Université de Bordj Bou Arreridj

Département d'électromécanique

Faculté des sciences et de la technologie

Matière : Théorie du champ Electromagnétique

Option : Electrotechnique 3 Année

Pr. HAMIMID Mourad

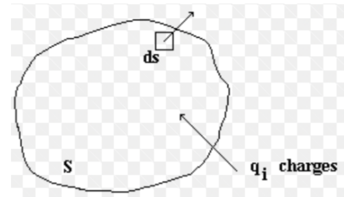
CHAPITRE IV

Régime variable – Equations de Maxwell

Table des matières

Conservation de la charge

1 Définition :



La conservation de la charge électrique est un principe physique. Il exprime que la charge électrique d'un système isolé est un invariant. La charge électrique ne peut donc être qu'échangée avec un autre système mais ni créée ni annihilée. On dit qu'il s'agit d'une grandeur conservative. Supposons une surface fermée avec Q une charge à l'intérieur et un courant I sortant :

$$I = -\frac{dQ}{dt}$$

avec

$$I = \oiint \overrightarrow{J}\overrightarrow{ds} \Longrightarrow \oiint \overrightarrow{J}\overrightarrow{ds} = -\frac{dQ}{dt}$$

d'après le théorème de Gauss

$$\oiint \overrightarrow{E}\overrightarrow{ds} = \frac{Q}{\varepsilon} \Rightarrow Q = \varepsilon \oiint \overrightarrow{E}\overrightarrow{ds}$$

donc :

$$\oiint \overrightarrow{J}\overrightarrow{ds} = -\frac{d}{dt}\left(\varepsilon \oiint \overrightarrow{E}\overrightarrow{ds}\right) \Rightarrow \oiint \left(\overrightarrow{J} + \varepsilon\frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t}\right)\overrightarrow{ds} = 0$$

Cette expression représente la conservation de la charge électrique.

est d'après le théorème de Green-Ostrogradsky :

$$\oiint \left(\overrightarrow{J} + \varepsilon\frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t}\right)\overrightarrow{ds} = \iiint div\left(\overrightarrow{J} + \varepsilon\frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t}\right)dv = 0$$

donc : $div\left(\overrightarrow{J} + \varepsilon\frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t}\right) = 0 \Rightarrow div(\overrightarrow{J}) + \varepsilon\frac{\partial}{\partial t}div(\overrightarrow{E}) = 0$ avec $div(\overrightarrow{E}) = \frac{\rho}{\varepsilon}$, finalement on trouve :

$$div(\overrightarrow{J}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

dans le régime statique $\frac{\partial \rho}{\partial t} \approx 0$

l'équation de la conservation de la charge dans le régime statique ou le régime quasi-statique est : $\oiint \overrightarrow{J}\overrightarrow{ds} = 0$ ou $div(\overrightarrow{J}) = 0$

2 Loi de Maxwell-Ampère

D'après le théorème d'Ampère :

$$\overrightarrow{rot}\overrightarrow{H} = \overrightarrow{J}$$

donc

$$div\left(\overrightarrow{rot}\overrightarrow{H}\right) = div\overrightarrow{J} \Rightarrow div\overrightarrow{J} = 0$$

mais en régime variable nous avons $div(\overrightarrow{J}) = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$??

on constate que le théorème d'ampère $\overrightarrow{rot}\overrightarrow{H} = \overrightarrow{J}$ n'est plus valable dans le régime variable.

Nous connaissons que en régime statique et quasi-statique que $div\overrightarrow{J}=0$ et $\overrightarrow{rot}\overrightarrow{H}=\overrightarrow{J}$ par analogie en régime variable nous pouvons poser :

$$div\left(\overrightarrow{J}+\varepsilon\frac{\partial\overrightarrow{E}}{\partial t}\right)=0\Longleftrightarrow\overrightarrow{rot}\overrightarrow{H}=\overrightarrow{J}+\varepsilon\frac{\partial\overrightarrow{E}}{\partial t}$$

On constate que Maxwell a modifié le théorème d'Ampère en régime variable et a ajouté le terme $\varepsilon\frac{\partial\overrightarrow{E}}{\partial t}$ donc dans le régime variable le théorème d'Ampère devient : $\overrightarrow{rot}\overrightarrow{H}=\overrightarrow{J}+\varepsilon\frac{\partial\overrightarrow{E}}{\partial t}$

