

# Maths 04

Université A.MIRA — Béjaïa  
Faculté de Technologie  
Département de Technologie-2<sup>ème</sup> Année

® 2012-2013

## ♣ — Examen de Remplacement en Probabilités et Statistiques — ♣

**Exercice 1** (08.00 points) : Une enquête a été réalisée sur le nombre de salariés de 40 entreprises industrielles. Les résultats obtenus sont représentés dans le tableau suivant :

Nombres de salariés	$n_i$	$f_i$	$F_i \nearrow$
[20, 40[	.	0.2	.
[40, 50[	.	0.2	.
[50, 60[	.	.	0.7
[60, 80[	.	.	0.9
[80, 100[	..	.	1
Total	..	1	/

1. Compléter le tableau statistique ci-dessus.
2. Définir la population étudiée sa taille, l'unité statistique, le caractère et sa nature.
3. Représenter le polygone des fréquences et calculer le mode.
4. Tracer la courbe des fréquences cumulées croissantes et décroissantes.
5. Calculer la moyenne, la médiane, l'écart type et l'intervalle interquartile.
6. Déterminer le nombre d'entreprises ayant un nombre de salariés entre 50 et 70.

**Exercice 2** : Soit la distribution conjointe suivante entre deux variables  $X$  et  $Y$ .

$X/Y$	[0,10[	[10,20[	[20,30[	$f_{i\bullet}$
0				0.3
1				
2				0.2
$f_{\bullet j}$	0.1		0.5	

1. Compléter le tableau ci-dessus en supposant que les deux variables sont indépendantes. Représenter le nuage de points.
2. Déterminer les distributions de  $Y/0 \leq X \leq 2$ ;  $X/Y \in [0, 30[$  et  $X/Y \in [0, 10[$ . Calculer leurs moyennes et leurs variances.
3. Déterminer l'équation de la droite de régression de  $X$  en  $Y$ .
4. Donner le coefficient de corrélation linéaire. Conclure.

**Exercice 3** (08.00 points) : Le tableau suivant donne la demande  $Y$  d'un produit en fonction de son prix de vente  $X$  en Dinars :

Le prix de vente en Dinar $X$	200	250	300	350	450	500
La demande $Y$	550	430	400	310	260	210

1. Représenter le nuage de points  $(X, Y)$  ainsi que le centre de gravité.
2. On pose  $z_i = \frac{y_i - 10}{100}$ . Calculer  $\bar{Z}$ ,  $V(Z)$  et déduire  $\bar{Y}$  et  $V(Y)$ .
3. Déterminer l'équation de la droite de régression de  $X$  en  $Z$ .
4. Considérons la série  $(z_i)_{i=1,6}$  de Médiane  $Me$ .
  - ▷ Partager le nuage de points en deux sous-nuages : l'un contient les points  $(x_i, z_i)$  tel que  $z_i < Me$ , l'autre contient les points  $(x_i, z_i)$  tel que  $z_i > Me$ .
  - ▷ Calculer les points moyens  $G_1$  et  $G_2$  de chacun de ces deux nuages respectivement.
  - ▷ Déterminer l'équation de la droite qui passe par les points  $G_1$  et  $G_2$ . Tracer cette droite sur le graphe.
5. Quelle serait la demande sur le nouveau produit si le prix de vente est de 600 Dinars ?

Bonne chance  
Mr Boualem



# Corrigé de l'examen Maths 14

## 2012 - 2013

Exo 1 : On étudie le Nombre de salariés de 40 entreprises.

