الخليل
للرياضيات

سنة ثالثة ثانوي

الشعب:

رياضيات | علوم تجريبية | تقني رياضي

مجلة:

الدوال الأصلية والحساب التكاملي

[حلول مقترحة لجميع التمارين]

+ ملخص حول الدوال الأصلية والحساب التكاملي

+ جميع التمارين الواردة في البكالوريات السابقة

إعداد الأستاذ:

قويسم إبراهيم الخليل

آخر تحديث:

[01 أفريل 2022]

.1

ملخص حول:

الدوال الأصلية والحساب التكاملي:

الدوال الأصلية

الدالة الأصلية لدالة على مجال:

تعريف:

f و F دالتان معرفتان على مجال I و F قابلة للاشتقاق على I، إذا كان من أجل كل x من I ، $F'(x) = f(x)$ نقول أنّ:

- f هي الدالة المشتقة للدالة F
- F دالة أصلية للدالة f على I

الدالة الأصلية التي تأخذ قيمة معلومة من أجل قيمة للمتغير:

خاصية:

f دالة مستمرة على مجال I، x_0 عدد حقيقي من I وy_0 عدد حقيقي كيفي

توجد دالة أصلية وحيدة F للدالة f على المجال I تحقق الشرط $F(x_0) = y_0$

الدوال الأصلية لدوال مألوفة:

I	$F(x)$	$f(x)$	
$\mathbb{R}$	$ax + c$	a	$;\ a \in \mathbb{R}$
$\mathbb{R}$	$\frac{1}{2}x^2 + c$	x	
$\mathbb{R}$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + c$	x^n	$;\ n \in N^*$
$]0; +\infty[$	$\ln x + c$	$\frac{1}{x}$	
$\mathbb{R}^*$	$-\frac{1}{(x-1)x^{n-1}} + c$	$\frac{1}{x^n}$	$;n \in N$ و $, n \geq 1$
$]0; +\infty[$	$2\sqrt{x} + c$	$\frac{1}{\sqrt{x}}$	
$\mathbb{R}$	$-\cos x + c$	$\sin x$	
$\mathbb{R}$	$\sin x + c$	$\cos x$	
$\mathbb{R}$	$e^x + c$	e^x	

خواص:

- إذا كانت F و G دالتين أصليتين على الترتيب لـ f و g على مجال I فإن: $F + G$ دالة أصلية لـ $f + g$ على I
- إذا كانت F دالة أصلية للدالة f على مجال I فإنّ λF دالة أصلية للدالة λf على I حيث: $\lambda \in \mathbb{R}$

الدوال الأصلية والعمليات على الدوال:

شروط على الدالة u	الدوال الأصلية للدالة f على I	الدالة f	
/	$\frac{1}{n+1}u^{n+1} + c$	$u'u^n$	$;n \in \mathbb{N}^*$
$u(x) > 0$	$\ln u + c$	$\frac{u'}{u}$	
$u(x) \neq 0$	$\frac{-1}{(n-1)u^{n-1}} + c$	$\frac{u'}{u^n}$	$;n \in \mathbb{N}$ و $n \geq 2$
$u(x) > 0$	$2\sqrt{u} + c$	$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	
/	$e^u + c$	$u'e^u$	

حل معادلات تفاضلية من الشكل $y' = f(x)$:

مبرهنة:

إذا كانت f دالة مستمرة على مجال I وكانت F دالة أصلية لها على I فإن:

حلول المعادلة التفاضلية $y' = f(x)$ هي الدوال y، حيث:

$$y = F(x) + c$$

مع c عدد حقيقي ثابت

مثال حلول المعادلة التفاضلية $y' = \frac{1}{x^2}$ في $\mathbb{R}_+^*$ هي الدوال y حيث: $y = -\frac{1}{x} + c$

حل معادلات تفاضلية من الشكل $y'' = f(x)$:

مبرهنة:

إذا كانت f دالة مستمرة على مجال I وكانت F دالة أصلية لها على I وكانت G دالة أصلية للدالة F على I فإنّ حلول المعادلة التفاضلية $y'' = f(x)$ هي الدوال y ، حيث

$$y = G(x) + c_1 x + c_2$$

مع c_1 و c_2 عددان حقيقيان ثابتان

مثال حلول المعادلة التفاضلية $y'' = \cos x$ في $\mathbb{R}$ هي الدوال y حيث:

$$y = -\cos x + c_1 x + c_2$$

الحساب التكاملي

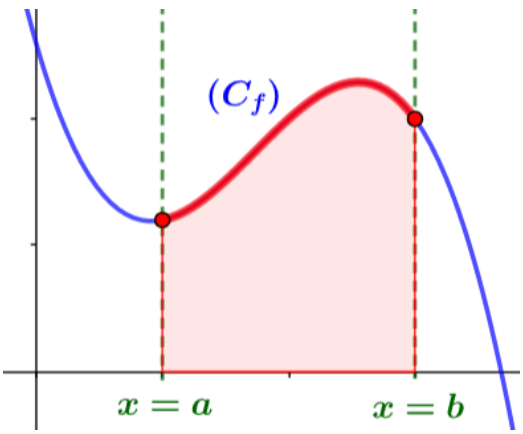
الدالة الأصلية ومساحة حيز تحت منحنى:

خاصية:

f دالة مستمرة وموجبة على مجال I، F دالة أصلية لها على I، a و b عددان حقيقيان من I حيث: $a \leq b$

- مساحة الحيز تحت منحنى الدالة f بين العددين a و b هو العدد الحقيقي:

$$F(b) - F(a)$$



تعريف التكامل

تعريف:

f دالة مستمرة على مجال I، F دالة أصلية لها على I، a و b عددان حقيقيان من I

- يسمى العدد الحقيقي $F(b) - F(a)$ **التكامل** من a إلى b للدالة f ونرمز له بـ:

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

الخليل للرياضيات

خواص التكامل:

01. علاقة شال:

خاصية: f دالة مستمرة على مجال I، من أجل كل أعداد حقيقية a، b و c من I لدينا:

$$\int_a^c f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$$

02. الخطية:

خاصية: f و g دالتان مستمرتان على مجال I و k عدد حقيقي، من أجل كل عددين حقيقين a و b من I لدينا:

1. $$\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$
2. $$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

03. المقارنة:

خاصية: f و g دالتان مستمرتان على مجال $[a;b]$

1. إذا كان من أجل كل $x \in [a;b]$ ، $f(x) \geq 0$ فإن: $\int_a^b f(x)dx \geq 0$
2. إذا كان من أجل كل $x \in [a;b]$ ، $f(x) \leq g(x)$ فإن: $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$

القيمة المتوسطة لدالة على مجال:

تعريف:

f دالة مستمرة على على مجال I، a و b عددان حقيقيان من I حيث $a \leq b$

- القيمة المتوسطة للدالة f على المجال $[a;b]$، هي العدد الحقيقي:

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

حصر تكامل – حصر قيمة متوسطة:

خاصية: f دالة مستمرة على مجال $[a;b]$

إذا وجد عددان حقيقيان m و M بحيث من أجل كل x من $[a;b]$، $m \leq f(x) \leq M$ فإن:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

حساب المساحة باستعمال التكامل:

f دالة مستمرة على $[a;b]$، (C_f) التمثيل البياني لـ f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد متجانس

نرمز بـ A إلى مساحة الحيز D المحدد بـ (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها $y=0$، $x=a$ و $x=b$

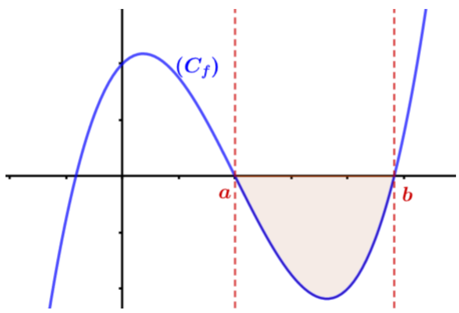
01. تكامل دالة سالبة على مجال:

إذا كانت f دالة سالبة على مجال $[a;b]$

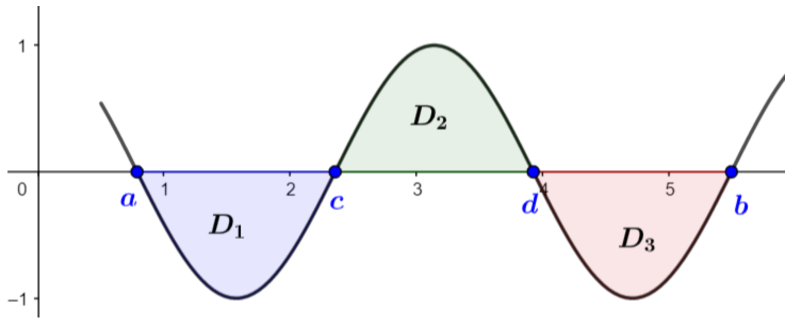
فإن $-f$ دالة موجبة على $[a;b]$

وبالتالي:

$$A = \int_a^b -f(x)dx$$



الخليل للرياضيات



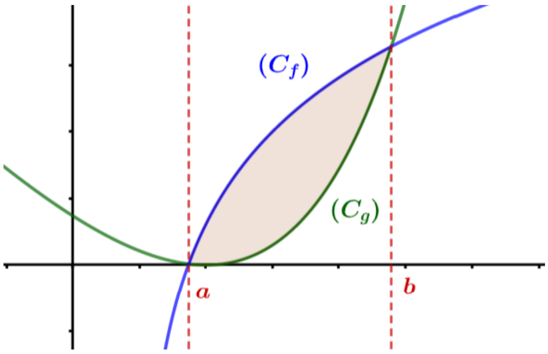
02. تكامل تغير إشارتها على مجال:

إذا كانت f دالة تغير اشارتها على مجال $[a;b]$ فإن مساحة الحيز D المحدد بمنحنى الدالة f والمستقيمات التي معادلاتها: $y=0$، $x=a$ و $x=b$ هي:

$$A=A_1+A_2+A_3$$

حيث: A_1 مساحة الحيز D_1 وA_2 مساحة الحيز D_2 و A_3 مساحة الحيز D_3، ومنه:

$$A=\int_a^b f(x)dx=\int_a^c -f(x)dx+\int_c^d f(x)dx+\int_d^b -f(x)dx$$



03. مساحة حيز محدد بمنحنيين:

إذا كانت f وg دالتين مستمرتين على مجال $[a;b]$ بحيث من أجل كل x من $[a;b]$: $f(x)\geq g(x)$

فإن: A مساحة الحيز D المحدد بـ (C_f) و (C_g) والمستقيمان اللذين معادلتاهما $x=a$ و $x=b$ هي:

$$A=\int_a^b [f(x)-f(x)]dx$$

← المكاملة بالتجزئة:

مبرهنة:

لتكن u و v دالتين قابلتين للاشتقاق على مجال I حيث u' و v' مستمرتين على I

من أجل كل عددين حقيقيين a و b لدينا:

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx=[u(x)v(x)]_a^b-\int_a^b u'(x)v(x)dx$$

مثال: باستعمال المكاملة بالتجزئة جد دالة أصلية للدالة: $f: x\longmapsto \ln x$

نضع: $\left|\begin{array}{l} u'(x)=\dfrac{1}{x} \\ v(x)=x \end{array}\right. \Longleftarrow \left|\begin{array}{l} u(x)=\ln x \\ v'(x)=1 \end{array}\right.$

$$\int \ln x\, dx=x\ln x-\int \frac{1}{x}xdx=-x\ln x-\int dx=\boxed{x\ln x-x+c}$$

← الدالة الأصلية والتي تنعدم من أجل قيمة:

مبرهنة:

f دالة مستمرة على مجال I و α عدد حقيقي من I

الدالة الأصلية الوحيدة للدالة f على I والتي تنعدم من أجل α هي الدالة:

$$F: x\longmapsto \int_\alpha^x f(t)dt$$

مثال: عيّن دالة أصلية للدالة $f: x\longmapsto 2x-3$ والتي تنعدم من أجل 1:

$$F(x)=\int_1^x f(t)dt=\int_1^x (2t-3)dt=[t^2-3t]_1^x=\boxed{x^2-3x+2}$$

.2

تمارين متنوعة

[تمارين تدريبية]

انقر على كلمة الحل في كل تمرين للانتقال إليه

التمريـــــن 01
الحـل

عيّن في كل حالة دالة أصلية للدالة f على I

$f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ و $I=]0;+\infty[$

$g(x)=e^{x}(e^{x}+4)$ و $I=\mathbb{R}$

$h(x)=\dfrac{1}{x\ln x^{2}}$ و $I=]0;+\infty[$

$k(x)=\dfrac{-e^{x}-2}{(e^{x}+2x)^{2}}$ و $I=[0;+\infty[$

$p(x)=\dfrac{1}{x^{2}}e^{\frac{1}{x}}$ و $I=]0;+\infty[$

$q(x)=\dfrac{x-1+\ln(x+1)}{x+1}$ و $I=]-1;+\infty[$

التمريـــــن 02
الحـل

لتكن G و g دالتين معرفتين على $]0;+\infty[$ بـ:

$$G(x)=(ax+b)\ln x \quad \text{و} \quad g(x)=\frac{2x-3+2x\ln x}{x}$$

1. عيّن العددين الحقيقين a و b حتى تكون G دالة أصلية للدالة g على $]0;+\infty[$
2. استنتج دالة أصلية للدالة g تنعدم من أجل e

التمريـــــن 03
الحـل

لتكن f دالة معرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\left(1-\frac{1}{x}\right)(\ln x-2)$

1. بيّن أن $x\longmapsto x\ln x-x$ دالة أصلية للدالة $x\longmapsto \ln x$ على $]0;+\infty[$
2. استنتج عبارة F الدالة الأصلية للدالة f على $]0;+\infty[$ والتي تحقق $F(1)=-3$

التمريـــــن 04
الحـل

لتكن f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=xe^{2x+2}-x+1$

1. تحقق أنه من أجل كل $x\in\mathbb{R}$ لدينا:

$$2f(x)+f'(x)-f''(x)=1-2x-3e^{2x+2}$$

2. استنتج دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$

التمريـــــن 05
الحـل

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{-2;2\}$ بـ:

$$f(x)=\frac{1}{x^{2}-4}$$

❶ جد عددين حقيقين a و b حيث من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}-\{-2;2\}$ لدينا:

$$f(x)=\frac{a}{x-2}+\frac{b}{x+2}$$

❷ استنتج دالة أصلية F للدالة f والتي تحقق $F(0)=1$

التمرين 06
الحل

احسب $I=\int_0^1 (x+2)e^x dx$ باستعمال المكاملة بالتجزئة

التمرين 07
الحل

باستعمال المكاملة بالتجزئة، جد دالة أصلية للدالة $x\longmapsto \ln x$

التمرين 08
الحل

باستعمال التكامل بالتجزئة احسب ما يلي:

❶ $$\int_0^2 (2x-3)e^{2x}dx$$

❷ $$\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}dx$$

❸ $$\int_0^\pi (x^2-1)\cos x\, dx$$

❹ $$\int_0^{\ln 2} \frac{t}{e^t}dt$$

❺ $$\int_1^e x\ln x\, dx$$

التمرين 09
الحل

عيّن دالة أصلية للدالة f تنعدم من أجل a في كل حالة مما يلي:

❶ $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$ $\quad a=1\quad I=\mathbb{R}$

❷ $f(x)=\dfrac{x^2}{e^x}$ $\quad a=0\quad I=\mathbb{R}$

التمرين 10
الحل

f الدالة العددية المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ:

$$f(x)=x-x^2\ln x$$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

λ عدد حقيقي حيث: $0<\lambda<1$، نعتبر:

$$A(\lambda) = \int_{\lambda}^{1} (-x^2 \ln x) dx$$

❶ باستعمال المكاملة بالتجزئة، احسب $A(\lambda)$ بدلالة λ

❷ احسب $\lim\limits_{\substack{\lambda \to 0 \\ >}} A(\lambda)$، ثم فسر النتيجة هندسيا

التمرين 11

الحل

f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x) = -x + (x^2 + 3x + 2)e^{-x}$$

و (C_f) تمثيلها البياني في المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

g و G الدالتان المعرفتان على $\mathbb{R}$ بـ:

$$g(x) = x + f(x)$$
$$G(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$$

❶ عين الأعداد الحقيقية a ، b و c حتى تكون الدالة G دالة أصلية للدالة g على $\mathbb{R}$

❷

أ/ احسب التكامل التالي: $A(\lambda) = \int_0^{\lambda} g(x)dx$ حيث: λ عدد حقيقي موجب تماما، وفسر النتيجة بيانيا

ب/ احسب $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} A(\lambda)$

التمرين 12

الحل

f الدالة العددية المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ:

$$f(x) = \frac{3 + 2\ln x}{x}$$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

من أجل كل عدد حقيقي n نضع:

$$u_n = \int_{e^n}^{e^{n+1}} f(x)dx$$

❶ بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n > 0$

❷ أعطِ تفسيرا هندسيا للعدد u_0

❸ احسب u_n بدلالة n

❹ نضع: $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ ، احسب S_n بدلالة n

التمرين 13

الحل

f و g دالتان عدديتان معرفتان على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x) = (x+1)^2 e^{-2x}$$
$$g(x) = (x+1)e^{-2x}$$

و(C_f) هو المنحنى الممثل للدالة f في مستوي منسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

❶ بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإنّ: $g'(x) + 2g(x) - e^{-2x} = 0$ ، ثم استنتج دالة أصلية للدالة g على $\mathbb{R}$

❷ باستعمال المكاملة بالتجزئة، احسب A مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) ومحور الفواصل والمستقيمين الذين معادلتيهما $x = -1$ و $x = 0$

التمريـــــن 14
الحـــل

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. (تؤخذ وحدة الطول $2cm$)

(C_f) و (C_g) التمثيلان البيانيان للدالتين f و g المعرفتين كما يلي:

$$f(x) = e^x - ex^2 \qquad ; \qquad g(x) = e^x - ex$$

❶ ادرس الوضع النسبي للمنحنيين (C_f) و (C_g)

❷ احسب بالسنتمتر المربع A مساحة الحيز المستوي المحدد بـ (C_f) و (C_g) والمستقيمات ذات المعادلات $x = 0$ و $x = 1$

3.

التمارين الواردة في البكالوريات السابقة

[شعبة: علوم تجريبية]

انقر على كلمة **الحل** في كل تمرين للانتقال إليه

الحل
بكالوريا 2008
شعبة علوم تجريبية
الموضوع الأول
01

نعتبرالدالة g للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $]2;+\infty[$ كما يلي:

$$g(x) = (-x-1)e^{-x} + 1$$

H الدالة العددية المعرفة على $]2;+\infty[$ كما يلي:

$$H(x) = (\alpha x + \beta)e^{-x}$$

حيث α و β عددان حقيقيان.

1. عين α و β بحيث تكون H دالة أصلية للدالة $x \longmapsto g(x) - 1$
2. استنتج الدالة الأصلية للدالة g والتي تنعدم عند القيمة 0.

الحل
بكالوريا 2008
شعبة علوم تجريبية
الموضوع الثاني
02

f هي الدالة العددية المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ كما يلي:

$$f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 2}{(x+1)^2}$$

1. اكتب $f(x)$ على الشكل:

$$f(x) = a + x + \frac{b}{(x+1)^2}$$

حيث a و b عددان حقيقيان.

2. عين F الدالة الأصلية للدالة f على المجال $]-1;+\infty[$ والتي تحقق: $F(1) = 2$

الحل
بكالوريا 2009
شعبة علوم تجريبية
الموضوع الأول
03

k دالة معرفة على $\mathbb{R} - \{-1\}$ كما يلي:

$$k(x) = |x| + \frac{4}{x+1}$$

- احسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_k) والمستقيمات التي معادلاتها:

$x = -\frac{1}{2}$ ، $x = \frac{1}{2}$ ، $y = 0$

الحل
بكالوريا 2009
شعبة علوم تجريبية
الموضوع الثاني
04

لتكن f دالة معرفة على $]-1;+\infty[$ كما يلي:

$$f(x) = x - 1 - \frac{\ln(x+1)}{x+1}$$

- احسب مساحة الحيز المستوي المحدود بالمنحنى (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها:

$y = x - 1$ و $x = 0$ و $x = 1$

الحل

05
بكالوريا 2011
شعبة علوم تجريبية
الموضوع الأول

لتكن الدالة f المعرفة على المجال $]1;+\infty[$ بـ:

$$f(x)=\frac{x-1}{x+1}+\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

❶ α عدد حقيقي،
بين أن الدالة $x\mapsto(x-\alpha)\ln(x-\alpha)-x$ هي دالة أصلية للدالة $x\mapsto\ln(x-\alpha)$ على المجال $]\alpha;+\infty[$.

❷ تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]1;+\infty[$ ، $g(x)=1-\frac{2}{x+1}$، ثم عين دالة أصلية للدالة f على المجال $]1;+\infty[$.

الحل

06
بكالوريا 2011
شعبة علوم تجريبية
الموضوع الثاني

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x)=e^x-ex-1$$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

❶ احسب بدلالة α، المساحة $A(\alpha)$ للحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) وحامل محور الفواصل والمستقيمين الذين معادلتيهما $x=0$ و $x=\alpha$.

❷ اثبت أنّ $A(\alpha)=\left(\frac{1}{2}e\alpha^2-e\alpha+\alpha\right)u.a$ ($u.a$ هي وحدة المساحات).

