## Examen de remplacement de Maths II

(Durée 2h)

## Les calculatrices programmables ne sont pas autorisées

Exercice 1. (4 points)

On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 6 \\ 3 & -1 & 5 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -2 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- a. Calculer le déterminant de la matrice A et déduire que la matrice A est inversible.
- b. Calculer la matrice  $A \times (B 2I_3)$  puis déduire la matrice inverse de A.

Exercice 2. (6 points)

- 1. Déterminer les constantes réelles a, b et c qui vérifient :  $\frac{2x+1}{x^2(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x+1}$ .
- 2. Soit x > 0, calculer la primitive  $F(x) = \int \frac{1}{x^2} \ln(x^2 + x) dx$  à l'aide d'une intégration par parties.
- 3. Résoudre l'équation différentielle  $y'-\frac{2}{x}y=\ln(x^2+x), \qquad x>0$  .

Exercice 3. (5 points)

Soit l'équation différentielle suivante :

$$y'' + 3y = xe^{2x} \tag{E}$$

- 1. Résoudre l'équation homogène associée a (E).
- 2. Trouver les constantes réelles a et b pour que  $y_p = (ax + b)e^{2x}$  soit une solution particulière de (E).
- 3. Déduire la solution génerale de (E).

Exercice 4. (5 points)

Soit

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{e^x} dx, \quad n \in \mathbb{N}^*$$

- 1. En utilisant une intégration par parties,
  - i) Calculer  $I_1$ .
  - ii) Montrer que  $I_{n+1} = -\frac{1}{e} + (n+1)I_n$ .
- 2. Calculer I2 et I3
- 3. En déduire la valeur de

$$I = \int_0^1 \frac{-x^3 + 2x^2 - x}{e^x} dx$$



Université A/ Mira de Béjaia Faculté de Technologie Département de Technologie 1ère année ST

Juin 2019

## Corrigé de l'examen de MathsII

Exercice 1. (4 points)

Considèrons la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 6 \\ 3 & -1 & 5 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

a. Calculons le déterminant de la matrice A. Il vient, en développant par rapport à la deuxième ligne.

$$det(A) = 4 \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} 2 \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} + 6 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -4$$

La matrice A est inversible si et seulement si son déterminant est différent de 0, On a  $det(A) = -4 \neq 0$ , donc A est inversible.

**b.** Calculons la matrice  $A \times (B - 2I_3)$ .

on a
$$A \times (B - 2I_3) = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 6 \\ 3 & -1 & 5 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -2 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} & -2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & -2 & 6 \\ 3 & -1 & 5 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I_3$$

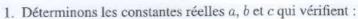
En déduire la matrica inverse de A.

$$A \times (B - 2I_3) = 2I_3 \Longrightarrow \frac{A \times (B - 2I_3)}{2} = I_3$$

$$\Longrightarrow A \frac{(B - 2I_3)}{2} = I_3 \text{ on a de l'autre coté } A \times A^{-1} = I_3$$

$$\operatorname{donc} A^{-1} = \frac{(B - 2I_3)}{2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ -1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Exercice 2. (6 points)



Determines les constantes reches a, 
$$\frac{1}{(x-1)(x-2)^2} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2} + \frac{c}{(x-2)^2}.$$
On a  $\frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2} + \frac{c}{(x-2)^2} = \frac{(a+b)x^2 + (-4a-3b+c)x + (4a+2b-c)}{(x-1)(x-2)^2}$ 
En identifiant, on obtient :  $a = 1$ ,  $b = -1$ ,  $c = 1$ 
donc  $\frac{1}{(x-1)(x-2)^2} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-2} + \frac{1}{(x-2)^2}.$ 



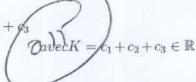
2. Trouver les primitives des fonctions 
$$\frac{a}{x-1}$$
,  $\frac{b}{x-2}$  et  $\frac{c}{(x-2)^2}$ 

$$\int \frac{1}{x-1} dx = \ln|x-1| + c_1 \text{ avec } c_1 \in \mathbb{R}.$$

$$\int \frac{1}{x-2} dx = \ln|x-2| + c_2 \text{ avec } c_2 \in \mathbb{R}.$$
et

$$\int rac{1}{(x-2)^2} dx = -rac{1}{(x-2)} + c_3 ext{ avec } c_3 \in \mathbb{R}.$$

On déduire la primitive de la fonction 
$$\frac{1}{(x-1)(x-2)^2}$$
. 
$$\int \frac{1}{(x-1)(x-2)^2} dx = \ln|x-1| + c_1 - \ln|x-2| c_2 - \frac{1}{(x-2)} + \\ = \ln|x-1| - \ln|x-2| - \frac{1}{(x-2)} + K \\ = \ln|\frac{x-1}{x-2}| - \frac{1}{(x-2)} + K$$



3. Résoulution de l'équation différentielle suivante : 
$$(x-2)y'-y=\frac{1}{(x-1)}$$
. on a  $(x-2)y'-y=\frac{1}{(x-1)}\Longrightarrow (x-2)(x-1)y'-(x-1)y=1....(I)$  est une équation

différentielle non homogène (ou avec second membre). Résolution de l'équation homogène 
$$(x-2)(x-1)y'-(x-1)y=0$$

$$(x-2)(x-1)y' - (x-1)y = 0 \Longrightarrow \frac{dy}{y} = \frac{1}{(x-2)}dx$$

et par suite

$$ln|y| = ln|x - 2| + C_1$$
 où  $C_1 \in \mathbb{R}$ 

D'où 
$$y(x) = C(x-2), C = \mp exp(C1)$$
.

