TD 4

Exercice 1 :

1. Montrer que les relations suivantes sont vérifiées :

$$\bar{A}B + A\bar{B} = (A + B)\,(\bar{A} + \bar{B})$$

$$AB + BC + AC = (A + B)\,(B + C)\,(A + C)$$

2. Démontrer les égalités suivantes en utilisant les propriétés de l'algèbre de Boole :

$$AB + A(B + C) + B(B + C) = B + AC$$

$$(A\bar{B}(C + BD) + \bar{A}\,\bar{B})C = \bar{B}\,C$$

$$\overline{(AB + AC)} + \bar{A}\bar{B}C = \bar{A} + \bar{B}\bar{C}$$

3. Déterminer le complément ($\bar{F}$) des fonctions suivantes :

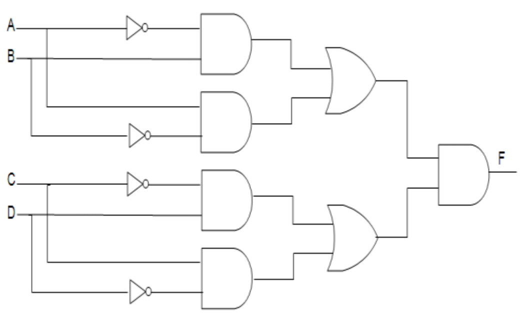
$F1 = A + \bar{B}C$ $\qquad$ $F2 = \bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}BC + ABC$

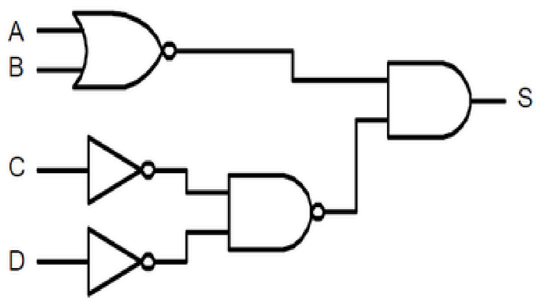
$F3 = (\bar{A} + B + \bar{C})(\bar{A} + B + C)(A + B + C)$

$F4 = (\bar{A} + \bar{B} + \bar{C})(\bar{A} + B + C) + ABC$

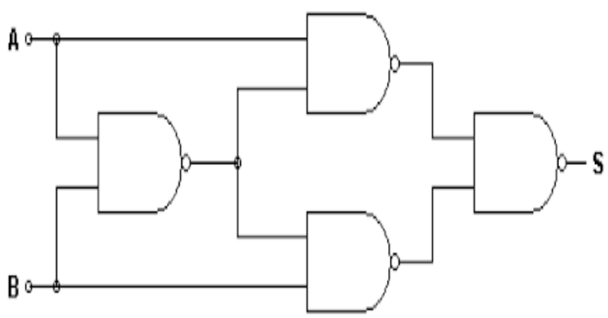
Exercice 2 :

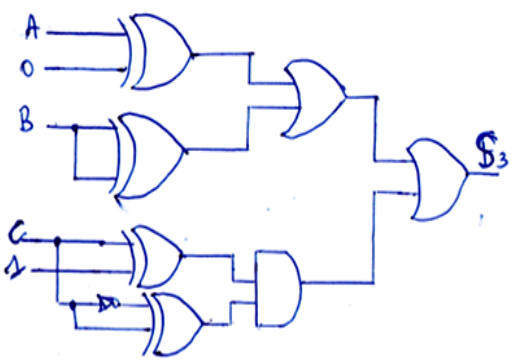
1. Tracer le logigramme de $F1(A, B, C) = (A + B)(\bar{A} + B + C)$
2. Déterminer les équations des circuits (Ecrire la fonction de sortie F et de S) :





3. Déterminer les équations des circuits (S2 et S3) et dresser ses tables de vérités :





Exercice 3 :

1. Simplifier algébriquement les équations suivantes :

$T1(X,Y,Z) = X + XY\overline{Z} + \overline{X}Y\overline{Z} + \overline{X}YZ$ $T2(X,Y,Z) = \overline{X}Y\overline{Z} + XY\overline{Z} + XYZ$

