Chapitre I
Equations de Maxwell dans le vide

Champs electromagnetique:

Force de Lorenz: $F = q(E + v \wedge B)$

Equations de Maxwell:

on $\nabla(\nabla \wedge B) = 0 \Leftrightarrow \boxed{\nabla J = \frac{-\partial \rho}{\partial t}}$

1er Equation (Equation de flux):

$\nabla . B = 0$

ostogradski

$\oint\!\!\oint B . dS = 0 = \iiint_V \nabla . B \, dV = 0 \Rightarrow \nabla . B = 0$

Le champ B est à flux conservatif.

2eme Equation (Maxwell - Faraday):

$\nabla \wedge E = \frac{-\partial B}{\partial t}$

En electrostatiq $E(r)$ derive d'un potentiel $V(r)$, $E = -\nabla V$.

+ En regime permanent $\nabla \wedge E = 0$

stokes

$\oint_C E . dl = \iint_S (\nabla \wedge E) dS = \iint_S \left(\frac{-\partial B}{\partial t} . dS\right)$

$= \frac{-\partial}{\partial t} \iint_S B . dS = \frac{-\partial \phi}{\partial t}$

$$\boxed{\nabla \wedge E = -\frac{\partial B}{\partial t} \Leftrightarrow \oint E \, dl = \frac{-\partial \phi}{\partial t}}$$

$B(t)$ donne la naissance d'un $E(t)$ à circulation non conservatif.

3eme Equation (Maxwell - Gauss)

+ $\boxed{\phi = \oint\!\!\oint_S E . dS = \frac{Q}{\varepsilon_0}}_{\text{Gauss}} = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_V \rho \, dV$

$\oint\!\!\oint_S E . dS = \iiint_V (\nabla . E) dV = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_V \rho \, dV$

$$\boxed{\nabla . E = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \Leftrightarrow \oint\!\!\oint_{(\Sigma)} E . dS = \frac{Q}{\varepsilon_0}}$$

Relaxation de charges dans un conducteur :

$\nabla . J = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$ et la loi d'ohms locale

$J = \sigma E$

$\nabla(\sigma . E) = \sigma(\nabla . E) + E(\cancel{\nabla \sigma})^{0} = \sigma(\frac{\rho}{\varepsilon_0}) = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$

$-\frac{\partial \rho}{\rho} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} . dt \Rightarrow \rho(t) = \rho_0 e^{-t/\tau}$ tq $\boxed{\tau = \frac{\varepsilon_0}{\sigma}}$

4ème Equation (Maxwell-Ampère)

$$\boxed{\nabla \wedge B = \mu_0 (J + \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t})}$$

le théorème d'Ampère d'électrostatique

$\oint_{(C)} B dl = \iint_S (\nabla \wedge B) dS = \mu_0 \iint_S J . dS$

$$\boxed{\nabla \wedge B = \mu_0 J \Longleftrightarrow \oint_{(C)} B dl = \mu_0 I}$$ ampère — en régime permanent

* régime non permanent :

$\oint_{(C)} B dl = \iint_S (\nabla \wedge B) dS = \mu_0 \left[\iint J dS + \iint_S \underbrace{\varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}}_{J_D} dS\right]$

$\nabla \wedge B = \mu_0 (J + J_D)$

$$\boxed{\nabla \wedge B = \mu_0 \left[J + \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}\right] \Longleftrightarrow \oint_{(C)} B dl = \mu_0 (I + \iint_S J_D dS)}$$

J_D : densité du courant de déplacement

Conclusion :

* En statique si $B = 0$. E peut $\neq 0$ (condensateur)
* En magnétostatique si $E = 0$. B peut $\neq 0$ (ex I)
* Quand les champs varie avec le temps : $\boxed{B \neq 0 \Longleftrightarrow E \neq 0}$

Chapitre II

Propagation du Champs électromagnétique dans le vide

Equation de propagation du champs

$$\boxed{\nabla^2 r_m = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 r_m}{\partial t^2}}$$

tq $\nabla^2 = \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

l'équation précédente représente l'expression mathématique de l'équation de propagation de la grandeur r_m suivant une direction quelconque

* $H = \varepsilon_0 B$

le vecteur Poynting :

$P = E \wedge H$

Démonstration pour l'équation de propagation d'un champs Electrique :

