Chapitre II Force électrostatique

1 Charges électriques :

1.1 Mesure des charges :

Soient un corps électrisé quelconque placé en un point de l'espace et deux corps A et B dont nous voulons connaître l'état d'électrisation :

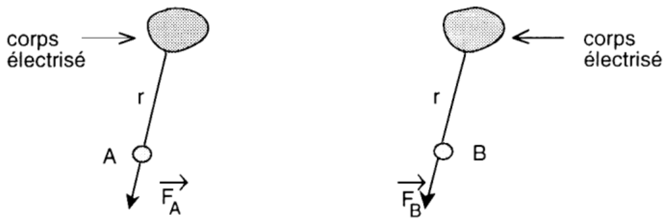

Figure II,1

Les corps A ou B subissent de la part du corps électrisé une force $\vec{F}_A$ ou $\vec{F}_B$; ces corps s'électrisent. Le rapport F_A/F_B caractérise l'électrisation des corps A et B. Par définition, ce rapport est égal au rapport des charges q_A et q_B .

1.2 Charge élémentaire :

Les forces agissant entre les corps électrisés pouvant être attractives ou répulsives, on divise les charges électriques en deux classes ; les forces répulsives correspondent à des charges appartenant à la même classe tandis que les forces attractives correspondent à des charges appartenant à deux classes différentes.
Conventionnellement les charges sont positives ou négatives.

Valeurs des charges électriques et des masses des constituants atomiques dans le Système International :
Electron : $q_e = -e = -1.602\ 10^{-19}$ C; $m_e = 9.109\ 10^{-31}$ kg
Proton : $q_p = +e = 1.602\ 10^{-19}$ C ; $m_p = 1.672\ 10^{-27}$ kg
Neutron : $q_n = 0$ C ; $m_n = 1.674\ 10^{-27}$ kg

1.3 Distributions de charges :

A l'échelle macroscopique, la quantification de la charge est impossible à déceler, la charge élémentaire ayant une valeur très faible. La charge d'un corps peut donc être traitée comme une variable continue et sa répartition dépendra de la forme du corps électrisé. On définit ainsi :

• La *charge ponctuelle,* objet idéal ayant la symétrie sphérique et dont les dimensions sont très petites par rapport aux distances auxquelles sont étudiés les effets de cette charge.

• La distribution v*olumique* correspondant à une répartition en volume de la charge *électrique,* on définit une densité v*olumique*ρ *:*

$\rho = \dfrac{dq}{dV}$ donc $q = \iiint_V \rho\, dV$

• La distribution surfacique correspondant à une répartition sur la surface d'un corps, on définit une densité surfacique σ:

$\sigma = \dfrac{dq}{dS}$ donc $q = \iint_S \sigma\, dS$

• La distribution linéique correspondant à une répartition sur une courbe, on définit une densité linéique λ :

$\lambda = \dfrac{dq}{dl}$ donc $q = \int_C \lambda\, dl$

2 Loi de Coulomb

2.1 Enoncé de la loi :

Soient deux charges ponctuelles q_1 et q_2 placées dans le vide respectivement aux points P_1 et P_2 distants de r.

La charge q_1 exerce sur la charge q_2 une force $\vec{F}_{12}$ proportionnelle à q_1. Réciproquement, la charge q_2 exerce la force $\vec{F}_{21}$ sur la charge $q_1$proportionnelle à q_2.

La symétrie étant de révolution autour de l'axe P_1P_2, les forces $\vec{F}_{12}$ et $\vec{F}_{21}$ sont portées par cet axe.

D'après le principe de l'action et de la réaction. ces forces $\vec{F}_{12}$ et $\vec{F}_{21}$ sont égales et opposées :

$$\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = \vec{0}$$

Soit

$$\vec{u} = \frac{\vec{r}}{r} = \frac{\overrightarrow{P_1P_2}}{P_1P_2}$$

le vecteur unitaire porté par P_1P_2 ;

la loi de Coulomb dit que : $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} = k\dfrac{q_1q_2}{r^2}\vec{u}$

Si les charges sont de même signe (a) les forces sont répulsives tandis que si les charges sont de signes contraires (b), les forces sont attractives.

