Université A/Mira de Bejaia
Faculté de Technologie
Département de Génie électrique
L2 (ELT-ELM)

Année universitaire : 2022/2023
Semestre : 03 (19/01/2023)
Durée : 01h30

Examen Normal de Physique 03

Exercice 1 (03,50 points)

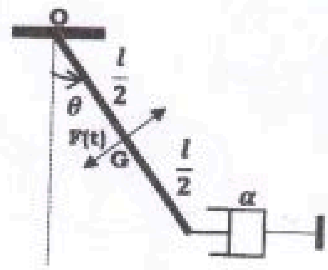
Soit un système libre amorti dont l'équation du mouvement est donnée par :

$$3\ddot{x} + 30\dot{x} + 75x = 0$$

1. Déterminer la nature du mouvement.

2. Trouver la solution finale de l'équation du mouvement, en prenant comme conditions initiales $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 10m/s$.

Exercice 2 (10 points)



Un système mécanique est constitué d'une barre de masse M et de longueur l, oscillant autour du point fixe **O.**

Le centre de la tige est soumis à une force sinusoïdale $F(t) = F_0 cos\Omega t$.

1. Trouver l'énergie potentielle **U**, puis vérifier que $\theta = 0$ est une position d'équilibre stable.

2. Trouver l'énergie cinétique **T** et la fonction de dissipation **D**.

3. En considérant les oscillations de faibles amplitudes ($sin\theta \approx \theta$, $1 - cos\theta \approx \frac{\theta^2}{2}$), déterminer l'équation du mouvement en fonction de θ.

4. Pour $\lambda < \omega_0$, écrire la solution transitoire $\theta_T(t)$ et tracer cette solution.

4.1 Le système oscille mais l'amplitude diminue $\frac{1}{4}$ de sa valeur après **4** oscillations. Trouver le décrément logarithmique δ .

5. Trouver l'amplitude A et la phase φ de la solution permanente.

6. Trouver l'expression de l'impédance mécanique $\underline{Z}_m$.

On donne : $I/_G = \frac{1}{12}Ml^2$, **G** est le centre de gravité de la barre.

Exercice 3 (06,50 points)

Les équations de mouvements d'un système à deux degrés de liberté sont les suivantes :

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

1. Trouver le Lagrangien $\mathcal{L}$.
2. Trouver les deux pulsations propres.
3. Trouver les modes d'oscillation.

(1) Corrigé.

Exo 1 (03,50)

- L'équation du mvt : $3\ddot{x} + 30\dot{x} + 75x = 0$

$\Rightarrow \ddot{x} + 10\dot{x} + 25x = 0$ (0,5)

$\Leftrightarrow \ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ (0,5)

avec : $\begin{cases} 2\lambda = 10 \Rightarrow \lambda = 5\,s^{-1} \\ \omega_0^2 = 25 \Rightarrow \omega_0 = 5\,rad/s \end{cases}$ (0,5)

La nature du mvt : $\lambda^2 - \omega_0^2 = 25 - 25 = 0$ (0,5) et critique (0,5)

2. La solution de l'équation du mvt :

$x(t) = (A_1 + A_2 t)e^{-\lambda t} = (A_1 + A_2 t)e^{-5t}$ (0,25)

$\dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt} = A_2 e^{-5t} - 5(A_1 + A_2 t)e^{-5t}$

$\begin{cases} x(0) = A_1 = 0 & (0{,}25) \\ \dot{x}(0) = A_2 = 10\,m/s & (0{,}25) \end{cases}$

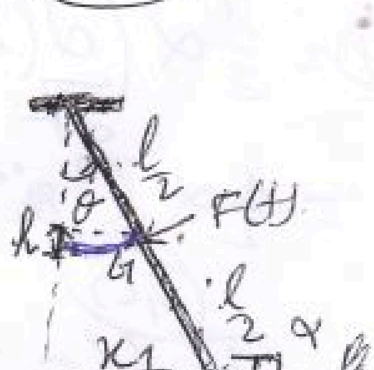
d'où : $x(t) = 10t\,e^{-5t}$ (0,25)

Exo 2 (10)

- Energie potentielle U (1)

$U = mgh \; ; \; h = \frac{l}{2}(1-\cos\theta)$

$\Rightarrow U = mg\frac{l}{2}(1-\cos\theta)$



- positions d'équilibre :

$$\frac{\partial U}{\partial \theta} = mg\frac{l}{2}\sin\theta = 0 \Rightarrow \sin\theta = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \theta = 0 \\ \vee \\ \theta = \pi \end{cases}$$ 0,5 2

- position d'equilibre stable ?

