Correction de la série n°3 : Variables aléatoires

Ex 1 : la loi de probabilité de X :

On a : $x = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ puisque P_X est une loi de probabilité ; donc, il existe un réel a, tel que $p(X=x) = ax$ et $\sum_{x=1}^{6} f_X(x) = p(X=x) = 1$, alors,

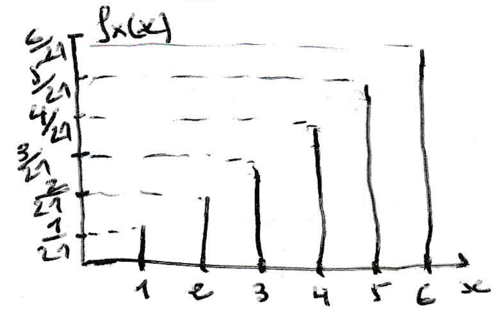
$$\sum_{x=1}^{6} f_X(x) = a + 2a + 3a + 4a + 5a + 6a = 21 \text{ donc } a = \frac{1}{21}$$

$f_X(x) = p(X=x)$

$f_X(1) = p(X=1) = \frac{1}{21}$, $f_X(2) = p(X=2) = \frac{2}{21}$, $f_X(3) = p(X=3) = \frac{3}{21}$

$f_X(4) = p(X=4) = \frac{4}{21}$, $f_X(x) = p(X=5) = \frac{5}{21}$, $f_X(6) = p(X=6) = \frac{6}{21}$

x	1	2	3	4	5	6
$f_X(x) = p(X=x)$	$\frac{1}{21}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{3}{21}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{6}{21}$



2) la fonction de répartition : F_X

$F_X(x) = p(X \leq x)$

$x < 1$: $F_X(x) = p(X < 1) = 0$

$1 \leq x < 2$: $F_X(x) = p(X \leq 1) = \frac{1}{21}$

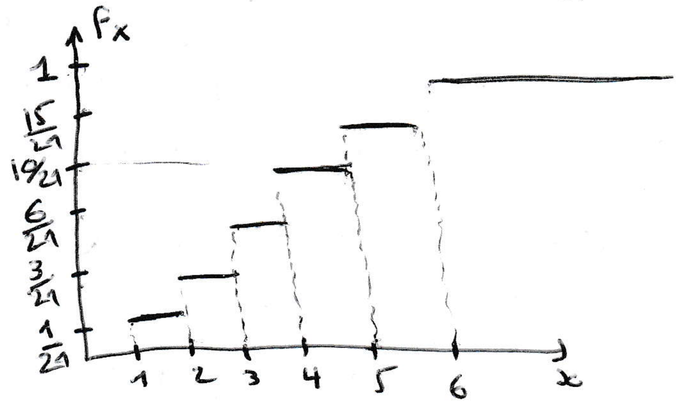
$2 \leq x < 3$: $F_X(x) = p(X \leq 2) = p(X=1) + p(X=2) = \frac{3}{21}$

$3 \leq x < 4$: $F_X(x) = p(X \leq 3) = p(X=1) + p(X=2) + p(X=3) = \frac{6}{21}$

$4 \leq x < 5$: $F_X(x) = p(X \leq 4) = p(X=1) + p(X=2) + p(X=3) + p(X=4) = 10/21$

$5 \leq x < 6$: $F_X(x) = p(X \leq 5) = p(X=1) + p(X=2) + p(X=3) + p(X=4) + p(X=5) = \frac{15}{21}$

