Fonctions usuelles

H. Benhassine

Octobre 2021

Table des Matières

Chapitre 1

Fonctions usuelles

1.1 Fonctions trigonométriques inverses

1.1.1 La fonction Arcsinus: $\arcsin y$

• La fonction trigonométrique sinus définie par:

$$\begin{array}{cccc} \sin: & [-\pi/2, \pi/2] & \longrightarrow & [-1,1] \\ & x & \longmapsto & \sin x \end{array},$$

est une fonction continue et strictement croissante sur l'intervalle $[-\pi/2, \pi/2]$. Donc, d'aprés le thèorème des fonctions inverses vu au chapitre 4, sa fonction réciproque existe. On la notera par arcsin avec:

$$\begin{array}{cccc} \arcsin: & [-1,1] & \longrightarrow & [-\pi/2, \pi/2] \\ & y & \longmapsto & \arcsin y \end{array}.$$

Et l'on a:

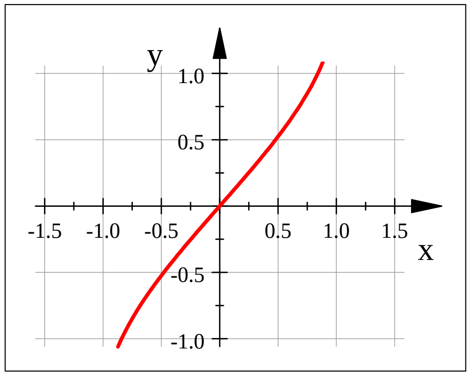
$$\sin x = y \Leftrightarrow x = \arcsin y.$$

• La fonction arcsin est une fonction continue strictement croissante sur l'intervalle $[-1,1]$ et l'on a:

$$\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}, \arcsin(0) = 0, \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3}, \arcsin(1) = \frac{\pi}{2}.$$

• La fonction arcsin est indéfiniment dérivable sur l'intervalle $]-1,1[$ et l'on a:

$$\forall\, |y| < 1 : (\arcsin y)' = \frac{1}{\sin' x} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$



Tracé de la fonction arcsin .

1.1.2 La fonction Arccosinus: $\arccos y$

• La fonction trigonométrique cosinus définie par:

$$\begin{array}{cccc} \cos: & [0,\pi] & \longrightarrow & [-1,1] \\ & x & \longmapsto & \cos x \end{array},$$

est une fonction continue et strictement décroissante sur l'intervalle $[0,\pi]$. Donc, d'aprés le thèorème des fonctions inverses vu au chapitre 4, sa fonction réciproque existe. On la notera par arccos avec:

$$\begin{array}{cccc} \arccos: & [-1,1] & \longrightarrow & [0,\pi] \\ & y & \longmapsto & \arccos y \end{array}.$$

Et l'on a:

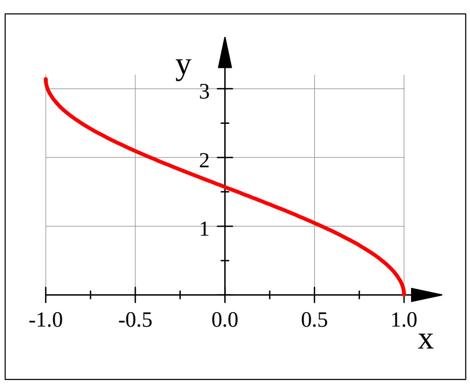
$$\cos x = y \Leftrightarrow x = \arccos y.$$

• La fonction arccos est une fonction continue strictement décroissante sur l'intervalle $[-1,1]$ et l'on a:

$$\arccos(-1) = \pi, \arccos(0) = 1, \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}, \arccos(1) = 0.$$

• La fonction arccos est indéfiniment dérivable sur l'intervalle $]-1,1[$ et l'on a:

$$\forall\, |y| < 1 : (\arccos y)' = \frac{1}{\cos' x} = \frac{1}{-\sin x} = \frac{1}{-\sqrt{1-\cos^2 x}} = \frac{-1}{\sqrt{1-y^2}}.$$



Tracé de la fonction arccos .

1.1.3 La fonction Arctangente: $\arctan y$

• La fonction trigonométrique tangente définie par:

$$\tan: \begin{array}{ccc}]-\pi/2,\pi/2[& \longrightarrow &]-\infty,\infty[\\ x & \longmapsto & \tan x \end{array},$$

est une fonction continue et strictement croissante sur l'intervalle $[-\pi/2,\pi/2]$. Donc, d'aprés le thèorème des fonctions inverses vu au chapitre 4, sa fonction réciproque existe. On la notera par arcsin avec:

$$\arctan: \begin{array}{ccc}]-\infty,\infty[& \longrightarrow &]-\pi/2,\pi/2[\\ y & \longmapsto & \arctan y \end{array}.$$

Et l'on a:

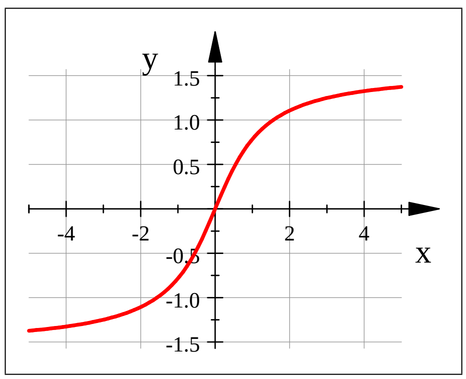
$$\tan x = y \Leftrightarrow x = \arctan y.$$

• La fonction arctan est une fonction continue strictement croissante sur l'intervalle$]-\infty,\infty[$ et l'on a:

$$\lim_{x\to-\frac{-\pi}{2}} \arctan(x) = -\infty, \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}, \arctan(0) = 0, \arctan(1) = \frac{\pi}{4}, \lim_{x\to\frac{+\pi}{2}} \arctan(x) = +\infty.$$

• La fonction arctan est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et l'on a:

$$\forall\,|y|<1 : (\arctan y)' = \frac{1}{\tan' x} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 x}} = \frac{1}{1+\tan^2 x} = \frac{1}{1+y^2}.$$



Tracé de la fonction arctan .

Remarque 1.1.1

1. On définit de manière analogue aux précédentes la fonction arccot, la fonction réciproque de la fonction trigonométrique cot:

$$\text{arccot}: \begin{array}{ccc}]-\infty,\infty[& \longrightarrow &]0,\pi[\\ y & \longmapsto & \text{arccot}\, y \end{array}$$

qui est une fonction continue strictement décroissante (Exercice: Est-elle dérivable? Trouver l'expression de sa drivée).

2. On a la relation suivante (à démontrer):

$$\arctan y + \text{arccot}\, y = \frac{\pi}{2}.$$

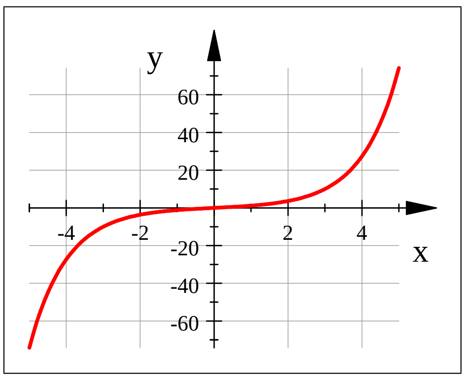
1.2 Les fonctions hyperboliques et leurs fonctions inverses

1.2.1 Fonctions hyperboliques

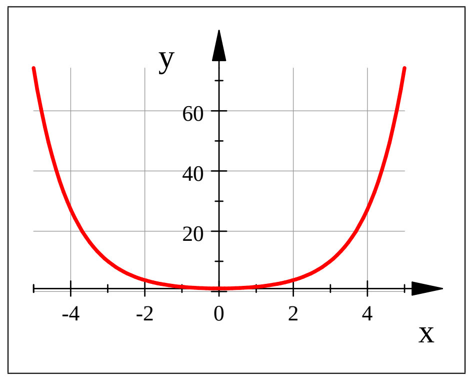
• On appelle les fonctions de variable x suivantes:

$$\begin{aligned}\sinh x &= \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \\ \tanh x &= \frac{\sinh x}{\cosh x}, \qquad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x},\end{aligned}$$

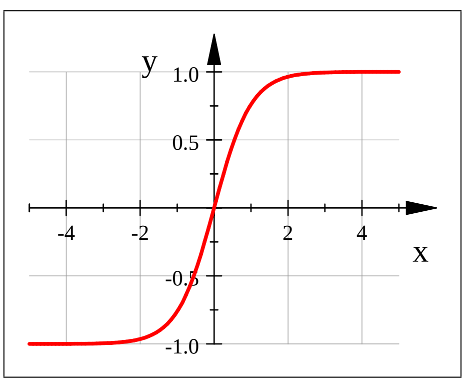
respectivement: *Cosinus hyperbolique, Sinus hyperbolique, Tangente hyperbolique et Cotangente hyperbolique.*



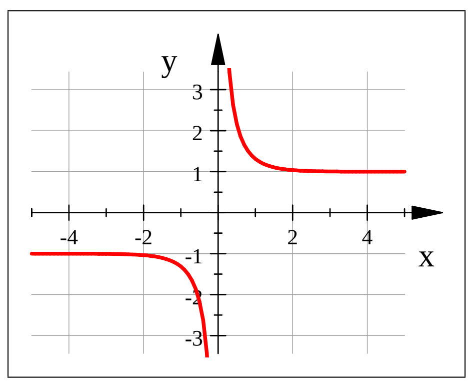
$\sinh x$



$\cosh x$



$\tanh x$



$\coth x$

Remarque 1.2.1

1. La fonction Cotangente hyperbolique coth n'est pas définie à l'origine contrairement aux autres fonctions hyperboliques avec:
$$\sinh(0) = 0, \quad \cosh(0) = 1, \text{ et } \tanh(0) = 0.$$

2. La fonction Sinus hyperbolique est une fonction impaire: $\sinh(-x) = -\sinh(x)$.

La fonction Cosinus hyperbolique est une fonction paire: $\cosh(-x) = \cosh(x)$.

