Série n°2 : Calcul de probabilités

EX1 :

1- Au moins un événement se réalise : $A \cup B \cup C$

2- Seul A se réalise : $A \cap \bar{B} \cap \bar{C}$

3- A et B se réalisent mais non C : $A \cap B \cap \bar{C}$

4- Aucun événement ne se réalise : $\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C} = \overline{A \cup B \cup C}$

5- Deux événement au plus se réalisent :

$$(A \cap B \cap \bar{C}) \cup (A \cap \bar{B} \cap C) \cup (\bar{A} \cap B \cap C) \cup (A \cap \bar{B} \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap \bar{B} \cap C) \cup (\bar{A} \cap B \cap \bar{C})$$

$$= \overline{A \cap B \cap C} = \bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C}$$

6- Deux événement exactement se réalisent : $(A \cap B \cap \bar{C}) \cup (A \cap \bar{B} \cap C) \cup (\bar{A} \cap B \cap C)$

EX2 :

1- le nombre de tirages possibles est $C_{14}^{4} = 1001$

2- La probabilité d'avoir 4 boules de même couleur : soit $p(A)$

$$p(A) = \frac{C_6^4 + C_5^4}{C_{14}^4} = 0{,}0199$$

3- la probabilité d'une couleur n'apparait pas : soit $p(B)$

$$p(B) = \frac{C_{11}^4 + C_9^4 + C_8^4}{C_{14}^4} = 0{,}525$$

4- la probabilité qu'au moins une boule rouge soit tirée : soit $p(C)$

C " au moins une rouge "

$\bar{C}$ " Aucune rouge "

$$p(\bar{C}) = \frac{C_9^4}{C_{14}^4} = 0{,}125 \Rightarrow p(C) = 1 - p(\bar{C}) = 1 - \frac{C_9^4}{C_{14}^4} = 0{,}875$$

Ex 3

le nombre de code qu'on peut former est $\Omega = 9.9.9.9 = 9^4 = 6561$ codes.

1- la probabilité « le code est un nbre pair »

$$P(A) = \frac{4 \cdot 9^3}{9^4} = \frac{4}{9}$$

2- la probabilité « le code n'est composé que de chiffres pairs »

$$P(B) = \frac{4^4}{9^4} = \left(\frac{4}{9}\right)^4 = 0{,}039$$

3- la probabilité « le code contient une et une seule fois le chiffre 1 »

$$P(C) = \frac{C_4^1 \cdot 8^3}{9^4} = 0{,}31$$

4- la probabilité « le code est composé de 4 chiffres distincts »

$$P(D) = \frac{A_9^4}{9^4} = \frac{3024}{9^4} = 0{,}46$$

Ex 4

$\Omega = \{T_1, T_2 \ldots T_3, T_1 T_2 \ldots\}$, $\Omega = n!$ « le nbre de manière de placer les n tomes sur l'étagère »

1) $\underbrace{1\ 2}_{2!}\ \underbrace{3 \ldots n}_{(n-1)!}$

$$p(1 \text{ et } 2 \text{ côte à côte}) = \frac{(n-1)!\,2!}{n!} = \frac{2}{n}$$

Autrement: le tome 1 peut occuper les positions de 1 à $n-1$. le tome 2 ne peut occuper que position: celle à coté du tome 1 « avant où bien après » "2!"

pour les $(n-2)$ tomes restants, il y a $(n-2)!$ possibilités de les placer sur l'étagère

$$\text{donc } p(1 \text{ et } 2 \text{ côte à côte}) = \frac{(n-1)(n-2)!\,2!}{n!} = \frac{2}{n}.$$

2)

$\underbrace{1\ 2\ 3 \ldots p}_{n-p+1}\ \underbrace{p+1 \quad p+2 \ldots n}_{n-p}$

$$p(1 \text{ à } p \text{ côte à côte dans cet ordre}) = \frac{(n-p+1)(n-p)!}{n!} = \frac{(n-p+1)!}{n!} = \frac{1}{A_n^{p-1}}$$

le tome 1 peut occuper les positions de 1 à $n-p+1$. il y a qu'une seule manière pour placer les tomes de 2 à p une fois que la position du tome 1 est choisie.

pour les $(n-p)$ tomes restants, il y a $(n-p)!$ manière de les placer sur l'étagère.

