Département de Génie Industriel
2ième Année Licence
Module: Electrotechnique Fondamentale 1

Corrigé du TD N°1: Nombres Complexes (NC)

Exercice 1

1. Calculer l'inverse de $z = 3 + j4$: $\frac{1}{z} = \frac{1}{3+j4} = \frac{1.(3-j4)}{(3+j4).(3-j4)} = \frac{3-j4}{25} = \frac{3}{25} - j\frac{4}{25}$

2. La solution de $2z + \bar{z} = 9 + j$:

On met : $z = a + jb$; $\bar{z} = a - jb$, on obtient :

$$2(a + jb) + (a - jb) = 9 + j$$

$$\Rightarrow 3a + jb = 9 + j \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow z = 3 + j$$

3. Le module de $z = \frac{-\sqrt{2}}{1+j} e^{j\frac{\pi}{3}}$: $|z| = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$

4. L'argument de $\frac{-1+j\sqrt{3}}{z}$: $Arg\left(-1 + j\sqrt{3}\right) - Arg(z) = tan^{-1}\left(-\sqrt{3}\right) - \theta = -60° - \theta$

Exercice 2

On donne $z_1 = 1 + j\sqrt{3}$ et $z_2 = \sqrt{3} - j$

1. Forme trigonométrique:

$|z_1| = 2; Arg(z_1) = tan^{-1}\left(\sqrt{3}\right) = 60° = \frac{\pi}{3} \Rightarrow z_1 = r.e^{j\theta} = 2.\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + 2jsin\left(\frac{\pi}{3}\right)$

$|z_2| = 2; Arg(z_2) = tan^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{\pi}{6} \Rightarrow z_2 = r.e^{j\theta} = 2.\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - 2jsin\left(\frac{\pi}{6}\right)$

2. Forme trigonométrique et calcul de z_1^{21}: $z_1^{21} = (2)^{21}.\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + jsin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]^{21}$

Selon le théorème de Moivre nous avons: $z_1^{21} = (2)^{21}.\left[\cos\left(21.\frac{\pi}{3}\right) + jsin\left(21.\frac{\pi}{3}\right)\right]$

$$z_1^{21} = (2)^{21}.[\cos(7\pi) + jsin(7\pi)]$$

3. Pour $z = z_1 + z_2$:

Le module de z : $z = \left(1 + \sqrt{3}\right) + j\left(\sqrt{3} - 1\right) \Rightarrow |z| = \sqrt{8} = 2.\sqrt{2}$

L'argument de z : $Arg(z) = tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}}\right) = 15° = \frac{\pi}{12}$

Exercice 3

En utilisant les formules d'Euler :

$$f(x) = sin(2x).sin(3x)$$

$$f(x) = \left(\frac{e^{j2x} - e^{-j2x}}{2j}\right).\left(\frac{e^{j3x} - e^{-j3x}}{2j}\right) = -\frac{1}{4}.\left[e^{j5x} - e^{-jx} - e^{jx} + e^{-j5x}\right]$$

$$= -\frac{1}{2}.\left[\left(\frac{e^{j5x} + e^{-j5x}}{2}\right) - \left(\frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2}\right)\right]$$

$$f(x) = \frac{1}{2}\left[cos(x) - cos(5x)\right]$$

Linéarisation :

$$g(x) = sin^3(2x) = \left(\frac{e^{j2x} - e^{-j2x}}{2j}\right)^3$$

$$= -\frac{1}{4}.\left[\left(e^{j2x}\right)^3 - 3\left(e^{j2x}\right)^2.\left(e^{-j2x}\right) + 3\left(e^{j2x}\right).\left(e^{-j2x}\right)^2 - \left(e^{-j2x}\right)^3\right]$$

$$= -\frac{1}{8j}.\left[e^{j6x} - 3e^{j2x} + 3e^{-j2x} - e^{-j6x}\right]$$

$$= -\frac{1}{4}.\left[\left(\frac{e^{j6x} - e^{-j6x}}{2j}\right) - 3\left(\frac{e^{j2x} - e^{-j2x}}{2j}\right)\right]$$

$$g(x) = \frac{3}{4}sin(2x) - \frac{1}{4}sin(6x)$$

Exercice 4

Un dipôle est parcouru par un courant $i = 2\sqrt{2}\sin(314t + \frac{\pi}{6})$ quand il est soumis à une tension $u = 220\sin(314t)$.

Représentation de Fresnel: $U = 220$; $I = 2.\sqrt{2}\left[cos\frac{\pi}{6} + jsin\frac{\pi}{6}\right] = \sqrt{6} + j\sqrt{2}$

L'impédance complexe : $Z = \frac{U}{I} = \frac{220}{\sqrt{6}+j\sqrt{2}}.\frac{\sqrt{6}-j\sqrt{2}}{\sqrt{6}-j\sqrt{2}}$

$$Z \approx 67.4 + j38.9$$