(a) $\vec{F}_{21} \leftarrow P_1(q_1)\bullet \rightarrow^{\vec{u}} \cdots\cdots r \cdots\cdots \bullet P_2(q_2) \rightarrow \vec{F}_{12}$

(b) $P_1(q_1)\bullet \rightarrow^{\vec{u}} \rightarrow \vec{F}_{21} \cdots\cdots r \cdots\cdots \leftarrow \vec{F}_{12} \bullet P_2(q_2)$

Figure II.2 forces attractives et répulsives

Dans le système SI. le coefficient k s'écrit : $k = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ où ε_0 est appelée permittivité du vide et a pour expression $\varepsilon_0 = \dfrac{10^7}{4\pi c^2}$ avec « c », vitesse de la lumière dans le vide. La valeur numérique de ε_0 est donc : $\varepsilon_0 \cong 8.8537.10^{-12} S.I, (\varepsilon_0 \cong \dfrac{1}{36\pi.10^9}) \Rightarrow k = 9.10^9 S.I$

En définitive, la loi de Coulomb s'écrit :

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}\vec{u}$$

et s'énonce :

« L'interaction électrostatique entre deux charges ponctuelles est proportionnelle aux charges et inversement proportionnelle au carré de leur distance ; la direction de cette interaction donnée par la droite joignant les deux charges. »

2.2 Principe de superposition :

Deux charges ponctuelles q_1 et q_2 exercent séparément les forces $\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$ sur une charge ponctuelle q :

$$\vec{F}_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q}{r_1^2}\vec{u}_1 \text{ et } \vec{F}_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2 q}{r_2^2}\vec{u}_2$$

Ces deux charges placées simultanément exercent sur la charge q la force $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$

Cette relation extrêmement importante signifie qu'il y a indépendance des effets. Elle permet en particulier de définir une charge équivalente à une distribution de charges donnée.

Elle se généralise aisément : $\vec{F} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$ ou $\vec{F} = \int d\vec{F}$

3 Applications : Calculs de forces électrostatiques

L'objectif à atteindre dans ce chapitre est le calcul de la force électrostatique exercée sur une charge Q par une distribution de charges ponctuelles ou continues. Nous proposons ces exemples sous forme d'exercices.

3.1 Charges ponctuelles :

Exercice d'application :

1 - On considère deux charges ponctuelles identiques +q = 2 μC disposées en A et B suivant l'axe Oy à une distance a = 30 cm du centre O. Une charge + Q = 4 μC est placée en M sur l'axe Ox à l'abscisse OM = x (figure II.3).

Déterminer (en fonction de x) l'intensité et la direction de la résultante F des forces électrostatiques agissant sur Q.

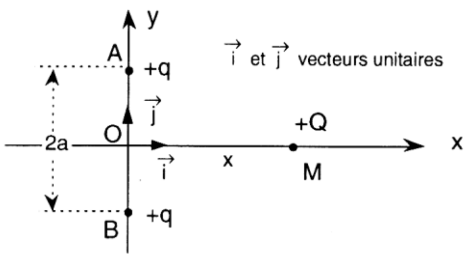

Figure II.3

2 - Reprendre la question (1) avec $q_A = -q$ et $q_B = +q$.

Solution :
Le problème étant à deux dimensions, donc les forces électrostatiques appartiennent à ce plan (xOy).
1 - Il est inutile de calculer la composante F_y car dans le plan (xOy) l'axe Ox est un axe de symétrie ; la force électrostatique résultante est donc de la forme $\vec{F} = F_x \vec{i}$.
a) La charge q placée en A (figure II.4 a) exerce sur la charge Q la force :

$$\vec{F}_A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{r_A^{\ 2}}\vec{u}_A \text{ avec } r_A = AM \text{ et } \vec{u}_A = \frac{\overrightarrow{AM}}{\left|\overrightarrow{AM}\right|} \text{ vecteur unitaire}$$