الحل

07
بكالوريا 2012
شعبة علوم تجريبية
الموضوع الأول

لتكن الدالة f المعرفة على المجال $]-\infty;0[$ كما يلي:

$$f(x)=x+5+6\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$$

ولتكن g الدالة المعرفة على $]-\infty;0[$ كما يلي:

$$g(x)=\frac{x^2}{2}+5x+6x\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)+6\ln(1-x)$$

• بين أنّ g دالة أصلية للدالة f على المجال $]-\infty;0[$.

الحل

08
بكالوريا 2012
شعبة علوم تجريبية
الموضوع الثاني

لتكن g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$g(x)=1-xe^x$$

ولتكن الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$h(x) = (ax+b)e^x$$

❶ عين العددين الحقيقين a و b بحيث تكون h دالة أصلية لـ $x \longmapsto xe^x$ على $\mathbb{R}$

❷ استنتج دالة أصلية للدالة g على $\mathbb{R}$.

09 بكالوريا 2015 شعبة علوم تجريبية الموضوع الأول — الحل

f الدالة العددية المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ:

$$f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)(\ln x - 2)$$

و (C_f) تمثيلها البياني.

F الدالة الأصلية للدالة f على المجال $]0;+\infty[$ والتي تحقق $F(1) = -3$

❶ بين أن منحنى الدالة F يقبل مماسين موازيين لحامل محور الفواصل في نقطتين يُطلب تعيين فاصلتيهما.

❷ بين أنّ $x \longmapsto x\ln x - x$ هي دالة أصلية للدالة $x \longmapsto \ln x$ على المجال $]0;+\infty[$ ، ثم استنتج عبارة الدالة F.

10 بكالوريا 2015 شعبة علوم تجريبية الموضوع الثاني — الحل

f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x) = xe^{2x+2} - x + 1$$

وَ (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

❶ تحقق أنه من أجل كل $x \in \mathbb{R}$:

$$2f(x) + f'(x) - f''(x) = 1 - 2x - 3e^{2x+2}$$

❷ استنتج دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.

11 بكالوريا 2016 | الدورة 1 شعبة علوم تجريبية الموضوع الأول — الحل

f الدالة العددية المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ:

$$f(x) = \frac{\ln x}{x} + x - 1$$

و (C_f) تمثيلها البياني في المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

❶ جد دالة أصلية للدالة $x \longmapsto \frac{\ln x}{x}$ على المجال $]0;+\infty[$.

❷ احسب I_n مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) ، المستقيم (Δ) والمستقيمين اللذين معادلتيهما:

$x = 1$ و $x = n$ حيث n عدد طبيعي $(n > 1)$.

❸ عين أصغر عدد طبيعي n_0 بحيث إذا كان $n > n_0$ فإن: $I_n > 2$.

الحل بكالوريا 2016 | الدورة 1 شعبة علوم تجريبية الموضوع الثاني 12

f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = -x + (x^2 + 3x + 2)e^{-x}$

و (C_f) تمثيلها البياني في المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

h و H الدالتان المعرفتان على $\mathbb{R}$ بـ:

$$h(x) = x + f(x)$$
$$H(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$$

❶ عين الأعداد الحقيقية a ، b و c حتى تكون الدالة H دالة أصلية للدالة h على $\mathbb{R}$

❷ احسب التكامل التالي: $A(\lambda) = \int_0^{\lambda} h(x)dx$ حيث: λ عدد حقيقي موجب تماما، وفسر النتيجة بيانيا

❸ احسب $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} A(\lambda)$

الحل بكالوريا 2016 | الدورة 2 شعبة علوم تجريبية الموضوع الأول 13

لتكن الدالة f المعرفة على المجال $]-1; +\infty[$ بـ:

$$f(x) = \frac{e}{x+1} + \frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}$$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

❶ بين أن الدالة $x \mapsto \frac{-1}{x+1}[1 + \ln(x+1)]$ هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto \frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}$ على المجال $]-1; +\infty[$.

❷ احسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) وحامل محور الفواصل والمستقيمين الذين معدلتيهما على التوالي: $x = 0$ و $x = 1$.

الحل بكالوريا 2017 | الدورة 1 شعبة علوم تجريبية الموضوع الثاني 14

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f(x) = 2 - x^2e^{1-x}$$

F الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$F(x) = 2x + (x^2 + 2x + 2)e^{1-x}$$

- تحقق أنّ F دالة أصلية لـ f على $\mathbb{R}$ ، ثم احسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) وحامل محور الفواصل والمستقيمين الذين معادلتيهما: $x = 0$ و $x = 1$.

الحل بكالوريا 2017 | الدورة 2 شعبة علوم تجريبية الموضوع الأول 15

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي:

$$f(x) = e^{-x} - 2 - \frac{e}{x}$$

و (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

❶ بين أن المنحنى (γ) الذي معادلته: $y = e^{-x} - 2$ والمنحنى (C_f) متقاربان بجوار $-\infty$، ثم ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى (γ).

❷ ليكن n عددا طبيعيا و $A(n)$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنيين (C_f) و (γ) والمستقيمين الذين معادلتيهما: $x = -e^{n+1}$ و $x = -e^{n}$:

- احسب العدد الحقيقي l حيث: $l = A(0) + A(1) + \cdots + A(2016)$

16 بكالوريا 2017 | الدورة 2 شعبة علوم تجريبية الموضوع الثاني — الحل

لتكن الدالة g المعرفة على $\left]-\frac{1}{2}; +\infty\right[$ كما يلي:

$$g(x) = 2[-x + \ln(2x + 1)]$$

❶

أ/ ادرس اتجاه تغير الدالة g.

ب/ بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين أحدهما معدوم والآخر α حيث $1.2 < \alpha < 1.3$

ج/ استنتج إشارة $g(x)$.

❷ نضع من أجل كل عدد طبيعي n أكبر تماما من الـ 1:

$$I_n = \int_{n}^{n+1} f(x)dx$$

- اثبت أن: من أجل كل $x \geq \frac{3}{2}$: $0 < f(x) < \frac{1}{2x+1}$ ، ثم استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty} I_n$.

17 بكالوريا 2018 شعبة علوم تجريبية الموضوع الأول — الحل

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x) = 2x + 1 - xe^{-x}$$

و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

❶ باستعمال المكاملة بالتجزئة عين الدالة الأصلية للدالة $x \longmapsto xe^{-x}$ على $\mathbb{R}$ والتي تنعدم من أجل $x = 1$

❷ احسب العدد A مساحة الحيز المتسوي المحدد بالمنحني (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها:

$x = 1$ ، $x = 3$ و $y = 2x + 1$.

18 بكالوريا 2018 شعبة علوم تجريبية الموضوع الثاني — الحل

f الدالة العددية ذات المتغير الحقيقي x المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ:

$$f(x) = \frac{1 + \ln x}{1 + x\ln x}$$

و (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

n عدد طبيعي حيث $n > 1$، I_n مساحة الحيز من المستوي المحدد بحامل محور الفواصل والمنحني (C_f) والمستقيمين الذين معادلتيهما $x = 1$ و $x = n$.

❶ بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n حيث: $n > 1$: $I_n = \ln(1 + n\ln n)$.

❷ ادرس اتجاه تغير المتتالية (I_n).

19 بكالوريا 2019 شعبة علوم تجريبية الموضوع الأول — الحل

f الدالة العددية المعرفة على $]0;2[\cup]2;+\infty[$ بـ:

$$f(x) = \frac{1}{x-2} + \ln x$$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

H الدالة المعرفة على المجال $H(x) = \int_3^x \ln(t)\,dt$ حيث t متغير حقيقي موجب تماما.

❶ باستعمال المكالمة بالتجزئة، عين عبارة $H(x)$ بدلالة x.

❷ احسب $\mathcal{A}$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) وحامل محور الفواصل والمستقيمين ذوي المعادلتين:

$x = 3$ وَ $x = 4$

20 بكالوريا 2019 شعبة علوم تجريبية الموضوع الثانى — الحل

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$. (تؤخذ وحدة الطول $2cm$)

(C_f) و (C_g) التمثيلان البيانيان للدالتين f و g المعرفتين كما يلي:

$$f(x) = e^x - \frac{1}{2}ex^2 \quad ; \quad g(x) = e^x - ex$$

❶ ادرس الوضع النسبي للمنحنين (C_f) و (C_g) .

❷ احسب بالسنتمتر المربع مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنيين (C_f) و (C_g) والمستقيمات ذات المعادلات:

$x = 0$ و $x = 2$

4.

التمارين الواردة في البكالوريات السابقة

[شعبة: تقني رياضي]

انقر على كلمة الحل في كل تمرين للانتقال إليه

الحل — بكالوريا 2009 شعبة تقني رياضي الموضوع الأول 01

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f(x) = x + \frac{2}{e^x + 1}$$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$

نقبل أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α بحيث: $-1.7 < \alpha < -1.6$

❶ بيّن أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$:

$$f(x) = x + \frac{2e^{-x}}{e^{-x} + 1}$$

❷

أ/ احسب $A(\alpha)$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات ذات المعادلات:

$y = x + 2$ ، $x = 0$ و $x = \alpha$

ب/ بيّن أنّ $A(\alpha) = 2\ln(-\alpha)$ ، ثم استنتج حصرا للعدد $A(\alpha)$

الحل — بكالوريا 2011 شعبة تقني رياضي الموضوع الأول 02

g الدالة العددية المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي:

$$g(x) = \frac{1 + 2\ln 2x}{4x^2}$$

و (C_g) المنحنى الممثل لها في المستوي المنسوب إلى المعلم السابق.

h الدالة العددية المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي:

$$h(x) = \frac{1 + \ln 2x}{2x}$$

❶ احسب $h'(x)$.

❷ تحقق أنّ:

$$g(x) = \frac{1}{4x^2} + \frac{\ln 2x}{2x^2}$$

❸ استنتج دالة أصلية للدالة g على المجال $]0;+\infty[$

الحل — بكالوريا 2014 شعبة تقني رياضي الموضوع الثاني 03

f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = (x-1)e^x$

(C_f) تمثيلها البياني في المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

g دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = (ax+b)e^x$ ، حيث a ، b عددان حقيقيان:

- عيّن a و b حتى يكون: من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $g'(x) = f(x)$

04 — الحل
بكالوريا 2015
شعبة تقني رياضي
الموضوع الأول

f الدالة المعرفة على المجال $]-2;+\infty[$ بما يلي:

$$f(x)=x+1+\frac{2}{x+2}\ln(x+2)$$

و (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ (وحدة الطول $1cm$)

- احسب بالسنتمر المربع، مساحة الحيز المحدد المنحنى (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها $y=0$، $x=-1$ و $x=1$.

05 — الحل
بكالوريا 2015
شعبة تقني رياضي
الموضوع الثاني

f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي:

$$f(x)=2x+3-(x+1)e^x$$

و (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=2x+3$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $-\infty$، ثم ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ).
2. بين أن الدالة $x\longmapsto xe^x$ هي دالة أصلية للدالة $x\longmapsto (x+1)e^x$ على $\mathbb{R}$.
3. احسب A مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) والمستقيمين الذين معادلتيهما: $x=0$ ، $x=\alpha$ (حيث $0.92<\alpha<0.93$).
4. جد حصرا للعدد A.

06 — الحل
بكالوريا 2016
شعبة تقني رياضي
الموضوع الأول

نعتبر f الدالة العددية المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ كما يلي:

$$f(x)=1+(x-1)\ln(x+1)$$

والدالة H المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ:

$$H(x)=\frac{1}{2}(x^2-2x-3)\ln(x+1)-\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{2}x$$

1. بين أن الدالة H دالة أصلية للدالة $x\longmapsto(x-1)\ln(x+1)$ على المجال $]-1;+\infty[$.
2. علما أن $f(x)>0$

- احسب مساحة الحيز المستوي المحدد المنحنى (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها $y=0$ ، $x=1$ و $x=2$.

07 — الحل
بكالوريا 2017 الدورة 1
شعبة تقني رياضي
الموضوع الأول

لتكن الدالة العددية f المعرفة على D_f حيث: $D_f=\ ]-\infty;1[\ \cup\ ]2;+\infty[$ كما يلي:

$$f(x) = -2x + 3 + 2\ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right)$$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

نضع $\beta = 3 - \alpha$ حيث $0.45 < \alpha < 0.46$ (قيمة β مطلوب اثباتها في التمرين)

❶ بين أنّ المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = -2x + 3$ مقارب مائل لـ (C_f)، ثم ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ)

❷ بين أن الدالة $x \mapsto (x-1)\ln(x-1) - (x-2)\ln(x-2)$ أصلية للدالة $x \mapsto \ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right)$ على $]2;+\infty[$

❸ احسب بدلالة β مساحة الحيز المستوي المحدد المنحنى (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها:

$y = -2x + 3$ ، $x = \beta$ و $x = 3$

الحل

بكالوريا 2017 الدورة 1
شعبة تقني رياضي
الموضوع الثاني
08

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f(x) = \left(\frac{x^3 - 6}{x^2 + 2}\right)$$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

لدينا: $\alpha \in \ ]-1.48;-1.47[$ ، $f(\alpha) = \frac{3}{2}\alpha$ ، $f(x) < 0$ لما $x \in [\alpha;0]$ ، الدالة f متناقصة لما $x \in [\alpha;0]$

نرمز بـ S إلى مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها $x = \alpha$ ، $x = 0$ و $y = 0$.

❶ اثبت أنه من أجل كل $x \in [\alpha;0]$ ، $-3 \le f(x) \le f(\alpha)$

❷ بين أنّ:

$$\frac{3}{2}\alpha^2 \le S \le -3\alpha$$

الحل

بكالوريا 2017 الدورة 2
شعبة تقني رياضي
الموضوع الأول
09

نعتبر الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي:

$$f(x) = -\frac{1}{2}x + 2 + \frac{-1+\ln x}{x}$$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ حيث: $\|i\| = 1cm$

❶

أ/ بين أنّ المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = -\frac{1}{2}x + 2$ مقارب مائل للمنحنى (C_f)

ب/ ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ)

❷ ليكن λ عدد حقيقي حيث $1 < \lambda \le e$، نرمز بـ $A(\lambda)$ إلى مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) والمستقيمين اللذين معادلتاهما: $x = 1$ و $x = \lambda$.

أ/ احسب $A(\lambda)$ بدلالة λ.

ب/ عين قيمة λ حيث: $A(\lambda) = \frac{1}{2}cm^2$.

10 بكالوريا 2017 الدورة 2 شعبة تقني رياضي الموضوع الثاني — الحل

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f(x) = (x+1)(1+2e^{-x})$$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ حيث: $\|i\| = 1cm$

❶

أ/ بين أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-x] = 1$ ، ثم استنتج معادلة لـ (Δ) ، المستقيم المقارب المائل للمنحنى (C_f)

ب/ ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ).

❷ ليكن α عددا حقيقيا موجبا، نرمز بـ $A(\alpha)$ إلى مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) وبالمستقيمات التي معادلاتها على الترتيب: $y = x+1$ ، $x = -1$ و $x = \alpha$.

- احسب $A(\alpha)$ بدلالة α ، ثم $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} A(\alpha)$.

11 بكالوريا 2018 شعبة تقني رياضي الموضوع الأول — الحل

f الدالة العددية المعرفة على المجال $]-\infty;1[$ بـ:

$$f(x) = \frac{x}{x-1}e^{-x}$$

و (C_f) تمثيلها البياني في المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

❶ بين أنّه من أجل كل x من $[-1;0]$:

$$\frac{x}{x-1} \le f(x) < e^{-x}$$

❷ تحقق أنه من أجل كل x من $[-1;0]$:

$$\frac{x}{x-1} = 1 + \frac{1}{x-1}$$

❸ بيّن أنّ:

$$1 - \ln 2 \le \int_{-1}^{0} f(x)dx < e - 1$$

12 بكالوريا 2019 شعبة تقني رياضي الموضوع الثاني — الحل

f الدالة المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ:

$$f(x) = \ln(x+1) + \frac{e\ln x}{x+1}$$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

نقبل أنه من أجل كل x من المجال $]1;+\infty[$: $\ln x < x+1$:

❶ بين أنه من أجل كل x من المجال $]1;+\infty[$: $\ln 2 < f(x) < e + \ln(x+1)$

❷ تحقق أنه من أجل كل x من المجال $]1;+\infty[$:

الدالة: $x \mapsto (x+1)\ln(x+1) - x$ ، هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto \ln(x+1)$.

❸ S مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) وحامل محور الفواصل والمستقيمين الذلين معادلتاهما:

$x = e - 1$ و $x = e^2 - 1$

- بين أنّ: $(e^2 - e)\ln 2 < S < e^3$

.5

التمارين الواردة في البكالوريات السابقة

[شعبة: رياضيات]

انقر على كلمة الحل في كل تمرين للانتقال إليه

01 بكالوريا 2011 شعبة رياضيات الموضوع الأول — الحل

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f(x) = (3x+4)e^x$$

الدالة f متزايد تماما على $\left]-\frac{4}{3};+\infty\right[$ و $f\left(-\frac{4}{3}\right)=0$

1. x عدد حقيقي من المجال $]-\infty;0]$، باستعمال التكامل بالتجزئة جد:

$$\int_{-1}^{x}(te^t)dt$$

ثم جد دالة أصلية للدالة f على المجال $]-\infty;0]$

2. λ عدد حقيقي أصغر تماما من $-\frac{4}{3}$:

- احسب بدلالة λ المساحة $A(\lambda)$ للحيز من المستوي المحدد بـ (C_f) والمستقيمات ذات المعادلات:

$$x=\lambda \ \text{،}\ x=-\frac{4}{3} \ \text{،}\ y=0$$

ثم جد $\lim\limits_{\lambda\to-\infty} A(\lambda)$

02 بكالوريا 2011 شعبة رياضيات الموضوع الثاني — الحل

f الدالة العددية المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي:

$$f(x)=\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\ln x$$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

و (δ) التمثيل البياني للدالة $x\longmapsto \ln x$ على المجال $]0;+\infty[$

1.
أ/ ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (δ)

ب/ جد $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^2}\ln x\right)$، ماذا تستنتج؟

2.
أ/ x عدد حقيقي من المجال $[1;+\infty[$، باستعمال التكامل بالتجزئة جد:

$$\int_{1}^{x}\left(\frac{1}{t^2}\ln t\right)dt$$

ب/ تحقق أنّ: $x\longmapsto x\ln x - x$ هي دالة أصلية للدالة $x\longmapsto \ln x$ على المجال $[1;+\infty[$

ج/ استنتج دالة أصلية للدالة f على المجال $[1;+\infty[$

3. α عدد حقيقي أكبر تماما من 1

- احسب بدلالة α المساحة $A(\alpha)$ للحيز من المستوي المحدد بـ (C_f) و (δ) والمستقيمات ذات المعادلات:

$$x=\alpha \quad \text{و} \quad x=1$$

ثم جد $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} A(\alpha)$

03 بكالوريا 2013 شعبة رياضيات الموضوع الأول — الحل

الدالة f معرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ:

$$f(x)=e^x-ex+\frac{\ln x}{x}$$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

الدالة f متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$

1. احسب $f(1)$
2. احسب مساحة الحيز المستوي المحدد بـ (C_f) وحامل محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتاهما:

$$x=\frac{1}{2} \quad \text{و} \quad x=2$$

04 بكالوريا 2013 شعبة رياضيات الموضوع الثاني — الحل

الدالة f معرفة على المجال $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x)=x-(x+1)^2e^{-x}$$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

(Δ) مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$ حيث لما $x\in]-1;+\infty[$ لدينا: $f(x)<y_{(\Delta)}$

الدالة H معرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$H(x)=(-x^2-4x-5)e^{-x}$$

1. بيّن أنّ الدالة H دالة أصلية للدالة $x\longmapsto(x+1)^2e^{-x}$
2. احسب بالسنتيمتر المربع، مساحة الحيز المستوي المحدد بـ (C_f) والمستقيم (Δ) والمستقيمين اللذين معادلتاهما:

$$x=-1 \quad \text{و} \quad x=0$$

05 بكالوريا 2014 شعبة رياضيات الموضوع الأول — الحل

f الدالة العددية المعرفة على على المجال $]0;+\infty[$ بـ:

$$f(x)=\frac{e^x-1}{e^x-x}$$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

λ عدد حقيقي أكبر أو يساوي 1

1. احسب بدلالة العدد λ العدد $a(\lambda)$ حيث:

$$a(\lambda)=\int_1^{\lambda}(f(x)-1)dx$$

2. احسب نهاية $a(\lambda)$ لما يؤول λ إلى $+\infty$

06 بكالوريا 2014 شعبة رياضيات الموضوع الثاني — الحل

f الدالة العددية المعرفة على على المجال $]0;+\infty[$ بـ:

$$f(x)=(1+2\ln x)(-1+\ln x)$$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

g الدالة العددية المعرفة على على المجال $]0;+\infty[$ بـ:

$$g(x)=1-\ln x$$

و (C_f) تمثيلها البياني في المعلم السابق

1. عيّن الوضع النسبي بين (C_f) و (C_g)
2. نعتبر الدالة h المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ:

$$h(x)=x(\ln x)^2-2x\ln x+2x$$

أ/ احسب $h'(x)$، واستنتج دالة أصلية للدالة $x\longmapsto(\ln x)^2$ على $]0;+\infty[$

ب/ احسب العدد:

$$\int_{e^{-1}}^{e}(f(x)-g(x))dx$$

07 بكالوريا 2015 شعبة رياضيات الموضوع الأول — الحل

f الدالة المعرفة على بـ $f(0)=1$ ومن أجل كل عدد حقيقي x من $]0;+\infty[$:

$$f(x)=1-x^2\ln x$$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

والدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$g(x)=f(|x|)$$

و (C_g) تمثيلها البياني في المعلم السابق

المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]0;+\infty[$ حيث $1.531<\alpha<1.532$