EX5:

$\Omega = \underbrace{6 \cdot 6 \cdots 6}_{12 \text{ fois}} = 6^{12}$

1) p(obtenir 2 fois chacune de 6 faces) = $p(1,1,2,2,3,3,4,4,5,5,6,6) = \dfrac{\frac{12!}{(2!)^6}}{6^{12}}$

2) p(obtenir 6 fois le numéro 1) = $p(1,1,1,1,1,1,x,x,x,x,x,x) = \dfrac{C_{12}^{6}\, 5^6}{6^{12}}$

= p(obtenir 6 fois le numéro 1 et 6 numéros différents)

$= \underbrace{p(\tfrac{1}{6}) \cdots p(\tfrac{1}{6})}_{6 \text{ fois}} + \underbrace{p(\tfrac{5}{6}) \cdots p(\tfrac{5}{6})}_{6 \text{ fois}} = C_{12}^{6}\left(\tfrac{1}{6}\right)^6\left(\tfrac{5}{6}\right)^6$

3) p(obtenir 2 fois n°4) = $p(4,4,x,x,x,x,x,x,x,x,x,x) = \dfrac{C_{12}^{2}\, 5^{10}}{6^{12}} = C_{12}^{2}\left(\tfrac{1}{6}\right)^2\left(\tfrac{5}{6}\right)^{10}$

4) p(obtenir au plus 2 fois 4)

$0 \leq k \leq 12$

$p(k \text{ fois } 4) = p(\underbrace{4,4 \cdots 4}_{k \text{ fois}}, \underbrace{x,x \cdots x}_{12-k \text{ fois}}) = \dfrac{C_{12}^{k}\, 5^{12-k}}{6^{12}} = C_{12}^{k}\left(\tfrac{1}{6}\right)^k\left(\tfrac{5}{6}\right)^{12-k}$

donc p(obtenir au plus 2 fois 4) $= C_{12}^{0}\left(\tfrac{1}{6}\right)^0\left(\tfrac{5}{16}\right)^{12} + C_{12}^{1}\left(\tfrac{1}{6}\right)^1\left(\tfrac{5}{6}\right)^{11} + C_{12}^{2}\left(\tfrac{1}{6}\right)^2\left(\tfrac{5}{6}\right)^{10}$

EX6

$\Omega = \{PPP, PPF, PFP, FPP, FFP, FPF, PFF, FFF\} = 2^3 = 8$

1) p(obtenir 2 faces consécutives) = p(FFP, PFF) = $p(A) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

2) p(B) = p(obtenir 3 faces ou 3 piles) = p(FFF, PPP) = $p(B) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

3) p(C) = p(obtenir 3 faces) = p(FFF) = $p(C) = \frac{1}{8}$

4) p(D) = p(obtenir au moins pile) = p(PPP, PPF, PFP, FPP, FFP, FPF, PFF) = $p(D) = \frac{7}{8}$

EX7

D: tirer une pièce défectueuse.

