Chapitre V : Réponse temporelle des systèmes à temps continu

V.1 Pôles et zéros

Soit la fonction de transfert suivante :

$$F(p) = \frac{a_m p^m + a_{m-1} p^{m-1} + \cdots + a_0}{b_n p^n + b_{n-1} p^{n-1} + \cdots + b_0}$$

Ou

$$F(p) = \frac{(p-z_1)(p-z_2)\dots(p-z_m)}{(p-p_1)(p-p_2)\dots(p-p_m)}$$

Où $n \geq m$

Zéro : Cause la fonction de transfert à devenir zéro $(z_1, z_2, \cdots, z_m)$

Pôle : où la fonction de transfert devient infinie $(p_1, p_2, \cdots, p_n)$.

On peut représenter les pôles et zéros par un diagramme. Ce diagramme donne de l'information sur le type de système et le type de réponse du système, et peut être une façon rapide d'analyser un système.

Exemple

Soit la fonction suivante :

$$G(p) = \frac{p+2}{p+5}$$

Le zéro est z_1 = -2 et le pôle est p_1 = -5. Le diagramme des pôles est donné dans la figure V.1. Le zéro est représenté par un cercle ("o"), et le pôle par une croix ("×").

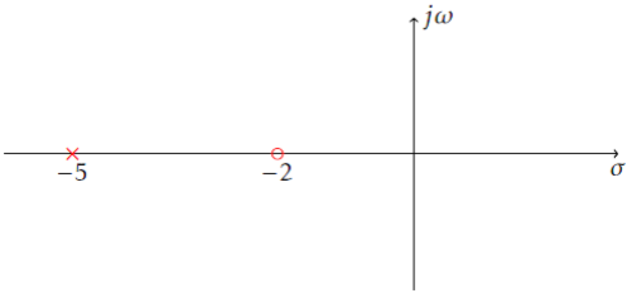


Figure V.1: Diagramme de pôles et zéros

V.2 Calcul de la réponse à partir de la fonction de transfert

L'analyse temporelle consiste à étudier la réponse d'un système représenté par sa fonction de transfert à un signal d'entrée variant dans le temps. Le signal d'entrée peut en principe être quelconque.

D’après la définition de la fonction de transfert: $Y(p) = G(p) \times U(p)$.

La réponse d’un système linéaire invariant d’entrée u(t) et de sortie y(t) peut s’écrire sous la forme : $y(t) = g(t) \times u(t)$

Où $g(t)$ est la transformée de Laplace inverse de la fonction de transfert.

Classiquement, on peut apprendre beaucoup des systèmes en observant la réponse aux entrées suivantes :

- Impulsion de Dirac ⇒ Réponse impulsionnelle
- Echelon ⇒ Réponse indicielle
- Rampe ⇒ Réponse en vitesse
- Sinusoïde ⇒ Réponse fréquentielle

V.3 Réponse impulsionnelle et réponse indicielle

V.3.1 Réponse impulsionnelle

On appelle réponse impulsionnelle d’un système sa réponse à une impulsion de Dirac.

Impulsion de Dirac : soit f(t) une fonction continue en 0. Alors l’impulsion de Dirac est la distribution $\delta(t)$ telle que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\delta(\tau)\, d\tau = f(0)$$

La réponse impulsionnelle du système est :

$$y(t) = g(t) \times \delta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$

Soit, par définition de l’impulsion de Dirac : $y(t) = g(t)$.

La réponse impulsionnelle d’un système peut donc être obtenue en calculant la transformée de Laplace inverse de sa fonction de transfert.

V.3.2 Réponse indicielle

On appelle réponse indicielle d’un système sa réponse à un échelon unité :

$$U(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t < 0 \\ 1, & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

V.4 Réponse temporelle des systèmes du premier et du second ordre

V.4.1 Systèmes du premier ordre

Un système linéaire invariant à temps continu d'ordre un est décrit par une équation différentielle d'ordre un à coefficients constants reliant son entrée $u(t)$ et sa sortie $y(t)$:

$$y(t) + \tau \frac{dy(t)}{dt} = Ku(t)$$

Où τ est la constante de temps du système et K son gain statique.

En appliquant la transformée de Laplace à cette équation à condition initiale nulle ($y(0) = 0$).

