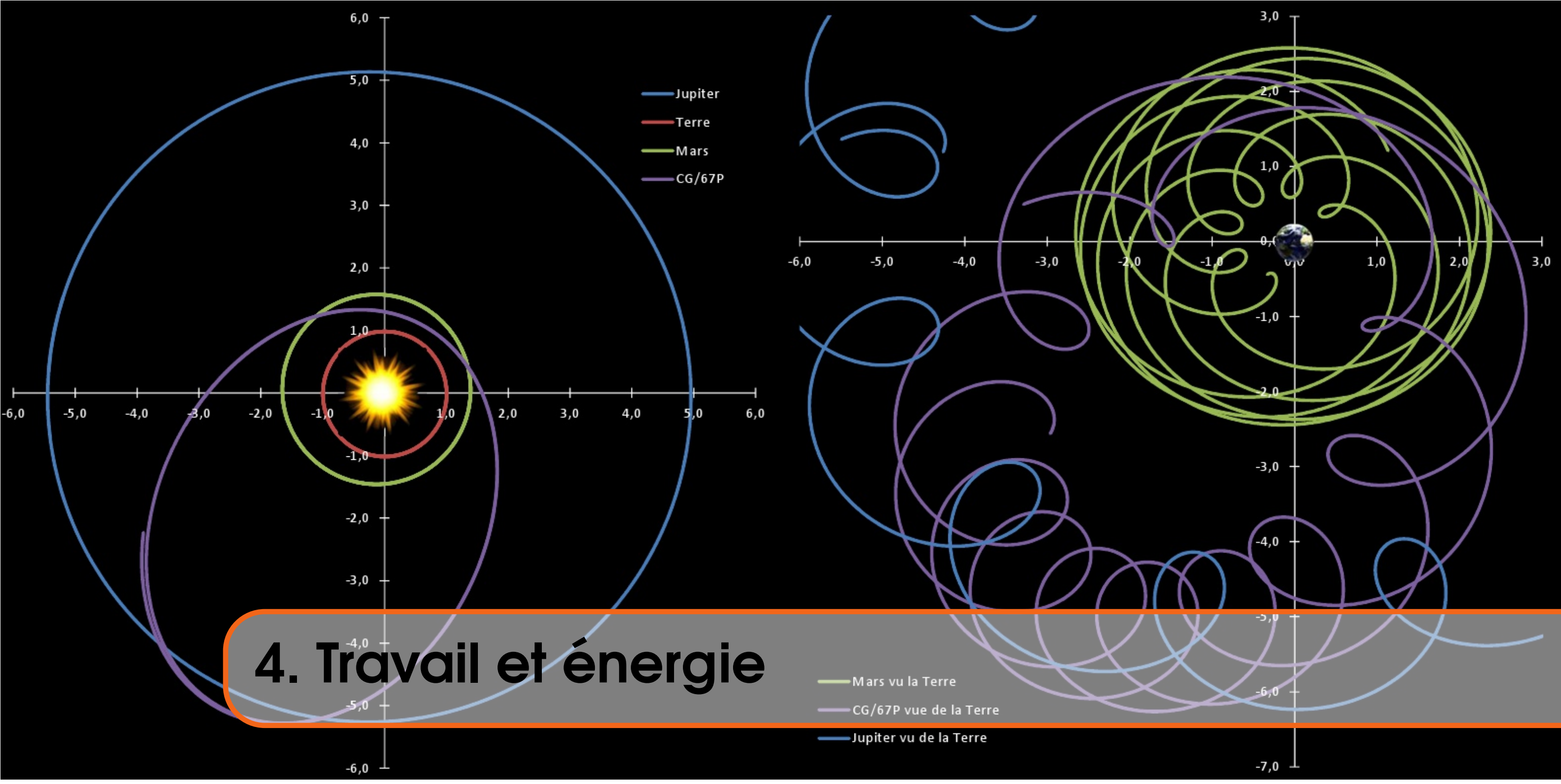

4. Travail et énergie

4.1 Travail d'une force

Soit un système de point matériel représenté par son centre d'inertie M, subit une force $\overrightarrow{F}$ supposée quelconque. Pour calculer le travail de la force $\overrightarrow{F}$ sur un trajet AB supposé aussi qu'il est quelconque, on décompose ce dernier en une succession de déplacements élémentaires $\overrightarrow{dl}$ infiniment petits et rectiligne comme il est représenté sur la figure 4.1.