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} = mg\frac{l}{2}\cos\theta$$ 0,5

$$\left.\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}\right|_{\theta=0} = mg\frac{l}{2} > 0 \Rightarrow \theta = 0$$ est une position d'equilibre stable.

-1) Energie cinetique T :

$$T = T_M = \frac{1}{2} I_{/0} \dot{\theta}^2 \; ; \; I_{/0} = I_{/G} + M\left(\frac{l}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{6} M l^2 \dot{\theta}^2 .$$ 1

$$; \quad = \frac{1}{12} M l^2 + M\frac{l^2}{4}$$

$$; \Rightarrow I_{/0} = \frac{1}{3} M l^2$$

2) Fonction de dissipation D.

$$D = \frac{1}{2}\alpha V^2 = \frac{1}{2}\alpha\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 ; \quad x_1 = l\sin\theta$$

$$\Rightarrow D = \frac{1}{2}\alpha\left(\frac{d(l\theta)}{dt}\right)^2 .$$

; pour $\theta << 1$
$\sin\theta \simeq \theta$

$$\Rightarrow D = \frac{1}{2}\alpha l^2 \dot{\theta}^2$$ 0,5

$$; \Rightarrow x_1 = l\theta$$

0,25

$$- L = T - U = \frac{1}{6} M l^2 \dot{\theta}^2 - mg\frac{l}{2}(1-\cos\theta)$$

pour $\theta << 1 \Rightarrow 1 - \cos\theta \simeq \frac{\theta^2}{2}$

$$\Rightarrow L = \frac{1}{6} M l^2 \dot{\theta}^2 - M g \frac{l}{4} \theta^2$$

3/ - Equation du mvt : $\boxed{3}$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\theta}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = -\frac{\partial D}{\partial \dot\theta} + \mathcal{M}(F(t))$$ 0,25

$$\Rightarrow \frac{1}{3} M l^2 \ddot\theta + \frac{Mgl}{2}\theta = -\alpha l^2 \dot\theta + F(t)\cdot l/2$$

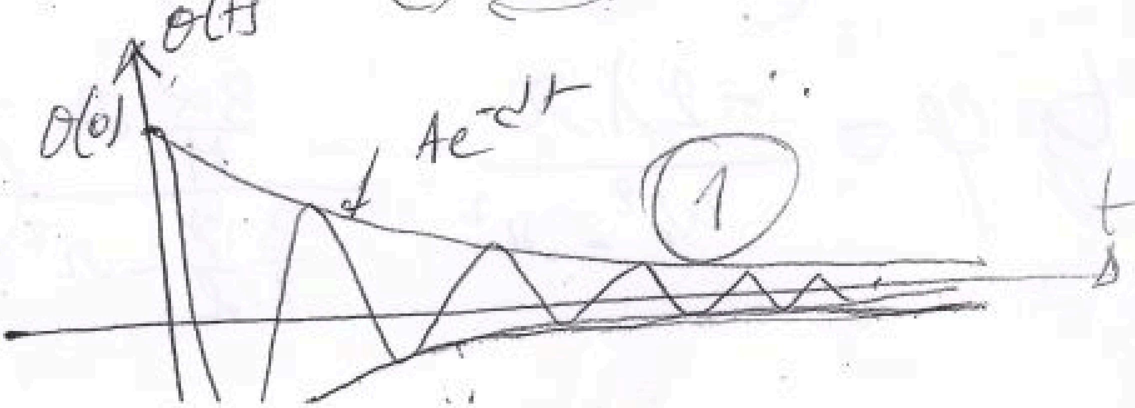
$$\Rightarrow \ddot\theta + \frac{3\alpha}{M}\dot\theta + \frac{3}{2}\frac{g}{l}\theta = \frac{F(t)}{\frac{2Ml}{3}}$$ 0,5

$$\Leftrightarrow \ddot\theta + 2\lambda\dot\theta + \omega_0^2\theta = \frac{F(t)}{a}$$

avec : $\begin{cases} 2\lambda = \frac{3\alpha}{M} \Rightarrow \lambda = \frac{3\alpha}{2M}. \\ \omega_0^2 = \frac{3}{2}\frac{g}{l} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{3}{2}\frac{g}{l}} \\ a = \frac{2Ml}{3} \end{cases}$ 0,5

