# تمرين جيد في الحساب للمراجعة و التدرب

## نــص التمرين :

1) عين مجموعة الأعداد الصحيحة $x$ حيث : $4x\equiv 33[5]$ .

2) أ) حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة ذات المجهول $(x,y)$ التالية : $4x-5y=33 .....(E)$ .

ب) إستنتج حلول الجملة : $\begin{cases}\lambda\equiv 55[5]\\ \lambda\equiv 22[4]\end{cases}$ مع $(\lambda\in\mathbb{Z})$ .

ج) عين كل الثنائيات $(x,y)$ حلول المعادلة $(E)$ و التي تحقق : $|x+y+3|<27$ .

3) أ) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي $n$ بواقي قسمة العدد $5^n$ على 11 .

ب) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم $n$ يكون : $10^{10n}+16^{5n-4}+27^{5n+2}+38^{5n+3}+49^{5n-1}\equiv 0[11]$ .

ج) عين مجموعة قيم العدد الطبيعي $n$ التي تحقق الجملة : $\begin{cases}n-5^n\equiv 0[11]\\ n\equiv 2[5]\end{cases}$ .

4) نعتبر $N$ عدد طبيعي يكتب $N=\overline{\alpha\beta\beta\alpha\beta\alpha}$ في نظام التعداد ذو الأساس 4 حيث : $\alpha\neq 0$ .

عين $\alpha$ و $\beta$ بحيث يكون $N$ قابلا للقسمة على 33 ، ثم أكتب العدد $N$ في النظام العشري .

## حل مقترح للتمرين :

1) لدينا : $4x\equiv 33[5]$ و نعلم أن : $4\equiv -1[5]$ و $33\equiv 3[5]$ و منه تصبح : $-x\equiv 3[5]$ أي : $x\equiv -3[5]$

أي : $x\equiv 2[5]$ إذن : $\boxed{x=5k+2}$ مع $(k\in\mathbb{Z})$ .

2) أ) المعادلة : $4x-5y=33$ تكافئ $4x-33=5y$ أي يكون : $4x\equiv 33[5]$ و منه : $\boxed{x=5k+2}$ .

بالتعويض نجد : $4(5k+2)-5y=33$ أي : $5y=20k-25$ و منه : $\boxed{y=4k-5}$ .

إذن حلول المعادلة هي : $\boxed{(x,y)=(5k+2,4k-5)}$ مع $(k\in\mathbb{Z})$ .

ب) لدينا : $\begin{cases}\lambda\equiv 55[5]\\ \lambda\equiv 22[4]\end{cases}$ أي : $\lambda=5u+55=4v+22$ أي يكون : $5u-4v=-33$ و منه : $4v-5u=33$

لكن حسب (أ) يكون : $v=5k+2$ و $u=4k-5$ .

لدينا : $\lambda=5u+55$ أي : $\lambda=5(4k-5)+55$ و منه : $\boxed{\lambda=20k+30}$ مع $(k\in\mathbb{Z})$ .

ج) الحلول $(x,y)$ لـــ $(E)$ بحيث $|x+y+3|<27$ :

لدينا : $\begin{cases}x=5k+2\\ y=4k-5\end{cases}$ أي : $|5k+2+4k-5+3|<27$ أي : $|9k|<27$ أي : $|k|<3$ و منه : $-3<k<3$

إذن : $k\in\{-2,-1,0,1,2\}$ و بالتالي : $\boxed{(x,y)=(-8,-13),(-3,-9),(2,-5),(7,-1),(12,3)}$ .

3) أ) بواقي قسمة $5^n$ على 11 .

نجد : $5^0\equiv 1[11]$ ، $5^1\equiv 5[11]$ ، $5^2\equiv 3[11]$ ، $5^3\equiv 4[11]$ ، $5^4\equiv 9[11]$ و $5^5\equiv 1[11]$ .

و نلخصها في الجدول التالي :

| قيم العدد الطبيعي $n$ | $5k$ | $5k+1$ | $5k+2$ | $5k+3$ | $5k+4$ |
|---|---|---|---|---|---|
| بواقي قسمة العدد $5^n$ على 11 | 1 | 5 | 3 | 4 | 9 |

ب) لنبرهن أن : $10^{10n}+16^{5n-4}+27^{5n+2}+38^{5n+3}+49^{5n-1}\equiv 0[11]$ .