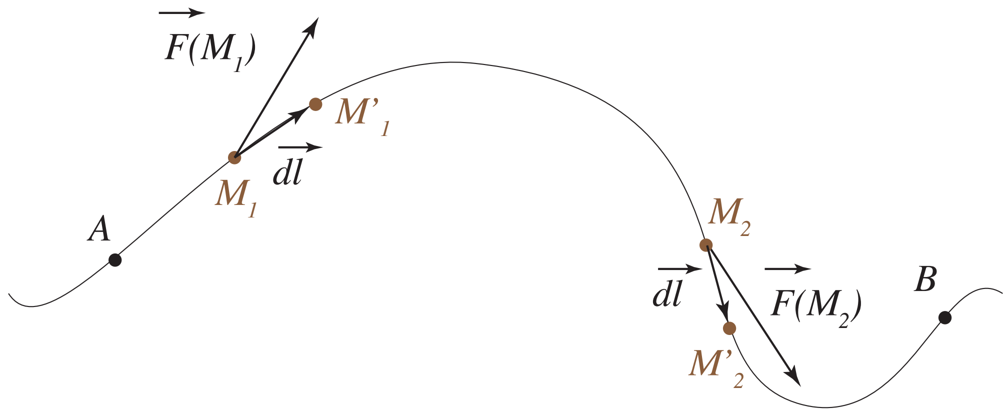

FIGURE 4.1 : Le trajectoire du mouvement du centre d'inertie M du point A au point B

Définition 4.1.1 Le **travail élémentaire** de la force $\overrightarrow{F}$ sur une déplacement élémentaire $\overrightarrow{dl}$ est défini comme le produit scalaire du vecteur de la force par le vecteur de déplacement élémentaire :

$$\delta W = \overrightarrow{F}.\overrightarrow{dl} \tag{4.1}$$

Afin d'obtenir le travail de la force $\overrightarrow{F}$ sur tout le déplacement AB, il suffit de faire la sommation de tous les travaux élémentaires δW. Bien entendu que les nombres des déplacements élémentaires $\overrightarrow{dl}$ sont infinis alors on passe de la sommation à l'intégrale.

Définition 4.1.2 Le **travail de la force** $\overrightarrow{F}$ sur une déplacement AB est la sommation continue de tous les travaux élémentaires δW de la force $\overrightarrow{F}$.

$$W_{A\to B} = \int_A^B \overrightarrow{F}.\overrightarrow{dl} \tag{4.2}$$

Remarque

R Le travail d'une force est une quantité scalaire. $[W] = M.L^2.T^{-2}$, unité : J (Joule), 1J= 1N.m = 1Kg.m^2.s^{-2}).

4.1.1 Cas concrets

La figure 4.2 schématise un système de point matériel (S) posé sur un plan et se déplace du point A vers le point B. Tel que les forces qu'il subit sont représenté appliquer sur son centre d'inertie G.

Soit les forces y appliquées ne varient pas suivant le déplacement du système de point matériel (S) au long du trajet AB. Par définition le travail de la force $\overrightarrow{F_1}$ est l'intégrale du produit scalaire de cette force par son déplacement élémentaire, Tant que la **force est constante** le travail se simplifie comme :

$$W^1_{A\to B} = \overrightarrow{F_1}.\int_A^B \overrightarrow{dl} \qquad \Longleftrightarrow \qquad W^1_{A\to B} = \overrightarrow{F_1}.\overrightarrow{AB} \tag{4.3}$$

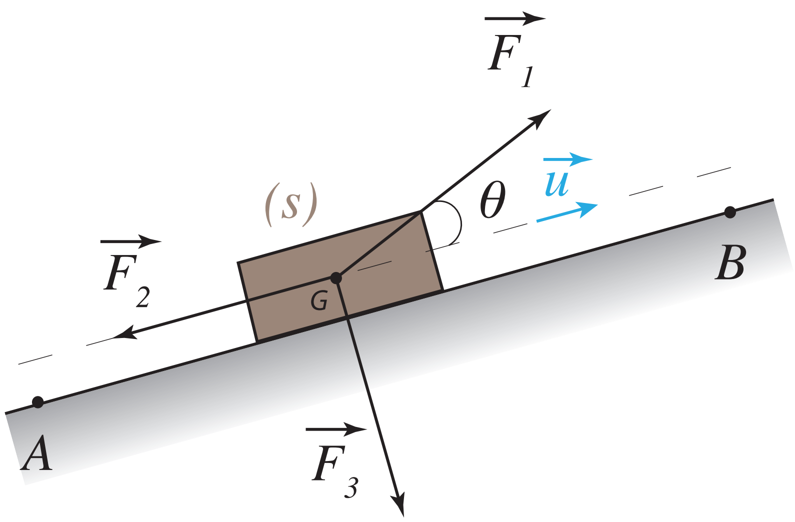

FIGURE 4.2 : Le travail des différentes forces appliquées sur un corps (S).

Utilisant la formule analytique du produit scalaire, le travail de la force $\overrightarrow{F_1}$ s'écrit :

$$W^1_{A\to B} = F_1 AB\cos\theta \tag{4.4}$$

Dans ce cas le travail est maximal si l'angle θ est nul. Autrement dit, si la direction et le sens du vecteur de la force sont cohérents avec ceux du vecteur de déplacement. Pour le cas du vecteur de la force $\overrightarrow{F_2}$ qui fait un angle de $\theta = 180°$ avec le vecteur déplacement, son travail vaut :

$$W_{A\to B}^{2} = -F_2 AB$$

Pour le cas de la force $\overrightarrow{F_3}$ dont elle est perpendiculaire au déplacement ($\theta = 90°$), Son travail est nul.

$$W_{A\to B}^{3} = 0$$

Corollaire 4.1.1 Le Travail d'une force F constante sur un déplacement rectiligne AB est défini comme le produit scalaire du vecteur de la force par le vecteur du déplacement :

$$W_{A\to B} = \overrightarrow{F}.\overrightarrow{AB} = FAB\cos\theta \tag{4.5}$$

Où θ est l'angle coincé entre les deux vecteurs force et déplacement.

