Corrigé de la série 2A

Exercice 1 (figure 1)

a) *Détermination de la pression dans la conduite B*

$P_A = P_1$ (isobare)

$P_B = \rho_e.g.(2m) + \rho_h.g.(3m) + P_2 \Rightarrow P_2 = P_B - \rho_e.g.(2m) - \rho_h.g.(3m)$

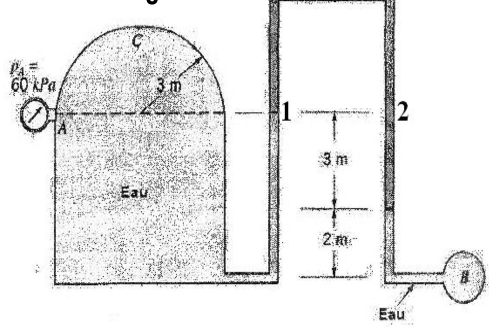
$P_2 = P_1$ (isobare)

Donc, on a : $P_A = P_B - \rho_e.g.(2m) - \rho_h.g.(3m)$

D'où $P_B = P_A + \rho_e.g.(2m) + \rho_{Hg}.g.(3m)$

A.N : $\mathbf{P_B} =$ $60x10^3 + 9,81x[10^3x(2m) + 0,8x10^3x(3m)]$ = **103164 N = 103,16 kN**

Figure 1



b) *Hauteur de pression au point C* *(en mmHg)*

$P_A = P_C + \rho_e.g.(3m) \Rightarrow P_C = P_A - \rho_e.g.(3m)$

A.N : $\mathbf{P_C} =$ $60x10^3 - 10^3x9,81x(3m)$ = **30570 N = 30,57 kN**

La hauteur de pression h (en cmHg) correspondant à P_c est :

h = $P_C/(\rho_{Hg}.g)$ = 30570/(13570x9,81) = 2,3 mHg = **230 cmHg**

Exercice 2 (figure 2)

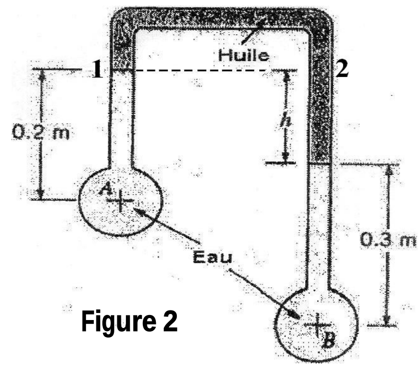


Figure 2

$P_A = P_1 + \rho_e.g.(0,2m) \Rightarrow P_1 = P_A - \rho_e.g.(0,2m)$

$P_B = P_2 + \rho_h.g.h + \rho_e.g.(0,3m) \Rightarrow P_2 = P_B - \rho_e.g.(0,3m) - \rho_h.g.h$

$P_1 = P_2$ (isobare)

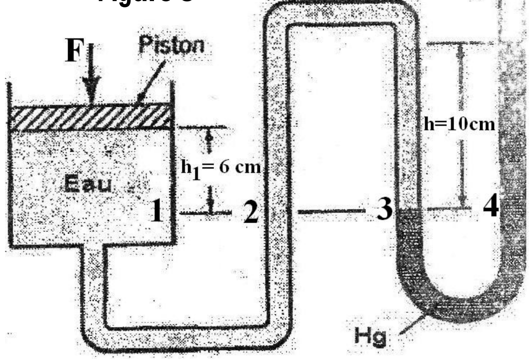
D'où $P_A - \rho_e.g.(0,2m) = P_B - \rho_e.g.(0,3m) - \rho_h.g.h$

$$\Rightarrow h = \frac{(P_B - P_A) - \rho_e.g.(0,3m) + \rho_e.g.(0,2m)}{\rho_h.g} = \frac{5x10^3 + 10^3.9,81.(0,2-0,3)}{800x9,81} = 0,512\ m$$