1. باستعمال المكاملة بالتجزئة، عين الدالة الأصلية للدالة $x\longmapsto x^2\ln x$ المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ والتي تنعدم من أجل القيمة 1
2. t عدد حقيقي ينتمي إلى المجال $]0;\alpha]$، نضع:

$$F(t)=\int_{t}^{\alpha}f(x)dx$$

أ/ اكتب العبارة $F(t)$ بدلالة t و α

ب/ بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي t من المجال $]0;\alpha]$ لدينا:

$$F(t)=\frac{-3tf(t)-t^3-6t+\alpha^3+6\alpha}{9}$$

ج/ احسب $\lim\limits_{\substack{t\to 0\\ >}}F(t)$

3. m عدد حقيقي ينتمي إلى المجال $]0;\alpha]$

$S(m)$ مساحة الدائرة ذات المركز المبدأ O ونصف القطر m

الخليل للرياضيات

نفرض أنّ مساحة الحيز المستوي المحدد بـ (C_g) وحامل محور الفواصل والمستقيمين الذين معادلتيهما على الترتيب:

$x = -\alpha$ و $x = \alpha$ هي: $\mathcal{A}$ حيث: $\mathcal{A} = \frac{2}{9}(\alpha^3 + 6\alpha)u.a$ ($u.a$ هي وحدة المساحات)

أ/ عيّن القيمة المضبوطة لـ m حتى يكون $\mathcal{S}(m) = 2\mathcal{A}$

ب/ علما أنّ $3.140 < \pi < 3.142$، أعط حصرا للعدد m

08 بكالوريا 2016 شعبة رياضيات الموضوع الأول — الحل

f الدالة العددية المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ:

$$f(x) = -x + \frac{3 + 2\ln x}{x}$$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

❶

أ/ احسب $\lim_{x\to+\infty}[f(x) + x]$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا

ب/ ادرس الوضع النسبي بين (C_f) والمستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = -x$

❷ من أجل كل عدد حقيقي n نضع:

$$u_n = \int_{e^n}^{e^{n+1}} (f(x) + x)dx$$

أ/ بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n > 0$

ب/ أعطِ تفسيرا هندسيا للعدد u_0

ج/ احسب u_n بدلالة n

د/ نضع: $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ ، احسب S_n بدلالة n

09 بكالوريا 2016 شعبة رياضيات الموضوع الثاني — الحل

f و g دالتان معرفتان على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$g(x) = \frac{2x-1}{x^2 - x + 1} \quad \text{و} \quad f(x) = (2x-1)e^{-x+1}$$

و (C_f) و (C_g) تمثيليها البيانيين في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

علما أنّ $f(x) \geq g(x)$ على المجال $[1;2]$

❶ باستعمال المكاملة بالتجزئة، احسب بدلالة العدد الحقيقي x: $\int_1^x f(t)dt$

❷ احسب مساحة الحيز المحدد بـ (C_f) و (C_g) والمستقيمات ذات المعادلة $x = 1$ و $x = 2$

10 بكالوريا 2017 الدورة 2 شعبة رياضيات الموضوع الأول — الحل

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي:

الخليل للرياضيات

$$f(x)=\frac{1}{2}\left(-x+e-\frac{\ln x^2}{x}\right)$$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ حيث: $\|\vec{\imath}\|=1cm$

المستقيم (Δ) ذو المعادلة $2y=-x+e$ مقارب مائل لـ (C_f) حيث: (C_f) تحت (Δ) لما $x>1$

(C_f) يقطع حامل محور الفواصل في النقطتين ذات الفاصلتين α و β حيث: $2<\alpha<2.1$ و $-0.5<\beta<-0.4$

نرمز بـ $A(\alpha)$ إلى مساحة الحيز المستوي المحدد بـ (C_f) والمستقيمات ذات المعادلات $x=\alpha$ ، $x=1$ و $x+2y=e$

- تحقّق أنّ $A(\alpha)=\frac{1}{2}(\ln\alpha)^2cm^2$

11 بكالوريا 2017 الدورة 2 شعبة رياضيات الموضوع الثاني — الحل

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ حيث: $\|\vec{\imath}\|=1cm$

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=(x+1)^2e^{-x}$ ، و (C) تمثيلها البياني

وليكن m وسيط حقيقي، نعتبر الدالة f_m المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f_m(x)=(x^2+mx+1)e^{-x}$$

و (C_m) تمثيلها البياني

1. ادرس حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، حيث $m\neq 2$ ، الوضعية النسبية للمنحنيين (C) و (C_m)
2. احسب بدلالة العدد الحقيقي الموجب تماما α، $A(\alpha)$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنيين (C) و (C_3) والمستقيمين الذين معادلتيهما: $x=\alpha$ و $x=0$
3. احسب $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}A(\alpha)$

12 بكالوريا 2018 شعبة رياضيات الموضوع الأول — الحل

f الدالة العددية المعرفة على $]1;+\infty[\,\cup\,]0;1[$ بـ:

$$\begin{cases} f(x)=x+1-\dfrac{1}{\ln x} & ;\quad x\in\mathbb{R}_+^*-\{1\} \\ f(0)=1 \end{cases}$$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$

المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث: $1.49<\alpha<1.5$

لدينا من أجل كل $x>1$:

$$x-\frac{1}{x\ln x}<f(x)<x+1$$

A مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) وحامل محور الفواصل والمستقيمين الذين معادلتيهما: $x=\alpha$ و $x=e$

- بيّن أنّ:

$$\frac{1}{2}(e^2-\alpha^2)-\ln(\alpha-1)<A<\frac{1}{2}(e-\alpha)(e+\alpha+2)$$

13 بكالوريا 2019 شعبة رياضيات الموضوع الأول — الحل

f الدالة العددية المعرفة على $[0;+\infty[$ بـ:

$$\begin{cases} f(x) = x - x^2 \ln x \quad ; \quad x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ ، الوحدة $3cm$

λ عدد حقيقي حيث: $0 < \lambda < 1$، نعتبر:

$$A(\lambda) = \int_{\lambda}^{1} (-x^2 \ln x)dx$$

❶ باستعمال المكاملة بالتجزئة، احسب $A(\lambda)$ بدلالة λ

❷ احسب $\lim\limits_{\substack{> \\ \lambda \to 0}} A(\lambda)$، ثم فسر النتيجة هندسيا

14 بكالوريا 2019 شعبة رياضيات الموضوع الثاني — الحل

f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = (x+1)^2 e^{-2x}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي السابق

g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = (x+1)e^{-2x}$

❶ بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإنّ: $g'(x) + 2g(x) - e^{-2x} = 0$ ، ثم استنتج دالة أصلية للدالة g على $\mathbb{R}$

❷ باستعمال المكاملة بالتجزئة، احسب A مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) ومحور الفواصل والمستقيمين الذين معادلتيهما $x = -1$ و $x = 0$

6.

الحلول -حلول مقترحة-

[تمارين تدريبية]

انقر على كلمة التمرين في كل حل للانتقال إليه

التمريـــن 01
التمرين

- تعيين في كل حالة دالة أصلية للدالة f على I

لدينا: $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}=\dfrac{1}{x}\ln x$

ومنه: $\boxed{F(x)=\dfrac{(\ln x)^2}{2}+c}$

لدينا: $g(x)=e^x(e^x+4)$

ومنه: $\boxed{G(x)=\dfrac{(e^x+4)^2}{2}+c}$

لدينا: $h(x)=\dfrac{1}{x\ln x^2}=\dfrac{\frac{1}{x}}{\ln x^2}=\dfrac{\frac{1}{x}}{2\ln x}=\dfrac{1}{2}\dfrac{\frac{1}{x}}{\ln x}$

ومنه: $\boxed{H(x)=\dfrac{1}{2}\ln|\ln x|+c}$

لدينا: $k(x)=\dfrac{-e^x-2}{(e^x+2x)^2}=-\dfrac{e^x+2}{(e^x+2x)^2}$

ومنه: $\boxed{K(x)=-\dfrac{1}{e^x+2x}+c}$

لدينا: $p(x)=\dfrac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}=-\left(-\dfrac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}\right)$

ومنه: $\boxed{P(x)=-e^{\frac{1}{x}}+c}$

لدينا:

$$\begin{aligned}q(x)&=\frac{x-1+\ln(x+1)}{x+1}\\&=\frac{x-1}{x+1}+\frac{\ln(x+1)}{x+1}\\&=\frac{x+1-2}{x+1}+\frac{\ln(x+1)}{x+1}\\&=\frac{x+1}{x+1}+\frac{-2}{x+1}+\frac{\ln(x+1)}{x+1}\\&=1-2\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+1}\ln(x+1)\end{aligned}$$

ومنه: $\boxed{Q(x)=x-2\ln(x+1)+\dfrac{(\ln(x+1))^2}{2}+c}$

تذكير: $\int u'u^n=\dfrac{u^{n+1}}{n+1}$

تذكير: $\int \dfrac{u'}{u}=\ln|u|$

تذكير: $\int \dfrac{u'}{u^n}=-\dfrac{1}{(n-1)u^{(n-1)}}$

التمريـــن 02
التمرين

❶ تعيين العددين الحقيقين a و b حتى تكون G دالة أصلية للدالة g على $]0;+\infty[$:

$$G'(x)=a\ln x+\frac{1}{x}(ax+b)=\frac{ax\ln x+ax+b}{x}$$

بالمطابقة نجد: $a=2$ و $b=-3$

❷ استنتاج دالة أصلية للدالة g تنعدم من أجل e:

الخليل للرياضيات

لدينا:

$$G(x) = (2x-3)\ln x + c$$

ومنه:

$$G(e) = 0 \implies (2e-3)\ln e + c = 0$$
$$\implies 2e - 3 + c = 0$$
$$\implies c = 3 - 2e$$

وعليه:

$$\boxed{G(x) = (2x-3)\ln x + 3 - 2e}$$

التمرين 03

التمرين

❶ تبيين أن $x \longmapsto x\ln x - x$ دالة أصلية للدالة $x \longmapsto \ln x$ على $]0;+\infty[$:

$$(x\ln x - x)' = \ln x + \frac{1}{x}x - 1$$
$$= \ln x + 1 - 1$$
$$= \ln x$$

❷ استنتاج عبارة F الدالة الأصلية للدالة f على $]0;+\infty[$ والتي تحقق $F(1) = -3$:

لدينا:

$$f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)(\ln x - 2)$$
$$= \ln x - 2 - \frac{1}{x}\ln x + 2\frac{1}{x}$$

وعليه:

$$F(x) = x\ln x - x - 2x - \frac{(\ln x)^2}{2} + 2\ln x + c$$
$$= x\ln x - 3x - \frac{(\ln x)^2}{2} + 2\ln x + c$$

لدينا:

$$F(1) = -3 \implies -3 + c = -3$$
$$\implies c = 0$$

وعليه:

$$\boxed{F(x) = x\ln x - 3x - \frac{(\ln x)^2}{2} + 2\ln x}$$

التمرين 04

التمرين

❶ التحقق أنه من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ لدينا: $2f(x) + f'(x) - f''(x) = 1 - 2x - 3e^{2x+2}$:

لدينا:

$$f'(x) = e^{2x+2} + 2xe^{2x+2} - 1$$

وَ

$$f''(x) = e^{2x+2} + 2e^{2x+2} + 4xe^{2x+2}$$

ومنه:

$$2f(x) + f'(x) - f''(x) = 2xe^{2x+2} - 2x + 2 + e^{2x+2} + 2xe^{2x+2} - 1 - e^{2x+2} - 2e^{2x+2} - 4xe^{2x+2}$$
$$= 1 - 2x - 3e^{2x+2}$$

❷ استنتاج دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$:

لدينا:

$$2f(x)+f'(x)-f''(x)=1-2x-3e^{2x+2} \Longrightarrow 2f(x)=1-2x-3e^{2x+2}-f'(x)+f''(x)$$
$$\Longrightarrow f(x)=\frac{1}{2}-x-\frac{3}{2}e^{2x+2}-\frac{f'(x)}{2}+\frac{f''(x)}{2}$$

ومنه:

$$\begin{aligned}F(x)&=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}\frac{1}{2}e^{2x+2}-\frac{f(x)}{2}+\frac{f'(x)}{2}+c\\&=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{4}e^{2x+2}-\frac{xe^{2x+2}-x+1}{2}+\frac{e^{2x+2}+2xe^{2x+2}-1}{2}+c\\&=\frac{2x-2x^2-3e^{2x+2}-2xe^{2x+2}+2x-2+2e^{2x+2}+4xe^{2x+2}-2}{4}+c\\&=\boxed{\frac{1}{4}(2xe^{2x+2}-e^{2x+2}-2x^2+4x-4)+c}\end{aligned}$$

التمريـــــن 05

التمرين

❶ ايجاد عددين حقيقين a و b حيث من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}-\{-2;2\}$ لدينا: $f(x)=\frac{a}{x-2}+\frac{b}{x+2}$:

لدينا:

$$\begin{aligned}f(x)&=\frac{a}{x-2}+\frac{b}{x+2}\\&=\frac{ax+2a+bx-2b}{(x-2)(x+2)}\\&=\frac{(a+b)x+2a-2b}{x^2-4}\end{aligned}$$

بالمطابقة نجد:

$$\begin{cases}a+b=0\\2a-2b=1\end{cases}$$

ومنه:

$$\begin{cases}2a+2b=0\\2a-2b=1\end{cases}$$

بجمع المعادلتين نجد:

$$4a=1\Longrightarrow \boxed{a=\frac{1}{4}}$$

بالتعويض نجد:

$$\boxed{b=-\frac{1}{4}}$$

ومنه:

$$\boxed{f(x)=\frac{1}{4(x-2)}-\frac{1}{4(x+2)}}$$

❷ استنتج دالة أصلية F للدالة f والتي تحقق $F(0)=1$

لدينا:

$$f(x)=\frac{1}{4(x-2)}-\frac{1}{4(x+2)}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}\right)$$

ومنه:

$$\begin{aligned}F(x)&=\frac{1}{4}(\ln|x-2|-\ln|x+2|)+c\\&=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|+c\end{aligned}$$

لدينا:

$$\begin{aligned}F(1)=0&\Longrightarrow\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|+c=0\\&\Longrightarrow\frac{1}{4}\ln\left|\frac{-2}{2}\right|+c=0\\&\Longrightarrow c=0\end{aligned}$$

وعليه:

$$\boxed{F(x)=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|}$$

التمرين 06

التمرين

- حساب $I=\int_0^1(x+2)e^x dx$ باستعمال المكاملة بالتجزئة:

نضع: $\begin{vmatrix}u'(x)= & 1\\ v(x)= & e^x\end{vmatrix}\Longrightarrow\begin{vmatrix}u(x)= & x+2\\ v'(x)= & e^x\end{vmatrix}$

ومنه:

$$\begin{aligned}&\int_0^1 u(x)v'(x)dx=[u(x)v(x)]_0^1-\int_0^1 u'(x)v(x)dx\\\Longrightarrow&\int_0^1(x+2)e^x dx=[(x+2)e^x]_0^1-\int_0^1 1\cdot e^x dx\\&=[(x+2)e^x]_0^1-[e^x]_0^1\\&=[(x+2)e^x-e^x]_0^1\\&=[(x+1)e^x]_0^1\\&=\boxed{2e-1}\end{aligned}$$

التمرين 07

التمرين

- إيجاد دالة أصلية للدالة $x\longmapsto\ln x$:

نضع: $\begin{vmatrix}u'(x)= & \frac{1}{x}\\ v(x)= & x\end{vmatrix}\Longrightarrow\begin{vmatrix}u(x)= & \ln x\\ v'(x)= & 1\end{vmatrix}$

ومنه:

$$\begin{aligned}\int\ln x\,dx&=\int 1\cdot\ln x\,dx=x\ln x-\int x\cdot\frac{1}{x}dx\\&=x\ln x-\int 1\cdot dx\\&=\boxed{x\ln x-x+c}\end{aligned}$$

التمرين 08

التمرين

❶ $\int_0^2 (2x-3)e^{2x}dx$

نضع: $\left| \begin{aligned} u(x) &= 2x-3 \\ v'(x) &= e^{2x} \end{aligned} \right. \Rightarrow \left| \begin{aligned} u'(x) &= 2 \\ v(x) &= \frac{1}{2}e^{2x} \end{aligned} \right.$

ومنه:

$$\begin{aligned} \int_0^2 (2x-3)e^{2x}dx &= \left[(2x-3)\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^2 - \int_0^2 2\frac{1}{2}e^{2x}dx \\ &= \left[(2x-3)\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^2 - \left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^2 \\ &= \left[(2x-3)\frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^2 \\ &= \left[\frac{1}{2}e^{2x}(2x-3-1)\right]_0^2 \\ &= [e^{2x}(x-2)]_0^2 \\ &= \boxed{2} \end{aligned}$$

❷ $\int_0^\pi (x^2-1)\cos x\, dx$

نضع: $\left| \begin{aligned} u(x) &= x^2-1 \\ v'(x) &= \cos x \end{aligned} \right. \Rightarrow \left| \begin{aligned} u'(x) &= 2x \\ v(x) &= \sin x \end{aligned} \right.$

ومنه:

$$\begin{aligned} &\int_0^\pi (x^2-1)\cos x\, dx \\ &= [(x^2-1)\sin x]_0^\pi - \int_0^\pi 2x\sin x\, dx \end{aligned}$$

نضع: $I = \int_0^\pi 2x\cdot\sin x\, dx$

ونضع: $\left| \begin{aligned} f(x) &= 2x \\ g'(x) &= \sin x \end{aligned} \right. \Rightarrow \left| \begin{aligned} f'(x) &= 2 \\ g(x) &= -\cos x \end{aligned} \right.$

ومنه:

$$\begin{aligned} \int_0^\pi 2x\cdot\sin x\, dx &= [-2x\cos x]_0^\pi - \int_0^\pi -2\cos x\, dx \\ &= [-2x\cos x]_0^\pi - [-2\sin x]_0^\pi \\ &= [-2x\cos x + 2\sin x]_0^\pi \end{aligned}$$

ومنه:

$$\begin{aligned} &\int_0^\pi (x^2-1)\cos x\, dx \\ &= [(x^2-1)\sin x]_0^\pi - \int_0^\pi 2x\cdot\sin x\, dx \\ &= [(x^2-1)\sin x]_0^\pi - [-2x\cos x + 2\sin x]_0^\pi \\ &= [(x^2-1)\sin x + 2x\cos x - 2\sin x]_0^\pi \\ &= \boxed{-2\pi} \end{aligned}$$

❸ $\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}dx$

نضع: $\begin{vmatrix} u(x) = & \ln x \\ v'(x) = & \dfrac{1}{x^2} \end{vmatrix} \Longrightarrow \begin{vmatrix} u'(x) = & \dfrac{1}{x} \\ v(x) = & -\dfrac{1}{x} \end{vmatrix}$

ومنه:

$$\begin{aligned}
\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}dx &= \left[-\frac{1}{x}\cdot \ln x\right]_1^e - \int_1^e -\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}dx \\
&= \left[-\frac{\ln x}{x}\right]_1^e + \int_1^e \frac{1}{x^2}dx \\
&= \left[-\frac{\ln x}{x}\right]_1^e + \left[-\frac{1}{x}\right]_1^e \\
&= \left[-\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}\right]_1^e \\
&= -\frac{1}{e} - \frac{1}{e} - (-1) \\
&= \boxed{1 - \frac{2}{e}}
\end{aligned}$$

❹ $\displaystyle\int_0^{ln\,2} \frac{t}{e^t}dt$

نضع: $\begin{vmatrix} u(t) = & t \\ v'(t) = & e^{-t} \end{vmatrix} \Longrightarrow \begin{vmatrix} u'(t) = & 1 \\ v(t) = & -e^{-t} \end{vmatrix}$

ومنه:

$$\begin{aligned}
\int_0^{ln\,2} \frac{t}{e^t}dt &= [-te^{-t}]_0^{\ln 2} - \int_0^{\ln 2}(-e^{-t})dt \\
&= [-te^{-t}]_0^{\ln 2} - [e^{-t}]_0^{\ln 2} \\
&= [-te^{-t} - e^{-t}]_0^{\ln 2} \\
&= [-e^{-t}(t+1)]_0^{\ln 2} \\
&= -e^{-\ln 2}(\ln 2 + 1) + 1 \\
&= -e^{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}(\ln 2 + 1) + 1 \\
&= -\frac{1}{2}(\ln 2 + 1) + 1 \\
&= \boxed{\frac{1 - \ln 2}{2}}
\end{aligned}$$

❺ $\displaystyle\int_1^e x\,ln\,x\,dx$

نضع: $\begin{vmatrix} u(x) = & \ln x \\ v'(x) = & x \end{vmatrix} \Longrightarrow \begin{vmatrix} u'(x) = & \dfrac{1}{x} \\ v(x) = & \dfrac{x^2}{2} \end{vmatrix}$

ومنه:

$$\begin{aligned}
\int_1^e x\,ln\,x\,dx &= \left[\frac{x^2\ln x}{2}\right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{x}\cdot\frac{x^2}{2}dx \\
&= \left[\frac{x^2\ln x}{2}\right]_1^e - \frac{1}{2}\int_1^e xdx
\end{aligned}$$

$$= \left[\frac{x^2 \ln x}{2}\right]_1^e - \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^e$$
$$= \left[\frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{x^2}{4}\right]_1^e$$
$$= \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} - \left(-\frac{1}{4}\right)$$
$$= \boxed{\frac{e^2+1}{4}}$$

