Série d'exercices sur les variables aléatoires

Exo1 : Calculer l'espérance mathématiqueμ, la variance et l'écart-type de la loi suivante :

x_i	1	3	4	5
$f(x_i)$	0.4	0.1	0.2	0.3

Solution :

$$\mu = \sum x_i f(x_i) = 1(0.4) + 3(0.1) + 4(0.2) + 5(0.3) = 3$$

$$\sum x_i^2 f(x_i) = 1(0.4) + 9(0.1) + 16(0.2) + 25(0.3) = 12$$

$$\sigma^2 = \sum x_i^2 f(x_i) - \mu^2 = 12 - 9 = 3 \text{ et } \sigma = \sqrt{3} = 1.7$$

Exo2 : On jette un dé bien équilibré. Soit X la variable représentant le double du nombre obtenu, et Y une variable prenant les valeurs 1 ou 3 suivant que l'on obtient soit un nombre impair, soit un nombre pair. Calculer la distribution, l'espérance, la variance et l'écart-type de : (i) X, (ii) Y, (iii) X+Y et (iv) XY.

Solution :

(i) $X(\Omega) = \{2, 4\ ,\ 6\ ,\ 8, 10\ , 12\}$

x_i	2	4	6	8	10	12
$f(x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

E(X)= $\sum x_i f(x_i) = 2.\frac{1}{6} + 4.\frac{1}{6} + 6.\frac{1}{6} + 8.\frac{1}{6} + 10.\frac{1}{6} + 12.\frac{1}{6} = 7$

E(X^2)=$\sum x_i^2 f(x_i) = 4.\frac{1}{6} + 16.\frac{1}{6} + 36.\frac{1}{6} + 64.\frac{1}{6} + 100.\frac{1}{6} + 144.\frac{1}{6} = 60.7$

Var(X)= $\sigma^2 = \sum x_i^2 f(x_i) - E(X)^2 = 60.7 - 7^2 = 11.7$ d'où $\sigma = \sqrt{11.7} = 3.4$

(ii) $Y(\Omega) = (\Omega) = \{1, 3\}$

x_i	1	3
$f(x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

E(Y)= $\sum y_i f(y_i) = 1.\frac{1}{2} + 3.\frac{1}{2} = 2$

E(Y^2)=$\sum y_i^2 f(y_i) = 1.\frac{1}{2} + 9.\frac{1}{2} = 5$

Var(Y)= $\sigma^2 = \sum y_i^2 f(y) - E(Y)^2 = 5 - 2^2 = 1$ d'où $\sigma = 1$

(iii) on a (X+Y)(w)=X(w)+Y(w)

$(X+Y)(\Omega) = \{3\ , 7\ \ , 11,\ \ 15\ \}$

x_i	3	7	11	15
$h(x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$

E(X+Y)= $3.\frac{1}{6} + 7.\frac{2}{6} + 11.\frac{2}{6} + 15.\frac{1}{6} = 9$

E($(X+Y)^2$)= $9.\frac{1}{6} + 49.\frac{2}{6} + 121.\frac{2}{6} + 225.\frac{1}{6} = 95.7$

Var(X+Y)=95.7-81=14.7 d'où $\sigma = \sqrt{14.7} = 3.8$

remarquons que E(X)+E(Y)=7+2=9=E(X+Y) mais que V(X)+V(Y)=11.7+1=12.7≠V(X+Y)

(iv) (XY)(w)= X(w)Y(w)

$(XY)(\Omega) = \{2\ \ , 6\ \ , 10,\ \ 12\ , 24\ , 36\}$

x_i	2	6	10	12	24	36
$k(x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

E(XY)= $2.\frac{1}{6}+6.\frac{1}{6}+10.\frac{1}{6}+12.\frac{1}{6}+24.\frac{1}{6}+36.\frac{1}{6}=15$

E((XY)^2)=$4.\frac{1}{6}+36.\frac{1}{6}+100.\frac{1}{6}+144.\frac{1}{6}+576.\frac{1}{6}+1296.\frac{1}{6}=359.3$

V(XY)=359.3 – 15^2=134.3 et $\sigma=\sqrt{134.4}=11.6$

Exo3 : On jette trois fois une pièce de monnaie mal équilibrée de telle sorte que P(F)= 3/4 et P(P)= 1/4. Soit X la variable aléatoire représentant la plus grande succession de faces que l'on obtient. Calculer la distribution de probabilité, la moyenne, la variance et l'écart-type de X.

