Université L'arbi Ben M'hidi

Faculté: Sciences exactes et sciences de la nature et de la vie
Département: MI
Année universitaire: 2022/2023
Module: Algèbre 1

Examen n^0 1

Exercice 1:
1) En utilisant la table de vérité, montrer que

$$[(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)] \Leftrightarrow (P \Longleftrightarrow Q).$$

2) Montrer par récurrence que

$$\forall n \geq 1,\ \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + ... + \frac{1}{n \times (n+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Exercice 2 :
1. On définit une relation binaire $\boldsymbol{R}$ sur $\mathbb{N}$:

$$\forall n,\ m \in \mathbb{N} : n\ \boldsymbol{R}\ m \Leftrightarrow\ m \text{ devise } n$$

Montrer que $\boldsymbol{R}$ est une relation d'ordre.
2. Cet ordre est-il total ou partiel ?
Exercice 3 :
1. Soit $G = \mathbb{R}^2$, on définit la loi de composition interne $*$ par

$$(x, y)\ *\ (x', y') = \left(x + x', ye^{x'} + y'e^{-x}\right)$$

Montrer que $(G, *)$ est un groupe.
2. $(G, *)$ est-il un groupe commutatif ?

Bonne chance.
Pr. Rezzag.S

Université L'arbi Ben M'hidi

Faculté: Sciences exactes et sciences de la nature et de la vie
Département: MI
Année universitaire: 2022/2023
Module: Algèbre 1

Correction d'examen n^0 1

Exercice 1:(7 **pts**)
1) Montrons que $[(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)] \Leftrightarrow (P \Longleftrightarrow Q)$

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow P$	$[(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)]$	$P \Longleftrightarrow Q$	$[(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)] \Leftrightarrow (P \Longleftrightarrow Q)$
1	1	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	0	0	1

(5 **pts**)

(1 **pts pour chaque colonne)**
2) Montrons par récurrence que

$$\forall n \geq 1, \ \frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+...+\frac{1}{n\times(n+1)} = 1-\frac{1}{n+1}.$$

- Pour $n_0 = 1$, on a la proposition donnée est vraie car

$$\frac{1}{1\times 2} = 1-\frac{1}{1+1} \text{..........} (0.5 \textbf{ pts})$$

- Supposons que

$$\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+...+\frac{1}{n\times(n+1)} = 1-\frac{1}{n+1}$$

est vraie et on montre que

$$\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+...+\frac{1}{(n+1)\times(n+2)} = 1-\frac{1}{n+2}$$

On a

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+...+\frac{1}{(n+1)\times(n+2)} \\
= \;& \frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+...+\frac{1}{n\times(n+1)}+\frac{1}{(n+1)\times(n+2)} \\
= \;& 1-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)\times(n+2)} \\
= \;& 1+\frac{-(n+2)+1}{(n+1)\times(n+2)} \\
= \;& 1+\frac{-n-1}{(n+1)\times(n+2)} \\
= \;& 1+\frac{-(n+1)}{(n+1)\times(n+2)} \\
= \;& 1-\frac{1}{n+2}\text{......................} (1.5 \textbf{ pts})
\end{aligned}$$

<u>Exercice 2 :</u> (6 **pts**)

1. Soit la relation $\boldsymbol{R}$ définie :

$$\forall n,\ m\in\mathbb{N}: n\ \boldsymbol{R}\ m \Leftrightarrow\ m \text{ devise } n \Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{N}: n=km$$

Montrons que $\boldsymbol{R}$ est une relation d'ordre.

i) Pour montrer que $\boldsymbol{R}$ est reflexive on montre que

$$\forall n\in\mathbb{N}: n\ \boldsymbol{R}\ n\text{.............} (0.\mathbf{5}\ \textbf{pts})$$

on a $\forall n\in\mathbb{N}: n=1.n$ (prenons $k=1$) donc $n\ \boldsymbol{R}\ n$**...............**(1.0 **pts**)

ii) Pour montrer que $\boldsymbol{R}$ est antisymétrique on montre que

$$\forall n,\ m\in\mathbb{N}: n\ \boldsymbol{R}\ m\ \wedge\ m\ \boldsymbol{R}\ n\Rightarrow n=m\text{...............} (0.\mathbf{5}\ \textbf{pts})$$

On a

$n\ \boldsymbol{R}\ m\Rightarrow \exists k\in\mathbb{N}: n=km$

$m\ \boldsymbol{R}\ n\Rightarrow \exists k^{'}\in\mathbb{N}: m=k^{'}n.$

$\Rightarrow m=k^{'}km\Rightarrow k^{'}k=1\Rightarrow k^{'}=k=1\Rightarrow n=m$

$\Rightarrow \boldsymbol{R}$ est antisymétrique**..............**(1.0 **pts**)

iii) Pour montrer que $\boldsymbol{R}$ est transitive on montre que

$$\forall n,\ m,\ l\in\mathbb{N}: n\ \boldsymbol{R}\ m\wedge m\ \boldsymbol{R}\ l\Rightarrow n\ \boldsymbol{R}\ l\text{.............} (0.\mathbf{5}\ \textbf{pts})$$

On a $n\ \boldsymbol{R}\ m\Rightarrow \exists k\in\mathbb{N}: n=km$

et

$m\ \boldsymbol{R}\ l\Rightarrow \exists k^{'}\in\mathbb{N}: m=k^{'}l$

$\Rightarrow n=\left(kk^{'}\right)l\Rightarrow n=\left(k^{''}\right)l$ avec $k^{''}=kk^{'}\Rightarrow n\ \boldsymbol{R}\ l.$

donc $\boldsymbol{R}$ est transitive**...............**(1.0 **pts**)

et par conséquence $\boldsymbol{R}$ est une relation d'ordre.

