Université Mostefa Benboulaïd Batna 2
Faculté de Technologie
Département d'Electrotechnique
Année universitaire 2019/2020
Promotion : Licence en Electrotechnique
Parcours : Electrotechnique
Module : ELT514

Contrôle de Connaissances

Jeudi 04 Mars 2020

Ne pas oublier les unités des différentes grandeurs s'il y a lieu.

Questions de cours (7 points)

1. Rappeler les définitions respectives de l'électrostatique et de la magnétostatique.
2. Donner les expressions de calcul de la charge électrique $\boldsymbol{Q}$ à partir des densités : linéique $\boldsymbol{\lambda}$, surfacique $\boldsymbol{\sigma}$ et volumique $\boldsymbol{\rho}$.
3. Comment sont orientées les lignes des champs électrique et magnétique ?
4. Comment appelle-t-on ce symbole $\vec{\nabla}$? Donner son expression en coordonner cartésiennes.
5. Soit $\boldsymbol{dV = \vec{\nabla}V.\overrightarrow{dM}}$ comment orienter $\overrightarrow{\boldsymbol{dM}}$ par rapport à $\vec{\nabla}\boldsymbol{V}$ pour que $\boldsymbol{dV}$ soit nulle, positive et maximum.
6. Rappeler les formes locales des équations de Maxwell en électrostatique et en magnétostatique.
7. Comment appelle-t-on ce symbole Δ ? A quoi est égale ? déduire l'expression du $\Delta\boldsymbol{V}$ en coordonnées catésiennes.

Exercice n°1 (4 points)

Considérons un champ vectoriel $\vec{\boldsymbol{V}} = \boldsymbol{x}\vec{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{x}}$ et la surface d'un cube unitaire (de côté égale à 1) centré à l'origine $\boldsymbol{O}$ d'un repère orthonormé $\boldsymbol{Oxyz}$ avec ces arêtes parallèles aux axes.
1.1. Réaliser la figure de l'exercice.
1.2. Vérifier le théorème de divergence. Exprimer $\boldsymbol{dS}$ et $\boldsymbol{d\tau}$ en coordonnées cartésiennes.

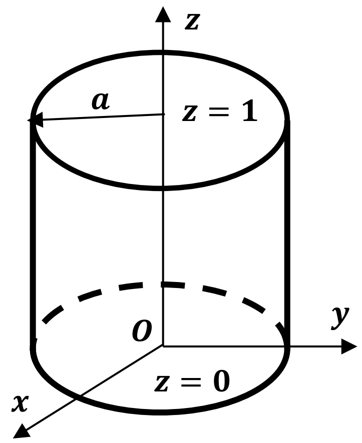
$$\iint \vec{\boldsymbol{V}}.\overrightarrow{\boldsymbol{dS}} = \iiint \vec{\nabla}.\vec{\boldsymbol{V}}\,\boldsymbol{d\tau}$$

Exercice n°2 (4 points)

Considérons le champ de vecteur $\vec{\boldsymbol{V}} = \boldsymbol{3z^2\vec{e}_x - 2yz\vec{e}_y + (6xz - 2y^2)\vec{e}_z}$. Calculer la circulation de $\vec{\boldsymbol{V}}$ sur les courbes d'équations respectives : $\boldsymbol{z = y^2}$ et $\boldsymbol{z = y^3}$ entre les points $(\boldsymbol{0,0,0})$ et $(\boldsymbol{0,1,1})$. $\vec{\boldsymbol{V}}$ est-il un gradient ? si oui déterminer la fonction $\boldsymbol{\varphi}$ dont il dérive.

Exercice n°3 (4 points)

Considérons la surface cylindrique de la figure ci-contre dans un champ d'équation : $\vec{\boldsymbol{E}} = [\boldsymbol{x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + (z^2 - 1)\vec{e}_z}]\boldsymbol{E_0}$, $\boldsymbol{E_0}$ est constant. Evaluer le flux à travers cette surface cylindrique par les deux méthodes (intégration directe et théorème de divergence). Les éléments différentiels de surface sont :$\boldsymbol{rdrd\theta}$ dans $\vec{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{r}}$, $\vec{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{\theta}}$, $\boldsymbol{drdz}$ dans $\vec{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{r}}$, $\vec{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{z}}$, $\boldsymbol{rd\theta dz}$ dans $\vec{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{\theta}}$, $\vec{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{z}}$. Le volume élémentaire : $\boldsymbol{d\tau = rdrd\theta dz}$



