Faculté des Sciences

Année universitaire 2015-2016
Algèbre I. LMD MI.

Examen Final
Durée 1h30'

Exercice 1 : Soient les applications f et g définies par

$$f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R} \qquad \text{et} \qquad g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto x \qquad\qquad\qquad x \longmapsto x$$

1) f est-elle injective ? surjective ? bijective ? Justifier. (Sans l'utilisation de la dérive
2) Déterminer, si elles existent, les applications $f \circ g$ et $g \circ f$.

Exercice 2 : Soit

$$f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow [1, +\infty[$$
$$x \longmapsto f_m(x) = (m-1)^2 x^2 + 1$$

1) Discuter suivant les valeurs de m l'injectivité de f_m. (Sans l'utilisation de la dérive
2) Discuter suivant les valeurs de m la surjectivité de f_m. (" " " "
3) En déduire les valeurs de m pour lesquelles f_m est bijective et déterminer dans ce cas l'application f_m^{-1}.

Exercice 3 : Dans l'ensemble $\mathbb{R}$, on définit la loi $*$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} \quad x * y = |x| + |y|$$

1) $*$ est-elle associative ? commutative ? admet-elle un élément neutre ? Justifier
2) $(\mathbb{R}, *)$ est-il un groupe ? Justifier.

Exercice 4 : Soit $(G, *)$ un groupe commutatif d'élément neutre e et soit $a \in G$. Soit

$$F_1 = \{e\}, \qquad F_2 = \{x \in G, \quad \exists y \in G, \quad x = a * x * y\}$$

Déterminer si F_1 et F_2 sont des sous-groupes de G.

Barème : Exercice 1 : 3pts ; **Exercice 2 :** 7pts ; **Exercice 3 :** 4pts **Exercice 3 :** 6pts.

Dépt de mathématiques Année Universitaire 2015-2016

1ère année M.I ALGEBRE 1

Corrigé de l'examen final

Exercice 1 : $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longrightarrow x$ $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longrightarrow x$

1°/ a) Déf : f injective $\Leftrightarrow \forall x, x' \in \mathbb{R}^+,\ f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$

Soient $x, x' \in \mathbb{R}^+$, $f(x) = x$ et $f(x') = x'$.

Donc : $\forall x, x' \in \mathbb{R}^+,\ f(x) = f(x') \Longrightarrow x = x'$ cqfd : f injective

b) Déf : f surjective $\Leftrightarrow \forall y \in F, \exists x \in E,\ y = f(x)$
$f : E \longrightarrow F$

Soit $y \in \mathbb{R}$: $y = f(x) \Leftrightarrow y = x$. A-t-on $\forall y \in \mathbb{R},\ \underset{(y)}{x} \in \mathbb{R}^+$?

Non : En effet : $\exists y < 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^+,\ y \neq x$ (Négation de f surj)

cqfd. f non surjective.

c) f non surjective donc f non bijective

2/ $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$:

a) L'ens d'arrivée de f est égal à l'ens de départ de g, on peut donc définir l'application $g \circ f$ par :

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^+ \arrow[r, "f"] & \mathbb{R} \arrow[r, "g"] & \mathbb{R} \\ x \arrow[r, mapsto] \arrow[rr, bend right, "g\circ f"'] & x \arrow[r] & x \end{tikzcd}$$

$g \circ f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x) = x$

c.à.d $g \circ f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longrightarrow x$

Rem : $g \circ f = f$.
(Normal car $g = Id_{\mathbb{R}}$)

b) L'ens de d'arrivée de g est différent de l'ens de départ de f et donc il est impossible de définir $f \circ g$.

<u>Exercice 2</u> : $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow [1, +\infty[$

$x \longmapsto f_m(x) = (m-1)^2 x^2 + 1$

1°/ f_m inj $\Longleftrightarrow \forall x, x' \in \mathbb{R}^+ \quad f_m(x) = f_m(x') \Longrightarrow x = x'$

Soient $x, x' \in \mathbb{R}^+$, $f_m(x) = f_m(x') \Rightarrow (m-1)^2 x^2 + 1 = (m-1)^2 x'^2 + 1$

$\Rightarrow (m-1)^2 (x^2 - x'^2) = 0$

$\Rightarrow (m-1)\ (x - x')(x + x') = 0 \quad (*)$

i) $m = 1$: $(*) \Leftrightarrow 0 = 0$ (Donc x, x' qqes) et alors f non inj

(ou <u>Rem</u> : $m = 1$: $f_1(x) = 1 = c^{te}$: (non injective) $\forall x, x'$ $f(x) = f(x') = 1$)

ii) $m \neq 1$: $(*) \Rightarrow (x - x')(x + x') = 0 \Rightarrow x = x'$ ou $\underbrace{x = -x'}_{\text{impossible}}$ $\quad x, x' \in \mathbb{R}^+$

$\Rightarrow x = x'$

<u>Cl</u> : f inj.

