Théorie du champ
Solution d'examen du 22 janvier 2017
Durée : 1h30

<u>Questions de cours</u> : $(\mathbf{3\ points})$

1. **Donner la définition d'une nappe électrique.** $(\mathbf{1\ pts})$

Une nappe électrique est une distribution de courant surfacique.

2. **Quelle est l'expression de l'élément de courant $\overrightarrow{dC}$ pour une nappe électrique?** $(\mathbf{0.5\ pts})$

L'élément de courant d'une distribution surfacique de courant (nappe électrique) est donné par :

$$\overrightarrow{dC} = \vec{J}_s\, ds$$

Où :

$\vec{J}_s$: densité surfacique de courant électrique

ds : surface élémentaire.

3. **Comment sont-elles orientées les lignes de champ électrostatique par rapport à la surface d'un conducteur en équilibre électrostatique ? Justifier votre réponse.** $(\mathbf{1.5\ pts})$

Comme la surface d'un conducteur en équilibre électrostatique est une équipotentielle $(\mathbf{0.5\ pts})$, les lignes de champ électrique sont alors normales (perpendiculaires) à celle-ci $(\mathbf{1\ pts})$.

<u>Exercice 1</u> : Champ et potentiel électrostatiques créés par un cylindre creux uniformément chargé en volume $(\mathbf{8.5\ points})$

Le champ électrique s'écrit sous forme :

$$\vec{E}(M) = E(r)\,\vec{u}_r$$

1. **Donner la forme locale du théorème de Gauss.** $(\mathbf{0.5\ pts})$

La forme locale du théorème de Gauss s'écrit :

$$div\,\vec{E}(M) = \frac{\rho(M)}{\varepsilon_0}$$

2. **Utiliser cette forme pour déterminer $\vec{E}(M)$** $(\mathbf{3\ points})$

Dans un espace de coordonnées cylindrique, la divergence d'un champ vectoriel $\vec{E}$ est donnée par :

$$div\,\vec{E} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rE_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial E_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

Comme :

$$\vec{E}(M) = E(r)\,\vec{u}_r$$

D'où :

$$div\,\vec{E} = \frac{1}{r}\frac{d\,r\,E(r)}{dr} = \frac{\rho(M)}{\varepsilon_0}\,(\mathbf{0.25\ pts})$$

<u>Pour $r < a$:</u>

$$\rho(M) = 0\ (\mathbf{0.25\ pts})$$

$$rE(r) = C_1 \Longrightarrow E(r) = \frac{C_1}{r}\,(\mathbf{0.5\ pts})$$

Pour que le champ électrostatique soit fini lorsque r tend vers 0, il faut que:

$$C_1 = 0(\mathbf{0.5\ pts}) \Longrightarrow E(r) = 0$$

<u>Pour $a < r < R$:</u>

$$\rho(M) = \rho = cst(\mathbf{0.25\ pts})$$

$$\frac{1}{r}\frac{d\,r\,E(r)}{dr} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\frac{d\,r\,E(r)}{dr} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}r$$

$$r\,E(r)=\frac{\rho}{2\varepsilon_0}r^2+C_2 \Longrightarrow E(r)=\frac{\rho}{2\varepsilon_0}r+\frac{C_2}{r}(\mathbf{0.5\,pts})$$

Le champ électrostatique est continu en $r=a$, alors :

$$0=\frac{\rho}{2\varepsilon_0}a+\frac{C_2}{a}\Rightarrow C_2=-\frac{\rho}{2\varepsilon_0}a^2(\mathbf{0.5\,pts})$$

$$E(r)=\frac{\rho}{2\varepsilon_0}r-\frac{\rho}{2\varepsilon_0}a^2\frac{1}{r}=\frac{\rho}{2\varepsilon_0}\left(r-\frac{a^2}{r}\right)$$

