La droite réelle achevée

H. Benhassine

Octobre 2021

Contents

Chapter 1

La droite réelle achevée

1.1 L'ensemble des nombres réels

Définition 1.1.1 *L'ensemble des nombres réels, noté* $\mathbb{R}$, *est l'extension de l'ensemble des nombres rationnels noté* $\mathbb{Q}$. *C'est un ensemble sur lequel sont définis les deux lois internes (somme et produit):*

$$+: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x+y \end{array},$$

et:

$$\cdot: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & xy \end{array}.$$

L'ensemble $\mathbb{R}$ muni de ces opérations et de la relation d'ordre $\leq$ est un corps commutatif ordonné ($(\mathbb{R},+,\cdot)$ est un anneau et $(\mathbb{R},\cdot)$ est un groupe commutatif).

1.1.1 Quelques propriètés

Dûe à la relation d'ordre définie sur le corps des réels $(\mathbb{R},+,\cdot)$, on a les propriètés suivantes:

$\forall x, y, x_1, y_1, z \in \mathbb{R}$:

- $x \leq y$ et $x_1 \leq y_1 \Rightarrow x + x_1 \leq y + y_1$.
- $x + z \leq y + z \Leftrightarrow x \leq y$.
- $0 < x \leq y \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{y} \leq \frac{1}{x}$.
- $\forall n \in \mathbb{N}^* : 0 < x \leq y \Leftrightarrow 0 < x^n \leq y^n$.

1.1.2 Les intervalles

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, tels que: $a < b$. On définit alors les intervalles:

$$\begin{aligned} [a,b] &= \{x \in \mathbb{R}/a \leq x \leq b\}, \\ ]a,b] &= \{x \in \mathbb{R}/a < x \leq b\}, \\ [a,+\infty[&= \{x \in \mathbb{R}/a \leq x\}, \end{aligned}$$

que l'on nomme respectivement intervalle fermé, semi-ouvert et fermé.

On appelle la valeur $b-a$ dans le cas d'un intervalle fermé la longeur de l'intervalle.

1.1.3 La valeur absolue

Définition 1.1.2 *Soit $x \in \mathbb{R}$. On appelle la valeur absolue de x, le nombre réel positif que l'on note $|x|$ défini par:*

$$|x| = \begin{cases} x, & si\ x \geq 0 \\ -x, & si\ x < 0 \end{cases}.$$

C'est à dire que l'on peut considérer $|\cdot|$ comme étant une application définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}_+$. Et pour tout couple $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a les propriètés suivantes:

1. $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0.$

2. $|x| = |-x|.$

3. Si $a > 0 : |x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a.$

4. $|x+y| \leq |x| + |y|$ (l'inégalité triangulaire).

5. $|xy| \leq |x|\,|y|.$

6. $||x| - |y|| \leq |x+y|.$

7. $||x| - |y|| \leq |x-y|.$

Démonstration. On se contentera de démontrer l'inégalité triangulaire. On laissera le soin au lecteur de vérifier les autres propriètès.

D'aprés la définition de la valeur absolue, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a:

$$\begin{aligned} -|x| &\leq x \leq |x|, \\ -|y| &\leq y \leq |y|. \end{aligned}$$

En additionnant les deux inégalités, on trouve:

$$-(|x| + |y|) \leq x + y \leq |x| + |y|.$$

D'aprés la troisième propriètè, il découle que:

$$|x+y| \leq |x| + |y|.$$

■

1.2 Les ensembles bornés - La borne supérieure et inférieure

1.2.1 Les ensembles bornés

Définition 1.2.1 *Considérons l'enemble des réels $\mathbb{R}$ munit de la relation d'ordre usuel $\geq$. Et soit A un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$. On dit que:*

- *A est majoré, si et seulement s'il existe $M \in \mathbb{R} : \forall x \in A : x \leq M$.*
- *A est minoré, si et seulement s'il existe $m \in \mathbb{R} : \forall x \in A : m \leq x$.*
- *A est borné, si et seulement s'il existe $M, m \in \mathbb{R} : \forall x \in A : m \leq x \leq M$.*

On appelle alors M et m, respectivement, majorant et minorant de A.

