Corrigé de la série de TD №03
Dynamique du point matériel

Solution Exercice №1 Dynamique à une dimension

On donne la force : $\vec{F}(t) = k/t^2\vec{i}$

1. Détermination de l'équation différentielle du mouvement

   On cherche à écrire l'équation différentielle du mouvement, on applique alors le principe fondamental de la dynamique (P.F.D.)

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{\gamma}$$

   Le mobile est soumis à la seule force $\vec{F}$, donc, $\vec{F} = m\vec{\gamma} \Rightarrow \frac{k}{t^2}\vec{i} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$

   En projetant sur la direction Ox du mouvement, on déduit

$$\frac{dv}{dt} = \frac{k}{mt^2} \qquad (1)$$

2. Expression de $v(t)$

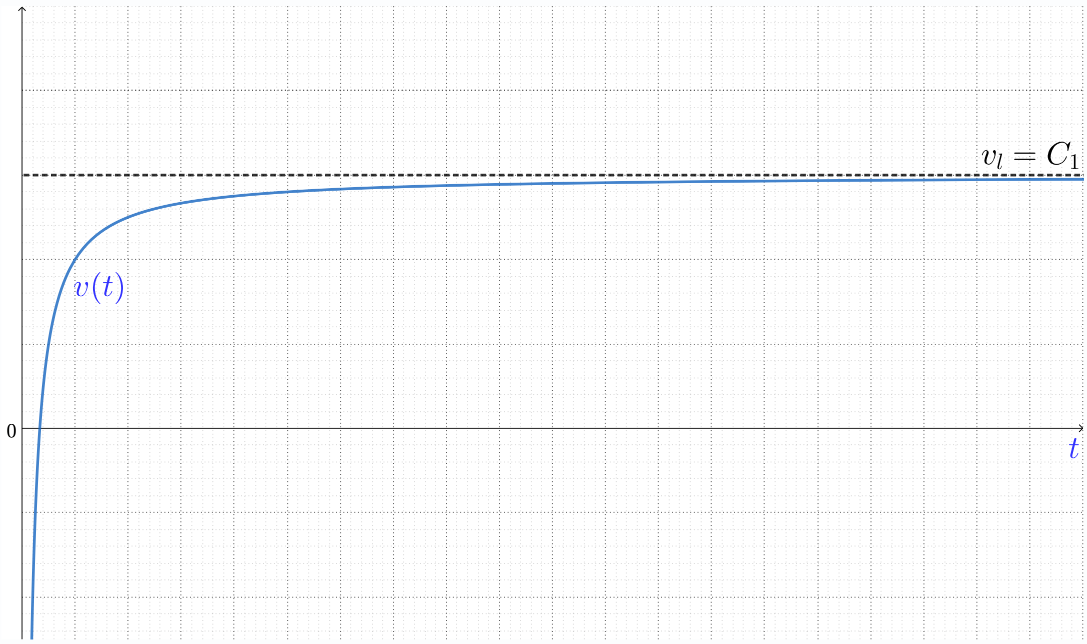
   La résolution de l'équation différentielle (1) se fait par intégration

$$(1) \Rightarrow dv = \frac{k}{mt^2}dt \;\Rightarrow\; \int dv = \int \frac{k}{mt^2}dt \;\Rightarrow\; v(t) = \frac{k}{m}\underbrace{\int \frac{1}{t^2}dt}_{-1/t}$$

   d'où

$$v(t) = -\frac{k}{mt} + C_1 \qquad (2)$$

   C_1 est une constante d'intégration homogène à une vitesse.



   Sur la figure ci-dessus, on représente les variations de la vitesse v en fonction du temps. On voit que la droite d'équation $v = v_l = C_1$ est une asymptote horizontale à la courbe représentative de v en $+\infty$.

3. <u>Expression de $x(t)$</u>
   La position du mobile est déduite à partir de la vitesse selon la loi

$$x(t) = \int v(t)\, dt$$

   En remplaçant v par son expression x s'écrit

$$x(t) = \int \left(-\frac{k}{mt} + C_1\right) dt = -\frac{k}{m} \underbrace{\int \frac{1}{t} dt}_{\ln(t)} + C_1 \underbrace{\int dt}_{t}$$