3 Les équations de Maxwell

$$\begin{cases}\overrightarrow{rot}\overrightarrow{H}=\overrightarrow{J}+\varepsilon\frac{\partial\overrightarrow{E}}{\partial t} & (1) \quad \textit{équation de Maxwell Ampère}\\ div\overrightarrow{B}=0 & (2) \quad \textit{équation de Maxwell - flux magnétique}\\ div\overrightarrow{E=\frac{\rho}{\varepsilon}} & (3) \quad \textit{équation de Maxwell Gauss}\\ \overrightarrow{rot}\overrightarrow{E}=-\frac{\partial\overrightarrow{B}}{\partial t} & (4) \quad \textit{équation de Maxwell Faraday}\end{cases}$$

L'équation de Maxwell Faraday traduit les effets de l'induction magnétique
on la force électromotrice est donnée par $e=-\frac{d\Phi}{dt}\Rightarrow-\frac{d}{dt}\oiint\overrightarrow{B}\overrightarrow{ds}$ donc $e=-\oiint\frac{d\overrightarrow{B}}{dt}\overrightarrow{ds}$
on a encore : $e=\oint\overrightarrow{E}\overrightarrow{dl}$ en appliquant le théorème de Stocks $\oint\overrightarrow{E}\overrightarrow{dl}=\oiint\overrightarrow{rot}\overrightarrow{E}\overrightarrow{ds}$ donc $\oiint\overrightarrow{rot}\overrightarrow{E}\overrightarrow{ds}=-\oiint\frac{d\overrightarrow{B}}{dt}\overrightarrow{ds}$ et cela donne la 4ème équation de Maxwell.

4 Loi de Lenz

Lorsqu'on approche un aimant d'une bobine connectée sur un galvanomètre ,on détecte un courant électrique créé dans la bobine .

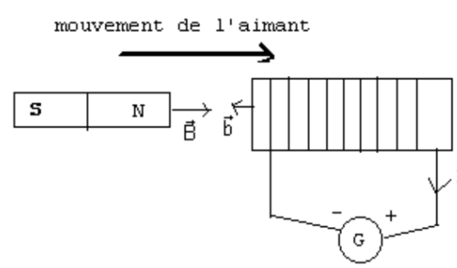
Le sens de ce courant dépend de la façon dont on déplace l'aimant :

- Si on approche le pôle nord suivant l'axe le courant est dans le sens représenté sur la figure : il génère lui-même un champ magnétique b induit qui tend à s'opposer au champ magnétique B , son sens et sa direction sont donnés par le bonhomme d'Ampère

(on " couche " le bonhomme d'Ampère sur le circuit , le courant lui rentrant par les pieds , lui sortant par la tête , son regard est tourné vers le point où on cherche à déterminer le champ magnétique induit par le courant , son bras gauche tendu indique le sens et la direction de ce vecteur)

- Si on recule le pôle nord , I s'inverse

- Si on approche le pôle sud , cela a le même effet que si on recule le pôle nord.



Dans tous ces cas , on vérifie que I crée un champ b qui s'oppose à la variation du champ magnétique que tend à provoquer le déplacement de l'aimant , au sein de la bobine .

Le phénomène est d'autant plus important que le mouvement de l'aimant est rapide .Il est d'autant plus important que l'aimant est présenté axialement devant la bobine (il est imperceptible si on approche l'aimant perpendiculairement à l'axe de la bobine)

5 Jauge de Lorenz

La jauge de Lorenz est une équation d'électromagnétisme. L'introduction d'une équation de jauge permet de caractériser le potentiel vecteur A qui n'est pas défini de manière unique à partir du champ magnétique.

l'équation est la suivante :

$$div\overrightarrow{A} + \mu\varepsilon\frac{\partial V}{dt} = 0$$

avec : μ : est la perméabilité du milieu, ε : est la permittivité du milieu

En statique $\frac{\partial V}{dt} = 0$ cela implique que $div\overrightarrow{A} = 0$ (Jauge de Coulomb)

Son origine provient du fait que disposant des équations de Maxwell, on montre que la propagation des champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ dans le vide vérifie l'équation de d'Alembert

6 Equations de Propagation

Dans cette jauge, on peut montrer que le potentiel scalaire V vérifie lui aussi l'équation de d'Alembert.