$T3(X,Y,Z) = XYZ + Z(X\overline{Y} + \overline{X}Y)$ $T4(X,Y,Z,W) = YW + ZW + \overline{Z}W + \overline{X}Y\overline{Z}\overline{W} + XY\overline{Z}$

$T5(X,Y,Z) = (\overline{X} + \overline{Y} + \overline{Z})(\overline{X} + Y + Z)(X + Y + Z)$ $T6(X,Y,Z,W) = (\overline{X} + Y)(X + Y + W)\overline{W}$

$T7(A,B,C) = \overline{A}BC + AC + A\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}$ $T9\ (A,B,C) = ABC + A\overline{B}C + AB\overline{C}$

$T8(A,B,C) = (A + B)(A + C) + (B + A)(B + C) + (C + A)(C + B)$

$T10(A,B,C) = AB + C + \overline{C}\,(\overline{A} + \overline{B})$ $T11(A,B) = (A + \overline{B})(\overline{A} + B)(\overline{A} + \overline{B})$

2. Dresser les tables de vérité pour les deux fonctions T7 et T8.

3. Trouver les deux formes canoniques de T7.

Exercice 4 :

a) On considère les fonctions booléennes suivantes :

$G(A,B,C) = AB + C$ $H(A,B,C) = A\ (B + \bar{C})$

Exprimer les fonctions G et H comme des sommes des Mintermes et des produits des Maxtermes.

b) Trouver l'autre forme pour les fonctions booléennes suivantes :

F1 (A,B,C) = $\sum$ (0, 2, 4,7)

F2 (A,B,C,D) = $\sum$ (0, 2, 6, 10, 11, 14) F3 (A,B,C,D) = $\prod$ (0, 3, 5, 6)

Exercice 5 : Considérant les fonctions booléennes données par la table de vérité ci-dessous :

X	Y	Z	F1	F2
0	0	0	1	1
0	0	1	0	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	0	0
1	1	0	1	1
1	1	1	0	0

1. Trouver les deux formes canoniques de F1 et de F2.
2. Trouver les deux formes canoniques de $\overline{F1}$ et de $\overline{F2}$.
3. Des résultats obtenus en 1 et 2 ; dites comment peut-on déduire les formes canoniques du complément d'une fonction.
4. Dessiner le logigramme de F1 et de F2.
5. Simplifier les deux expressions de F1 et de F2 en utilisant les règles de l'algèbre de Boole.
6. Tracer le nouveau logigramme de F1 et de F2 (avec le minimum de portes logiques).

Corrigé de TD4

Exercice 1 :

1. Montrer que les relations suivantes sont vérifiées : (En utilise la table de vérité)

$$\bar{A}B + A\bar{B} = (A + B)(\bar{A} + \bar{B})$$

$$F1 = \bar{A}B + A\bar{B} \text{ et } F2 = (A + B)(\bar{A} + \bar{B})$$

A	B	$\bar{A}$	$\bar{B}$	$\bar{A}B$	$A\bar{B}$	$F1$	$A+B$	$\bar{A}+\bar{B}$	$F2$	$F1 = F2$
0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	1
0	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1

Comme les colonnes de $F1$ et $F2$ sont identiques alors la relation est vérifiée.