   Soit

$$x(t) = -\frac{k}{m} \ln(t) + C_1 t + C_2 \qquad (3)$$

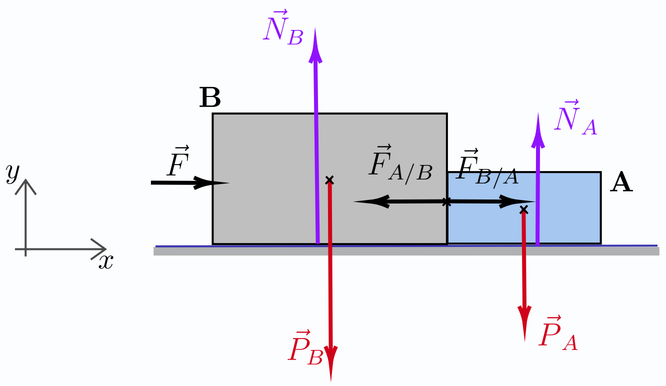
   C_2 est une constante d'intégration homogène à une longueur.

4. <u>Nature du mouvement de M quand $t \longrightarrow \infty$</u>
   A des instants très grands ($t \longrightarrow \infty$) la vitesse tend vers la valeur limite $v(t \longrightarrow \infty) = v_l = C_1 = cons$ et l'accélération devient nulle. D'ailleurs le graphe de l'expression (2) confirme l'atteinte d'une vitesse limite constante. Ainsi, le mouvement de M est rectiligne uniforme.

Solution Exercice №2 Mouvement en absence de frottements

Dans tout l'exercice, le système d'étude est les deux blocs assimilés à des points matériels et le référentiel galiléen d'étude est $\mathcal{R}(O,x,y)$ lié au sol.
On donne : $m_A = 2\,\text{kg}$, $m_B = 3\,\text{kg}$, $F = 20\,\text{N}$

1. <u>Représentation des forces appliquées sur chaque bloc</u>



<u>Forces appliquées sur A</u>

– $\vec{P}_A$: poids
– $\vec{N}_A$: réaction normale du support horizontal
– $\vec{F}_{B/A}$: force de contact exercée par B sur A

<u>Forces appliquées sur B</u>

– $\vec{F}$: force de traction
– $\vec{P}_B$: poids
– $\vec{N}_B$: réaction normale du support horizontal
– $\vec{F}_{A/B}$: force de contact exercée par A sur B

2. <u>Accélération des deux blocs</u>
   La deuxième loi de Newton (P.F.D.) appliquée aux deux blocs s'écrit

$$(A) : \vec{P}_A + \vec{N}_A + \vec{F}_{B/A} = m_A\vec{\gamma} \qquad\qquad (B) : \vec{F} + \vec{P}_B + \vec{N}_B + \vec{F}_{A/B} = m_B\vec{\gamma}$$

   En projetant sur les axes Ox et Oy on obtient

$$(A) : \begin{cases} \sum F_x = F_{B/A} = m_A\gamma & (1) \\ \sum F_y = N_A - P_A = 0 & (2) \end{cases} \qquad (B) : \begin{cases} \sum F_x = F - F_{A/B} = m_B\gamma & (3) \\ \sum F_y = N_B - P_B = 0 & (4) \end{cases}$$

Afin de déterminer γ, additionnons membre à membre les équations (1) et (3), il vient

$$\cancel{F}_{B/A} + F - \cancel{F}_{A/B} = (m_A + m_B)\,\gamma$$

d'où

$$\gamma = \frac{F}{m_A + m_B} \Rightarrow \gamma = \frac{20}{2+3} = 4\,\mathrm{m/s^2}$$

3. Module de la force exercée par A sur B

   A partir de l'équation (3)

$$F_{A/B} = F - m_B\gamma$$

   En remplaçant γ, on obtient

$$F_{A/B} = \left(\frac{m_A}{m_A + m_B}\right) F \Rightarrow F_{A/B} = \left(\frac{2}{2+3}\right) 20 = 8\,\mathrm{N}$$

   A titre de vérification de la troisième loi de Newton (ou loi des actions réciproques), on confirme bien que

$$F_{B/A} = m_A\gamma = \left(\frac{m_A}{m_A + m_B}\right) F = F_{A/B}$$

4. Module de la résultante des forces exercée sur B

   Selon la deuxième loi de Newton, la résultante de toutes les forces exercées sur B est

$$\vec{R}_{/B} = \sum \vec{F}_{/B} = m_B\vec{\gamma}$$

   d'où

$$\|\overrightarrow{R_{/B}}\| = m_B\|\overrightarrow{\gamma}\| \Rightarrow R_{/B} = 3 \times 4 = 12\,\mathrm{N}$$

   ou à partir de l'équation (3)

