens** : déterminé par la *règle des trois doigts de la main droite*



2. Force de Laplace :

Considérons un conducteur cylindrique traversé par un courant I .

Soient :

n' : nombre de particules chargées traversant le conducteur;

e : charge élémentaire d'une particule.

La charge traversant le conducteur vaut alors :

$$q = n'e$$

En posant $n = \frac{n'}{V}$

n : nombre de particules/unité de volume ;

V : volume du conducteur.

On obtient :

$$I = \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt}(n'e) = \frac{d}{dt}(neV) = ne \frac{dV}{dt} = neS \frac{dl}{dt} = neSv ;$$

avec

v : vitesse de déplacement des particules.

Par conséquent :

$$J = \frac{I}{S} = \frac{neSv}{S} = nev \Rightarrow J = nev$$

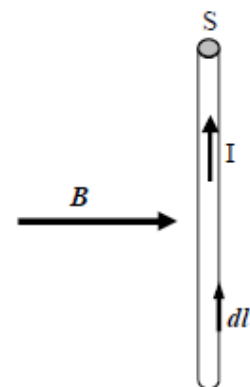
Cette égalité est également valable en notation vectorielle :

$$\boxed{J = nev}$$

D'un autre cote, en reportant dans la loi de Lorentz la charge par unité de volume $q = ne$, on obtient :

$$\vec{F}_m = q(\vec{v} \wedge \vec{B}) = nev \wedge \vec{B} = \vec{J} \wedge \vec{B}$$

Pour un volume élémentaire dV :



Figure

$$d\mathbf{F}_m = (\mathbf{J} \wedge \mathbf{B}) dV$$

pour tout le volume V :

$$\mathbf{F}_m = \int (\mathbf{J} \wedge \mathbf{B}) dV = \int (\mathbf{J} dV \wedge \mathbf{B})$$

Comme $\mathbf{J} dV = I d\mathbf{l}$, on aboutit à l'expression de la *Force de Laplace* :

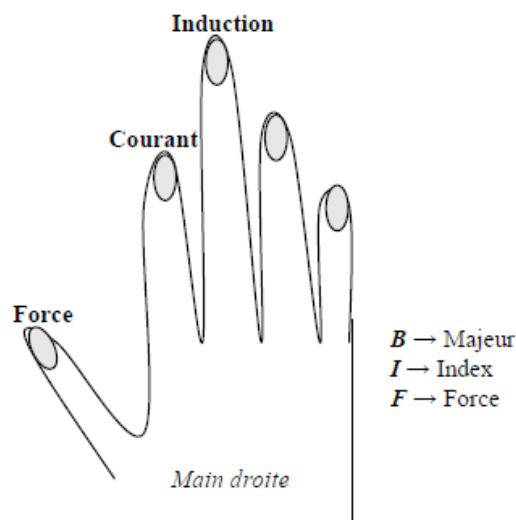
$$\mathbf{F}_m = \int I d\mathbf{l} \wedge \mathbf{B}$$

Remarque :

Si $I = 0 \Rightarrow \mathbf{F}_m = 0$

La force magnétique n'agit donc que sur un conducteur traverse par un courant.

Remarque : Le sens de la force est déterminé grâce à la règle de la main droite :



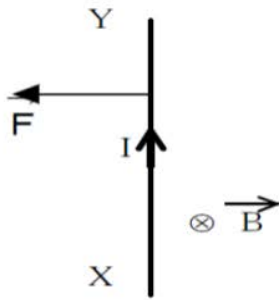
Figure

Exercice 05 :

Un conducteur XY, parcouru par un courant d'intensité I est placé dans un champ magnétique B uniforme.

1- Dans chacun des cas suivants, représenter la force électromagnétique qui s'exerce sur le conducteur et calculer l'intensité de cette force. Données : $I = 1 \text{ A}$; $XY = 10 \text{ cm}$; $B = 10^{-4} \text{ T}$.

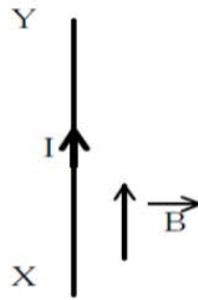
Solution :



$$F = I \times L \times B \times \sin(L, B)$$

$$F = 1 \times 0,10 \times 10^{-4} \times \sin(90)$$

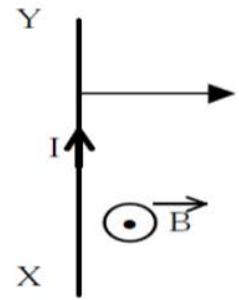
$$F = 10^{-5} \text{ N}$$



$$F = I \times L \times B \times \sin(L, B)$$

$$F = 1 \times 0,10 \times 10^{-4} \times \sin(0)$$

$$F = 0 \text{ N}$$



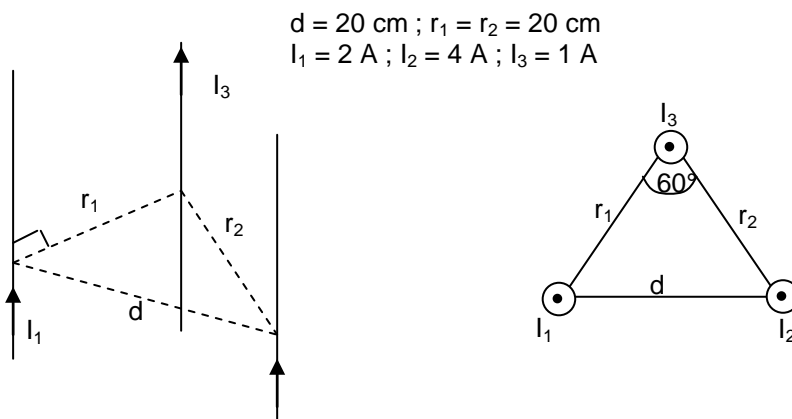
$$F = I \times L \times B \times \sin(L, B)$$

$$F = 1 \times 0,10 \times 10^{-4} \times \sin(90)$$

$$F = 10^{-5} \text{ N}$$

Exercice 06 :

On considère trois (03) conducteurs identiques et parallèles traversés par des courants I_1 , I_2 et I_3 (Figure). Calculer et représenter la force magnétique par unité de longueur exercée sur le conducteur 3.



Solution :

Déterminons tout d'abord l'induction résultante appliquée sur le conducteur 3.

En géométrie, la tangente au cercle est perpendiculaire à son rayon. Par conséquent, l'induction B_1 est perpendiculaire à r_1 , de même que l'induction B_2 est perpendiculaire à r_2 (Figure 18).

Sachant que les 3 conducteurs forment un triangle isocèle, il est facile de montrer que l'angle formé entre B_1 et B_2 vaut 60° .