La même chose pour : $AB + BC + AC = (A + B)(B + C)(A + C)$

2. Démontrer les égalités suivantes en utilisant les propriétés de l'algèbre de Boole :

$$AB + A(B+C) + B(B+C)? = B + AC$$
$$AB + A(B+C) + B(B+C) = AB + AB + AC + BB + BC$$
$$= AB + AC + B + BC$$
$$= B(A + 1 + C) + AC$$
$$= B + AC \text{ (cqfd)}$$
$$(A\bar{B}(C + BD) + \bar{A}\bar{B})C? = \bar{B}C$$
$$(A\bar{B}(C + BD) + \bar{A}\bar{B})C = (A\bar{B}C + A\bar{B}BD + \bar{A}\bar{B})C$$
$$= (A\bar{B}C + \bar{A}\bar{B})C$$
$$= A\bar{B}C + \bar{A}\bar{B}C$$
$$= (A + \bar{A})\bar{B}C$$
$$= \bar{B}C \text{ (cqfd)}$$
$$\overline{(AB + AC)} + \bar{A}\bar{B}C = \overline{AB}.\overline{AC} + \bar{A}\bar{B}C$$
$$= (\bar{A} + \bar{B})(\bar{A} + \bar{C}) + \bar{A}\bar{B}C$$
$$= \bar{A} + \bar{A}\bar{C} + \bar{A}\bar{B} + \bar{B}\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C$$
$$= \bar{A}(1 + \bar{C} + \bar{B} + \bar{B}C) + \bar{B}\bar{C} = \bar{A} + \bar{B}\bar{C} \text{ (cqfd)}$$

3. Déterminer le complément ($\bar{F}$) des fonctions suivantes :

$$F1 = A + \bar{B}C$$
$$\overline{F1} = \overline{A + \bar{B}C}$$
$$= \bar{A}.\overline{\bar{B}C}$$
$$= \bar{A}(B + \bar{C})$$

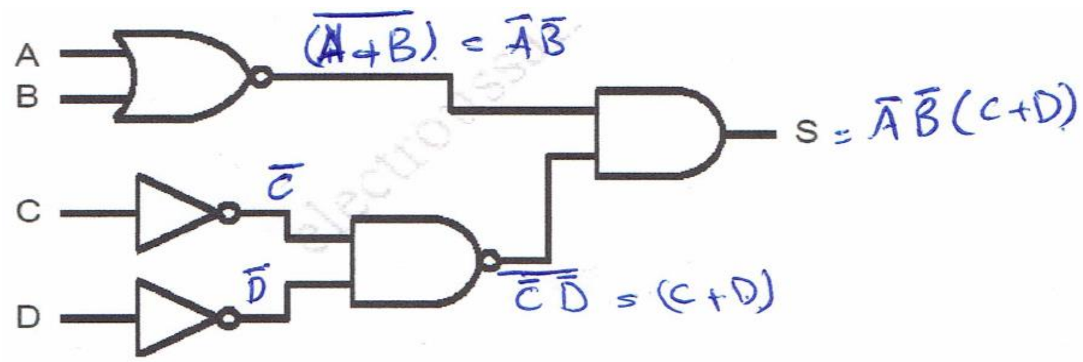
$$\overline{F2} = \overline{\bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}BC + ABC}$$
$$= \overline{\bar{A}\bar{B}\bar{C}}.\overline{\bar{A}BC}.\overline{ABC}$$
$$= (A + B + C)(A + \bar{B} + \bar{C})(\bar{A} + \bar{B} + \bar{C})$$

$$\overline{F3} = \overline{(\bar{A} + \bar{B} + \bar{C})(\bar{A} + B + C) + ABC}$$
$$= ((\overline{\bar{A} + \bar{B} + \bar{C}}) + (\overline{\bar{A} + B + C})).\overline{ABC}$$
$$= (ABC + A\bar{B}\bar{C}).(\bar{A} + \bar{B} + \bar{C})$$

Exercice 2 :

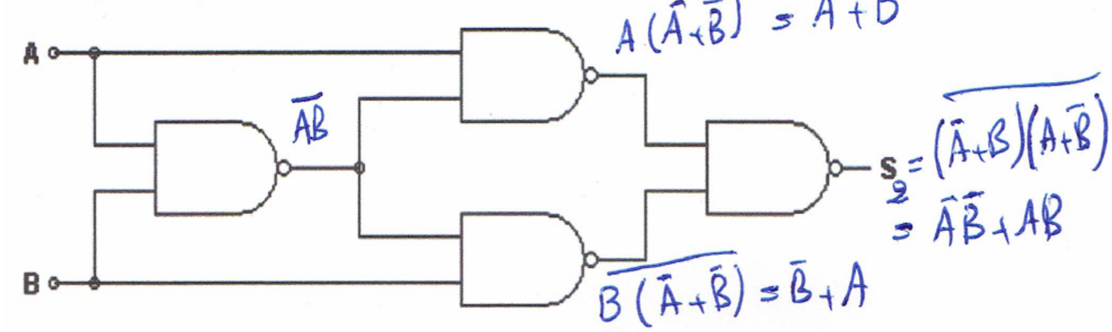
1. Tracer le logigramme de $F1(A, B, C) = (A + B)(\bar{A} + B + C)$
2. Déterminer les équations des circuits (Ecrire la fonction de sortie F et de S) :

