Equations Homogènes :

$\ddot{y} + p\dot{y} + qy = 0$ $\Rightarrow$ equation caractéristique : $\Rightarrow \mathcal{E}(k) = k^2 + pk + q = 0$.

Calcul du discriminant : $\delta = p^2 - 4q$

$k_1 = \dfrac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$ $\qquad k_2 = \dfrac{-p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$.

Si $\delta = 0 \Rightarrow y(t) = (A + Bt)\, e^{k_1 t}$.

Si $\delta > 0 \Rightarrow y(t) = A e^{k_1 t} + B e^{k_2 t}$.

Si $\delta < 0 \Rightarrow y(t) = e^{\alpha t}\left[C_1 \cos\beta t + C_2 \sin \beta t\right]$.

avec : $\begin{cases} \alpha = -p/2 \\ \beta = 1/2\sqrt{-4p + p^2} \end{cases}$ $\quad = e^{\alpha t}\left[A\cos(\beta t + \varphi)\right]$. $\quad = e^{\alpha t}\left[A\sin(\beta t + \varphi)\right]$.

Equations non Homogènes :

Avec exemple :

$$\underbrace{2\ddot{x} + 3\dot{x} + 5x}_{x_H} = \underbrace{7\sin(3t) + 4\cos(3t)}_{x_p}.$$

$$\boxed{x(t) = x_H(t) + x_p(t)}$$

x_H c'est une equation homogène.

donc : $2k^2 + 3k + 5 = 0 \Rightarrow \delta = 3^2 - 4(2)(5) = 9 - 40 = -31 < 0$.

$k_{12} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{31}}{4} \Rightarrow k_{12} = -\dfrac{3}{4} \pm j\dfrac{\sqrt{31}}{4} = -\alpha \pm j\beta$

$$\boxed{x_H(t) = e^{-3/4 t}\left[A\cos\left(\frac{\sqrt{31}}{4}t + \varphi\right)\right]}$$

$x_p = C\cos(3t) + D\sin(3t)$. $\qquad \dot{x}_p(t) = -3C\sin(3t) + 3D\cos(3t)$.

$\ddot{x}_p(t) = \underbrace{-9C\cos(3t) - 9D\sin(3t)}_{x_p}$.

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{x}_p(t) = -9x_p}$$

On remplace dans x_H : $2(-9x_p) + 3\dot{x}_p + 5x_p = 7\sin(3t) + 4\cos(3t)$.

$\Rightarrow -13x_p + 3\dot{x}_p = 7\sin(3t) + 4\cos(3t)$.

$\Rightarrow -13C\cos(3t) - 13D\sin(3t) - 9C\sin(3t) + 9D\cos(3t) = 7\sin(3t) + 4\cos(3t)$.

$$\Rightarrow \begin{cases} -13\, C \cos(3t) + 9D \cos(3t) = 4 \cos(3t) \\ -13 D \sin(3t) - 9C \sin(3t) = 7 \sin(3t) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -13 C + 9D = 4 & \times 13 \\ -9C - 13D = 7 & \times 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -169 C + 117 D = 52 \\ -81 C - 117 D = 63 \end{cases}$$

$$\Rightarrow -250\, C = 115 \Rightarrow \boxed{C = -\frac{23}{50}}$$

$$9D = 4 - \frac{23 \times 13}{50} = \frac{200 - 299}{50} = -\frac{99}{50} \Rightarrow \boxed{D = \frac{-11}{50}}$$

$$\boxed{x_p(t) = -\frac{23}{50} \cos(3t) - \frac{11}{50} \sin(3t)}$$

$$\boxed{x(t) = e^{-3/4 t}\left[A \cos\left(\frac{\sqrt{31}}{4}\right)t + \varphi\right] - \frac{23}{50} \cos(3t) - \frac{11}{50} \sin(3t)}$$

Equation de Lagrange: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\theta}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$ $\quad L = T - U$

T: énergie cinétique.

U: énergie potentielle totale.

Exemple: $L = T - U = \frac{1}{2} m \ell^2 \dot\theta^2 - mg\ell(1 - \cos\theta)$.