1) Compléter le tableau :

$F_i$	Classes	$n_i$	$f_i$	$F_i$	$a_i$	$f_i^c$	$2c_i$	$n_i \cdot a_i$	$n_i \cdot a_i^2$
1	[20, 40[	8	0,2	0,2	20	0,1	30	240	7200
0,8	[40, 50[	8	0,2	0,4	40	0,2	45	360	16200
0,6	[50, 60[	12	0,3	0,7	50	0,3	55	660	36300
0,3	[60, 80[	8	0,2	0,9	20	0,1	70	560	39200
0,1	[80, 100[	4	0,1	1	20	0,05	90	360	32400
0	Total	40	1	/	/	/	/	2180	131300

$$f_i^c = \frac{f_i}{a_i} \times a$$

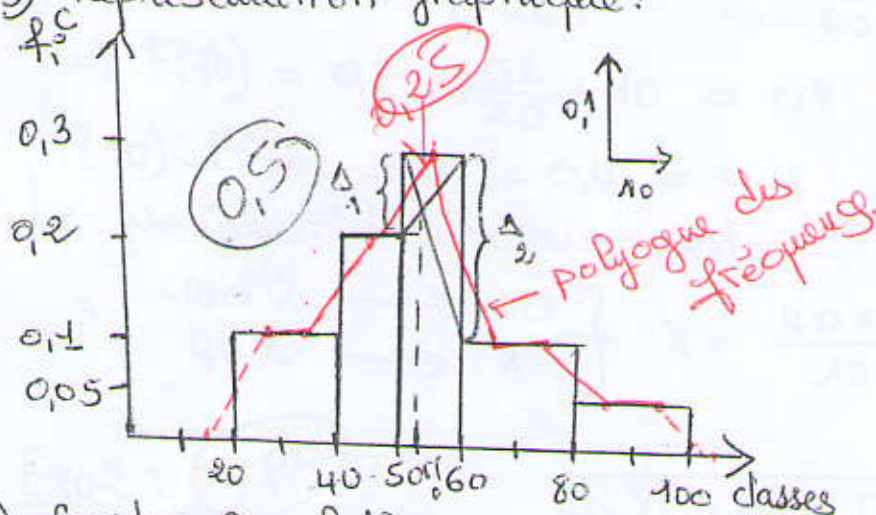
$$a = \text{PGCD}(a_i)$$

$$a = \text{PGCD}(10, 20) = 10$$

2) Population : Les entreprises  
 Taille : 40  
 Unité statistique : Une entreprise

Caractère : Nombre de Salariés  
 Nature : Quantitative Continue.

3) Représentation graphique :



Mode : la classe Modale [50, 60[

$$\Delta_1 = 0,3 - 0,2 = 0,1$$

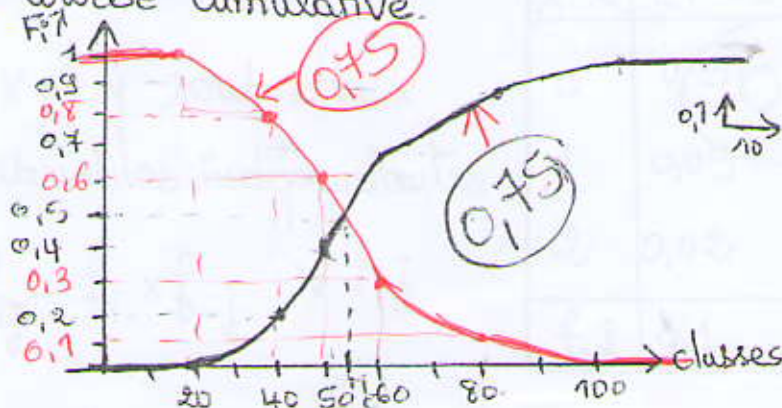
$$\Delta_2 = 0,3 - 0,1 = 0,2$$

$$M_o = e_{i-1} + a_i \frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2}$$

$$= 50 + 10 \frac{0,1}{0,1 + 0,2} = 53,33$$

$$M_o = 53,33$$

4) Courbe Cumulative.



Médiane : la classe médiane est [50, 60[

$$M_e = e_{i-1} + \frac{a_i}{f_i} (0,5 - F(e_{i-1}))$$

$$= 50 + \frac{10}{0,3} (0,5 - 0,4)$$

$$= 53,33$$



Moyenne:  $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^5 n_i \cdot x_i = \frac{1}{40} (2180) = 54,5$

Variance:  $V(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^5 n_i \cdot x_i^2 - \bar{X}^2 = \frac{1}{40} (131300) - (54,5)^2 = 312,25$

Ecart type:  $\sigma_X = \sqrt{V(X)} = \sqrt{312,25} = 17,67$

Intervalle inter-Quantile.