Solution : **Ω=** $\{$**PPP , FFF , FFP , PFF , FPF, PPF , PFP , FPP**$\}$

P(FFF)=$\frac{3}{4}.\frac{3}{4}.\frac{3}{4}=\frac{27}{64}$ **P(PFF)=**$\frac{1}{4}.\frac{3}{4}.\frac{3}{4}=\frac{9}{64}$ **P(FFP)=**$\frac{3}{4}.\frac{3}{4}.\frac{1}{4}=\frac{9}{64}$ **P(PFP)=**$\frac{1}{4}.\frac{3}{4}.\frac{1}{4}=\frac{3}{64}$

P(FPF)=$\frac{3}{4}.\frac{1}{4}.\frac{3}{4}=\frac{9}{64}$ **P(PPF)=**$\frac{1}{4}.\frac{1}{4}.\frac{3}{4}=\frac{3}{64}$ **P(FPP)=**$\frac{3}{4}.\frac{1}{4}.\frac{1}{4}=\frac{3}{64}$ **P(PPP)=**$\frac{1}{4}.\frac{1}{4}.\frac{1}{4}=\frac{1}{64}$

X : la plus longue suite de Faces ; X(Ω)= $\{$**0 , 1 , 2 , 3**$\}$ **car**

X(FFF)=3 X(PFF)=2 X(FFP)=2 X(PFP)=1 X(FPF)=2 X(PPF)=1 X(FPP)=1 X(PPP)=0

x_i	0	1	2	3
$f(x_i)$	$\frac{1}{64}$	$\frac{18}{64}$	$\frac{18}{64}$	$\frac{27}{64}$

E(X)=2.1 E(X^2)= 5.2 donc V(X)=5.2 – (2.1)^2=0.8 et par suite $\sigma=\sqrt{0.8}=0.9$

Exo4 : On lance une pièce de monnaie bien équilibrée jusqu'à ce que l'on obtienne soit face soit cinq piles. Calculer l'espérance mathématique E du nombre de jets nécessairs de la pièce.

Solution : **On n'a besoin que d'un seul jet si l'on obtient face la première fois, ce qui est l'évènement F. On a besoin de deux jets si le premier coup donne pile et le second face, ce qui correspond à l'évènement PF. Il faut trois jets si les deux premiers donnent pile et le troisième face, ce qui correspond à l'évènement PPF. Il faut quatre jets su c'est l'évènement PPPF qui se réalise et cinq jets si c'est doit PPPPF, soit PPPPP qui est réalisé. Par suite :**

f(1)=P(F)=1/2 ; f(2)=P(PF)=1/4 ; f(3)=P(PPF)=1/8 ; f(4)= P(PPPF)=1/16 et f(5)=P(PPPPF)+P(PPPPP)=1/32+1/32+1/16. Par conséquent E=1.1/2+2.1/4+3.1/8+4.1/16+5.1/16=1.9

Exo5 : On jette une paire de dés parfaits. Soit X la variable aléatoire représentant le minimum des deux nombres que l'on obtient. Calculer la loi de probabilité, la moyenne, la variance et l'écart-type de X.

Solution :

x_i	1	2	3	4	5	6
$f(x_i)$	$\frac{11}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{1}{36}$

E(X)=2.5 Var(X)=2.1 et $\sigma=1.4$

Exo6 : On lance quatre fois une pièce de monnaie bien équilibrée. Soit X le nombre de faces obtenues. Calculer la loi de probabilité, la moyenne, la variance et l'écart-type de X.

Solution :

x_i	0	1	2	3	4
$f(x_i)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$

E(X)=2 Var(X)=1 et $\sigma = 1$

Exo7 : Une boite contient 8 articles dont 2 sont défectueux. On choisit 3 articles de la boite. Calculer l'espérance mathématique du nombre d'articles défectueux que l'on a tirés.

Solution : **E=3/4**

Exo9 : X et Y sont des variables aléatoires ayant des distributions jointes :

X \ Y	-3	2	4	somme
1	0.1	0.2	0.2	0.5
3	0.3	0.1	0.1	0.5
somme	0.4	0.3	0.3	

(i) Calculer les lois de probabilité de X et de Y. (ii) Calculer la covariance de X et Y : Cov(X,Y).
(iii) X et Y sont-elles des variables aléatoires indépendantes ?

Solution :

(i) Les lois de probabilités de X et de Y sont données par les distributions marginales :

x_i	1	3
$f(x_i)$	0.5	0.5

loi de probabilité X

y_i	-3	2	4
$g(y_i)$	0.4	0.3	0.3

loi de probabilité Y

(ii) E(X)= 2 , E(Y)=0.6 et E(XY)= $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} h(x_i, y_j)$ **= 0**

Cov(X,Y)= E(XY) – E(X).E(Y)=0 – 2×0.6 = - 1.2

(iii) X et Y ne sont pas indépendantes, puisque P(X=1 , Y= - 3)≠P(X=1).P(Y= - 3)

Exo10 : Soient X et Y des variables aléatoires indépendantes ayant les lois de prob :

x_i	1	2
$f(x_i)$	0.6	0.4

y_i	5	10	15
$g(y_i)$	0.2	0.5	0.3

Calculer la loi de probabilité produit h de X et Y.