Remarque

Le travail nul est le corollaire d'une **force perpendiculaire au déplacement**, par conséquence elle ne contribue pas au mouvement. le **travail positif** dérive d'une **force motrice** et le **travail négatif** aboutit d'une **force resistive** au mouvement.

Dans le mouvement circulaire (voir la figure 4.3), la force de centrifuge $\overrightarrow{F} = m\frac{\overrightarrow{v}^2}{R}$ est toujours perpendiculaire à la normal et par suite au déplacement $\overrightarrow{dl}$. Résultat : **le travail de la force de centrifuge est nul**.

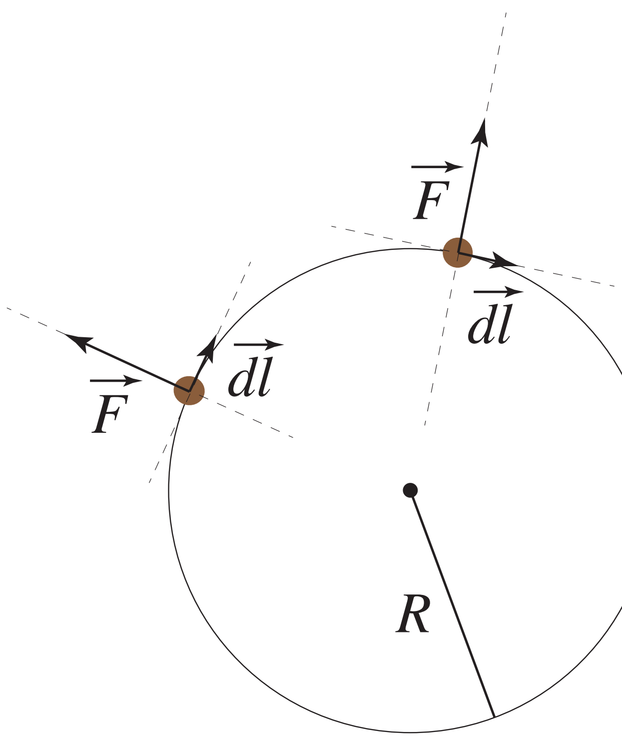

FIGURE 4.3 : Le travail de la force de centrifuge d'un système de point matériel en mouvement circulaire

4.1.2 Travail du poids d'un corps

Lorsque la force demeure constante au long du parcours d'un corps son travail se simplifie, tout en utilisant la formule 4.3. L'exemple le plus fréquent et semblable à ce cas est la force de poids. Considérons une masse m qui se déplace du point A arrivant au point B comme il est schématisé sur la figure 4.4. Ferons intervenir un référentiel cartésien supposé galiléen $\Re(O,x,y,z,t)$. Dans lequel le vecteur de la force de poids s'écrit sous la forme :

$$\overrightarrow{P} = -mg\,\overrightarrow{k}$$

Dans le même référentiel Galiléen, le vecteur de déplacement $\overrightarrow{AB}$ s'écrit :

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)\,\overrightarrow{i} + (y_B - y_A)\,\overrightarrow{j} + (z_B - z_A)\,\overrightarrow{k}$$

Le travail de la force de poids est le résultat du produit scalaire du vecteur de la force $\overrightarrow{P}$ par le vecteur de déplacement $\overrightarrow{AB}$:

$$W_{A\to B} = \overrightarrow{F}.\overrightarrow{AB} = -mg(z_B - z_A) \tag{4.6}$$

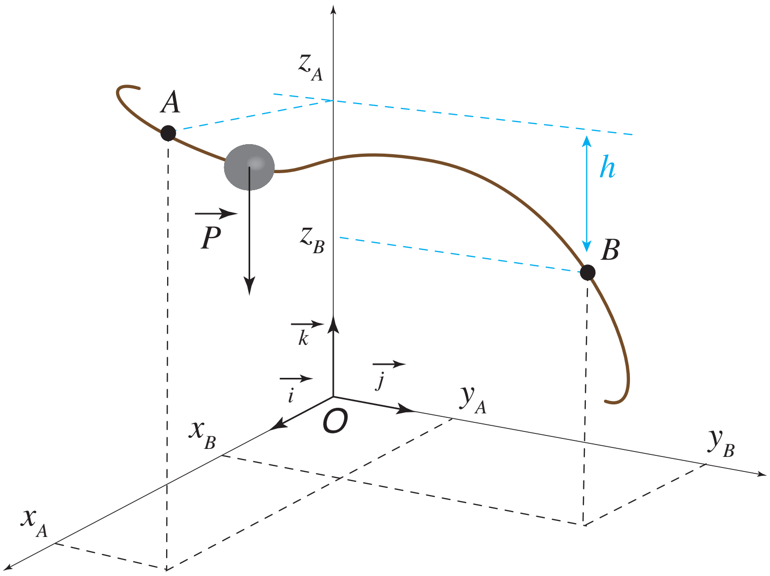

FIGURE 4.4 : Le travail du poids d'un corps

Remarque

R Le précédent résultat du travail de la force de poids peut en avoir tout en utilisant l'intégrale du travail élémentaire. En effet, le vecteur de déplacement élémentaire dans le référentiel cartésien est :

$$\overrightarrow{dl} = dx\,\overrightarrow{i} + dy\,\overrightarrow{j} + dz\,\overrightarrow{k}$$