E de Lg:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot\theta} &= \frac{2}{2} m \ell^2 \dot\theta = m\ell^2\dot\theta \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\theta}\right) &= m\ell^2 \ddot\theta \\ \frac{\partial L}{\partial \theta} &= -mg\ell \sin\theta \end{aligned}\right\} \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\theta}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow m\ell^2\ddot\theta + mg\ell \sin\theta = 0$$

faible oscillations: $\sin\theta \simeq \theta \quad \cos\theta \simeq 1$.

ELg $\Rightarrow \ddot\theta + \frac{g}{\ell}\theta = 0 \Rightarrow \boxed{g/\ell = \omega_0^2} \Rightarrow \ddot\theta + \omega_0^2 \theta = 0$.

ω_0: pulsation propre. $[s^{-2}]$ $\qquad \theta(t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi)$

$L \Rightarrow$ faible oscillations: $\sin\theta = 0 \qquad \cos\theta \simeq 1 - \theta^2/2$

$$L = \frac{1}{2} m \ell^2 \dot\theta^2 - mg\ell \frac{\theta^2}{2}.$$

Energie cinetique :

1) * Cas d'un point matériel : $T = \frac{1}{2} m v^2$. $T = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$.

2) * Cas d'un solide en translation : $T = \frac{1}{2} m v^2$.

3) * Cas d'un solide en rotation : $T = \frac{1}{2} J_\Delta \omega^2$ ($\omega^2 = \dot{\theta}^2$) vitesse angulaire

Solide	axe	J_Δ
Tige (G au milieu)		$\frac{ML^2}{12}$
Tige G extrimité		$\frac{ML^2}{3}$
Masse Ponctuelle		$m r^2$
Disque creux		MR^2
Disque plein		$\frac{1}{2} MR^2$

Solide	axe	J_Δ
Cylindre creux		MR^2
Cylindre plein		$\frac{1}{2} MR^2$
Sphère creuse		MR^2
Sphère pleine		$\frac{2}{5} MR^2$

Theorème de Hyghens : (Dans le cas ou l'axe ne passe pas par le centre de gravité)

$$J_0 = J_\Delta + M(OG)^2$$

OG : distance entre l'axe et centre gravité.

Energie poteriel :

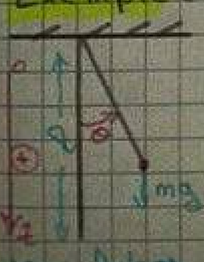
1) * Energie potentiel de pesanteur :

Repère vers le haut : $U_{pp} = + mgz + cste$.

Repère vers le bas : $U_{pp} = - mgz + cste$

} * le resultat dépends de (z) (le sens).

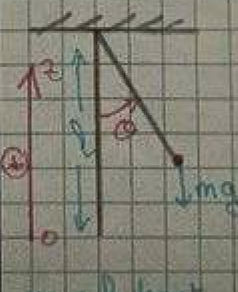
Exemple :



$U_{pp} = - mgz + cste$.

$z = + l\cos\theta$.

$$\boxed{U_{pp} = -mg\,l\cos\theta + c}$$



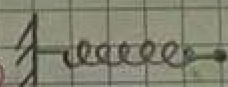
$U_{pp} = + mgz + cste$

$z = - l\cos\theta$.

$$\boxed{U_{pp} = -mg\,l\cos\theta + c}$$

2) * **Energie potentiel elastique :**

* **Ressort :** $U_{Pe} = \frac{1}{2} k x^2$.



* **Pendule de Torsion :** $E_{Pe} = \frac{1}{2} C \theta^2$.