$x \geq 6$ $F_X(x) = p(X \geq 6) = 1$



EX2: $P(X:\text{pair}) = P(X=2) + P(X=4) = 0{,}4$

$P(X\leq 0) = P(X=-3) + P(X=-1) = 0{,}15$

$$P(X=5 \mid X>1) = \frac{P[(X=5)\cap(X>1)]}{P(X>1)} = \frac{P(X=5)}{P(X=2)+P(X=4)+P(X=5)+P(X=9)} = 0{,}25$$

$$P[-3<X\leq 3 \mid X\text{ impair}] = \frac{P[(-3<X\leq 3)\cap(X\text{ impair})]}{P(X\text{ impair})} = \frac{P(X=-1)+P(X=1)}{P(X=-3)+P(X=-1)+P(X=1)+P(X=5)+P(X=9)}$$

$$= \frac{0{,}35}{0{,}6} = 0{,}58$$

$P(1<X\leq 5) = P(X=2) + P(X=4) + P(X=5) = 0{,}55$

2) $$E(X) = \sum_{x=-3}^{9} x\, f_X(x) = (-3)(0{,}05) + (-1)(0{,}1) + 1\cdot(0{,}25) + 2(0{,}2) + 4(0{,}2) + 9(0{,}05)$$

$$E(X) = 2{,}4$$

$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$

$$E(X^2) = \sum_{x=-3}^{9} x^2 f_X(x) = (-3)^2(0{,}05) + (-1)^2(0{,}1) + 1^2(0{,}25) + 2^2(0{,}2) + 4^2(0{,}2) + 5^2(0{,}15) + 9^2(0{,}05) = 12{,}6$$

$V(X) = 6{,}84$, $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = 2{,}61$

EX3: soit X_i ; $i\in[1,2]$ la variable aléatoire égale au numéro porté par la $i$ème boule tirée.

on a X_1 et X_2 sont independants $\forall x \in \{1, \dots, 10\}$ $P(X_1 = x) = \frac{1}{10}$

$P(X_2 = x) = \frac{1}{9}$

1) pour tout $x\in\{1,2,\dots,10\}$ on a :

$$F_X(x) = P(X<x) = P[X_1<x, X_2<x-1] = P(X_1<x)\,P(X_2<x-1)$$

$$= \frac{(x-1)}{10}\cdot\frac{(x-2)}{9} = \frac{(x-1)(x-2)}{90}$$

2) la loi de probabibilité : pour tout $x\in\{1,\dots,10\}$

$$f_X(x) = P(X=x) = F(x+1) - F(x) = \frac{2x-2}{90}$$

3) $$E(X) = \sum_{x=1}^{10} x\, f_X(x) = \sum_{x=1}^{10} x\, P(X=x) = 7{,}33$$

$$E(X^2) = \sum_{x=1}^{10} x^2 f_X(x) = \sum_{x=1}^{10} x\, P(X=x) = 58{,}66$$

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 4{,}9377$$

EX4: X : le nbre de fois où pile apparait donc $X = x = \{0, 1, 2, 3\}$ $X \longrightarrow B(n, \frac{1}{2})$

1) la loi de X : $f_X(x) = p(X=x) = C_n^x p^x q^{n-x}$ et $\sum_{x=0} f_X(x) = \sum_{x=0} C_n^x p^x q^{n-x} = 1$

$f_X(0) = p(X=0) = C_3^0 (\frac{1}{2})^0 (\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{8}$

$f_X(1) = p(X=1) = C_3^1 (\frac{1}{2})(\frac{1}{2})^2 = \frac{3}{8}$

$f_X(2) = p(X=2) = C_3^2 (\frac{1}{2})^2 (\frac{1}{2}) = \frac{3}{8}$

$f_X(3) = p(X=3) = C_3^3 (\frac{1}{2})^3 (\frac{1}{2})^0 = \frac{1}{8}$

X suit une loi binomiale de paramètres n et p

x	0	1	2	3
$f_X(x) = p(X=x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

2) la fonction de répartition : $F_X(x) = p(X \leq x)$

$x < 0 : F_X(x) = p(X<0) = 0$

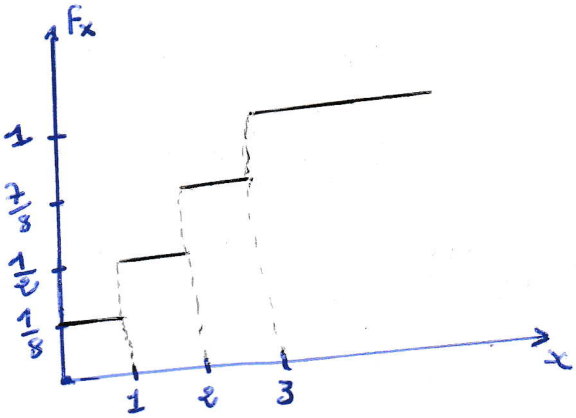
$0 \leq x < 1 : F_X(x) = p(0 \leq X < 1) = p(X=0) = \frac{1}{8}$