Université Mostefa Benboulaïd Batna 2
Faculté de Technologie
Département d'Electrotechnique
Année universitaire 2019/2020
Promotion : Licence en Electrotechnique
Parcours : Electrotechnique
Module : ELT514

Corrigé du contrôle de Connaissances

Jeudi 04 Mars 2020

Exercice n°2

$$\vec{V}.\overrightarrow{dM} = 3z^2dx - 2yzdy + (6xz - y^2)dz$$
$$x = 0 \Rightarrow dx = 0$$
$$\vec{V}.\overrightarrow{dM} = -2yzdy - y^2dz$$
$$y \text{ et } z \text{ varient de } 0 \text{ à } 1 \Rightarrow dy \neq 0 \text{ et } dz \neq 0$$

Calcul de la circulation de $\vec{V}$ sur la courbe d'équations : $z = y^2$,
$$dz = 2ydy$$
$$\vec{V}.\overrightarrow{dM} = -2yy^2dy - y^2 2ydy = -2y^3dy - 2y^3dy = -4y^3dy$$
$$C = \int_0^1 -4y^3dy = -4\left.\frac{y^4}{4}\right|_0^1 = -y^4\big|_0^1 = -1$$

Calcul de la circulation de $\vec{V}$ sur la courbe d'équations : $z = y^3$,
$$dz = 3y^2dy$$
$$\vec{V}.\overrightarrow{dM} = -2yy^3dy - y^2 3y^2dy = -2y^4dy - 3y^4dy = -5y^4dy$$
$$C = \int_0^1 -5y^4dy = -5\left.\frac{y^5}{5}\right|_0^1 = -y^5\big|_0^1 = -1$$

$\vec{V}$ est une gradient et il peut s'écrire sous forme de :
$$\vec{V} = \vec{\nabla}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{e}_z = 3z^2\vec{e}_x - 2yz\vec{e}_y + (6xz - y^2)\vec{e}_z$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = 3z^2 \Rightarrow \varphi(x,y,z) = 3z^2x + f(y,z)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} = -2yz \Rightarrow f(y,z) = -y^2z + g(z)$$
$$\varphi(x,y,z) = 3z^2x - y^2z + g(z)$$
$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = 6zx - y^2 + \frac{dg}{dz} = 6xz - y^2$$
$$\frac{dg}{dz} = 0 \Rightarrow g(z) = C$$
$$\varphi(x,y,z) = 3z^2x - y^2z + C$$

Exercice n°3

Étant donné le champ électrique $\vec{E} = k\left[2xz\vec{e}_x + z^2\vec{e}_y + (x^2 + 2yz)\vec{e}_z\right]$ (k est une constante) trouver les éléments suivants :

3.1. la densité de charge volumique ρ.

3.2. la charge enfermée par un cylindre de hauteur h, de rayon R et de base sur le plan xy centré à l'origine (ci-contre).

La densité de charge volumique ρ

$$\vec{\nabla}.\vec{E} = \rho/\varepsilon_0 \Rightarrow \rho = \varepsilon_0\vec{\nabla}.\vec{E} = \varepsilon_0 k(2z + 2y) = 2\varepsilon_0 k(z + y)$$

La charge enfermée par un cylindre de hauteur h, de rayon R et de base sur le plan xy centré à l'origine (ci-contre).
Transformons ρ en coordonnées cylindriques : $y = r\sin\theta$ et $z = z$, $d\tau = rdrd\theta dz$

$$q_{cyl} = \iiint_{\tau} \rho\, d\tau = 2\varepsilon_0 k \iiint_{\tau} (r\sin\theta + z)rdrd\theta dz = 2\varepsilon_0 k \int_0^R \int_0^h \int_0^{2\pi} (r\sin\theta + z)rdrd\theta dz$$

$$= 2\varepsilon_0 k \int_0^h \int_0^{2\pi} \left(\frac{R^3}{3}\sin\theta + \frac{R^2}{2}z\right) d\theta dz = 2\varepsilon_0 k \int_0^{2\pi} \left(\frac{R^3}{3}h\sin\theta + \frac{R^2}{2}\frac{h^2}{2}\right) d\theta$$

$$= 2\varepsilon_0 k \left(\frac{R^3}{3}h(-\cos 2\pi + \cos 0) + 2\pi\frac{R^2}{2}\frac{h^2}{2}\right) = 2\varepsilon_0 k 2\pi \frac{R^2}{2}\frac{h^2}{2} = \pi\varepsilon_0 k R^2 h^2$$