Donc, **h = 51,2 cm**

Exercice 3 (figure 3)

Figure 3



$P_1 = \rho_e.g.h_1 + F/S$

$P_1 = P_2 = P_3 = P_4$ (isobare)

$P_4 = \rho_{Hg}.g.h$ (P_4 manométrique)

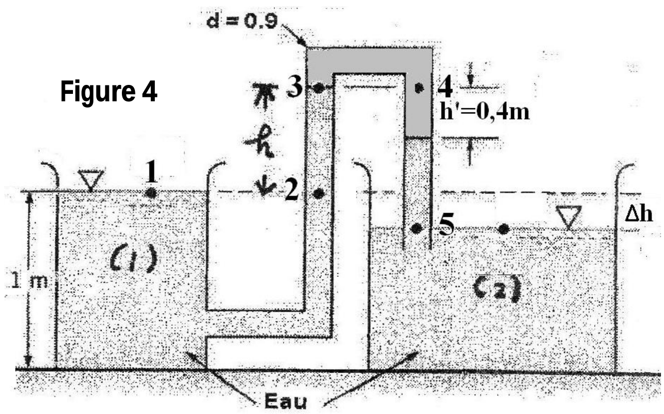
D'où $\rho_e.g.h_1 + F/S = \rho_{Hg}.g.h$

Il sort $F = \left(\rho_{Hg}.g.h - \rho_e.g.h1\right).S$

A.N : $\mathbf{F} =$ $(13600x9,81x0,1 - 10^3x9,81x0,06)x0,07 = \mathbf{892,71\ N}$

Exercice 4 (figure 4)

Figure 4



$P_1 = 0$ (pression relative)

$P_1 = P_2$ (isobare)

$P_2 = P_3 + \rho_e.g.h$ (et $P_2 = 0$) $\Rightarrow P_3 = -\rho_e.g.h$ (1)

$P_5 = 0$

$P_5 = \rho_e.g.(h - h' + \Delta h) + \rho_l.g.h' + P_4$

D'où $P_4 = -\rho_e.g.(h - h' + \Delta h) - \rho_l.g.h'$ (2)

$P_3 = P_4$ (isobare)
(1) et (2) $\Rightarrow$ $-\rho_e.g.h = -\rho_e.g.(h - h' + \Delta h) - \rho_l.g.h'$

D'où $\Delta h = \frac{\rho_e.g.h' - \rho_l.g.h'}{\rho_e.g} = \frac{h'(\rho_e - \rho_l)}{\rho_e}$

A.N : $\Delta h = \frac{0{,}4x(10^3-900)}{10^3} = 0{,}04$ m Donc, $\mathbf{\Delta h = 4\ cm}$

Exercice C1 (figure 1) Exercice Complaimentaire

Avant diminution de P_A, on a : P_A et P_B Après, on a : $P_A' = P_A - 10$ kPa et $P_B' = P_B$

Avant : isobare au niveau des points 1 et 2 $P_1 = P_B + \rho_e.g.h_2$
$P_2 = P_A + \rho_h.g.h_1 + \rho_{Hg}.g.L.\sin(\alpha)$ $P_1 = P_2$ (isobare)

D'où $P_B + \rho_e.g.h_2 = P_A + \rho_h.g.h_1 + \rho_{Hg}.g.L.\sin(\alpha) \Rightarrow P_B = P_A + \rho_h.g.h_1 + \rho_{Hg}.g.L.\sin(\alpha) - \rho_e.g.h_2$ (1)