Par définition, le travail élémentaire est :

$$\delta W = \overrightarrow{P}.\overrightarrow{dl} = -mg\,\overrightarrow{k}.\left(dx\,\overrightarrow{i} + dy\,\overrightarrow{j} + dz\,\overrightarrow{k}\right) = -mgdz$$

Finalement, le travail de la force de poids est :

$$W_{A\to B} = -mg\int_{z_A}^{z_B} dz = -mg(z_B - z_A)$$

Conclusion : Le travail de cette force ne dépend pas du chemin suivi mais uniquement de la position initiale et finale du ressort.

4.1.3 Travail de la force de tension

Comme il est illustré sur la figure 4.5. Soit un ressort de constante de raideur k, posé horizontalement sur un plan dont une masse m est accrochée à son libre extrémité. L'ensemble du système physique est assimilé à un point G et étudié dans un référentiel supposé Galiléen $\Re(O,x,t)$. Nous s'intéressons que sur la force de rappel du ressort $\overrightarrow{T}$. Lorsque le ressort est au repos le point G se colle au point d'origine O (x_0). Appuyons sur le système physique, par conséquence le ressort dilate et une force de tension se naît, x l'abscisse de point G . Rappelons quelle est proportionnelle à la distance de dilatation :

$$\overrightarrow{T} = -kx\,\overrightarrow{i}$$

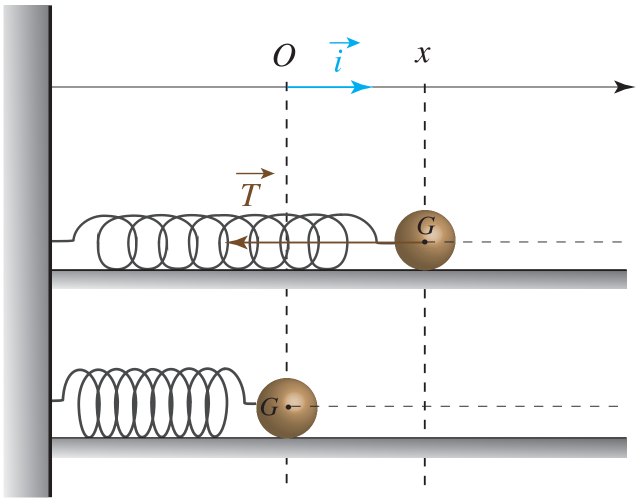

FIGURE 4.5 : Le travail de la force de rappel d'un ressort

Afin de calculer le travail élémentaire δW, on choisit un déplacement élémentaire $\overrightarrow{dl}$ infiniment petit sur lequel la force de tension $\overrightarrow{T}$ est considérée comme constante :

$$\overrightarrow{dl} = dx\,\overrightarrow{i}$$

Dans ce cas le travail élémentaire est le produit scalaire du vecteur de la force $\overrightarrow{T}$ par le vecteur de déplacement élémentaire $\overrightarrow{dl}$:

$$\delta W = \overrightarrow{T}.\overrightarrow{dl} = -kxdx$$

Par définition, le travail de la force de tension $\overrightarrow{T}$, lorsque le point G passe de l'abscisse 0 à x, étant donnée comme l'intégrale du travail élémentaire :

$$W_{0\to x} = -k\int_0^x x dx = -\frac{1}{2}k\left[x^2\right]_0^x$$

le travail de la force de tension $\overrightarrow{T}$ vaut :

$$W_{0\to x} = -\frac{1}{2}kx^2 \tag{4.7}$$

4.1.4 Travail de la force de frottement solide

Soit un corps de masse m se déplace sur un plan avec un coefficient de frottement cinétique μ_c, voir la figure 4.6.

Les forces extérieures appliquées sur le corps sont : La force de poids $\overrightarrow{P} = -mg\overrightarrow{j}$, la force de réaction du plan $\overrightarrow{R_n}$ et la force de frottement cinétique. Suivant la formule 3.24, nous savions déjà que la force de frottement cinétique vaut :

$$\overrightarrow{F} = -\mu_c R_n\overrightarrow{i}$$

On applique le principe fondamental de la dynamique sur l'axe (Oy) :

$$\overrightarrow{P} = \overrightarrow{R_n} \quad\Longleftrightarrow\quad mg\overrightarrow{j} = R_n\overrightarrow{j} \quad\Longleftrightarrow\quad R_n = mg$$

