**Université** de Dr Yahia Farès de Médéa. **Lundi** 16/03/2020
**Département** de T.C.T.
**Module:** Maths4 (S2)-$2^{ème}$Année ST. **Durée**: $1h30$.

**R.F.S.N°1: Maths 3**

**Important ! :** Ecrire votre nom et prénom en majuscules ainsi que votre groupe de TD.

**Exercice 1. (4 points).** Pour les deux cas suivants, tracer $D$, puis calculer $\iint_D f(x,y)\,dxdy$ :

1. $\iint_D 2x^2y\,dxdy$ où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ y \geq 0, \text{et } y + x \leq 1\}$.

**Exercice 2. (7 points)**

1. Énoncer le théorème de comparaison, puis étudier la convergence de l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2}dx.$$

2. Étudier la convergence des séries numériques suivantes

$$(a)\ \sum_{n\geq 0} \frac{n^3}{n^2+1} \qquad\qquad (b)\ \sum_{n\geq 0} \frac{2}{\sqrt{n}}$$

**Exercice 3. (4 points)**. Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y' + y\tan(x) = \cos(x)\sin(x)$

**Exercice 4. (5 points)**. Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ la suite de fonctions définie par $f_n(x) = \frac{1}{(1+x^2)^n}$.

- Étudier la convergence simple et la convergence uniforme sur $I = [a, +\infty[$, avec $a > 0$.

*** *Bon courage* ***

# SOLUTION DÉTAILÉE DE RATTRAPAGE F.S. N 1: MATHS 03

**Exercice 1. (4 points: 2+2 )** :pour les deux cas suivants, tracer $D$, puis calculer $\iint_D f(x,y)\,dxdy$ :

1. $\iint_D 2x^2y dxdy$ où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ y \geq 0, \text{et } y + x \leq 1\ \}$..............(02 pts)

**Solution.**

1. Fixons x entre 0 et 1. Le nombre $y$ varie de 0 à $1-x$. Donc

$$\begin{aligned}\iint_{D_1} 2x^2y dxdy &= \int_{x=0}^{x=1}\left[\int_0^{1-x} 2x^2ydy\right]dx = \int_{x=0}^{x=1} x^2\left[\int_0^{1-x} 2ydy\right]dx = \int_{x=0}^{x=1} x^2(1-x)^2\,dx = \int_{x=0}^{x=1} x^2(1-x)^2\,dx \\ &= \int_{x=0}^{x=1}\left(x^4-2x^3+x^2\right)dx = \left[\frac{x^5}{5}-\frac{x^4}{2}+\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{30}.\end{aligned}$$

**Exercice 2. (7 points)**

1. Énoncer le théorème de comparaison, puis étudier la convergence de l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2}dx.$$

2. Étudier la convergence des séries numériques suivantes

$$(a)\ \sum_{n\geq 0}\frac{n^3}{n^2+1} \qquad\qquad (b)\ \sum_{n\geq 0}\frac{2}{\sqrt{n}}$$

**Solution.**

1. **Théorème de comparaison.** Soient $f$ et $g$ deux fonctions positives et continues sur $[a,+\infty[$. Supposons que $f$ soit majorée par $g$ au voisinage de $+\infty$ : *i.e.* $\exists A \geq a$ tq $\forall x \geq A :\ f(x) \leq g(x)$

si $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ converge alors $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$. Et si $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ diverge alors $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ diverge. (1pts)

On a pour tout $x \in [1, +\infty[$: $\left|\frac{\sin x}{x^2}\right| \leq \frac{1}{x^2}$. Or l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ est convergente alors d'après le théorème de comparaison l'intégrale $\int_1^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x^2}\right| dx$ est convergente$\Longrightarrow \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx$ est absolument convergente $\Longrightarrow \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx$ est convergente.(1pt).

2. Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série numérique. La condition nécéssaire de convergence est $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$. Donc si $\lim_{n\to+\infty} u_n \neq 0$ alors la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est ivergente.

- $(a) \sum_{n\geq 0} \frac{n^3}{n^2+1}$. On a $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^3}{n^2+1} = +\infty$, la condition nécéssaire de convergence n'est pas vérifiée et donc la série $\sum_{n\geq 0} \frac{n^3}{n^2+1}$ est divergente.

- $(b)$ $\sum_{n\geq 1} \frac{2}{\sqrt{n}} = \sum_{n\geq 1} \frac{2}{n^{\frac{1}{2}}}$. Série de Riemann $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ divergente pour $\alpha = \frac{1}{2}$. Ou bien on a $\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{n}$ et comme la série hermonique $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n}$ est divergente donc la série $\sum_{n\geq 1} \frac{2}{\sqrt{n}}$ est aussi divergente.

**Exercice 3. (4 points)**. Résoudre l' équations différentielle suivante :

1. $y' + y \tan(x) = \cos(x)\sin(x)$

**Solution.**

1. La solution homogène de l'équation homogène $y' + y \tan x = 0$ est donnée par $y_h = \lambda \cos x$, $\lambda \in R$. On cherche une solution particulière par la méthode de variation de la constante et posant $y_p = \lambda(x) \cos x$. Introduisant cette fonction dans l'équation, on trouve

$$\lambda(x)' \cos x = \sin x \cos x \Longrightarrow \lambda(x)' = \sin x \Longrightarrow \lambda(x) = \int \sin x dx = -\cos x$$

Une solution particulière de l'équation différentielle est donc donnée par la fonction $y_p = -\cos^2 x$. La solution générale est

$$y_g = y_h + y_p = \lambda \cos x - \cos^2 x$$

**Exercice 4. (5 points:2+3)**. Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ la suite de fonctions définie par $f_n(x) = \frac{1}{(1+x^2)^n}$.

- Étudier la convergence simple et la convergence uniforme sur $I = \mathbb{R}^+$ puis sur $I = [a, +\infty[$, avec $a > 0$.

**Solution.** $I = [a, +\infty[$avec $a > 0$.

- **Convergence simple**. Fixons $x \in [a, +\infty[$. On a $f(x) = \underset{n \to +\infty}{lim} f_n(x) = 0$..............(01 pts)

- **Convergence uniforme.** Sur les intervalles du type $[a, +\infty[$avec $a > 0$, puisque pour tout $x \geq a$, on a

$$\|f_n - f\| = \underset{x \in [a,+\infty[}{sup} |f_n(x) - f(x)| = \underset{x \in [a,+\infty[}{sup} |f_n(x) - f(x)| = \underset{x \in [a,+\infty[}{sup} |g(x)|.$$

Avec
$$g(x) = f_n(x) - f(x) = f_n(x) = \frac{1}{(1 + x^2)^n}.$$

Fixons $n \in \mathbb{N}$. On a pour tout $x \in [a, +\infty[$: $g'(x) = \frac{-2nx}{(1+x^2)^{2n-1}} < 0$. Et la fonction $g$ est strictement décroissante sur $[a, +\infty[$, et elle atteinte son sup en $x = a$. Donc $\underset{n \to +\infty}{lim} \|f_n - f\| = \underset{n \to +\infty}{lim} \left( \underset{x \in [a,+\infty[}{sup} |g(x)| \right) = \underset{n \to +\infty}{lim} \frac{1}{(1+a^2)^n} = 0.$

On en déduit que la suite $(f_n)$ converge uniformément vers la fonction nulle sur $[a, +\infty[$avec $a > 0$..............(02 pts)