1)  $F(Q_1) = 0,25 \Rightarrow Q_1 \in [40, 50[$   $Q_1 = e_{i-1} + \frac{a_i}{f_i} (0,25 - F(e_{i-1}))$   
 $Q_1 = 40 + \frac{10}{0,2} (0,25 - 0,2) = 42,5$  (0,5)

2)  $F(Q_3) = 0,75 \Rightarrow Q_3 \in [60, 80[$   $Q_3 = e_{i-1} + \frac{a_i}{f_i} (0,75 - F(e_{i-1}))$   
 $Q_3 = 60 + \frac{20}{0,2} (0,75 - 0,7) = 65$  (0,5)

$Q_3 - Q_1 = 65 - 42,5 = 22,5$  (0,25)

6) Nombre d'entreprise ayant un nombre de salariés dans  $[50, 70[$   
 $F(70) - F(50) = ?$

$F(50) = 0,4$

$F(70) = ? \Leftrightarrow \frac{0,9 - 0,7}{80 - 60} = \frac{F(70) - 0,7}{70 - 60} \Rightarrow \frac{0,2}{20} = \frac{F(70) - 0,7}{10}$

$\Rightarrow F(70) = 0,7 + \frac{0,2}{20} \times 10 = 0,8$

$F(70) - F(50) = 0,8 - 0,4 = 0,4$  donc il y'a 40%

Le Nombre d'entreprise est:

$$\left. \begin{array}{l} 100\% \rightarrow 40 \\ 40\% \rightarrow X \end{array} \right\} X = \frac{40 \times 40}{100} = 16 \text{ entreprises}$$

Exo2: (04 pts)

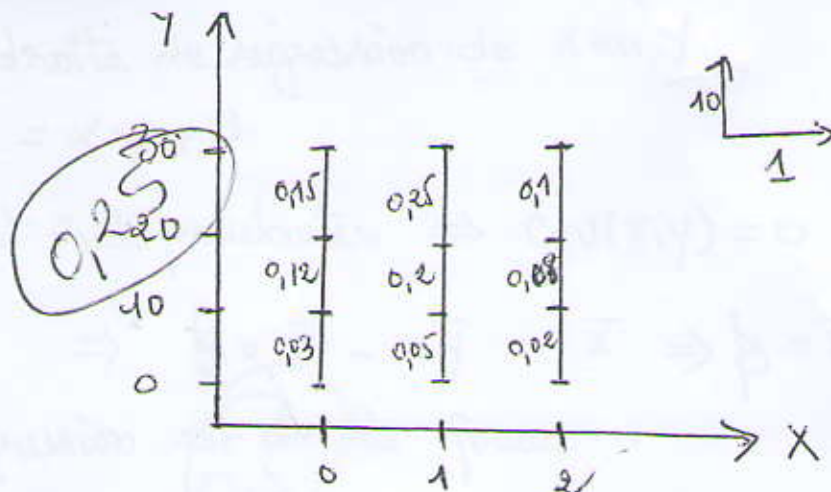
X et Y sont deux variables indépendantes

$f_{ij} = f_{i.} \times f_{.j} \quad \forall i, j$

X \ Y	[0, 10[	[10, 20[	[20, 30[	$f_{i.}$
0	0,03 (0,5)	0,12	0,15	0,3
1	0,05	0,2	0,25	0,5
2	0,02	0,08	0,1	0,2
$f_{.j}$	0,1	0,4	0,5	1



age de points

2) Distribution :  $Y/0 \leq X \leq 2$ 

classe $y$	$y_j$	$p_{0j}$	$f_{0j}$	$f_{0j} \cdot y_j^2$
$[0, 10[$	5	0.1	0.5	2.5
$[10, 20[$	15	0.4	6	90
$[20, 30[$	25	0.5	12.5	312.5
Total		1	19	405

Distribution Marginale selon  $Y$ .