Calculons les inductions produites par I_1 et I_2 sur le conducteur 3 :

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r_1} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 2}{2\pi \cdot 0,2} = 2 \cdot 10^{-6} \text{ T}$$

$$B_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi r_2} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 4}{2\pi \cdot 0,2} = 4 \cdot 10^{-6} \text{ T}$$

L'induction résultante appliquée sur le conducteur 3 est alors :

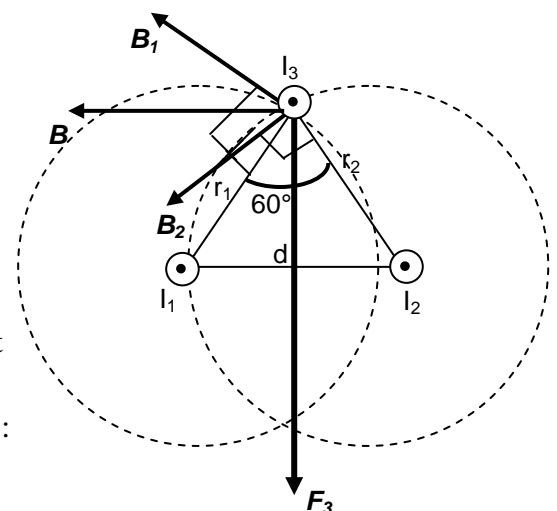


Figure 19

$$B^2 = B_1^2 + B_2^2 + 2.B_1.B_2 \cos 60^\circ = (2.10^{-6})^2 + (4.10^{-6})^2 + 2.2.10^{-6}.4.10^{-6}.0.5 \text{ soit}$$

$$B = 4,9.10^{-6} \text{ T.}$$

Utilisons la loi de Laplace pour déterminer la force F_3 sur le conducteur 3

$$F = \int I_3 . dl \wedge B$$

Puisque l'induction B est perpendiculaire au conducteur 3, la force F_3 par unité de longueur :

$$F_3 = I_3 B = 1. 4,9.10^{-6} = 4,9.10^{-6} \text{ N/m.}$$

Le sens de la force F_3 est montré sur la figure, il est déterminé à l'aide de la règle de la main droite.

VII. Energie magnétique W_m

Par analogie avec l'électrostatique où la densité de l'énergie électrostatique $w_e = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$,

$$W_m = \frac{1}{2} \mu_0 H^2 V \text{ [J]}, \text{ est l'énergie totale emmagasinée dans le champ magnétique } H.$$

$$w_m = \frac{1}{2} \mu_0 H^2 \text{ [J/m}^3\text{]} \text{ est la densité d'énergie magnétique.}$$

VIII. RESUME DES LOIS DU REGIME STATIONNAIRE

1. Théorème de Gauss

$$\oint E . dS = \frac{q}{\epsilon_0} ; \quad \text{div} E = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$2. \oint E . dl = 0 ; \quad \text{rot} E = 0$$

3. Théorème d'Ampère

$$\oint H . dl = I ; \quad \text{rot} H = J$$

4. Théorème du Flux Magnétique

$$\oint B . dS = 0 ; \quad \text{div} B = 0$$

ANALOGIE ENTRE L'ELECTROSTATIQUE ET LA MAGNETOSTATIQUE

ELECTROSTATIQUE

Loi de Coulomb (champ électrique)

$$q \rightarrow E = \frac{q}{4\pi\epsilon r^2} u$$

Déplacement électrique

$$D = \epsilon E$$

Potentiel électrique

MAGNETOSTATIQUE

Loi de Biot & Savart (champ magnétique)

$$Idl \rightarrow H = \oint \frac{Idl \wedge u_r}{4\pi r^2}$$

Induction magnétique

$$B = \mu H$$

Potentiel magnétique

$V = \frac{q}{4\pi\epsilon r}$	$A = \frac{\mu}{4\pi} \int \frac{J}{r} dv$
$E = -\text{grad}V$	$B = \text{rot}A$
$\oint E \cdot dl = 0$	$\oint H \cdot dl = I$
$\text{rot}E = 0$	$\text{rot}H = J$
$\oint E \cdot dS = \frac{q}{\epsilon}$	$\oint B \cdot dS = 0$
$\text{div}E = \frac{\rho_v}{\epsilon}$	$\text{div}B = 0$
$w_e = \frac{1}{2} \epsilon E^2$	$w_m = \frac{1}{2} \mu H^2$
$E = 0$ dans un conducteur	$H \neq 0$ dans le conducteur

CHAPITRE III

PHENOMENES DEPENDANT DU TEMPS

(Régime quasi-stationnaire)

Le Régime Quasi-Stationnaire ne concerne que les phénomènes variant avec le temps.

Exemple :

$$i = i_0 \sin \omega t = i_0 \sin 2\pi f t$$

$$E = E_0 e^{j\omega t} = E_0 e^{j2\pi f t}$$

I. Loi de Faraday

Loi de Faraday : Quand un flux magnétique variable traverse un circuit conducteur fermé, il génère (crée) un courant induit (ou une f.e.m) dans le conducteur. C'est le principe des générateurs.

Remarque : le fonctionnement des générateurs d'électricité (générateurs à courant continu, alternateurs) est basé sur le principe de la loi de Faraday.

1) Induction B variable :

Supposons I variable [$I = I_0 \sin(\omega t)$] par exemple].

L'induction B au point quelconque M est :

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} = \frac{\mu_0 I_0 \sin(\omega t)}{2\pi x}$$

Comme l'induction est variable, le flux $\Phi = \int B \cdot dS$ est également variable et génère un courant induit i dans la spire.

$$i = e/R \text{ [A];}$$

R : résistance de la spire [Ω];

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} : \text{Force électromotrice (f.e.m) induite [Volt]}$$

Loi de Faraday : $e = -\frac{d\Phi}{dt}$

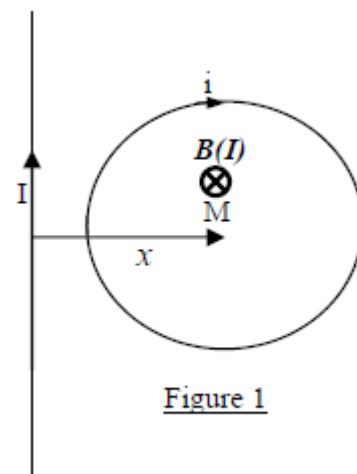


Figure 1

Remarque : e est appelée f.e.m et non tension, car en électricité la tension apparaît entre deux points différents. On ne peut pas parler de Tension dans une spire fermée.

2) Induction B constante :

- Si le courant I est constant, alors l'induction B est constante :

$$B(I) = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} ; \Phi = \int B \cdot dS$$

$\Phi = 0$ et donc pas de courant induit ($e = 0 ; i = 0$)

- Si le courant I constant, mais la spire se déplace à une vitesse v :

En se déplaçant, puisque la spire s'éloigne du courant I l'induction B diminue est donc variable. Le flux magnétique qui devient variable induit un courant i dans la spire.

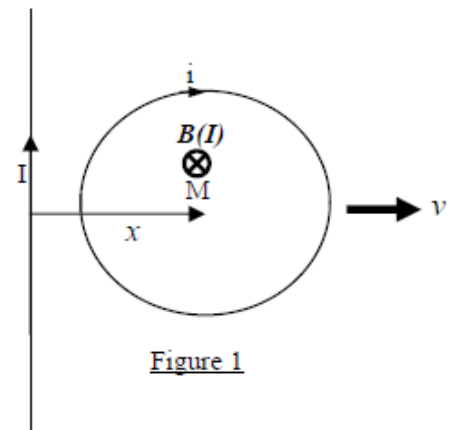


Figure 1

Exercice 1

Un cadre plan comportant N spires, chacune de surface S , est placé devant un fil rectiligne traversé par un courant variable $I = I_0 \sin(\omega t)$. Calculer le courant induit dans le cadre.