$$\|\overrightarrow{R_{/B}}\| = F - F_{A/B} = 20 - 8 = 12\,\mathrm{N}$$

5. Module de la force exercée par A sur B lorsque l'on intervertit la position des blocs

   Dans ce cas, les bilans des forces projetés sur la direction du mouvement s'écrivent

$$(A) : F_{B/A} = F - m_A\gamma \qquad (5)$$

$$(B) : F_{A/B} = m_B\gamma \qquad (6)$$

   En remplaçant γ, l'équation (6) implique

$$F_{A/B} = \left(\frac{m_B}{m_A + m_B}\right) F \Rightarrow F_{A/B} = \left(\frac{3}{2+3}\right) 20 = 12\,\mathrm{N}$$

   ou en utilisant l'équation (5)

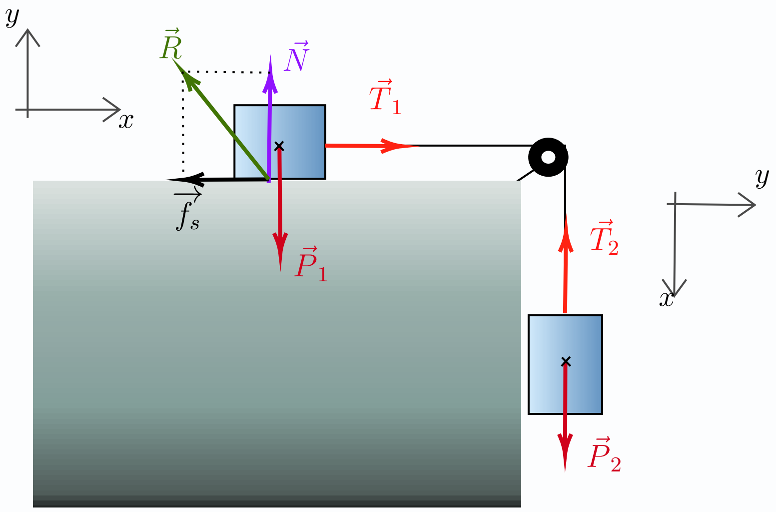
$$F_{A/B} = \left(1 - \frac{m_A}{m_A + m_B}\right) F \Rightarrow F_{A/B} = \left(1 - \frac{2}{2+3}\right) 20 = 12\,\mathrm{N}$$

   puisque $F_{A/B} = F_{B/A}$.

Solution Exercice №3 Mouvement en présence de frottement solide

Dans tout l'exercice, le système d'étude est les deux blocs assimilés à des points matériels et le référentiel galiléen d'étude est $\mathcal{R}(O,x,y)$ lié au sol.
On donne : $m_1 = 4\,\mathrm{kg}$, $m_2 = 6\,\mathrm{kg}$, $\mu_s = 0{,}8$, $\mu_c = 0{,}5$, $g = 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$

1. Bilan des forces appliquées



Rupture d'équilibre : $\vec{f}_s = \vec{f}_{s,\max}$

Forces appliquées sur m_1

– $\vec{P}_1$: poids
– $\vec{R}$: réaction du plan horizontal
$\vec{R} = \vec{N} + \vec{f}_s$
$\vec{N}$ désigne la réaction normale et $\vec{f}_s$ est la force de frottement statique, composante tangentielle de $\vec{R}$.
– $\vec{T}_1$: tension du câble sur m_1

Forces appliquées sur m_2

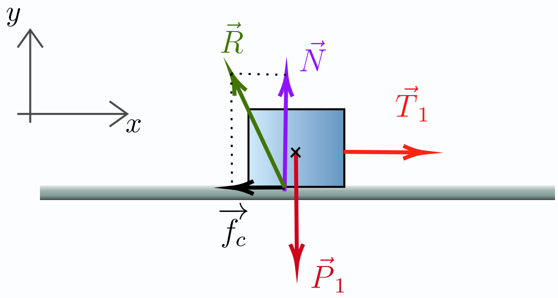
– $\vec{P}_2$: poids
– $\vec{T}_2$: tension du câble sur m_2

2. Relation entre m_1 et m_2 à la rupture d'équilibre
Au moment de la rupture d'équilibre où le système est **sur le point de glisser**, le module de la force de tension T_1 qui agit sur m_1 atteint une valeur maximale égale au module de la force de frottement statique maximale, c-à-d
$$T_1 = f_{s,\max} = \mu_s N \qquad (1)$$
où $N = P_1 = m_1 g$ (pas de mouvement sur la direction verticale Oy). De plus, le poids de la masse m_2 devient égal au module de la tension T_2, c-à-d
$$P_2 = T_2 = m_2 g \qquad (2)$$
Par ailleurs, la poulie est idéale (masse et frottements négligeables), alors la tension dans la corde est la même de chaque côté de la poulie, d'où
$$T_1 = T_2 \qquad (3)$$
Compte tenu des relations (1)-(3), il vient
$$m_2 \cancel{g} = \mu_s m_1 \cancel{g} \Rightarrow m_2 = \mu_s m_1 \qquad (4)$$
La relation (4) traduit simplement la condition vérifiée par les deux masses juste à la limite du démarrage de celles-ci.

