Corrigé de la Série d'exercices N° 1 en mathématiques

Exo1 : Soient les fonctions définies par : $f(x) = \sqrt{1+x}$; $g(x) = \frac{1}{x^2-1}$; h(x) = ln(1-x) et k(x) = e^x.
Trouver les fonctions composées suivantes : (fog)(x) ; (hog)(x) ; (foh)(x) et (koh)(f(g(x)).

Exo2 : Expliciter la fonction f : $x \to |x^2 - x - 2|$

Solution : $|x^2 - x - 2| = \begin{cases} x^2 - x - 2 \ \ si\ x \in]-\infty, -1] \cup [2, +\infty[\\ -x^2 + x + 2 \quad si \quad x \in [-1\ ,\ 2] \end{cases}$

Exo3 : Calculer les limites suivantes : $\lim_{x\to0}\left(\frac{sin2x}{3x}\right)$; $\lim_{x\to0}\left(\frac{tanx}{x}\right)$; $\lim_{x\to0}\left(\frac{\sqrt{1+x}-1}{e^x-1}\right)$; $\lim_{x\to0}\frac{1-cosx}{x^2}$

$\lim_{x\to2}\left(\frac{x^2-4}{x^2-3x+2}\right)$ $\lim_{x\to0}\left(\frac{sinx+x}{\ln(1+x)}\right)$; $\lim_{x\to0}\frac{x^2+2|x|}{x}$; $\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+2|x|}{x}$; $\lim_{x\to0}\left(\frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2}\right)$

Solution :

1. $\lim_{x\to0}\left(\frac{sin2x}{3x}\right) = \lim_{x\to0}\left(\frac{sin2x}{2x}\right)\frac{2}{3} = \frac{2}{3}$ **puisque** $\lim_{u=2x\to0}\left(\frac{sinu}{u}\right) = 1$
2. $\lim_{x\to0}\frac{tanx}{x} = \lim_{x\to0}\frac{\frac{sinx}{cosx}}{x} = \lim_{x\to0}\frac{sinx}{x}\frac{1}{cosx} = 1.1 = 1$
3. $\lim_{x\to0}\left(\frac{\sqrt{1+x}-1}{e^x-1}\right) = \lim_{x\to0}\frac{(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1+x}+1)}{\sqrt{1+x}+1}.\frac{1}{e^x-1} = \lim_{x\to0}\frac{1}{\sqrt{1+x}+1}.\frac{x}{e^x-1} =$
   $\lim_{x\to0}\frac{1}{\sqrt{1+x}+1}.\frac{1}{\frac{e^x-1}{x}} = \frac{1}{2}.\frac{1}{1} = \frac{1}{2}$
4. $\lim_{x\to0}\frac{1-cosx}{x^2} = \lim_{x\to0}\frac{2sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{4\left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ **puisque** $1 - cosx = 2sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$
5. $\lim_{x\to2}\left(\frac{x^2-4}{x^2-3x+2}\right) = \lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-1)} = \lim_{x\to2}\frac{(x+2)}{(x-1)} = 4$
6. $\lim_{x\to0}\left(\frac{sinx+x}{\ln(1+x)}\right) = \lim_{x\to0}\left(\frac{\frac{sinx+x}{x}}{\frac{\ln(1+x)}{x}}\right) = \lim_{x\to0}\left(\frac{\frac{sinx}{x}+1}{\frac{\ln(1+x)}{x}}\right) = \frac{2}{1} = 2$
7. $\lim_{x\to0}\frac{x^2+2|x|}{x} = \begin{cases} \lim_{x\to0^+}\frac{x^2+2x}{x} = 2 \\ \lim_{x\to0^-}\frac{x^2-2x}{x} = -2 \end{cases}$
8. $\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+2|x|}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-2x}{x} = -\infty$
9. $\lim_{x\to0}\left(\frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2}\right)$; $posons\ 1 + x^2 = t^3\ \ donc\ x^2 = t^3 - 1$; **qd** $x \to 0\ alors\ t \to 1$

   $\lim_{x\to0}\left(\frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2}\right) = \lim_{t\to1}\left(\frac{t-1}{t^3-1}\right) = \lim_{t\to1}\frac{1}{t^2+t+1} = \frac{1}{3}$

Exo : Montrer que la fonction $x \to |x-2|$ n'est pas dérivable en x_0=2

Solution : $\lim_{x\to2}\frac{|x-2|}{x-2} = \begin{cases} \lim_{x\to2^+}\frac{x-2}{x-2} = 1 \\ \lim_{x\to2^-}\frac{-(x-2)}{x-2} = -1 \end{cases}$

les limites à droite et à gauche ne sont pas égales donc la fonction n'estpas dérivable en 2

Exo4 : Etudier les variations de la fonction *f*: $]0, +\infty[\to R$ définie par $f(x) = xlnx$

