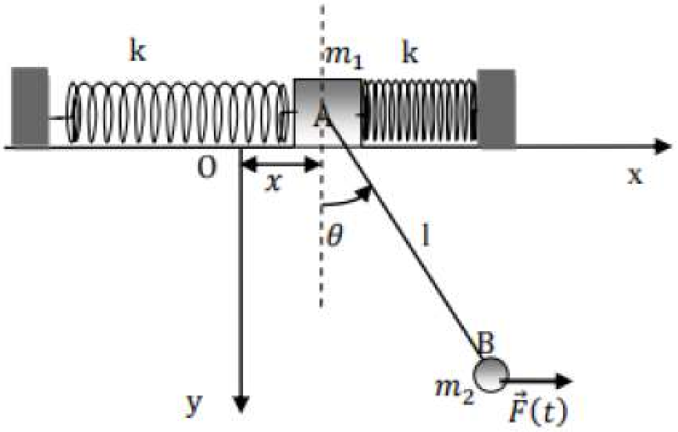
Interrogation N^o 2
Sujet A

Exercice (Système libre à deux degrés de liberté)

On considère le système représenté par la figure ci-dessous.



a)- Montrer que le Lagrangien du système s'écrit sous la forme:

$L = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_2 l^2\dot{\theta}^2 + m_2\dot{x}l\dot{\theta} - kx^2 - \frac{1}{2}(m_2 g l\theta^2)$

b)- Trouver les équations du mouvement de m_1 et de m_2 en fonction de x et de $y = l\theta$
On prendra $m_1 = 2m$ et $m_2 = m$ et les écrire dans le cas où $\frac{g}{l} = \frac{k}{m}$ et on posant $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$
c)- Calculer les pulsations propres du système en fonction de ω_0. En déduire l'expression générale des solutions x et y
d)- Etablir les équations du mouvement des deux masses dans le cas ou $F(t) = F_0 cos(\omega t)$ en fonction des coordonnées généralisées x et y.
e)- Trouver les solutions x(t) et y(t) en régime forcé.
f)- Tracer graphiquement le module des amplitudes x et y en fonction la pulsation d'excitation ω.
g)- Donner les équations integro-différentielles électrique, en déduire le schéma électrique équivalent du circuit.

Solution
Sujet A

a)- Le Lagrangien: (1.5)
$E_c = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2$ avec $\vec{v_2} = \vec{v_1} + \vec{v_{2/1}}$ $v_1 = \dot{x}$ $v_{2/1} = l\dot{\theta}$
$v_2^2 = v_1^2 + v_{2/1}^2 + 2v_1v_{2/1}cos(\vec{v_1}, \vec{v_{2/1}})$
$E_c = \frac{1}{2}m_1\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_2(\dot{x}^2 + l^2\dot{\theta}^2 + 2\dot{x}l\dot{\theta})$ $cos\theta \approx 1$ car on reste inférieure au 2ème ordre.
$E_p = kx^2 + \frac{1}{2}m_2gl\theta^2$
d'ou $L = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_2l^2\dot{\theta}^2 + m_2l\dot{\theta}\dot{x} - kx^2 - \frac{1}{2}m_2gl\theta^2$
b)-Les équations de mouvement de m_1 et m_2 pour chercher les pulsations propres/ : (1.5)
$m_1 = 2m$, $m_2 = m$ et $\frac{g}{l} = \omega_0^2$
$L = \frac{3}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + ml\dot{\theta}\dot{x} - kx^2 - \frac{1}{2}mgl\theta^2$
pour chercher les pulsations propre on considère le système libre non amorti. Dans ce cas les équations de mouvement, tenant compte des substitutions précédentes, deviennent:

$$\begin{cases} 3m\ddot{x} + ml\ddot{\theta} + 2kx = 0 \\ ml^2\ddot{\theta} + ml\ddot{x} + mgl\theta = 0 \end{cases} \quad \text{qui s'écrit} \quad \begin{cases} 3m\ddot{x} + m\ddot{y} + 2kx = 0 \\ ml\ddot{y} + ml\ddot{x} + mgy = 0 \end{cases} \quad \text{qui donne} \quad \begin{cases} 3\ddot{x} + \ddot{y} + 2\omega_0^2x = 0 \\ \ddot{y} + \ddot{x} + \omega_0^2y = 0 \end{cases}$$

c)- Les pulsations propres: (1.5)
On cherche des solutions du type: $x = Acos(\omega t + \phi)$, $y = Bcos(\omega t + \phi)$
En remplaçant dans les équations de mouvement on trouve le système suivant:

$$\begin{cases} (2\omega_0^2 - 3\omega^2)A - \omega^2B = 0 \\ -\omega^2A + (\omega_0^2 - \omega^2)B = 0 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} (2\omega_0^2 - 3\omega^2) & -\omega^2 \\ -\omega^2 & (\omega_0^2 - \omega^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

la solution n'est possible que si le déterminant est null.
$(2\omega_0^2 - 3\omega^2)(\omega_0^2 - \omega^2) - \omega^4 = 0$ $2\omega^4 - 5\omega_0^2\omega^2 + 2\omega_0^2 = 0$
qui a pour solution $\omega_1 = \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}$ et $\omega_2 = \sqrt{2}\omega_0$
Les expressions générales des solutions x et y sont alors données
$x(t) = A_1cos(\omega_1t + \phi_1) + A_2cos(\omega_2t + \phi_2)$
$y(t) = B_1cos(\omega_1t + \phi_1) + B_2cos(\omega_2t + \phi_2)$

d)- Les équations du mouvement en tenant compte de la force: (1)

$$\begin{cases} 3\ddot{x} + \ddot{y} + 2\omega_0^2x = 0 \\ \ddot{y} + \ddot{x} + \omega_0^2y = \frac{F_0cos(\omega t)}{m} \end{cases}$$

e)- Solutions particulières du système d'équation : (1)
Les solutions sont de la forme (en notation complexe)
$x(t) = \underline{X}e^{\omega t}$
$y(t) = \underline{Y}e^{\omega t}$
En injectant ces formes dans le système d'équation précédent on obtient

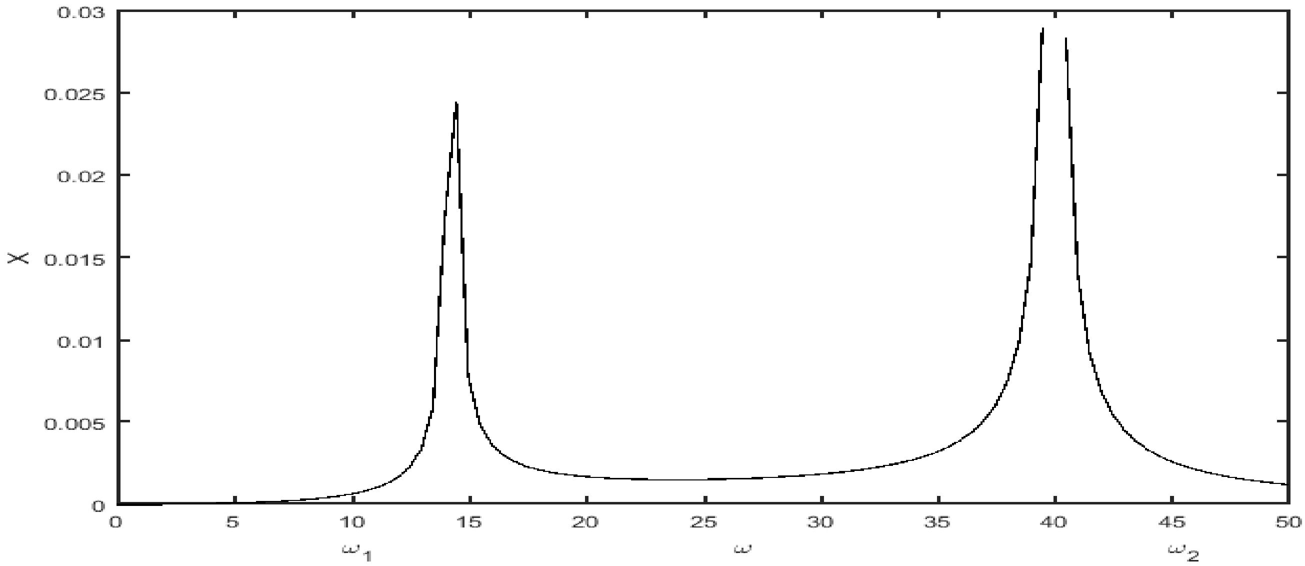
$$\begin{cases} (2\omega_0^2 - 3\omega^2)\underline{X} - \omega^2\underline{Y} = 0 \\ (\omega_0^2 - \omega^2)\underline{Y} - \omega^2\underline{X} = \frac{F_0}{m} \end{cases}$$

