Solution TD 1 : Rappels mathématiques

1.1. On considère deux vecteurs :

$$\vec{v}_1 = 6\vec{i} + 8\vec{j} - 10\vec{k}$$
$$\vec{v}_2 = -2\vec{i} + 4\vec{j} + 12\vec{k}$$

Calculer:
- leurs longueurs (modules)
- leur produit scalaire
- leur angle
- les cosinus directeurs de leurs vecteurs unitaires
- le produit vectoriel $\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$

1- les longueurs (modules) des vecteurs $\vec{v}_1$ **et** $\vec{v}_2$

$$\left\|\vec{v}_1\right\| = \sqrt{6^2 + 8^2 + (-10)^2} = 14{,}14$$

$$\left\|\vec{v}_2\right\| = \sqrt{(-2)^2 + 4^2 + 12^2} = 12{,}8$$

2- le produit scalaire des vecteurs $\vec{v}_1$ *et* $\vec{v}_2$

$$\vec{v}_1 . \vec{v}_2 = 6.(-2) + 8.4 + (-10).12 = -100$$

3- l'angle entre les vecteurs $\vec{v}_1$ **et** $\vec{v}_2$
Nous avons :

$$\vec{v}_1 . \vec{v}_2 = \left\|\vec{v}_1\right\| \left\|\vec{v}_2\right\| \cos\left(\vec{v}_1, \vec{v}_2\right)$$

Donc :

$$\cos\left(\vec{v}_1, \vec{v}_2\right) = \frac{\vec{v}_1 . \vec{v}_2}{\left\|\vec{v}_1\right\| \left\|\vec{v}_2\right\|} = \frac{-100}{14.14x12.8} = -0.55$$

D'où, l'angle entre les vecteurs $\vec{v}_1$ *et* $\vec{v}_2$ est :

$$\left(\vec{v}_1, \vec{v}_2\right) = 123.54°$$

4- les cosinus directeurs de leurs vecteurs unitaires

- le vecteur unitaire du vecteur $\vec{v}_1$ est :

$$\vec{u}_1 = \frac{\vec{v}_1}{\left\|\vec{v}_1\right\|} = \frac{6\vec{i} + 8\vec{j} - 10\vec{k}}{14.14} = 0,42\vec{i} + 0.57\vec{j} - 0.71\vec{k}$$

D'où, les cosinus directeurs du vecteur unitaire de $\vec{v}_1$ est :

$$\vec{u}_1\,(0,42,\ 0.57,\ -0.71)$$

- le vecteur unitaire du vecteur $\vec{v}_2$ est :

$$\vec{u}_2 = \frac{\vec{v}2}{\left\|\vec{v}2\right\|} = \frac{-2\vec{i} + 4\vec{j} + 12\vec{k}}{12.8} = -0,16\vec{i} + 0.31\vec{j} + 0.94\vec{k}$$

les cosinus directeurs du vecteur unitaire de $\vec{v}_2$ est :

$$\vec{u}_2\,(-0,16,\ 0.31,\ 0.94)$$

5- le produit vectoriel $\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$

$$\begin{aligned} \vec{V}_1 &= 6\vec{i} + 8\vec{j} - 10\vec{k} \\ \vec{V}_2 &= -2\vec{i} + 4\vec{j} + 12\vec{k} \end{aligned}$$

$$\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 6 & +8 & -10 \\ -2 & 4 & 12 \end{vmatrix}$$

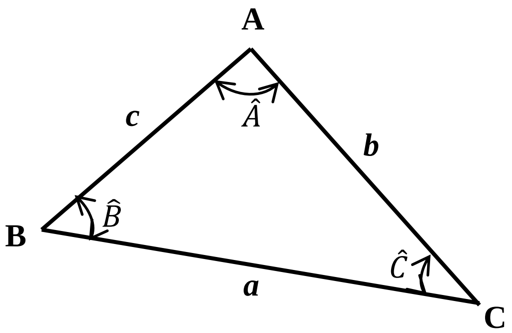
$$\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \left(8x12 - (-10)x4\right)\vec{i} - \left((6)x12 - (-10)x(-2)\right)\vec{j} + \left((6)x(4) - (8)x(-2)\right)\vec{k}$$

D'où, le produit vectoriel $\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$, s'écrit :

$$\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = 136\vec{i} - 52\vec{j} + 40\vec{k}$$

