AHMED
ELYAAQOUBI
FSDM
ANALYSE 1
CHAPTER 1.

"Resume Analyse 1"

« Chapter 1: fonction numérique d'une variable réelle. »

Partie 1: Fonction Majorée / Minorée / Bornée.

Soit $f : A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

* On dit que f est majorée par un $M \in \mathbb{R}$.
  ssi $\exists M \in \mathbb{R} / \ f(x) \leq M$
* On dit que f est minorée par $m \in \mathbb{R}$
  ssi $\exists m \in \mathbb{R} / \ f(x) \geq m$.
* On dit que f est bornée ssi
  $\exists (m, M) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ / \ m \leq f(x) \leq M$.

2- Minimum / Maximum:

* On dit que f Admet un maximum en $b \in A$.
  ssi $f(x) \leq f(b)$.
* " " un Minimum en $a \in A$
  ssi $f(x) \geq f(a)$.

Partie 2: Limite d'une fonction:

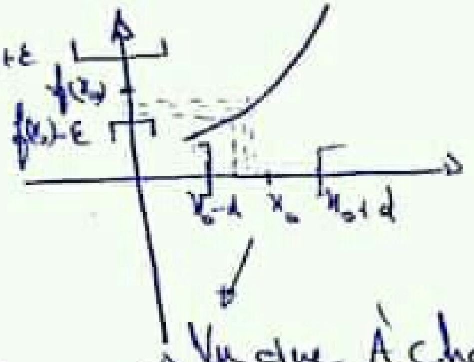
I- Continuité:

On dit que f est continue en un point x_0 si et seulement si: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Autrement dit:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall x \in D_f) \; |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

$\Rightarrow$ Graphiquement:



$|x - x_0| < \alpha \Rightarrow x \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$

$\Rightarrow$ Vu que à chaque fois x tend vers x_0.

$\Rightarrow$ la fonction $f(x) \to f(x_0)$

II - Limites et les formes indéterminées:

* La limite de $f(x)$ quand $x \to x_0$ à gauche est notée:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) \text{ ou } \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x).$$

* La limite de $f(x)$ quand $x \to x_0$ à droite est notée:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) \text{ ou } \lim_{\substack{x \to x_0^+ \\ x > x_0}} f(x)$$

$\Rightarrow$ Les formes indeterminées F.I.

$+\infty-\infty$; $\frac{\infty}{\infty}$; $\frac{0}{0}$; $(0\times\infty)$; $(1)^{\infty}$, $(0^{+})^{0}$, $(+\infty)^{0}$.

III - Théorème des valeurs intermédiaires:

Soit $f:[a,b]\rightarrow\mathbb{R}$. Continue

Si : $\begin{cases} * f \text{ est Continue} \\ * f \text{ est strictement monotone (soit Croissante soit decroissante).} \\ * f(a)f(b)<0 \end{cases}$

Alors: $\exists!\, c\in[a,b]$ / $f(c)=0$

Si $\begin{cases} * f \text{ est Continue.} \\ * f(a)\, f(b)<0. \end{cases}$

Alors $\exists c\in[a,b]$ / $f(c)=0$

Example: $f(x)=x^3-1$ dans l'intervalle $[0,2]$

Mq: $\exists c\in[0,2)$ / $f(c)=0$.

$*$ f sous forme un polynôme, donc Continue sur $\mathbb{R}$

Ainsi sur $[0,2]$.

$*$ $\begin{cases} f(0)=-1 \\ f(2)=2^3-1=7 \end{cases} \Rightarrow f(0)f(2)<0$

$\Rightarrow$ D'après T.V.I $\Rightarrow \boxed{\exists c\in[0,2] / f(c)=0}$

IV - Dérivation:

Soit $f : A \to B$, on dit que f est dérivable sur en un point $x_0 \in A$ ssi:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l = f'(x_0) \in \mathbb{R}$$

f est Derivable $\Rightarrow$ f est Continue

Quelques Notions:

$$(f+g)' = f' + g'$$

$$(fg)' = f'g + fg'$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

2- fonction réciproque: Soit $f : E \to F$.

On dit que f Admet une fonction réciproque Definie de : $f^{-1} : F \to E$ ssi:

* f est Continue sur E.
* f est strictement monotone.

On dit que f est une bijection de $E \to F$.

sa derivé est: $$\left(f^{-1}(x)\right)' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

* **Théorème de Rolle:**

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$ et derivable sur $]a,b[$ et $f(a) = f(b)$

Alors $\exists c \in]a,b[\ / \ f'(c) = 0$.

* **Théorème des croissements finis:**

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$

* continue sur $[a,b]$
* derivable sur $]a,b[$

$\Rightarrow \exists c \in [a,b] \ / \ f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b-a}$.