Injectons la valeur de la force de réaction dans la formule de la force de frottement cinétique, cela implique :

$$\overrightarrow{F} = -\mu_c mg\overrightarrow{i}$$

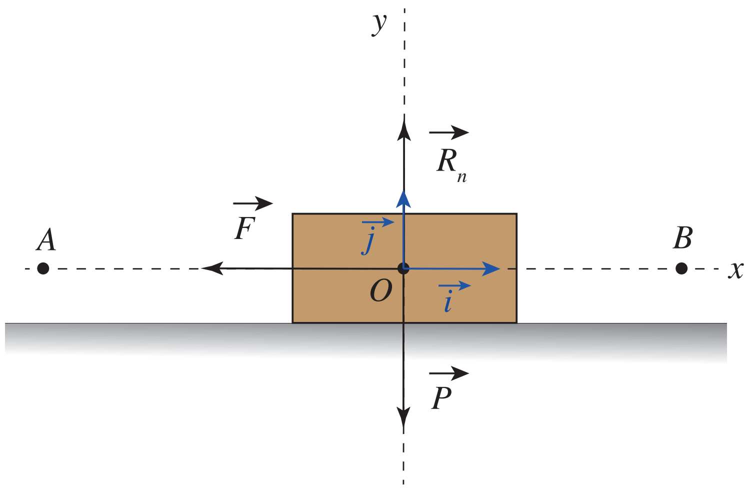

FIGURE 4.6 : Déplacement d'un corps sur un plan avec frottement

Par définition, le travail de la force de frottement cinétique est l'intégrale du travail élémentaire réalisé sur une portion $\overrightarrow{dl}$ du trajet effectué entre le point A et B :

$$W_{A\to B} = \overrightarrow{F}.\int_A^B \overrightarrow{dl} = -\mu_c mg\int_A^B dl \tag{4.8}$$

Le travail de la force de frottement cinétique dépend de l'intégrale de déplacement élémentaire dl est par suite de la forme de trajectoire entre le point A et B (par exemple pour un trajet circulaire $dl = R.d\theta$). Dans le cas présenté sur la figure ci-dessus : $dl = dx$. Le travail de la force de frottement cinétique devient :

$$W_{A\to B} = -\mu_c mg \int_A^B dx = -\mu_c mg \|AB\| \tag{4.9}$$

4.2 Puissance

Définition 4.2.1 La puissance d'une force est définie comme étant le travail de cette force effectué par unité de temps :

$$\mathscr{P} = \frac{\Delta W}{\Delta t} \tag{4.10}$$

$$\mathscr{P} = \overrightarrow{F}.\frac{\Delta\overrightarrow{l}}{\Delta t} = \overrightarrow{F}.\overrightarrow{v} \tag{4.11}$$

$[\mathscr{P}] = M.L^2.T^{-3}$, unité : W (watt). 1W = 1J.s^{-1}.

On peut illustrer une deuxième définition du travail à l'aide de la puissance. En effet le travail élémentaire peut s'écrit :

$$\delta W = \overrightarrow{F}.\frac{\overrightarrow{dl}}{dt}dt = \overrightarrow{F}.\overrightarrow{v}dt \tag{4.12}$$

Où :

$$\delta W = \mathscr{P}dt \tag{4.13}$$

La relation qui donne travail à partir de la puissance est :

$$W = \int \mathscr{P}dt \tag{4.14}$$

4.3 Énergie

Plus simplement, l'énergie est le carburant des actions. C'est la capacité de produit un travail. Plus profondément, l'énergie est une grandeur physique qui caractérise l'état d'un corps. L'énergie ne peut être anéantie comme on ne peut la faire crée davantage. Dans l'univers l'énergie est conservée et par corrélation, l'énergie globale est toujours constante dans un système physique isolé.

4.3.1 Énergie cinétique

Définition 4.3.1 Soit un point matériel de masse m se déplace avec une vitesse v dans un référentiel Galiléen. Énergie cinétique est donnée par l'expression :

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2 \tag{4.15}$$

Tant que $p = mv$, l'énergie cinétique du point matériel peut s'écrire en fonction de la quantité de mouvement :

$$E_c = \frac{p^2}{2m} \tag{4.16}$$

■ Théorème de l'énergie cinétique

Sous l'action des différentes forces extérieures, un point matériel de masse m se mit en mouvement, dans un référentiel Galiléen, par une vitesse v. Le principe fondamental de la dynamique insiste que :

$$\sum \overrightarrow{F_{ext}} = m \frac{\overrightarrow{dv}}{dt}$$

La somme des travaux élémentaires des forces extérieures au cours d'une déplacement élémentaire $\overrightarrow{dl}$ est :

$$\sum \delta W = \sum \overrightarrow{F_{ext}} . \overrightarrow{dl} = m \frac{\overrightarrow{dl}}{dt} dv = m \vec{v} d\vec{v}$$

Tout en intégrant la précédente équation, la somme des travaux des forces extérieures effectués sur un trajet de A à B est :

$$\sum W_{A \to B} = \sum \int_A^B \delta W = m \int_{v_A}^{v_B} \vec{v} d\vec{v} = \frac{1}{2} m (v_B^2 - v_A^2)$$

Soit :

$$\sum W_{A \to B} = E_c(B) - E_c(A) \tag{4.17}$$

Théorème 4.3.1 La **variation de l'énergie cinétique** entre **deux positions** A et B dans un référentiel Galiléen d'un point matériel de masse m subit à différentes forces extérieures est **égale** à la **somme des travaux** de ces forces effectués entre A et B.

$$\Delta E_c = \sum W \tag{4.18}$$

■ **Exemple 4.1** **La vitesse d'un corps en chute libre sans vitesse initiale**

Soit un corps de masse m situé à une hauteur h en chute libre sans vitesse initiale $v_0 = 0$. La seule force y exerce est la force de poids. Nous cherchons à calculer la vitesse du corps à l'arriver au sol.