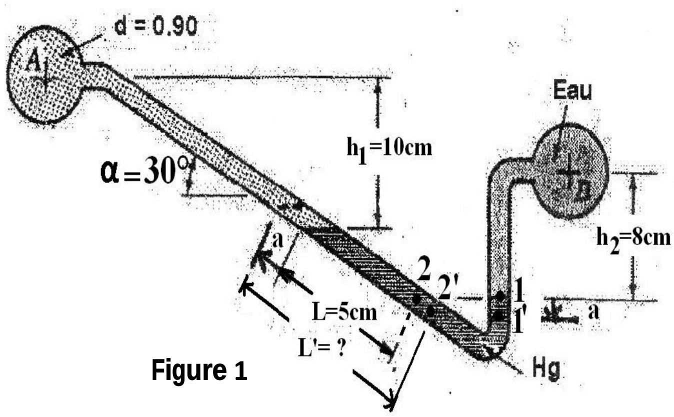


Figure 1

Avant : isobare au niveau des points 1' et 2'
$P_{1'} = P_B + \rho_e.g.(h_2 + a)$

$P_{2'} = P_A' + \rho_h.g.[h_1 - a.\sin(\alpha)] + \rho_{Hg}.g.L'.\sin(\alpha)$; avec $L'.\sin(\alpha) = a + a.\sin(\alpha) + L.\sin(\alpha)$
Donc, $P_{2'} = P_A' + \rho_h.g.[h_1 - a.\sin(\alpha)] + \rho_{Hg}.g.[a + a.\sin(\alpha) + L.\sin(\alpha)]$
$P_{1'} = P_{2'}$ (isobare)

D'où $P_B + \rho_e.g.(h_2 + a) = P_A' + \rho_h.g.[h_1 - a.\sin(\alpha)] + \rho_{Hg}.g.[a + a.\sin(\alpha) + L.\sin(\alpha)]$
$\Rightarrow$ $P_B = P_A' + \rho_h.g.[h_1 - a.\sin(\alpha)] + \rho_{Hg}.g.[a + a.\sin(\alpha) + L.\sin(\alpha)] - \rho_e.g.(h_2 + a)$ (2)

(1) – (2) $\Rightarrow$ $0 = (P_A - P_A') + [\rho_h.g.\sin(\alpha)].a - [\rho_{Hg}.g.(1 + \sin(\alpha)].a + \rho_e.g.a$

D'où $a = \frac{-(P_A - P'_A)}{g.[\rho_h.\sin(\alpha) - \rho_{Hg}.[1+\sin(\alpha)] + \rho_e]}$; $1 + \sin(\alpha) = 1 + \sin(30°) = 1{,}5$ et $\sin(\alpha) = \sin(30°) = 0{,}5$

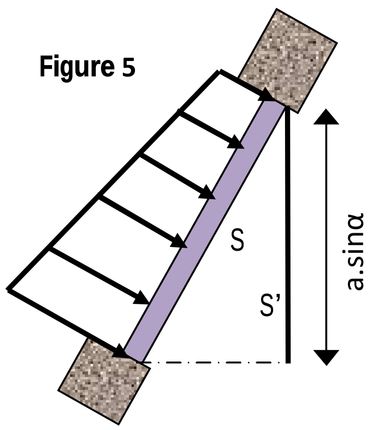
A.N : $a = \frac{-10x10^3}{9{,}81x[900x0{,}5-13570x1{,}5+10^3]} = 0{,}054$ m ; donc **a = 5,4 cm**

Et la nouvelle lecture est : $L' = a + L + \frac{a}{\sin(\alpha)} = 0{,}054 + 0{,}05 + \frac{0{,}054}{0{,}5} = 0{,}212\ m$; **L' = 21,2 cm**

Exercice 5

1) L'épure des pressions est représentée par la figure 6.

2) Force et centre de pression

Figure 5


$F_p = \rho_e.g.h_G.S$ avec $S = 2x3 = 6$ m² et

$$h_G = H - 1 - \frac{a}{2}\sin\alpha = 6 - 1 - \frac{2}{2}\sin 45° = 4{,}29 \text{ m}$$

Donc, $\mathbf{F_p} = 10^3x9{,}81x4{,}29x6 = \mathbf{252\ 509{,}4\ N}$

Pour le centre de pression, on a : $h_{CP} = h_G + \frac{I_0}{h_G.S'}$

Avec $S' = b.a.\sin\alpha = 3x2x\sin 45° = 4{,}24\ m^2$

Et $I_0 = \frac{b.(a.\sin\alpha)^3}{12} = \frac{3x(2x\sin 45°)^3}{12} = 0{,}7071\ m^4$

