Mi : 1ère année ; Résumé d'Algèbre .

Chap 0 : Un peu de logique.

I_ Proposition (pp) logique :

• Une pp est un énoncé dont on peut dire s'il est vrai/faux

ex : $2^3 = 18$ pp (v.v=0) / $x \in \mathbb{N}$ $\cancel{pp}$.

_ Calcul propositionnel : Soient p, q 2 pp données.

_ La Négation : $\bar{p}$ ex p: $\sqrt{2} \geq 15$, $\bar{p}$: $\sqrt{2} < 15$.

_ Les connecteurs logiques :

1_ Conjonction : _ p et q , on note $p \wedge q$.

_ $p \wedge q$ est vraie ssi p, q sont vraies simultanément.

2_ Disjonction : _ p ou q , on note $p \vee q$.

_ $p \vee q$ est fausse ssi p, q sont fausses simultanément.

3_ L'implication : si p... alors ..q.. , on note $p \Rightarrow q$

_ $p \Rightarrow q = \bar{p} \vee q$

_ $p \Rightarrow q$ est fausse ssi p est vrai et q est fausse .

4_ L'équivalence : _ $p \Leftrightarrow q$ $(p \Rightarrow q \wedge q \Rightarrow p)$.

_ Tableau de vérité : (vraie = 1, fausse = 0) .

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0
0	0	0	0	1	1

II - Prédicat (fct propositionnelle) :

- C'est un énoncé qui contient une ou pls variables, tel que si on donne aux variables des valeurs, on obtient des pptions.

- Quantificateurs :

- $\forall$: quel que soit. / - $\exists$: s'il existe au moins un élément.
universel existentiel ($\exists!$: un seul élément)

- les quantificateur transforment le prédicat a une pption.

*** Regles de Négation :** p, q deux pption :

- $\overline{p \wedge q} \equiv \bar{p} \vee \bar{q}$
- $\overline{p \vee q} \equiv \bar{p} \wedge \bar{q}$
- $\overline{p \Rightarrow q} \equiv p \wedge \bar{q}$
- $\overline{p \Leftrightarrow q} \equiv (\bar{p} \Leftrightarrow \bar{q})$
- $\overline{\forall x \in E : p(x)} \equiv \exists x \in E : \overline{p(x)}$
- $\overline{\exists x \in E : p(x)} \equiv \forall x \in E : \overline{p(x)}$

*** Methodes de raisonnement :**

Un exercice : hypothèses (p) $\Rightarrow$ Resultats à démontrer (q).

- **la démonstration directe :** démarré de "p" et arrivé à "q".
- **la contraposée :** au lieu de démontrer $p \Rightarrow q$ on démontre que $\bar{q} \Rightarrow \bar{p}$.
- **l'absurde :** On suppose que $A = 0$ ($\bar{A} = 1$) et on arrive à une contradiction. $\bar{A}$ vraie $\xrightarrow{\text{but}}$ contradiction. $\overline{p \Rightarrow q} \Leftrightarrow p \wedge \bar{q}$
- **Contre exemple :** pour justifier qu'un enoncé "A" est faux, On présente un ex qui le met a défaut.
- **Par récurence :** - elle est réservé pour les prop dans $\mathbb{N}$.
  - étape 1 : vérifier les propriétés (pour n_0, n_1).
  - étape 2 : Supposer que la prop est vraie à l'ordre $\mathbb{N}(n)$, et montrer qu'elle reste vrai à l'ordre $\mathbb{N}(n+1)$.

Chap I : Ensembles - Relations - Applications :

1. Ensembles

* Relations entre ensembles :

1. Inclusion : E est inclus dans F si tous les éléments de E sont dans F.

mathématiquement : $E \subset F \equiv (\forall x : x \in E \Rightarrow x \in F)$

- propriétés : $\emptyset \subset E \;/\; E \subset E \;/\; E \subset F \wedge F \subset G \Rightarrow E \subset G$.

2. Egalité : E est égal à F si $E \subset F \wedge F \subset E$.

math. $(E = F) \equiv (E \subset F \wedge F \subset E) \equiv (\forall x : x \in E \Leftrightarrow x \in F)$

* Opération sur les ensembles :

① Intersection "$\cap$" : $A \cap B$ est l'ensemble des éléments communs.

math. : $A \cap B = \{x / x \in A \wedge x \in B\}$.

Rem : si $A \cap B = \emptyset$, on dit que A et B sont disjoints.