Résolution de l'équation avec second membre 
$$((x-2)(x-1)y'-(x-1)y=1)$$

Méthode de la variation de la constante : Soit y(x) = C(x-1)y - (x-1)y - 1

l'équation homogène. On fait varier la constante C, et la solution générale de l'éqution avec le second membre (I) sera : y(x) = C(x)(x-2). On a

$$y'(x) = C'(x)(x-2) + C(x)$$
. En remplaçant  $y$  et  $y'$  dans l'équation (I), on obtient

$$C'(x) = \frac{1}{(x-1)(x-2)^2}$$
 par conséquent  $C(x) = \ln |\frac{x-1}{x-2}| - \frac{1}{(x-2)} + K$  Finalement la solution générale de l'équation (I) est 
$$y(x) = (\ln |\frac{x-1}{x-2}| - \frac{1}{(x-2)} + K)(x-2).$$



Exercice 3. (5 points)

Soit l'équation différentielle suivante :

$$y'' + 3y = 7xe^{2x} \tag{E}$$

 Résoudre l'équation homogène associée a (E). Résolution de l'équation homogène

$$y'' + 3y = 0 (E_0)$$

L'équation caractéristique associée à  $(E_0)$ .

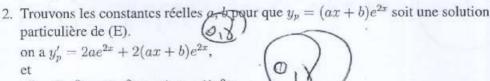
$$r^2 + 3 = 0$$



admet deux racines complexes distinctes  $r_1=0+i\sqrt{3}$  et  $r_2=0-i\sqrt{3}$ . Ainsi, la solution générale de (E) est

$$y_0 = e^{0x} (C_1 \cos \sqrt{3}x + C_2 \sin \sqrt{3}x),$$

où  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ .



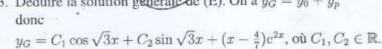
on a 
$$y'_p = 2ae^{2x} + 2(ax+b)e^{2x}$$
,

et 
$$y'' - 2ae^{2x} + 2ae^{2x} + 4(ax + b)e^{2x}$$

et 
$$y_p'' = 2ae^{2x} + 2ae^{2x} + 4(ax+b)e^{2x}$$
, En remplaçant  $y_p'$  et  $y_p''$  dans (E) on obtient :  $2ae^{2x} + 3(2ax+b)e^{2x} + 3(2ax+b)e^{2x} + 3(2ax+b)e^{2x} + 9(ax^2+bx)e^{2x} - 4(2ax+b)e^{2x} = 12(ax^2+bx)e^{2x} + 3(ax^2+bx)e^{2x} = (8x+1)e^{2x}$  qui donne  $7ax + 4b + 7a = 7x$ 

En identifiant, on trouve 
$$a=1$$
 et  $b=\frac{-4}{7}$ . D'où  $y_p=(x^2-\frac{4}{7}x)e^{2x}$ .

$$y_p = (x - 7x)e^{-x}$$
. Of  $y_q = y_0 + y_p$  3. Déduire la solution génerale de (E). On a  $y_G = y_0 + y_p$ 





Exercice 4. (5 points)

Soit

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{e^x} dx, \quad n \in \mathbb{N}^*$$

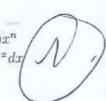
- 1. En utilisant une intégration par parties,
  - i) Calculons  $I_1 = \int_0^1 \frac{x^1}{e^x} dx$ .

On pose 
$$U'(x) = e^{-x} \Rightarrow U(x) = -e^{-x}$$
  $V(x) = x \Rightarrow V'(x) = 1$   $I_1 = \int_0^1 \frac{x^1}{e^x} dx = -xe^{-x}|_0^1 + \int_0^1 e^{-x} dx$   $= -xe^{-x} - e^{-x}|_0^1$   $= -\frac{1}{e} - \frac{1}{e} + 1$   $= 1 - \frac{2}{e}$ 



ii) Montrons que  $I_{n+1} = -\frac{1}{c} + (n+1)I_n$ .

$$\begin{array}{ll} \text{posons} \\ U'(x) = e^{-x} & \Rightarrow \quad U(x) = -e^{-x} \\ V(x) = x^{n+1} & \Rightarrow \quad V'(x) = (n+1)x^n \\ I_{n+1} = -x^{n+1}e^{-x}|_0^1 + (n+1)\int_0^1 x^1e^{-x}dx \\ & = -\frac{1}{e} + (n+1)I_n. \end{array}$$



2. Calculons 
$$I_2$$
 et  $I_3$ 

$$I_2 = \int_0^1 x^2 e^{-x} dx = -\frac{1}{c} + 2I_1$$

$$= 2 - \frac{5}{e}$$

$$I_3 = \int_0^1 x^3 e^{-x} dx = -\frac{1}{c} + 3I_2$$

$$= 6 - \frac{16}{e}$$



3. En déduire la valeur de

$$I = \int_0^1 \frac{-x^3 + 2x^2 - x}{e^x} dx$$

En déduire la valeur de 
$$I=\int_0^1\frac{-x^3+2x^2-x}{e^x}dx$$
 
$$I=\int_0^1\frac{-x^3+2x^2-x}{e^x}dx=-\int_0^1x^3e^{-x}+2\int_0^1x^2e^{-x}-\int_0^1xe^{-x}dx$$
 
$$I=-I_3+2I_2-I_1=\frac{8}{e}-3$$