Cette force est répulsive car les charges q et Q sont de même signe.
De même, la charge q placée en B (figure II.4 b) exerce sur la charge Q la force

$$\vec{F}_B = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{r_B^{\ 2}}\vec{u}_B \text{ avec } r_B = BM \text{ et } \vec{u}_B = \frac{\overrightarrow{BM}}{\left|\overrightarrow{BM}\right|}$$

Cette force est répulsiue car les charges q et Q sont de même signe.
On applique le principe de superposition, la résultante est :

$$\vec{F} = \vec{F}_A + \vec{F}_B = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{r_A^{\ 2}}\vec{u}_A + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{r_B^{\ 2}}\vec{u}_B = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{r^2}(\vec{u}_A + \vec{u}_B)$$

car $r_A = r_B = r = \sqrt{a^2 + x^2}$

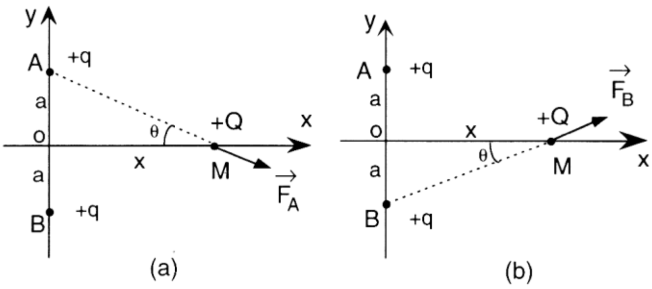

Figure II.4

On projette ensuite suivant l'axe Ox : $F_X = \vec{F}.\vec{i}$ (figure II.5)

$(\vec{u}_A + \vec{u}_B).\vec{i} = \vec{u}_A.\vec{i} + \vec{u}_B.\vec{i} = 2\cos\theta$

Sachant que $\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}$ (et $\sin\theta = \frac{a}{r}$) , on obtient :

$$F_X = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{qQx}{(a^2 + x^2)^{3/2}} \text{ et naturellement } F_y = 0$$

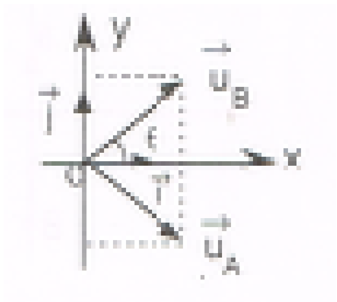

Figure II.5

2 - Le problème est toujours à deux dimensions. mais l'axe Ox n'est plus axe de symétrie. Nous devons donc calculer les composantes de la force électrostatique. Le schéma est :

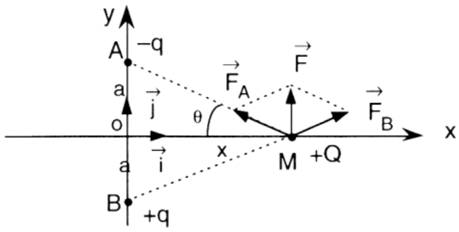

Figure II.6

Nous procédons comme précédemment, l application du principe de superposition donne :

$$\vec{F} = \vec{F}_A + \vec{F}_B = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{-qQ}{r_A^2}\vec{u}_A + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{r_B^2}\vec{u}_B = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}(-\vec{u}_A + \vec{u}_B)$$

Les projections suivant les axes Ox et Oy sont :

$(-\vec{u}_A + \vec{u}_B).\vec{i} = 0$ et $(-\vec{u}_A + \vec{u}_B).\vec{j} = 2\sin\theta = 2\frac{a}{r}$ d'où

$$F_x = 0$$

$$F_y = \frac{qQ}{2\pi\varepsilon_0}\frac{a}{(a^2 + x^2)^{3/2}}$$

La résultante est dirigée suivant l'axe Oy : $|F| = F_y$

Pour x = 0 on a $F = F_{\max} = qQ/2\pi\varepsilon_0 a^2 = 1.6N$ et F(40) = 0.34 N si x = ± 40 cm.