Solution :

$$\phi = \int B \cdot dS = \int B \, dS$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} = \frac{\mu_0 I_0 \sin \omega t}{2\pi x}$$

Le flux traversant le cadre est :

$$\Phi = \int B \cdot dS = \int \frac{\mu_0 I}{2\pi x} b \, dx = \frac{\mu_0 I b}{2\pi} \int_x^{x+a} \frac{dx}{x} = \frac{\mu_0 I b}{2\pi} \ln \frac{x+a}{x}$$

$$\text{Pour } N \text{ spires : } \Phi = N \frac{\mu_0 I b}{2\pi} \ln \frac{x+a}{x}$$

La f.e.m induite dans le cadre est :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \left(N \frac{\mu_0 I b}{2\pi} \ln \frac{x+a}{x} \right) = -N \frac{\mu_0 b}{2\pi} \ln \frac{x+a}{x} \frac{dI}{dt} = -N \frac{\mu_0 b}{2\pi} \ln \frac{x+a}{x} I_0 \omega \cos \omega t$$

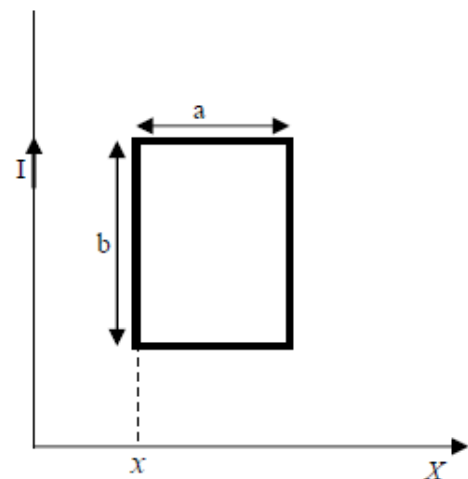
$$i_1 = \frac{e}{R} = -N \frac{\mu_0 b I_0 \omega}{2\pi R} \ln \frac{x+a}{x} \cos \omega t$$

Exercice 2

Le même cadre est placé devant un courant I constant, mais se déplaçant vers la droite avec une vitesse constante v . Déterminer le courant induit dans le cadre.

Solution :

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} ; dS = b \, dx$$



Remarque : $dS = dx \cdot dy$, mais comme l'induction B varie seulement suivant x , on pose $dS = b \, dx$.

Le flux traversant le cadre est :

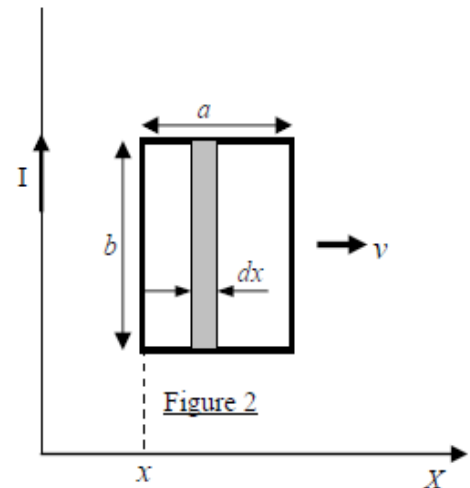
$$\Phi = N \int B \cdot dS = N \int \frac{\mu_0 I}{2\pi x} b \, dx = N \frac{\mu_0 I b}{2\pi} \int_x^{x+a} \frac{dx}{x} = N \frac{\mu_0 I b}{2\pi} \ln \frac{x+a}{x}$$

La f.e.m est donnée par :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d\Phi}{dx} \frac{dx}{dt} = -v \frac{d\Phi}{dx}$$

$$\frac{d\Phi}{dx} = N \frac{\mu_0 I b}{2\pi} \left(\frac{1}{x+a} - \frac{1}{x} \right) = -N \frac{\mu_0 I b a}{2\pi x(x+a)}$$

$$e = N \frac{\mu_0 I b a v}{2\pi x(x+a)} \quad i_2 = \frac{e}{R} = N \frac{\mu_0 I b a v}{2\pi x(x+a)R}$$



Exercice 3

Le même cadre est placé devant un fil rectiligne traversé par un courant variable qui se déplace vers la droite avec une vitesse v constante. Calculer le courant induit dans le cadre.

Solution :

$$i = i_1 + i_2 = -N \frac{\mu_0 b I_0 \omega}{2\pi R} \ln \frac{x+a}{x} \cos \omega t + N \frac{\mu_0 I b a v}{2\pi x(x+a)R}$$

Exemples de la loi de Faraday :

- L'énergie électrique dans les centrales est produite par. Dans les alternateurs, la tension est produite suivant le principe de la loi de Faraday. Le principe est de placer les conducteurs dans un flux magnétique variable.
- Le transformateur ne fonctionne qu'en courant alternatif car pour induire un courant dans l'enroulement secondaire il faut un flux variable.
- Les noyaux de fer utilisés dans les machines à courant alternatif sont constitués de tôles isolées les unes des autres. En effet, le flux étant variable il induit un courant dans le noyau lui-même (courant de Foucault). L'isolant entre les tôles sert à augmenter la résistance pour atténuer le courant. Par contre, les noyaux des machines à courant continu sont des masses compactes, car il n'y a pas de courant induit dans ce cas.
- La foudre peut détériorer des équipements situés à plusieurs km du point d'impact. En effet, le champ magnétique généré par la foudre se propage et induit dans les installations des surtensions pouvant endommager les appareils fragiles.

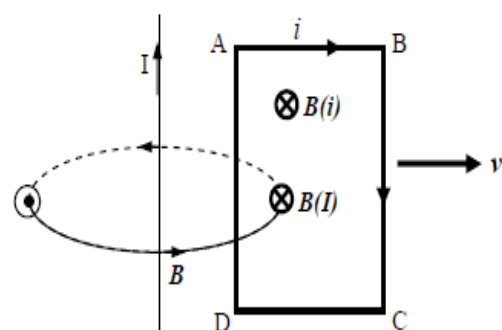
II. LOI DE LENZ : (signification du signe "moins")

Loi de Lenz : "L'induction magnétique propre du courant induit s'oppose à la variation du flux principal".

Exemple : soit un cadre qui se déplace vers la droite à une vitesse v constante. Déterminer le sens de circulation du courant induit dans ce cadre.

L'induction principale $B(I)$ a un sens entrant dans le cadre.

En s'éloignant du courant I le flux qui traverse le cadre diminue (variation = diminution de Φ).



Loi de Lenz : L'induction propre $B(i)$ du courant induit s'oppose à cette variation (diminution de Φ) et aura le même sens que l'induction principale $B(I)$ pour augmenter le flux (car l'induction résultante dans le cadre augmente $B_r = B(I) + B(i)$).

Résultat : puisque $B(i)$ a un sens entrant, le courant i circule dans le sens ABCD (Règle du tire-bouchon).

Remarque : Si le cadre se déplace vers le courant le flux cette fois ci augmente.

Loi de Lenz : L'induction propre $B(i)$ du courant induit s'oppose à cette variation (augmentation de Φ) et aura le sens opposé à l'induction principale $B(I)$ pour diminuer le flux (car l'induction résultante dans le cadre diminue $B_r = B(I) - B(i)$).