التمرين 09

التمرين

❶ $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ ، $a = 1$

$$F(x) = \int_1^x f(t)dt$$
$$= \frac{1}{2}\int_1^x \frac{2t}{t^2+1}dt$$
$$= \frac{1}{2}[\ln(t^2+1)]_1^x$$
$$= \frac{1}{2}(\ln(x^2+1) - \ln 2)$$
$$= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x^2+1}{2}\right)$$
$$= \boxed{\ln\sqrt{\frac{x^2+1}{2}}}$$

❷ $f(x) = \dfrac{x^2}{e^x}$ ، $a = 0$

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt = \int_0^x t^2 e^{-t}dt$$

نضع: $\left| \begin{aligned} u'(x) &= 2t \\ v(x) &= -e^{-t} \end{aligned} \right. \Longrightarrow \left| \begin{aligned} u(t) &= t^2 \\ v'(t) &= e^{-t} \end{aligned} \right.$

ومنه:

$$\int_0^x t^2 e^{-t}dt = [-t^2 e^{-t}]_0^x - \int_0^x -2te^{-t}dt$$

نضع: $I = \displaystyle\int_0^x -2te^{-t}dt$

و: $\left| \begin{aligned} f'(x) &= -2 \\ g(x) &= -e^{-t} \end{aligned} \right. \Longrightarrow \left| \begin{aligned} f(t) &= -2t \\ g'(t) &= e^{-t} \end{aligned} \right.$

ومنه:

$$I = \int_0^x -2te^{-t}dt = [2te^{-t}]_0^x - \int_0^x 2e^{-t}dt$$
$$= [2te^{-t}]_0^x - [-2e^{-t}]_0^x$$
$$= [2te^{-t} + 2e^{-t}]_0^x$$

$$= [2e^{-t}(t+1)]_0^x$$

ومنه:

$$\int_0^x t^2e^{-t}dt = [-t^2e^{-t}]_0^x - \int_0^x -2te^{-t}dt$$
$$= [-t^2e^{-t}]_0^x - [2e^{-t}(t+1)]_0^x$$
$$= [-t^2e^{-t} - 2e^{-t}(t+1)]_0^x$$
$$= [-e^{-t}(t^2+2t+2)]_0^x$$
$$= \boxed{-e^{-x}(x^2+2x+2)+2}$$

التمريـــن 10

التمرين

❶ حساب $A(\lambda)$ بدلالة λ:

$$A(\lambda) = \int_\lambda^1 (-x^2\ln x)dx$$

نضع:
$$\left|\begin{array}{l} u(x) = \ln x \\ v'(x) = -x^2 \end{array}\right. \Rightarrow \left|\begin{array}{l} u'(x) = \frac{1}{x} \\ v(x) = -\frac{x^3}{3} \end{array}\right.$$

ومنه:

$$A(\lambda) = \int_\lambda^1 (-x^2\ln x)dx$$
$$= \left[-\frac{x^3\ln x}{3}\right]_\lambda^1 - \int_\lambda^1 \left(-\frac{1}{x}\frac{x^3}{3}\right)dx$$
$$= \left[-\frac{x^3\ln x}{3}\right]_\lambda^1 + \frac{1}{3}\int_\lambda^1 x^2dx$$
$$= \left[-\frac{x^3\ln x}{3}\right]_\lambda^1 + \frac{1}{3}\left[\frac{x^3}{3}\right]_\lambda^1$$
$$= \left[-\frac{x^3\ln x}{3} + \frac{x^3}{9}\right]_\lambda^1$$
$$= \frac{1}{9} + \frac{\lambda^3\ln\lambda}{3} - \frac{\lambda^3}{9}$$
$$= \frac{1}{9}(1+3\lambda^3\ln\lambda - \lambda^3)$$

❷ حساب $\lim\limits_{\substack{>\\ \lambda\to 0}} A(\lambda)$:

$$\lim_{\substack{>\\ \lambda\to 0}} A(\lambda) = \lim_{\substack{>\\ \lambda\to 0}} \left(\frac{1}{9}(1+3\lambda^3\ln\lambda-\lambda^3)\right) = \boxed{\frac{1}{9}}$$

- تفسير النتيجة هندسيا:

لدينا

$$-x^2\ln x = x - x^2\ln x - x = f(x) - x$$

ومنه: $\lim\limits_{\substack{>\\ \lambda\to 0}} A(\lambda)$ هي مساحة الحيز المحدد بـ (C_f) و المستقيمات ذات المعادلات $y = x$ و $x = 0$ و $x = 1$

التمريـــــن 11

التمرين

❶ تعيين الأعداد الحقيقية a ، b و c :

لدينا:

$$\begin{aligned} g(x) &= x + f(x) \\ &= e^{-x}(x^2 + 3x + 2) \end{aligned}$$

ولدينا:

$$\begin{aligned} G'(x) &= (2ax + b)e^{-x} - e^{-x}(ax^2 + bx + c) \\ &= e^{-x}(-ax^2 + (2a - b)x + b - c) \end{aligned}$$

بالمطابقة نجد:

$$\begin{cases} -a = 1 \\ 2a - b = 3 \\ b - c = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -5 \\ c = -7 \end{cases}$$

أي:

$$\begin{aligned} G(x) &= (-x^2 - 5x - 7)e^{-x} \\ &= -e^{-x}(x^2 + 5x + 7) \end{aligned}$$

❷

أ/ حساب التكامل $A(\lambda)$:

$$\begin{aligned} A(\lambda) &= \int_0^\lambda g(x)dx \\ &= [G(x)]_0^\lambda \\ &= G(\lambda) - G(0) \\ &= -e^{-\lambda}(\lambda^2 + 5\lambda + 7) + 7 \end{aligned}$$

- تفسير النتيجة بيانيا:

لدينا:

$$\begin{aligned} A(\lambda) &= \int_0^\lambda g(x)dx \\ &= \int_0^\lambda \left(f(x) - (-x)\right)dx \\ &= \int_0^\lambda \left(f(x) - y_{(\Delta)}\right)dx \end{aligned}$$

ومنه $A(\lambda)$ هي مساحة الحيز المحدد بالمستوي (C_f) والمستقيم (Δ) والمستقيمين: $x = 0$ وَ $x = \lambda$

ب/ حساب $\lim_{\lambda \to +\infty} A(\lambda)$:

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \to +\infty} A(\lambda) &= \lim_{\lambda \to +\infty} \left[-e^{-\lambda}(\lambda^2 + 5\lambda + 7) + 7\right] \\ &= \lim_{\lambda \to +\infty} \left[-e^{-\lambda}(\lambda^2) + 7\right] \\ &= 7 \end{aligned}$$

التمريـــــن 12

التمرين

❶ تبيين أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n > 0$:

لدينا:

$$\frac{3+2\ln x}{x}=0 \Longrightarrow 3+2\ln x=0 \Longrightarrow \ln x=-\frac{3}{2}$$
$$\Longrightarrow x=e^{-\frac{3}{2}}$$

ومنه لما $x>e^{-\frac{3}{2}}$ ، نجد: $f(x)>0$

لدينا لما $n=0$ نجد:

$$\begin{aligned}
u_0&=\int_{e^0}^{e^1} f(x)dx\\
&=\int_1^e \left(3\frac{1}{x}+2\frac{\ln x}{x}\right)dx\\
&=\left[3\ln x+2\frac{(\ln x)^2}{2}\right]_1^e\\
&=[3\ln x+(\ln x)^2]_1^e\\
&=4>0
\end{aligned}$$

وبما أنّ: $f(x)>0$ على المجال $[1;+\infty[$

فإنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n>0$

أ/ إعطاء تفسيرا هندسيا للعدد u_0:

$$u_0=\int_1^e f(x)dx=4$$

u_0 هي مساحة الحيز المحدد بـ (C_f) والمستقيمات ذات المعادلات $y=0$ ، $x=1$ و $x=e$

ب/ حساب u_n بدلالة n:

$$\begin{aligned}
u_n&=\int_{e^n}^{e^{n+1}} f(x)dx\\
&=\int_{e^n}^{e^{n+1}} \frac{3+2\ln x}{x}dx\\
&=[3\ln x+(\ln x)^2]_{e^n}^{e^{n+1}}\\
&=3\ln e^{n+1}+(\ln e^{n+1})^2-3\ln e^n-(\ln e^n)^2\\
&=3(n+1)+(n+1)^2-3n-n^2\\
&=3n+3+n^2+1+2n-3n-n^2\\
&=\boxed{2n+4}
\end{aligned}$$

ج/ حساب S_n بدلالة n:

لدينا: $u_n=2n+4$

نلاحظ أنّ (u_n) متتالية حسابية أساسها 2 ومنه:

$$\begin{aligned}
S_n&=u_0+u_1+u_2+\cdots+u_n\\
&=\frac{(n+1)(4+2n+4)}{2}\\
&=\frac{(n+1)(8+2n)}{2}\\
&=\frac{2(n+1)(4+n)}{2}\\
&=\boxed{(n+1)(4+n)}
\end{aligned}$$

التمريـــن 13
التمرين

❶ تبيين أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإنّ: $g'(x)+2g(x)-e^{-2x}=0$:

$$g'(x)+2g(x)-e^{-2x}=e^{-2x}-2(x+1)e^{-2x}+2(x+1)e^{-2x}-e^{-2x}=0$$

- استنتاج دالة أصلية للدالة g على $\mathbb{R}$:

نضع: $G'(x)=g(x)$

$$\begin{aligned} g'(x)+2g(x)-e^{-2x}=0 &\Rightarrow \int \left(g'(x)+2g(x)-e^{-2x}\right)dx=0 \\ &\Rightarrow g(x)+2G(x)+\frac{1}{2}e^{-2x}+c=0 \\ &\Rightarrow G(x)=-\frac{g(x)}{2}-\frac{1}{4}e^{-2x}-c \\ &\Rightarrow G(x)=-\frac{1}{2}(x+1)e^{-2x}-\frac{1}{4}e^{-2x}-c \\ &\Rightarrow G(x)=-\frac{1}{4}(2x+3)e^{-2x}-c \end{aligned}$$

❷ حساب A :

$$A=\int_{-1}^{0}f(x)dx=\int_{-1}^{0}(x+1)^2e^{-2x}dx$$

نضع:
$$\left|\begin{array}{ll} u(x)= & (x+1)^2 \\ v'(x)= & e^{-2x} \end{array}\right. \Rightarrow \left|\begin{array}{ll} u'(x)= & 2(x+1) \\ v(x)= & -\frac{1}{2}e^{-2x} \end{array}\right.$$

ومنه:

$$\begin{aligned} A&=\int_{-1}^{0}(x+1)^2e^{-2x}dx \\ &=\left[-\frac{(x+1)^2e^{-2x}}{2}\right]_{-1}^{0}-\int_{-1}^{0}2(x+1)\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right)dx \\ &=\left[-\frac{(x+1)^2e^{-2x}}{2}\right]_{-1}^{0}+\int_{-1}^{0}(x+1)e^{-2x}dx \\ &=\left[-\frac{(x+1)^2e^{-2x}}{2}\right]_{-1}^{0}+\int_{-1}^{0}g(x)dx \\ &=\left[-\frac{(x+1)^2e^{-2x}}{2}+G(x)\right]_{-1}^{0} \\ &=\left[-\frac{(x+1)^2e^{-2x}}{2}-\frac{1}{4}(2x+3)e^{-2x}\right]_{-1}^{0} \\ &=-\frac{1}{2}-\frac{3}{4}+\frac{e^2}{4} \\ &=\frac{e^2-5}{4}u.a \end{aligned}$$

التمريـــن 14
التمرين

❶ دراسة الوضع النسبي للمنحنين (C_f) و (C_g) :

$$f(x)-g(x)=0\Rightarrow e^x-ex^2-e^x+ex=0$$

$$\Rightarrow ex(-x+1)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ex=0 \\ \text{أو} \\ -x+1=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ \text{أو} \\ x=1 \end{cases}$$

ومنه:

x	$-\infty$ 0 1 $+\infty$
$f(x)-g(x)$	$-$ 0 $+$ 0 $-$

- الوضعية:

- (C_f) تحت (C_g) لما $x \in]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$
- (C_f) يقطع (C_g) لما $x=0$ و $x=1$.
- (C_f) فوق (C_g) لما $x \in]0;1[$

❷ حساب مساحة A:

$$\int_0^1 \big(f(x)-g(x)\big)dx = \int_0^1 (-ex^2+ex)dx$$

$$= e\int_0^1 (-x^2+x)dx$$

$$= e\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right]_0^1$$

$$= e\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{6}e$$

لدينا وحدة الطول هي $2cm$ ومنه وحدة المساحة هي $2^2=4cm^2$

وعليه مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنيين (C_f) و (C_g) هي:

$$\frac{1}{6}e\times 4cm^2=\boxed{\frac{2}{3}\ cm^2}$$

.7

حلول التمارين الواردة في البكالوريات السابقة

[شعبة علوم تجريبية]

-حلول مقترحة-

انقر على كلمة التمرين في كل حل للانتقال إليه

التمرين 01
بكالوريا 2008
شعبة علوم تجريبية
الموضوع الأول

❶ تعيين α و β :

$$H'(x) = g(x) - 1 \Rightarrow \alpha e^{-x} - (\alpha x + \beta)e^{-x} = (-x-1)e^{-x} + 1 - 1$$
$$\Rightarrow (-\alpha x + \alpha - \beta)e^{-x} = (-x-1)e^{-x}$$

بالمطابقة نجد:

$$\begin{cases} -\alpha = -1 \\ \alpha - \beta = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 2 \end{cases}$$

ومنه:

$$H(x) = (x+2)e^{-x}$$

❷ استنتاج الدالة الأصلية للدالة g والتي تنعدم عند القيمة 0:

نضع $\int g(x)dx = G(x)$

لدينا:

$$H'(x) = g(x) - 1 \Rightarrow \int H'(x)dx = \int (g(x) - 1)\, dx$$
$$\Rightarrow H(x) = G(x) - x + c$$
$$\Rightarrow G(x) = (x+2)e^{-x} + x - c$$

لدينا: $G(0) = 0$ ومنه:

$$G(0) = 0 \Rightarrow 2 - c = 0$$
$$\Rightarrow c = 2$$

إذن: الدالة الأصلية للدالة g والتي تنعدم من أجل $x = 0$ هي:

$$G(x) = (x+2)e^{-x} + x + 2$$

التمرين 02
بكالوريا 2008
شعبة علوم تجريبية
الموضوع الثاني

❶ كتابة $f(x)$ على الشكل: $f(x) = a + x + \frac{b}{(x+1)^2}$

$$f(x) = x + a + \frac{b}{(x+1)^2}$$
$$= \frac{(x+a)(x^2+2x+1) + b}{(x+1)^2}$$
$$= \frac{x^3 + 2x^2 + x + ax^2 + 2ax + a + b}{(x+1)^2}$$
$$= \frac{x^3 + (a+2)x^2 + (2a+1)x + a + b}{(x+1)^2}$$

بالمطابقة نجد:

$$\begin{cases} a + 2 = 3 \\ 2a + 1 = 3 \\ a + b = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$$

ومنه:

$$f(x) = x + 1 + \frac{1}{(x+1)^2}$$

❷ تعيين F الدالة الأصلية للدالة f على المجال $]-1;+\infty[$ والتي تحقق: $F(1)=2$:

$$\begin{aligned}F(x)&=\int f(x)dx\\&=\int\left(x+1+\frac{1}{(x+1)^2}\right)dx\\&=\frac{1}{2}x^2+x-\frac{1}{2(x+1)}+c\end{aligned}$$

تذكير:

$$\int\frac{u'}{u^n}=-\frac{1}{(n-1)u^{(n-1)}}$$

ولدينا: $F(1)=2$

ومنه:

$$\begin{aligned}F(1)=2&\Rightarrow\frac{1}{2}x^2+x-\frac{1}{2(x+1)}+c=2\\&\Rightarrow\frac{1}{2}+1-\frac{1}{4}+c=2\\&\Rightarrow c=1\end{aligned}$$

إذن:

$$F(x)=\frac{1}{2}x^2+x-\frac{1}{2(x+1)}+1$$

التمرين 03
بكالوريا 2009
شعبة علوم تجريبية
الموضوع الأول

- حساب مساحة الحيز:

نضع A هي مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_k) والمستقيمات التي معادلاتها: $y=0$ ، $x=\frac{1}{2}$ ، $x=-\frac{1}{2}$

لدينا:

$$\begin{aligned}A&=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}k(x)dx\\&=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left(|x|+\frac{4}{x+1}\right)dx\\&=\int_{-\frac{1}{2}}^{0}\left(-x+\frac{4}{x+1}\right)dx+\int_{0}^{\frac{1}{2}}\left(x+\frac{4}{x+1}\right)dx\\&=\left[-\frac{1}{2}x^2+4\ln(x+1)\right]_{-\frac{1}{2}}^{0}+\left[\frac{1}{2}x^2+4\ln(x+1)\right]_{0}^{\frac{1}{2}}\\&=0-\left(-\frac{1}{8}+4\ln\left(\frac{1}{2}\right)\right)+\frac{1}{8}+4\ln\left(\frac{3}{2}\right)\\&=\frac{1}{4}+4\left(\ln\frac{3}{2}-\ln\left(\frac{1}{2}\right)\right)\\&=\frac{1}{4}+4\ln(3)\\&\approx 4.64u.a\end{aligned}$$

تذكير:

$$\int\frac{u'}{u}=\ln|u|$$

الخليل للرياضيات

التمرين 04 بكالوريا 2009 شعبة علوم تجريبية الموضوع الثاني

- حساب مساحة الحيز:

نضع: A مساحة الحيز المستوي المحدود بالمنحنى (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها: $y = x - 1$ و $x = 0$ و $x = 1$

لدينا:

$$A = \int_0^1 (y_d - f(x))dx$$
$$= \int_0^1 \left(x - 1 - \left(x - 1 - \frac{\ln(x+1)}{x+1}\right)\right) dx$$
$$= \int_0^1 \left(\frac{\ln(x+1)}{x+1}\right) dx$$
$$= \int_0^1 \left(\frac{1}{x+1}\ln(x+1)\right) dx$$
$$= \left[\frac{\ln(x+1)^2}{2}\right]_0^1$$
$$= \frac{(\ln 2)^2}{2} u.a$$

تذكير:

$$\int u'u^n = \frac{u^{n+1}}{n+1}$$

التمرين 05 بكالوريا 2011 شعبة علوم تجريبية الموضوع الأول

❶ تبيين أن الدالة $x \longmapsto (x-\alpha)\ln(x-\alpha) - x$ هي دالة أصلية للدالة $x \longmapsto \ln(x-\alpha)$ على المجال $]\alpha; +\infty[$:

نضع: $\begin{cases} h(x) = \ln(x-\alpha) \\ H(x) = (x-\alpha)\ln(x-\alpha) - x \end{cases}$

لدينا:

$$H'(x) = \ln(x-\alpha) + (x-\alpha)\frac{1}{x-\alpha} - 1$$
$$= \ln(x-\alpha) + 1 - 1$$
$$= \ln(x-\alpha)$$

❷ التحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]1; +\infty[$ ، $g(x) = 1 - \frac{2}{x+1}$

$$g(x) = 1 - \frac{2}{x+1}$$
$$= \frac{x+1-2}{x+1}$$
$$= \frac{x-1}{x+1}$$
$$= g(x)$$

- تعيين دالة أصلية للدالة f على المجال $]1; +\infty[$:

$$F(x) = \int \left(\frac{x-1}{x+1} + \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right) dx$$

$$= \int \left(1 - \frac{2}{x+1} + \ln(x-1) - \ln(x+1)\right) dx$$
$$= \int \left(1 - \frac{2}{x+1} + \ln(x-1) - \ln\big(x-(-1)\big)\right) dx$$
$$= x - 2\ln(x+1) + (x-1)\ln(x-1) - x - (x+1)\ln(x+1) + x + c$$
$$= x - (x+3)\ln(x+1) + (x-1)\ln(x-1) + c$$

التمرين 06
بكالوريا 2011
شعبة علوم تجريبية
الموضوع الثاني

❶ حساب المساحة $A(\alpha)$:

$$A(\alpha) = \int_0^{\alpha} -(e^x - ex - 1)dx$$
$$= -\left[e^x - \frac{e}{2}x^2 - x\right]_0^{\alpha}$$
$$= \left(-e^{\alpha} + \frac{e\alpha^2}{2} + \alpha + 1\right) u.a$$

❷ اثبات أنّ $A(\alpha) = \left(\frac{1}{2}e\alpha^2 - e\alpha + \alpha\right) u.a$:

لدينا: $f(\alpha) = 0$ ومنه:

$$f(\alpha) = 0 \Rightarrow e^{\alpha} - e\alpha - 1 = 0$$
$$\Rightarrow e^{\alpha} = e\alpha + 1$$

ولدينا:

$$A(\alpha) = -e^{\alpha} + \frac{e\alpha^2}{2} + \alpha + 1$$
$$= -e\alpha - 1 + \frac{e\alpha^2}{2} + \alpha + 1$$
$$= \left(\frac{1}{2}ea^2 - ea + \alpha\right) u.a$$

التمرين 07
بكالوريا 2012
شعبة علوم تجريبية
الموضوع الأول

• تبيين أنّ g دالة أصلية للدالة f على المجال $]-\infty; 0[$:

$$g'(x) = \frac{2x}{2} + 5 + 6\ln\left(\frac{x}{x-1}\right) + 6x\left(\frac{\left(\frac{x-1-x}{(x-1)^2}\right)}{\left(\frac{x}{x-1}\right)}\right) + \frac{6}{1-x}$$
$$= x + 5 + 6\ln\left(\frac{x}{x-1}\right) + 6x\frac{-1}{x-1} \times \frac{(x-1)^2}{x}$$
$$= x + 5 + 6\ln\left(\frac{x}{x-1}\right) - \frac{6}{x-1} + \frac{6}{x-1}$$
$$= x + 5 + 6\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$$
$$= f(x)$$

اذن g دالة أصلية للدالة f على المجال $]-\infty; 0[$.