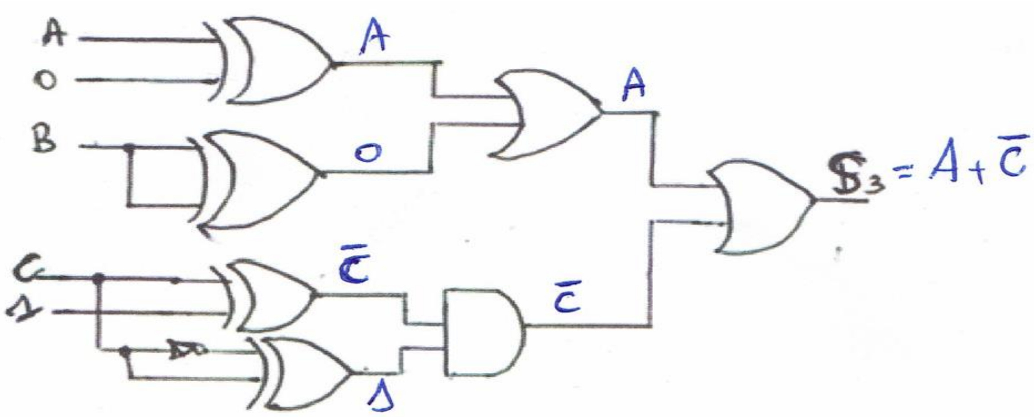
$$F(A, B, C, D) = (\bar{A}B + A\bar{B}).(\bar{C}D + C\bar{D})$$



3. Déterminer les équations des circuits (S2 et S3) et dresser ses tables de vérités :

Mêmes questions pour les circuits suivants :





A	B	S2
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

A	B	C	S3
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Exercice 3 :

1. Simplifier algébriquement les équations suivantes :

$$T1(X,Y,Z) = X + XY\bar{Z} + \bar{X}Y\bar{Z} + \bar{X}YZ$$

$$= x(\underbrace{\cancel{1 + y\bar{z}}}_{1}) + \bar{x}y(\underbrace{\cancel{\bar{z} + z}}_{1})$$

$$= x + \bar{x}y$$

$$T_1(x,y,z) = x + y$$

$$\rightarrow T_2(x,y,z) = \bar{x}y\bar{z} + xy\bar{z} + xyz$$

$$= \bar{x}y\bar{z} + xy(\cancel{\bar{z}+z}) \rightarrow 1$$

$$= \bar{x}y\bar{z} + xy$$

$$= y(x + \bar{x}\bar{z})$$

$$\boxed{T_2(x,y,z) = y(x + \bar{z})}$$

$$\rightarrow T_3(x,y,z,w) = yw + zw + \bar{z}w + \bar{x}y\bar{z}\bar{w} + xy\bar{z}$$

$$= w(\cancel{y + z + \bar{z}}) + y\bar{z}(x + \bar{x}\bar{w})$$

$$= w + y\bar{z}(x + \bar{w})$$

$$= w + \bar{w}y\bar{z} + xy\bar{z}$$

$$= w + y\bar{z} + xy\bar{z}$$

$$= w + y\bar{z}(\cancel{1 + x}) \rightarrow 1$$

$$\boxed{T_3(x,y,z,w) = w + y\bar{z}}$$

$$\rightarrow T_4(x,y,z) = xyz + zx\bar{y} + z\bar{x}y \quad | \quad A = A + A$$

$$= xyz + xyz + x\bar{y}z + \bar{x}yz$$

$$= xz(\cancel{y + \bar{y}}) + yz(\cancel{x + \bar{x}})$$

$$\boxed{T_4(x,y,z) = xz + yz}$$

$$T_5 = (\bar{x}+\bar{y}+\bar{z}).(\bar{x}+y+z)(x+y+z)$$
$$= (\bar{x}+\bar{y}+\bar{z})\left[(y+z)+(\underbrace{\bar{x}x}_{0})\right]$$

