Université Oran 1 Ahmed Ben Bella

Faculté des Sciences Exactes et Appliquées

Licence 1 MI (2023/2024)

Examen final d'Algèbre 1 - Durée 01h30

Questions de cours : (*04 pts*)
Soit $f : (G, *) \longrightarrow (G', \diamond)$ un homomorphisme de groupes et H un sous groupe de G.

1. Rappeler la définition d'un sous-groupe H de G.
2. Montrer que le noyau de f ($\ker f$) est un sous groupe de G.

Exercice 1. (*08 pts*)
Soit f l'application définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$

1. Soient les ensembles $A = \{-\frac{1}{2}, -2\}$ et $B = \{\frac{1}{2}, 2\}$.
   a) Déterminer $f(A)$ et $f(B)$.
   b) L'équation $f(x) = 2$ admet-elle des solutions dans $\mathbb{R}$? .
   c) f est-elle injective ? surjective ?
2. On désigne par $\mathcal{R}$, la relation binaire définie sur $\mathbb{R}$ par
$$\forall x, y \in \mathbb{R} : x\mathcal{R}y \iff f(x) = f(y)$$
   i Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$.
   ii Déterminer les classes d'équivalence de 2 et -2.

Exercice 2. (*08 pts*)
On considère sur $\mathbb{R}$ la loi $*$ définie par :
$$\forall a, b \in \mathbb{R} : \ a * b = a + b + \frac{1}{6}$$

1. Montrer que $(\mathbb{R}, *)$ est un groupe commutatif.
2. Soit l'application définie de $(\mathbb{R}, *)$ dans $(\mathbb{R}, +)$ par $h(x) = 3x + \frac{1}{2}$. Montrer que h est un isomorphisme de groupes.

BON COURAGE.

Corrigé

Corrigé 1. 1. **Definition d'un sous groupe :** Soit $(G, *)$ un groupe et H une partie de G, on dit que H est un **sous-groupe** de $(G, *)$ si les axiomes suivants sont vérifiés :

- $e \in H$
- $\forall (x, y) \in H^2 : \quad x * y \in H.$ **..........2pts**
- $\forall x \in H : \quad x^{-1} \in H.$

2. Montrons que ker$f$ est un sous groupe de G :

• $e_G \in \ker f$ car $f(e_G) = e_{G'}$ alors $\ker f \neq \emptyset$**.....0,5pt**

• Soient $x, y \in \ker f$, alors $f(x) = e_{G'}$ et $f(y) = e_{G'}$ et par le morphisme f, on obtient

$$f(x * y) = f(x) \cdot f(y) = e_{G'} \cdot e_{G'} = e_{G'} \Rightarrow x * y \in \ker f\textbf{....0,75pt}$$

• Soit $x \in \ker f$, montrons alors que $x^{-1} \in \ker f$

$$f(x^{-1}) = \big(f(x)\big)^{-1} = e_{G'}^{-1} = e_{G'} \Rightarrow x^{-1} \in \ker f\textbf{....0,75pt}$$

Corrigé 2. Soit f l'application définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$

1. Soient les ensembles $A = \{-\frac{1}{2}, -2\}$ et $B = \{\frac{1}{2}, 2\}$.

a)

$$\begin{aligned} f(A) &= \{f(x) \in \mathbb{R}, x \in A\} \\ &= \{f(-2), f(-\frac{1}{2})\} = \{-\frac{2}{5}\}\textbf{....1pt} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(B) &= \{f(x) \in \mathbb{R}, x \in B\} \\ &= \{f(2), f(\frac{1}{2})\} = \{\frac{2}{5}\}\textbf{....1pt} \end{aligned}$$

b) Résolvons l'équation $f(x) = 2$. On a

$$\frac{x}{1+x^2} = 2 \Rightarrow 2x^2 - x + 2 = 0$$

$\Delta = -15 < 0$ donc l'équation n'admet pas de solutions réelles, ce qui veut dire que 2 n'admet pas d'antecedant par l'application f**....0,5pt**.

c) f n'est pas injective car $\exists x_1 = 2, x_2 = \frac{1}{2} \in \mathbb{R}$ tels que

$$f(x_1) = f(x_2) = \frac{2}{5} \ \wedge \ x_1 \neq x_2\textbf{....1pt}$$

f n'est pas surjective car $\exists y = 2 \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, \ f(x) \neq 2$**....1pt**.