التمرين 08
بكالوريا 2012
شعبة علوم تجريبية
الموضوع الثاني

❶ تعيين العددين الحقيقين a و b بحيث تكون h دالة أصلية لـ $x \longmapsto xe^x$ على $\mathbb{R}$:

نضع: $k(x) = xe^x$ حيث: $h'(x) = k(x)$

لدينا:

$$\begin{aligned} h'(x) &= ae^x + (ax+b)e^x \\ &= (ax+a+b)e^x \\ &= k(x) \end{aligned}$$

بالمطابقة نجد:

$$\begin{cases} a = 1 \\ a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases}$$

إذن:

$$h(x) = (x-1)e^x$$

❷ استنتاج دالة أصلية للدالة g على $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} G(x) &= \int g(x)\,dx \\ &= \int (1 - xe^x)dx \\ &= x - (x-1)e^x + c \end{aligned}$$

التمرين 09
بكالوريا 2015
شعبة علوم تجريبية
الموضوع الأول

❶ تبيين أن منحنى الدالة F يقبل مماسين موازيين لحامل محور الفواصل في نقطتين:

منحنى الدالة F يقبل مماسين موازيين لحامل محور الفواصل معناه أن المعادلة $F'(x) = 0$.

ولدينا من أجل كل $x \in \ ]0;+\infty[$: $F'(x) = f(x)$ ومنه:

$$\begin{aligned} F'(x) = 0 &\Rightarrow f'(x) = 0 \\ &\Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ \text{أو} \\ x = e^2 \end{cases} \end{aligned}$$

ومنه منحنى الدالة F يقبل مماسين موازيين لحامل محور الفواصل عند النقطتين اللتين فاصلتيهما 1 و e^2

❷ تبيين أنّ $x \longmapsto x\ln x - x$ هي دالة أصلية للدالة $x \longmapsto \ln x$:

نضع: $H(x) = x\ln x - x$

$$\begin{aligned} H'(x) &= \ln x + \frac{1}{x}x - x \\ &= \ln x \end{aligned}$$

- استنتاج عبارة الدالة F:

$$\begin{aligned} F(x) &= \int f(x)dx \\ &= \int \left(\left(1 - \frac{1}{x}\right)(\ln x - 2)\right) dx \end{aligned}$$

الخليل للرياضيات

$$= \int \left(\ln x - 2 - \frac{1}{x}\ln x + 2\frac{1}{x}\right) dx$$
$$= x\ln x - x - 2x - \frac{(\ln x)^2}{2} + 2\ln x + c$$
$$= x\ln x - 3x - \frac{(\ln x)^2}{2} + 2\ln x + c$$

ولدينا: $F(1) = -3$ ومنه:

$$F(1) = -3 \Rightarrow 1\ln 1 - 3 - \frac{(\ln 1)^2}{2} + 2\ln 1 + c = -3$$
$$\Rightarrow -3 + c = -3$$
$$\Rightarrow c = 0$$

إذن:

$$F(x) = x\ln x - 3x - \frac{(\ln x)^2}{2} + 2\ln x$$

التمرين 10 بكالوريا 2015 شعبة علوم تجريبية الموضوع الثاني

❶ التحقق أنه من أجل كل $x \in \mathbb{R}$: $2f(x) + f'(x) - f''(x) = 1 - 2x - 3e^{2x+2}$:

لدينا:

$$f''(x) = 2e^{2x+2}(1 + 2x - e^{-2x-2}) + e^{2x+2}(2 + 2e^{-2x-2})$$
$$= e^{2x+2}(2 + 4x - 2e^{-2x-2} + 2 + 2e^{-2x-2})$$
$$= e^{2x+2}(4 + 4x)$$

ومنه:

$$2f(x) + f'(x) - f''(x) = 2\underbrace{(xe^{2x+2} - x + 1)}_{f(x)} + \underbrace{e^{2x+2}(1 + 2x - e^{-2x-2})}_{f'(x)} - \underbrace{e^{2x+2}(4 + 4x)}_{f''(x)}$$
$$= 2xe^{2x+2} - 2x + 2 - 3e^{2x+2} - 2xe^{2x+2} - 1$$
$$= 1 - 2x - 3e^{2x+2}$$

وهو المطلوب

تذكير:

$$\int e^u = \frac{1}{u'}e^u$$

❷ استنتاج دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$:

لدينا:

نضع $F(x)$ هي الدالة الأصلية للدالة f:

$$2f(x) + f'(x) - f''(x) = 1 - 2x - 3e^{2x+2}$$
$$\Rightarrow \int 2f(x)dx + \int f'(x)\,dx - \int f''(x)\,dx = \int (1 - 2x - 3e^{2x+2})dx$$
$$\Rightarrow 2F(x) + f(x) - f'(x) = \int (1 - 2x - 3e^{2x+2})dx$$
$$\Rightarrow 2F(x) = \int (1 - 2x - 3e^{2x+2})dx - f(x) + f'(x)$$
$$\Rightarrow 2F(x) = x - x^2 - \frac{3}{2}e^{2x+2} + c - \underbrace{(xe^{2x+2} - x + 1)}_{f(x)} + \underbrace{e^{2x+2}(1 + 2x - e^{-2x-2})}_{f'(x)}$$
$$\Rightarrow 2F(x) = x - x^2 - \frac{3}{2}e^{2x+2} - xe^{2x+2} + x - 1 + e^{2x+2} + 2xe^{2x+2} - 1 + c$$
$$\Rightarrow 2F(x) = 2x - x^2 - \frac{1}{2}e^{2x+2} + xe^{2x+2} - 2 + c$$

$$\Rightarrow F(x)=x-\frac{1}{2}x^2-e^{2x+2}+\frac{1}{2}xe^{2x+2}-1+c'$$

$$\Rightarrow \boxed{F(x)=\left(\frac{1}{2}x-1\right)e^{2x+2}+\frac{1}{2}x(2-x)-1+c'}$$

التمرين 11
بكالوريا 2016 – الدورة 1
شعبة علوم تجريبية
الموضوع الأول

❶ إيجاد دالة أصلية للدالة $x \longmapsto \frac{\ln x}{x}$ على المجال $]0;+\infty[$:

لدينا:

$$\int \frac{\ln x}{x}dx=\int \frac{1}{x}\ln(x)\,dx$$
$$=\frac{(\ln x)^{1+1}}{1+1}+c$$
$$=\frac{1}{2}(\ln x)^2+c$$

تذكير:
$$\int u'u^n=\frac{u^{n+1}}{n+1}$$

❷ حساب I_n

$$I_n=\int_1^n \left(f(x)-y_{(\Delta)}\right)dx$$
$$=\int_1^n \frac{\ln x}{x}dx$$
$$=\left[\frac{1}{2}(\ln x)^2\right]_1^n$$
$$=\left[\frac{1}{2}(\ln n)^2\right]u.a$$

❸ تعيين أصغر عدد طبيعي n_0 بحيث إذا كان $n>n_0$ فإن: $I_n>2$:

$$I_n>2 \Rightarrow \frac{1}{2}(\ln n_0)^2>2$$
$$\Rightarrow (\ln n_0)^2>4$$
$$\Rightarrow \ln n_0>2$$
$$\Rightarrow n_0>e^2$$

لدينا: $e^2\approx 7.38$ وعليه: $n_0=8$

التمرين 12
بكالوريا 2016 | الدورة 1
شعبة علوم تجريبية
الموضوع الثاني

❶ تعيين الأعداد الحقيقية a ، b و c :

لدينا:

$$h(x)=x+f(x)$$
$$=e^{-x}(x^2+3x+2)$$

ولدينا:

$$H'(x)=(2ax+b)e^{-x}-e^{-x}(ax^2+bx+c)$$

$$= e^{-x}(-ax^2 + (2a-b)x + b - c)$$

بالمطابقة نجد:

$$\begin{cases} -a = 1 \\ 2a - b = 3 \\ b - c = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -5 \\ c = -7 \end{cases}$$

أي:

$$\begin{aligned} H(x) &= (-x^2 - 5x - 7)e^{-x} \\ &= -e^{-x}(x^2 + 5x + 7) \end{aligned}$$

❷ حساب التكامل $A(\lambda)$:

$$\begin{aligned} A(\lambda) &= \int_0^{\lambda} h(x)dx \\ &= [H(x)]_0^{\lambda} \\ &= H(\lambda) - H(0) \\ &= -e^{-\lambda}(\lambda^2 + 5\lambda + 7) + 7 \end{aligned}$$

- تفسير النتيجة بيانيا:

لدينا:

$$\begin{aligned} A(\lambda) &= \int_0^{\lambda} h(x)dx \\ &= \int_0^{\lambda} (f(x) - (-x))dx \\ &= \int_0^{\lambda} (f(x) - y_{(\Delta)})dx \end{aligned}$$

ومنه $A(\lambda)$ هي مساحة الحيز المحدد بالمستوي (C_f) والمستقيم (Δ) والمستقيمين: $x = 0$ وَ $x = \lambda$

❸ حساب $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} A(\lambda)$:

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \to +\infty} A(\lambda) &= \lim_{\lambda \to +\infty} \left[-e^{-\lambda}(\lambda^2 + 5\lambda + 7) + 7\right] \\ &= \lim_{\lambda \to +\infty} \left[-e^{-\lambda}(\lambda^2) + 7\right] \\ &= 7 \end{aligned}$$

التمرين 13

بكالوريا 2016 | الدورة 2
شعبة علوم تجريبية
الموضوع الأول

❶ تبيين أن الدالة $x \mapsto \frac{-1}{x+1}[1 + \ln(x+1)]$ هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto \frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}$:

نضع:

$$H(x) = \frac{-1}{x+1}[1 + \ln(x+1)] \quad ; \quad h(x) = \frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}$$

لدينا:

$$\begin{aligned} H'(x) &= \frac{1}{(x+1)^2}(1 + \ln(x+1)) - \frac{1}{(x+1)^2} \\ &= \frac{1 + \ln(x+1) - 1}{(x+1)^2} \end{aligned}$$

$$= \frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}$$
$$= h(x)$$

❷ حساب مساحة الحيز:

نضع A هي مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) وحامل محور الفواصل والمستقيمين الذين معدلتيهما على التوالي: $x = 0$ و $x = 1$.

لدينا:

$$A = \int_0^1 f(x)dx$$
$$= \int_0^1 \left(\frac{e}{x+1} + \frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}\right) dx$$
$$= \int_0^1 \left(\frac{e}{x+1}\right) dx + \int_0^1 \left(\frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}\right) dx$$
$$= e\int_0^1 \left(\frac{1}{x+1}\right) dx + \int_0^1 h(x)dx$$
$$= e[\ln(x+1)]_0^1 + \left[\frac{-1}{x+1}(1+\ln(x+1))\right]_0^1$$
$$= e\ln 2 - \frac{1}{2}(1+\ln 2) + 1$$
$$= \frac{2e\ln 2 - \ln 2 + 1}{2}$$
$$= \boxed{\frac{\ln 2\,(2e-1)+1}{2} u.a}$$

التمرين 14

بكالوريا 2017 | الدورة 1
شعبة علوم تجريبية
الموضوع الثاني

- التحقق أنّ F دالة أصلية لـ f على $\mathbb{R}$:

$$F'(x) = 2 + (2x+2)e^{1-x} - (x^2+2x+2)e^{1-x}$$
$$= 2 + 2xe^{1-x} + 2e^{1-x} - x^2e^{1-x} - 2xe^{1-x} - 2e^{1-x}$$
$$= 2 - x^2e^{1-x}$$
$$= f(x)$$

إذن F دالة أصلية لـ f.

- حساب مساحة الحيز:

نضع A مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) وحامل محور الفواصل والمستقيمين الذين معادلتيهما: $x = 0$ و $x = 1$:

لدينا:

$$A = \int_0^1 f(x)dx$$
$$= [2x + (x^2+2x+2)e^{1-x}]_0^1$$
$$= 2 + 5e^0 - 2e$$

$$= \boxed{(7-2e)u.a}$$

التمرين 15
بكالوريا 2017 | الدورة 2
شعبة علوم تجريبية
الموضوع الأول

- حساب $A(n)$:

$$A(n) = \int_{-e^{n+1}}^{-e^{n}} \left(f(x) - y_{(\gamma)}\right) dx$$
$$= \int_{-e^{n+1}}^{-e^{n}} -\frac{e}{x} dx$$
$$= -e \int_{-e^{n+1}}^{-e^{n}} \frac{1}{x} dx$$
$$= -e[\ln x]_{-e^{n+1}}^{-e^{n}}$$
$$= -e\left(-n - (n+1)\right)$$
$$= -e(-1)$$
$$= e$$

تذكير:
$$\int \frac{u'}{u} = \ln|u|$$

- حساب l:

$$l = A(0) + A(1) + \cdots + A(2016)$$
$$= \underbrace{e + e + \cdots + e}_{\text{2017 مرة}}$$
$$= 2017e$$

التمرين 16
بكالوريا 2017 | الدورة 2
شعبة علوم تجريبية
الموضوع الثاني

1

أ/ دراسة اتجاه تغير الدالة g:

$$g'(x) = 2\left[-1 + \frac{2}{2x+1}\right]$$
$$= 2\left(\frac{-2x-1+2}{2x+1}\right)$$
$$= \frac{2(-2x+1)}{2x+1}$$

ومنه

$$g'(x) = 0 \Rightarrow \frac{2(-2x+1)}{2x+1} = 0$$
$$\Rightarrow -2x+1 = 0$$
$$\Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

x	$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	

ومنه الدالة g ومتزايدة على المجال $\left]-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$ ، ومتناقصة على المجال $\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$

ب/ تبيين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين:

لدينا:

$$g(0) = 2(-0 + \ln(0+1)) = 0$$

المعادلة $g(x) = 0$ لها حل معدوم.

ولدينا: الدالة g مستمرة ومتزايدة على المجال $[1.2; 1.3]$

ولدينا : $g(1.2) \times g(1.3) < 0$ لأن: $g(1.2) \approx 0.05$ و $g(1.3) \approx -0.04$

ومنه فإنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فالمعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا في المجال $]1.2; 1.3[$

ج/ استنتاج إشارة $g(x)$:

من تغيرات الدالة g نجد:

x	$-\frac{1}{2}$		0		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

❷ اثبات أن: من أجل كل $x \geq \frac{3}{2}$: $0 < f(x) < \frac{1}{2x+1}$:

من أجل $x \geq \frac{3}{2}$ لدينا: $2[-x + \ln(2x+1)] < 0$ (من جدول إشارة $g(x)$)

ومنه:

$$\begin{aligned}
2[-x + \ln(2x+1)] < 0 &\Rightarrow -x + \ln(2x+1) < 0 \\
&\Rightarrow \ln(2x+1) < x \\
&\Rightarrow 2\ln(2x+1) < 2x \\
&\Rightarrow 1 + 2\ln(2x+1) < 1 + 2x \\
&\Rightarrow \frac{1 + 2\ln(2x+1)}{(2x+1)^2} < \frac{1+2x}{(2x+1)^2} \\
&\Rightarrow f(x) < \frac{1+2x}{(2x+1)^2} \\
&\Rightarrow f(x) < \frac{1}{1+2x}
\end{aligned}$$

ولدينا من أجل $x \geq \frac{3}{2}$: $0 < f(x)$ ومنه:

$$\boxed{0 < f(x) < \frac{1}{1+2x}}$$

- استنتاج $\lim\limits_{x \to +\infty} I_n$:

$$0 < f(x) < \frac{1}{1+2x} \Rightarrow 0 < \int_n^{n+1} f(x)dx < \int_n^{n+1} \frac{1}{1+2x}dx$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow 0 < I_n < \frac{1}{2}\int_n^{n+1} \frac{2}{1+2x}dx \\
&\Rightarrow 0 < I_n < \frac{1}{2}[\ln(1+2x)]_n^{n+1} \\
&\Rightarrow 0 < I_n < \frac{1}{2}[\ln(1+2(n+1) - \ln(1+2n))] \\
&\Rightarrow 0 < I_n < \frac{1}{2}\ln\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right) \\
&\Rightarrow 0 < \lim_{n\to+\infty} I_n < \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{2}\ln\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)\right] \\
&\Rightarrow 0 < \lim_{n\to+\infty} I_n < 0
\end{aligned}$$

تذكير:

$$\int \frac{u'}{u} = \ln|u|$$

لأن:

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{2}\ln\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)\right]=0$$

ومنه :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} I_n=0}$$

التمرين 17
بكالوريا 2018
شعبة علوم تجريبية
الموضوع الأول

❶ تعيين الدالة الأصلية للدالة $x\longmapsto xe^{-x}$ على $\mathbb{R}$ والتي تنعدم من أجل $x=1$:

نضع:

$$I=\int xe^{-x}dx$$

وَ

$$\begin{cases} u(x)=x \\ v'(x)=e^{-x}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x)=x \\ v(x)=-e^{-x}\end{cases}$$

ومنه:

$$\begin{aligned} I &= [-xe^{-x}]-\int -e^{-x}dx+c \\ &= [-xe^{-x}]+\int e^{-x}dx+c \\ &= [-xe^{-x}]+[-e^{-x}]+c \\ &= -e^{-x}(x+1)+c \end{aligned}$$

لدينا:

$$\begin{aligned} I(1)=0 &\Rightarrow -e^{-1}(1+1)+c=0 \\ &\Rightarrow -2e^{-1}+c=0 \\ &\Rightarrow c=2e^{-1} \end{aligned}$$

اذن:

$$I=-e^{-x}(x+1)+2e^{-1}$$

❷ حساب العدد A :

$$\begin{aligned} A &= \int_1^3 (f(x)-y)dx \\ &= \int_1^3 (2x+1-xe^{-x}-2x-1)dx \\ &= \int_1^3 (-xe^{-x})dx \\ &= [-e^{-x}(x+1)]_1^3 \\ &= -e^{-3}(3+1)+e^{-1}(1+1) \\ &= 2e^{-1}-4e^{-3} \end{aligned}$$

التمرين 18
بكالوريا 2018
شعبة علوم تجريبية
الموضوع الثاني

❶ تبيين أنّ: $I_n=\ln(1+n\ln n)$:

$$I_n=\int_1^n f(x)dx$$

نضع: $u(x)=1+x\ln x$ ومنه: $u'(x)=1+\ln x$

نلاحظ أن: $I_n=\int\frac{u'}{u}=\ln u$ ومنه:

$$I_n=\int_1^n \frac{1+\ln x}{1+x\ln x}dx$$
$$=[\ln(1+x\ln x)]_1^n$$
$$=\ln(1+n\ln n)$$

❷ دراسة اتجاه تغير المتتالية (I_n):

ندرس إشارة الفرق $I_{n+1}-I_n$:

$$I_{n+1}=\int_1^{n+1} f(x)dx \Rightarrow I_{n+1}=\int_1^n f(x)dx+\int_n^{n+1} f(x)dx$$
$$\Rightarrow I_{n+1}=I_n+\int_n^{n+1} f(x)dx$$
$$\Rightarrow I_{n+1}-I_n=\int_n^{n+1} f(x)dx$$

بما أنّ: $n>1$

فإنه:

$$\int_n^{n+1} f(x)dx>0$$

ومنه: $I_{n+1}-I_n>0$

ومنه: المتتالية I_n متزايدة.