3.2 Distributions continues de charges :

Exercice d'application :

1 - Une charge électrique +q est distribuée uniformément sur un segment de longueur 2a porté par l'axe Oy (figure II.7a).

a) Quelle est la densité linéique de charge λ?
b) Quelle est l'expression de la force exercée par cette charge sur une charge ponctuelle +Q placée sur l'axe Ox à l'abscisse x ?
c) Quelle est l'expression de cette force si $a \to \infty$ ($\lambda = constante$) ?
AN : a = 30 cm, x = 40 cm, λ= 5μF.m^{-1} et Q = 4μF.

2 - On remplace la distribution linéique par une distribution surfacique de densité σ sur un disque de rayon a (figure II.7b).

a) Évaluer la densité surfacique de charge σ.
b) c) Mêmes questions que ci-dessus. AN: σ= 5μF.m^{-2}.

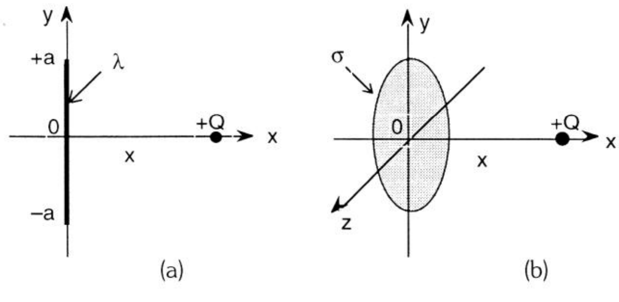

Figure II.7

Solution :

1 - a) La charge +q étant distribuée uniformément sur le segment de longueur 2a, la densité est $\lambda = q/2a$

b) Nous avons là un problème à deux dimensions, l'axe Ox étant l'axe de symétrie, sur la charge +Q la résultante des forces est dirigée suivant Ox.

On considère une charge infinitésimale $dq = \lambda dy$ placée en un point M de l'axe Oy tel que $OM = y$ (figure II.8). Cette charge considérée comme ponctuelle, exerce sur la charge +Q placée à la distance $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ du point M la force élémentaire :

$$d\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q\,dq}{r^2}\vec{u} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda dy Q}{x^2 + y^2}\vec{u}\,.$$

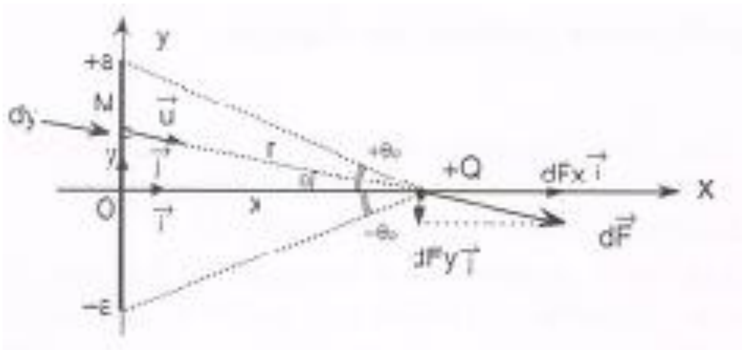

Figure II.8

On projette uniquement suivant l'axe Ox : $dF_X = d\vec{F}.\vec{i}$

C'est-à-dire : $dF_X = \dfrac{\lambda dy Q}{4\pi\varepsilon_0(x^2 + y^2)}\cos\theta$

L'application du principe de superposition nous conduit à effectuer une intégration pour toutes les charges élémentaires réparties entre - a et + a.

Pour intégrer, le plus simple est d'utiliser la variable « θ »

$\cos\theta = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ donc $dy = \dfrac{x^2 + y^2}{x}d\theta$ ce qui donne

$$dF_x = \frac{\lambda Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\cos\theta d\theta}{x} \Rightarrow F_x = \frac{\lambda Q}{4\pi\varepsilon_0 x}\int_{-\theta_0}^{+\theta_0}\cos\theta d\theta = \frac{\lambda Q}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\sin\theta_0}{x}$$

Sachant que $\sin\theta_0 = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + x^2}}$ on obtient : $F_x = \dfrac{\lambda Q}{2\pi\varepsilon_0}\dfrac{a}{\sqrt{x^2 + a^2}}$

AN : $F_x = 0.54N$

N.B.Il est facile de voir que dF_y étant proportionnel à $\sin\theta$, l'intégration entre $-\theta_0$ et $+\theta_0$ donne zéro.

c) Lorsque $a \to \infty$, la relation ci-dessus conduit à : $F_\infty = \dfrac{\lambda Q}{2\pi\varepsilon_0 x}$

AN : $F_\infty = 0.9N$.

