OSCILLATIONS LIBRES DES SYSTEMES A UN DEGRE DE LIBERTE

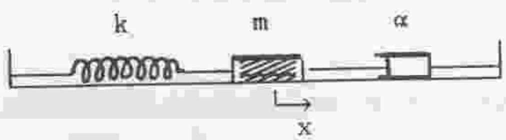
<u>THEMES</u>:
- Différents régimes d'oscillation
- Résistance critique
- Décrément logarithmique
- Facteur de qualité

I. <u>Etude d'un système mécanique à un degré de liberté</u>:

1. <u>Les différents régimes d'oscillations</u>:

La figure 1 représente le système mécanique à un degré de liberté le plus simple:

<u>Figure 1</u>



Le déplacement de la masse m par rapport à sa position d'équilibre, appelé élongation, est noté x. k est la raideur du ressort et α, le coefficient de l'amortissement supposé visqueux. On donne à la masse une élongation initiale donnée X_o (et/ou une vitesse initiale V_o) puis on abandonne le système à lui-même.

Le mouvement de m obéit à l'équation différentielle suivante:

$$m\ddot{x} + \alpha\,\dot{x} + k\,x = 0$$

qui peut être mise sous la forme normalisée

$$\ddot{x} + 2\delta\,\dot{x} + \omega_o^2\,x = 0 \qquad (1)$$

en posant

$\delta = \alpha/2m$ facteur d'amortissement

$\omega_o^2 = k/m$ pulsation propre du système

GENIE DES PROCEDES fan page

Plus généralement, l'évolution dans le temps de tout système libre à un degré de liberté peut être ramenée à une équation du même type que (1). La résolution de cette équation s'effectue en cherchant des solutions de la forme $A\,e^{rt}\,P_n(t)$ où r est un complexe et $P_n(t)$ un polynôme de degré n. On montre que, sauf dans le cas où $r = -\delta$ (racines doubles), le polynôme $P_n(t)$ se réduit à une constante. En remplaçant x par $A\,e^{rt}$ dans l'équation (1), on obtient l'équation caractéristique

$$r^2 + 2\,\delta\,r + \omega_o^2 = 0$$

dont la résolution permet de déduire

$$r_{1,2} = -\,\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_o^2}$$

La solution sera donc une combinaison des deux racines

$$x(t) = A\,e^{r_1 t} + B\,e^{r_2 t}$$

Trois cas sont envisageables selon le signe du discriminant $\Delta' = \delta^2 - \omega_o^2$.

<u>1er cas</u> : $\Delta' > 0 \iff \delta > \omega_o$

Les racines r_1 et r_2 sont alors réelles et négatives. La solution est une combinaison de deux exponentielles décroissantes. L'élongation diminue au cours du temps pour s'annuler au bout d'un temps suffisamment long. C'est le régime dit " apériodique ". Il correspond à un coefficient de frottement élevé.

<u>2ème cas</u> : $\Delta' = 0 \iff \delta = \omega_o$

On obtient deux racines égales $r_1 = r_2 = -\,\delta$. Dans ce cas, la solution s'écrit prend la forme suivante :

$$x(t) = (at + b)\,e^{-\delta t}$$

Elle correspond au régime dit "critique" dans lequel le système retourne à sa position d'équilibre le plus rapidement possible sans la dépasser, c'est à dire sans oscillation. L'amortissement critique est donné par

$$\alpha_c = 2\sqrt{mk}$$

<u>$3^{ème}$ cas</u> : $\Delta' < 0 \iff \delta < \omega_o$

Les racines r_1 et r_2 sont dans ce cas complexes :

$$r_{1,2} = -\delta \pm j\sqrt{\omega_o^2 - \delta^2} \qquad \text{avec } j^2 = -1$$

et la solution devient

$$x(t) = e^{-\delta t}\left(A\, e^{j\sqrt{\omega_o^2 - \delta^2}\, t} + B\, e^{-j\sqrt{\omega_o^2 - \delta^2}\, t}\right)$$

Le terme entre parenthèses étant une combinaison de deux sinusoïdes de même fréquence, il peut lui même s'écrire sous la forme d'une sinusoïde :