$1 \leq x < 2 : F_X(x) = p(X < 2) = p(X=0) + p(X=1) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

$2 \leq x < 3 : F_X(x) = p(X<3) = p(X=0) + p(X=1) + p(X=3) = \frac{7}{8}$

$x \geq 3 : F_X(x) = 1$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{8} & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{2} & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ \frac{7}{8} & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ 1 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$



3) Espérance et variance : $E(X) = np = 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

$V(X) = npq = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$

l'écart-type : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{npq} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

EX5

1) X suit une loi hypergéométrique de paramètres N.n.p avec $N = 10$ et $p = \frac{3}{5}$

donc, $f_X(x) = p(X=x) = p(x B)$ $x = 0, 1 \ldots 6$ blanches

$= p(x B \text{ et } (n-x) N)$

$$= \frac{C_{N.p}^x \; C_{Nq}^{n-x}}{C_N^n} = \frac{C_6^x \; C_4^{n-x}}{C_{10}^n}$$

2) $E(X) = np = \frac{3}{5} n = \frac{9}{5}$ $V(X) = np(1-p) \frac{N-n}{N-1} = n(\frac{3}{5})(\frac{2}{5}) \frac{10-n}{9} = 3(\frac{3}{5})(\frac{2}{5}) \frac{10-3}{9}$

$= 0{,}64$

$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = 0{,}8$

1) Y suit une loi geometrique de paramètre p, tel que $p = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$ $(Y \to G(p))$

$f_Y(x) = q^{x-1} p$

$f_Y(x) = p(Y = x)$ avec $x = 1, 2, 3, \ldots 10$

$f_Y(x) = p(Y = x) = p$ (rang de la première boule blanche x) $= p(N_1 N_2 \ldots N_{x-1} B)$

$= p(N_1) \cdot p(N_2) \ldots p(N_{x-1})\, p(B) = \left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{2}{5}\right)^{x-1}$ avec $x = 1, 2, 3 \ldots$

$Y \longrightarrow G\left(\frac{3}{5}\right)$

2) L'espérance, la variance et l'ecart-type :

$E(Y) = \frac{1}{p} = \frac{5}{3}$, $V(Y) = \frac{q}{p^2} = \frac{\frac{2}{5}}{\left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{9}{25}} = \frac{10}{9} = 1{,}11$

$\sigma(Y) = \sqrt{V(x)} = 1{,}05$

EX 6 :

1) la probabilité qu'un candidat a donné la bonne réponse a exactement cinq questions.

pour chaque question la probabilité de succés et de $\frac{1}{4}$ alors que la probabilité de l'échec et $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$, donc :

p(le candidat répond à 5 question parmi 20) $= C_{20}^{5}\left(\frac{1}{4}\right)^5\left(\frac{3}{4}\right)^{15} = 0{,}2$

2) la variable aléatoire X qui represente le nbre de réponses justes, obéit à une loi binomiale. pour toute valeur de k comprise entre 0 et 20, on a :

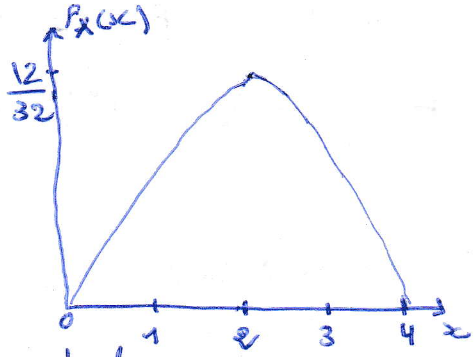
$f_X(x) = p(X = x) = C_{20}^{k}\left(\frac{1}{4}\right)^k\left(1 - \frac{1}{4}\right)^{20-k}$