Solution : La fonction f est définie sur $]0, +\infty[$ et on a : $f'(x) = 1 + lnx$

$f'(x) = 0\ \ ssi\ x = e^{-1}$

Le tableau de variation de f est donc :

x	0		e^{-1}		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

Les informations sur f peuvent se compléter par :

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=0$; $f(e^{-1})=-e^{-1}\approx -0,37$; $f(1)=0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

Exo5: Calculer la dérivée troisième de la fonction $f: x\to x^m e^x$ où $m\in N^*$

Solution :

- Si $m=1$

$f'(x)=(x+1)e^x$

$f''(x)=(x+2)e^x$

$f^{(3)}(x)=(x+3)e^x$

- Si $m=2$

$f'(x)=(x^2+2x)e^x$

$f''(x)=(x^2+4x+2)e^x$

$f^{(3)}(x)=(x^2+6x+6)e^x$

- Si $m\geq 3$

$f'(x)=[x^m+mx^{m-1}]e^x$

$f''(x)=[x^m+2mx^{m-1}+m(m-1)x^{m-2}]e^x$

$f^{(3)}(x)=[x^m+3mx^{m-1}+3m(m-1)x^{m-2}+3m(m-1)(m-2)x^{m-3}]e^x$

Exo6 : Calculer les dérivées des fonctions définies par : f(x)= $\sqrt[5]{1+2x-x^2}$ et g(x)=$a^{\frac{x+1}{x-2}}$.

Solution :

f'(x)=$\left(\sqrt[5]{1+2x-x^2}\right)' = \left((1+2x-x^2)^{\frac{1}{5}}\right)' = \frac{1}{5}(1+2x-x^2)'(1+2x-x^2)^{\frac{1}{5}-1}$

$$= \frac{1}{5}(2-2x)(1+2x-x^2)^{-\frac{4}{5}}$$

g'(x)=$\left(e^{\frac{x+1}{x-2}lna}\right)' = e^{\frac{x+1}{x-2}lna}\,.\left(\frac{x+1}{x-2}\,lna\right)'$

Exo7 : Etant donnée la fonction α définie par : $\alpha(x) = e^{-ax^2+1}+bx-c \quad avec\ x\geq 0\ et\ a\neq 0$. Calculer a, b et c, sachant que la fonction α vérifie les propriétés suivantes :

1) La courbe C de la fonction α passe par le point origine M(0,0) ;

2) La tangente à la courbe C admet au point M(0,0) une pente égale à 1 ;

3) L'abscisse du point d'inflexion est : x=$\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Solution :

1. $\alpha(0)=0\ donne\ c=e$
2. **On calcule d'abord** $\alpha'^{(x)} = -2axe^{-ax^2+1}+b\ puis\ \alpha'(0)=1$ **donne b=1**
3. $\alpha''(x)=(-2a+4a^2x^2)e^{-ax^2+1}$

$\alpha''\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=0$ **donne a=1**

Exo8 : Etudier l'existence et la nature des extrémums de la fonction f définie par : $f(x) = \frac{x^2-x-1}{x+1}$

Solution :

$$f'(x) = \frac{(2x-1)(x+1)-(x^2-x-1)}{(x+1)^2} = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}.$$

Le tableau de variation de f est donc :

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
f'(x)		+	0	−	||	−	0	+	
f(x)	$-\infty$	↗		↘ $-\infty$	||	$+\infty$ ↘		↗	$+\infty$

La fonction admet
- pour $x = -2$ un maximum local avec $f(-2) = -5$;
- pour $x = 0$ un minimum local avec $f(0) = -1$.

Exo9 : La concentration en milligramme par centimètre cube d'un médicament A dans le sang d'une personne après t heures est donné par : $C(t) = \frac{0.18\,t}{t^2+3t+25}$. Donner l'heure du maximum de concentration.

Solution :

$C'(t) = \frac{-0.18t^2+4.5}{(t^2+3t+25)^2} = 0$ ***ssi*** $t = \pm 5$ **on retient t=5 car le temps est positif**

en élaborant le tableau de variation C'(t) change de signe, ainsi t=5 heures est l'heure du maximum de concentration

une autre méthode calculer C''(5)< 0

Exo10 : Déterminer les approximations à l'ordre 4 et au voisinage de 0 des fonctions numériques définies par : $f(x) = \frac{1}{1-x}$; $f(x) = \frac{1}{1+x}$; $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$; $h(x) = (1+x)^{\alpha}$ où $\alpha \in Q$; $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$; $f(x) = \sqrt{1+x}$;

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$; $f(x) = \frac{\ln(\cos x)}{x}$; $f(x) = \frac{\sin x - xe^x}{x^2}$; $f(x)=\sqrt{1+\ln(1+x)}$; $f(x)=e^{\cos x}$; $f(x)=\tan x$