2. On désigne par $\mathcal{R}$, la relation binaire définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : x\mathcal{R}y \ \Leftrightarrow \ f(x) = f(y)$$

i $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$. Facilement, on montre que $\mathcal{R}$ est réflexive**....0,5pt** , symétrique**....0,5pt** et transitive**....0,5pt**.

ii

$$\begin{aligned}\overline{2} &= \{x \in \mathbb{R}/x\mathcal{R}2\}\textbf{....0,5pt}\\ &= \{x \in \mathbb{R}/f(x) = f(2)\}\\ &= \{x \in \mathbb{R}/\frac{x}{1+x^2} = \frac{2}{5}\}\\ &= \{x \in \mathbb{R}/2x^2 - 5x + 2 = 0\} = \{2, \frac{1}{2}\}\textbf{....0,5pt}\end{aligned}$$

De même, on calcule $\overline{-2} = \{-2, -\frac{1}{2}\}$**....1pt**

Corrigé 3. 1. $(\mathbb{R}, *)$ est un groupe commutatif. En effet,

- $a * b = a + b + \frac{1}{6} \in \mathbb{R}$ car l'addition est stable dans $\mathbb{R}$. Ainsi $*$ est une loi de composition interne**....0,5**
- $*$ est commutative **....0,5**
- L'associativité : Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$
  $(a * b) * c = (a + b + \frac{1}{6}) * c = a + b + \frac{1}{6} + c + \frac{1}{6} = a + b + c + \frac{1}{3}$**....0,5pt**
  $a * (b * c) = a * (b + c + \frac{1}{6}) = a + b + c + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = a + b + c + \frac{1}{3}$**....0,5pt**
  donc on a bien $(a * b) * c = a * (b * c)$
- L'élément neutre : $\exists e? \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R} : a * e = a$**....0,5pt**

$$a * e = a \Rightarrow a + e + \frac{1}{6} = a \Rightarrow e = -\frac{1}{6}$$

  donc $e = -\frac{1}{6} \in \mathbb{R}$ est l'élément neutre. **....0,5pt**
- L'existence du symétrique : $\forall a \in \mathbb{R}, \exists a' \in \mathbb{R} : a * a' = e$**....0,5pt**

$$a * a' = a + a' + \frac{1}{6} = -\frac{1}{6} \Rightarrow a' = -a - \frac{1}{3} \in \mathbb{R} \quad \textbf{....0,5pt}$$

2. Soit l'application $h : (\mathbb{R}, *) \longmapsto (\mathbb{R}, +)$ définie par $h(x) = 3x + \frac{1}{2}$. Etant données les deux groupes $(\mathbb{R}, *)$ et $(\mathbb{R}, +)$, alors

   h est un morphisme de groupes $\Longleftrightarrow \forall x, y \in \mathbb{R} : f(x*y) = f(x)+f(y)$**...1pt**

$$f(x * y) = 3(x * y) + \frac{1}{2} = 3(x + y + \frac{1}{6}) + \frac{1}{2} = 3x + 3y + 1\textbf{....0,5pt}$$
$$f(x) + f(y) = (3x + \frac{1}{2}) + (3y + \frac{1}{2}) = 3x + 3y + 1\textbf{....0,5pt}$$

   donc h est bien un morphisme de groupes.
   Montrons maintenant que h est bijective. L'injectivité peut être démontrée de deux manières différentes (L'étudiant pourra choisir ce que lui convient !)

   - En utilisant la définition. Soient $x, x' \in \mathbb{R}$, et supposons que $h(x) = h(x')$ alors $3x + \frac{1}{2} = 3x' + \frac{1}{2}$ ce qui implique que $x = x'$.

- En utilisant le noyau de h. Notons $e' = 0$ l'élément neutre du groupe $(\mathbb{R}, +)$ alors
$$ker h = \{x \in \mathbb{R}, h(x) = e'\}$$
Calculons alors le noyau de h
$$ker h = \{x \in \mathbb{R}, h(x) = 0\} = \{x \in \mathbb{R}, 3x + \frac{1}{2} = 0\} = \{-\frac{1}{6}\} = \{e\}$$

De même pour la surjectivité, il existe deux manières pour la démontrer.

- En utilisant la définition. Soit $y \in \mathbb{R}$, il existe $x? \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = y$, il suffit alors de choisir $x = \frac{1}{3}y - \frac{1}{6} \in \mathbb{R}$.
- En calculant l'image de h : $Imh = Im(\mathbb{R}) = \{h(x)/x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$.
En effet, on a $-\infty < x < +\infty \Rightarrow -\infty < 3x + \frac{1}{2} < +\infty$

1pt pour l'injectivité et **1pt** pour la surjectivité.