1 ddl forcé :

$$x'' + \frac{\alpha}{A} x' + \frac{B}{A} x = \frac{f_0}{A} \cos \omega t$$

A : masse en générale
B : constante k
angle

$2\zeta = \frac{\alpha}{A}$

$\omega_0^2 = \frac{B}{A}$

La solution de l'équation
somme de solution homogène (sans 2nd membre = 1 ddl amorti)
et solution particulière
la solution homogène tend vers 0 rapidement
= régime transitoire
donc la solution de l'équa diff est une solution particulière (régime permanent)
sous forme :

$$X(t) = X_p = X_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

resolution
utilisant la notation complexe :

$$\begin{cases} x(t) = X_0 \cos(\omega t + \varphi) = X_0 e^{j\omega(t+\varphi)} \\ x'(t) = j\omega X_0 e^{j\omega t + \varphi} = j\omega X \\ x''(t) = -\omega^2 X \\ f = f_0 \cos \omega t = f_0 e^{j\omega t} \end{cases}$$

remplaçant dans équa diff on obtient

$$x\left(-\omega^2 + \frac{\alpha}{A} j\omega + \frac{B}{A}\right) = \frac{f_0}{A} e^{j\omega t}$$

$$X_0 = \frac{f_0 / A}{\left[(\omega_0^2 - \omega^2) + (2\zeta)^2\right]^{1/2}}$$

$$\varphi = -\operatorname{arc\,tg}\left(2\zeta\omega / \omega_0^2 - \omega^2\right)$$

• Montage 1 degree de liberté.) • Pour avoir un régime oscillatoire : $\delta < \delta_{critique}$

$K = 1 - \frac{F_1^2}{F_{min}^2}$; $a_1 = \frac{e_0}{1+K} \Rightarrow K = \frac{e_0}{a_1} - 1$. $a_1 = v_0$

e_0 : donné.

• F_1^2 à partir de graphe : $\left[F_2^2 = f(1/C_0)\right]$

$F_1 = \lim_{1/C_0 \to 0} F_2$ (Extrapolation avec l'axe des "y").

• "C" à partir de graphe : $C = \frac{P}{2F_1^2}$ / P : La Pente de Droite.

• "L" Conductance à partir de graphe : $\frac{1}{4\pi^2 F_1^2 C}$

D'APRÈS Le graphe pseudo-Périodique.

$$\boxed{\text{-DÉCRÉMENT} = \delta T_a = \frac{1}{n} \ln\left(\frac{V_c(t)}{V_c(t+nT_a)}\right)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\delta = \frac{D}{T_a}} = \frac{r}{2L} \Rightarrow \boxed{r = \delta 2L}$$ ← Résistance de générateur.

$$\delta_c = w_0 \Rightarrow w_0 = \frac{R_{T_c}}{2L} \Rightarrow \boxed{L = \frac{R_{T_c}}{2w_0}}$$ ← Conductance

$$w_0 = \sqrt{w_a^2 + \delta^2} \ / \ \omega_a = \frac{2\pi}{T_a}$$

$$w_0^2 = \frac{1}{LC} \Rightarrow \boxed{C = \frac{1}{\omega_0^2 L}}$$ ← Capacité du conductance

• Coeff de Qualité.

$$\frac{w_0}{2\delta} = Q = \frac{\pi}{D} = \frac{V_c(max)}{e_0} = \frac{f_r}{\Delta f} \ / \ \Delta f = \frac{2\delta}{2\pi}$$

• La bande passante = $\Delta\omega = 2\delta$

• Facteur d'amortissement = $\delta \ \boxed{\frac{R}{2L}}$

• Pulsation propre = $w_0 = \boxed{\frac{1}{\sqrt{LC}}}$

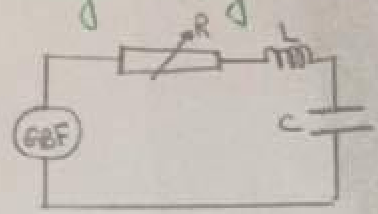
$\boxed{w = 2\pi f}$

$w_a = 2\pi f_a$

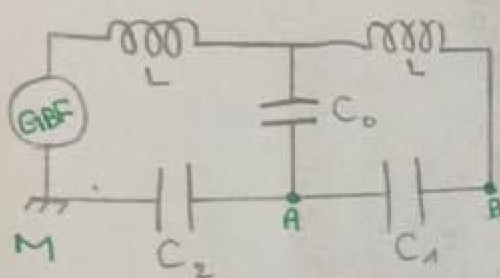
$w_0 = 2\pi f_0$

$w_r = 2\pi f_r$.