2 - A priori nous avons un problème à trois dimensions : cependant l'axe Ox étant axe de symétrie la résultante des forces électrostatiques agissant sur +Q appartient à cet axe.

a) La surface S du disque étant égale à $\boldsymbol{S} = \pi \boldsymbol{a}^2$, la densité surfacique a pour expression : $\sigma = \boldsymbol{q} / \pi \boldsymbol{a}^2$.

b) c) Soit $dS = \rho . d\rho . d\alpha$ une surface élémentaire entourant un point M de coordonnées (ρ ; α). En ce point M la charge électrique est égale à $dq = \sigma\, dS = \sigma \rho d\rho d\alpha$ (figure II.9) :

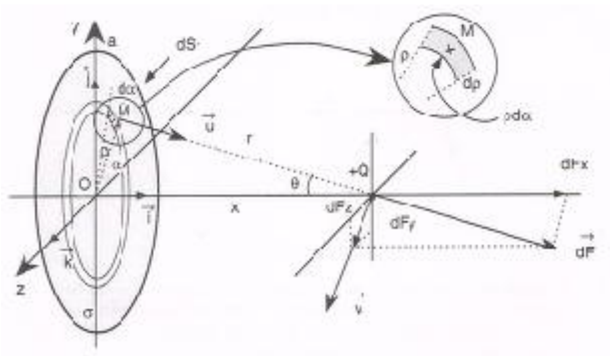

Figure II.9

Cette charge dq exerce sur la charge +Q placée à la distance $\boldsymbol{r} = \sqrt{\boldsymbol{x}^2 + \rho^2}$ la force élémentaire :

$$d\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\sigma \rho d\rho\, d\alpha}{(x^2 + \rho^2)}\ \vec{u}$$

On projette suivant l'axe Ox:

$$\boldsymbol{dF_x} = \boldsymbol{d\vec{F}.\vec{i}} = \left|\boldsymbol{d\vec{F}}\right| \cos\theta \quad \text{soit}\ dF_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\sigma \rho d\rho d\alpha Q}{(x^2 + \rho^2)} \frac{x}{\sqrt{x^2 + \rho^2}} = \frac{Q\sigma x \rho d\rho d\alpha}{(x^2 + \rho^2)^{3/2}}$$

Comme ci-dessus, l'application du principe de superposition nous amène à effectuer une intégration. Celle-ci est simple :

$$F_x = \frac{\sigma Q x}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^a \frac{\rho d\rho}{(x^2 + \rho^2)^{3/2}} = \frac{\sigma Q x}{2\varepsilon_0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}\right)$$

On vérifie facilement que:

$$\boldsymbol{F_y} = \frac{\boldsymbol{Q}\sigma}{\boldsymbol{4}\pi\varepsilon_0} \int_0^{2\pi} \sin\alpha\, \boldsymbol{d}\alpha \int_0^a \frac{\rho \boldsymbol{d}\rho}{\left(\boldsymbol{x}^2 + \rho^2\right)^{3/2}} = \boldsymbol{0}$$

$$\boldsymbol{F_z} = \frac{\boldsymbol{Q}\sigma}{\boldsymbol{4}\pi\varepsilon_0} \int_0^{2\pi} \cos\alpha\, \boldsymbol{d}\alpha \int_0^a \frac{\rho \boldsymbol{d}\rho}{\left(\boldsymbol{x}^2 + \rho^2\right)^{3/2}} = \boldsymbol{0}$$

La seule composante non nulle est portée par l'axe du disque.