3. Détermination de l'accélération et de la tension
Lorsque T_1 dépasse $f_{s,\max}$, c-à-d $T_1 > f_{s,\max}$, la relation (4) ne serait plus vérifiée, car les forces de frottements deviennent de nature cinétique et le système glisse avec une accélération non nulle. Dans

ces conditions, le principe fondamental de la dynamique s'écrit

$$(m_1) : \vec{P}_1 + \vec{N} + \vec{f}_c + \vec{T}_1 = m_1\vec{\gamma} \qquad\qquad (m_2) : \vec{P}_2 + \vec{T}_2 = m_2\vec{\gamma}$$



Bloc en mouvement : $T_1 > f_{s,\max}$

En projetant sur les axes, on obtient

$$(m_1) : \begin{cases} \sum F_x = T_1 - f_c = m_1\gamma & (5) \\ \sum F_y = N - P_1 = 0 & (6) \end{cases} \qquad (m_2) : \begin{cases} \sum F_x = P_2 - T_2 = m_2\gamma & (7) \\ \sum F_y = 0 & (8) \end{cases}$$

On sait par ailleurs que

$$f_c = \mu_c N \Rightarrow f_c = \mu_c m_1 g$$

En remplaçant f_c dans l'équation (5) puis en additionnant membre à membre les équations (5) et (7) on déduit

$$\cancel{T_1} - f_c + m_2 g - \cancel{T_2} = (m_1 + m_2)\,\gamma \Rightarrow m_2 g - \mu_c m_1 g = (m_1 + m_2)\,\gamma$$

d'où

$$\gamma = \left(\frac{m_2 - \mu_c m_1}{m_1 + m_2}\right) g \Rightarrow \gamma = \left(\frac{6 - 0{,}5 \times 4}{4 + 6}\right) 9{,}81 = 3{,}92\,\mathrm{m/s^2}$$

Remarquons que pour $m_2 > \mu_c m_1$, le mouvement des deux blocs est uniformément accéléré, alors que pour $m_2 = \mu_c m_1$ le mouvement est uniforme ($\gamma = 0$).

La tension est égale à

$$T_1 = T_2 = P_2 - m_2\gamma = \left(1 - \frac{m_2 - \mu_c m_1}{m_1 + m_2}\right) m_2 g$$

soit

$$T_1 = T_2 = \frac{(\mu_c + 1)\, m_1 m_2}{m_1 + m_2} g \Rightarrow T_1 = T_2 = \frac{(0{,}5 + 1)\, 4 \times 6}{4 + 6} 9{,}81 = 35{,}32\,\mathrm{N}$$

Solution Exercice №4 — Plans inclinés avec frottements

Le système d'étude est les deux blocs assimilés à des points matériels et le référentiel galiléen d'étude est $\mathcal{R}(O,x,y)$ lié au sol.

On donne : $m_A = 10\,\mathrm{kg}$, $m_B = 5\,\mathrm{kg}$, $\mu_c = 0{,}35$, $g = 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$, $\alpha = 35°$, $\beta = 45°$

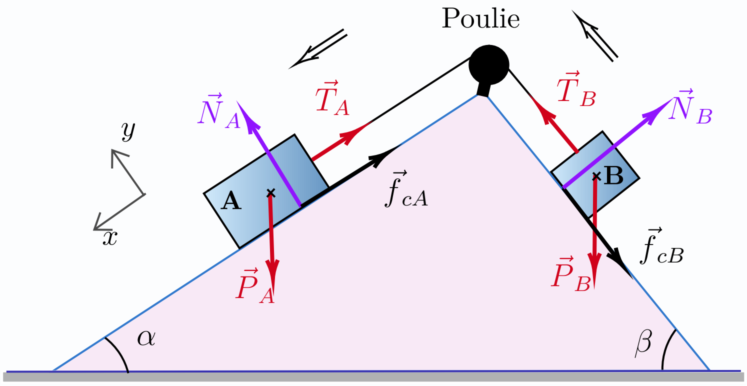
1. Bilan des forces

Forces appliquées sur m_A

– $\vec{P}_A$: poids
– $\vec{T}_A$: tension de la corde sur m_A
– $\vec{N}_A$: réaction normale du plan incliné sur m_A
– $\vec{f}_{cA}$: force de frottement cinétique