On peut alors définir la fonction de transfert (ou transmittance) du système de premier ordre par la forme canonique de suivante :

$$H(p) = \frac{Y(p)}{E(p)} = \frac{K}{1 + \tau p}$$

Exemple :

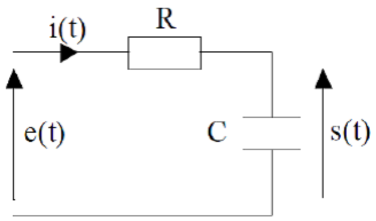


Figure V.2 : Circuit RC

1. Trouver la relation entre $s(t)$, $e(t)$, R et C.
2. Montrer que l'on peut mettre l'équation différentielle sous la forme canonique :

La relation entre $s(t)$, $e(t)$, R et C

$$RC \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = e(t)$$

A condition initiale est nulle ($s(0)=0$) la fonction de transfert est définit par :

$$H(p) = \frac{1}{1+\tau p} \qquad \text{avec} \quad \tau = RC$$

Réponse indicielle :

On considère une entrée $e(t) = Eu(t)$ où $u(t) = 1$ ($t > 0$) est un échelon unitaire décrit par la figure suivante :

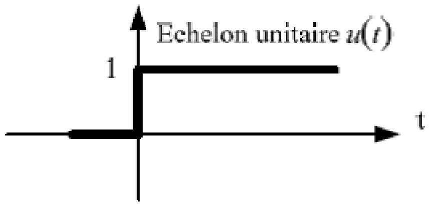


Figure V.3 : Echelon unitaire

$$E(p) = \frac{1}{p}$$

$$Y(p) = H(p) \times E(p) = \frac{K}{p(1+\tau p)}$$

$$s(t) = L^{-1}[S(p)] = K\left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right)u(t)$$

$$s(t) = K\left(1 - \exp\left(-{}^{t}/_{\tau}\right)\right)u(t)$$

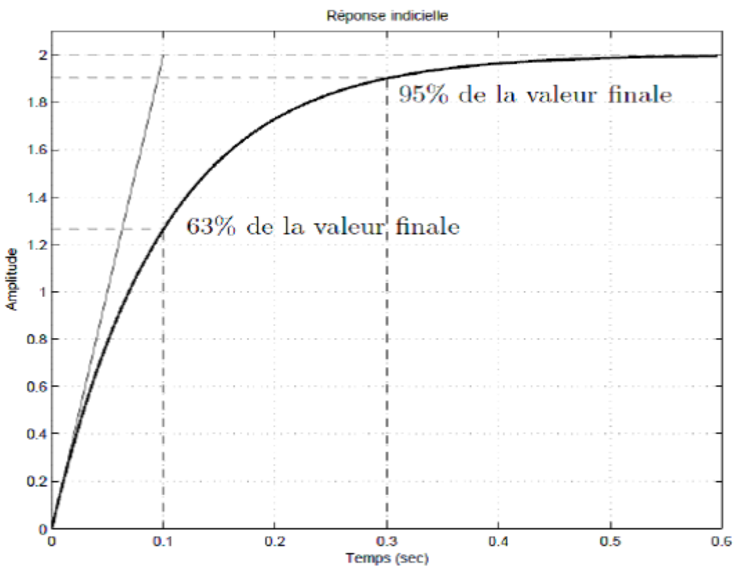


Figure V.4 : Réponse indicielle d'un système de 1ére ordre.

Pour le système de premier ordre on définit les paramètres suivants :

Temps de montée (tr) : Temps nécessaire pour passer de 10% à 90% de la valeur maximale :

$$\begin{cases} s(t_1) = K\left(1 - e^{-t_1/\tau}\right) = 10\%K \\ s(t_2) = K\left(1 - e^{-t_2/\tau}\right) = 90\%K \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 0.11\tau \\ t_2 = 2.30\tau \end{cases}$$

$$t_r = t_2 - t_1 = 2.30\tau - 0.11\tau \approx 2.2\tau$$

Constante de temps : $s(\tau) = K(1 - e^{-1}) = 0.63K$

C'est le temps au bout duquel la réponse atteint 63% de la valeur finale. La constante de temps du système caractérise la rapidité du régime transitoire.