1) $p(D) = p(D|A)\cdot p(A) + p(D|B)\cdot p(B) + p(D|C)\cdot p(C) = \frac{4}{100}\cdot\frac{25}{100} + \frac{6}{100}\cdot\frac{35}{100} + \frac{5}{100}\cdot\frac{40}{100}$

$= \frac{510}{10000} = 0{,}051$

2) $p(B|D) = \dfrac{p(B\cap D)}{p(D)} = \dfrac{p(D|B)\cdot p(B)}{p(D)} = \dfrac{\frac{6}{100}\cdot\frac{35}{100}}{0{,}051} = 0{,}412.$

EX8:

Soient les événements A « la personne est malade »

B « la personne est vaccinée »

$p(B) = \frac{1}{4}$; $p(B|A) = \frac{1}{5}$; $p(A|B) = \frac{1}{12}$

1) D'après la formule des probabilités composées:

$$p(A|\bar{B}) = \frac{p(A\cap\bar{B})}{p(\bar{B})} = \frac{p(A)\,p(\bar{B}|A)}{p(\bar{B})}$$

D'après la formule de probabilités totales on a:

$$p(A) = p(B)\,p(A|B) + p(\bar{B})\,p(A|\bar{B}) = p(B)\,p(A|B) + p(A)\,p(\bar{B}|A)$$

$$= \frac{p(B)\,p(A|B)}{1-p(\bar{B}|A)} = \frac{5}{48}$$

$$p(A|\bar{B}) = \frac{p(A)\,p(\bar{B}|A)}{p(\bar{B})} \qquad \left\{\begin{array}{l} p(\bar{B}) = 1-p(B) = \frac{3}{4} \\ p(\bar{B}|A) = 1-p(B|A) = \frac{4}{5} \end{array}\right\}$$

$$= \frac{5}{48}\cdot\frac{4}{5}\Big/\frac{3}{4} = \frac{16}{144} = \frac{1}{9}$$

2) on remarque que $p(A|B)/p(A|\bar{B}) = \frac{9}{12} = 0{,}75$ (le vaccin est peu efficace)

EX9

A : l'élève fait athletisme $\quad p(A) = 0{,}6$

G : l'élève fait gymnastique $\quad p(G) = 0{,}35$ $\quad p(A\cap G) = 0{,}25$

1) la probabilité de choisir au moins une activité

$$p(A\cup G) = p(A) + p(G) - p(A\cap G) = 0{,}6 + 0{,}35 - 0{,}25 = 0{,}7$$

2) la probabilité de ne choisir aucune activité:

$$p(\bar{A}\cap\bar{G}) = p(\overline{A\cup G}) = 1 - p(A\cup G) = 0{,}3$$

3) la probabilité de choisir une et une seule activité:

$$p[(A\cap\bar{G})\cup(\bar{A}\cap G)] = p(A\,\Delta\,G) = p(A\cap\bar{G}) + p(\bar{A}\cap G)$$

Δ: Différence symétrique

$$= p(A) - p(A\cap G) + p(G) - p(A\cap G) = p(A) + p(G) - 2\,p(A\cap G)$$

$$= 0{,}6 + 0{,}35 - 2\cdot 0{,}25 = 0{,}45$$

$$p(A\,\Delta\,G) = 0{,}45$$

EX 10

H : L'individu est un homme $P(H) = 0,45$

F : L'individu est une femme $P(F) = 0,55$

A : L'individu est fumeur $P(A|H) = 0,5$; $P(A|F) = 0,3$

1) La probabilité qu'il soit fumeur ($P(A)$)

$\{H \cdot F\}$ forme un système complet : $H \cap F = \emptyset$; $H \cup F = \Omega$

D'après la formule de probabilité totale

$$P(A) = P(H)\,P(A|H) + P(F)\,P(A|F)$$
$$= 0,45 \cdot 0,5 + 0,55 \cdot 0,3$$
$$P(A) = 0,39$$

2) la probabilité que ce soit le fumeur "un homme" "une femme"

$$P(H|A) = \frac{P(A \cap H)}{P(A)} = \frac{P(H) \cdot P(A|H)}{P(A)} = \frac{0,45 \cdot 0,5}{0,39} = 0,58$$

$$P(F|A) = \frac{P(A \cap F)}{P(A)} = \frac{P(F)\,P(A|F)}{P(A)} = \frac{0,55 \cdot 0,3}{0,39} = 0,42$$