2) Cet ordre est-il total ou partiel ?
Puisque on a

$$\exists n = 2 \in \mathbb{N}, \exists m = 5 \in \mathbb{N}\ tq\ \ \overline{n\boldsymbol{R}m} \wedge \overline{m\boldsymbol{R}n} \text{............} (1.\mathbf{5}\ \mathbf{pts})$$

alors $\boldsymbol{R}$ est une relation d'ordre partiel.
<u>**Exercice 3:**</u>(7 **pts**)
1. Soit $G = \mathbb{R}^2$, on définit la loi de composition interne $*$ par

$$(x, y)\ \ *\ \ (x', y') = \left(x + x', ye^{x'} + y'e^{-x}\right)$$

Montrons que $(G, *)$ est un groupe.
i. L'élément neutre (2.0 **pts**)
Soit (e_1, e_2) l'élément neutre de G,alors

$$\forall\,(x, y) \in G\ \ : (x, y) * (e_1, e_2) = (e_1, e_2) * (x, y) = (x, y) \text{..........} (0.5\ \mathbf{pts})$$

$\Rightarrow (x, y) * (e_1, e_2) = (x + e_1, ye^{e_1} + e_2e^{-x}) = (x, y)$.
$\Rightarrow x + e_1 = x$ et $ye^{e_1} + e_2e^{-x} = y$.
$\Rightarrow e_1 = 0$ et $y + e_2e^{-x} = y$
$\Rightarrow e_1 = 0$ et $e_2e^{-x} = 0$
$\Rightarrow e_1 = 0$ et $e_2 = 0$ car $e^{-x} > 0$
$\Rightarrow (e_1, e_2) = (0, 0)$ est l'élément neutre de G........... (1.5 **pts**)
ii. L'élément symétrique (2.0 **pts**)
Soit (x', y') l'élément symétrique de (x, y), alors on a :

$$(x, y) * (x', y') = (x', y') * (x, y) = (e_1, e_2) \text{..........} (0.5\ \mathbf{pts})$$

$\Rightarrow \left(x + x', ye^{x'} + y'e^{-x}\right) = (0, 0)$.
$\Rightarrow x + x' = 0$ et $ye^{x'} + y'e^{-x} = 0$.
$\Rightarrow x' = -x$ et $ye^{-x} + y'e^{-x} = 0$
$\Rightarrow x' = -x$ et $(y + y')\,e^{-x} = 0$
$\Rightarrow x' = -x$ et $y + y' = 0$ car $e^{-x} > 0$
$\Rightarrow x' = -x$ et $y' = -y$
$\Rightarrow (x', y') = (-x, -y)$ est l'élément symétrique de (x, y).......... (1.5 **pts**)
iii. L'associativité (2.0 **pts**)
Soit (x, y), (x', y'), $(x", y")$ des éléments de G, montrons que

$$[(x, y) * (x', y')] * (x", y") = (x, y) * [(x', y') * (x", y")] \text{............} (0.5\ \mathbf{pts})$$

On a
$[(x, y) * (x', y')] * (x", y") = \left(x + x', ye^{x'} + y'e^{-x}\right) * (x", y")$
$= \left(x + x' + x", \left(ye^{x'} + y'e^{-x}\right)e^{x"} + y"e^{-(x+x')}\right) = \left(x + x' + x", ye^{x'+x"} + y'e^{x"-x} + y"e^{-x'-x}\right)$....... (1)
$(x, y) * [(x', y') * (x", y")] = (x, y) * \left(x' + x", y'e^{x"} + y"e^{-x'}\right)$

$= \left(x + x' + x", ye^{\left(x'+x"\right)} + \left(y'e^{x"} + y"e^{-x'}\right)e^{-x}\right) = \left(x + x' + x", ye^{x'+x"} + y'e^{x"-x} + y"e^{-x'-x}\right)$....... (2)

Donc (1) = (2) et par suite $*$ est associative..........(1.5 **pts**)

On conclut que $(G\ ,*)$ est un groupe.

2. $(G,*)$ n'est pas un groupe commutatif car

$$(1,0)\ *\ (0,1) = \left(1, e^{-1}\right) \text{ mais } (0,1)\ *\ (1,0) = \left(1, e^{1}\right) \text{................. (1.0 \textbf{pts})}$$

Bonne chance.
Pr. Rezzag.S