التمرين 19
بكالوريا 2019
شعبة علوم تجريبية
الموضوع الأول

❶ تعيين عبارة $H(x)$ بدلالة x:

لدينا:

$$H(x)=\int_3^x(\ln t\times 1)dt$$

نضع:

$$u(t)=\ln t \quad\Big|\quad u'(t)=\frac{1}{t}$$
$$v(t)=t \quad\Big|\quad v'(t)=1$$

لدينا:

$$\int_3^x u(t)v'(t)\,dt = u(t)v(t) - \int_3^x v(t)u'(t)dt \Rightarrow \int_3^x \ln t \times 1\,dt = [t \times \ln t]_3^x - \int_3^x t\frac{1}{t}dt$$

$$\Rightarrow \int_3^x \ln t \times 1\,dt = x\ln x - 3\ln 3 - \int_3^x 1dt$$

$$\Rightarrow \int_3^x \ln t \times 1\,dt = x\ln x - 3\ln 3 - [t]_3^x$$

$$\Rightarrow \int_3^x \ln t \times 1\,dt = x\ln x - 3\ln 3 - (x-3)$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_3^x \ln t \times 1\,dt = x\ln x - x - 3\ln 3 + 3}$$

تذكير:

$$\int \frac{u'}{u} = \ln|u|$$

❷ حساب $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{A} = \int_3^4 \left(\frac{1}{x-2} + \ln x - 0\right) dx$$
$$= \int_3^4 \left(\frac{1}{x-2}\right) dx + \int_3^4 \ln x\,dx$$
$$= [\ln(x-2)]_3^4 + H(4)$$
$$= \ln 2 - \ln 1 + 4\ln 4 - 4 - 3\ln 3 + 3$$
$$\approx \boxed{1.94 u.a}$$

التمرين 20
بكالوريا 2019
شعبة علوم تجريبية
الموضوع الثاني

❸ دراسة الوضع النسبي للمنحنين (C_f) و (C_g) :

$$f(x) - g(x) = 0 \Rightarrow e^x - \frac{1}{2}ex^2 - e^x + ex = 0$$
$$\Rightarrow ex\left(-\frac{1}{2}x + 1\right) = 0$$
$$\Rightarrow \begin{cases} ex = 0 \\ \text{أو} \\ -\frac{1}{2}x + 1 = 0 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{أو} \\ x = 2 \end{cases}$$

ومنه:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f(x)-g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

- الوضعية:

- (C_f) تحت (C_g) لما $x \in]-\infty;0[\cup]2;+\infty[$
- (C_f) يقطع (C_g) لما $x = 0$ و $x = 2$ أي في النقطتين ذات الاحداثيتين $(0;1)$ و $(2;2)$.
- (C_f) فوق (C_g) لما $x \in]0;2[$

❹ حساب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنيين (C_f) و (C_g) :

$$\int_0^2 (f(x)-g(x))dx = \int_0^2 \left(-\frac{1}{2}ex^2+ex\right)dx$$

$$= e\int_0^2 \left(-\frac{1}{2}x^2+x\right)dx$$

$$= e\left[-\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right]_0^2$$

$$= e\left(-\frac{1}{2}\frac{8}{3}+\frac{4}{2}\right)$$

$$= \frac{2}{3}e$$

لدينا وحدة الطول هي $2cm$ ومنه وحدة المساحة هي $2^2 = 4cm^2$

وعليه مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنيين (C_f) و (C_g) هي:

$$\frac{2}{3}e \times 4cm^2 = \boxed{\frac{8e}{3}\ cm^2}$$

.8

حلول التمارين الواردة في البكالوريات السابقة

[شعبة تقني رياضي]

-حلول مقترحة-

انقر على كلمة التمرين في كل حل للانتقال إليه

التمرين 01
بكالوريا 2009
شعبة تقني رياضي
الموضوع الأول

❶ تبيين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f(x) = x + \frac{2e^{-x}}{e^{-x}+1}$:

$$\begin{aligned} f(x) &= x + \frac{2}{e^x+1} \\ &= x + \frac{2e^{-x}}{(e^x+1)e^{-x}} \\ &= x + \frac{2e^{-x}}{1+e^{-x}} \end{aligned}$$

❷

أ/ حساب $A(\alpha)$ مساحة الحيز المحدد بـ (C_f) والمستقيمات ذات المعادلات: $y = x + 2$ ، $x = 0$ و $x = \alpha$:

$$\begin{aligned} A(\alpha) &= \int_\alpha^0 (f(x) - (x+2))dx \\ &= \int_\alpha^0 \left(x + \frac{2e^{-x}}{e^{-x}+1} - x + 2\right) dx \\ &= 2\int_\alpha^0 -\left(\frac{-e^{-x}}{e^{-x}+1} + 1\right) dx \\ &= 2[\ln(e^{-x}+1) + x]_\alpha^0 \end{aligned}$$

ب/ تبيين أنّ $A(\alpha) = 2\ln(-\alpha)$:

$$\begin{aligned} A(\alpha) &= 2[\ln(e^{-x}+1) + x]_\alpha^0 \\ &= 2[\ln 2 - \ln(e^{-\alpha}+1) - \alpha] \\ &= 2[\ln 2 - \ln(e^{-\alpha}(1+e^\alpha)) - \alpha] \\ &= 2[\ln 2 - \ln e^{-\alpha} - \ln(e^\alpha+1) - \alpha] \\ &= 2[\ln 2 + \alpha - \ln(e^\alpha+1) - \alpha] \\ &= 2\left[\ln\left(\frac{2}{e^\alpha+1}\right)\right] \end{aligned}$$

لدينا

$$\begin{aligned} f(\alpha) = 0 &\Rightarrow \alpha + \frac{2}{e^\alpha+1} = 0 \\ &\Rightarrow -\alpha = \frac{2}{e^\alpha+1} \end{aligned}$$

ومنه:

$$A(\alpha) = 2\left[\ln\left(\frac{2}{e^\alpha+1}\right)\right] = \boxed{2\ln(-\alpha)}$$

- استنتاج حصرا للعدد $A(\alpha)$:

لدينا:

$$\begin{aligned} -1.7 < \alpha < -1.6 &\Rightarrow 1.6 < -\alpha < 1.7 \\ &\Rightarrow \ln 1.6 < \ln(-\alpha) < \ln(1.7) \\ &\Rightarrow 2\ln(1.6) < 2\ln(-\alpha) < 2\ln(1.7) \\ &\Rightarrow 2\ln(1.6) < A(\alpha) < 2\ln(1.7) \\ &\Rightarrow \boxed{0.94 < A(\alpha) < 1.06} \end{aligned}$$

التمرين 02
بكالوريا 2011
شعبة تقني رياضي
الموضوع الأول

❶ حساب $h'(x)$:

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{\frac{2}{2x}2x - 2(1+\ln 2x)}{4x^2} \\ &= \frac{2-2-2\ln 2x}{4x^2} \\ &= \frac{-\ln 2x}{2x^2} \end{aligned}$$

❷ التحقق أنّ: $g(x) = \frac{1}{4x^2} + \frac{\ln 2x}{2x^2}$:

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{1+2\ln 2x}{4x^2} \\ &= \frac{1}{4x^2} + \frac{2\ln 2x}{4x^2} \\ &= \frac{1}{4x^2} + \frac{\ln 2x}{2x^2} \end{aligned}$$

❸ استنتاج دالة أصلية للدالة g على المجال $]0;+\infty[$:

$$\begin{aligned} \int g(x)dx &= \int \left(\frac{1}{4x^2} + \frac{\ln 2x}{2x^2}\right) dx \\ &= \int \left(\frac{1}{4x^2}\right) dx + \int \left(\frac{\ln 2x}{2x^2}\right) dx \\ &= \frac{-1}{4x} - \frac{1+ln\,2x}{2x} + c \\ &= \frac{-3-2\ln 2x}{4x} + c \\ &= \boxed{-\frac{3+2\ln 2x}{4x} + c} \end{aligned}$$

التمرين 03
بكالوريا 2014
شعبة تقني رياضي
الموضوع الثاني

•تعيين a و b حتى يكون: من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $g'(x) = f(x)$:

$$\begin{aligned} g'(x) = f(x) &\Longrightarrow ae^x + (ax+b)e^x = (x-1)e^x \\ &\Longrightarrow ae^x + axe^x + be^x = (x-1)e^x \\ &\Longrightarrow (ax+a+b)e^x = (x-1)e^x \\ &\Longrightarrow ax+a+b = x-1 \end{aligned}$$

بالمطابقة نجد:

$$\begin{cases} a = 1 \\ a+b = -1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \end{cases}$$

ومنه:

$$\boxed{g(x) = (x-2)e^x}$$

التمرين 04
بكالوريا 2015
شعبة تقني رياضي
الموضوع الأول

• حساب بالسنتمر المربع، مساحة الحيز المحدد المنحنى (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها $y=0$ ،$x=-1$ و $x=1$:

نضع: A هي مساحة الحيز المحدد بـ (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها $y=0$ ،$x=-1$ و $x=1$:

$$\begin{aligned}
A &= \int_{-1}^{1} \big(f(x)\big)dx \\
&= \int_{-1}^{1} \left(x+1+\frac{2}{x+2}\ln(x+2)\right)dx \\
&= \left[\frac{1}{2}x^2+x+2\frac{(\ln(x+2))^2}{2}\right]_{-1}^{1} \\
&= \left[\frac{1}{2}x^2+x+(\ln(x+2))^2\right]_{-1}^{1} \\
&= \frac{1}{2}+1+(\ln 3)^2-\frac{1}{2}+1 \\
&= (\ln 3)^2+2 \\
&\approx \boxed{3.21cm^2}
\end{aligned}$$

التمرين 05
بكالوريا 2015
شعبة تقني رياضي
الموضوع الثاني

❶ تبيين أنّ (Δ) ذا المعادلة $y=2x+3$ مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) عند $-\infty$:

لدينا:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to-\infty}\big(f(x)-(2x+3)\big) = \lim_{x\to-\infty}\big(2x+3-(x+1)e^x-(2x+3)\big) \\
&= \lim_{x\to-\infty}(-(x+1)e^x) \\
&= \lim_{x\to-\infty}(-xe^x-e^x) \\
&= 0
\end{aligned}$$

ومنه: (Δ) مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) عند $-\infty$

- دراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ):

$$f(x)-(2x+3) = -(x+1)e^x$$

لدينا $e^x>0$ ومنه إشارة الفرق من إشارة $-(x+1)$

$$-(x+1)=0 \Longrightarrow x=-1$$

ومنه:

ومنه:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x)-y_{(\Delta)}$	$+$	0	$-$

وعليه:

- (C_f) فوق (Δ) لما $x\in]-\infty;-1[$
- (C_f) يقطع (Δ) لما $x=-1$
- (C_f) تحت (Δ) لما $x\in]-1;+\infty[$

❷ تبيين أن الدالة $x \longmapsto xe^x$ هي دالة أصلية للدالة $x \longmapsto (x+1)e^x$ على $\mathbb{R}$:

لدينا:

$$(xe^x)' = e^x + xe^x = (x+1)e^x$$

إذن الدالة $x \longmapsto xe^x$ هي دالة أصلية للدالة $x \longmapsto (x+1)e^x$

❸ حساب A مساحة الحيز المستوي المحدد بـ (C_f) والمستقيم (Δ) والمستقيمين الذين معادلتيهما: $x = 0$ ، $x = \alpha$:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{\alpha} \left(y_{(\Delta)} - f(x)\right) dx \\ &= \int_0^{\alpha} (2x + 3 - 2x - 3 + (x+1)e^x) dx \\ &= \int_0^{\alpha} \left((x+1)e^x\right) dx \\ &= [xe^x]_0^{\alpha} \\ &= \boxed{\alpha e^{\alpha}} \end{aligned}$$

❹ ايجاد حصرا للعدد A:

لدينا: $0.92 < \alpha < 0.93$

ولدينا: $e^{0.92} < e^{\alpha} < e^{0.93}$

ومنه: $0.92e^{0.92} < \alpha e^{\alpha} < 0.93e^{0.93}$

أي: $2.31 < A < 2.36$

التمرين 06

بكالوريا 2016
شعبة تقني رياضي
الموضوع الأول

❶ تبيين أن الدالة H دالة أصلية للدالة $x \longmapsto (x-1)\ln(x+1)$ على المجال $]-1; +\infty[$:

لدينا:

$$\begin{aligned} H'(x) &= \frac{1}{2}\left[(2x-2)\ln(x+1) + \left(\frac{1}{x+1}\right)(x^2 - 2x - 3)\right] - \frac{1}{4}2x + \frac{3}{2} \\ &= (x-1)\ln(x+1) + \frac{1}{2}\left(\frac{(x-3)(x+1)}{x+1}\right) - \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \\ &= (x-1)\ln(x+1) + \frac{1}{2}(x-3) - \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \\ &= (x-1)\ln(x+1) \end{aligned}$$

ومنه H دالة أصلية لـ $x \longmapsto (x-1)\, ln(x+1)$

❷ حساب مساحة الحيز المستوي المحدد المنحنى (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها $y = 0$ ، $x = 1$ و $x = 2$:

$$\begin{aligned} S &= \int_1^2 (f(x)) dx \\ &= \int_1^2 (1 + (x-1)\ln(x+1)) dx \\ &= [x + H(x)]_1^2 \\ &= 2 + H(2) - 1 - H(1) \\ &\approx 1.49 u.a \end{aligned}$$

❶ تبيين أنّ (Δ) ذا المعادلة $y=-2x+3$ مقارب مائل لـ (C_f)

لدينا:

$$\begin{aligned}\lim_{|x|\to+\infty}\left(f(x)-(2x+3)\right) &= \lim_{|x|\to+\infty}\left(-2x+3+2\,ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right)-(2x+3)\right)\\ &= \lim_{|x|\to+\infty}\left(2\,ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right)\right)\\ &= \lim_{|x|\to+\infty}\left(2\,ln\left(\frac{x}{x}\right)\right)\\ &= 0\end{aligned}$$

ومنه: (Δ)مقارب مائل لـ (C_f)

- دراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ):

$$f(x)-(2x+3)=2\,ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right)$$

نفرض أن:

$$2\,ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right)=0$$

ومنه:

$$2\,ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right)=0 \Longrightarrow \frac{x-1}{x-2}=1 \Longrightarrow \frac{1}{x-2}=0$$

وهذا مستحيل، إذن (C_f) لا يقطع (Δ)

وعليه إشارة الفرق من إشارة $x-2$

لدينا

$$x-2\neq 0 \Longrightarrow x\neq 2$$

x	$-\infty$ 1	2	$+\infty$
$x-2$	$-$	$-$	$+$
$f(x)-y_{(\Delta)}$	$-$	‖ ‖	$+$

إذن:

- (C_f) تحت (Δ) لما $x\in\,]-\infty;1[$
- (C_f) فوق (Δ) لما $x\in\,]2;+\infty[$

❷ تبيين أن الدالة $x\longmapsto(x-1)\ln(x-1)-(x-2)\ln(x-2)$ أصلية للدالة $x\longmapsto\ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right)$ على $]2;+\infty[$:

نضع:

$$g(x)=ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right)$$
$$G(x)=(x-1)\,ln(x-1)-(x-2)\,ln(x-2)$$

لدينا:

$$\begin{aligned}G'(x) &= \ln(x-1)+\frac{x-1}{x-1}-\ln(x-2)-\frac{x-2}{x-2}\\ &= \ln(x-1)+1-\ln(x-2)-1\\ &= \ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right)\\ &= g(x)\end{aligned}$$

إذن الدالة $x \longmapsto (x-1)\,ln(x-1)-(x-2)\,ln(x-2)$ أصلية للدالة $x \longmapsto ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right)$

❸ حساب بدلالة β مساحة الحيز المستوي المحدد المنحنى (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها: $y=-2x+3$ ، $x=\beta$ و $x=3$:

$$\begin{aligned}
S &= \int_\beta^3 (f(x)-(-2x+3))dx \\
&= \int_\beta^3 \left(-2x+3+2\ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right)-(-2x+3)\right)dx \\
&= \int_\beta^3 \left(2\ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right)\right)dx \\
&= 2\int_\beta^3 \ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right)dx \\
&= 2[(x-1)\,ln(x-1)-(x-2)\,ln(x-2)]_\beta^3 \\
&= \boxed{2[2\ln 2-(\beta-1)\ln(\beta-1)+(\beta-2)\ln(\beta-2)]u.a}
\end{aligned}$$

التمرين 08
بكالوريا 2017 الدورة 1
شعبة تقني رياضي
الموضوع الثاني

❶ اثبات أنه من أجل كل $x \in [\alpha;0]$ ، $-3 \le f(x) \le f(\alpha)$:

لدينا: الدالة f متناقصة لما $x \in [\alpha;0]$

ومنه:

$$\begin{aligned}
\alpha \le x \le 0 &\Longrightarrow f(0) \le f(x) \le f(\alpha) \\
&\Longrightarrow -3 \le f(x) \le f(\alpha)
\end{aligned}$$

❷ تبيين أن: $\frac{3}{2}\alpha^2 \le S \le -3\alpha$:

لدينا:

$$\begin{aligned}
-3 \le f(x) \le f(\alpha) &\Longrightarrow -f(\alpha) \le -f(x) \le 3 \\
&\Longrightarrow \int_\alpha^0 (-f(\alpha))dx \le \int_\alpha^0 (-f(x))dx \le \int_\alpha^0 (3)dx \\
&\Longrightarrow \int_\alpha^0 \left(-\frac{3}{2}\alpha\right)dx \le S \le \int_\alpha^0 (3)dx \\
&\Longrightarrow -\frac{3}{2}\alpha[x]_\alpha^0 \le S \le 3[x]_\alpha^0 \\
&\Longrightarrow -\frac{3}{2}\alpha[0-\alpha] \le S \le 3[0-\alpha] \\
&\Longrightarrow \boxed{\frac{3}{2}\alpha^2 \le S \le -3\alpha}
\end{aligned}$$

التمرين 09
بكالوريا 2017 الدورة 2
شعبة تقني رياضي
الموضوع الأول

❶

أ/ تبيين أنّ المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=-\frac{1}{2}x+2$ مقارب مائل للمنحنى (C_f):

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-\left(-\frac{1}{2}x+2\right)\right)&=\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{2}x+2+\frac{-1+\ln x}{x}-\left(-\frac{1}{2}x+2\right)\right)\\&=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-1+\ln x}{x}\right)\\&=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-1}{x}+\frac{\ln x}{x}\right)\\&=0\end{aligned}$$

ومنه: (Δ) مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$

ب/ دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ):

$$f(x)-y_{(\Delta)}=\frac{-1+\ln x}{x}$$

لدينا:

$$\begin{aligned}\frac{-1+\ln x}{x}=0&\Longrightarrow -1+\ln x=0\\&\Longrightarrow \ln x=1\\&\Longrightarrow x=e\end{aligned}$$

ومنه:

x	0	e	$+\infty$
$f(x)-y_{(\Delta)}$	$-$	0	$+$

- (C_f) تحت (Δ) لما $x\in]0;e[$
- (C_f) يقطع (Δ) لما $x=e$
- (C_f) فوق (Δ) لما $x\in]e;+\infty[$

❷

أ/ حساب $A(\lambda)$ بدلالة λ:

$$\begin{aligned}A(\lambda)&=\int_1^{\lambda}\left(y_{(\Delta)}-f(x)\right)dx\\&=\int_1^{\lambda}\left(-\frac{1}{2}x+2-\left(-\frac{1}{2}x+2+\frac{-1+\ln x}{x}\right)\right)dx\\&=\int_1^{\lambda}\left(-\frac{-1+\ln x}{x}\right)dx\\&=\int_1^{\lambda}\left(\frac{1}{x}-\frac{\ln x}{x}\right)dx\\&=\left[\ln x-\frac{(\ln x)^2}{2}\right]_1^{\lambda}\\&=\boxed{\ln\lambda-\frac{(\ln\lambda)^2}{2}}\end{aligned}$$

ب/ تعيين قيمة λ حيث: $A(\lambda)=\frac{1}{2}cm^2$:

لدينا:

$$\begin{aligned}A(\lambda)=\frac{1}{2}&\Longrightarrow \ln\lambda-\frac{(\ln\lambda)^2}{2}=\frac{1}{2}\\&\Longrightarrow 2\ln\lambda-(\ln\lambda)^2=1\\&\Longrightarrow -(\ln\lambda)^2+2\ln\lambda-1=0\end{aligned}$$

نضع: $\ln\lambda = t$

ومنه:

$$\begin{aligned}-(\ln\lambda)^2+2\ln\lambda-1=0 &\Longrightarrow -t^2+2t-1=0\\ &\Longrightarrow -(t-1)^2=0\\ &\Longrightarrow t-1=0\\ &\Longrightarrow t=1\end{aligned}$$

ومنه:

$$\begin{aligned}\ln\lambda = t &\Longrightarrow \ln\lambda = 1\\ &\Longrightarrow \boxed{\lambda = e}\end{aligned}$$

التمرين 10
بكالوريا 2017 الدورة 2
شعبة تقني رياضي
الموضوع الثاني

1

أ/ تبيين أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-x]=1$:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}[f(x)-x] &= \lim_{x\to+\infty}[(x+1)(1+2e^{-x})-x]\\ &= \lim_{x\to+\infty}[x+2xe^{-x}+1+2e^{-x}-x]\\ &= \lim_{x\to+\infty}[2xe^{-x}+1+2e^{-x}]\\ &= 1\end{aligned}$$

- استنتاج معادلة لـ (Δ) :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}[f(x)-x]=1 &\Longrightarrow \lim_{x\to+\infty}[f(x)-x]-1=0\\ &\Longrightarrow \lim_{x\to+\infty}[f(x)-x-1]=0\\ &\Longrightarrow \lim_{x\to+\infty}[f(x)-(x+1)]=0\end{aligned}$$

إذن معادلة (Δ) هي: $y=x+1$

ب/ دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ):

$$\begin{aligned}f(x)-(x+1) &= (x+1)(1+2e^{-x})-(x+1)\\ &= (x+1)(1+2e^{-x}-1)\\ &= (x+1)2e^{-x}\end{aligned}$$

لدينا: $2e^{-x}>0$ ومنه إشارة الفرق من إشارة $x+1$

لدينا:

$$x+1=0 \Longrightarrow x=-1$$

ومنه:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x)-y_{(\Delta)}$	$-$	0	$+$

- (C_f) تحت (Δ) لما $x\in\,]-\infty;-1[$
- (C_f) يقطع (Δ) لما $x=-1$
- (C_f) فوق (Δ) لما $x\in\,]-1;+\infty[$

2 حساب $A(\alpha)$ بدلالة α :

$$A(\alpha)=\int_{-1}^{\alpha}(f(x)-(x+1))dx$$

$$= \int_{-1}^{\alpha} \left((x+1)2e^{-x}\right)dx$$
$$= 2\int_{-1}^{\alpha} \left((x+1)e^{-x}\right)dx$$

نضع:

$$u(x) = x+1 \qquad \Big| \qquad v(x) = -e^{-x}$$
$$u'(x) = 1 \qquad \Big| \qquad v'(x) = e^{-x}$$

لدينا:

$$\int u(x)v'(x)\,dx = [u(x)v(x)] - \int u'(x)v(x)\,dx$$

ومنه:

$$\int [(x+1)e^{-x}]\,dx = [-(x+1)e^{-x}] - \int -e^{-x}dx$$

وعليه:

$$\begin{aligned} A(\alpha) &= 2\int_{-1}^{\alpha} \left((x+1)e^{-x}\right)dx \\ &= 2\left[[-(x+1)e^{-x}]_{-1}^{\alpha} - \int_{-1}^{\alpha}(-e^{-x})dx\right] \\ &= 2[[-(x+1)e^{-x}]_{-1}^{\alpha} - [e^{-x}]_{-1}^{\alpha}] \\ &= 2[-(x+1)e^{-x} - e^{-x}]_{-1}^{\alpha} \\ &= -2[(x+2)e^{-x}]_{-1}^{\alpha} \\ &= \boxed{-2[(\alpha+2)e^{-\alpha} - e]u.a} \end{aligned}$$

- حساب $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} A(\alpha)$.