Solution :

Puisque X et Y sont indépendantes, la loi de probabilité produit h peut s'obtenir à partir des listributions marginales f et g. On construit d'abord comme ci-dessous à gauche le tableau de la oi de probabilité produit, à l'aide seulement des distributions marginales. Puis afin d'obtenir les autres léments, on fait le produit des éléments marginaux, c.à.d. qu'on pose $h(x_i, y_j) = f(x_i)g(y_j)$ comme i-dessous à droite

X \ Y	5	10	15	Somme
1				0,6
2				0,4
Somme	0,2	0,5	0,3	

X \ Y	5	10	15	Somme
1	0,12	0,30	0,18	0,6
2	0,08	0,20	0,12	0,4
Somme	0,2	0,5	0,3	

Exo11 : Soit X une variable aléatoire continue ayant la distribution : $\begin{cases} \frac{1}{6}x + k & si \;\; 0 \le x \le 3 \\ 0 & ailleurs \end{cases}$

(i)Calculer k ; (ii) Calculer $P(1 \le X \le 2)$.

Solution :

X étant une VA sa distribution doit vérifier les conditions : *f(x)*≥ 0 $\quad et \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

(i) $\quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_0^3 \left(\frac{1}{6}x + k\right)dx = \left[\frac{1}{12}x^2 + kx\right]_0^3 = \frac{9}{12} + 3k = 1 \;\; d'où \;\; k = \frac{1}{12}$

(ii) $\quad P(1 \le X \le 2) = \int_1^2 f(x)dx = \int_1^2 \left(\frac{1}{6}x + \frac{1}{12}\right)dx = \frac{1}{3}$

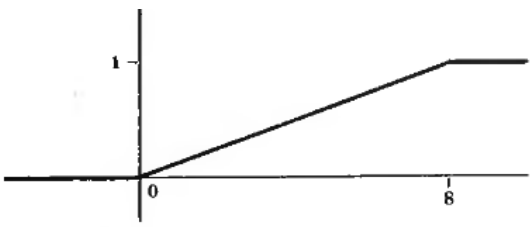
Exo13 : Soit X une variable aléatoire continue ayant la distribution : $\begin{cases} \frac{1}{8} & si \;\; 0 \le x \le 8 \\ 0 & ailleurs \end{cases}$

(i) Calculer $P(2 \le X \le 5)$; $P(3 \le X \le 7)$ et $P(X \ge 6)$; (ii) Déterminer et représenter graphiquement la fonction de répartition F de X.

Solution :

(i) $\quad P(2 \le X \le 5) = \frac{3}{8}$; $P(3 \le X \le 7) = \frac{1}{2}$ et $P(X \ge 6) = 1 - P(X < 6) = \frac{1}{4}$

(ii) $\quad F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{8}x & \text{si } 0 \le x \le 8 \\ 1 & \text{si } x > 8 \end{cases}$



Représentation graphique de F

Exo14 : Soit X une variable aléatoire continue ayant la distribution : $\begin{cases} k & si \;\; a \le x \le b \\ 0 & ailleurs \end{cases}$

(i)Calculer k ; (ii) Calculer la moyenne μ de X ; (iii) Déterminer la fonction de répartition F de X.

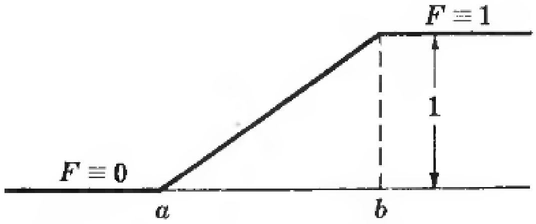
Solution :

X étant une VA sa distribution doit vérifier les conditions : $f(x) \geq 0$ ***et*** $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

(i) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_a^b kdx = [kx]_a^b = kb - ka = k(b-a) = 1$ d'où $k = \frac{1}{b-a}$

(ii) $\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_a^b \frac{1}{b-a} xdx = \left[\frac{1}{2(b-a)}x^2\right]_a^b = \frac{1}{2(b-a)}(b^2 - a^2) = \frac{a+b}{2}$

(iii) Rappelons que la fonction de répartition F est définie par $F(k) = P(X \leqslant k)$. Par conséquent $F(k)$ donne l'aire en dessous de la courbe de f à gauche de $x = k$. Puisque X est distribuée uniformément sur l'intervalle $I = \{a \leqslant x \leqslant b\}$, il est intuitif que la courbe de F, comme le montre la figure de droite, vaut $F = 0$ avant le point a, $F = 1$ après le point b, et que F est linéaire entre a et b. On vérifie cela mathématiquement par le calcul



Représentation graphique de F

(a) pour $x < a$,

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{x} 0\,dt = 0$$

(b) pour $a \leqslant x \leqslant b$,

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{a}^{x} \frac{1}{b-a}dt = \left[\frac{t}{b-a}\right]_a^x = \frac{x-a}{b-a}$$

(c) pour $x > b$, $F(x) = P(X \leqslant x) \geqslant P(X \leqslant b) = F(b)$ 1 et aussi $1 \geqslant P(X \leqslant x) = F(x)$; d'où $F(x) = 1$.