$\nabla \wedge (\nabla \wedge E) = \nabla \wedge (-\frac{\partial B}{\partial r}) = \nabla \wedge (-\mu_0 \frac{\partial H}{\partial r})$

$= -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\frac{\partial H}{\partial r}) = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial r})$

$= -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 E}{\partial r} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 E}{\partial r}$

$\nabla \wedge (\nabla \wedge E) = \nabla . (\nabla . E) - \nabla^2 E$

or $\nabla . E = \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0$ (Car dans le vide $J = 0 \Rightarrow \rho = 0$ (milieu neutre))

$\nabla \wedge (\nabla \wedge E) = -\nabla^2 E$

$$\boxed{\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 E}{\partial r^2} = \nabla^2 E = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t}}$$

Ondes planes électromagnétiques dans le vide :

Propagation unidimensionnelle :

$$\boxed{\nabla = -\frac{1}{C} u \frac{\partial}{\partial t}}$$ tq u : est le vecteur unitaire d'un axe quelconque.

cette équa valable uniquement pour une onde plane progressive.

Structure de l'onde plane progressive :

au dehors de la source : $\rho = 0$ et $j = 0$ $\overrightarrow{u}$

donc

$\nabla . B = 0 \Rightarrow -\frac{1}{C} u \frac{\partial B}{\partial t} = 0$

$\nabla \wedge E = -\frac{\partial B}{\partial t} \Rightarrow -\frac{1}{C} u \wedge \frac{\partial E}{\partial t} = -\frac{\partial B}{\partial t}$

$\nabla . E = 0 \Rightarrow -\frac{1}{C} u . \frac{\partial E}{\partial t} = 0$

$\nabla \wedge B = \frac{1}{C^2} \frac{\partial E}{\partial t} \Rightarrow -\frac{1}{C} u \wedge \frac{\partial B}{\partial t} = \frac{1}{C^2} \frac{\partial E}{\partial t}$

$\int (2) dt \Rightarrow B = \int + \frac{1}{C} u \wedge \frac{\partial E}{\partial t} = + \frac{1}{C} u \wedge \left(\int \partial E \right)$

$$\boxed{B = \frac{1}{C} u \wedge E} \quad (1)$$

$\int (4) dt \Rightarrow \int \frac{1}{C^2} \frac{\partial E}{\partial t} = \int -\frac{1}{C} \frac{\partial B}{\partial t}$ donc

$$\boxed{E = -C u \wedge B} \quad (2)$$

de (1) et (2) on a $\boxed{|E| = C|B|}$

Ondes planes progressive sinusoïdale :

si ox est l'axe de propagation de l'onde donc :

$$E = \begin{pmatrix} E_x = 0 \\ E_y = E_{0y} \cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{c}\right) + \varphi_2\right] \\ E_z = E_{0z} \cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{c}\right) + \varphi_3\right] \end{pmatrix}$$

$$B = \frac{1}{C} u \wedge E = \frac{1}{C} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_x = 0 \\ B_y = -\frac{1}{C} E_z \\ B_z = \frac{1}{C} E_y \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\varphi(x, t) = \omega\left(t - \frac{x}{c}\right) + \varphi_i}$$

$= (\omega t - Kx) + \varphi_i$

entre "t" et "dt" : $\varphi(x, t) = \varphi(x + dx, t + dt)$

$\omega t - Kx + \varphi_i = \omega t + \omega dt - Kx - K dx + \varphi_i$

$\omega dt = K dx \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{K} = \frac{\omega C}{\omega} = C$

$$\boxed{v_\varphi = C}$$

Longueur d'onde λ :

- $\lambda = v_\varphi T = CT = 2\pi \frac{C}{\omega} = \frac{2\pi}{K}$
- $\omega = \frac{2\pi}{T}$, $\nu = \frac{1}{T}$ (fréquence)

$\boxed{\sigma = 1/\lambda}$: nombre d'onde

Chapitre III

Résolution des équations de Maxwell dans le vide

Introduction des potentiels :

$\nabla . B = 0$ i.e : B est à flux conservatif donc $B = \nabla \wedge A$ on dit que B dérive d'un potentiel vecteur A

- $\nabla \wedge E = -\frac{\partial B}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \wedge A) = -\nabla \wedge \frac{\partial A}{\partial t}$

$$\boxed{\nabla \wedge E = \nabla \wedge \left(E + \frac{\partial A}{\partial t}\right)}$$