قاعدة $(A+B)(A+C) = A+BC$

$$= (\bar{x}+\bar{y}+\bar{z})(y+z)$$
$$= \bar{x}y+\bar{x}z+\underbrace{\bar{y}y}_{0}+\bar{y}z+\bar{z}y+\cancel{\bar{z}z}$$
$$\boxed{T_5 = \bar{x}y+\bar{x}z+\bar{y}z+\bar{z}y}$$

$$\rightarrow T_6 = (\bar{x}+y)(x+y+w)\,\bar{w}$$
$$= (\cancel{\bar{x}x}+\bar{x}y+\bar{x}w+yx+\underbrace{yy}_{y}+yw)\,\bar{w}$$
$$= \left[y(\bar{x}+x+1+w)+\bar{x}w\right]\bar{w}$$
$$= y\bar{w}+\underbrace{\bar{x}w\bar{w}}_{0} \Rightarrow \boxed{T_6 = y\bar{w}}$$

$$\rightarrow T_7 = \bar{A}BC + AC + A\bar{B}\bar{C} + \bar{A}\bar{B}$$
$$= \bar{A}BC + A\bar{B}C + ABC + A\bar{B}\bar{C} + \bar{A}\bar{B}$$
$$= BC(\underbrace{\bar{A}+A}_{1}) + A\bar{B}(\underbrace{C+\bar{C}}_{1}) + \bar{A}\bar{B}$$
$$= BC + A\bar{B}+\bar{A}\bar{B} = BC + \bar{B}(\underbrace{A+\bar{A}}_{1})$$
$$= \bar{B}+BC = \boxed{\bar{B}+C} \quad (A+\bar{A}B = A+B) \text{ قاعدة}$$

$$\rightarrow T_8 = ABC + A\bar{B}C + AB\bar{C}$$
$$= AB(\underbrace{C+\bar{C}}_{1}) + A\bar{B}C$$
$$= A(B+\bar{B}C) = A(B+C)$$
$$\boxed{T_8 = AB+AC}$$

$\rightarrow T_8(A,B,C) = (A+B)(A+C) + (B+A)(B+C) + (C+A)(C+B)$

قاعدة

$T_8 = (A + \cancel{B}C) + (\cancel{B} + \cancel{A}C) + (C + AB)$

$= A(1 + \cancel{C} + B) + B(\cancel{C} + 1) + C$

$\boxed{T_8 = A + B + C}$

$\rightarrow T_{10}(A,B,C) = AB + C + \overline{C}(\overline{A}+\overline{B})$ قاعدة

$= AB + C + (\overline{A}+\overline{B})$ $\quad . (A + \overline{A}B = A + B)$

$= \overline{A} + B + C + \overline{B}$ $\quad \underbrace{B + \overline{B}}_{=1}$

$\boxed{T_{10} = 1}$

$\rightarrow T_{11}(A,B) = (A+\overline{B})(\overline{A}+B)(\overline{A}+\overline{B})$

$= (A+\overline{B})(\overline{A} + \cancel{B\overline{B}})$

$= \cancel{A\overline{A}} + \overline{B}\,\overline{A}$

$\boxed{T_{11}(A,B) = \overline{A}\,\overline{B}}$

2. Dresser les tables de vérité pour les deux fonctions T7 et T8.

A	B	C	T7	T8
0	0	0	1	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	1	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

3. Trouver les deux formes canoniques de T7.

1ère forme : la forme **disjonctive** (F.D) (somme des mintermes ou somme des produits (S.P))

$T7(A,B,C) = \sum$ (000, 001, 011, 100, 101, 111) (Les cas de T7 = 1)