Exemple 1.2.2

- L'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ est minoré. Il posséde un infinité de minorants (prendre par exemple : $M = -\sqrt{2}$ ou bien $M = 0$).
- L'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ n'est pas majoré. Et donc on peut dire que l'ensemble $\mathbb{N}$ n'est pas borné.
- L'intervalle $[2, 5[$ est un ensemble borné (prendre par exemple: $M = 5$ et $m = 2$).
- L'ensemble $A = \left\{x \in \mathbb{R}/x^2 < 1\right\}$ est un ensemble borné (prendre par exemple: $M = 1$ et $m = -1$).

Remarque 1.2.3 *Si un ensemble quelconque posséde un majorant (respectivement un minorant) cet élément n'est pas unique. On parle généralement de l'ensemble des majorants (respectivement l'ensemble des minorants). Par exemple, pour l'intervalle $[2, 5[$, tout nombre réel $x \geq 5$ est un majorant de cet intervalle. De même, tout nombre réel $x \leq 2$ est un minorant de cet intervalle.*

1.2.2 La borne supérieure - La borne inférieure

Définition 1.2.4

• Soit A un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$ majoré. On définit alors la borne supérieure de A, que l'on notera: $\sup A$, comme étant **le plus petit des majorants** de A. Si l'ensemble A n'est pas majoré, $\sup A$ n'existe pas et l'on écrira: $\sup A = +\infty$.

• Soit A un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$ minoré. On définit alors la borne inférieure de A, que l'on notera: $\inf A$, comme étant **le plus grand des minorants** de A. Si l'ensemble A n'est pas minoré, $\inf A$ n'existe pas et l'on écrira: $\inf A = -\infty$.

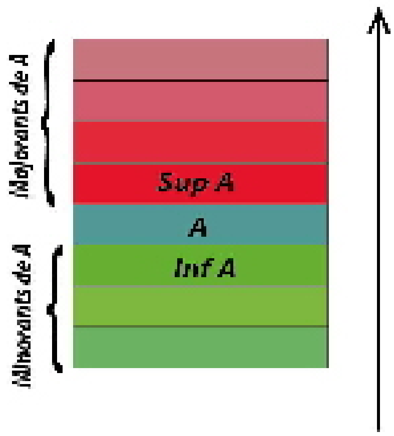

Figure 1.1: Illustration de $\sup A$ et $\inf A$.

Approche concrète imagée: Imaginez que vous ête locataire d'un appartement A. Les voisins du dessus représentent pour vous les *majorants* et les voisins du dessous représenteront les *minorants*. Il n'y a qu'un voisin du dessus qui est collé à votre appartement c'est $\sup A$. Il est unique et c'est le plus petit (du point de vue numéro d'étages) des voisins du dessus (*les majorants*). Et si par malheur il s'amusait à percer son plancher ($\sup A - \varepsilon$) il se retrouverait chez vous.
De même, il n'y a qu'un voisin du dessous qui soit collé à votre appartement c'est $\inf A$. Il est unique et c'est le plus grand (du point de vue numéro d'étages) des voisins du dessous (*les minorants*). Et si par malheur il s'amusait à percer son plafond ($inf A + \varepsilon$) il se retrouverait chez vous.

Exemple 1.2.5

- Pour $A = \mathbb{N}$, on a $\inf A = 0$.
- Pour $A = [2, 5[$, on a $\inf A = 2$ et $\sup A = 5$.

Remarque 1.2.6 $\sup A$ *et* $\inf A$ *s'ils existent, n'appartiennent pas forcément à* A.