Solution :

- $f(x) = \frac{1}{1-x} \approx 1 + x + x^2 + x^3 + x^4$

soit en appliquant la formule $f(x) \approx f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ ***vu en cours***

soit en faisant la division suivant les puissances croissantes

- $f(x) = \frac{1}{1+x} \approx 1 - x + x^2 - x^3 + x^4$ ***en faisant un changement de variable*** $y = -x \in v(0)$

dans $\frac{1}{1-x} \approx 1 + x + x^2 + x^3 + x^4$ **ou bien** ***en faisant la division suivant les puissances croissantes***

- $f(x) = \frac{1}{1+x^2} \approx 1 - x^2 + x^4$ ***en faisant le chgt de variable*** $y = x^2 \in v(0)$
  dans $\frac{1}{1+x} \approx 1 - x + x^2 - x^3 + x^4$ ***mais on s'arrête à l'ordre 4***
- $f(x) = (1+x)^{\alpha} \approx 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)}{4!}x^4$

en appliquant la formule $f(x) \approx f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ ***vu en cours***

- $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2} = (1-x)^{-2} = (1+y)^{-2}$ **en posant** $y = -x \in v(0)$ ***et remplacer*** $\alpha = -2$ **dans le résultat précédent** $f(x) \approx (1+x)^{\alpha} \approx 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)}{4!}x^4$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = (1-x)^{-2} = (1+y)^{-2}$$

$$\approx 1-2y+\frac{-2(-2-1)}{2!}y^2+\frac{-2(-2-1)(-2-2)}{3!}y^3+\frac{-2(-2-1)(-2-2)(-2-3)}{4!}y^4$$

puis remplacer $y=-x$

$$f(x)=\frac{1}{(1-x)^2}\approx 1+2x+3x^2+4x^3+5x^4$$

- $f(x)=\sqrt{1+x}=(1+x)^{\frac{1}{2}}$ **on utilise la formule suivante avec** $\alpha=\frac{1}{2}$

$$f(x)=(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)}{4!}x^4$$

$$f(x)=\sqrt{1+x}\approx 1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3-\frac{5}{128}x^4$$

- $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x}}=(1+x)^{-\frac{1}{2}}\approx 1-\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2-\frac{5}{16}x^3+\cdots$
- $f(x)=\frac{\ln(cosx)}{x}\approx\frac{\ln\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}\right)}{x}=\frac{\ln(1+u)}{x}\approx\frac{u-\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{3}+\frac{u^4}{4}}{x}=-\frac{x}{2}-\frac{x^3}{12}$ **où** $u=-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}\in v(0)$
- $f(x)=\frac{\sin x-xe^x}{x^2}\approx\frac{x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-x(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!})}{x^2}$ ***continuer le calcul***
- $f(x)=\sqrt{1+ln(1+x)}=\sqrt{1+u}$ **où** $u=\ln(1+x)\approx x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\in v(0)$
  $\sqrt{1+u}\approx 1+\frac{1}{2}u-\frac{1}{8}u^2+\frac{1}{16}u^3-\frac{5}{128}u^4$ **calculer u^2 , u^3 et u^4 puis remplacer dans l'expression précédente**
- $f(x)=e^{cosx}=e^{cosx-1+1}=e.e^{cosx-1}$ **posons u=cosx-1=** $1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-1=-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}\in v(0)$

$f(x)=$ $e^{cosx-1}e=e^ue=\left(1+u+\frac{u^2}{2!}+\frac{u^3}{3!}+\frac{u^4}{4!}\right)e$; $u=-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}$ ***calculer u^2, u^3 et u^4 à l'ordre 4 puis remplacer dans*** $\left(1+u+\frac{u^2}{2!}+\frac{u^3}{3!}+\frac{u^4}{4!}\right)e$

$f(x)=e^{cosx}\approx e(1-\frac{x^2}{2}+\cdots)$

- $f(x)=tanx=\frac{sinx}{cosx}\approx\frac{x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}}{1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}}\approx x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}$ ***avec la division suivant les puissances croissantes***

$$\begin{array}{c|l}
x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o(x^5) & 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^5) \\
x-\frac{x^3}{2}+\frac{x^5}{24}+o(x^5) & \\
\hline
\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{30}+o(x^5) & x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15} \\
\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{6}+o(x^5) & \\
\hline
\frac{2x^5}{15}+o(x^5) & \\
\frac{2x^5}{15}+o(x^5) & \\
\hline
o(x^5) &
\end{array}$$

Exo11 : Croissance bactérienne

On a cultivé la bactérie *Salmonella anatum* dans un bouillon nutritif ordinaire. Avec des comptages au cours des 8 premières heures, on a modélisé l'évolution de l'effectif y (en nombre de bactéries par ml) en fonction du temps x (en heures) par la fonction exponentielle : $y=2240e^{1,035x}$

1. Quel effectif (en nombre de bactéries par ml) pouvez-vous prévoir à 9 h dans l'hypothèse où le milieu n'est pas limitant ?