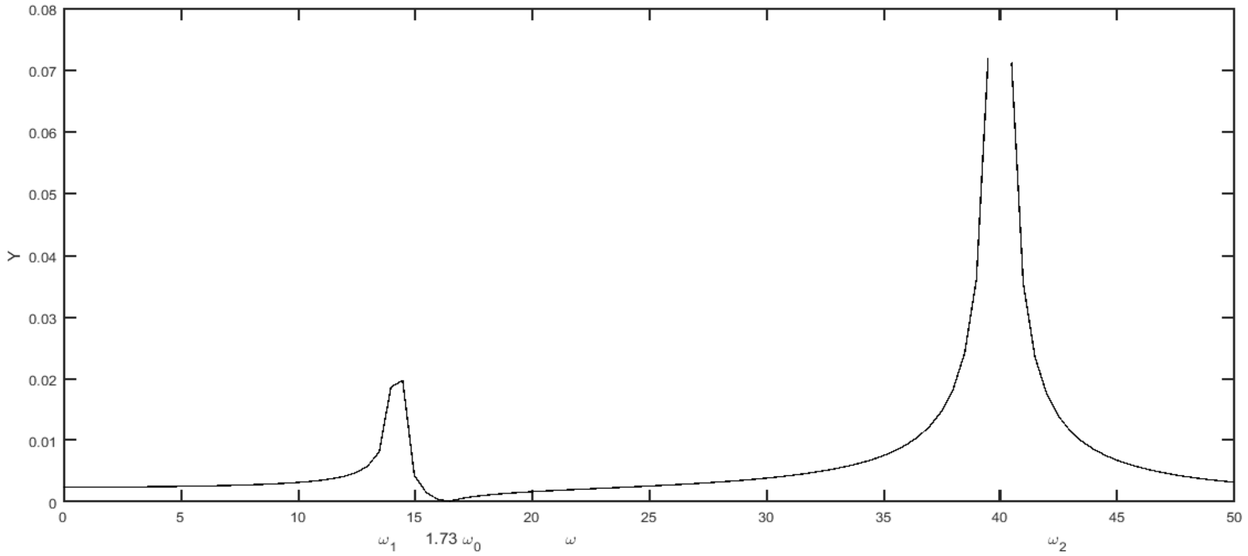
Les solutions de ce systèmes sont données par la méthode du déterminant de Cramer

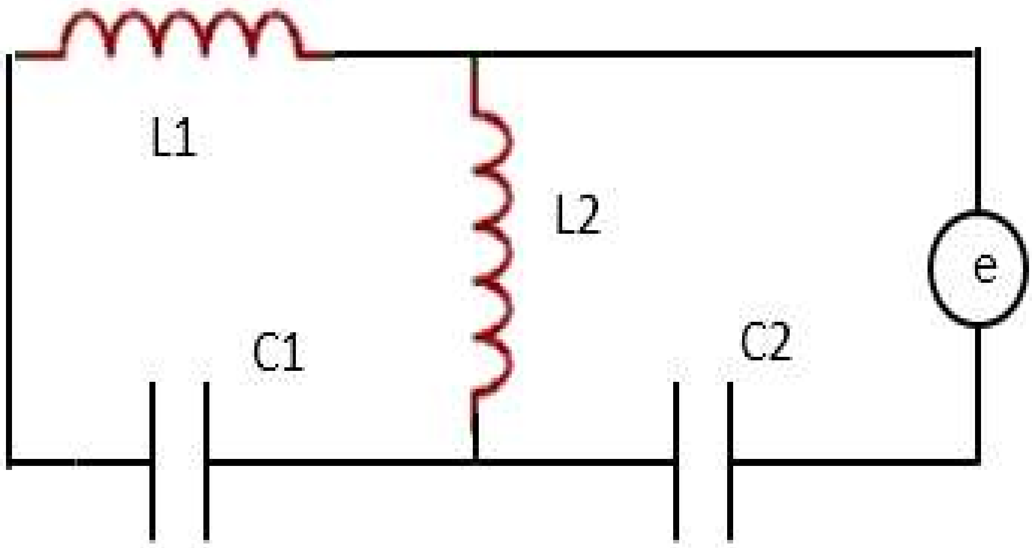
$$\overline{X} = \frac{F_0\omega^2/m}{(\omega^2 - \omega_1^2)(\omega^2 - \omega_2^2)}$$

$$\overline{Y} = \frac{F_0(2\omega_0^2 - 3\omega^2/m)}{(\omega^2 - \omega_1^2)(\omega^2 - \omega_2^2)}$$

f)- Les graphes : (0.5)
g)- Les équations intégro-différentielles: (0.5)


X
0.03
0.025
0.02
0.015
0.01
0.005
0
0 5 10 15 20 25 30 35 40 45 50
ω_1
ω
ω_2


Y
0.08
0.07
0.06
0.05
0.04
0.03
0.02
0.01
0
0 5 10 15 20 25 30 35 40 45 50
ω_1
1.73 ω_0
ω
ω_2


L1
L2
e
C1
C2