Temps de stabilisation à 5% (ou de réponse) t_s:

$$s(3\tau) = K(1 - e^{-3}) = 0.95K$$

Le temps de réponse est défini comme étant le temps au bout duquel la réponse du système ne s'écarte pas de plus de 5% de son état permanent.

Pour le système de premier ordre t_s à 95% = 3τ.

Réponse à une impulsion

$e(t) = \delta(t) = 1$ pour $t = 0$

$$\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{k}{1+\tau p} \Rightarrow S(p) = \frac{k}{1+\tau p}\,E(p)$$

$$E(p) = 1 \Rightarrow S(p) = \frac{k}{1+\tau p} = \frac{k}{\tau}\left(\frac{1}{\frac{1}{\tau}+p}\right)$$

Donc : $s(t) = \frac{k}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}$

$$s(\tau) = 0.37\,\frac{k}{\tau}$$

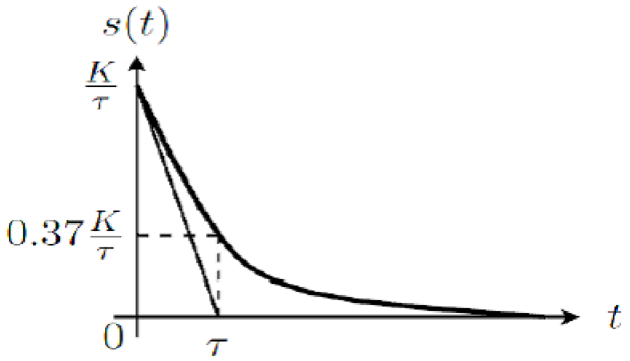


Figure V.5 : Réponse impulsionnelle d'un système de 1ére ordre.

Réponse à une rampe

On a $e(t) = E_0 t u(t)$, soit $E(p) = \frac{E_0}{p^2}$

$$S(p) = H(p) \times E(p) = \frac{KE_0}{p^2(1+\tau p)}$$

$$S(p) = \frac{KE_0}{p^2(1+\tau p)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p^2} + \frac{C}{1+\tau p}$$

$$S(p) = \frac{kE_0}{p^2(1+\tau p)} = kE_0\left[-\frac{\tau}{p} + \frac{1}{p^2} + \frac{\tau^2}{1+\tau p}\right]$$

En appliquant la transformée inverse de Laplace, on obtient :

$$s(t) = L^{-1}[S(p)] = KE_0\tau\left(\frac{t}{\tau} - 1 + \exp\left(-{}^{t}/_{\tau}\right)\right)u(t)$$

Pour t tend vers l'infini

L'équation de l'asymptote : $y = KE_0(t-\tau)$

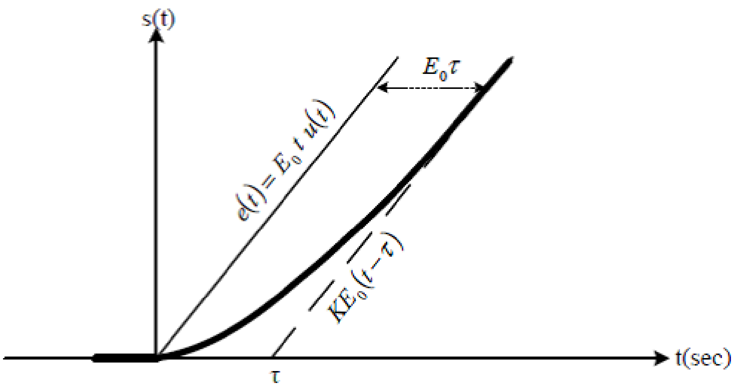


Figure V.6 : Réponse à une rampe

V.4.2 Systèmes du second ordre

Un système linéaire invariant à temps continu d'ordre deux est décrit par une équation différentielle d'ordre deux à coefficients constants reliant son entrée $u(t)$ et sa sortie $y(t)$:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2\xi\omega_0\frac{dy(t)}{dt} + \omega_0^2 y(t) = K\omega_0^2 u(t)$$

Où ξ et ω_0 sont des constantes réelles strictement positives et K une constante réelle non nulle ;

ξ est le coefficient d'amortissement du système, ω_0 sa pulsation propre non amortie et K son gain statique.