On applique le théorème de l'énergie cinétique :

$$\Delta E_c = \sum W \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = mg(z_0 - z) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{2}mv^2 = mgh$$

La vitesse du corps en chute libre sans vitesse initiale vaut :

$$v = \sqrt{2gh} \tag{4.19}$$

■

4.3.2 Force dérivant d'un potentiel

Les **forces dérivée d'un potentiel**, appelées ainsi les **forces conservatives** sont des forces dont leur travail ne dépend que du point de départ et du point d'arrivé. Le travail d'un force conservative est indépendant du trajectoire suivi.

Définition 4.3.2 Pour un déplacement sur un trajectoire fermé (le point de départ et le point d'arrivée se sont confondus), le travail d'une force conservative est nul :

$$W = \oint \vec{F}.\vec{dl} = 0 \tag{4.20}$$

À titre d'exemple : la force de poids, nous avons vu à la sous-section 4.1.2, sur la formule 4.4 que le travail de la force de poids ne dépend que de l'altitude du point de départ et d'arrivée. Si le point de départ et le point d'arrivée sont assimilés. Dans ce cas, le travail de la force de poids vaut :

$$W_{depart \to arriv} = mg(z_{arriv} - z_{depart}) = 0$$

On constate que la force de poids est une force conservatrice.

Les forces non conservatrices sont des forces dont leur travail dépend de trajectoire. Comme exemple, on peut prendre le cas de la force de frottement cinétique (son travail est déjà calculé dans la sous-section 4.1.4 et donné par la formule 4.8). Nous avons constaté que le travail de cette force dépend de la nature de trajectoire. Pour un trajet rectiligne de A à B :

$$W_{A \to B} = -\mu_c mg\, AB \tag{4.21}$$

Pour un trajet sous forme d'arc de A à B :

$$W_{A \to B} = -\mu_c mg\, \overset{\frown}{AB} \tag{4.22}$$

Conclusion : la force de frottement cinétique ne dérive pas d'un potentiel.

4.3.3 Énergie potentielle

Soit un corps soumit à une force dérivée d'un potentiel, le travail de cette force fourni au corps pour lui permettre de déplacer du point B au point A égale à la variation de l'énergie potentielle entre l'état B et A :

Définition 4.3.3 l'énergie potentielle d'une force dérivée d'un potentiel est :

$$E_P(B) - E_P(A) = -W_{A \to B} \tag{4.23}$$

$$E_P(B) - E_P(A) = -\overrightarrow{F} \int_A^B .\overrightarrow{dl} \tag{4.24}$$

L'expression de l'énergie potentielle peut s'écrire sous une **forme différentielle** :

$$dE_P = -\overrightarrow{F}.\overrightarrow{dl} \tag{4.25}$$

Dans la sous-section précédente nous avons constaté que le travail d'une force conservative ne dépend que de la position initiale et finale du déplacement. En corollaire, l'**énergie potentielle ne dépend que de la position** du corps.

Rappelons que le gradient de l'énergie potentielle est :

$$\overrightarrow{grad}E_P = \frac{dE_P}{\overrightarrow{dl}} \tag{4.26}$$

En combinant les deux formules 4.25 et 4.26. La **formule locale de l'énergie potentielle** est :

$$\overrightarrow{grad}E_P = -\overrightarrow{F} \tag{4.27}$$

La dernière expression est très utile car elle aboutit à l'énergie potentielle du corps à n'importe quel point de l'espace.

■ Force conservative et énergie potentielle

Dans la sous-section 4.3.2, nous avons illustré que pour démontrer qu'une force est conservative il suffit de vérifier si son travail est nul sur un trajectoire fermé. Ici, nous allons donner une seconde définition de la force conservative.

À partir de la formule **??** qui prédit que le rotationnel du gradient d'une fonction quelconque est nul, on peut écrire :

$$\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{grad}(-E_P) = 0$$

Par conclusion :

$$\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{F} = 0 \tag{4.28}$$

C'est la **seconde définition d'une force conservatrice** : Pour qu'une **force soit dérivée d'un potentiel**, le **rotationnel** du vecteur de la force doit être **nul**.