3. On a les relations suivantes (à démonter):

$$\begin{aligned} \cosh^2 x - \sinh^2 x &= 1, \qquad 1 - \tanh^2 x = \frac{1}{\cosh^2 x}, \\ \cosh(a+b) &= \cosh a \cosh b + \sinh a \sinh b, \\ \sinh(a+b) &= \sinh a \cosh b + \cosh a \sinh b. \end{aligned}$$

4. Il est claire que les fonctions hyperboliques sont indéfiniment dérivables sur leurs intervalles de définitions et l'on a:

$$\begin{aligned} \sinh' x &= \cosh x, \qquad \cosh' x = \sinh x, \\ \tanh' x &= \frac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x. \end{aligned}$$

1.2.2 Fonctions hyperboliques inverses

La fonction Argument sinus hyperbolique: $\arg\sinh$

• La fonction sinh étant continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, elle admet alors une fonction réciproque que l'on nommera Argument sinus hyperbolique, notée $\arg\sinh$:

$$\begin{array}{rccc} \arg\sinh : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & y & \longmapsto & \arg\sinh y \end{array}$$

telle que:

$$\sinh x = y \Longleftrightarrow x = \arg\sinh y$$

• La fonction $\arg\sinh$ est une fonction continue, strictement croissante et dérivable avec:

$$(\arg\sinh y)' = \frac{1}{\sinh' x} = \frac{1}{\cosh x} = \frac{1}{\sqrt{1+\sinh^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}.$$

• Il est possible d'écrire l'expression de la fonction $\arg\sinh$ et cela en usant de la fonction logarithmique. En effet, comme l'on a:

$$\cosh^2 x = 1 + \sinh^2 x \text{ et } \cosh x > 0,$$

on peut écrire:

$$\begin{aligned} \cosh x &= \sqrt{1+\sinh^2 x} \\ \sinh x + \cosh x &= \sinh x + \sqrt{1+\sinh^2 x} \\ \frac{e^x - e^{-x}}{2} + \frac{e^x + e^{-x}}{2} &= \sinh x + \sqrt{1+\sinh^2 x} \\ e^x &= \sinh x + \sqrt{1+\sinh^2 x} \\ x &= \ln\left(\sinh x + \sqrt{1+\sinh^2 x}\right) \\ \arg\sinh y &= \ln\left(y + \sqrt{1+y^2}\right). \end{aligned}$$

La fonction Argument cosinus hyperbolique: $\arg\cosh$

• La fonction cosh étant continue et strictement croissante sur $[0,+\infty[$, elle admet alors une fonction réciproque que l'on nommera Argument cosinus hyperbolique, notée $\arg\cosh$:

$$\begin{array}{rccc} \arg\cosh : & [1,+\infty[& \longrightarrow & [0,+\infty[\\ & y & \longmapsto & \arg\cosh y \end{array}$$

telle que:

$$\cosh x = y \Longleftrightarrow x = \arg\cosh y$$

• La fonction $\arg\cosh$ est une fonction continue, strictement croissante et dérivable sur l'intervalle $]1,+\infty[$ avec:

$$(\arg\cosh y)' = \frac{1}{\cosh' x} = \frac{1}{\sinh x} = \frac{1}{\sqrt{\cosh^2 x - 1}} = \frac{1}{\sqrt{y^2-1}}.$$

• Il est possible d'écrire l'expression de la fonction $\arg\cosh$ et cela en usant de la fonction logarithmique. On démontera en usant des mêmes artifices que précédements que l'on a:

$$\arg\cosh y = \ln\left(y + \sqrt{y^2-1}\right).$$

La fonction Argument tangente hyperbolique: $\arg\tanh$

• La fonction cosh étant continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, elle admet alors une fonction réciproque que l'on nommera Argument tangeante hyperbolique, notée $\arg\tanh$:

$$\begin{array}{rccc} \arg\tanh : &]-1,1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & y & \longmapsto & \arg\tanh y \end{array}$$

telle que:

$$\tanh x = y \Longleftrightarrow x = \arg\tanh y$$

• La fonction $\arg\tanh$ est une fonction continue, strictement croissante et dérivable sur l'intervalle $]-1,1[$ avec:

$$(\arg\tan y)' = \frac{1}{\tanh' x} = \frac{1}{1-\tanh^2 x} = \frac{1}{1-y^2}.$$

• On laissera le soin au lecteur de montrer qu'il est possible d'écrire l'expression de la fonction $\arg\tanh$ en usant de la fonction logarithmique sous la forme:

$$\arg\tanh y = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right).$$