EX 11

1) $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = \frac{2}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2} = \frac{1}{10}$

2) $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{1}{5}} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$

3) $P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{2}{5}} = \frac{1}{4}$

4) $P(A \cup B | B) = \frac{P((A \cup B) \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$

5) $P(A \cup B | A \cap B) = \frac{P((A \cup B) \cap (A \cap B))}{P(A \cap B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A \cap B)} = 1$

6) $P(A \cap B | A \cup B) = \frac{P((A \cap B) \cap (A \cup B))}{P(A \cup B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A \cup B)} = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{5}$

7) $P(\bar{A}|B) = \frac{P(\bar{A} \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B \setminus (A \cap B))}{P(B)} = \frac{P(B) - P(A \cap B)}{P(B)} = 1 - P(A|B) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

8) $P(\bar{B}|A) = \frac{P(\bar{B} \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A \setminus A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A) - P(A \cap B)}{P(A)} = 1 - P(B|A) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

9) $P(A|\bar{B}) = \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{P(A \setminus A \cap B)}{P(\bar{B})} = \frac{P(A) - P(A \cap B)}{P(\bar{B})} = \frac{\frac{2}{3} - \frac{1}{10}}{\frac{4}{5}} = \frac{17}{24}$

10) $P(B|\bar{A}) = \frac{P(B \cap \bar{A})}{P(\bar{A})} = \frac{P(B) - P(A \cap B)}{P(\bar{A})} = \frac{\frac{1}{5} - \frac{1}{10}}{\frac{1}{3}} = \frac{3}{10}$

EX12

1) on note par : A : "la pièce provient de la machine A"

B : "la pièce provient de la machine B"

C : "la pièce provient de la machine C"

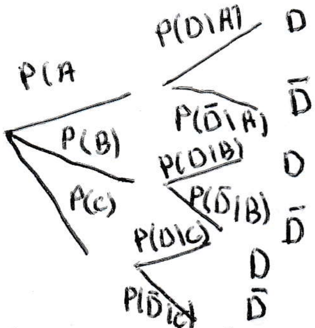
D : "la pièce st défectueuse"

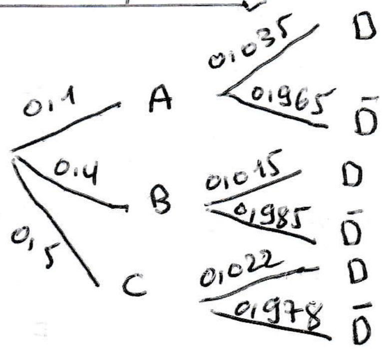
	A	B	C	TOTAL
D	35	60	110	205
$\bar{D}$	965	3940	8890	9795
TOTAL	1000	4000	5000	10000

$P(A) = 0,1$ $P(D \mid A) = 0,035$

$P(B) = 0,4$ $P(D \mid B) = 0,015$

$P(C) = 0,5$ $P(D \mid C) = 0,022$





2) a) $P(A \cap D) = P(D \mid A) \cdot P(A) = 0,035 \cdot 0,1 = 0,0035$

$P(B \cap D) = P(D \mid B) \cdot P(B) = 0,015 \cdot 0,4 = 0,006$

$P(C \cap D) = P(D \mid C) \cdot P(C) = 0,022 \cdot 0,5 = \boxed{0,011}$

b) un composant st défectueux, soit défectueux et provient de A, soit défectueux et provient de B, soit défectueux et provient de C. Donc $(C \cap D)$; $(A \cap D)$ et $(B \cap D)$ sont incompatibles 2 à 2, D'où :

$$P(D) = P(A \cap D) + P(B \cap D) + P(C \cap D)$$

$$= 0,0035 + 0,006 + 0,011 = 0,0205$$

c) $P(C \mid D) = \dfrac{P(C \cap D)}{P(D)} = \dfrac{0,011}{0,0205} = 0,5366.$