PST Université de A.MIRA de Béjaïa
Faculté de Technologie
Départements 2ème Année L_2 : ATE–GP
® 2022-2023
Durée : 01H30

✠–Examen Final de Probabilités et Statistiques–✠

Exercice 1 (14.00 points) :
Une étude réalisée dans 50 hôpitaux a donné les résultats suivants concernant le nombre de personnes contaminées par une maladie infectieuse respiratoire (Covid-19) :

30	30	38	50	64	42	70	60	64	42	74	60	64	64	50	64	42	64	50	42
60	42	64	50	64	50	60	50	38	64	64	70	74	64	64	60	50	74	74	70
64	30	42	74	74	70	64	60	30	50										

Partie A :

1. Déterminer : La population, l'individu, le caractère étudié et ses modalités.
2. Dresser le tableau statistique de la distribution.
3. Déterminer la fonction de répartition ($F(x)$) et tracer son graphe.
4. Calculer la médiane (Me) et la moyenne ($\overline{X}$).
5. Donner la valeur du mode (M_o), de Q_1 et de Q_3.

Partie B : Un regroupement en classe des données précédentes est donné dans le tableau suivant :

Classes	[25, 35[	[35, 45[	[45, 55[	[55, 65[	[65, 75[
Effectifs	4	8	8	20	10

1. Représenter graphiquement cette distribution et calculer le mode.
2. Donner la fonction de répartition et tracer son graphe.
3. Calculer la médiane, l'intervalle interquartile et l'écart-type (σ).
4. Déterminer la proportion des hôpitaux dont le nombre de personnes contaminées observées est inférieur à $\overline{X} + \sigma$.

Exercice 2 (06.00 points) :
Soient A et B deux événements définis à partir d'une même expérience aléatoire tels que $P(A) = \frac{1}{5}$ et $P(A \cup B) = \frac{1}{2}$.

1. Supposons que A et B soient incompatibles. Calculer $P(B)$.
2. Supposons que A et B soient indépendants. Calculer $P(B)$.
3. Supposons que $P(B/A) = \frac{1}{4}$. Calculer $P(B)$.
4. Supposons que $P(\overline{A \cap B}) = \frac{1}{3}$. Calculer $P(B)$.
5. Calculer $P(B)$ en supposant que la réalisation de l'événement A entraîne la réalisation de l'événement B.

Bonne Chance
© Mr Boualem

PST Université A.MIRA–Bejaia
Faculté de Technologie
Département $2^{\text{ième}}$ Année L_2 : ATE–GP
Durée : 01H30 ® 2022–2023

✠– Corrigé de l'Examen Final de Probabilités et Statistiques–✠

Exercice 1 (**Corrigé de l'Exercice 1**) :

Partie A :

1. Déterminer : La population, l'individu, le caractère étudié et ses modalités.
   – La population : Les hôpitaux. **(00.25 pts)**
   – L'individu : Hôpital. **(00.25 pts)**
   – Le caractère étudié : Nombre de personnes contaminées par la Covid-19. **(00.25 pts)**
   – Modalités : 30, 38, 42, 50, 60, 64, 70, 74. **(00.25 pts)**
2. Dresser le tableau statistique de la distribution.

x_i	n_i	f_i	$F_i \nearrow$	$n_i x_i$
30	4	0.08	0.08	120
38	2	0.04	0.12	76
42	6	0.12	0.24	252
50	8	0.16	0.4	400
60	6	0.12	0.52	360
64	14	0.28	0.8	896
70	4	0.08	0.88	280
74	6	0.12	1	444
Total	50	1	–	2828

(01.00 pts)

3. Déterminer la fonction de répartition ($F(x)$) et tracer son graphe.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 30, \\ 0.08, & \text{si } 30 \leq x < 38, \\ 0.12, & \text{si } 38 \leq x < 42, \\ 0.24, & \text{si } 42 \leq x < 50, \\ 0.4, & \text{si } 50 \leq x < 60, \\ 0.52, & \text{si } 60 \leq x < 64, \\ 0.80, & \text{si } 64 \leq x < 70, \\ 0.88, & \text{si } 70 \leq x < 74, \\ 1, & \text{si } x \geq 74. \end{cases}$$