D'où $\mathbf{h_{CP}} = 4{,}29 + \frac{0{,}7071}{4{,}29x4{,}24} = \mathbf{4{,}33\ m}$

Si on détermine y_{cp}, on a : $y_{CP} = y_G + \frac{I_{xG}}{y_G.S}$

Avec $y_G = h_G/\sin\alpha = 4{,}29 / \sin 45° = 6{,}07$ m ; S = a.b et $I_{xG} = \frac{b.a^3}{12}$

On a donc : $\mathbf{y_{CP}} = y_G + \frac{\frac{b.a^3}{12}}{y_G.b.a} = y_G + \frac{a^2}{12y_G} = 6{,}07 + \frac{2^2}{12x6{,}07} = \mathbf{6{,}12\ m}$

Remarque : on peut vérifier aussi que $\mathbf{y_{CP}} = \frac{h_{cp}}{\sin\alpha} = \frac{4{,}33}{\sin 45°} = \mathbf{6{,}12\ m}$

3) *Cas d'une vitre circulaire de diamètre d*

– *Force et centre de pression*

$F_p = \rho_e.g.h_G.S$ avec $S = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{3{,}14x2^2}{4} = 3{,}14\ m^2$ et

$$h_G = H - 1 - \frac{d}{2}\sin\alpha = 6 - 1 - \frac{2}{2}\sin 45° = 4{,}29\ m$$

Donc, $\mathbf{F_p} = 10^3x9{,}81x4{,}29x3{,}14 = \mathbf{132146{,}6\ N}$

– Centre de pression, de même on a : $h_{CP} = h_G + \frac{I_0}{h_G.S'}$

Avec $S' = S.\sin\alpha = 3{,}14x\sin 45° = 2{,}22\ m^2$

Et $I_0 = \frac{\pi.(d.\sin\alpha)^4}{64} = \frac{3{,}14x(2x\sin 45°)^4}{64} = 0{,}1963\ m^4$

D'où $\mathbf{h_{CP}} = 4{,}29 + \frac{0{,}1963}{4{,}29x2{,}22} = \mathbf{4{,}31\ m}$

Si on détermine y_{cp}, on a : $y_{CP} = y_G + \frac{I_{xG}}{y_G.S}$

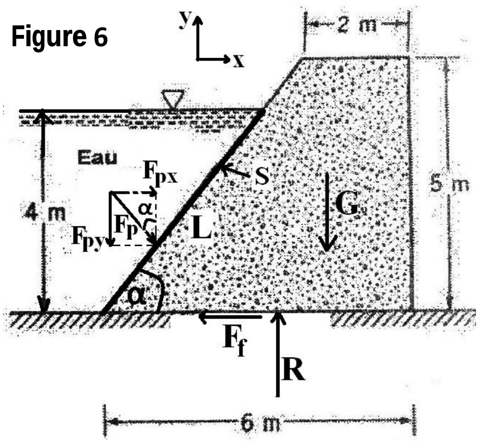
Avec $y_G = h_G/\sin\alpha = 4{,}29 / \sin 45° = 6{,}07$ m ; $S = \frac{\pi d^2}{4}$ et $I_{xG} = \frac{\pi.d^4}{64}$

On a donc : $\mathbf{y_{CP}} = y_G + \frac{\frac{\pi.d^4}{64}}{y_G.\frac{\pi d^2}{4}} = y_G + \frac{d^2}{16y_G} = 6{,}07 + \frac{2^2}{16x6{,}07} = \mathbf{6{,}11\ m}$

Remarque : on peut vérifier aussi que $\mathbf{y_{CP}} = \frac{h_{cp}}{\sin\alpha} = \frac{4{,}31}{\sin 45°} = \mathbf{6{,}10\ m}$

Exercice 6 (figure 6)

Figure 6



Les forces appliquées sur le barrage sont indiquées sur la figure 7.