<u>Cl</u> : $m = 1$: f non injective

$m \neq 1$ $\quad f$ injective

2°/ <u>Déf</u> : f_m surj $\Leftrightarrow \forall y \in [1, +\infty[, \exists x \in \mathbb{R}^+, f_m(x) = y$

Soit $y \in [1, +\infty[$. Etudions l'éq $y = f_m(x)$ (d'inconnue x)

$y = f_m(x) \Longleftrightarrow y = (m-1)^2 x^2 + 1 \Longleftrightarrow y - 1 = (m-1)^2 x^2$

a) Si $(m-1)^2 \neq 0$ c.à.d si $m \neq 1$ alors : $(y-1) = (m-1)x^2 \Longleftrightarrow x^2 = \dfrac{y-1}{(m-1)^2}$ $(y \geq 1)$

c.à.d $x = \pm\sqrt{\dfrac{y-1}{(m-1)^2}}$. Comme on cherche $x \in \mathbb{R}^+$ on a :

$y = (m-1)x^2 + 1 \Longleftrightarrow x = \sqrt{\dfrac{y-1}{(m-1)^2}} \geq 0 \quad \left(x = \dfrac{\sqrt{y-1}}{|m-1|} \right)$

<u>Cl₁</u> : <u>Cas où</u> $m \neq 1$: $\forall y \in [1, +\infty[, \exists x = \sqrt{\dfrac{y-1}{(m-1)^2}} \in \mathbb{R}^+, y = f_m(x)$

c.à.d si $m \neq 1$ alors f_m surjective.

b) Si $m = 1$ alors : $y = f_m(x) \Leftrightarrow y = 1$; $\forall x \in \mathbb{R}^+$.

donc $\forall y \in]1, +\infty[, \forall x \in \mathbb{R}^+, y \neq f_m(x)$ (car $f_1(x) = 1$)

<u>Cl₂</u> : Si $m = 1$ alors f_1 non surjective

xercice 2 (suite)

Résumé de la 2ème question :

$\boxed{m=1}$: f ni injective, ni surjective et alors f non bijective

$\boxed{m \neq 1}$: f est injective et surjective et alors f est bijective

$m \neq 1$: f_m^{-1} ? $f_m^{-1} : [1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^+$

$y \longmapsto x$ tq

$$f_m^{-1}(y) = x \iff y = f_m(x)$$

c.à.d $f_m^{-1} : [1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^+$

$y \longmapsto f_m^{-1}(y) = \sqrt{\dfrac{y-1}{(m-1)^2}}$

Ie $f_m^{-1} : [1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^+$

$x \longmapsto f_m^{-1}(x) = \sqrt{\dfrac{x-1}{(m-1)^2}}$

xercice 3 : $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \quad x * y = |x| + |y|$

a) Associativité : Soient $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ et $z \in \mathbb{R}$

$(x*y)*z = (|x|+|y|)*z = \big||x|+|y|\big| + |z| = |x| + |y| + |z|$

$x*(y*z) = x*(|y|+|z|) = |x| + \big||y|+|z|\big| = |x| + |y| + |z| = (x*y)*z$

$*$ est donc associative

Commutativité : oui $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}$, $x*y = |x|+|y| = |y|+|x| = y*x$

Élément neutre ? A-t-on $\exists e \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}$, $x*e = e*x = x$?

$*$ commutative : cherchons donc e à droite (par ex)

$x*e = x \iff |x| + |e| = x \iff \begin{cases} x + |e| = x & \text{si } x \geq 0 \\ -x + |e| = x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$

$\begin{cases} |e| = 0 \\ |e| = 2x \end{cases}$ $\longleftarrow$ On peut dire à partir de là : e n'existe pas

car e non unique $\Rightarrow$ e n'est pas neutre)

Cl: l'élément neutre n'existe pas (pour la loi $*$)

2°/ Déf de groupe : $(G,*)$ groupe $\Leftrightarrow \begin{cases} * \text{ l.c.i dans } G & ① \\ * \text{ associative} & ② \\ \text{il existe un él}^t \text{ neutre } e & ③ \\ [\forall x \in G, \exists ! x' \in G, \ x*x' = x'*x = e & ④ \end{cases}$

On a : La condition ③ n'est pas vérifiée dans $(\mathbb{R},*)$.
donc $(\mathbb{R},*)$ n'est pas un groupe.

Exercice 4 : $(G,*)$ groupe d'él^t neutre e. $a \in G$.

1°/ $F_1 = \{e\}$? Déf de sous groupe

$F \subset G$ sous groupe de $G \Leftrightarrow \begin{cases} i) \ F \neq \emptyset \\ \quad \text{et} \\ ii) \ \forall x, y \in F, \ x*y' \in F \end{cases}$

1°/ F_1 ? On a déjà i) $e \in F_1$ par déf

ii) Soit $e = x$ et $y = e \in F_1$: $e*e' = e*e$ car $e' = e$ (cours)
$= e$ (Déf d'él^t neutre)
$\in F_1$ d'où ii)

Cl : F_1 est un sous-groupe de $(G,*)$

2°/ $F_2 = \{x \in G, \exists y \in G, \ x = a*x*y\}$ Rem : $F_2 = G$
$\forall x \in G : x = a*x*a'*x \in F_2 \ (x'a'x = y)$

i) Soit a' le sym. de a dans G c-à-d $a*a' = a'*a = e$

On a : $e = a*a'*e = a*e*a'$ ($*$ comm. ass...)
Donc $\exists a' \in G$, $e = a*e*a'$ c-à-d $e \in F_2$ et dc $F_2 \neq \emptyset$

ii) Soit $x \in F_2$ et $z \in F_2$. Est-ce que $x.z' \in F_2$.

$x \in F_2 \Leftrightarrow \exists y_1 \in G : x = a*x*y_1$

$z \in F_2 \Leftrightarrow \exists y_2 \in G : z = a*z*y_2$

$z' = (a*z*y_2)' = y_2'*z'*a'$ car : cours dit $(a*b)' = b'*a'$

On a alors : $x*z' = (a*x*y_1)*(y_2'*z'*a')$
$= a*(x*z')*\underbrace{(y_1*y_2'*a')}_{\in G, \text{ car } y_1 \in G, \ y_2' \in G, \ a' \in G}$, $*$ comm. ass.

Cl : $\exists y = y_1*y_2'*a'$, $x*z' = a*(x*z')*y \in F_2$ d'où ii) (G groupe)

(D. i) et ii) $\Rightarrow F_2$ s.groupe