NB : Un vecteur dérive d'un potentiel scalaire ssi son rotationnel est nulle

$\nabla \wedge \left(E + \frac{\partial A}{\partial t}\right) = 0 \Rightarrow E + \frac{\partial A}{\partial t} = \nabla \phi$

on pose $\boxed{\phi = -V}$

Le champ scalaire $V(r, t)$ est appelé dans le cas générale non permanents **potentiel scalaire**

- Le champ électromagnétique (E, B) dérive des potentiels (V, A) par les relations :

$$\boxed{B = \nabla \wedge A} \; ; \; \boxed{E = -\nabla V - \frac{\partial A}{\partial t}}$$

Indétermination des potentiels :

soit : $\phi(r, t)$: un champ scalaire quelconque

(V_0, A_0) : un couple de potentiel du champ (E, B)

On peut obtenir d'autres couples (V, A) de potentiels de ce champ par la **transformation de jauge** :

$$\boxed{A = A_0 + \nabla \phi} \; ; \; \boxed{V = V_0 - \frac{\partial \phi}{\partial t}}$$

Condition de Jauge de Lorentz

$$\boxed{\nabla . A + \frac{1}{C^2} \frac{\partial V}{\partial t} = 0}$$

Equation de poisson:

pour V:

Jauge de Lorenz

$$\nabla\cdot E = \nabla\left(-\nabla V - \frac{\partial A}{\partial t}\right) = -\Delta V - \frac{\partial(\nabla\cdot A)}{\partial t} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$= -\Delta V - \frac{\partial\left(\frac{-1}{c^2}\frac{\partial V}{\partial t}\right)}{\partial t} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \Rightarrow -\Delta V + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\boxed{\Delta V - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0} \text{ ou } \boxed{\Box V + \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0}$$

pour le potentiel vecteur A:

$$\nabla\wedge(\nabla\wedge A) = \nabla(\nabla\cdot A) - \Delta A = \mu_0 J - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial(\nabla V)}{\partial t} - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial A}{\partial t}$$

condition de Jauge de Lorenz

$$\nabla\left(\nabla\cdot A + \frac{1}{c^2}\frac{\partial V}{\partial t}\right) = \Delta A + \mu_0 J - \frac{1}{c^2}\frac{\partial A}{\partial t}$$

$$\boxed{\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial A}{\partial t} + \mu_0 J = 0} \text{ ou } \boxed{\Box A + \mu_0 J = 0}$$

Ces deux équations sont une conséquence des équations de Maxwell et de la Jauge de Lorenz

NB:

* En electrostatique ρ est fixe (indépendent de temps) $\Box = \Delta$

$$\boxed{\Delta V + \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0}$$

* En manétostatique (champ magnétique créer par des courant continus)

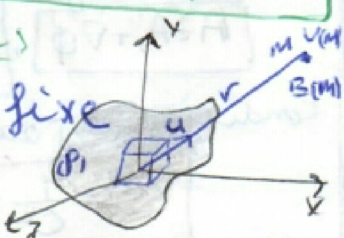
$\Box = \Delta \Rightarrow \boxed{\Delta A + \mu_0 J = 0}$

Resolution des équation de poisson

en électrostatique:

Soit ρ contenue et fixe

$$\boxed{V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint \frac{\rho}{r}\,dV}$$



$\cdot\, E(M) = -\nabla_M V \Rightarrow \boxed{E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint\left(\frac{\rho u}{r^2}\right)dv}$

En magnétostatique:

$$\boxed{A = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint \frac{J}{r}\,dv}$$

$B(M) = \nabla_M \wedge A \Rightarrow \boxed{B = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint\left(J\wedge\frac{u}{r^2}\right)dV}$

En régime générale (regime non permanent)

$$\boxed{V(M,t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint\frac{\rho\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r}\,dv}$$

$$\boxed{A(M,t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint\frac{J\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r}\,dv}$$

Devellopement de Calculs

En électrostatique: $\left(\Delta V + \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0\right)$

supposons $V(\infty) = 0$

$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint\left(\frac{\rho}{r}\right)dV$ { accepter directement sans démonstration

$$E = -\nabla_M V = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint\nabla\left(\frac{\rho}{r}\right)dV = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint\rho\,\nabla_M\left(\frac{1}{r}\right)dV$$

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint\left(\frac{\rho}{r^2}u\right)dV$$

la loi de Coulomb pour un charge ponctuel $\iiint\rho\,dV = q \Rightarrow \boxed{E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}u}$