2. Quelles sont les vitesses de croissance aux temps 3 h ? 5 h ? 8 h ?

Solution :

Dans ce cas, en remplaçant x par 9, on obtient :

$$y = 2240\, e^{1,035\times 9} = 24\,871\,451$$

soit environ 25 millions de bactéries par mL.

2. La dérivée de y en fonction de x est :

$$y'(x) = 2240 \times 1,035\, e^{1,035x} = 2318,4\, e^{1,035x}.$$

Les vitesses de croissance demandées (en bactéries par mL et par heure) sont donc :

$$y'(3) \approx 51722 \quad ; \quad y'(5) \approx 409885 \quad ; \quad y'(8) \approx 9144\,220.$$

Exo12 : Amplitude d'habitat

On a mesuré l'amplitude d'habitat y (c'est-à-dire la variation d'altitude que peut supporter une espèce), ainsi que l'altitude moyenne (x en m) pour des espèces de reptiles dans une zone de moyenne montagne (de 150 m à 950 m). À partir des résultats observés pour 16 espèces, on a obtenu la courbe d'ajustement polynomial d'ordre 2 : $y = -0.00108\, x^2 + 1.145x - 59.66$

Quelle est l'altitude moyenne d'une espèce dont l'amplitude d'habitat est maximale ?

Solution :

La fonction du modèle a pour dérivée :

$$y'(x) = -0,00216\, x + 1,145.$$

Elle s'annule pour $x = x_0 \approx 530$.

Comme $y'(x) > 0$ pour $x < x_0$ et $y'(x) < 0$ pour $x > x_0$, il s'agit bien d'un maximum.

L'espèce de reptile dont l'altitude moyenne est de 530 m est celle qui supporte les plus grandes variations d'altitude.

Exercices supplémentaires

Exo14 : Aire d'échantillonnage

On a quantifié le nombre d'espèces d'insectes sur des surfaces de x m^2 dans une pelouse à Fétuque et dans une pelouse à Brachypode. Les nombres moyens cumulés d'espèces (richesse spécifique) observés sont indiqués dans le tableau suivant :

	nombre cumulé moyen d'espèces d'insectes	
unités de surface	pelouse à Fétuque	pelouse à Brachypode
9	3,25	1,79
18	5,6	3,34
27	7,42	4,72
36	8,79	6,1
45	9,7	7,21
54	10,46	8,21
63	11	9

La relation entre le nombre moyen cumulé d'espèces y et la surface d'échantillonnage x est logarithmique :

$\boldsymbol{y = 4.0898\, ln x - 5.9356}$ **pour la pelouse à Fétuque**

$\boldsymbol{y = 3.7737\, ln x - 7.1206}$ **pour la pelouse à Brachypode**

1. Calculez la surface nécessaire à échantillonner dans chacune des deux pelouses pour espérer trouver une espèce supplémentaire.
2. Même question pour 5 espèces supplémentaires.

Solution :

Pour espérer trouver une espèce supplémentaire, dans la pelouse à Fétuque, il faut passer de $y = 11$ à $y = 12$, soit échantillonner une surface x telle que :

$$12 = 4,0898\ln(x) - 5,9356$$

On en déduit : $x = \exp\left(\frac{12 + 5,9356}{4,0898}\right) \approx 80,27$

Par précaution (aucun modèle n'est parfait), on échantillonnera donc 81 m^2.

• Pour espérer trouver une espèce supplémentaire, dans la pelouse à Brachypode, il faut passer de $y = 9$ à $y = 10$, soit échantillonner une surface x telle que :

$$10 = 3,7737\ln(x) - 7,1206$$

On en déduit : $x = \exp\left(\frac{10 + 7,1206}{3,7737}\right) \approx 93,39$

Par précaution, on échantillonnera donc 94 m^2.

2. • Pour espérer trouver cinq espèces supplémentaires, dans la pelouse à Fétuque, il faut passer de $y = 11$ à $y = 16$, soit échantillonner une surface x telle que :

$$16 = 4,0898\ln(x) - 5,9356$$

On en déduit : $x = \exp\left(\frac{16 + 5,9356}{4,0898}\right) \approx 213,47$

Par précaution, on échantillonnera donc 214 m^2.

• Pour espérer trouver cinq espèces supplémentaires, dans la pelouse à Brachypode, il faut passer de $y = 9$ à $y = 14$, soit échantillonner une surface x telle que :

$$14 = 3,7737\ln(x) - 7,1206$$

On en déduit : $x = \exp\left(\frac{14 + 7,1206}{3,7737}\right) \approx 269,54$

Par précaution, on échantillonnera donc 270 m^2.