6.1 Equation de propagation de V

de l'équation de Maxwell-Faraday :
$\overrightarrow{rot}\overrightarrow{E} = -\frac{\partial\overrightarrow{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}(\overrightarrow{rot}\overrightarrow{A})$ car $\overrightarrow{B} = \overrightarrow{rot}\overrightarrow{A}$
$\overrightarrow{rot}\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{rot}(\frac{\partial\overrightarrow{A}}{\partial t}) \Longrightarrow \overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{E} + \frac{\partial\overrightarrow{A}}{\partial t}\right) = 0$, de cette expression on trouve que $\left(\overrightarrow{E} + \frac{\partial\overrightarrow{A}}{\partial t}\right) = -\overrightarrow{grad}V$
avec V est le potentiel scalaire électrique, le champ électrique est donc : $\overrightarrow{E} = -\frac{\partial\overrightarrow{A}}{\partial t} - \overrightarrow{grad}V$
l'équation de Maxwell-Gauss nous donne : $div\overrightarrow{E} = 0$; donc : $div\overrightarrow{E} = -\frac{\partial}{\partial t}div\overrightarrow{A} - \triangle V = 0$
il faut poser (d'après la Jauge de Lorenz) : $div\overrightarrow{A} = -\mu\varepsilon\frac{\partial V}{dt}$ on obtient :

$$\triangle V - \mu\varepsilon\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0$$

c'est l'équation de propagation du potentiel scalaire V.

6.2 Equation de propagation de $\overrightarrow{A}$

pour le potentiel vecteur magnétique $\overrightarrow{A}$ et d'après la relation $\overrightarrow{rot}\overrightarrow{rot}\overrightarrow{A} = \overrightarrow{grad}(div\overrightarrow{A}) - \triangle\overrightarrow{A}$ avec $\overrightarrow{B} = \overrightarrow{rot}\overrightarrow{A}$
l'équation de Maxwell-Ampère dans le vide $\left(\overrightarrow{J} = 0\right)$, $rot\overrightarrow{B} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\overrightarrow{E}}{\partial t}$
donc : $\overrightarrow{rot}\overrightarrow{rot}\overrightarrow{A} = \overrightarrow{grad}(div\overrightarrow{A}) - \triangle\overrightarrow{A} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\overrightarrow{E}}{\partial t}$ avec $\overrightarrow{E} = -\frac{\partial\overrightarrow{A}}{\partial t} - \overrightarrow{grad}V$ on trouve :
$\triangle\overrightarrow{A} - \overrightarrow{grad}(div\overrightarrow{A}) = \mu_0\varepsilon_0\left(\overrightarrow{grad}\frac{\partial V}{dt} + \frac{\partial^2\overrightarrow{A}}{\partial t^2}\right) \Rightarrow \triangle\overrightarrow{A} - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\overrightarrow{A}}{\partial t^2} = \overrightarrow{grad}\underbrace{\left(div\overrightarrow{A} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial V}{dt}\right)}_{=0\ (Jauge\ de\ Lorenz)}$

et finalement on a :

$$\triangle\overrightarrow{A} - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\overrightarrow{A}}{\partial t^2} = 0$$

l'équation de propagation du potentiel vecteur magnétique.

la Jauge de Lorenz donc la condition sur les potentiels (vecteur et scalaire) pour qu'ils se déplacent de la même manière que les champs $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{B}$

6.3 Equation de propagation de $\overrightarrow{E}$

les équations de Maxwell couplent les évolutions du champ électrique et magnétique, en absence des sources du courant et des charges électriques.

En appliquant le rotationnel à la ($4^{ème}$) équation de Maxwell on trouve : $\overrightarrow{rot}\overrightarrow{rot}\overrightarrow{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\overrightarrow{rot}\overrightarrow{B}$

d'après la première équation de Maxwell : $\overrightarrow{rot}\overrightarrow{B} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\overrightarrow{E}}{\partial t}$

donc : $\overrightarrow{rot}\overrightarrow{rot}\overrightarrow{E} = -\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\overrightarrow{E}}{\partial t^2}$

on utilisons la relation vectorielle suivante : : $\overrightarrow{rot}\overrightarrow{rot}\overrightarrow{E} = \overrightarrow{grad}(div\overrightarrow{E}) - \triangle\overrightarrow{E}$

avec $div\overrightarrow{E} = 0$ (dans le vide), finalement on trouve que :

$$\triangle\overrightarrow{E} - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\overrightarrow{E}}{\partial t^2} = 0$$