Résultat : puisque $B(i)$ a un sens sortant, le courant i circule dans le sens ADCB.

Exercice 4 : Soit une spire placée près d'un fil rectiligne traversé par un courant I (figure 4). Déterminer le sens du courant induit dans la spire dans chaque région du courant.

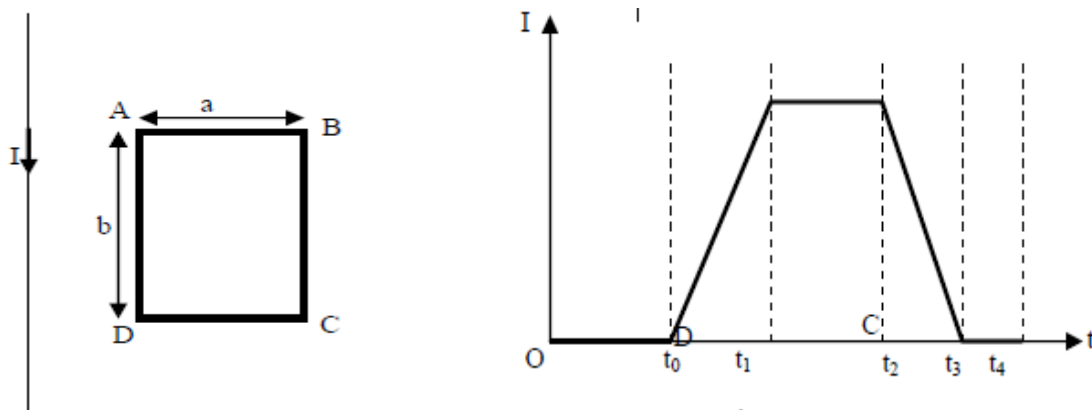


Figure 4

Solution :

L'induction principale $B(I)$ a un sens sortant.

a) entre 0 et t_0

$I=0 \Rightarrow B=0 \Rightarrow \Phi=0 \Rightarrow$ pas de courant induit $i=0$.

b) entre t_0 et t_1

I augmente $\Rightarrow B(I)$ augmente \Rightarrow augmentation de Φ .

Le courant induit i s'oppose à cette augmentation $\Rightarrow B(i)$ opposé à $B(I) \Rightarrow B(i)$ entrant, donc i circule dans le sens ABCD.

c) entre t_1 et t_2

I constant $\Rightarrow B$ constante $\Rightarrow \Phi$ constant \Rightarrow

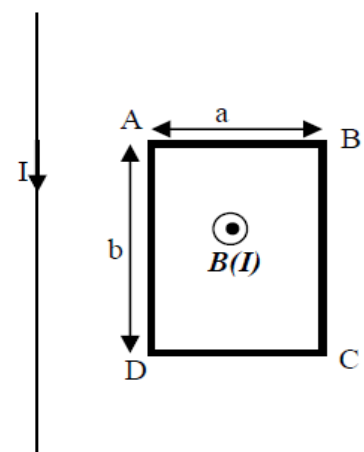
$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = 0 \Rightarrow i = 0.$$

d) entre t_2 et t_3

I diminue $\Rightarrow B$ diminue \Rightarrow diminution de Φ ;

Le courant induit i s'oppose à cette diminution \Rightarrow

$B(i)$ même sens que $B(I) \Rightarrow B(i)$ sortant, donc i circule dans le sens ADCB.



III. Formes intégrale et différentielle

1. Forme intégrale :

Rappel

- Conducteur rectiligne :

La différence de potentiel U entre deux points d'un conducteur rectiligne est donnée par l'expression suivante :

$$U = V_1 - V_2 = \int_{L_1}^{L_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (\text{voir chapitre 1})$$

- Spire non fermée :

La différence de potentiel d'une spire non fermée est :

$$U_{AB} = V_A - V_B = \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

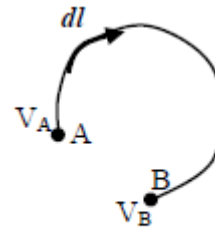


Figure 6

- Spire fermée :

$$U = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

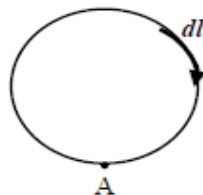


Figure 7

En conséquence, la loi de Faraday peut être mise sous la forme suivante :

$$e = -\frac{d\phi}{dt} = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

Comme $\phi = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \Rightarrow$

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

Remarque: S'il n'y a pas de f.e.m produite par la loi de Faraday, $U = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = V_A - V_A = 0$.. La tension dans une spire fermée est nulle. Pour cette raison, on ne dit pas tension induite dans une spire fermée, mais plutôt une f.e.m induite. En effet, la tension dans une spire fermée doit être obligatoirement nulle, sauf dans le cas d'un f.e.m induite par la loi de Faraday.

2. Forme différentielle :

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_S -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

L'intégrale fermée $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$ peut être transposée en une intégrale surfacique (voir rappel mathématique) :

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \text{rot} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$$

On obtient :

$$\int \text{rot} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

La forme différentielle de la loi de Faraday est donc :

$$\boxed{\text{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}}$$

Remarque : d'après cette équation on peut conclure qu'un champ magnétique variable ($\partial \mathbf{B} / \partial t$) crée un champ électrique \mathbf{E} . Ce champ électrique est à l'origine du courant induit. En effet, c'est ce champ qui produit déplacement des charges dans le conducteur et qui est à l'origine du courant induit.

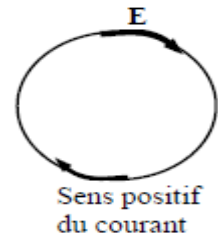


Figure 8

- Régime stationnaire: $\text{rot} \mathbf{E} = 0 \Rightarrow \mathbf{E}$ est non rotationnel. (le champ \mathbf{E} ne se referme pas)
- Régime dépendant du temps RQS : $\text{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \Rightarrow \mathbf{E}$ est rotationnel (le champ \mathbf{E} se referme).

Remarque :

C'est dans le cas seulement de la f.e.m induite par induction magnétique où l'on rencontre un champ électrique fermé.

IV. COMPARAISON ENTRE R.S et R.Q.S

R.S et R.Q.S :

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q}{\epsilon} ; \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I ; \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

RS seulement

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \text{ soit } \text{rot} \mathbf{E} = 0$$

$$\mathbf{E} = -\text{grad} V$$

R.Q.S seulement

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \text{ soit } \text{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \text{grad} V$$

CHAPITRE IV

REGIME VARIABLE (Equations de Maxwell)

I. Principe de conservation de la charge : (Régime variable)

Supposons une surface fermée comprenant une charge q à l'intérieur, et un courant I sortant.

Principe de conservation de la charge :

Courant sortant de $S \Leftrightarrow$ diminution de q dans S ;

$$\text{d'où } I = -\frac{dq}{dt} ;$$

$$\text{Comme } I = \oint \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} \Rightarrow \oint \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{dq}{dt}$$

$$\text{vu que (théorème de Gauss) } \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q}{\epsilon} \Rightarrow q = \epsilon \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$$

$$\text{donc } \oint \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{d}{dt} \left(\epsilon \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} \right)$$

$$\text{soit } \oint \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} + \oint \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

$$\text{ou bien } \oint \left(\mathbf{J} + \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S} = 0$$

Cette expression représente l'équation de conservation de la charge.