Axiome 1.2.7 *(de Bolzano) Tout sous-ensemble non vide de* $\mathbb{R}$ *et majoré (respectivement minoré) posséde une borne supérieure (respectivement borne inférieure).*

Théorème 1.2.8 *Soit* A *sous-ensemble non vide de* $\mathbb{R}$. *Si* $\sup A$ *(respectivement* $\inf A$*) existe alors forcément il est unique.*

Démonstration. On fera l'hypothèse qu'il existe deux bornes supérieures M et M' de l'ensemnle A. D'après la définition de la borne supérieure (plus petits des majorants), on aura $M \leq M'$ et $M' \leq M$, ce qui impliquera que: $M = M'$. ■

Dans le thèoréme suivant, on donnera la définition mathèmatique permettant de caractériser la borne supérieure et inférieure d'un ensemble borné.

Théorème 1.2.9 *(Définition mathèmatique de* $\sup A$ *et de* $\inf A$*)*

• *Soit* A *un sous-ensemble non vide de* $\mathbb{R}$ *qui est majoré. Soit* M *un des majorants de* A*. On a alors l'équivalence suivante:*

$$\sup A = M \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in A : x \leq M, \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x \in A : M - \varepsilon < x. \end{cases}.$$

• *Soit* A *un sous-ensemble non vide de* $\mathbb{R}$ *qui est minoré. Soit* m *un des minorants de* A*. On a alors l'équivalence suivante:*

$$\inf A = m \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in A : m \leq x, \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x \in A : x < m + \varepsilon. \end{cases}.$$

Démonstration. On fera la démonstration pour la borne supérieure, celle de la borne inférieur se fera de manière similaire.

($\Longrightarrow$) Supposons que : $\sup A = M$.

Par définition, M est un majorant de A (c'est le plus petit) , donc: $\forall x \in A : x \leq M$.

En faisant l'hypothèse inverse au résultat escompté, c'est à dire:

$$\exists \varepsilon > 0, \forall x \in A : M - \varepsilon \geq x.$$

Cela voudrait dire que $M - \varepsilon$ est un majorant de l'ensemble A et comme M par définition est le plus petit des majorants, ceci implique que:

$$M < M - \varepsilon.$$

Ce qui est absurde et donc l'hypothèse faite est fausse, c'est à dire que l'on a:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A : M - \varepsilon < x.$$

($\Longleftarrow$) Supposons maintenant que: $\begin{cases} \forall x \in A : x \leq M, \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x \in A : M - \varepsilon < x. \qquad (\bigstar) \end{cases}.$

De la première inégalité on déduit que M est un majorant de A. Nous reste à démonter que c'est le plus petit des majorants.

Pour cela on fera l'hypothèse inverse, c'est à dire qu'il existe un majorant $M' < M$ tel que:

$$\forall x \in A : x \leq M'.$$

On a: $M' < M \Rightarrow M - M' > 0$.

Posons: $\varepsilon = M - M'$. D'aprés ($\bigstar$) on a : $\exists x \in A : M - \varepsilon < x$. Ceci implique que :

$$\exists x \in A : M' < x$$

Ce qui contredit le fait que M' est un majorant de A.

On en déduit donc que M' n'existe pas, c'est à dire que M est le plus petit des majorants: $\sup A = M$. ∎

1.2.3 Le maximum et le minimum d'un ensemble

On a vu précédement que la borne supérieure et inférieure d'un ensemble A ($\sup A$ et $\inf A$) s'ils existent n'appartiennent pas forcément à cet ensemble.

Définition 1.2.10 .

• Lorsque la borne supérieure d'un ensemble A est un élément de A (i.e: $\sup A \in A$), on parle alors du maximum de l'ensemble A. On le notera: $\max A$.

• Lorsque la borne inférieure d'un ensemble A est un élément de A (i.e: $\inf A \in A$), on parle alors du minimum de l'ensemble A. On le notera: $\min A$.

$$m \in A \text{ et } m = \inf A \Leftrightarrow m = \min A,$$
$$M \in A \text{ et } M = \sup A \Leftrightarrow M = \max A.$$

Approche concrète imagée: Considérons l'ensemble des notes d'un groupe d'étudiants d'une classe. Quand l'enseignant affirme que :"la meilleur note de la classe ne dépasse pas 15/20" ou bien que "le meilleur d'entre vous a obtenu la note de 15/20", subsiste une grande différence. Dans la première affirmation la note de 15 est un majorant de l'ensemble des notes et le maximum des notes est ≤ 15.
Parcontre dans la deuxième affirmation, le maximum des notes $= 15$. C'est le fait d'appartenance à l'ensemble qui fait toute la différence.