En appliquant la transformée de Laplace à conditions initiales nulles ($y(0)$ et $\dot{y}(0) = 0$)

$$H(p) = \frac{Y(p)}{E(p)} = \frac{K\omega_0^2}{p^2 + 2\xi\omega_0 p + \omega_0^2} = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

Exemple 1 :

Soit la fonction suivante :

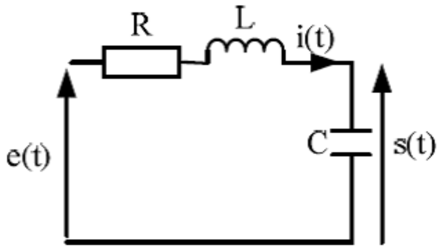
$$G(p) = \frac{36}{p^2 + 4.2p + 36}$$

Trouver ξ et ω_0

$\omega_0 = \sqrt{36} = 6$

$2\xi\omega_0 = 4.2 \Rightarrow \xi = 0.35$

Exemple 2 :



On appliquant la loi de maille on détermine l'équation différentielle du circuit

$$\begin{cases} e(t) = Ri(t) + L\dfrac{di(t)}{dt} + y(t) \\ i(t) = C\dfrac{dy(t)}{dt} \end{cases} \Rightarrow e(t) = LC\,\frac{d^2y(t)}{dt^2} + RC\frac{dy(t)}{dt} + y(t)$$

En appliquant la transformée de Laplace (T.L) à condition initiales nulles à l'équation différentielle précédente on obtient :

$E(p) = (LCp^2 + RCp + 1)Y(p)$

La fonction de transfert du circuit est défini par :

$$H(p) = \frac{Y(p)}{E(p)} = \frac{1}{LCp^2 + RCp + 1} = \frac{\frac{1}{LC}}{p^2 + \frac{R}{L}p + \frac{1}{LC}}$$

Soit :

$$\begin{cases} \omega_0^2 = \dfrac{1}{LC} \\ \omega_0 = \sqrt{\dfrac{1}{LC}} \\ \xi = \dfrac{1}{2}R\sqrt{\dfrac{C}{L}} \end{cases}$$

Réponse indicielle :

La solution de l'équation différentielle dépend des racines de l'équation caractéristique associée :

$p^2 + 2\xi\omega_0 p + \omega_0^2 = 0$

$\Delta' = \omega_0^2(\xi^2 - 1)$

a. **Système du second ordre hyper-amorti** $(\xi > 1)$ $\Delta' > 0$

L'équation caractéristique à deux pôles réels : $\begin{cases} p_1 = -\xi\omega_0 + \omega_0\sqrt{\xi^2 - 1} = -\frac{1}{\tau_1} \\ p_2 = -\xi\omega_0 - \omega_0\sqrt{\xi^2 - 1} = -\frac{1}{\tau_2} \end{cases}$

La réponse indicielle : L'entrée appliquée est un échelon de position $e(t) = u(t)$

$$Y(p) = H(p) \times E(p) = \frac{k}{p(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)}$$

$$y(t) = k\left[1 + \frac{1}{\tau_2 - \tau_1}\left(\tau_1 \exp\left(-\frac{t}{\tau_1}\right) - \tau_2 \exp\left(-\frac{t}{\tau_2}\right)\right)\right]u(t)$$

b. Système du second ordre critique $(\xi = 1)$

On a: $\xi = 1 \Rightarrow \Delta = 0$

$$p_1 = p_2 = -\omega_0 = -\frac{1}{\tau}$$

Réponse indicielle

$$Y(p) = H(p) \times E(p) = \frac{K}{p(1 + \tau p)^2}$$

$$y(t) = k\left[1 - \left(1 + \frac{t}{\tau}\right)\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right]u(t)$$