EX7:

1) la constante C pour que f soit une densité de probabilité :

On a : $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 1 = \int_0^4 C x(4-x) = C\,\frac{32}{3} = 1 \Rightarrow C = \frac{3}{32}$

donc $f_X(x) = \frac{3}{32}\,x(4-x)$



2) la fonction de répartition F de X est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

On a :

pour $x \leq 0$: $F_X(x) = \int_{-\infty}^{0} f(t)dt = 0$

pour $x \in [0,4]$: $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_0^x \frac{3}{32} t(4-t)\,dt = \frac{x^2}{32}(6-x)$

pour $x \geq 4$: $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_0^4 f(t)dt = 1$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{x^2}{32}(6-x) & \text{si } x \in [0,4] \\ 1 & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$$

3) $P(1 \leq X \leq 2) = F(2) - F(1) = \frac{11}{32}$

$P[X>3 \mid X>2] = \frac{P[(X>3) \cap (X>2)]}{P(X>2)} = \frac{P(X>3)}{P(X>2)} = \frac{1-F(3)}{1-F(2)} = \frac{5}{16}$

4) L'espérance, la variance ainsi que l'écart-type

$E(X) = \int_{\mathbb{R}} x f(x)dx = \int_0^4 \frac{3}{32} x^2(4-x)dx = 2$

$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$ avec $E(X^2) = \int_{\mathbb{R}} x^2 f(x)dx = \int_0^4 \frac{3}{32} x^3(4-x)dx = \frac{24}{5}$

donc $V(X) = \frac{24}{5} - (2)^2 = \frac{24}{5} - \frac{20}{5} = \frac{4}{5} = 0{,}8$

$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = 0{,}89$

5) la densité de probabilité de la variable aléatoire $Z = \sqrt{X}$

$$Z = \sqrt{X} \Rightarrow X = Z^2 \text{ donc } \frac{dx}{dz} = 2z$$

alors la densité f_Z de Z est :

$$f_Z(z) = f_X(z^2)\left|\frac{dx}{dz}\right| = \frac{3}{16} z^3 (4 - z^2), \quad 0 \leq z \leq 2$$

Ex8 : on appelle X la variable aléatoire donnant la durée de vie du disque dur :

X suit une loi exponentielle de paramètre λ. le fabriquant veut garantir que

$P(X \leq 1) \leq 0{,}001$

Comme $p(X \leq a) = F_X(a)$ par définition on obtient

$$F_X(x) = P(X < 1) = 1 - F_X(1) = 1 - \exp(-\lambda \times 1) \leq 0{,}001$$

donc $1 - \exp(-1) \leq 0{,}001 \Rightarrow 0{,}999 \leq \exp(-\lambda) \Rightarrow \ln(0{,}999) \leq -\lambda$

$$\lambda \leq -\ln(0{,}999)$$

$$\frac{-1}{\ln(0{,}999)} \leq \frac{1}{\lambda} \Rightarrow 999{,}5 \leq \frac{1}{\lambda}$$

$\frac{1}{\lambda}$ représente l'espérance de X qui suit une loi exponentielle. La durée de vie moyenne du disque dur doit donc être au moins 999,5 ans.

Ex9 : soit X la variable aléatoire correspondant à la quantité d'eau dans le verre, donc X suit une loi uniforme sur l'intervalle $[0 . 100]$. on cherche $p(X \leq 25)$, par définition de la fonction de répartition $p(X \leq 25) = F_X(25)$. pour une variable uniforme sur $[0,100]$

$$F_X(25) = \frac{25 - 0}{100 - 0} = \frac{1}{4}$$

2) $E(X) = \frac{b+a}{2} = \frac{100+0}{2} = 50$

$$V(X) = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{(100-0)^2}{12} = 833{,}33$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = 28{,}86$$