$T7(A,B,C) = \overline{A}\overline{B}\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}C + \overline{A}BC + A\overline{B}\,\overline{C} + A\overline{B}C + ABC$ $\quad (0 \rightarrow \overline{A}$ et $1 \rightarrow A)$

$T7(A,B,C) = \sum$ (0, 1, 3, 4, 5, 7)

2ème forme : la forme **conjonctive** (F.C) (produit des maxtermes ou produit des sommes (P.S))

$T7(A, B, C) = \prod (010, 110)$ (Les cas de T7 = 0)

$T7(A, B, C) = (A + \bar{B} + C)(\bar{A} + \bar{B} + C)$ ($0 \rightarrow A$ et $1 \rightarrow \bar{A}$)

$T7(A, B, C) = \prod (2, 6)$

Exercice 4 :

On considère les fonctions booléennes suivantes :

$G(A,B,C) = AB + C = AB\bar{C} + ABC + \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}BC + A\bar{B}C + \cancel{ABC} = \Sigma(1,3,5,6,7)$

$= (A+\bar{B}+C)(A+B+C)(\bar{A}+B+C)\cancel{(A+B+C)} = \Pi(0,2,4)$

$H(A,B,C) = A(B + \bar{C}) = \underset{110}{AB\bar{C}} + \underset{111}{ABC} + \underset{100}{A\bar{B}\bar{C}} + \cancel{\underset{110}{AB\bar{C}}} = \Sigma(4,6,7) = \Pi(0,1,2,3,5)$.

a) Exprimer les fonctions G et H comme des sommes des Mintermes et des produits des Maxtermes.

b) Trouver l'autre forme pour les fonctions booléennes suivantes :

F1 (A,B,C) = $\sum (0, 2, 4,7) = \Pi(1,3,5,6)$

F2 (A,B,C,D) = $\sum (0, 2, 6, 10, 11, 14) = \Pi(1,3,4,5,7,8,9,12,13,15)$.

F3 (A,B,C,D) = $\prod (0, 3, 5, 6) = \Sigma(1,2,4,7,8,9,10,11,12,13,14,15)$.

Exercice 5 :

X	Y	Z	F1	F2
0	0	0	1	1
0	0	1	0	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	0	0
1	1	0	1	1
1	1	1	0	0

1) F.D (S.P) :

* $F_1(x,y,z) = \Sigma(000, 010, 100, 110)$.

$= \bar{x}\bar{y}\bar{z} + \bar{x}y\bar{z} + x\bar{y}\bar{z} + xy\bar{z}$.

$= \Sigma(0,2,4,6)$.

F.C (P.S)

$F_1(x,y,z) = \Pi(001, 011, 101, 111)$

$= (x+y+\bar{z})(x+\bar{y}+\bar{z})(\bar{x}+y+\bar{z})(\bar{x}+\bar{y}+\bar{z})$

$= \Pi(1,3,5,7)$.

* $F_2(x,y,z) = \Sigma(0,1,2,4,6)$.

$= \Pi(3,5,7)$.

1. Trouver les deux formes canoniques de F1 et de F2.
2. Trouver les deux formes canoniques de $\overline{F1}$ et de $\overline{F2}$.

$\bar{F}_1 = \Sigma(1,3,5,7) = \Pi(0,2,4,6)$

$\bar{F}_2 = \Sigma(3,5,7) = \Pi(0,1,2,4,6)$.

3. Des résultats obtenus en 1 et 2 ; dites comment peut-on déduire les formes canoniques du complément d'une fonction. $S.P(\bar{F}) = \overline{P.S(F)}$; $P.S(\bar{F}) = \overline{S.P(F)}$.
4. Dessiner le logigramme de F1 et de F2.
5. Simplifier les deux expressions de F1 et de F2 en utilisant les règles de l'algèbre de Boole.

$F_1 = \Sigma(0,2,4,6) = \bar{z}$.

$F_2 = \Sigma(0,1,2,4,6) = F_1 + \bar{x}\bar{y}z = \bar{z} + \bar{x}\bar{y}\cancel{z} = \bar{z} + \bar{x}\bar{y}$.