Soit $\overrightarrow{F}$ une force définie dans un repère cartésien comme suit : $\overrightarrow{F} = F_x\overrightarrow{i} + F_y\overrightarrow{j} + F_z\overrightarrow{k}$. Pour que la force $\overrightarrow{F}$ soit conservative il faut que :

$$\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{F} = \left(\frac{\partial F_y}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial y}\right)\overrightarrow{i} + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right)\overrightarrow{j} + \left(\frac{\partial F_x}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial x}\right)\overrightarrow{k} = 0$$

Pour démontrer que la force est dérivée d'un potentiel il suffit de vérifier que les égalités suivantes sont vraies :

$$\frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x} \tag{4.29}$$

■ Énergie potentielle dans un champ de pesanteur

- **Proche de la surface de la terre :**
  Dans ce paragraphe on cherche à donner la formule de l'énergie potentielle d'une masse m dans un champ de pesanteur.
  Par définition, la forme différentiel de l'énergie potentielle vaut :

$$dE_P = -\overrightarrow{P}.\overrightarrow{dl}$$

Comme il est reporté sur la figure 4.7 (a), dans un référentiel Galiléen $\Re(O,z,t)$, proche de la surface de la terre, **la force de poids est constante** : $\overrightarrow{P} = -mg\,\overrightarrow{k}$ et le déplacement élémentaire vaut $\overrightarrow{dl} = dz\,\overrightarrow{k}$. La précédente expression devient :

$$dE_P = mgdz$$

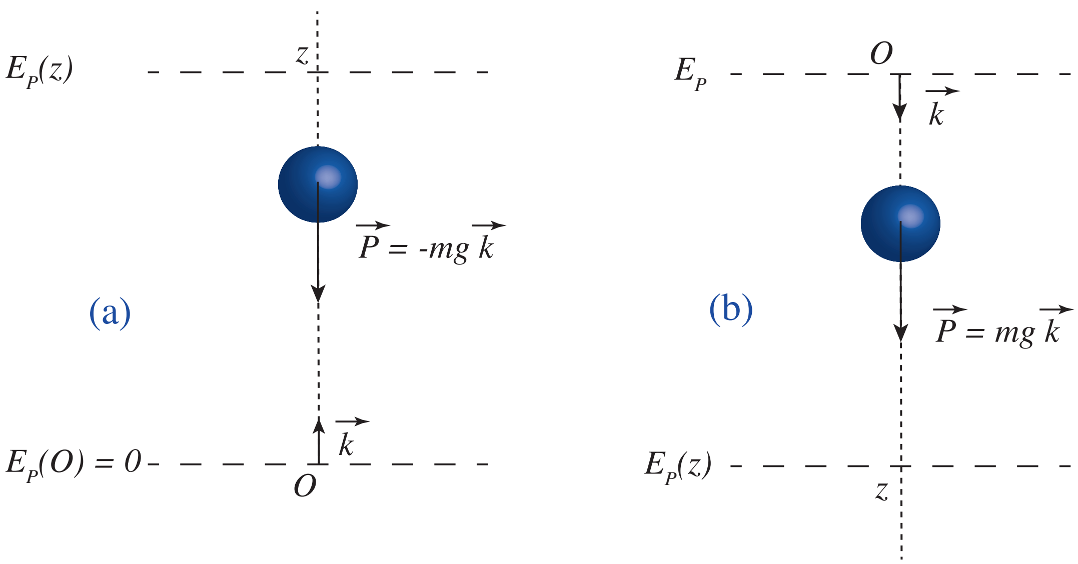

FIGURE 4.7 : Énergie potentielle d'une masse m dans un champ de pesanteur

Tout en supposant que l'énergie potentielle est nulle pour une masse m qui se trouve à la position O. L'**énergie potentielle** de la masse m **dans un champ de pesanteur** située à une position z sera :

$$\int_{E_P(O)}^{E_P(z)} dE_P = P\int_0^z dz \quad \Longleftrightarrow \quad E_P(z) = Pz = mgz \tag{4.30}$$

Remarque

R D'après la formule 4.6, le travail effectué entre le point O et le point z de la force de poids d'une masse m est :

$$W_{O\to z} = -mg\int_{z_O=0}^{z} dz = -mgz$$

Suivant l'expression 4.23 l'énergie potentielle devient :

$$E_P(z) - E_P(O) = -W_{O\to z} = mgz$$

Si on considère que l'énergie potentielle au point O est nulle, on obtient la formule de l'énergie potentielle d'une masse m dans un champ de pesanteur :

$$E_P(z) = mgz$$

C'est le même résultat que celui obtenu précédemment.

Si l'axe est orienté vers le bas comme il est représenté sur la figure 4.7 (b), dans ce cas l'énergie de potentielle de référence ($E_P(O) = E_P$) n'est plus nulle comme le cas précédent, sachons que la force de poids $\overrightarrow{P}$ a le même sens que le vecteur unitaire $\overrightarrow{k}$. Nous obtenons :

$$E_P(z) - E_P(O) = -mg\int_{z_O=0}^{z} dz \quad\Longleftrightarrow\quad E_P(z) = E_P - mgz$$

- **Loin de la surface de la terre :**
Pour système de masse m situé à une distance considérable R, la **force de poids n'est plus constante** elle dépend de l'altitude z suivant la formule : $F = G.\frac{M.m}{z^2}$. L'énergie potentielle de la masse m est :

$$\int_{E_P(O)}^{E_P(R)} dE_P = -G.M.m\int_0^R \frac{dz}{z^2} \quad\Longleftrightarrow\quad E_P(R) = -G\frac{M.m}{R} \tag{4.31}$$