4/ $\theta(t) = A e^{-\lambda t}\cos(\omega_a t + \varphi)$

$$\omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} = \sqrt{\left(\frac{3\alpha}{2M}\right)^2 - \frac{3}{2}\frac{g}{l}}.$$ 0,5



4

4-1/ 4 oscillations $= 4T$

$$\delta = \frac{1}{n} \ln\left(\frac{\theta(t)}{\theta(t+nT)}\right)$$

pour $= n = 4$

$$\delta = \frac{1}{4} \ln\left(\frac{\theta(t)}{\theta(t+4T)}\right)$$

1

et on a : $\theta(t+4T) = \frac{1}{4}\theta(t)$

$$\Rightarrow \delta = \frac{1}{4} \ln\left(\frac{\cancel{\theta(t)}}{\frac{1}{4}\cancel{\theta(t)}}\right) \Rightarrow \boxed{\delta = \frac{\ln(4)}{4}}$$

5-

$$A = \frac{F_0/a}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\lambda^2\Omega^2}}$$

0,75

$$\Rightarrow A = \frac{\frac{2F_0}{2Ml}}{\sqrt{\left(\frac{3}{2}\frac{g}{l} - \Omega^2\right)^2 + 4\left(\frac{3\alpha}{2M}\right)^2\Omega^2}}$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{-2\lambda\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2} = \frac{-\frac{3\alpha}{M}\Omega}{\frac{3}{2}\frac{g}{l} - \Omega^2}$$

0,75

La Solution permanente est :

$$\theta(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$$

6- Impédance mécanique :

$$\underline{Z_m} = \frac{F(t)}{\underline{V(t)}} \quad \text{où} : \underline{V(t)} = \dot{\underline{\theta}}(t) \cdot \frac{l}{2}$$

on a : $\ddot{\theta} + \frac{3\alpha}{M}\dot{\theta} + \frac{3}{2}\frac{g}{l}\theta = \frac{F(t)}{\frac{2Ml}{3}}$

on a aussi : $\ddot{\underline{\theta}} = \frac{d\dot{\theta}}{dt} = j\omega\,\dot{\underline{\theta}}$

et $\underline{\theta} = \int \dot{\theta}\,dt = \frac{1}{j\omega}\dot{\underline{\theta}}$

$$\ddot{\underline{\theta}} + \frac{3\alpha}{M}\dot{\underline{\theta}} + \frac{3}{2}\frac{g}{l}\underline{\theta} = \frac{F(t)}{\frac{2Ml}{3}}$$

$$\Rightarrow j\omega\,\dot{\underline{\theta}} + \frac{3\alpha}{M}\dot{\underline{\theta}} + \frac{3}{2j\omega}\frac{g}{l}\dot{\underline{\theta}} = \frac{F(t)}{\frac{2Ml}{3}}$$

$$\Rightarrow \left(4\alpha + j\left(\frac{4M}{3}\omega - \frac{2M}{\omega}\frac{g}{l}\right)\right) = \frac{F(t)}{\underline{V(t)}} = \underline{Z_m}$$

$$\Rightarrow \boxed{\underline{Z_m} = 4\alpha + j\left(\frac{4M}{3}\omega - \frac{2M}{\omega}\cdot\frac{g}{l}\right)} \quad 1$$

Exo3 06,50 6

1,50

1- $L = T - U = \frac{1}{2} m \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}_2^2 - \left(\frac{1}{2} K x_1^2 + \frac{1}{2} K x_2^2 + \frac{1}{2} K (x_1 - x_2)^2 \right)$