1. Forme intégrale

$$\oint \left(\mathbf{J} + \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S} = 0 \text{ est la forme intégrale de l'équation de conservation de la charge.}$$

2. Forme différentielle

L'intégrale de surface fermée $\oint \left(\mathbf{J} + \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S}$ peut être transposée en une intégrale de volume

$$\oint \left(\mathbf{J} + \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S} = \int_V \text{div} \left(\mathbf{J} + \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) dv = 0$$

$$\text{Par conséquent, } \text{div} \left(\mathbf{J} + \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) = 0$$

$$\text{ou bien autrement, sachant que } \text{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon} :$$

$$\text{div} \mathbf{J} + \epsilon \frac{\partial}{\partial t} (\text{div} \mathbf{E}) = 0 ;$$

$$\text{On déduit alors : } \text{div} \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

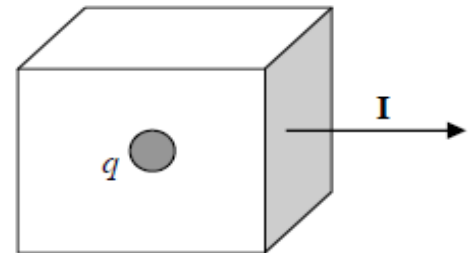


Figure 1 : Surface fermée S

Remarque :

Les termes $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ et $\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ ne sont considérés que dans le cas du régime variable, ils sont négligeables dans les autres régimes. C'est-à-dire que :

en RS et RQS : $\frac{\partial \rho}{\partial t} \approx 0$ et $\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \approx 0$ (négligeables)

Donc, l'équation de conservation de la charge dans ces cas devient : $\oint \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = 0$ ou $\text{div} \mathbf{J} = 0$

Remarque :

La conservation de la charge est respectée, car lorsqu'un électron sort par la borne négative, il prend la place d'un électron libre dans la matière qui relie les deux bornes (car les bornes doivent être reliées par un conducteur pour que le courant circule), l'électron ainsi chassé va voler à son tour la place d'un électron situé un peu plus proche de la borne positive, et ainsi de suite jusqu'à la borne positive, dans laquelle le dernier électron de la 'chaîne' va rentrer.

Donc, lorsqu'un électron sort de la borne négative, au même moment, un électron rentre dans la borne positive. La batterie ainsi que le conducteur ne se sont donc pas chargés, ils sont toujours neutres, bien que le courant circule !

II. LOI DE MAXWELL-AMPERE

D'après le théorème d'Ampère $\text{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J}$.

On peut écrire :

$$\text{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J} \Rightarrow \text{div}(\text{rot} \mathbf{H}) = \text{div} \mathbf{J}$$

Comme $\text{div} \text{rot} = 0$, on obtient :

$$\text{div} \mathbf{J} = 0$$

Mais en régime variable nous avons $\text{div} \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$ et non pas $\text{div} \mathbf{J} = 0$!

Par conséquent, le théorème d'Ampère $\text{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J}$ n'est plus valable dans le régime variable.

• Question : que devient le théorème d'Ampère dans ce cas ?

• Réponse :

Nous connaissons que (en R.S et R.Q.S) :

$$\text{div} \mathbf{J} = 0 \Leftrightarrow \text{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (1)$$

Par analogie en régime variable nous pouvons poser :

$$\text{div} \left(\mathbf{J} + \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) = 0 \Leftrightarrow \text{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J} + \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

Conclusion : Maxwell a transformé le théorème d'Ampère en régime variable et a ajouté le terme $\epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$

Le théorème d'Ampère devient dans ce cas : $\text{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J} + \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ (forme différentielle).

Forme intégrale :

$$\text{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J} + \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \Rightarrow \int_S \text{rot} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S} = \int_S \left(\mathbf{J} + \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S}$$

L'intégrale de surface $\int_S \text{rot} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S}$ peut être transposée en une intégrale linéique fermée :

$$\oint_S \text{rot} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S} = \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}$$

On arrive alors à l'expression différentielle suivante :

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \left(\mathbf{J} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S} \quad (\text{Forme intégrale})$$

III. EQUATIONS DE MAXWELL

Maxwell a établi quatre équations fondamentales de l'électromagnétisme et qui sont :

1. Equation de Maxwell-Gauss (M G) :

Forme intégrale : $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q}{\varepsilon}$

Le flux électrique passant à travers une surface fermée est égal au rapport $\frac{q}{\varepsilon}$.

Forme différentielle : $\text{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}$

C'est la charge électrique qui est à l'origine (source) du champ électrique.

2. Equation de Maxwell-flux magnétique (M Φ) :

Forme intégrale : $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$

Le flux magnétique passant à travers une surface fermée est nul.

Forme différentielle : $\text{div} \mathbf{B} = 0$

Par analogie avec l'équation MG, il n'existe pas de "charge magnétique" dans la nature.

3. Equation de Maxwell-Faraday (M F) :

Forme intégrale : $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$

Un conducteur traversé par un flux magnétique variable est le siège d'une f.e.m induite.

Forme différentielle : $\text{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$

Un champ magnétique variable crée un champ électrique variable.

4. Equation de Maxwell-Ampère (M A) :

Forme intégrale : $\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int \mathbf{J} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$

Forme différentielle : $\text{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$

Un champ électrique variable $\left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right)$ crée au même titre qu'un courant (J) un champ magnétique variable.

Remarques :

- Les équations de Maxwell sont valables dans les trois régimes.
- Pour obtenir les équations dans le régime stationnaire, il suffit de poser $\frac{\partial}{\partial t} = 0$

- Pour obtenir les équations dans le régime dépendant du temps (quasi-stationnaire), il suffit de poser : $\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \approx 0$ et $\frac{\partial \rho}{\partial t} \approx 0$.
- Les équations de MA et MF montrent que les champs \mathbf{E} et \mathbf{H} sont liés entre eux \Rightarrow C'est le champ électromagnétique.

Exercice

1. On considère dans le vide un champ électrique $\mathbf{E} = E_m \sin(\omega t - \beta z) \mathbf{u}_y$.
Déterminer le champ magnétique \mathbf{H} associé à \mathbf{E} .
2. On considère dans le vide un champ magnétique $\mathbf{H} = H_m \exp j(\omega t + \beta z) \mathbf{u}_x$.
Déterminer le champ électrique \mathbf{E} associé à \mathbf{H} .
3. Que peut-on conclure ?