Moyenne :

$$\bar{Y} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^3 n_{0j} y_j = \sum_{j=1}^3 p_{0j} y_j = 19$$

Variance :

$$V(Y) = \sum_{j=1}^3 p_{0j} y_j^2 - \bar{Y}^2 = 405 - (19)^2 = 44$$

Distribution  $X/Y \in [0, 30[$  :

$X$	$f_{i0}$	$f_{i0} x_i$	$f_{i0} x_i^2$
0	0.3	0	0
1	0.5	0.5	0.5
2	0.2	0.4	0.8
Total	1	0.9	1.3

Moyenne :

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^3 f_{i0} x_i = \sum_{i=1}^3 f_{i0} x_i = 0.9$$

Variance :

$$V(X) = \sum_{i=1}^3 f_{i0} x_i^2 - \bar{X}^2 = 1.3 - (0.9)^2 = 0.49$$

Distribution Marginale selon  $X$ .Distribution  $X/Y \in [0, 10[ \equiv X_1$ 

$X$	$f_{i1}$	$f_{i1}/f_{01}$	$f_{i1}/f_{01} x_i$	$f_{i1}/f_{01} x_i^2$
0	0.03	0.3	0	0
1	0.05	0.5	0.5	0.5
2	0.02	0.2	0.4	0.8
Total	0.1	1	0.9	1.3

Moyenne :

$$\bar{X}_1 = \sum_{i=1}^3 \frac{f_{i1}}{f_{01}} x_i = 0.9$$

Variance :

$$V(X_1) = \sum_{i=1}^3 \frac{f_{i1}}{f_{01}} x_i^2 - \bar{X}_1^2 = 1.3 - (0.9)^2 = 0.49$$



équation de la droite de régression: de  $X$  en  $Y$

$$X = \alpha Y + \beta$$

Puisque  $X$  et  $Y$  sont indépendantes  $\Rightarrow \text{Cov}(X, Y) = 0$

$$\alpha = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{V(Y)} = 0 \Rightarrow \beta = \bar{X} - \alpha \bar{Y} = \bar{X} \Rightarrow \beta = \bar{X} = 0,9$$

la droite de régression est de la forme.

$$\boxed{X = 0,9}$$

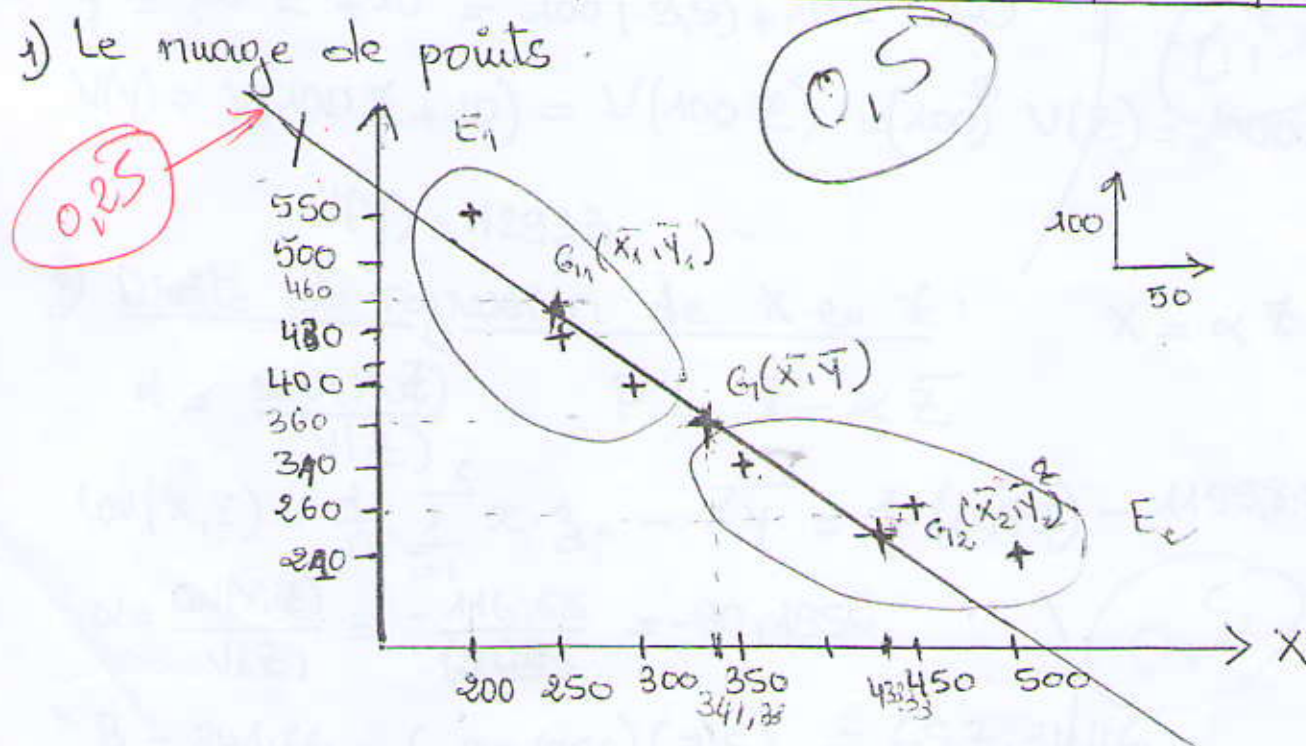
4) Coefficient de corrélation:

$$\text{Cov}(X, Y) = 0 \Rightarrow r = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{G_X G_Y} = 0 \Rightarrow \text{il y a absence de corrélation linéaire entre } X \text{ et } Y.$$

Exo 3:  $X$  représente  
 $Y$  représente

$X_i$	200	250	300	350	450	500
$Y_i$	550	430	400	310	260	210

1) Le nuage de points.





Centre de gravité  $G(\bar{x}, \bar{y}) = (341,66, 360)$ .

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^6 x_i = \frac{1}{6} (2050) = 341,66$$

$$\bar{Y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^6 y_i = \frac{1}{6} (2160) = 360$$

2) On pose  $z_i = \frac{y_i - 10}{100}$

$x_i$	200	250	300	350	450	500
$y_i$	550	430	400	310	260	210
$z_i$	5,4	4,2	3,9	3	2,5	2

$$\bar{Z} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^6 z_i = \frac{1}{6} (21) = 3,5$$

$$V(Z) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^6 z_i^2 - \bar{Z}^2 = \frac{1}{6} (81,46) - (3,5)^2 = 1,2933$$

Déduire  $\bar{Y}$  et  $V(Y)$ :

$$z_i = \frac{y_i - 10}{100} \Rightarrow y_i = 100 z_i + 10 \Leftrightarrow Y = 100 Z + 10$$

$$\bar{Y} = 100 \bar{Z} + 10 = 100 (3,5) + 10 = 360$$

$$V(Y) = V(100 Z + 10) = V(100 Z) = (100)^2 V(Z) = 10000 (1,2933)$$

$$V(Y) = 12933$$

3) Droite de régression de X en Z:

$$X = \alpha Z + \beta$$

$$\alpha = \frac{\text{cov}(X, Z)}{V(Z)}$$

$$\beta = \bar{X} - \alpha \bar{Z}$$

$$\text{cov}(X, Z) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^6 x_i z_i - \bar{X} \bar{Z} = \frac{1}{6} (6475) - 1195,81 = -116,65$$

$$\alpha = \frac{\text{cov}(X, Z)}{V(Z)} = \frac{-116,65}{12933} = -90,1956$$

$$\beta = 341,66 - (-90,1956)(3,5) = 657,3446$$



la forme de la droite de régression est

$$\hat{X} = -90,1956 Z + 657,3446.$$

0,25

4) On considère la série  $(z_i)_{i=1,6}$  de Médiane  $M_e$ .

i) La Médiane  $M_e$ :  $n=6=2 \times 3 \Rightarrow p=3$

$$M_e = \frac{x_p + x_{p+1}}{2} = \frac{x_3 + x_4}{2} = \frac{3,9 + 3}{2} = 3,45.$$