<u>Pour $r>R$:</u>

$$\rho(M)=0(\mathbf{0.25\,pts})$$

$$\frac{1}{r}\frac{d\,r\,E(r)}{dr}=0$$

$$\frac{d\,r\,E(r)}{dr}=0$$

$$r\,E(r)=C_3$$

$$E(r)=\frac{C_3}{r}(\mathbf{0.5\,pts})$$

Le champ électrostatique est continu en $r=R$, alors :

$$\frac{\rho}{2\varepsilon_0}\left(R-\frac{a^2}{R}\right)=\frac{C_3}{R}\Rightarrow C_3=\frac{\rho}{2\varepsilon_0}(R^2-a^2)(\mathbf{0.5\,pts})$$

$$E(r)=\frac{\rho}{2\varepsilon_0}(R^2-a^2)\frac{1}{r}$$

3. **Quelle relation locale lie le champ électrique $\vec{E}$ et le potentiel électrique V ? $(\mathbf{0.5\,pts})$**

La relation locale qui lie le champ électrique $\vec{E}$ et le potentiel électrique V est la suivante :

$$\vec{E}(M)=-\overrightarrow{grad}\,V(M)$$

4. **Déduire le potentiel électrostatique $V(M)$. On prendra $V=0$ pour $r<a$. $(\mathbf{3\,points})$**

Dans un espace de coordonnées cylindrique :

$$\overrightarrow{grad}\,V=\frac{\partial V}{\partial r}\,\vec{u}_r+\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\theta}\,\vec{u}_\theta+\frac{\partial V}{\partial z}\,\vec{u}_z$$

Comme le champ, le potentiel électrostatique ne dépend que de la distance r entre l'axe $(z'z)$ et le point M. Par conséquent :

$$E(r)\,\vec{u}_r=-\frac{dV(r)}{dr}\,\vec{u}_r$$

En final, on aura :

$$E(r)=-\frac{dV(r)}{dr}$$

<u>Pour $r<a$:</u>

Le potentiel $V(r)$:

$$V(r)=0(\mathbf{0.5\,pts})$$

<u>Pour $a<r<R$:</u>

On a trouvé que :

$$E(r)=\frac{\rho}{2\varepsilon_0}r-\frac{\rho}{2\varepsilon_0}a^2\frac{1}{r}$$

D'où,

$$\frac{\rho}{2\varepsilon_0}r-\frac{\rho}{2\varepsilon_0}a^2\frac{1}{r}=-\frac{dV(r)}{dr}$$

Le potentiel $V(r)$ s'écrit :

$$V(r)=-\frac{\rho}{4\varepsilon_0}r^2+a^2\frac{\rho}{2\varepsilon_0}ln(r)+C_1(\mathbf{0.75\,pts})$$

Calcul de C_1 :

Le potentiel électrostatique en $r=a$ est continu, alors :

$$-\frac{\rho}{4\varepsilon_0}a^2+a^2\frac{\rho}{2\varepsilon_0}ln(a)+C_1=0$$

Alors :

$$C_1 = +\frac{\rho}{4\varepsilon_0}a^2 - a^2\frac{\rho}{2\varepsilon_0}ln(a)(\mathbf{0.5\,pts})$$

Le potentiel $V(r)$ est donné par :

$$V(r) = -\frac{\rho}{4\varepsilon_0}r^2 + a^2\frac{\rho}{2\varepsilon_0}ln(r) + \frac{\rho}{4\varepsilon_0}a^2 - a^2\frac{\rho}{2\varepsilon_0}ln(a)$$

Par conséquent :

$$V(r) = \frac{\rho}{4\varepsilon_0}(a^2 - r^2\,) + a^2\frac{\rho}{2\varepsilon_0}ln\left(\frac{r}{a}\right)$$

<u>Pour $r > R$:</u>
On a trouvé que :

$$E(r) = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}(R^2 - a^2)\frac{1}{r}$$

D'où,

$$\frac{\rho}{2\varepsilon_0}(R^2 - a^2)\frac{1}{r} = -\frac{dV(r)}{dr}$$

Le potentiel $V(r)$ s'écrit :

$$V(r) = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}(R^2 - a^2)ln(r) + C_2(\mathbf{0.75\,pts})$$