Solution :

1) M.A : $\text{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$

$$\text{rot} \mathbf{E} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_x & \mathbf{u}_y & \mathbf{u}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_x \mathbf{u}_y & \mathbf{u}_z \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & E_y & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{u}_x \left(-\frac{\partial E_y}{\partial z} \right)$$

Soit $\text{rot} \mathbf{E} = \beta E_m \cos(\omega t - \beta z) \mathbf{u}_x + 0 = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \Rightarrow$

d'où $\mathbf{H} = -\frac{\beta E_m}{\mu_0} \int \cos(\omega t - \beta z) dt \mathbf{u}_x = -\frac{\beta E_m}{\mu_0 \omega} \sin(\omega t - \beta z) \mathbf{u}_x + Cte$

2) $\mathbf{H} = H_m \exp j(\omega t + \beta z) \mathbf{u}_x$

M.A : $\text{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$

dans le vide : $\mathbf{J} = 0$

d'où $\text{rot} \mathbf{H} = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$

soit $\text{rot} \mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_x & \mathbf{u}_y & \mathbf{u}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x & H_y & H_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_x \mathbf{u}_y & \mathbf{u}_z \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{u}_y \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} \right) \Rightarrow$

$\text{rot} \mathbf{H} = j \beta H_m \exp j(\omega t + \beta z) \mathbf{u}_y = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \Rightarrow$

$\mathbf{E} = \frac{j \beta H_m}{\epsilon_0} \int \exp j(\omega t + \beta z) dt \mathbf{u}_y = \frac{j \beta H_m}{\epsilon_0} \frac{1}{j \omega} \exp j(\omega t + \beta z) \mathbf{u}_y$

Donc $\mathbf{E} = \frac{\beta H_m}{\epsilon_0 \omega} \exp j(\omega t + \beta z) \mathbf{u}_y + Cte$

- 3) On peut conclure que :

- Un champ électrique \mathbf{E} variable crée un champ magnétique \mathbf{H} variable ;
- Un champ magnétique \mathbf{H} variable crée un champ électrique \mathbf{E} variable ;
- $\mathbf{E} \perp \mathbf{H}$.

IV. LOI D'OHM LOCALISEE

La loi d'Ohm localisée est exprimée par la relation suivante :

$$J = \sigma E$$

où σ conductivité électrique ($1/\Omega.m$)

$$\sigma = \frac{1}{\rho}$$

avec ρ résistivité ($\Omega.m$)

Exemples :

- Cuivre : $\sigma = 5,81.10^7 \Omega^{-1}m^{-1}$; $\rho = 1,7.10^{-8} \Omega m$
- Aluminium : $\sigma = 3,54.10^7 \Omega^{-1}m^{-1}$; $\rho = 2,8.10^{-9} \Omega m$
- Silicium (semi-conducteur) : $\sigma = 1,6.10^{-5} \Omega^{-1}m^{-1}$; $\rho = 6,25.10^3 \Omega m$
- Verre : $\sigma \approx 10^{-12} \Omega^{-1}m^{-1}$; $\rho \approx 10^{12} \Omega m$

Démonstration :

Soit un conducteur cylindrique de section S et de longueur L , soumis à une tension U

La loi d'Ohm généralisée s'écrit comme suit :

$$U = R I \quad (1)$$

R : résistance du conducteur

Comme

$$R = \int \frac{\rho}{S} dl, \quad I = \int J dS, \quad \text{et} \quad U = \int E dl$$

nous obtenons en substituant dans l'équation 1 :

$$\int E dl = \int \frac{\rho}{S} dl \int J dS \Rightarrow E = \frac{\rho}{S} J$$

$$\text{Soit } J = \frac{E}{\rho}$$

$$\text{Ou bien } J = \sigma E$$

Cette égalité est également valable en notation vectorielle : $J = \sigma E$

V. CONDITIONS LIMITES

Soient deux milieux diélectriques différents (air et verre par exemple) séparés par une interface –frontière fictive de séparation- située dans le plan YOZ par exemple.

Question : Que devient le champ électromagnétique quand il passe d'un

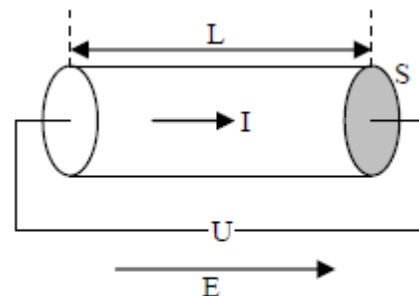


Figure 2

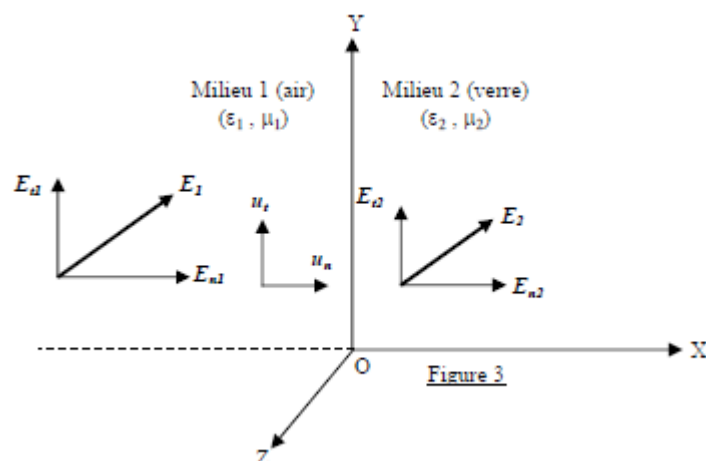


Figure 3

milieu à un autre ?

Posons $E = E_t + E_n$

E_t : composante tangentielle par rapport à la surface de séparation (plan YOZ).

E_n : composante perpendiculaire par rapport à la surface de séparation.

1. CHAMP ELECTRIQUE

a) Composantes tangentielles :

La forme intégrale de l'équation de MF est :

$$\oint E \cdot dl = -\frac{\partial}{\partial t} \int B \cdot dS$$

Le contour fermé considéré est un rectangle ABCD situé de part et d'autre de la frontière.

$$\oint_{ABCD} E \cdot dl = \int_{ABCD} E \cdot dl = E_{n1} \cdot DN + E_{n2} \cdot NC + E_{t2} \cdot CB + E_{n2} \cdot BM + E_{n1} \cdot MA + E_{t1} \cdot AD$$

Etant donné qu'on veut étudier le champ à la frontière des deux matériaux, c'est-à-dire les conditions limites du champ électrique, on pose :

$AM = MB = DN = NC \approx 0$,

On obtient alors :

$$\int_{ABCD} E \cdot dl = E_{t2} \cdot CB + E_{t1} \cdot AD = CB(E_{t2} - E_{t1})$$

Par ailleurs, vu que :

$AB \approx 0$, donc $S = AB \times BC \approx 0$

On déduit que :

$$-\int \frac{\partial B}{\partial t} \cdot dS \approx 0$$

En outre sachant que :

$AD = -CB$

on arrive à

$$\int_{ABCD} E \cdot dl = CB(E_{t2} - E_{t1}) = 0$$

Soit donc

$$E_{t2} = E_{t1}$$

Conclusion : Les composantes tangentielles du champ électrique sont égales.

b) Composantes normales :

La forme intégrale de l'équation de MG est :

$$\oint E \cdot dS = \frac{q}{\epsilon}$$

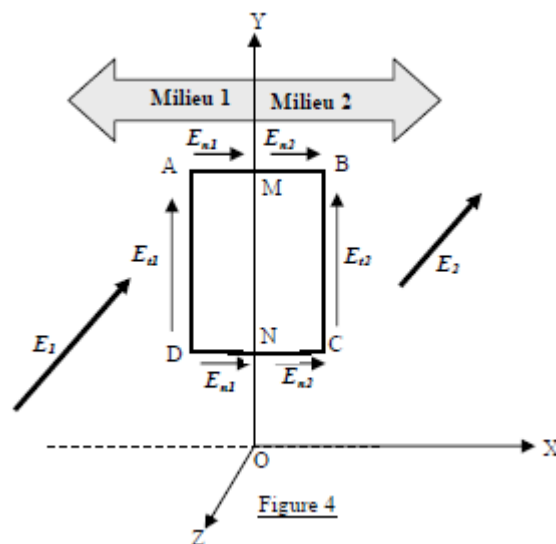


Figure 4

On considère comme surface fermée un cylindre de longueur L .