G = poids propre du barrage

R = réaction verticale du sol

F_p = force de pression exercée par l'eau sur la surface S du barrage en contact avec l'eau. F_{px} et F_{py} sont les projections de F_p sur les axes x et y respectivement.

F_f = force de frottement à la base du barrage ; elle s'oppose au glissement.

On a : $F_f = \eta . R$

Pour éviter le glissement du barrage, il faut avoir : $F_f \geq F_{px}$

Ou encore $\eta . R \geq F_{px} \quad \Longrightarrow \quad \eta \geq \frac{F_{px}}{R}$

Déterminons F_{px} et R.

$\sum F_y = 0 \Rightarrow G + F_{py} - R = 0 \Rightarrow R = G + F_{py}$

$$\mathbf{G} = \rho_{béton} . g . V_{béton} = \rho_{béton} . g . [S_{trapèze} . b]$$
$$= (2{,}36x10^3)x9{,}81x\left[\frac{1}{2}x(2+6)x5x1\right]$$
$$= \mathbf{463032\ N}$$

F_{py} = poids du volume d'eau au-dessus de la surface S du barrage en contact avec l'eau (figure 10').

$$\mathbf{F_{py}} = \rho_e . g . V_{ABC} = \rho_e . g . S_{ABC} . b$$
$$= 10^3x9{,}81x\left(\frac{1}{2}x3{,}2x4\right)x1 = \mathbf{62784\ N}$$

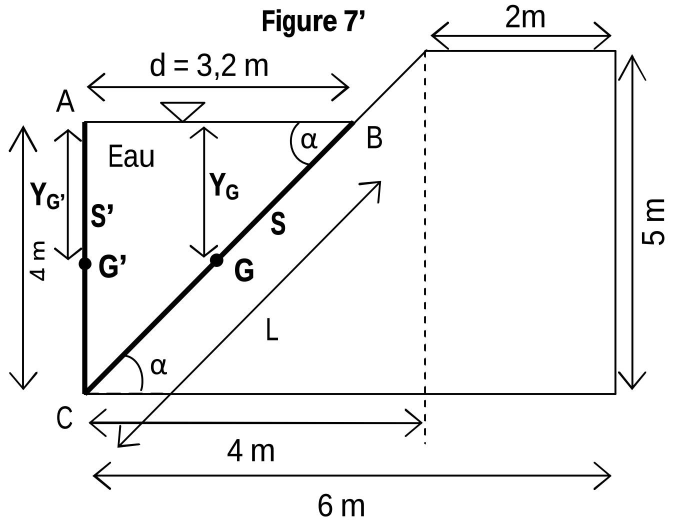
D'où $R = 472x10^3 + 62784 = 534784$ N

$F_{px} = \rho_e . g . y_{G'} . S'$ (figure 7')

$$\mathbf{F_{px}} = 10^3x9{,}81x\frac{4}{2}x(4x1) = \mathbf{78480\ N}$$

Donc, $\eta \geq \frac{F_{px}}{R} \quad \Longrightarrow \quad \eta \geq \frac{78480}{534784} \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{\eta \geq 0{,}147}$

Figure 7'



$$tg(\alpha) = \frac{5}{4} \Longrightarrow \alpha = 51{,}34°$$

$$L = \frac{AC}{\sin(\alpha)} = \frac{4}{\sin(51{,}34°)} = 5{,}123 \text{ m}$$

$$d = L.\cos(\alpha) = 5{,}123x\cos(51{,}34°) = 3{,}2 \text{ m}$$

Remarque

Pour le calcul de F_{px} et F_{py}, on peut faire aussi : $F_p = \rho_e . g . y_G . S = 10^3x9{,}81x\frac{4}{2}x(5{,}123x1) = 100513{,}3$ N

$$F_{px} = F_p . \sin(\alpha) = 100513{,}3x\sin(51{,}34°) = 78487{,}5 \text{ N}$$

$$F_{py} = F_p . \cos(\alpha) = 100513{,}3x\cos(51{,}34°) = 62790{,}4 \text{ N}$$