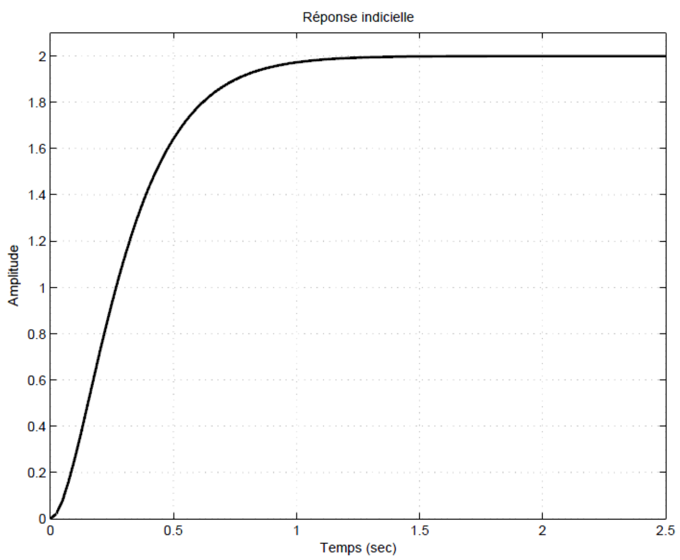


Figure V.6 : Réponse indicielle pour $\xi \geq 1$

c. Système du second ordre oscillant amorti $(\mathbf{0} < \xi < \mathbf{1})$

$\xi < 1 \Rightarrow \Delta' < 1$

Donc l'équation caractéristique à deux pôles complexes conjugués

$$\begin{cases} p_1 = -\xi\omega_0 + j\omega_0\sqrt{1-\xi^2} \\ p_1 = -\xi\omega_0 - j\omega_0\sqrt{1-\xi^2} \end{cases}$$

Réponse indicielle

$$Y(p) = H(p) \times E(p) = \frac{k\omega_0^2}{p(p^2 + 2\xi\omega_0 p + \omega_0^2)}$$

$$s(t) = k\left[1 - \frac{\exp(-\xi\omega_0 t)}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin\left(\omega_0\sqrt{1-\xi^2}\,t + \varphi\right)\right]u(t)$$

$$\varphi = arctan\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}$$

$$\varphi = \arccos(\xi)$$

Pour le système du second ordre oscillant amorti, on définit :

- ***Pseudo pulsation du système***

  Cette pseudo pulsation est définie par : $\omega_p = \omega_0\sqrt{1-\xi^2}$

- ***Temps de montée***

  Temps nécessaire pour passer de 0% à 100% de la valeur maximale : $t_r = \frac{\pi-\varphi}{\omega_p}$

- ***Temps de premier dépassement :*** On appelle temps de premier dépassement, l'instant où la sortie atteint son premier maximum. On le note par t_p.

  $t_p = \frac{\pi}{\omega_0\sqrt{1-\xi^2}}$: Temps de premier pic

- ***Dépassement :*** On appelle amplitude de premier dépassement, l'amplitude du premier maximum sur la valeur finale de la sortie.

  $$D = \exp\left(-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)$$

  $$en\ \%;\ D\% = 100 \times \exp\left(-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)$$

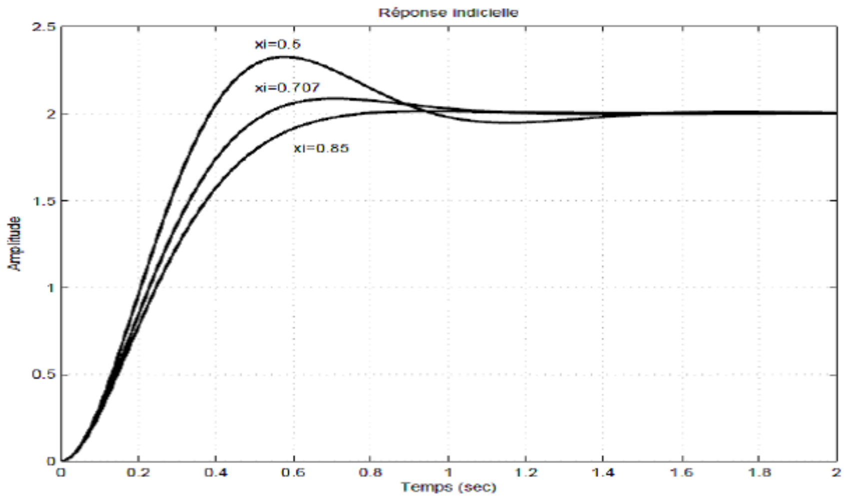


Figure V.7 : Réponses indicielles d'un système de second ordre pour $\xi < 1$