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q}{\epsilon} \Rightarrow \oint \epsilon \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = q \Rightarrow \oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = q$$

$$\text{Soit } \oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int \mathbf{D}_{n1} \cdot d\mathbf{S}_1 + \int \mathbf{D}_{n2} \cdot d\mathbf{S}_2 + \int \mathbf{D}_{n3} \cdot d\mathbf{S}_3$$

On suppose le cas général où la surface de séparation porte une charge $q = \rho_s S$.

Par ailleurs, vu que l'on étudie les conditions limites, on pose alors $L \approx 0$, soit donc $S_3 \approx 0$.

D'où :

$$\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int \mathbf{D}_{n1} \cdot d\mathbf{S}_1 + \int \mathbf{D}_{n2} \cdot d\mathbf{S}_2 = -D_{n1} S_1 + D_{n2} S_2$$

Comme $S_1 = S_2 = S$:

$$\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = S[D_{n2} - D_{n1}] = \rho_s S$$

Soit donc $D_{n2} - D_{n1} = \rho_s$

Si $\rho_s = 0$ qui est le cas le plus fréquent, on aboutit

$$\text{alors à : } \boxed{D_{n2} = D_{n1}}$$

$$\text{Ou bien } \epsilon_2 E_{n2} = \epsilon_1 E_{n1} \Rightarrow E_{n2} = E_{n1} \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}$$

2. CHAMP MAGNETIQUE

a) Composantes perpendiculaires :

La forme intégrale de l'équation de $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ est :

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

Considérons comme pour le cas précédent une surface cylindrique de longueur L .

L'application de cette équation à cette surface donne :

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int \mathbf{B}_{n1} \cdot d\mathbf{S}_1 + \int \mathbf{B}_{n2} \cdot d\mathbf{S}_2 + \int \mathbf{B}_{n3} \cdot d\mathbf{S}_3 = 0$$

À la frontière entre les deux milieux (conditions limites) on doit poser :

$L \approx 0$, soit donc $S_3 \approx 0$.

On obtient alors :

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int \mathbf{B}_{n1} \cdot d\mathbf{S}_1 + \int \mathbf{B}_{n2} \cdot d\mathbf{S}_2 = -B_{n1} S_1 + B_{n2} S_2 = 0$$

Comme $S_1 = S_2 = S$:

$$S(B_{n2} - B_{n1}) = 0$$

Soit $B_{n2} = B_{n1}$

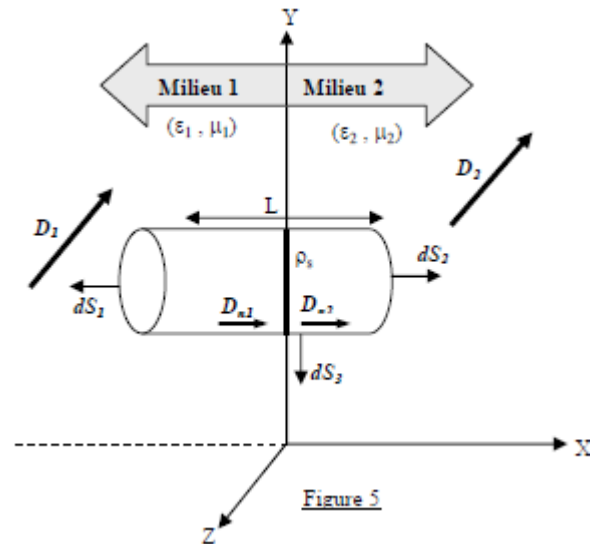


Figure 5

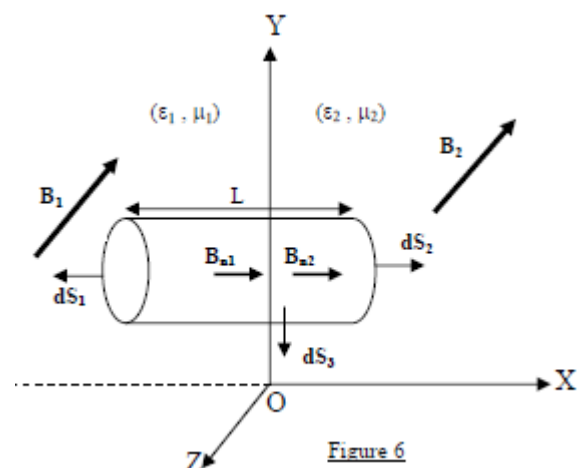


Figure 6

Ou bien : $\mu_2 H_{n2} = \mu_1 H_{n1} \Rightarrow H_{n2} = H_{n1} \frac{\mu_1}{\mu_2}$

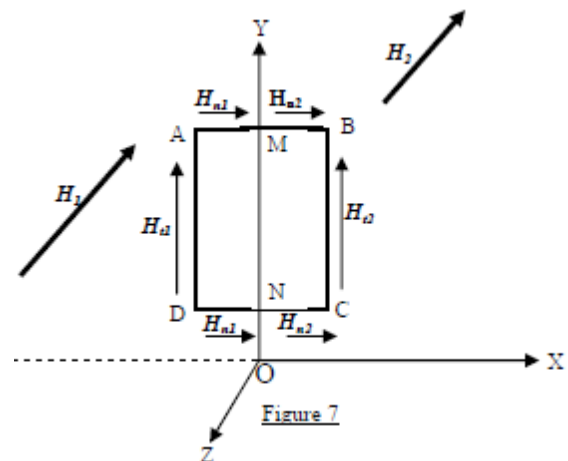
Conclusion : les composantes perpendiculaires de l'induction B sont égales.

b) Composantes tangentielles

La forme intégrale de l'équation de MA est :

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} + \int \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

Choisissons comme contour fermé un cadre ABCD situé de part et d'autre de la frontière entre les deux milieux.



L'application de l'équation de M.A à ce cadre donne :

$$\oint_{ABCD} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = H_{n1} \cdot DN + H_{n2} \cdot NC + H_{t2} \cdot CB + H_{n2} \cdot BM + H_{n1} \cdot MA + H_{t1} \cdot AD$$

A la frontière entre les deux milieux (conditions limites), on doit poser :

$$AM = MB = DN = NC \approx 0.$$

On obtient alors :

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = H_{t2} \cdot CB + H_{t1} \cdot AD$$

Par ailleurs, vu que :

$$\mathbf{AD} = -\mathbf{CB}$$

On peut écrire:

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = CB \cdot (H_{t2} - H_{t1}) \quad (1)$$

D'autre part, comme $AB \approx 0$,

$$\Rightarrow S = AB \times BC \approx 0 \Rightarrow \varepsilon \int \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \approx 0$$

Calculons maintenant $\int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$.

