USTO Fac-Math.Info — Examen PST : Corrigé — 06/04/21

Dépt-Informatique, L3-SI

Exercice 1 : (5pts)

En utilisant les coefficients multinomiaux, développer : $(x+y+z)^3$. En déduire la valeur de la somme de tous les coefficients multinomiaux.

Solution :

- La formule du multinome est donnée par : $(x+y+z)^3 = \sum_{i+j+k=3} C_3^{i,j,k} x^i y^j z^k$ (*). (0,5)
- Le nombre de termes est égal à : $C_{3+3-1}^3 = C_5^3 = \frac{5!}{3!2!} = \frac{5.4.3!}{3!2!} = 10$. (0,5)
- Solutions dans $\mathbb{N}$ de : $i+j+k=3$: 300, 030, 003, 111, 012, 021, 102, 120, 201, 210. (1)
- Calcul des termes :

$C_3^{3,0,0} x^0 y^0 z^3 = \frac{3!}{0!0!3!} x^3 y^0 z^0 = x^3$. (0,25)

$C_3^{0,3,0} x^0 y^3 z^0 = \frac{3!}{0!0!3!} x^0 y^3 z^0 = y^3$. (0,25)

$C_3^{0,0,3} x^0 y^0 z^3 = \frac{3!}{0!0!3!} x^0 y^0 z^3 = z^3$. (0,25)

$C_3^{1,1,1} x^0 y^1 z^2 = \frac{3!}{1!1!1!} x^1 y^1 z^1 = 6xyz$. (0,25)

$C_3^{0,1,2} x^0 y^1 z^2 = \frac{3!}{0!1!2!} x^0 y^1 z^2 = 3yz^2$. (0,25)

$C_3^{0,2,1} x^0 y^2 z^1 = \frac{3!}{0!2!1!} x^0 y^2 z^1 = 3y^2 z$. (0,25)

$C_3^{1,0,2} x^1 y^0 z^2 = \frac{3!}{1!0!2!} x^1 y^0 z^2 = 3xz^2$. (0,25)

$C_3^{1,2,0} x^1 y^2 z^0 = \frac{3!}{0!1!2!} x^1 y^2 z^0 = 3xy^2$. (0,25)

$C_3^{2,0,1} x^2 y^0 z^1 = \frac{3!}{2!1!0!} x^2 y^0 z^1 = 3x^2 z$. (0,25)

$C_3^{2,1,0} x^0 y^1 z^2 = \frac{3!}{2!1!0!} x^2 y^1 z^0 = 3x^2 y$. (0,25)

- La somme des coefficients s'obtient en remplaçant dans (*) (x,y,z) par $(1,1,1)$:
  $(1+1+1)^3 = \sum_{i+j+k=3} C_3^{i,j,l} 1^i 1^j 1^k = \sum_{i+j+k=3} C_3^{i,j,l} = 27$. (0,5)

Exercice 2 : (5pts)

Une urne contient 3 boules vertes et 7 boules rouges. On tire successivement 3 boules avec remise. La boule verte rapporte 50 DA et la rouge fait perdre 30 DA.

Soit X la variable aléatoire associant le gain du joueur.

a) Quelles sont les valeurs prises par X ? b) Quelle est la loi de probabilité de X ?
c) Calculer $E(X)$, $V(X)$ et σ_X.

Solution :

a) $\Omega = \{VVV,\ VVR,\ VRV,\ RVV,\ VRR,\ RVR,\ RRV,\ RRR\}.$
$X(\Omega) = \{150, 70, -10, -90\}$ **(1)**

b)

x_i	-90	-10	70	150
(1) $P(X = x_i)$	$(0,7)^3 = 0,343$	$3.(0,3)(0,7)^2 = 0,441$	$3.(0,7)(0,3)^2 =$ 0,189	$(0,3)^3 = 0,027$
$x_i.P(X = x_i)$	$-30,87$	$-4,41$	$13,23$	$4,05$
${x_i}^2.P(X = x_i)$	2778,3	44,1	926,1	607,5

$$E(X) = \sum_{i=1}^{4} x_i.P(X = x_i)$$
$$= (-90).0,343 + (-10).0,441 + 70.0.189 + 150.0.027 = -18 \quad \mathbf{(1,5)}$$

$$V(X) = E(X^2) - E^2(X) = E(X^2) - (-17,7)^2 = E(X^2) - 324$$
$$= \sum_{i=1}^{4} x_i^2.P(X = x_i) - 324$$
$$= (-90)^2.0,343 + (-10)^2.0,441 + 70^2.0.189 + 150^2.0.027 - 324$$
$$= 4356 - 324 = 4032 \quad \mathbf{(1)}$$

$$\sigma_X = \sqrt{V(X)} = \sqrt{4032} = 63,50. \quad \mathbf{(0,5)}$$

Exercice 3 : (7pts)

Une boîte contient 3 types distincts de lampes différentes. Ces lampes donnent plus de 100 heures de fonctionnement avec la probabilité : 0,7 pour le type 1 ; 0,4 pour le type 2 et 0,3 pour le type 3. On suppose que 20 % des lampes sont de type 1, 30 % sont de type 2 et 50 % sont de type 3.

a) Quelle est la probabilité qu'une lampe choisie au hasard fonctionne plus de 100 heures ?
b) Si le fonctionnement de cette lampe dure plus de 100 heures, quelle est la probabilité conditionnelle qu'elle soit du type 1, 2 ou 3 ?

Solution :

a) On considère le système complet d'évènements : $(\Omega_i)_{i=1,2,3}$ où $\Omega_i =$ " *la lampe est de type i* " et soit A l'évènement : $A =$ "*la lampe fonctionne plus de 100 heures*" .