(01.00 pts)

• Le Graphe de $F(x)$: Il s'agit d'une fonction croissante en escaliers (**Voir ci-dessous la Figure 1**). **(00.50 pts)**

4. Calculer la médiane (Me) et la moyenne ($\overline{X}$).
   – La médiane : On a, $n = 50 = 2 \times p = 2 \times 25 \Rightarrow p = 25$. Alors, $Me = \frac{x_{25}+x_{26}}{2} = \frac{60+60}{2} = 60$. **(00.50 pts)**
   – La moyenne : $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=8} n_i x_i = \frac{2828}{50} = 56.56$. **(00.50 pts)**
5. Déterminer la valeur du mode (Mo), de Q_1 et de Q_3.
   A partir du tableau Statistique, on peut remarquer facilement que :
   – $M_0 = 64$. **(00.25 pts)**
   – $Q_1 = 50$. **(00.25 pts)**
   – $Q_3 = 64$. **(00.25 pts)**

Partie B :

Afin de Justifier nos réponses, on aura besoin de dresser en premier le tableau de la distribution statistique :

Classes	x_i	n_i	f_i	$F_i \nearrow$	$n_i x_i$	$n_i x_i^2$
$[25, 35[$	30	4	0.08	0.08	120	3600
$[35, 45[$	40	8	0.16	0.24	320	12 800
$[45, 55[$	50	8	0.16	0.40	400	20 000
$[55, 65[$	60	20	0.4	0.80	1200	72 000
$[65, 75[$	70	10	0.2	1	700	49 000
Total	–	50	1	–	2740	157 400

(01.25 pts)

1. Représenter graphiquement la distribution statistique et calculer le Mode.
   • Il s'agit de tracer l'histogramme de la distribution (**Voir ci-dessous la Figure 2**). **(00.50 pts)**
   – Calcul du Mode : $M_0 \in [55, 65[= [e_{i-1}, e_i[$, d'où

$$\begin{aligned} M_0 &= e_{i-1} + \frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} \times a_i = 55 + \frac{0.4 - 0.16}{(0.4 - 0.16) + (0.4 - 0.2)} \times 10 \\ &= 55 + \frac{0.24}{0.44} \times 10 = 60.4545. \end{aligned}$$

(01.00 pts)

2. Donner la fonction de répartition et tracer son graphe.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 25, \\ \frac{0.08}{10}(x - 25) = 0.008x - 0.2, & \text{si } 25 \leq x < 35, \\ 0.08 + \frac{0.16}{10}(x - 35) = 0.016x - 0.48, & \text{si } 35 \leq x < 45, \\ 0.24 + \frac{0.16}{10}(x - 45) = 0.016x - 0.48, & \text{si } 45 \leq x < 55, \\ 0.40 + \frac{0.40}{10}(x - 55) = 0.04x - 1.8, & \text{si } 55 \leq x < 65, \\ 0.80 + \frac{0.20}{10}(x - 65) = 0.02x - 0.5, & \text{si } 65 \leq x < 75, \\ 1, & \text{si } x \geq 75. \end{cases}$$

(01.25 pts)

   • Le Graphe de $F(x)$ correspond au graphe des fréquences cumulées croissantes dans le cas continu (**Voir ci-dessous la Figure 3**). **(00.50 pts)**

3. Calculer la médiane, l'intervalle interquartile $Q_3 - Q_1$ et l'écart-type (σ).
   – La Médiane : $M_e \in [55, 65[= [e_{i-1}, e_i[$,

$$M_e = e_{i-1} + \frac{F(M_e) - F(e_{i-1})}{f_i} \times a_i = 55 + \frac{0.5 - 0.40}{0.40} \times 10 = 57.5.$$

(00.50 pts)

   – $Q_1 \in [45, 55[= [e_{i-1}, e_i[$,

$$Q_1 = e_{i-1} + \frac{F(Q_1) - F(e_{i-1})}{f_i} \times a_i = 45 + \frac{0.25 - 0.24}{0.16} \times 10 = 45.625.$$