On considérera le cas général où la surface de séparation entre les deux milieux est une nappe de courant, quoi que ce cas est peu probable en pratique.

Courant volumique : le courant I circule dans un conducteur volumique de section S (figure 8).

La densité de courant dans ce cas est :

$$J_v = \frac{I}{S}$$

C'est une densité de courant surfacique.

Nappe de courant :

Le courant I circule dans une nappe (plan) de largeur L (figure 9).

La densité de courant dans ce cas est :

$$J_l = \frac{I}{L}$$

C'est une densité de courant linéique.



Figure 8 : Courant volumique

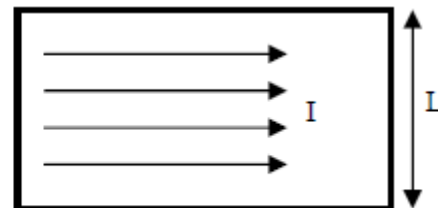


Figure 9 : Nappe de courant

Par conséquent

$$I = J_l L$$

Dans le cas donc où un courant surfacique circule dans la surface de séparation, le courant qui passe à travers le cadre ABCD est :

$$I = J_n BC$$

On ne considère que la partie du courant traversant le cadre, c'est-à-dire la composante perpendiculaire au cadre. Cette condition est dictée par le théorème d'Ampère lui-même.

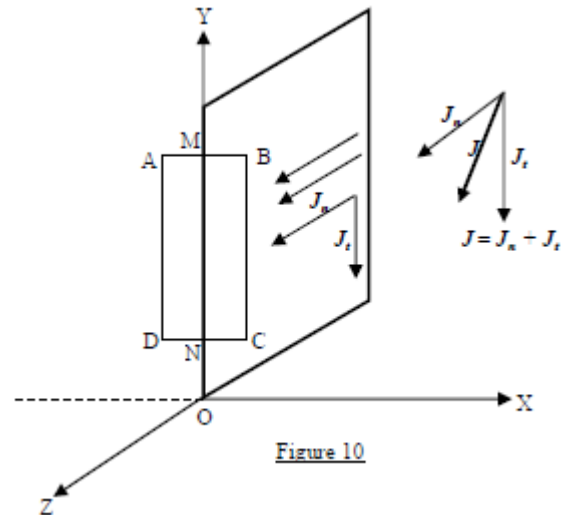


Figure 10

Comme $J_n = J_z$ et que $J_z = J \cdot u_z$, on obtient ce qui suit :

$$I = (J \cdot u_z) BC = J \cdot (u_x \wedge u_y) BC = u_y \cdot (J \wedge u_x) BC = (J \wedge u_x) \cdot BC u_y$$

soit $I = (J \wedge u_x) \cdot CB$ (2).

En établissant l'égalité des équations (1) et (2), on obtient :

$$CB \cdot (H_{t2} - H_{t1}) = CB \cdot (J \wedge u_x)$$

$$\text{Soit } H_{t2} - H_{t1} = J \wedge u_x$$

En posant n_{12} comme étant le vecteur unitaire dirigé du milieu 1 vers le milieu 2, on arrive à :

$$H_{t2} - H_{t1} = J \wedge n_{12}$$

RESUME :

$$E_{t2} = E_{t1} ;$$

$$\varepsilon_2 E_{n2} - \varepsilon_1 E_{n1} = \rho_s \text{ (en général } \rho_s = 0 \text{)} ;$$

$$\mu_2 H_{n2} = \mu_1 H_{n1} ;$$

$$H_{t2} - H_{t1} = J \wedge n_{12} \text{ (en général } J = 0 \text{)}.$$

Exercice

Soient deux milieux isolants différents. La surface de séparation entre les deux milieux est située dans le plan XOY.

On donne $\mathbf{B}_1 = 1,2\mathbf{u}_x + 0,8\mathbf{u}_y + 0,4\mathbf{u}_z$.

Déterminer l'induction B régnant dans le milieu 2.

Solution :

$$\mathbf{B}_1 = 1,2\mathbf{u}_x + 0,8\mathbf{u}_y + 0,4\mathbf{u}_z \Rightarrow$$

$$\mathbf{H}_1 = \frac{\mathbf{B}_1}{\mu_1} = \frac{1}{\mu_0} \left(\frac{1,2}{15}\mathbf{u}_x + \frac{0,8}{15}\mathbf{u}_y + \frac{0,4}{15}\mathbf{u}_z \right)$$

$$\text{soit } \mathbf{H}_1 = \frac{1}{\mu_0} (0,08\mathbf{u}_x + 0,05\mathbf{u}_y + 0,03\mathbf{u}_z)$$

D'autre part, nous avons $\mathbf{H}_{t2} - \mathbf{H}_{t1} = \mathbf{J} \wedge \mathbf{n}_{12}$
 comme $\mathbf{J} = 0$ on pose

$$\mathbf{H}_{t2} = \mathbf{H}_{t1}$$

Les composantes tangentielles sont : \mathbf{u}_x et \mathbf{u}_y .

$$\text{d'où } \mathbf{H}_{t2} = \mathbf{H}_{t1} = \frac{1}{\mu_0} (0,08\mathbf{u}_x + 0,05\mathbf{u}_y)$$

$$\text{et donc } \mathbf{B}_{t2} = \mu_2 \mathbf{H}_{t2} = \mu_0 \mathbf{H}_{t2} = 0,08\mathbf{u}_x + 0,05\mathbf{u}_y$$

La composante normale étant suivant \mathbf{u}_z , alors :

$$\mathbf{B}_{n1} = 0,4\mathbf{u}_z$$

vu que $\mathbf{B}_{n2} = \mathbf{B}_{n1}$, il vient:

$$\mathbf{B}_{n2} = 0,4\mathbf{u}_z$$

$$\text{d'où } \mathbf{B}_2 = \mathbf{B}_{t2} + \mathbf{B}_{n2} = 0,08\mathbf{u}_x + 0,05\mathbf{u}_y + 0,4\mathbf{u}_z$$

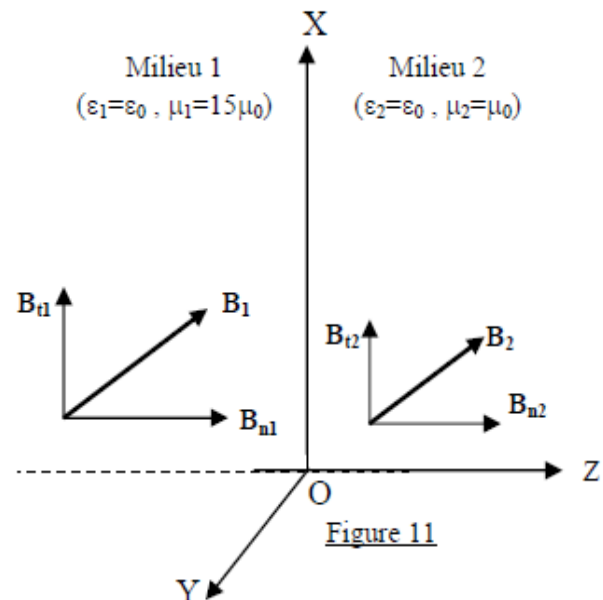


Figure 11