0,5

ii) On partage le nuage de points en deux sous groupes

$$E_1 = \{(200, 5.4), (250, 4.2), (300, 3.9)\}$$

$$E_2 = \{(350, 3), (450, 2.5), (500, 2)\}$$

0,5

iii) Les Deux points moyens  $G_1$  et  $G_2$ :

$$G_1 = \left\{ \begin{array}{l} \bar{X}_1 = \frac{1}{3}(200 + 250 + 300) = 250 \\ \bar{Z}_1 = \frac{1}{3}(5.4 + 4.2 + 3.9) = 4.5 \end{array} \right\}$$

0,5  
 $G_1(\bar{X}_1, \bar{Z}_1) = (250, 4.5)$

$$G_2 = \left\{ \begin{array}{l} \bar{X}_2 = \frac{1}{3}(350 + 450 + 500) = 433,33 \\ \bar{Z}_2 = \frac{1}{3}(3 + 2.5 + 2) = 2.5 \end{array} \right\}$$

0,5  
 $G_2(\bar{X}_2, \bar{Z}_2) = (433,33, 2.5)$

iv) La Droite qui passe par  $G_1$  et  $G_2$ : (Droite de Mayer)

$$(\Delta): \hat{Z} = aX + b.$$

$$G_1 \in (\Delta) \Rightarrow \bar{Z}_1 = a\bar{X}_1 + b \quad \text{--- (1)}$$

$$G_2 \in (\Delta) \Rightarrow \bar{Z}_2 = a\bar{X}_2 + b \quad \text{--- (2)}$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} \Rightarrow \bar{Z}_1 - \bar{Z}_2 = a(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) \Rightarrow a = \frac{\bar{Z}_1 - \bar{Z}_2}{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \frac{4,5 - 2,5}{250 - 433,33}$$

$$a = -0,0109$$

0,5

On remplace  $a$  dans (1).

$$b = \bar{Z}_1 - a\bar{X}_1 = 4.5 - (-0,0109)(250) = 7,225.$$



la droite est de la forme

$$Z = -0,0109 X + 7,225.$$

0,25

2)  $X = 600$ ,  $Y = ?$

$$Z = -0,0109 X + 7,225 = -0,0109(600) + 7,225 = 0,685$$

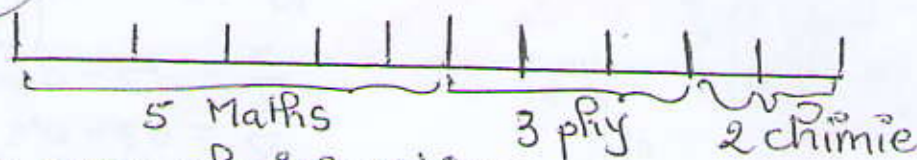
$$Z_i = \frac{y_i - 10}{100} \Rightarrow y_i = 100 Z_i + 10 = 100(0,685) + 10 = 78,5$$

$$Y = 78,5$$

~~0,15~~

Exo 4:

02 pts



On a 10 livres  $\rightarrow$  on choisit 5 livres.

1) 5 livres q/g: c'est une disposition non ordonnée sans répétition de 5 livres parmi 10. Il s'agit d'une combinaison sans répétition de 5 parmi 10.

$$C_{10}^5 = \frac{10!}{5!(10-5)!} = 252 \text{ possibilités.}$$

0,5

2) 2 livres de Maths:

On choisit 2 livres de maths parmi les 5 livres de Maths de  $C_5^2$  manières et on choisit les 3 autres parmi les 5 autres livres (phy et chimie) de  $C_5^3$  manières.

$$C_5^2 \times C_5^3 = \frac{5!}{(5-2)!2!} \times \frac{5!}{(5-3)!3!} = 100 \text{ possibilités.}$$

0,15

3) 1 physique et 1 de chimie:

On choisit 1 de physique parmi 3  $\rightarrow C_3^1$   
 " " 1 " chimie " 2  $\rightarrow C_2^1$   
 " " 3 autres " 5  $\rightarrow C_5^3$

0,75  
On aura

$$C_3^1 \times C_2^1 \times C_5^3 = \frac{3!}{(3-1)!1!} \times \frac{2!}{(2-1)!1!} \times \frac{5!}{(5-3)!3!} = 60 \text{ possibilités.}$$

15