Si a $\rightarrow \infty$ alors $F_x \rightarrow \boldsymbol{F_\infty} = \frac{\sigma \boldsymbol{Q}}{\boldsymbol{2}\varepsilon_0}$ quel que soit x.

AN : F_x=0,23N et F_∞ = 1,13N

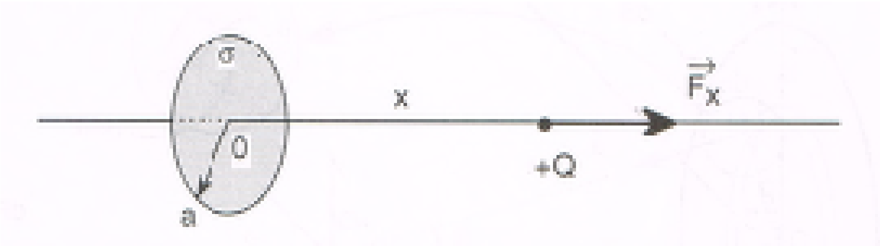

Figure II.10

A densité de charge constante, on notera que lorsque a $\rightarrow \infty$ la force électrostatique F_x tend vers une constante F_∞ .Cette constante dépend en particulier de la position du point pour la répartition linéique alors qu'elle en est indépendante pour la répartition superficielle.

Résumé :
La symétrie des charges électriques entraîne la symétrie des forces s'exerçant sur ces charges. L'examen de cette symétrie permet de simplifier le calcul de la force électrostatique résultante.

La loi de Coulomb précise que la force s'exerçant entre deux charges ponctuelles est proportionnelle aux charges et inversement proportionnelle au carré de leur distance. La direction de cette force est donnée par la droite joignant les deux charges. Si les charges sont de même signe, cette force est répulsive tandis que si les charges sont de signes contraires, cette force est attractive.

L'application du principe de superposition consiste à additionner les forces produites par les charges électriques ponctuelles prises séparément. Si la distribution de charges est continue, on additionne les forces élémentaires produites par les charges élémentaires « dq ».

Exercices du chapitre II

N.B. Lorsqu'on demande de déterminer la force électrique, il s'agit chaque fois d'en donner l'intensité, la direction et le sens.

Exercice1 :
Dans l'atome d'hydrogène, la distance r entre l'électron et le proton est d'environ 5 10^{-11} m. Calculer la grandeur de la force électrique et de la gravitationnelle s'exerçant entre ces deux particules. Calculer le poids du proton.

Exercice 2.
Deux billes identiques de masse m sot suspendues en un même point et portent des charges égales q. Elles s'écartent de la verticale formant le même angle θ

1) *En supposant que cet angle est suffisamment petit pour que $tg\theta \approx \sin\theta$, montrer que :*

$$x = \left(\frac{q^2 l}{2\pi\varepsilon_0 mg} \right)^{1/3}$$ *x étant la distance entre les deux charges*

2) *Quelle est la valeur de la charge q si :l = 120 cm ; x = 5 cm ; m = 10 g*
3) *calculer la force électrostatique exercée.*

Exercice 3.
Soient deux charges identiques q situées en A et B et distantes de 2a. On place une charge Q en O milieu de AB.
Etudier l'équilibre de Q si on déplace cette charge sur AB dans les deux cas suivants :
a) q et Q sont de mêmes signes
b) q et Q sont de signes différents.

Exercice 4 :
La distance entre deux charges +q et –q est 2a.
1) Calculer la force électrostatique exercée sur la charge $q_o > 0$
2) Quelle sera la valeur et la position d'une charge q' placée sur l'axe parallèle à AB et passant par M pour que la résultante des forces en ce point M soit nulle.

Exercice 5.
Soient quatre charges q identiques ponctuelles placées aux sommets A,B,C,D d'un carré de coté a.
1) *Montrer que quelle que soit la valeur de la charge q_o placée au centre de ce carré, elle est en état d'équilibre.*
2) *On place successivement les charges +q ;-q ;+2q ;-2q sur les sommets du carré A ;B ;C ;D*
   calculer la force
   a) *sur la charge au point D*
   b) *sur la charge q_o au centre de ce carré.*