(00.50 pts)

   – $Q_3 \in [55, 65[= [e_{i-1}, e_i[$,

$$Q_3 = e_{i-1} + \frac{F(Q_3) - F(e_{i-1})}{f_i} \times a_i = 55 + \frac{0.75 - 0.4}{0.40} \times 10 = 63.75.$$

(00.50 pts)

   – L'intervalle interquartile :

$$Q_3 - Q_1 = 63.75 - 45.625 = 18.13.$$

(00.50 pts)

   – Calcul de l'écart-type (σ) :

– La Moyenne :

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=5} n_i x_i = \frac{2740}{50} = 54.80. \qquad \textbf{(00.50 pts)}$$

– La variance :

$$V(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=5} n_i x_i^2 - \overline{X}^2 = \frac{157400}{50} - (54.80)^2 = 144.96. \qquad \textbf{(00.50 pts)}$$

– Finalement, L'écart-type est :

$$\sigma = \sqrt{V(X)} = \sqrt{144.96} = 12.0399. \qquad \textbf{(00.25 pts)}$$

4. Déterminer la proportion des hôpitaux dont on a observé que le nombre de personnes contaminées est inférieur à $\overline{X} + \sigma$.
   $\overline{X} + \sigma = 54.80 + 12.0399 = 66.8399 \in [65, 75[= [e_{i-1}, e_i[$, (Voir la réponse à la question 2, avec $x = \overline{X} + \sigma = 66.8399$), d'où

$$\begin{aligned} F(x) &= F(\overline{X} + \sigma) = F(66.8399) = 0.80 + \frac{0.20}{10}(x - 65) \\ &= 0.80 + \frac{0.20}{10}(66.8399 - 65) = 0.836798. \qquad \textbf{(01.00 pts)} \end{aligned}$$

   Ce qui veut dire finalement que la proportion donnée est d'ordre de $83,6798\%$.

Exercice 2 (**Corrigé de l'Exercice 2**) :
Soient $P(A) = \frac{1}{5}$ et $P(A \cup B) = \frac{1}{2}$.
Par définition, on a l'expression suivante :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B). \qquad \textbf{(00.50 pts)}$$

1. Supposons que A et B soient incompatibles. Calculer $P(B)$.
   A et B incompatibles donc $A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cap B) = 0$, d'où

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \Rightarrow P(B) = \frac{1}{2} - \frac{1}{5} = \frac{3}{10}. \qquad \textbf{(01.00 pts)}$$

2. Supposons que A et B soient indépendants. Calculer $P(B)$.
   A et B indépendants : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = \frac{1}{5}P(B)$, d'où

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{5} + P(B) - \frac{1}{5}P(B) \Rightarrow \frac{4}{5}P(B) = \frac{3}{10} \Rightarrow P(B) = \frac{3}{8}. \qquad \textbf{(01.00 pts)}$$

3. Supposons que $P(B/A) = \frac{1}{4}$. Calculer $P(B)$.
   $P(B/A) = \frac{1}{4} = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{4}P(A) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{20}$, d'où

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{5} + P(B) - \frac{1}{20} \Rightarrow P(B) = \frac{7}{20}. \qquad \textbf{(01.00 pts)}$$

4. Supposons que $P(\overline{A \cap B}) = \frac{1}{3}$. Calculer $P(B)$.
   $P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = \frac{1}{3} \Rightarrow P(A \cap B) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$, d'où

$$P(B) = P(A \cup B) - P(A) + P(A \cap B) = \frac{1}{2} - \frac{1}{5} + \frac{2}{3} = \frac{29}{30}. \qquad \textbf{(01.00 pts)}$$

5. Calculer $P(B)$ en supposant que la réalisation de l'événement A entraîne la réalisation de l'événement B.
   La réalisation de l'événement A entraîne la réalisation de l'événement B, cela dit que $A \subset B$, d'où
   $A \subset B \Rightarrow A \cap B = A \Rightarrow P(A \cap B) = P(A) = \frac{1}{5}$, d'où
   $$\frac{1}{2} = \frac{1}{5} + P(B) - \frac{1}{5} \Rightarrow P(B) = \frac{1}{2}. \qquad \textbf{(01.50 pts)}$$