Exemple 1.2.11

- Pour l'ensemble borné $A = [2, 5[$ avec: $\inf A = \min A = 2$ et $\sup A = 5$.L'ensemble A ne possède pas d'élément maximal ($\max A$ n'existe pas).

- L'ensemble: $A = \left\{a_n = \frac{3}{2n+1} / n \in \mathbb{N}\right\}$ est un ensemble borné avec:

$$\sup A = \max A = 3 \text{ et } \inf A = 0$$

  et $\min A$ n'existe pas. En effet:

  $\forall n \in \mathbb{N} : \frac{3}{2n+1} \leq 3$ (c'est à dire que le nombre 3 est un majorant de l'ensemble A).

  Et comme : $a_0 = 3 \in A$, on a: $a_0 = \max A = \sup A = 3$.

  D'un autre côté: $\forall n \in \mathbb{N} : \frac{3}{2n+1} > 0$ (c'est à dire que le nombre 0 est un minorant de l'ensemble A).

  Montrons que $m = 0$ est le plus grand des minorants en usant de la définition mathématique de la borne inférieure:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists a_n \in A : a_n < m + \varepsilon ?$$

Cela revient à démontrer, pour tout $\varepsilon > 0$, l'existence d'un entier naturel $n \in \mathbb{N}$ tel que: $\frac{3}{2n+1} < 0 + \varepsilon$.
On a:

$$\frac{3}{2n+1} < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \frac{3}{\varepsilon} < 2n + 1$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{3}{\varepsilon} - 1\right) < n.$$

Donc, il suffirait de choisir l'entier naturel $n_0 = E\left(\frac{1}{2}\left(\frac{3}{\varepsilon}-1\right)\right)+1$ pour avoir:

$$a_{n_0} = \frac{3}{2n_0+1} < \varepsilon.$$

C'est à dire: $\forall \varepsilon > 0, \exists a_{n_0} \in A : a_{n_0} < 0 + \varepsilon$.

C'est la définition mathèmatique de $\inf A = 0$.

1.3 Axiome d'Archimède dans $\mathbb{R}$ - Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$

Commençons par rappeler l'axiome d'archimède dans l'ensemble des rationnels $\mathbb{Q}$ dont l'énoncé est:

$$\forall r \in \mathbb{Q}, \exists n \in \mathbb{N} : n > r.$$

(Pour tout nombre rationnel r, il existe toujours un entier naturel n plus grand que lui).

On peut généraliser cet axiome à l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$.

Théorème 1.3.1

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N} : n > x.$$

Démonstration. Faisons l'hypothèse inverse: $\exists x_0 \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N} : n \leq x_0$.

C'est à dire que x_0 est plus grand que tous les entiers naturels. Ce qui est faux car: $x_0 < E(x_0) + 1$.

Donc forcément: $\forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N} : n > x$. ∎

Corollaire 1.3.2

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \forall y \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N} : nx > y.$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer l'axiome d'archimède au nombre $\frac{y}{x}$. ∎

Théorème 1.3.3 *(de densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$)*

Soient x et y deux réels quelconques tels que: $x < y$. Alors il existe $r \in \mathbb{Q}$ tel que:

$$x < r < y.$$

Approche concrète imagée: Tellement la ville d'El Eulma est réputée pour le nombre fort élevé de cafétérias qui y existent on dit d'elle que c'est la ville où "entre chaque deux cafétérias il y en a une troisième". Cet exemple illustre parfaitement le phènoméne de densité: des éléments très proches l'un de l'autre. Dans notre cas, entre deux réels x et y quelconques il exite toujours un rationnel r strictement compris entre les deux.