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha\to+\infty} A(\alpha) &= \lim_{\alpha\to+\infty} [-2[(\alpha+2)e^{-\alpha} - e]] \\ &= \lim_{\alpha\to+\infty} [-2\alpha e^{-\alpha} - 4e^{-\alpha} + 2e] \\ &= 2e \end{aligned}$$

التمرين 11
بكالوريا 2018
شعبة تقني رياضي
الموضوع الأول

❶ تبيين أنه من أجل كل x من $[-1;0]$: $\frac{x}{x-1} \le f(x) < e^{-x}$:

يكفي أن نثبت أن:

$$\begin{cases} f(x) < e^{-x} \\ \dfrac{x}{x-1} \le f(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x) - e^{-x} < 0 \ldots (*) \\ f(x) - \dfrac{x}{x-1} \ge 0 \ldots (**) \end{cases}$$

- اثبات $(*)$:

لدينا:

$$\begin{aligned} f(x) - e^{-x} &= \frac{x}{x-1}e^{-x} - e^{-x} \\ &= e^{-x}\left(\frac{x}{x-1} - 1\right) \\ &= e^{-x}\left(\frac{x-x+1}{x-1}\right) \\ &= e^{-x}\left(\frac{1}{x-1}\right) \end{aligned}$$

لما $x \in [-1; 0]$ لدينا: $e^{-x} > 0$ و $x - 1 < 0$

إذن:

$$e^{-x}\left(\frac{1}{x-1}\right) < 0$$

وعليه:

$$f(x) - e^{-x} < 0 \dots (*)$$

- اثبات $(**)$:

لدينا:

$$\begin{aligned} f(x) - \frac{x}{x-1} &= \frac{x}{x-1}e^{-x} - \frac{x}{x-1} \\ &= \frac{x}{x-1}(e^{-x} - 1) \end{aligned}$$

لدينا،

$$\begin{aligned} e^{-x} - 1 = 0 &\Longrightarrow e^{-x} = 1 \\ &\Longrightarrow -x = 0 \\ &\Longrightarrow x = 0 \end{aligned}$$

ولدينا

$$x - 1 \neq 0 \Longrightarrow x \neq 1$$

ومنه:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$e^{-x} - 1$		$+$	0	$-$		$-$	
$x - 1$		$-$		$-$	‖	$+$	
$\frac{x}{x-1}(e^{-x} - 1)$		$+$	0	$+$	‖	$-$	

نلاحظ أن $\frac{x}{x-1}(e^{-x} - 1) \geq 0$ لما $x \in [-1; 0]$

وعليه: لما $x \in [-1; 0]$ نجد:

$$f(x) - \frac{x}{x-1} \dots (**)$$

من $(*)$ و $(**)$ نجد أنّه من أجل كل x من $[-1; 0]$:

$$\boxed{\frac{x}{x-1} \leq f(x) < e^{-x}}$$

❷ التحقق أنه من أجل كل x من $[-1; 0]$: $\frac{x}{x-1} = 1 + \frac{1}{x-1}$

$$\begin{aligned} \frac{x}{x-1} &= \frac{x-1+1}{x-1} \\ &= \frac{x-1}{x-1} + \frac{1}{x-1} \\ &= \boxed{1 + \frac{1}{x-1}} \end{aligned}$$

❸ تبيين أنّ: $1 - \ln 2 \leq \int_{-1}^{0} f(x)dx < e - 1$:

لدينا:

$$\begin{aligned} \frac{x}{x-1} \leq f(x) < e^{-x} &\Longrightarrow \int_{-1}^{0} \left(\frac{x}{x-1}\right)dx \leq \int_{-1}^{0} f(x)dx < \int_{-1}^{0} (e^{-x})dx \\ &\Longrightarrow \int_{-1}^{0} \left(1 + \frac{1}{x-1}\right)dx \leq \int_{-1}^{0} f(x)dx < \int_{-1}^{0} (e^{-x})dx \end{aligned}$$

$$\Rightarrow [x+\ln(|x-1|)]_{-1}^{0} \le \int_{-1}^{0} f(x)dx < [-e^{-x}]_{-1}^{0}$$

$$\Rightarrow -(-1+\ln 2) \le \int_{-1}^{0} f(x)dx < -1-(-e)$$

$$\Rightarrow \boxed{1-\ln 2 \le \int_{-1}^{0} f(x)dx < e-1}$$

التمرين 12

بكالوريا 2019
شعبة تقني رياضي
الموضوع الثاني

أ/ تبيين أنه من أجل كل x من المجال $]1;+\infty[$: $\ln 2 < f(x) < e+\ln(x+1)$:

يكفي أن نبين أنّ:

$$\begin{cases} f(x) < e+ln(x+1) \ldots (*) \\ ln\, 2 < f(x) \ldots (**) \end{cases}$$

- اثبات $(*)$:

لدينا:

$$ln\, x < x+1 \Rightarrow \frac{\ln x}{x+1} < 1$$
$$\Rightarrow \frac{e\ln x}{x+1} < e$$
$$\Rightarrow \ln(x+1) + \frac{e\ln x}{x+1} < e+\ln(x+1)$$
$$\Rightarrow f(x) < e+\ln(x+1) \ldots (*)$$

- اثبات $(**)$:

لدينا الدالة f متزايدة على $]1;+\infty[$ ومنه:

$$x>1 \Rightarrow f(x) > f(1)$$
$$\Rightarrow f(x) > \ln(2)$$

ب/ التحقق أنه من أجل كل x من المجال $]1;+\infty[$ ، الدالة: $x \longmapsto (x+1)\ln(x+1)-x$ ، هي دالة أصلية للدالة: $x \longmapsto \ln(x+1)$:

$$[(x+1)\, ln(x+1)-x]' = \ln(x+1) + \frac{1}{x+1}(x+1) - 1$$
$$= \ln(x+1)$$

ج/ تبيين أنّ: $(e^2-e)\ln 2 < S < e^3$:

لدينا:

$$ln\, 2 < f(x) < e + ln(x+1) \Rightarrow \int_{e-1}^{e^2-1} (ln\, 2)dx < \int_{e-1}^{e^2-1} (f(x))dx < \int_{e-1}^{e^2-1} (e+ln(x+1))dx$$
$$\Rightarrow \ln 2\, [x]_{e-1}^{e^2-1} < S < [ex+(x+1)\, ln(x+1)-x]_{e-1}^{e^2-1}$$
$$\Rightarrow \ln 2\,(e^2-1-e+1) < S < e(e^2-1)+(e^2)\ln(e^2)-e^2+1-e(e-1)-e\ln e+e-1$$
$$\Rightarrow \ln 2\,(e^2-e) < S < e^3-e+2e^2-e^2+1-e^2+e-e+e-1$$
$$\Rightarrow \boxed{\ln 2\,(e^2-e) < S < e^3}$$

.9

حلول التمارين الواردة في البكالوريات السابقة

[شعبة رياضيات]

-حلول مقترحة-

انقر على كلمة التمرين في كل حل للانتقال إليه

التمرين 01
بكالوريا 2011
شعبة رياضيات
الموضوع الأول

❶ ايجاد $\int_{-1}^{x}(te^{t})dt$ باستعمال التكامل بالتجزئة:

نضع:

$$\begin{array}{l|l} u(t)=t & v(t)=e^{t} \\ u'(t)=1 & v'(t)=e^{t} \end{array}$$

لدينا:

$$\int u(t)v'(t)dt=[u(t)v(t)]-\int u'(t)v(t)dt$$

ومنه:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{x}(te^{t})dt &= [te^{t}]_{-1}^{x}-\int_{-1}^{x}(e^{t})dt \\ &= [te^{t}]_{-1}^{x}-[e^{t}]_{-1}^{x} \\ &= [te^{t}-e^{t}]_{-1}^{x} \\ &= [e^{t}(t-1)]_{-1}^{x} \\ &= e^{x}(x-1)+2e^{-1}\end{aligned}$$

- ايجاد دالة أصلية للدالة f على المجال $]-\infty;0]$:

$$\begin{aligned}\int f(x)dx &= \int\left((3x+4)e^{x}\right)dx \\ &= \int(3xe^{x}+4e^{x})dx \\ &= 3\int xe^{x}dx+4\int e^{x}dx \\ &= 3e^{x}(x-1)+4e^{x}+c \\ &= e^{x}(3x+1)+c\end{aligned}$$

❷ حساب بدلالة λ المساحة $A(\lambda)$ للحيز من المستوي المحدد بـ (C_f) والمستقيمات ذات المعادلات:

$$x=\lambda \ ، \ x=-\frac{4}{3} \ ، \ y=0$$

$$\begin{aligned}A(\lambda) &= \int_{\lambda}^{-\frac{4}{3}}-f(x)dx \\ &= -[e^{x}(3x+1)]_{\lambda}^{-\frac{4}{3}} \\ &= -\left(e^{-\frac{4}{3}}\left(3\left(-\frac{4}{3}\right)+1\right)-e^{\lambda}(3\lambda+1)\right) \\ &= \boxed{3e^{-\frac{4}{3}}+e^{\lambda}(3\lambda+1)}u.a\end{aligned}$$

- ايجاد $\lim\limits_{\lambda\to-\infty}A(\lambda)$:

$$\begin{aligned}\lim_{\lambda\to-\infty}A(\lambda) &= \lim_{\lambda\to-\infty}\left(3e^{-\frac{4}{3}}+e^{\lambda}(3\lambda+1)\right) \\ &= \boxed{3e^{-\frac{4}{3}}}\end{aligned}$$

التمرين 02
بكالوريا 2011
شعبة رياضيات
الموضوع الثاني

❶

أ/ دراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى (δ):

$$\begin{aligned} f(x)-\ln x &= \left(1-\frac{1}{x^2}\right)\ln x-\ln x \\ &= \ln x\left(1-\frac{1}{x^2}-1\right) \\ &= \frac{-\ln x}{x^2} \end{aligned}$$

لدينا: $x^2>0$ ومنه إشارة الفرق من إشارة $(-\ln x)$

لدينا:

$$\begin{aligned} -\ln x=0 &\Longrightarrow \ln x=0 \\ &\Longrightarrow x=1 \end{aligned}$$

x	0	1	$+\infty$
$-\ln x$	$+$	0	$-$

ومنه:

- (C_f) فوق (δ) لما $x\in]0;1[$
- (C_f) يقطع (δ) لما $x=1$
- (C_f) تحت (δ) لما $x\in]1;+\infty[$

ب/ ايجاد $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^2}\ln x\right)$:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^2}\ln x\right)=\boxed{0}$$

لأنّ: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{x^n}\right)=0$

ج/ الاستنتاج:

(C_f) و (δ) متقاربان بجوار $+\infty$

❷

أ/ إيجاد $\int_1^x\left(\frac{1}{t^2}\ln t\right)dt$ باستعمال التكامل بالتجزئة:

نضع:

$$\left.\begin{aligned} u(t)&=-\frac{1}{t} \\ u'(t)&=\frac{1}{t^2} \end{aligned}\right| \begin{aligned} v(t)&=\ln t \\ v'(t)&=\frac{1}{t} \end{aligned}$$

لدينا:

$$\int u'(t)v(t)dt=[u(t)v(t)]-\int u(t)v'(t)dt$$

ومنه:

$$\begin{aligned} \int_1^x\left(\frac{1}{t^2}\ln t\right)dt &= \left[-\frac{1}{t}\ln t\right]_1^x-\int_1^x\left(-\frac{1}{t}\frac{1}{t}\right)dt \\ &= \left[-\frac{1}{t}\ln t\right]_1^x-\int_1^x\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt \\ &= \left[-\frac{1}{t}\ln t\right]_1^x-\left[\frac{1}{t}\right]_1^x \\ &= \left[-\frac{1}{t}\ln t-\frac{1}{t}\right]_1^x \end{aligned}$$

$$= \left[-\frac{1}{t}(\ln t + 1\right]_1^x$$
$$= \boxed{-\frac{1}{x}(\ln x + 1)}$$

ب/ التحقق أنّ: $x \mapsto x\ln x - x$ هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto \ln x$ على المجال $[1; +\infty[$:

$$(x\,ln\,x - x)' = \ln x + \frac{1}{x}x - 1$$
$$= \ln x$$

ج/ استنتاج دالة أصلية للدالة f على المجال $[1; +\infty[$:

$$\int f(x)dx = \int \left(\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)\ln x\right)dx$$
$$= \int \left(\ln x - \frac{1}{x^2}\ln x\right)dx$$
$$= \boxed{x\ln x - x + \frac{1}{x}(\ln x + 1) + c}$$

❸ α عدد حقيقي أكبر تماما من 1

• حساب بدلالة α المساحة $A(\alpha)$ للحيّز من المستوي المحدد بـ $\left(C_f\right)$ و (δ) والمستقيمات ذات المعادلات:

$$x = 1 \quad \text{و} \quad x = \alpha$$

$$A(\alpha) = \int_1^\alpha (\ln x - f(x))dx$$
$$= \int_1^\alpha \left(\ln x - \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)\ln x\right)dx$$
$$= \int_1^\alpha \left(\frac{1}{x^2}\ln x\right)dx$$
$$= -\left[\frac{1}{x}(\ln x + 1)\right]_1^\alpha$$
$$= \boxed{-\left(\frac{1}{\alpha}(\ln \alpha + 1) - 1\right)}$$

- ايجاد $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} A(\alpha)$:

$$\lim_{\alpha \to +\infty} A(\alpha) = \lim_{\alpha \to +\infty}\left[-\left(\frac{1}{\alpha}(\ln \alpha + 1) - 1\right)\right]$$
$$= \lim_{\alpha \to +\infty}\left[-\left(\frac{\ln \alpha}{\alpha} + \frac{1}{\alpha} - 1\right)\right]$$
$$= \boxed{1}$$

التمرين 03

بكالوريا 2013
شعبة رياضيات
الموضوع الأول

❶ حساب $f(1)$:

$$f(1) = e^1 - e(1) + \frac{\ln 1}{1} = 0$$

❷ حساب مساحة الحيز المستوي المحدد بـ $\left(C_f\right)$ وحامل محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتاهما: $x = \frac{1}{2}$ و $x = 2$:

$$S = \int_{\frac{1}{2}}^1 (-f(x))dx + \int_1^2 (f(x))dx$$

$$= -\int_{0.5}^{1}\left(e^x - ex + \frac{\ln x}{x}\right)dx + \int_{1}^{2}\left(e^x - ex + \frac{\ln x}{x}\right)dx$$
$$= \int_{1}^{\frac{1}{2}}\left(e^x - ex + \frac{\ln x}{x}\right)dx + \int_{1}^{2}\left(e^x - ex + \frac{\ln x}{x}\right)dx$$
$$= \left[e^x - \frac{e}{2}x^2 + \frac{(\ln x)^2}{2}\right]_1^{\frac{1}{2}} + \left[e^x - \frac{e}{2}x^2 + \frac{(\ln x)^2}{2}\right]_1^2$$
$$= e^{\frac{1}{2}} - \frac{e}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{\left(\ln\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2}{2} - e + \frac{e}{2} + e^2 - \frac{e}{2}(2)^2 + \frac{(\ln 2)^2}{2} - e + \frac{e}{2}$$
$$= e^{\frac{1}{2}} + (\ln(2))^2 - \frac{25}{8}e + e^2$$
$$\approx \boxed{1.02u.a}$$

التمرين 04
بكالوريا 2013
شعبة رياضيات
الموضوع الثاني

❶ تبيين أنّ الدالة H دالة أصلية للدالة $x \longmapsto (x+1)^2e^{-x}$:

$$\begin{aligned} H'(x) &= (-2x-4)e^{-x} - (-x^2-4x-5)e^{-x} \\ &= (-2x-4+x^2+4x+5)e^{-x} \\ &= (x^2-2x-1)e^{-x} \\ &= (x-1)^2e^{-x} \end{aligned}$$

❷ حساب مساحة الحيز المستوي المحدد بـ (C_f) والمستقيم (Δ) والمستقيمين اللذين معادلتاهما: $x=-1$ و $x=0$:

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^{0}(x - f(x))dx \\ &= \int_{-1}^{0}(x - x + (x+1)^2e^{-x})dx \\ &= \int_{-1}^{0}((x+1)^2e^{-x})dx \\ &= [H(x)]_{-1}^{0} \\ &= H(0) - H(-1) \\ &= \boxed{(-5+2e)cm^2} \end{aligned}$$

التمرين 05
بكالوريا 2014
شعبة رياضيات
الموضوع الأول

❶ حساب بدلالة العدد λ $a(\lambda)$:

$$\begin{aligned} a(\lambda) &= \int_{1}^{\lambda}(f(x) - 1)dx \\ &= \int_{1}^{\lambda}\left(\frac{e^x - 1}{e^x - x} - 1\right)dx \\ &= [\ln(e^x - x) - x]_1^{\lambda} \\ &= \ln(e^{\lambda} - \lambda) - \lambda - \ln(e-1) + 1 \\ &= \ln\left(\frac{e^{\lambda} - \lambda}{e-1}\right) - \lambda + 1 \end{aligned}$$

❷ احسب نهاية $a(\lambda)$ لما يؤول λ إلى $+\infty$

$$\begin{aligned}\lim_{\lambda\to+\infty} a(\lambda) &= \lim_{\lambda\to+\infty}\left(\ln\left(\frac{e^{\lambda}-\lambda}{e-1}\right)-\lambda+1\right)\\ &= \lim_{\lambda\to+\infty}\left(\ln\left(e^{\lambda}\frac{1-\lambda e^{-\lambda}}{e-1}\right)-\lambda+1\right)\\ &= \lim_{\lambda\to+\infty}\left(\ln(e^{\lambda})+\ln\left(\frac{1-\lambda e^{-\lambda}}{e-1}\right)-\lambda+1\right)\\ &= \lim_{\lambda\to+\infty}\left(\ln\left(\frac{1-\lambda e^{-\lambda}}{e-1}\right)+1\right)\\ &= \ln\left(\frac{1}{e-1}\right)+1\\ &= -\ln(e-1)+1\end{aligned}$$

التمرين 06
بكالوريا 2014
شعبة رياضيات
الموضوع الثاني

❶ تعيين الوضع النسبي بين (C_f) و (C_g) :

$$\begin{aligned} f(x)-g(x)=0 &\Longrightarrow (1+2\ln x)(-1+\ln x)-(1-\ln x)=0\\ &\Longrightarrow (1+2\ln x)(-1+\ln x)+(-1+\ln x)=0\\ &\Longrightarrow (-1+\ln x)(1+2\ln x+1)=0\\ &\Longrightarrow (-1+\ln x)(2+2\ln x)=0\\ &\Longrightarrow 2(-1+\ln x)(1+\ln x)=0\\ &\Longrightarrow \begin{cases}-1+\ln x=0\\ \text{أو}\\ 1+\ln x=0\end{cases}\\ &\Longrightarrow \begin{cases}x=e\\ \text{أو}\\ x=e^{-1}\end{cases}\end{aligned}$$

x	0		e^{-1}		e		$+\infty$
$-1+\ln x$	‖	$-$		$-$	0	$+$	
$1+\ln x$	‖	$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)-g(x)$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	

- (C_f) فوق (C_g) لما $x\in]0;e^{-1}[\cup]e;+\infty[$
- (C_f) يقطع (C_g) لما $x\in\{e^{-1};e\}$
- (C_f) تحت (C_g) لما $x\in]e^{-1};e[$

❷

أ/ حساب $h'(x)$:

$$\begin{aligned}h'(x)&=(\ln x)^2+\left(2\frac{1}{x}\ln x\right)x-2\ln x-\frac{1}{x}2x+2\\ &=(\ln x)^2\end{aligned}$$

- استنتاج دالة أصلية للدالة $x\longmapsto(\ln x)^2$ على $]0;+\infty[$:

الدالة h دالة أصلية للدالة $x\longmapsto(ln\,x)^2$

ب/ حساب العدد $\int_{e^{-1}}^{e}\big(f(x)-g(x)\big)dx$:

$$\int_{e^{-1}}^{e}\big(f(x)-g(x)\big)dx=\int_{e^{-1}}^{e}\big(2(-1+\ln x)(1+\ln x)\big)dx$$
$$=2\int_{e^{-1}}^{e}(-1-\ln x+\ln x+(\ln x)^2)dx$$
$$=2\int_{e^{-1}}^{e}(-1+(\ln x)^2)dx$$
$$=2[-x+h(x)]_{e^{-1}}^{e}$$
$$=2[-e+h(e)+e^{-1}-h(e^{-1})]$$
$$=2[-e+e+e^{-1}-5e^{-1}]$$
$$=\boxed{-8e^{-1}}$$