Forces appliquées sur m_B

– $\vec{P}_B$: poids
– $\vec{T}_B$: tension de la corde sur m_B
– $\vec{N}_B$: réaction normale du plan incliné sur m_B
– $\vec{f}_{cB}$: force de frottement cinétique



2. Réactions normales des deux plans

Afin de calculer N_A et N_B, exprimons la deuxième loi de Newton pour chaque bloc

$$(A) : \vec{P}_A + \vec{T}_A + \vec{N}_A + \vec{f}_{cA} = m_A\vec{\gamma}_A \qquad (B) : \vec{P}_B + \vec{T}_B + \vec{N}_B + \vec{f}_{cB} = m_B\vec{\gamma}_B$$

En projetant sur les axes, avec le sens arbitraire du mouvement choisi tel que A se déplace vers le vas du plan (figure ci-dessus), on aboutit à

$$(A) : \begin{cases} \sum F_x = m_A g \sin\alpha - T_A - f_{cA} = m_A\gamma_A & (1) \\ \sum F_y = N_A - m_A g\cos\alpha = 0 & (2) \end{cases} \quad (B) : \begin{cases} \sum F_x = T_B - m_B g\sin\beta - f_{cB} = m_B\gamma_B & (3) \\ \sum F_y = N_B - m_B g\cos\beta = 0 & (4) \end{cases}$$

Des équations (2) et (4) nous déduisons les réactions normales

$$N_A = m_A g\cos\alpha \Rightarrow N_A = 10 \times 9{,}81 \times \cos 35 = 80{,}36\,\mathrm{N}$$
$$N_B = m_B g\cos\beta \Rightarrow N_B = 5 \times 9{,}81 \times \cos 45 = 34{,}68\,\mathrm{N}$$

3. Accélération des deux corps et sens du mouvement

Comme les masses de la corde et de la poulie sont négligeables, les tensions dans chaque côté sont les mêmes en valeurs, c-à-d $T_A = T_B$. De plus, la corde est supposée inextensibles, ce qui implique que les accélérations des deux blocs sont égales, $\gamma_A = \gamma_B = \gamma$.

Ainsi, en additionnant membre à membre les équations (1) et (3) il vient

$$m_A g\sin\alpha - \cancel{T_A} - f_{cA} + \cancel{T_B} - m_B g\sin\beta - f_{cB} = (m_A + m_B)\gamma \Rightarrow \gamma = \frac{(m_A\sin\alpha - m_B\sin\beta)\,g - f_{cA} - f_{cB}}{m_A + m_B}$$

Rappelons que $f_{cA} = \mu_c N_A = \mu_c m_A g\cos\alpha$ et $f_{cB} = \mu_c N_B = \mu_c m_B g\cos\beta$. En remplaçant, γ se réduit à

$$\gamma = \left[\frac{m_A(\sin\alpha - \mu_c\cos\alpha) - m_B(\sin\beta + \mu_c\cos\beta)}{m_A + m_B}\right] g$$

$$\Rightarrow \gamma = \left[\frac{10\,(\sin 35 - 0{,}35 \times \cos 35) - 5\,(\sin 45 + 0{,}35 \times \cos 45)}{10 + 5}\right] 9{,}81 = -1{,}25\,\mathrm{m/s^2}$$

La valeur de l'accélération trouvée est négative, cela signifie que notre hypothèse concernant le sens du mouvement était incorrecte, d'où le sens réel du déplacement des deux blocs est tel que A monte le plan et B descend le plan.

4. Tension de la corde

A partir des équations (1) ou (3) on tire la tension

$$(1) \Rightarrow T_A = m_A g\sin\alpha - f_{cA} - m_A\gamma \qquad \text{ou} \qquad (3) \Rightarrow T_B = m_B g\sin\beta + f_{cB} + m_B\gamma$$

En remplaçant γ par son expression, on trouve

$$T_A = T_B = m_A m_B\left[\frac{(\sin\alpha + \sin\beta) + \mu_c(\cos\beta - \cos\alpha)}{m_A + m_B}\right] g \Rightarrow T_A = T_B = 40{,}60\,\mathrm{N}$$