• Montage 1 degree de liberté :



• Montage deux degrée de liberté :



. Pour avoir un régime oscillatoire . $\delta < \delta_{critique}$

$\Rightarrow R_T < R_{T_c}$

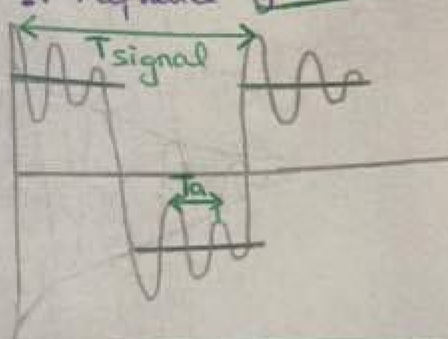
$\Rightarrow R_V + R_r < R_{T_c}$

$\boxed{\Rightarrow R_V < R_{T_c} - R_r}$

• Système Libre.
(1 et 2 degrées).

• signal $\boxed{\text{carré}}$

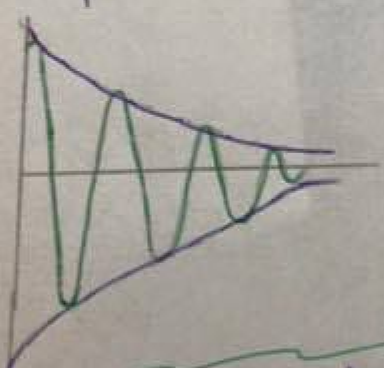
. Fréquence $\boxed{\text{faible}}$



System forcé : (1 2 degrée)

• signal sinusoidale.

• fréquence : variable.



• Montage 2 degrée :

Pour observer $V_1(t)$ et $V_2(t)$ il faut brancher M à la masse de l'oscillo et point A à la voie 2 on observe $V_1(t)$ + le point B à la voie 01 $[V_1(t) + V_2(t)]$, on inverse la voie 2 $[-V_2(t)]$ et on + les 2 voies. (mêm calibre). on observe $V_2(t)$.

Le coefficient de couplage (K).

$$K = \frac{C_0}{C_0 + C}, \quad K = \frac{F_2^2 - F_1^2}{F_2^2 + F_1^2} = \frac{\Omega_2^2 - \Omega_1^2}{\Omega_2^2 + \Omega_1^2}$$

f : Fréquence.

Ω : pulsation propre.

1 dl amorti :

$x'' + 2\delta x' + \omega_0^2 x = 0$

Solutions homogene sous forme $\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega_0^2 = 0$ (avec $\Delta' = \delta^2 - \omega_0^2$)

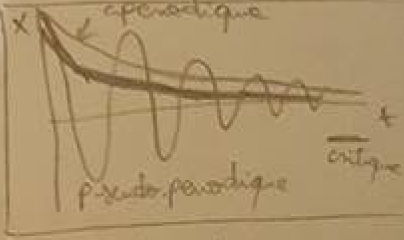
Si $\delta > \omega_0$ ⇒ mvt aperiodique

la solution generale sous forme :

$x(t) = c_1 e^{(-\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2})t} + c_2 e^{(-\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2})t}$

avec : $c_1 = \frac{-\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}}{2\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}}$, $c_2 = \frac{\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}}{2\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}}$

(obtenu par les conditions initiales)



Si $\delta = \omega_0$: mvt critique :

solution generale :

$x(t) = e^{-\delta t}(c_1 + c_2 t)$

on doit avoir apres utilisation des conditions initiales :

$x(t) = x_0 e^{-\delta t}(1 + \delta t)$

$\delta < \omega_0$: pseudo periodique

solution gle :

$x(t) = c\, e^{-\delta t} \cos(\omega_a t + \phi)$ $\omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$

avec : $C = \frac{\omega_0}{\omega_a} x_0$

$\phi = -\arctg\left(\frac{\delta}{\omega_a}\right)$

$x(t) = \frac{\omega_0}{\omega_a} x_0 e^{-\delta t}(\omega_a t + \phi)$

Energie cenetique

masse :

$Ec = \frac{1}{2} m \dot{\theta}^2$ $\quad V_m^2 = \dot{\theta}^2$

résumé

V.ON

solide (tige, cylindre, disque)