Calcul de C_2 :
Le potentiel électrostatique en $r = R$ est continu, alors :

$$\frac{\rho}{2\varepsilon_0}(R^2 - a^2)ln(R) + C_2 = \frac{\rho}{4\varepsilon_0}(a^2 - R^2\,) + a^2\frac{\rho}{2\varepsilon_0}ln\left(\frac{R}{a}\right)$$

$$\frac{\rho}{2\varepsilon_0}(R^2 - a^2)ln(R) + C_2 = \frac{\rho}{4\varepsilon_0}(a^2 - R^2\,) + a^2\frac{\rho}{2\varepsilon_0}ln(R) - a^2\frac{\rho}{2\varepsilon_0}\ln\,(a)$$

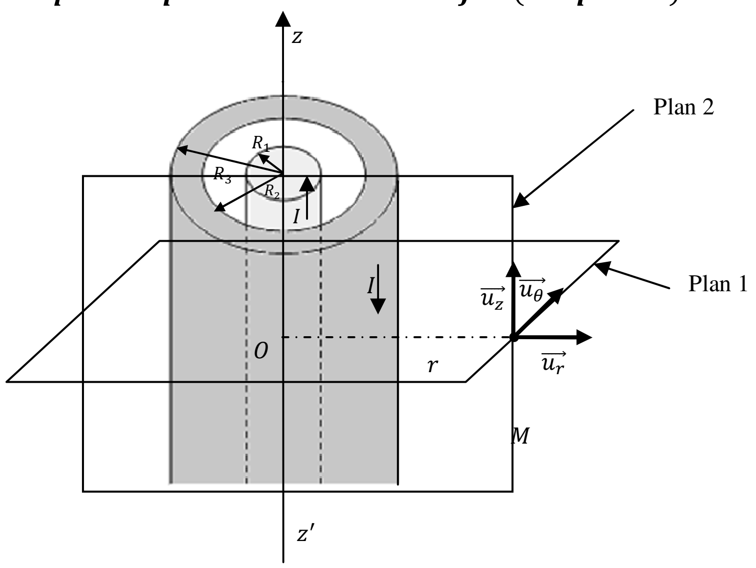
Alors :

$$C_2 = \frac{\rho}{4\varepsilon_0}(a^2 - R^2\,) + a^2\frac{\rho}{2\varepsilon_0}ln(R) - a^2\frac{\rho}{2\varepsilon_0}\ln(a) - \frac{\rho}{2\varepsilon_0}(R^2 - a^2)ln(R)(\mathbf{0.5\,pts})$$

Le potentiel $V(r)$ est donné par :

$$V(r) = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}(R^2 - a^2)ln\left(\frac{r}{R}\right) + \frac{\rho}{4\varepsilon_0}(a^2 - R^2\,) + a^2\frac{\rho}{2\varepsilon_0}ln\left(\frac{R}{a}\right)$$

<u>Exercice 2</u> : Champ magnétique créé par un câble coaxial infini $(\mathbf{8.5}\ \boldsymbol{points})$



1. **En utilisant les symétries, déterminer la direction du champ magnétique $\vec{B}$.** $(\mathbf{1}\ \boldsymbol{pts})$

Le plan 1 est un plan antisymétrique pour cette distribution de courant. Par conséquent le champ magnétique $\vec{B}$ est contenu dans ce plan $\Longrightarrow B_z = 0$

Le plan 2 est un plan symétrique pour cette distribution de courant. Par conséquent le champ magnétique $\vec{B}$ est perpendiculaire à ce plan$\Longrightarrow B_r = 0$ et $B_z = 0$

Donc, le champ magnétique $\vec{B}(M)$est porté par le vecteur unitaire $\vec{u}_\theta$

$$\vec{B}(M) = B\vec{u}_\theta$$

2. **Déterminer les variables dont dépend le champ magnétique $\vec{B}$. $(0.5\ pts)$**

La distribution de courant reste inchangée lors d'une translation le long d'axe (zz') et lors d'une rotation d'un angle θ autour de cette axe. Cette distribution de courant crée alors un champ magnétique $\vec{B}$ qui ne dépend ni de z ni de θ mais dépend uniquement de la variable r :

$$\vec{B}(M) = B(r)\,\vec{u}_\theta$$

3. **Donner la forme intégrale du théorème d'Ampère. $(0.5\ pts)$**

$$\oint_{(c)} \vec{B}\,\vec{dl} = \mu_0 \sum I_k \Rightarrow B(r) = \frac{\mu_0 \sum I_k}{2\pi r}$$

c : Contour orienté qui est un cercle de rayon r contenu dans un plan perpendiculaire à (zz') et centré sur cette axe.