1.2. Pour le triangle ABC les longueurs de ces cotés sont ***a, b*** et ***c*** et leurs angles $\hat{A}\,,\hat{B}\ et\ \hat{C}$ (figure 1). Démontrer le théorème d'Al-KACHI suivant :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2b \times c \cos\ (\hat{A})$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2a \times c \cos\ (\hat{B})$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2a \times b \cos\ (\hat{C})$$



Le théorème d'Al Kashi peut
Nous avons BC = a, AC = b et AB = c
Nous pouvons écrire le carré scalaire suivant :

$$a^2 = BC^2 = \overrightarrow{BC}^2$$

D'après la relation de Chasles, on écrit :

$$\overrightarrow{BC}^2 = \left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right)^2 = \overrightarrow{AC}^2 - 2\,\overrightarrow{AC}\,.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}^2$$
$$a^2 = b^2 - 2\,\overrightarrow{AC}\,.\overrightarrow{AB} + c^2$$

Or, le produit scalaire :
$\overrightarrow{AC}\,.\overrightarrow{AB} = AC\ \times AB\cos(\hat{A}) = b\ \times c\cos(\hat{A})$
D'où :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b \times c\cos(\hat{A})$$

Ce qui a été fait avec a peut être reproduit avec b et c. On en déduit alors les formules demandées. De la même manière pour les autres cotés, ce qui a été fait avec a peut être reproduit avec b et c. On en déduit alors les formules demandées.

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2a \times c \cos\ (\hat{B})$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2a \times b \cos\ (\hat{C})$$

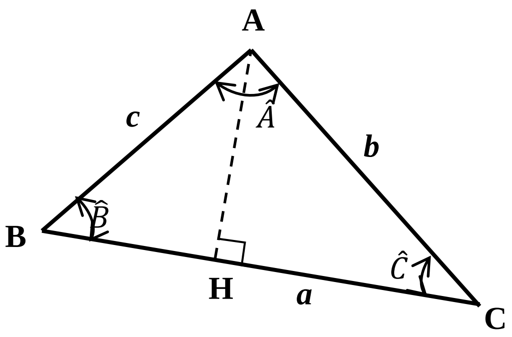
Le théorème d'Al Kachi est aussi appelé théorème de Pythagore généralisé. En effet, si l'angle $\hat{A}$ est droit, alors la première formule devient :

$$a^2 = b^2 + c^2$$

1.3. Dans le triangle ABC, on appelle H le pied de la hauteur issue du sommet A et S l'aire du triangle. Démontrer que :

$$\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{sin}(\hat{\mathbf{A}})} = \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{sin}(\hat{\mathbf{B}})} = \frac{\mathbf{c}}{\mathbf{sin}(\hat{\mathbf{C}})}$$

Dans le triangle ABC, on appelle H le pied de la hauteur issue du sommet A et S l'aire du triangle.



Nous avons l'aire du triangle ABC :

$$S = \frac{1}{2} \times base \ \times hauteur = \frac{1}{2} \times BC \ \times AH = \frac{1}{2} \times a \times c \times \sin(\hat{B})$$

En procédant de même en B et C, on établit alors la triple égalité :

$$S = \frac{1}{2} \times b \times c \times \sin(\hat{A}) = \frac{1}{2} \times a \times c \times \sin(\hat{B}) = \frac{1}{2} \times a \times b \times \sin(\hat{C})$$

En divisant le produit (a x b x c) par les quatre membres de cette triple égalité, il vient :

$$\frac{\mathbf{a \times b \times c}}{\mathbf{S}} = \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{sin}(\hat{\mathbf{A}})} = \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{sin}(\hat{\mathbf{B}})} = \frac{\mathbf{c}}{\mathbf{sin}(\hat{\mathbf{C}})}$$

C'est cela que l'on appelle la loi des sinus ou encore la formule des sinus.

Où bien sous forme vectoriel :

$$\frac{\left\|\overrightarrow{\mathbf{BC}}\right\|}{\mathbf{sin(\hat{A})}} = \frac{\left\|\overrightarrow{\mathbf{AC}}\right\|}{\mathbf{sin(\hat{B})}} = \frac{\left\|\overrightarrow{\mathbf{AB}}\right\|}{\mathbf{sin(\hat{C})}}$$