$Ec = \frac{1}{2} J_0 \dot{\theta}^2$

cylindre : $\begin{cases} MR^2 & \text{cylindre creux} \\ MR^2/2 & \text{cylindre plein} \end{cases}$

la tige : $\begin{cases} Ml^2/12 & \text{centre} \\ Ml^2/3 & \text{extrimité} \end{cases}$

disque : $\begin{cases} MR^2/2 & \text{centre} \\ MR^2 & \text{extremité} \end{cases}$

Energie potentiel

masse

$Ep = m g h$

$Ep_{ressort} = \frac{1}{2} K (l_0 + \Delta l)^2$

$L = Ec - Ep$

$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \rightarrow$ libre

$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} \rightarrow$ amorti

avec $D = \frac{1}{2} \alpha \dot{\theta}^2$

l'écriture final.

$\theta_1(t) = \theta_0 \cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}\right)t + \cos\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2}\right)t$

$\theta_2(t) = \theta_0 \sin\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}\right)t + \sin\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2}\right)t$

3ème cas :

$\theta_{10} = -\theta_{20} = \theta_0$

$\dot{\theta}_{10} = \dot{\theta}_{20} = 0.$

On a : $\phi_1 = \phi_2$

$A_{11} = 0,\ A_{12} = \theta_0$

$\theta_1(t) = \theta_0 \cos \omega_2 t$

$\theta_2(t) = -\theta_0 \cos \omega_2 (t)$

Les deux masses vibre dans le 2ème mode

Dans deux degré de liberté

1ère mode => le mode fondamental correspond à ω_1

2ème mode => harmonique ω_2.

Les oscillations

libre :

Équation mécanique

$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0$ (par l'analogie)

La solution :

$\theta(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$

θ_{max} → A

φ (déphasage)

$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ $\qquad f = \frac{1}{T}$

forcé :

$\ddot{\theta} + 2\delta\dot{\theta} + \omega_0^2 \theta = F(t)$ ← $F_0 \cos \omega t$

La solution :

$\theta_{général}(t) = \theta_h(t) + \theta_p(t)$

$\theta_h(t) \Rightarrow$ la solution de l'eq diff $= 0$.

$\ddot{\theta} + 2\delta\dot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0$

équation caractéristiques :

$\theta + 2\delta\theta + \omega_0^2 = 0$.

$D = (2\delta)^2 - 4(1)(\omega_0^2)$

$= 4\delta^2 - 4\omega_0^2$

$\sqrt{D} = 2\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$ -2- r_1? r_2?

$= (\dot{\theta}_{10} + \dot{\theta}_{20}) / 2\omega \sin\phi_1$

$A_{12} = (\dot{\theta}_{20} - \dot{\theta}_{10}) / 2\omega_2 \sin\phi_2$

On a 3 cas :

1) - lorsqu'on a : $x_{10} = x_{20}$ ($x_1 = x_2$)

On a : $\theta_{10} = \theta_{20}$, $\dot{\theta}_{10} = \dot{\theta}_{20}$

$\phi_1 = \phi_2 = 0$.

$A_{11} = \theta_{10}$, $A_{12} = \theta_{20}$.

alors :

$\theta_1(t) = \theta_{10} \cos \omega_1(t)$

et

$\theta_2(t) = \theta_{20} \cos \omega_2(t)$

2ème cas :

$\theta_{10} = \theta_0$, $\theta_{20} = 0$

on a $\phi_1 = \phi_2 = 0$

le cas de la symétrie

$A_{11} = A_{12} = \frac{\theta_0}{2}$

$\theta_1(t) = \frac{\theta_0}{2}$

$\theta_1(t) = \frac{\theta_0}{2} \cos(\omega(t)) + \frac{\theta_0}{2} \cos \omega_2(t)$

$\theta_2(t) = \frac{\theta_0}{2} \cos(\omega_1(t)) - \frac{\theta_0}{2} \cos \omega_2(t)$

-ω'-

bents :

ie

$) + \phi_2)$

$+ \phi_2)$

$\theta_p(t)$ celle correspond à la solution de l'éqt diff avec second membre

$$\theta_p(t) = A(\omega)\cos(\omega t + \phi(\omega))$$

$$A(\omega) = \frac{F_0 / \text{le coefficient de } \ddot{\theta}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2) + 4\delta^2\omega^2}}$$