*) لدينا : $5n-4=5n-5+5-4$ أي : $5n-4=5(n-1)+1$ و منه : $\boxed{5n-4=5k+1}$ .

*) لدينا : $5n-1=5n-5+5-1$ أي : $5n-1=5(n-1)+4$ و منه : $\boxed{5n-1=5k+4}$ .

إذن : $10^{10n}+16^{5n-4}+27^{5n+2}+38^{5n+3}+49^{5n-1}\equiv(-1)^{10n}+5^{5k+1}+5^{5n+2}+5^{5n+3}+5^{5k+4}[11]$

أي : $10^{10n}+16^{5n-4}+27^{5n+2}+38^{5n+3}+49^{5n-1}\equiv 1+5+3+4+9[11]$

أي : $10^{10n}+16^{5n-4}+27^{5n+2}+38^{5n+3}+49^{5n-1}\equiv 22[11]$ .

و منه : $\boxed{10^{10n}+16^{5n-4}+27^{5n+2}+38^{5n+3}+49^{5n-1}\equiv 0[11]}$ هو المطلوب .

ج) لدينا : $\begin{cases} n-5^n\equiv 0[11] \\ n\equiv 2[5]\end{cases}$ أي : $\begin{cases} n-5^n\equiv 0[11] \\ n=5k+2\end{cases}$ و منه : $5k+2-5^{5k+2}\equiv 0[11]$ أي : $5k+2-3\equiv 0[11]$

أي : $5k\equiv 1[11]$ و منه : $10k\equiv 2[11]$ أي : $-k\equiv 2[11]$ أي : $k\equiv -2[11]$ و منه : $k\equiv 9[11]$

إذن : $k=11\alpha+9$ و نعلم أن : $n=5k+2$ أي : $n=5(11\alpha+9)+2$ إذن : $\boxed{n=55\alpha+47}$ .

4) لدينا : $N=\overline{\alpha\beta\beta\alpha\beta\alpha}^{4}$ أي : $(0<\alpha<4)$ و $(0\leq\beta<4)$ .

لدينا : $N=\alpha\times 4^5+\beta\times 4^4+\beta\times 4^3+\alpha\times 4^2+\beta\times 4+\alpha$ و نعلم أن : $4\equiv 1[3]$

و منه : $N\equiv\alpha+\beta+\beta+\alpha+\beta+\alpha[3]$ أي : $N\equiv 3\alpha+3\beta[3]$ و منه : $N\equiv 0[3]$ .

إذن : $N$ يقبل القسمة على 3 مهما كان $\alpha$ و $\beta$ و بالتالي يقبل القسمة على 33 إذا قبل القسمة على 11 .

*) بواقي قسمة العدد $4^n$ على 11 : $4^0\equiv 1[11]$ ، $4^1\equiv 4[11]$ ، $4^2\equiv 5[11]$ ، $4^3\equiv 9[11]$ ، $4^4\equiv 3[11]$ ، $4^5\equiv 1[11]$

إذن : $N\equiv\alpha\times 1+\beta\times 3+\beta\times 9+\alpha\times 5+\beta\times 4+\alpha[11]$ أي : $N\equiv 7\alpha+16\beta[11]$ أي : $N\equiv 7\alpha+5\beta[11]$

أي : $N\equiv -4\alpha-6\beta[11]$ لأن : $\begin{cases} 7\equiv -4[11] \\ 5\equiv -6[11]\end{cases}$ .

إذن : $N\equiv 0[11]$ معناه : $-4\alpha-6\beta\equiv 0[11]$ أي : $-4\alpha\equiv 6\beta[11]$ أي : $-2\alpha\equiv 3\beta[11]$ أي : $2\alpha\equiv -3\beta[11]$

و منه : $2\alpha\equiv 8\beta[11]$ أي : $\alpha\equiv 4\beta[11]$ أي يكون : $\alpha-4\beta\equiv 0[11]$ .

بواقي القسمة على 11 :

| $\alpha$ \ $\beta$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 8 | 4 | 0 |
| 2 | 2 | 9 | 5 | 1 |
| 3 | 3 | 10 | 6 | 2 |

إذن يكون : $\alpha-4\beta\equiv 0[11]$ إذا كان : $\alpha=1$ و $\beta=3$ .

و منه بالتعويض نجد أن : $\boxed{N=2013}$ .

كتابة الأستاذ : بلقاسم عبدالرزاق