■ Énergie potentielle du ressort

À la sous-section 4.1.3 nous avons obtenu la formule du travail élémentaire de la force de rappel d'un resort, elle s'écrit est :

$$\delta W = \overrightarrow{T}.\overrightarrow{dl}$$

On fait allusion que la force de rappel d'un resort qui subit une déformation par rapport à son état de repos de longueur x est $\overrightarrow{T} = -kx\,\overrightarrow{i}$. Le vecteur de déplacement $\overrightarrow{dl} = dx\,\overrightarrow{i}$. Le produit scalaire $\overrightarrow{i}.\overrightarrow{i} = 1$. La forme différentielle de l'énergie potentielle $dE_P = -\delta W$. On injecte toutes ces égalités dans la précédentes expression :

$$dE_P = kxdx$$

Afin d'obtenir la formule de l'énergie potentielle d'un ressort à un point quelconque x, on intègre l'équation précédente. Nous choisissons comme l'autre borne d'intégrale le point d'origine O pour lequel $x_O = 0$. Ce qui conduit :

$$\int_{E_P(O)}^{dE_P(x)} dE_P = kx\int_0^x dx \quad\Longleftrightarrow\quad E_P(x) = \frac{1}{2}kx^2 \tag{4.32}$$

4.3.4 Énergie mécanique

Définition 4.3.4 L'énergie mécanique d'un point matériel à un instant t et une position précisent est définie comme la somme de l'énergie cinétique et l'énergie potentielle :

$$E_M = E_c + E_P \tag{4.33}$$

Supposons qu'un système de point matériel soumit à des forces dérivées d'un potentiel et d'autres non conservatives. Suivant le théorème 4.3.1, la variation de l'énergie cinétique entre deux positions A et B égale à la somme des travaux des forces conservatives $\sum W^{con}_{A\to B}$ et celles non conservatives $\sum W^{n.con}_{A\to B}$:

$$E_c(B) - E_c(A) = \sum W^{con}_{A\to B} + \sum W^{n.con}_{A\to B}$$

Suivant la définition 4.3.3, la somme des travaux des forces conservatives pourront être remplacées par la variation de l'énergie potentielle :

$$E_c(B) - E_c(A) = -\Big(E_P(B) - E_P(A)\Big) + \sum W^{n.con}_{A\to B}$$

Arrangeons la précédente formule tout en regroupant les énergies de tel sort qu'on fait apparaitre l'énergie mécanique :

$$\Big[E_c(B) + E_P(B)\Big] - \Big[E_c(A) + E_P(A)\Big] = \sum W^{n.con}_{A\to B}$$

Ce qui nous mène au théorème de l'énergie mécanique :

Théorème 4.3.2 La **variation de l'énergie mécanique** entre **deux positions et deux instants de temps** dans un référentiel Galiléen d'un point matériel de masse m est **égale** à la **somme des travaux** des forces extérieures non conservatives appliquées entre les **deux positions**.

$$E_M(B) - E_M(A) = \sum W^{n.con}_{A\to B} \tag{4.34}$$

Pour un système qui ne **subit aucune force extérieure non conservative**, qu'on le peut considérer comme un **système mécanique isolé**. Dans ce cas, la variation de l'énergie mécanique est nulle :

$$\Delta E_M = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad E_M = \text{cste} \tag{4.35}$$

■ **Exemple 4.2** **La vitesse de libération d'un projectile**

Soit un projectile de masse m lancé à partir de la surface de la terre vers le ciel avec une vitesse initiale v_0. Nous voulons définir la vitesse v_0 de lancement nécessaire pour que le projectile sera hors l'effet de la gravitation de la terre (par exemple la vitesse de lancement d'un missile porte un satellite terrestre).

Utilisons la formule 4.31, l'énergie potentiel du projectile à une altitude R vaut :

$$E_P(R) = -G\frac{M.m}{R} \tag{4.36}$$

Supposons que la force de frottement de l'air est négligeable, ce qui implique que le système est isolé et par conséquence l'énergie mécanique est constante. Appliquons le théorème de la conservation de l'énergie mécanique 4.3.2 entre deux états :

- l'état de lancement du projectile ; l'énergie cinétique $E_c = \frac{1}{2}mv_0^2$; l'énergie potentielle $E_P(r) = -G\frac{M.m}{r}$ où r est la distance entre le centre de la terre et le projectile, c'est à dire le rayon de la terre.
- l'état ou le projectile sera hors l'effet de la gravitation de la terre ; dans ce cas l'énergie potentielle est nulle $E_P = 0$; supposons que le projectile arrive hors le champ de pesanteur avec une vitesse nulle, l'énergie cinétique $E_c = 0$.

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - G\frac{M.m}{r} = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad v_0^2 = 2G\frac{M}{r}$$

La vitesse de lancement v_0 vaut :

$$v_0 = \sqrt{2G\frac{M}{r}}$$

Dans le système international d'unités : la masse de la terre $M = 5,97 \times 10^{24}$, la rayon de la terre $r = 6371 \times 10^3$ et la constante d'interaction gravitationnelle $G = 6.67\ 10^{-11}$. Pour **lancer un projectile hors le champ de pesanteur terrestre, il faut que son vitesse sera de l'ordre de** :

$$v_0 = \sqrt{\frac{2 \times 6.67 \times 10^{-11} \times 5,97 \times 10^{24}}{6371 \times 10^3}} = 11180 \ \text{ m/s} = 40249 \ \text{ km/h}$$

■