4. **Appliquer cette forme pour déterminer le champ magnétique $\vec{B}$ créé en tout point M de l'espace. $(4\ points)$**

Pour $r < R_1$:

$$\sum I_k = I\frac{r^2}{R_1^2}\ (\mathbf{0.5\ pts})$$

Donc :

$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi R_1^2}\, r\ (\mathbf{0.5\ pts})$$

Pour $R_1 < r < R_2$:

$$\sum I_k = I(\mathbf{0.5\ pts})$$

$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{1}{r}\ (\mathbf{0.5\ pts})$$

Pour $R_2 < r < R_3$:

$$\sum I_k = I\left(1 - \frac{r^2 - R_2^2}{R_3^2 - R_2^2}\right) = I\left(\frac{R_3^2 - r^2}{R_3^2 - R_2^2}\right)(\mathbf{0.5\ pts})$$

$$B(r) = \frac{\mu_0}{2\pi r} I\left(\frac{R_3^2 - r^2}{R_3^2 - R_2^2}\right) = \frac{\mu_0 I R_3^2}{2\pi(R_3^2 - R_2^2)}\frac{1}{r} - \frac{\mu_0 I}{2\pi(R_3^2 - R_2^2)} r(\mathbf{0.5\ pts})$$

Pour $r > R_2$:

$$\sum I_k = 0(\mathbf{0.5\ pts})$$

$$B(r) = 0(\mathbf{0.5\ pts})$$

5. **Quelle relation locale lie le champ magnétique $\vec{B}$ et le potentiel magnétique $\vec{A}$? $(0.5\ points)$**

$$\vec{B}(M) = \overrightarrow{rot}\,\vec{A}(M)(\mathbf{0.5\ pts})$$

6. **Déduire le potentiel magnétique $\vec{A}(M)$ sachant que le potentiel magnétique est nul sur l'axe $(z'z)$. $(2.5\ points)$**

$$B(r)\vec{u}_\theta = \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right)\vec{u}_\theta$$

Le potentiel magnétique $\vec{A}$ dépend uniquement de la variable r , donc :

$$B(r) = -\frac{dA_z(r)}{dr}(\mathbf{0.5\ pts})$$

Pour $r < R_1$:

$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi R_1^2}\, r = -\frac{dA_z(r)}{dr}$$

$$A_z(r) = -\frac{\mu_0 I}{4\pi R_1^2} r^2 + C_1(\mathbf{0.5\ pts})$$

Lorsque $r \longrightarrow 0$, $A_z(r \longrightarrow 0) = 0$ et $C_1 = 0(\mathbf{0.5\ pts})$

En final, on aura :

$$A_z(r) = -\frac{\mu_0 I}{4\pi R_1^2} r^2$$

Pour $R_1 < r < R_2$:

$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{1}{r} = -\frac{dA_z(r)}{dr}$$

$$A_z(r) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln(r) + C_2(\mathbf{0.5}\ \boldsymbol{pts})$$

Calcul de C_2

Le potentiel magnétique est continu en $r = R_1$

$$-\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln(R_1) + C_2 = -\frac{\mu_0 I}{4\pi R_1^2} R_1^2$$

$$C_2 = -\frac{\mu_0 I}{4\pi R_1^2} R_1^2 + \frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln(R_1)(\mathbf{0.5}\ \boldsymbol{pts})$$

En final, on aura :

$$A_z(r) = -\frac{\mu_0 I}{4\pi R_1^2} R_1^2 + \frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\left(\frac{R_1}{r}\right)$$