En magnétostatique: $\Delta A + \mu_0 J = 0$

Supposons que $A(\infty) = 0$

$A = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint\frac{J}{r}\,dV$ { de solution est acceptable directement sans démonstration

$$B(M) = (\nabla_M \wedge A) = \nabla_M \wedge\left(\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint\frac{J}{r}\,dV\right)$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint\left(\nabla_M \wedge \frac{J}{r}\right)dV$$

Voici les relations pour les rot et div:

$$\nabla\wedge(fA) = (\nabla f \wedge A) + f(\nabla\wedge A)$$

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint\left[\nabla_M\left(\frac{1}{r}\right)\wedge J + \underbrace{\frac{1}{r}(\nabla_M \wedge J)}_{0}\right]dV$$

on dérive par rapport aux coordonnées de M

$\nabla_M\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^2}u \Rightarrow \boxed{B = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint\left(J\wedge\frac{u}{r^2}\right)dV}$

La loi de Biot savart

Chapitre IV

Energie electromagnétique dans le vide

Rappel :

$$W = \iiint_\tau \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} d\tau = \iiint \frac{1}{2} \rho V d\tau$$ (energie electrostatique)

$$\boxed{\omega = \frac{dW}{d\tau} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2}$$ La densité volumique de l'energie électrostatique

puissance et vecteur de Poynting :

4ème equation de Maxwell :

$$\nabla \wedge B = \mu_0\left(J + \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}\right) \Leftrightarrow \nabla \wedge \frac{B}{\mu_0} = \left(J + \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}\right)$$

- On effectuons le produit scalaire suivant :

$$E\left(\nabla \wedge \frac{B}{\mu_0}\right) = JE + E\varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \Leftrightarrow \frac{B}{\mu_0}(\nabla \wedge E) - \nabla\cdot\left(E \wedge \frac{B}{\mu_0}\right)$$

$$= JE + \frac{1}{2}\varepsilon_0 \frac{\partial E^2}{\partial t}$$

d'après la 2ème équations de Maxwell :

$$\nabla \wedge E = -\frac{\partial B}{\partial t} \Rightarrow \frac{B}{\mu_0}(\nabla \wedge E) = \frac{B}{\mu_0}\left(-\frac{\partial B}{\partial t}\right) = -\frac{1}{2\mu_0}\frac{\partial B^2}{\partial t}$$

donc

$$-\frac{1}{2\mu_0}\frac{\partial B^2}{\partial t} - \nabla\left(E \wedge \frac{B}{\mu_0}\right) = JE + \frac{1}{2}\varepsilon_0 \frac{\partial E^2}{\partial t} \quad (1)$$

on intégrant sur tout le volume τ, et on applique le théoreme d'ostogradski à (1)

$$\iiint_\tau (J\cdot E)\, d\tau = \frac{-\partial}{\partial t}\iiint_\tau \underbrace{\left(\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0}B^2\right)}_{\omega} d\tau - \oiint_S \underbrace{\left(E \wedge \frac{B}{\mu_0}\right)}_{\Pi} dS \quad (I)$$

tq :

$\boxed{\iiint_\tau (J\cdot E)\, d\tau}$: est la puissance dissipée dans le volume τ par unité de temp sous forme de chaleur

- $\boxed{\iiint_\tau \left(\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0}B^2\right) d\tau}$: est l'énergie stockée dans le champ electrique E et magnètique B

- $\boxed{\frac{-\partial}{\partial t}\iiint \left(\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0}B^2\right) d\tau}$: peut être interpréter comme une diminution de l'energie emmagasinées

- $\boxed{\oiint_S \left(E \wedge \frac{B}{\mu_0}\right) dS = \iint \Pi \cdot dS}$: Doit represente la puissance évacuée vers l'extérieur à travers la surface S. C'est une puissance rayonnée

$\boxed{\Pi = \left(E \wedge \frac{B}{\mu_0}\right)}$ est le vecteur poynting

d'après (I) on a : $\iiint_\tau (J\cdot E)\, d\tau = \frac{-\partial}{\partial t}\iiint_\tau \omega\, d\tau - \iiint_\tau \nabla \Pi\, d\tau$

$$\boxed{\frac{-\partial \omega}{\partial t} = JE + \nabla \Pi}$$

C'est l'équation de conservation de l'energie

والسلام عليكم ورحمة الله تعالى وبركاته