* **Règle d'hôpitale:**

Soit f et g deux fonctions réels positifs definie sur l'intervalle ouvert I

si on a: la forme indéterminée (F.I) $\frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}$.

on peut calculer:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = l \Leftrightarrow \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$$

* **Théorème du point fixe:**

Soit $f . A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definie et derivable sur A, supposons qu'il existe un unique $l \in A$ telle que $f(l) = l$ et qu'il existe $I = [l-a, l+a]$ et $\lambda \in \mathbb{R} / \lambda < 1$ tq: $\forall x \in I \ |f'(x)| < \lambda$, Alors la suite (U_n) définie $U_0 \in I$ et $U_{n+1} = f(U_n)$ donc: $U_n \to l$
$f(U_n) \to f(l)$.

$(f \cdot g)$ Formule de leibnitz.

Soit f, g deux fonction réels, dérivable $n^{ième}$ fois.

$$\underbrace{(f \times g)^{(n)}(a)}_{\text{Dérivé } n^{ième} \text{ fois}} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)}(a) \, g^{(n-k)}(a)$$

Partie 3 : fonction trigonométrique :

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow [-1, 1]$ impaire et dérivable

$x \longmapsto \sin(x)$

Soit la restriction de $\sin(x)$ à $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ definie un bijection continue.

$\sin(x) : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow [-1, 1]$

$x \longmapsto \sin(x)$

La bijection réciproque est :

$\sin^{-1}(x) = \text{Arcsin}(x) : [-1, 1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$x \; y \longrightarrow \text{Arcsin}(x)$

$x = \sin(y) \Longrightarrow -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$.

$\Longrightarrow \sin(y) = x \Longleftrightarrow \sin(\text{Arcsin}(x)) = x$; $f \circ f^{-1}(x) = x$

On a : $\text{Arcsin}'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

* Fonction $\text{Arccos}(x) = \cos^{-1}(x)$.

$\cos(x) : \mathbb{R} \to [-1,1]$. Continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

la restriction de $\cos(x) : [0,\pi] \to [-1,1]$ est une bijection continue ; sa fonction réciproque $\text{Arccos}(x) : [-1,1] \to [0,\pi]$ est une bijection continue.

$$y = \text{Arccos}(x) \quad \forall x \in [-1,1]$$

et
$$(\text{Arccos}\, x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

* fonction $\text{Arctan}(x)$

on a : $tg(x) :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$, est une bijection continue, sa réciproque $\text{Arctan}(x) : \mathbb{R} \to]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

$x \to \text{Arctan}(x)$.

sa dérivée :

$$(\text{Arctan}(x))' = \frac{1}{1+x^2}.$$

Partie 4 : Fonction hypergéométrique :

hypergé hyperbolique :

* Sinus hyperbolique : $\sinh(x)$.

$sh(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. dérivable sur $\mathbb{R}$. et bijective.

$\Rightarrow$ telle que : $\sinh(x) = sh(x) = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}$

* Cosinus hyperbolique : $\cosh(x)$.

$ch(x) : \mathbb{R} \to [1, +\infty[$
$x \mapsto ch(x)$ dérivable sur $\mathbb{R}$, et bijective

$\Rightarrow$ telle que : $\cosh(x) = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}$.

* tangente hyperbolique :

$th(x) : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ dérivable sur $\mathbb{R}$, et bijective
$x \mapsto th(x)$.

$\Rightarrow$ telle que, $th(x) = \frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}} = \frac{sh(x)}{ch(x)}$.

Quelques Notions :

$$ch^2(x) - sh^2(x) = 1.$$

$$ch'(x) = sh(x) \quad , \quad sh'(x) = ch(x)$$

\+ $sh(x+y) = sh(x)\,ch(y) + ch(x)\,sh(y)$.

\+ $ch(x+y) = ch(x)\,ch(y) + sh(x)\,sh(y)$.

* $ch(2x) = 2ch^2(x) - 1$
* $sh(2x) = 2sh(x)\,ch(x)$
* $1 - tanh^2(x) = \frac{1}{ch^2(x)}$

<u>Fonction réciproque</u>: $Argch(x)$, $Argsh(x)$.

* $Argch(x) : [1,+\infty[\to \mathbb{R}^+$

$$\Rightarrow Argch'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.$$

* $Argsh(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

$$\Rightarrow Argsh'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

* $Argtanh(x) :]-1,1[\to \mathbb{R}$.

$$\Rightarrow Argth'(x) = \frac{1}{1-x^2}$$

<u>Proposition</u>:

1) $Argch(x) = Ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$
2) $Argsh(x) = Ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$
3) $Argth(x) = \frac{1}{2} Ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

Pr. AHMED ELYAAQOUBI

ANALYSE 1.
SMP / SMC
FSDM
ELYAAQOUBI

Chapitre 2 : "les suites"

I - Définitions :

Déf ① : Une suite est une application $u_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$
$n \to u_n$

- Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $u(n)$ par u_n et on l'appelle n'ième terme ou terme général de la suite.