② Réunion "$\cup$" : A union B est l'ens $= \{x / x \in A \vee x \in B\}$.

propriétés de $\cap$ et $\cup$:

- $A \cup A = A \;/\; A \cap A = A$
- $A \cup \emptyset = A$.
- $A \cup B = B \cup A \;/\; A \cap B = B \cap A$
- $A \cap \emptyset = \emptyset$.
- $A \cup B \cup C = (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
- $A \cap B \cap C = (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

③ Différence : $A - B \; (A \backslash B) = \{x / x \in A \wedge x \notin B\}$

pptés : $A - \emptyset = A \;/\; \emptyset - A = \emptyset \;/\; A - A = \emptyset \neq 0 \;/\; (A - B \neq B - A)$.

④ Différence symétrique : Δ : delta

$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$.

* Ensemble des Parties d'un ensemble:

$\{E \in P_{(E)}$ ✓
$E \subset P_{(E)}$ ✗

- A est une partie de E si $A \subset E$.
- l'ens des parties de E est : $P_{(E)} = \{A / A \subset E\}$ (toutes les parties de E)

* Complémentaire d'une partie:

E un ens, A une partie de E, On appelle Compl de A dans E l'ens:

$$C_E A = \{x / x \in E \wedge x \notin A\} \equiv E - A \; (x \in C_E A \Leftrightarrow x \notin A)$$

propriétés; E ens ; A, B : des parties de E:

- $C_E \phi = E \;/\; C_E E = \phi \;/\; C_E(C_E A) = A$.
- $A \cap C_E A = \phi \;/\; A \cup C_E A = E$.
- Regles de Morgan:

$$\begin{cases} C_E(A \cup B) = C_E A \cap C_E B \\ C_E(A \cap B) = C_E A \cup C_E B \end{cases}$$

* Produit Cartesien:

$$E \times F = \{(a,b) / a \in E \wedge b \in F\}$$

Couple ordonné (a 1ère composante du couple, b 2ème comp)

- $E \times F \neq F \times E$ / on note $E \times E$ par E^2.
- $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n = \prod_{k=1}^{n} E_k \;/\; \underbrace{E \times E \times \dots \times E}_{n \text{ fois}} = E^n$

- Cas général !!

www.exomaroc.com: MIHAD

2- Relations

* Une relation entre E, F (ensembles) est une régle qui permet d'associer aux elts de E des elts de F.

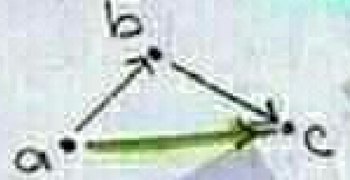
On la note: aRb : a est en rel avec b.

* Graphe d'une rel:

$$G_R = \{(a,b) \in E \times F \ / \ aRb\}$$

* Relations binaire. (Propriétés): aRb

C'est une rel définie entre les elts de même ens.

reflixive	symetrique	transitive	antisymetrique
$\forall a \in E$: aRa	$\forall a,b \in E$: $aRb \Leftrightarrow bRa$	$\forall a,b,c \in E$: $aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc$	$\forall a,b \in \mathbb{R}$: $aRb \wedge bRa \Rightarrow a=b$
			

• Relation d'équivalence:

R est une rel d'équivalence si elle est: refl + sym + trans.

- Classe d'équivalence:

C'est l'ens: $\bar{a} = \{x \in E \ / \ xRa\}$.

• Relation d'ordre:

R est une rel d'ordre si elle est: refl + trans + antisym.

- On dit que l'ordre est total si: $\forall\, a,b \in E : aRb \vee bRa$

et il est partiel si: $\exists a,b \in E : a \not{R} b \wedge b \not{R} a$.

www.exomaroc.com: MIHAD

3_ Applications :

* On appelle application de E vers F, toute rel qui permet d'associer à chaque elts de E un seul elts de F.
* Egalité de deux app : $f \equiv g$ si $E = E'$ $\wedge$ $F = F'$; $\forall x : f(x) = g(x)$
* Image directe d'une partie A : $f(A)$ "ens"

$f : E \to F$ (une appl) / $A \subset E$;

$f(A) = \{ \underbrace{f(x)}_{\text{images}} / x \in A \}$; $f(A) \subset F$

* Image réciproque de B : $f^{-1}(B)$

$f : E \to F$ / $B \subset F$

$f^{-1}(B) = \{ \underbrace{x \in E}_{\text{antécédents}} / f(x) \in B \}$; $f^{-1}(B) \subset E$

* La Composition des applications :

$f : E \to F$; $g : F \to G$

La composée de f et g est : $h(x) = g(f(x)) = g \circ f(x)$:
(f compose g).

* Propriétés d'une app :

• injective : $\forall a, b \in E$: $f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$.

La négation : $\exists$ $a, b \in E$: $f(a) = f(b)$ $\wedge$ $a \neq b$.

• surjective : $\forall y \in F$: $\exists ? x \in E$: $y = f(x)$

• Notion de Bijection : f bij $\Leftrightarrow$ f inj + f surj