Comme $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3$, on a :

$$A = A \cap \Omega = A \cap (\Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3) = (A \cap \Omega_1) \cup (A \cap \Omega_2) \cup (A \cap \Omega_3) \quad \textbf{(1)}$$

et par suite ;

$$P(A) = P(A \cap \Omega) = P\big(A \cap (\Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3)\big) = P(A \cap \Omega_1) + P(A \cap \Omega_2) + P(A \cap \Omega_3)$$

$$= P(\Omega_1)P(A/\Omega_1) + P(\Omega_2)P(A/\Omega_2) + P(\Omega_3)P(A/\Omega_3)$$

$$= 0,2\,.0,7 + 0,3\,.\,0,4 + 0,5\,.0,3 = 0,41. \quad \textbf{(2)}$$

b) Pour calculer ces probabilités, on utilise la formule de Bayes : $P(\Omega_i/A) = \frac{P(A\cap\Omega_i)}{P(A)}, i = 1,2,3.$

$$P(\Omega_1/A) = \frac{P(A \cap \Omega_1)}{P(A)} = \frac{P(\Omega_1)P(A/\Omega_1)}{P(A)} = \frac{0,2\,.0,7}{0,41} = \frac{14}{41} \quad \textbf{(2)}$$

$$P(\Omega_2/A) = \frac{P(A \cap \Omega_2)}{P(A)} = \frac{P(\Omega_2)P(A/\Omega_2)}{P(A)} = \frac{0,3\,.\,0,4}{0,41} = \frac{12}{41} \quad \textbf{(1)}$$

$$P(\Omega_3/A) = \frac{P(A \cap \Omega_3)}{P(A)} = \frac{P(\Omega_3)P(A/\Omega_3)}{P(A)} = \frac{0,5\,.0,3}{0,41} = \frac{15}{41} \quad \textbf{(1)}$$

Exercice 4 : (5pts)

On considère que la taille des enfants de 12 ans est une variable aléatoire continue qui suit une loi normale de moyenne 125 cm et d'écart type 15 cm. Si on choisit un enfant de 12 ans au hasard, quelle est la probabilité qu'il ait une taille de plus de 140 cm ?

Solution :

Comme $X \hookrightarrow \mathcal{N}(125\,,15)$, on a :

$$P(X > 140) = P\left(\frac{X-125}{15} > \frac{140-125}{15}\right) = P(X^* > 1) = 1 - P(X^* < 1) \quad \textbf{(1,5)}; \quad (X^* \hookrightarrow \mathcal{N}(0\,,1)$$

$$= 1 - F_{X^*}(1) \quad \textbf{(1,5)}$$

$$= 1 - 0,8413 = 0,1587 \text{ (voir table)} \quad \textbf{(2)}$$

Exercice 5 : (8pts)

Un routier sait que le temps qu'il prend pour faire un trajet particulier est une variable aléatoire qui suit une loi normale de moyenne 45,6 mn et d'écart type 1,3 mn.

a) **Quelle est la probabilité qu'il parcoure ce trajet en moins de 45 mn ?**
b) **S'il effectue ce trajet 40 fois par mois, quelle est la probabilité qu'il fasse au moins 20 fois ce trajet en moins de 45 mn ?**

Solution :

a) Comme $X \hookrightarrow \mathcal{N}(45{,}6\ ;\ 1{,}3)$, on a :

$$P(X < 45) = P\left(\frac{X-45{,}6}{1{,}3} < \frac{45-45{,}6}{1{,}3}\right) = P(X^* < -0{,}46) \quad \textbf{(1)} \qquad (\text{où } X^* \hookrightarrow \mathcal{N}(0\ ,1)).$$

$$= F_{X^*}(-0{,}46) \quad \textbf{(1)}$$

$$= 1 - F_{X^*}(0{,}46) \quad \textbf{(1,5)}$$

$$= 1 - 0{,}6772 = 0{,}3228 \ (\text{voir table}) \quad \textbf{(1,5)}$$

b) Soit Y la variable aléatoire discrète : « le nombre de fois que le routier a fait moins de 45 mn sur les 40 trajets effectués par mois ».

Y suit alors la loi binomiale de paramètres $n = 40$ et $p = 0{,}3228$; i.e $Y \hookrightarrow \mathcal{N}(40\ ;\ 0{,}3228)$.

Comme le calcul de $P(Y \geq 20)$ est difficile à effectuer, on utilise l'approximation par la loi normale Z de paramètres :

$np = 40\ .0{,}3228 = 12{,}91$ et $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{40\ .\ 0{,}3228.\ 0{,}6772} = 2{,}96$. **(1)**

Les conditions de cette approximation sont satisfaites car :

$n = 40 \geq 30\ ;\ np = 40\ .0{,}3228 = 12{,}91 \geq 5\ ;\ nq = 40\ .\ 0{,}6772 = 27{,}09 \geq 5$. **(1)**

D'où :

$$P(Y \geq 20) \approx P(Z > 19{,}5) = P\left(\frac{Y - 12{,}91}{2{,}96} > \frac{19{,}5 - 12{,}91}{2{,}96}\right)$$

$$= P(Z^* > 2{,}23) \qquad (\text{où } Z^* \hookrightarrow \mathcal{N}(0\ ,1)).$$

$$= 1 - P(Z^* < 2{,}23)$$

$$= 1 - F_{Z^*}(2{,}23)$$

$$= 1 - 0{,}9871 = 0{,}129 \quad (\text{voir table}) \ \textbf{(1)}$$

Fin.