Déf ② : suites majorée, minorée, bornée :

* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée si $\exists M \in \mathbb{R} / u_n \leq M$.
* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée si $\exists m \in \mathbb{R} / u_n \geq m$.
* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si $\exists M \in \mathbb{R} / |u_n| \leq M$.

Déf ③ : suite croissante, decroissante :

* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante si $u_{n+1} \geq u_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est decroissante si $u_{n+1} \leq u_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$

II - Limites :

① Limites finie, limite infinie :

Soit (u_n) une suite.

Déf ④ :

la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a pour limite $l \in \mathbb{R}$ ssi :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = l \iff (\forall \varepsilon>0)(\exists N \in \mathbb{N}) \text{ tq: } n \geq N \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon$$

Déf ⑤.

* $\lim\limits_{+\infty} u_n = +\infty \Leftrightarrow (\forall A>0)(\exists N \in \mathbb{N})$
$n \geq N \Rightarrow u_n \geq A$.

* si $\lim\limits_{+\infty} u_n = l \in \mathbb{R} \Rightarrow$ Alors on dit que (u_n) est Converge vers une limite finie.

* si (u_n) une suite Convergente, Alors sa limite est unique.

Déf ⑥.

* si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée Càd $\exists M \in \mathbb{R} / |u_n| \leq M$
et si $\lim\limits_{+\infty} v_n = 0$.

$\Rightarrow$ Alors: $\lim\limits_{+\infty} u_n \times v_n = 0$.

② Limites et inegalités:

① soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites Convergentes. telle que $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n \leq v_n$.

$\Rightarrow \lim\limits_{+\infty} u_n \leq \lim\limits_{+\infty} v_n$.

Rmq: si $\lim\limits_{+\infty} v_n = 0 \Rightarrow$ Alors $\lim\limits_{+\infty} u_n = 0$.

② Théorème de gendarmes: Soit $v_n \leq u_n \leq w_n$
et si $\lim\limits_{+\infty} v_n = \lim\limits_{+\infty} w_n = l \Rightarrow \boxed{\lim\limits_{+\infty} u_n = l}$

③ III - suites Géométrique :

On fixe un réel a. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de terme general $u_n = a^n$

1 - si $a = 1 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 1$.

2 - si $a > 1 \Rightarrow \lim_{+\infty} u_n = \lim_{+\infty} a^n = +\infty$.

3 - si $-1 < a < 1 \Rightarrow \lim_{+\infty} u_n = 0$.

4 - si $a \leq -1$; la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

② - Series - Géométrique :

Soit $a \neq 1 \in \mathbb{R}$, Notons : $\sum_{k=0}^{n} a^k = a^0 + a^1 + \dots + a^n$.

on a : $$\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}.$$

③ suites telles que : $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| < l < 1$.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels non nule. On suppose qu'il existe un réel l / $\forall n \in \mathbb{N}$, on ait :

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| < l < 1.$$ À partir d'un certain rang.

$$\boxed{\text{Alors : } \lim_{n \to +\infty} u_n = 0}$$

IV - Théorème de Convergence:

Déf ①. Toute suite convergente est bornée.

Déf ②. . Toute suite croissante et majorée est convergente.
. Toute suite decroissante et minorée est convergente.

① Suites Adjacentes:

$(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont dites adjacentes si:

* . $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante, (v_n) decroissante,
* $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$.
* $\lim\limits_{+\infty} v_n - u_n = 0$.

→ **Théorème**: si $(u_n),(v_n)$ sont Adjacentes, ~~alors~~ elles convergent vers la même limite..

V - Suites récurrentes:

① suite récurrente définie par une fonction:
Soit $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Une suite récurrente est définie par son premier terme et une relation permettant de calculer les termes de proche en proche:

$u_0 \in \mathbb{R}$, $u_{n+1} = f(u_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Proposition: si f est continue et $(u_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} l$, Alors l est une solution de l'équation $f(l) = l$.

Généralisation :

Soit $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction, soit $l \in I$

* si f est continue sur tout points situe en I.

* $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit majorée, croissante
  soit minorée, decroissante.

* $u_0 \in I$ et $f(I) \subset I$,

* $u_{n+1} = f(u_n)$.

Alors (u_n) converge vers "l" telle que "l" est une solution de l'equation $f(l) = l$.

AHMED
ELYAAQOUBI