Démonstration. On distingue deux cas suivant les valeurs prises par x et y:

• 1er cas: Si $x < 0 < y$, il suffit de choisir $r = 0$.

• 2éme cas: Si x et y sont tous les deux positifs ou bien négatifs en même temps. Considérons par exemple que $0 \leq x < y$ (les autres cas se ramenant toujours à cette configuration).

D'après le corollaire précédent, $\exists q \in \mathbb{N}^*$, tel que pour $y - x \in \mathbb{R}_+^*$ et le nombre $1 \in \mathbb{R}$ on ait: $q(y-x) > 1$.

C'est à dire: $\exists q \in \mathbb{N}^* : y - x > \frac{1}{q}$.

En posant, $p = E(qy)$, la partie entière du réel qy, on a par définition:

$$p \leq qy < p + 1. \qquad (\bigstar)$$

Alors on a forcément: $x < \frac{p}{q}$. En effet, si l'on avait l'inverse, c'est à dire: $x \geq \frac{p}{q}$ et comme: $y - x > \frac{1}{q}$ on aurait:

$$\begin{aligned} y - \tfrac{1}{q} > x \quad &\Rightarrow \quad y - \tfrac{1}{q} > x \geq \tfrac{p}{q} \\ &\Rightarrow \quad y \geq \tfrac{p}{q} + \tfrac{1}{q} \\ &\Rightarrow \quad qy \geq p + 1, \end{aligned}$$

et cela contredirait $(\bigstar)$. Donc, au final on a:

$$x < \frac{p}{q} \leq y.$$

Si $y \neq \frac{p}{q}$, le nombre rationnel recherché serait: $r = \frac{p}{q}$ et la démonstration s'achéverait.

Si par contre $y = \frac{p}{q}$, le nombre rationnel recherché serait: $r = \frac{p-1}{q}$. car on aura: $r < y$ (évident) et aussi: $x < r$ car:

$$\begin{aligned} y - x > \tfrac{1}{q} \quad &\Rightarrow \quad \tfrac{p}{q} - x > \tfrac{1}{q} \\ &\Rightarrow \quad x < \tfrac{p}{q} - \tfrac{1}{q} \\ &\Rightarrow \quad x < \tfrac{p-1}{q} \\ &\Rightarrow \quad x < r. \end{aligned}$$

■

1.4 La droite réelle achevée

Définition 1.4.1 *On appelle l'ensemble obtenu en ajoutant les deux éléments $-\infty$, $+\infty$ à l'ensemble des réels $\mathbb{R}$, la droite réelle achévée, que l'on notera $\overline{\mathbb{R}}$:*

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}.$$

Sur la droite réelle achevée, sont définies les opérations suivantes:

- $x + (+\infty) = +\infty, \forall x \in \mathbb{R}$.
- $x + (-\infty) = -\infty, \forall x \in \mathbb{R}$.
- $+\infty + (+\infty) = +\infty$.
- $-\infty + (-\infty) = -\infty$.
- $x \cdot (+\infty) = +\infty, \forall x > 0$.
- $x \cdot (+\infty) = -\infty, \forall x < 0$.
- $-\infty \cdot (+\infty) = -\infty$.
- $-\infty \cdot (-\infty) = +\infty$.

Enfin, notons que les opérations suivantes ne sont pas définies:

- $0 \cdot (\pm\infty)$.
- $+\infty + (-\infty)$.

Remarque 1.4.2 *La différence entre l'ensemble des réels $\mathbb{R}$ et la droite réelle achévée $\overline{\mathbb{R}}$ réside dans le fait que:*

- $\max \overline{\mathbb{R}} = +\infty$ *et* $\min \overline{\mathbb{R}} = -\infty$ *alors que* $\max \mathbb{R}$ *et* $\min \mathbb{R}$ *n'éxistent pas.*
- $\left(\overline{\mathbb{R}}, +\right)$ *n'est pas un groupe algébrique, car l'opération* $+$ *n'est pas définie pour tous les éléments de* $\overline{\mathbb{R}}$.