6.4 Equation de propagation de $\overrightarrow{B}$

Par un traitement semblable, en appliquant le rotationnel à la première équation de Maxwell, $\overrightarrow{rot}\overrightarrow{rot}\overrightarrow{B} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\left(\overrightarrow{rot}\overrightarrow{E}\right)$ et d'après la ($4^{ème}$) équation de Maxwell on a : $\overrightarrow{rot}\overrightarrow{E} = -\frac{\partial\overrightarrow{B}}{\partial t}$ donc : $\overrightarrow{rot}\overrightarrow{rot}\overrightarrow{B} = -\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\overrightarrow{B}}{\partial t^2}$, on utilisons la relation vectorielle suivante : $\overrightarrow{rot}\overrightarrow{rot}\overrightarrow{B} = \overrightarrow{grad}(div\overrightarrow{B}) - \triangle\overrightarrow{B}$

avec $div\overrightarrow{B} = 0$ d'après la ($2^{ème}$) équation, on trouve finalement que :

$$\triangle\overrightarrow{B} - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\overrightarrow{B}}{\partial t^2} = 0$$

les 4 relations trouvées sont des équation de d'Alembert décrivant la propagation d'onde.

7 Conditions aux limites

Soient deux milieux diélectriques différents (*air et verre* par exemple) séparés par une interface –frontière fictive de séparation- située dans le plan yOz par exemple.

Question : Que devient le champ électromagnétique quand il passe d'un milieu à un autre ?

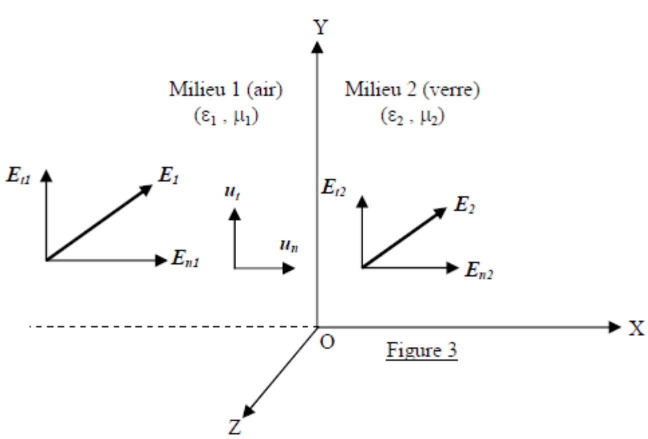


Figure 3

Posons $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{Et} + \overrightarrow{En}$

$\overrightarrow{Et}$: Composante tangentielle par rapport à la surface de séparation (plan yOz).

$\overrightarrow{En}$: Composante perpendiculaire par rapport à la surface de séparation.

7.1 Champ Electrique

a) Composantes tangentielles : La forme intégrale de l'équation de MF est :

$$\oint \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{dl} = -\frac{\partial}{\partial t} \int \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{ds} \tag{1}$$

Le contour fermé considéré est un rectangle ABCD situé de part et d'autre de la frontière.

$\oint \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{dl} = \int_{ABCD} \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{dl} = E_{n1}DN + E_{n2}NC + E_{t2}CB + E_{n2}BM + E_{n1}MA + E_{t1}AD$

Etant donné qu'on veut étudier le champ à la frontière des deux matériaux, c'est-à-dire les conditions limites du champ électrique,

on pose : $AM = MB = DN = NC \approx 0$,

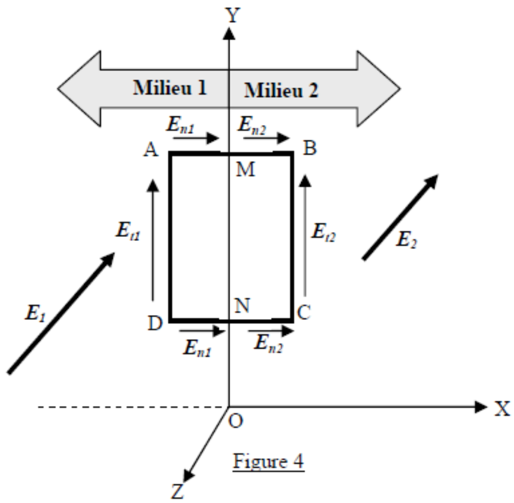


Figure 4

On obtient alors :

$\int \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{dl} = E_{t2}CB + E_{t1}AD = CB(E_{t2} - E_{t1})$

Par ailleurs, vu que : $AB \approx 0$ donc $S \approx 0$ On déduit que : $-\int \frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t} \cdot \overrightarrow{ds} = 0$

En outre sachant que : $AD = -CB$ On arrive à : $\int \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{dl} = E_{t2}CB + E_{t1}AD = CB(E_{t2} - E_{t1}) = 0$

Soit donc $E_{t2} = E_{t1}$

Conclusion : les composantes tangentielles du champ électrique sont égales.