Exercice C2 (figure 2)

Exercice Complaimentaire

$$F_p = \rho_e . g . y_G . S = \rho_e . g . \frac{h}{2} . (h . b) = \frac{\rho_e . g . h^2 . b}{2} \qquad \text{et} \qquad y_{cp} = \frac{2}{3} h$$

Ecrivons l'équation d'équilibre des moments par rapport au pivot O. On a :

$$\sum M_{/O} = 0 \quad \Longrightarrow \quad R.h = F_p . y_{cp} \quad \Longrightarrow \quad R.h = \frac{\rho_e . g . h^2 . b}{2} x \frac{2}{3} h$$

D'où $\mathbf{R} = \frac{\boldsymbol{\rho_e . g . h^2 . b}}{\mathbf{3}}$ (1)

Cas a (figure 8. Cas a)

Dans ce cas, on a :

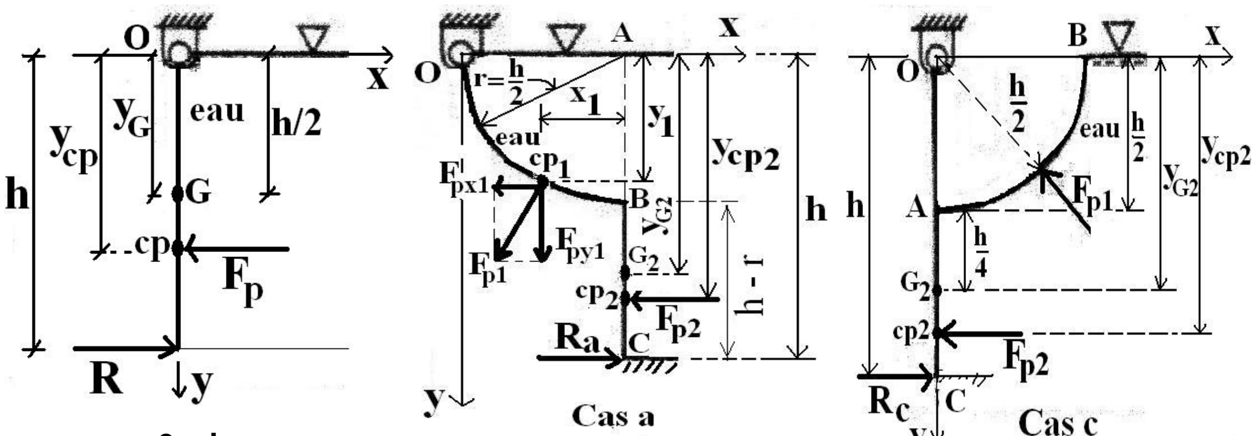
$$F_{p2} = \rho_e . g . y_{G2} . S_{BC} \qquad \text{avec} \qquad y_{G2} = \frac{3h}{4} \qquad \text{et} \qquad S_{BC} = \frac{h}{2}.b$$

D'où $F_{p2} = \rho_e . g . \frac{3h}{4} . \frac{h}{2} . b = \frac{3\rho_e . g . h^2 . b}{8}$

La position du centre de pression cp_2 est donnée par : $y_{cp2} = y_{G2} + \frac{I_{xG2}}{y_{G2} . S_{BC}} = \frac{3h}{4} + \frac{\frac{b.\left(\frac{h}{2}\right)^3}{12}}{\frac{3h}{4}.\left(b.\frac{h}{2}\right)} = \frac{7}{9}h$

Déterminons les forces de pression F_{p1}, F_{px1} et F_{py1} et la position du centre de pression cp_1 (x_1 et y_1).

Soit S_{yz} la projection de la section cylindrique S_{OB} sur le plan yoz ($S_{yz} = b.h/2$).