2. Les deux pulsations propres

on a : $\begin{cases} m \ddot{x}_1 + 2K x_1 - K x_2 = 0 \\ m \ddot{x}_2 + 2K x_2 - K x_1 = 0 \end{cases}$ — I

0,5

La solution de I ~~est~~ : $\begin{cases} x_1(t) = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) \\ x_2(t) = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2) \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} \underline{x_1}(t) = A_1 e^{j(\omega t + \varphi_1)} \\ \underline{x_2}(t) = A_2 e^{j(\omega t + \varphi_2)} \end{cases}$ 0,5

$\begin{cases} \ddot{\underline{x}}_1(t) = -\omega^2 \underline{x_1}(t) \\ \ddot{\underline{x}}_2(t) = -\omega^2 \underline{x_2}(t) \end{cases}$ 0,5

I $\Rightarrow \begin{cases} (-m\omega^2 + 2K)\, \underline{x_1}(t) - K \underline{x_2}(t) = 0 \\ -K \underline{x_1}(t) + (-m\omega^2 + 2K)\, \underline{x_2}(t) = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} -m\omega^2 + 2K & -K \\ -K & -m\omega^2 + 2K \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{x_1}(t) \\ \underline{x_2}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

— II

(7)

pour que (II) soit vrai sans que $x_1(t)$ et $x_2(t)$ soient tous les deux nuls, il faut que:

$$D(\omega) = \begin{vmatrix} -m\omega^2+2K & -K \\ -K & -m\omega^2+2K \end{vmatrix} = 0$$

0,5

$$\Rightarrow (-m\omega^2+2K)^2 - K^2 = 0$$

$$\Rightarrow (-m\omega^2+2K-K)(-m\omega^2+2K+K) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -m\omega_1^2+K = 0 \\ -m\omega_2^2+3K = 0 \end{cases}$$

0,5

$$\Rightarrow \begin{cases} \omega_1 = \sqrt{\dfrac{K}{m}} & \text{la fondamentale} \\ \omega_2 = \sqrt{\dfrac{3K}{m}} & \text{l'harmonique} \end{cases}$$

0,5

3 - Les modes d'oscillation:

1er mode: $\omega = \omega_1$

$$(II) \Rightarrow \begin{cases} (-m\omega_1^2+2K)\,x_1(t) - K\,x_2(t) = 0 \\ -K\,x_1(t) + (-m\omega_1^2+2K)\,x_2(t) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{x_1(t)}{x_2(t)} = \frac{A_{11}}{A_{21}} = 1$$

0,5

donc : les deux masses vibrent en phase. (8)

La solution : $\begin{cases} x_1(t) = A_{11} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \\ x_2(t) = A_{21} \cos(\omega_1 t + \varphi_2) \end{cases}$ 0,5

$\Rightarrow \begin{cases} x_1(t) = A_{11} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \\ x_2(t) = A_{11} \cos(\omega_1 t + \varphi_2) \end{cases}$

2ème mode d'oscillation : $\omega = \omega_2$

$(II) \Rightarrow \begin{cases} (-m\omega_2^2 + 2K)\, x_1(t) - K\, x_1(t) = 0 \\ -K\, x_1(t) + (-m\omega_2^2 + 2K)\, x_2(t) = 0 \end{cases}$

0,5 $\Rightarrow \dfrac{x_1(t)}{x_2(t)} = -1 = \dfrac{A_{12}}{A_{22}}$ (les deux masses vibrent en opposition de phase)

La solution : $\begin{cases} x_1(t) = A_{12} \cos(\omega_2 t + \varphi_1) \\ x_2(t) = A_{22} \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \end{cases}$ 0,5

$\Rightarrow \begin{cases} x_1(t) = -A_{22} \cos(\omega_2 t + \varphi_1) \\ x_2(t) = A_{22} \cos(\omega_2 t + \varphi_1) \end{cases}$

3ème mode d'oscillation : La superposition de deux modes précédents :

1 $\begin{cases} x_1(t) = A_{11} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) - A_{22} \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \\ x_2(t) = A_{11} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_{22} \cos(\omega_2 t + \varphi_1) \end{cases}$