Les solutions pour 2 degrés de liberté

Dans le cas général

il faut chercher des solutions de ce types

$$x_1 = A_1 \cos(\omega_1(t) + \phi_1) \quad \dots (1)$$

$$x_2 = A_2 \cos(\omega_2(t) + \phi_2) \quad \dots (2)$$

On injecte (1) et (2) ds les 2 éqt diff et on tire ω_1, ω_2.

la solution général est de la forme

$$\theta_1(t) = A_{11}\cos(\omega_1(t) + \phi_1) + A_{12}\cos(\omega_2(t) + \phi_2)$$

$$\theta_2(t) = A_{11}\cos(\omega_1(t) + \phi_1) - A_{12}\cos(\omega_2(t) + \phi_2)$$

avec : $A_{11} = (\theta_{10} + \theta_{20}) / 2\cos\phi_1$

$A_{12} = (\theta_{10} + \theta_{20}) / 2\cos\phi_2$

طرق لإيجاد م.ت للحركة

① طريقة نيوتن

$\sum \vec{F} = \vec{0}$ عند التوازن

$\sum \vec{F} = m\vec{\gamma}$ عند الحركة

② طريقة الطاقة

$$E_m = E_c + E_p$$

$\frac{dE_m}{dt}$ نشتق

من شروط الابتدائية نجد

$$-mg + K\Delta l = 0$$

$\frac{\partial E_p}{\partial x} = 0$ لأن

عند التوازن $x=0$

③ الطاقة الثابتة المختصرة

$$E_p = \frac{1}{2} K x^2$$

$$E_c = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$$

$$E_m = E_c + E_p$$

$$\frac{dE_m}{dt} = 0$$

④ طريقة لاغرانج

معادلات لاغرانج

يوجد 4 حالات

① اهتزاز حر

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

② اهتزاز حر متخامد (وجود مخمد)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}} = 0$$

$$D = \frac{1}{2} \alpha \dot{x}^2 \quad / \quad L = E_c - E_p$$

③ اهتزاز قسري

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = \cancel{M/\theta}\ F$$

④ اهتزاز قسري متخامد

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}} = F(t)$$

عندما تكون الحركة دائرية نستعمل θ (زاوية) عوضا x

ملاحظة

$$T_0 = K\Delta l \Rightarrow T = K(x + \Delta l)$$

$$P = mg \quad / \quad E_{pp} = -mgx$$

$$E_{pe} = \frac{1}{2} K (x + \Delta l)^2$$

مع الانسحابية $E_c = \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2$

$$E_p = E_{pp} + E_{pe}$$

phisique 03

المعادلات التفاضلية من الدرجة II :

1) متجانسة :

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx = 0$$

ندرس المعادلة المميزة $r^2 + ar + b = 0$

• لما $\Delta > 0$

$$x(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}$$

في هذه الحالة لا يوجد اهتزاز

• لما $\Delta = 0$

$$x(t) = e^{rt}(C_1 t + C_2)$$

في هذه الحالة لا يوجد اهتزاز الحركة متخامدة

• لما $\Delta < 0$

$$x(t) = C e^{\alpha t}\cos(\omega t + \varphi)$$

$$x(t) = e^{\alpha t}(C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t)$$

في هذه الحالة يوجد اهتزاز

2) غير متجانسة :

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx = f(t)$$

$$x(t) = x_G + x_p$$

حالة x_p

$$f(t) = e^{\alpha t}(A\cos\omega t + B\sin\omega t)$$

نميز ثلاث حالات

1) $\alpha \pm \omega i$ ليست حل للمعادلة المميزة

$$\Rightarrow x_p = e^{\alpha t}(A\cos\omega t + B\sin\omega t)$$

2) إذا كانت $\alpha \pm \omega i$ حل للمعادلة

$$\Rightarrow x_p = t e^{\alpha t}(A\cos\omega t + B\sin\omega t)$$

3) لما $\omega = 0$ ، α حل للمعادلة

$$\Rightarrow x_p = t e^{\alpha t} A$$