Cas b

Figure 2

Soit V_{OAB} le volume d'eau délimitée par la section OAB sur la largeur b ($V_{OAB} = b.S_{OAB} = b.(\pi r^2/4) = \pi b h^2/16$).

Soit y_{G1} la profondeur (par rapport au niveau de l'eau) du CDG de la section S_{yz} ($y_{G1} = h/4$)

Donc, on peut écrire (voir CH II. §II.7.5) :

$$F_{px1} = \rho_e . g . y_{G1} . S_{yz} = \rho_e . g . \frac{h}{4} . \frac{bh}{2} = \frac{\rho_e . g . h^2 . b}{8}$$

$$F_{py1} = \rho_e . g . V_{OAB} = \rho_e . g . \frac{\pi b h^2}{16} = \frac{\pi \rho_e g h^2 b}{16}$$

$$F_{p1} = \sqrt{F_{px1}^2 + F_{py1}^2} = \sqrt{\left(\frac{\rho_e . g . h^2 . b}{8}\right)^2 + \left(\frac{\pi \rho_e g h^2 b}{16}\right)^2} = 1{,}86 . \frac{\rho_e g h^2 b}{8} = 1{,}86 F_{px1} = 1{,}185 F_{py1}$$

La position du centre de pression cp1 est (voir CH II. §II.7.5) :

$$X_1 = r\frac{F_{px1}}{F_{p1}} = \frac{h}{2} . \frac{F_{px1}}{1{,}86 F_{px1}} = 0{,}27h$$

$$y_1 = r\frac{F_{py1}}{F_{p1}} = \frac{h}{2} . \frac{F_{py1}}{1{,}185 F_{py1}} = 0{,}422h$$

Ecrivons l'équation d'équilibre des moments par rapport au pivot O. On a :

$$\sum M_{/O} = 0 \quad \Rightarrow \quad R_a . h = F_{px1} . y_1 + F_{py1} . \left(\frac{h}{2} - x_1\right) + F_{p2} . y_{cp2}$$

$$R_a . h = \frac{\rho_e . g . h^2 . b}{8} . 0{,}422h + \frac{\pi \rho_e g h^2 b}{16} . \left(\frac{h}{2} - 0{,}27h\right) + \frac{3\rho_e . g . h^2 . b}{8} . \frac{7}{9}h$$

$$R_a.h = \frac{\rho_e.g.h^2.b}{3}.\left[\frac{3x0{,}422}{8}h + \frac{3\pi}{16}(0{,}23h) + \frac{21}{24}h\right]$$

$$R_a = R.\frac{(3x3x0{,}422 + 1{,}5x3x0{,}23.\pi + 21)}{24} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{R_a = 1,17R}$$

<u>Cas c</u> (figure 8. Cas c)

De même que pour le cas a, on a :

$$F_{p2} = \rho_e.g.y_{G2}.S_{AC} \qquad \text{avec} \qquad y_{G2} = \frac{3h}{4} \qquad \text{et} \qquad S_{BC} = \frac{h}{2}.b$$

D'où $F_{p2} = \frac{3\rho_e.g.h^2.b}{8}$ et $y_{cp2} = \frac{7}{9}h$

Le moment dû à la force de pression F_{P1} par rapport au pivot « O » est nul (la force F_{P1} passe par « O »). Donc, il est inutile de déterminer cette force.

Donc, l'équation d'équilibre des moments par rapport au pivot O s'écrit :

$$\sum M_{/O} = 0 \quad \Longrightarrow \quad R_c.h = F_{p2}.y_{cp2}$$

$$R_c.h = \frac{3\rho_e.g.h^2.b}{8}.\frac{7}{9}h$$

$$R_c.h = \frac{\rho_e.g.h^2.b}{3}.\left(\frac{21}{24}h\right) = R.\left(\frac{7}{8}h\right)$$

$$\mathbf{R_c = 0,875\ R}$$