التمرين 07
بكالوريا 2015
شعبة رياضيات
الموضوع الأول

❶ تعيين الدالة الأصلية للدالة $x\longmapsto x^2\ln x$:

نضع:

$$u(t)=\frac{t^3}{3}\quad\Big|\quad v(t)=\ln t$$
$$u'(t)=t^2\quad\Big|\quad v'(t)=\frac{1}{t}$$

لدينا:

$$\int u'(t)v(t)dt=[u(t)v(t)]-\int u(t)v'(t)dt$$

ومنه:

$$\int_1^x(t^2\ln t)dt=\left[\frac{t^3}{3}\ln t\right]_1^x-\int_1^x\left(\frac{t^3}{3}\frac{1}{t}\right)dt$$
$$=\left[\frac{t^3}{3}\ln t\right]_1^x-\int_1^x\left(\frac{t^2}{3}\right)dt$$
$$=\left[\frac{t^3}{3}\ln t\right]_1^x-\left[\frac{t^3}{9}\right]_1^x$$
$$=\left[\frac{t^3\ln t}{3}-\frac{t^3}{9}\right]_1^x$$
$$=\boxed{\frac{x^3\ln x}{3}-\frac{x^3}{9}+\frac{1}{9}}$$

❷

أ/ كتابة العبارة $F(t)$ بدلالة t و α:

لدينا: الدالة $x\longmapsto\frac{x^3\ln x}{3}-\frac{x^3}{9}$ دالة أصلية للدالة $x\longmapsto x^2\ln x$

ومنه:

$$F(t)=\int_t^{\alpha}f(x)dx$$
$$=\int_t^{\alpha}(1-x^2\ln x)dx$$

الخليل للرياضيات

$$= \left[x - \left(\frac{x^3 \ln x}{3} - \frac{x^3}{9}\right)\right]_t^\alpha$$
$$= \left[x - \frac{x^3 \ln x}{3} + \frac{x^3}{9}\right]_t^\alpha$$
$$= \alpha - \frac{\alpha^3 \ln \alpha}{3} + \frac{\alpha^3}{9} - t + \frac{t^3 \ln t}{3} - \frac{t^3}{9}$$
$$= \boxed{\frac{9\alpha - 3\alpha^3 \ln \alpha + \alpha^3 - 9t + 3t^3 \ln t - t^3}{9}}$$

ب/ تبيين أنه من أجل كل عدد حقيقي t من المجال $]0;\alpha]$ لدينا: $F(t) = \frac{-3tf(t)-t^3-6t+\alpha^3+6\alpha}{9}$:

لدينا:

$$f(\alpha) = 0 \Longrightarrow 1 - \alpha^2 \ln \alpha = 0$$
$$\Longrightarrow \alpha^2 \ln \alpha = 1$$
$$\Longrightarrow \ln \alpha = \frac{1}{\alpha^2}$$

ولدينا:

$$f(t) = 1 - t^2 \ln t$$

ومنه:

$$F(t) = \frac{9\alpha - 3\alpha^3 \ln \alpha + \alpha^3 - 9t + 3t^3 \ln t - t^3}{9}$$
$$= \frac{9\alpha - 3\alpha^3 \frac{1}{\alpha^2} + \alpha^3 - 9t + 3t^3 \ln t - t^3}{9}$$
$$= \frac{6\alpha + \alpha^3 - 6t - 3t + 3t^3 \ln t - t^3}{9}$$
$$= \frac{-3t(1 - t^2 \ln t) - t^3 - 6t + \alpha^3 + 6\alpha}{9}$$
$$= \boxed{\frac{-3tf(t) - t^3 - 6t + \alpha^3 + 6\alpha}{9}}$$

ج/ حساب $\lim\limits_{\substack{t\to0\\>}} F(t)$:

$$\lim_{\substack{t\to0\\>}} F(t) = \lim_{\substack{t\to0\\>}} \left(\frac{-3tf(t) - t^3 - 6t + \alpha^3 + 6\alpha}{9}\right)$$
$$= \lim_{\substack{t\to0\\>}} \left(\frac{-3t(1 - t^2 \ln t) - t^3 - 6t + \alpha^3 + 6\alpha}{9}\right)$$
$$= \boxed{\frac{\alpha^3 + 6\alpha}{9}}$$

لأن: $\lim\limits_{\substack{t\to0\\>}} (t^2 \ln t) = 0$

❸

أ/ تعيين القيمة المضبوطة لـ m حتى يكون $\mathcal{S}(m) = 2\mathcal{A}$:

$$\mathcal{S}(m) = 2\mathcal{A} \Longrightarrow m^2\pi = 2\left(\frac{2}{9}(\alpha^3 + 6\alpha)\right)$$
$$\Longrightarrow m^2 = \frac{4}{9\pi}(\alpha^3 + 6\alpha)$$

$$\Longrightarrow \boxed{m = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{\alpha^3 + 6\alpha}{\pi}}}$$

ب/ علما أنّ $3.140 < \pi < 3.142$، أعط حصرا للعدد m:

لدينا: $1.531 < \alpha < 1.532$

ومنه: $9.186 < 6\alpha < 9.192$

ولدينا: $1.531 < \alpha < 1.532$

ومنه: $3.59 < \alpha^3 < 3.6$

وعليه: $12.766 < \alpha^3 + 6\alpha < 12.792$

ولدينا:

$$\begin{aligned}
3.140 < \pi < 3.142 &\Longrightarrow \frac{1}{3.142} < \frac{1}{\pi} < \frac{1}{3.140}\\
&\Longrightarrow \frac{12.766}{3.142} < \frac{\alpha^3 + 6\alpha}{\pi} < \frac{12.792}{3.140}\\
&\Longrightarrow \sqrt{\frac{12.766}{3.142}} < \sqrt{\frac{\alpha^3 + 6\alpha}{\pi}} < \sqrt{\frac{12.792}{3.140}}\\
&\Longrightarrow \frac{2}{3}\sqrt{\frac{12.766}{3.142}} < \frac{2}{3}\sqrt{\frac{\alpha^3 + 6\alpha}{\pi}} < \frac{2}{3}\sqrt{\frac{12.792}{3.140}}\\
&\Longrightarrow \boxed{1.34 < m < 1.35}
\end{aligned}$$

التمرين 08
بكالوريا 2016
شعبة رياضيات
الموضوع الأول

1

أ/ حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) + x]$ ، وتفسير النتيجة هندسيا:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} [f(x) + x] &= \lim_{x\to+\infty} \left[-x + \frac{3 + 2\ln x}{x} + x\right]\\
&= \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{3 + 2\ln x}{x}\right]\\
&= \lim_{x\to+\infty} \left[3\frac{1}{x} + 2\frac{\ln x}{x}\right]\\
&= 0
\end{aligned}$$

إذن (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل بجوار $+\infty$ معادلته $y = -x$

ب/ دراسة الوضع النسبي بين (C_f) و (Δ):

لدينا

$$\begin{aligned}
f(x) + x = 0 &\Longrightarrow -x + \frac{3 + 2\ln x}{x} + x = 0\\
&\Longrightarrow \frac{3 + 2\ln x}{x} > 3 + 2\ln x = 0\\
&\Longrightarrow \ln x = -\frac{3}{2}\\
&\Longrightarrow x = e^{-\frac{3}{2}}
\end{aligned}$$

x	0	$e^{-\frac{3}{2}}$	$+\infty$
$f(x)+x$	$-$	0	$+$

❷

أ/ تبيين أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n > 0$:

لدينا لما $n = 0$ نجد:

$$\begin{aligned}
u_0 &= \int_{e^0}^{e^1} (f(x)+x)dx \\
&= \int_1^e \left(3\frac{1}{x} + 2\frac{\ln x}{x}\right) dx \\
&= \left[3\ln x + 2\frac{(\ln x)^2}{2}\right]_1^e \\
&= [3\ln x + (\ln x)^2]_1^e \\
&= 4 > 0
\end{aligned}$$

وبما أنّ: $f(x)+x > 0$ على المجال $[1;+\infty[$

فإنه من أجل كل عدد طبيعي n: $\boxed{u_n > 0}$

ب/ إعطاء تفسيرا هندسيا للعدد u_0:

$$u_0 = \int_1^e (f(x)+x)dx = 4$$

u_0 هي مساحة الحيز المحدد بـ (C_f) والمستقيم (Δ) والمستقيمات ذات المعادلات $x = 1$ و $x = e$

ج/ حساب u_n بدلالة n:

$$\begin{aligned}
u_n &= \int_{e^n}^{e^{n+1}} (f(x)+x)dx \\
&= [3\ln x + (\ln x)^2]_{e^n}^{e^{n+1}} \\
&= 3\ln e^{n+1} + (\ln e^{n+1})^2 - 3\ln e^n - (\ln e^n)^2 \\
&= 3(n+1) + (n+1)^2 - 3n - n^2 \\
&= 3n + 3 + n^2 + 1 + 2n - 3n - n^2 \\
&= \boxed{2n+4}
\end{aligned}$$

د/ حساب S_n بدلالة n:

لدينا: $u_n = 2n + 4$

نلاحظ أنّ (u_n) متتالية حسابية أساسها 2

ومنه:

$$\begin{aligned}
S_n &= u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n \\
&= \frac{(n+1)(4+2n+4)}{2} \\
&= \frac{(n+1)(8+2n)}{2} \\
&= \frac{2(n+1)(4+n)}{2} \\
&= \boxed{(n+1)(4+n)}
\end{aligned}$$

التمرين 09
بكالوريا 2016
شعبة رياضيات
الموضوع الثاني

❶ حساب بدلالة العدد الحقيقي x $\int_1^x f(t)dt$:

$$\int_1^x f(t)dt = \int_1^x [(2t-1)e^{-t+1}]dt$$

نضع:

$$\left.\begin{matrix} u(t) = 2t-1 \\ v'(t) = e^{-t+1} \end{matrix}\right| \begin{matrix} u'(t) = 2 \\ v(t) = -e^{-t+1} \end{matrix}$$

ومنه:

$$\begin{aligned}
\int_1^x [(2t-1)e^{-t+1}]dt &= [-(2t-1)e^{-t+1}]_1^x + 2\int_1^x e^{-t+1}dt \\
&= [-(2t-1)e^{-t+1}]_1^x + 2[-e^{-t+1}]_1^x \\
&= [-(2t-1)e^{-t+1} - 2e^{-t+1}]_1^x \\
&= [-(2t+1)e^{-t+1}]_1^x \\
&= -(2x+1)e^{-x+1} + 3
\end{aligned}$$

❷ حساب مساحة الحيز المحدد بـ (C_f) و (C_g) والمستقيمات ذات المعادلة $x=1$ و $x=2$

$$\begin{aligned}
s &= \int_1^2 (f(x) - g(x))dx \\
&= \int_1^2 \left((2x-1)e^{-x+1} - \frac{2x-1}{x^2-x+1}\right)dx \\
&= [-(2x+1)e^{-x+1} - \ln(x^2-x+1)]_1^2 \\
&= -5e^{-1} - \ln 3 + 3 \\
&\approx \boxed{0.06}\, u.a
\end{aligned}$$

التمرين 10
بكالوريا 2017 الدورة 2
شعبة رياضيات
الموضوع الأول

- التحقّق أنّ $A(\alpha) = \frac{1}{2}(\ln\alpha)^2 cm^2$:

لدينا:

$$x + 2y = e \Longrightarrow y = -\frac{x}{2} + \frac{e}{2}$$

ولدينا:

$$\begin{aligned}
A(\alpha) &= \int_1^\alpha \left(\left(-\frac{x}{2} + \frac{e}{2}\right) - f(x)\right)dx \\
&= \int_1^\alpha \left(\left(-\frac{x}{2} + \frac{e}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(-x + e - \frac{\ln x^2}{x}\right)\right)dx \\
&= \int_1^\alpha \frac{1}{2}\left(\frac{\ln x^2}{x}\right)dx \\
&= \frac{1}{2}\int_1^\alpha \frac{2\ln x}{x}dx \\
&= \int_1^\alpha \frac{1}{x}\ln x\, dx
\end{aligned}$$

$$= \left[\frac{(\ln x)^2}{2}\right]_1^{\alpha}$$
$$= \frac{1}{2}[(\ln x)^2]_1^{\alpha}$$
$$= \boxed{\frac{1}{2}(\ln \alpha)^2\ cm^2}$$

التمرين 11
بكالوريا 2016
شعبة رياضيات
الموضوع الثاني

❶ دراسة الوضعية النسبية للمنحنيين (C) و (C_m):

$$\begin{aligned} f(x) - f_m(x) &= (x+1)^2e^{-x} - (x^2+mx+1)e^{-x} \\ &= (x^2+1+2x-x^2-mx-1)e^{-x} \\ &= (2-m)xe^{-x} \end{aligned}$$

لدينا: $e^{-x} > 0$ ومنه إشارة الفرق من إشارة $(2-m)x$

• لما: $2-m>0$

أي لما: $m<2$

x	$-\infty$ 0 $+\infty$
$f(x)-f_m(x)$	$-$ 0 $+$

• لما: $2-m<0$

أي لما: $m>2$

x	$-\infty$ 0 $+\infty$
$f(x)-f_m(x)$	$+$ 0 $+$

❷ حساب $A(\alpha)$:

لما $m=3$ لدينا: (C) فوق (C_3) على المجال $[0;\alpha]$ ومنه:

$$\begin{aligned} A(\alpha) &= \int_0^{\alpha}\big(f_3(x)-f(x)\big)dx \\ &= \int_0^{\alpha}(-(2-3)xe^{-x})dx \\ &= \int_0^{\alpha} xe^{-x}dx \end{aligned}$$

نضع: $$\left|\begin{aligned} u(x) &= x \\ v'(x) &= e^{-x}\end{aligned}\right. \Rightarrow \left|\begin{aligned} u'(x) &= 1 \\ v(x) &= -e^{x}\end{aligned}\right.$$

ومنه:

$$\begin{aligned} A(\alpha) &= \int_0^{\alpha} xe^{-x}dx \\ &= [-xe^{-x}]_0^{\alpha} - \int_0^{\alpha} -e^{-x}dx \\ &= [-xe^{-x}]_0^{\alpha} - [e^{-x}]_0^{\alpha} \\ &= [-(x+1)e^{-x}]_0^{\alpha} \\ &= (-(\alpha+1)e^{-\alpha}+1)u.a \end{aligned}$$

❸ حساب $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} A(\alpha)$

$$\lim_{\alpha\to+\infty} A(\alpha) = \lim_{\alpha\to+\infty}[-(\alpha+1)e^{-\alpha}+1] = \boxed{1}$$

التمرين 12
بكالوريا 2018
شعبة رياضيات
الموضوع الأول

• تبيين أنّ: $\frac{1}{2}(e^2-\alpha^2)-\ln(\alpha-1) < A < \frac{1}{2}(e-\alpha)(e+\alpha+2)$:

لدينا:

$$x-\frac{1}{x\ln x} < f(x) < x+1 \Rightarrow \int_\alpha^e\left(x-\frac{1}{x\ln x}\right)dx < \int_\alpha^e f(x)dx < \int_\alpha^e (x+1)dx$$
$$\Rightarrow \int_\alpha^e\left(x-\frac{\frac{1}{x}}{\ln x}\right)dx < A < \int_\alpha^e (x+1)dx$$
$$\Rightarrow \left[\frac{x^2}{2}-\ln(\ln x)\right]_\alpha^e < A < \left[\frac{x^2}{2}+x\right]_\alpha^e$$
$$=\frac{e^2}{2}-\frac{\alpha^2}{2}+\ln(\ln\alpha) < A < \frac{e^2}{2}+e-\frac{\alpha^2}{2}-\alpha$$

لدينا: $f(\alpha)=0$ لأن (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α

ومنه:

$$f(\alpha)=0 \Rightarrow \alpha+1-\frac{1}{\ln\alpha}=0$$
$$\Rightarrow \frac{1}{\ln\alpha}=\alpha+1$$
$$\Rightarrow \ln\alpha=\frac{1}{\alpha+1}$$

ومنه:

$$\frac{e^2}{2}-\frac{\alpha^2}{2}+\ln(\ln\alpha) < A < \frac{e^2}{2}+e-\frac{\alpha^2}{2}-\alpha \Rightarrow \left[\frac{e^2}{2}-\frac{\alpha^2}{2}+\ln\left(\frac{1}{\alpha+1}\right)\right] < A < \frac{1}{2}[e^2+2e-\alpha^2-2\alpha]$$
$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{2}(e^2-\alpha^2)-\ln(\alpha-1) < A < \frac{1}{2}(e-\alpha)(e+\alpha+2)}$$

التمرين 13
بكالوريا 2016
شعبة رياضيات
الموضوع الثاني

❶ حساب $A(\lambda)$ بدلالة λ:

$$A(\lambda)=\int_\lambda^1(-x^2\ln x)dx$$

نضع:
$$\left|\begin{array}{l} u(x)=\ln x \\ v'(x)=-x^2 \end{array}\right. \Rightarrow \left|\begin{array}{l} u'(x)=\frac{1}{x} \\ v(x)=-\frac{x^3}{3} \end{array}\right.$$

ومنه:

$$A(\lambda)=\int_\lambda^1(-x^2\ln x)dx$$

$$= \left[-\frac{x^3 \ln x}{3}\right]_\lambda^1 - \int_\lambda^1 \left(-\frac{1}{x}\frac{x^3}{3}\right) dx$$
$$= \left[-\frac{x^3 \ln x}{3}\right]_\lambda^1 + \frac{1}{3}\int_\lambda^1 x^2 dx$$
$$= \left[-\frac{x^3 \ln x}{3}\right]_\lambda^1 + \frac{1}{3}\left[\frac{x^3}{3}\right]_\lambda^1$$
$$= \left[-\frac{x^3 \ln x}{3} + \frac{x^3}{9}\right]_\lambda^1$$
$$= \frac{1}{9} + \frac{\lambda^3 \ln \lambda}{3} - \frac{\lambda^3}{9}$$
$$= \boxed{\frac{1}{9}(1 + 3\lambda^3 \ln \lambda - \lambda^3)}$$

❷ حساب $\lim\limits_{\substack{> \\ \lambda \to 0}} A(\lambda)$:

$$\lim_{\substack{> \\ \lambda \to 0}} A(\lambda) = \lim_{\substack{> \\ \lambda \to 0}} \left(\frac{1}{9}(1 + 3\lambda^3 \ln \lambda - \lambda^3)\right) = \boxed{\frac{1}{9}}$$

- تفسير النتيجة هندسيا:

لدينا

$$-x^2 \ln x = x - x^2 \ln x - x = f(x) - x$$

ومنه: $\lim\limits_{\substack{> \\ \lambda \to 0}} A(\lambda)$ هي مساحة الحيز المحدد بـ (C_f) و المستقيمات ذات المعادلات $y = x$ و $x = 0$ و $x = 1$

التمرين 14
بكالوريا 2019
شعبة رياضيات
الموضوع الثاني

❶ تبيين أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإنّ: $g'(x) + 2g(x) - e^{-2x} = 0$:

$$g'(x) + 2g(x) - e^{-2x} = e^{-2x} - 2(x+1)e^{-2x} + 2(x+1)e^{-2x} - e^{-2x} = 0$$

- استنتاج دالة أصلية للدالة g على $\mathbb{R}$:

نضع: $G'(x) = g(x)$

$$g'(x) + 2g(x) - e^{-2x} = 0 \Longrightarrow \int (g'(x) + 2g(x) - e^{-2x})\, dx = 0$$
$$\Longrightarrow g(x) + 2G(x) + \frac{1}{2}e^{-2x} + c = 0$$
$$\Longrightarrow G(x) = -\frac{g(x)}{2} - \frac{1}{4}e^{-2x} - c$$
$$\Longrightarrow G(x) = -\frac{1}{2}(x+1)e^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x} - c$$
$$\Longrightarrow \boxed{G(x) = -\frac{1}{4}(2x+3)e^{-2x} - c}$$

❷ حساب A :

$$A = \int_{-1}^{0} f(x)dx = \int_{-1}^{0} (x+1)^2 e^{-2x} dx$$

نضع: $\left| \; u(x) = (x+1)^2 \quad \Longrightarrow \right| \; u'(x) = 2(x+1)$

$$v'(x) = e^{-2x} \qquad v(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x}$$

ومنه:

$$\begin{aligned}
A &= \int_{-1}^{0}(x+1)^2 e^{-2x}dx \\
&= \left[-\frac{(x+1)^2e^{-2x}}{2}\right]_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0} 2(x+1)\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right)dx \\
&= \left[-\frac{(x+1)^2e^{-2x}}{2}\right]_{-1}^{0} + \int_{-1}^{0}(x+1)e^{-2x}dx \\
&= \left[-\frac{(x+1)^2e^{-2x}}{2}\right]_{-1}^{0} + \int_{-1}^{0} g(x)dx \\
&= \left[-\frac{(x+1)^2e^{-2x}}{2} + G(x)\right]_{-1}^{0} \\
&= \left[-\frac{(x+1)^2e^{-2x}}{2} - \frac{1}{4}(2x+3)e^{-2x}\right]_{-1}^{0} \\
&= -\frac{1}{2} - \frac{3}{4} + \frac{e^2}{4} \\
&= \boxed{\frac{e^2-5}{4}}u.a
\end{aligned}$$

الخليل للرياضيات

بالتوفيق

❤ لا تنسونا من صالح دعائكم ❤

الأستاذ: قويسم براهيم الخليل