Bonne Chance

Partie A :

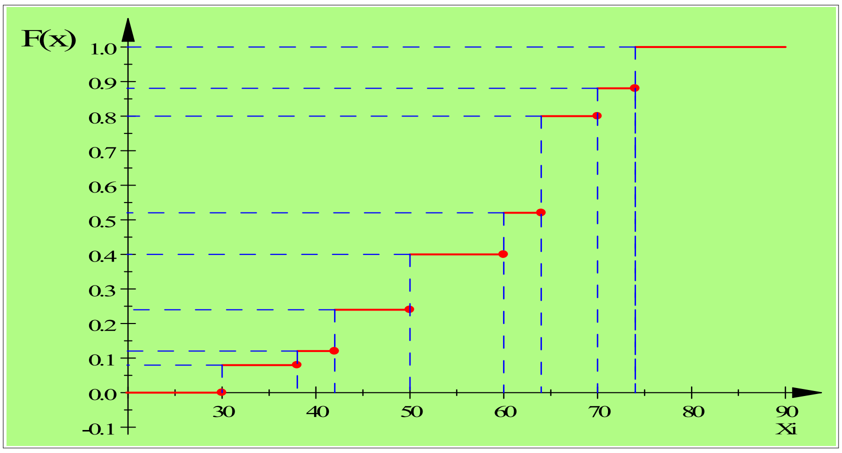

Fig. 1 : Représentation graphique de la fonction de répartition *F(x)*.

PARTIE B :

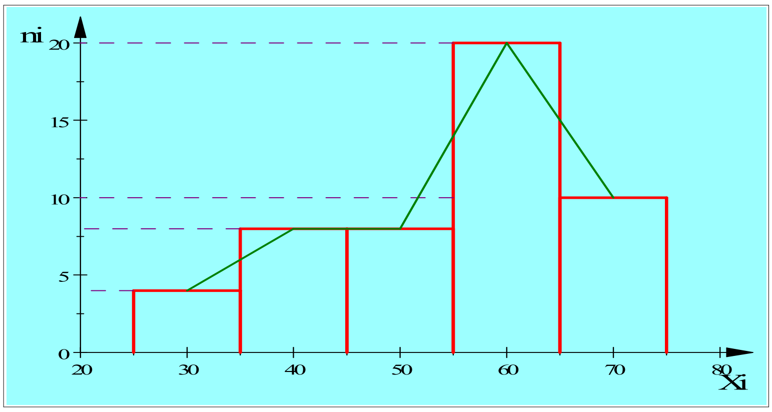

Fig. 2 : Représentation graphiquement de la distribution statistique.

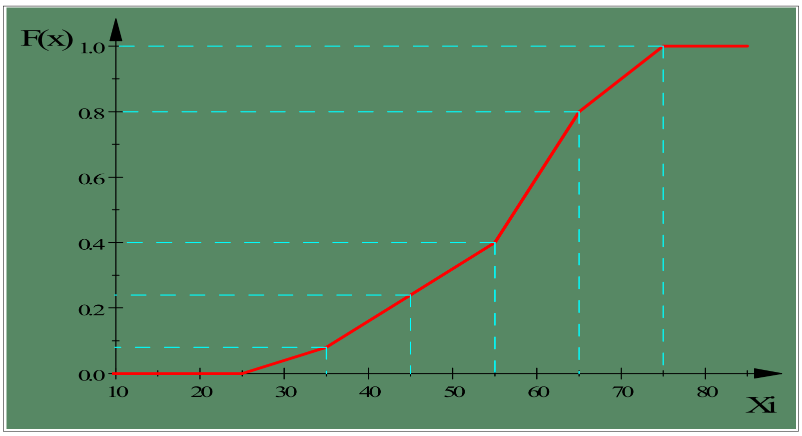

Fig. 3 :

Représentation graphique de la fonction de répartition *F(x)*.