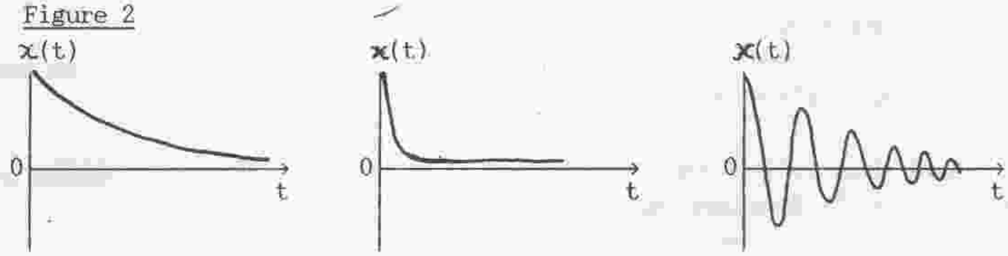
$$x(t) = C\, e^{-\delta t} \cos(\omega_a t + \phi)$$

avec $\omega_a = \sqrt{\omega_o^2 - \delta^2}$ = pseudo- pulsation

C'est l'expression d'une sinusoïde dont l'amplitude décroît exponentiellement avec le temps. C'est le régime oscillatoire ou "pseudo-périodique". Il correspond à un amortissement faible.

Les trois régimes possibles sont résumés sur la figure 2.

<u>Figure 2</u>



$\delta > \omega_o$ apériodique — $\delta = \omega_o$ critique — $\delta < \omega_o$ pseudo-périodique

GENIE DES PROCEDES fan page

2. Le régime pseudo-périodique

Si on suppose que le système est libéré sans vitesse à partir d'une élongation initiale X_o, montrer que la solution s'écrit

$$x(t) = X_o \frac{\omega_o}{\omega_a} e^{-\delta t} \cos (\omega_a t + \phi)$$

avec

$$\cos \phi = \frac{\omega_a}{\omega_o}$$

Si l'amortissement est faible, $\delta \ll \omega_o$ et donc $\omega_a \simeq \omega_o$. On a :

$$x(t) \simeq X_o e^{-\delta t} \cos \omega_o t$$

Le rapport

$$D = \frac{1}{n} \text{Log} \frac{x(t)}{x(t+nT)} \quad \text{où } T = 2\pi/\omega_a \text{ est la période}$$

est appelé " décrément logarithmique " et peut s'écrire également

$$D = \delta T$$

Il caractérise le degré d'amortissement. Plus D est petit devant 2π et plus l'amortissement est faible. Une autre grandeur permet de définir le degré d'amortissement. C'est le facteur de qualité du système.

Cette grandeur, appelée Q, d'un usage plus général que le décrément Δ, est définie par

$$Q = 2\pi / (1 - e^{-2\delta T})$$

expression qui devient, dans le cas d'un amortissement faible,

$$Q = \omega_a / 2\delta = \pi/D$$

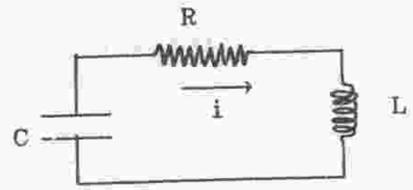
Un grand facteur de qualité signifie que le système est peu amorti.

GENIE DES PROCEDES
fan page

II. Etude d'un circuit électrique oscillant

Considérons à présent le circuit électrique de la figure 3.

Figure 3



Le condensateur étant au préalable chargé, on ferme le circuit. L'évolution de l'intensité du courant électrique est décrite par la loi d'Ohm

$$L \frac{di}{dt} + R\, i + \frac{1}{C} \int i \, dt = 0$$

En introduisant la charge électrique q(t) du condensateur, on a

$$L \ddot{q} + R \dot{q} + q/C = 0$$

et, en posant $\delta = R/2L$ et $\omega_o^2 = 1/LC$

$$\ddot{q} + 2 \delta \dot{q} + \omega_o^2 q = 0$$

Cette équation est analogue à l'équation (1). Sa solution peut être, selon la valeur donnée à R (si L est constant), apériodique, critique ou oscillatoire. Les résultats obtenus précédemment pour le système mécanique sont également valables ici.

L'observation de la charge q(t) du condensateur ou, ce qui revient au même, de la tension à ses bornes v(t) = q(t)/C, nous renseignera donc sur toutes les propriétés des systèmes à un degré de liberté. Cela est d'autant plus intéressant que les circuits électriques sont beaucoup plus simples à réaliser que les systèmes mécaniques.

III. Réalisation pratique

Le dispositif étudié est un circuit RLC série constitué d'une résistance variable(boîtes AOIP x1000, x100, x10), d'une bobine (500 tours) d'induction inconnue et d'un condensateur de 47 nF.

GENIE DES PROCEDES fan page

Le circuit est alimenté par un signal carré e(t) de fréquence faible devant sa fréquence propre, délivré par un générateur de fonctions (GBF). Cela permet d'observer le régime libre du système. En effet, soit e_o l'amplitude du signal carré. Pendant une demi-période, la charge q aux bornes du condensateur obéit à l'équation

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + q/C = \pm e_o$$

En posant

$$Q = q \pm C\,e_o$$

on a

$$L\ddot{Q} + R\dot{Q} + Q/C = 0$$

soit

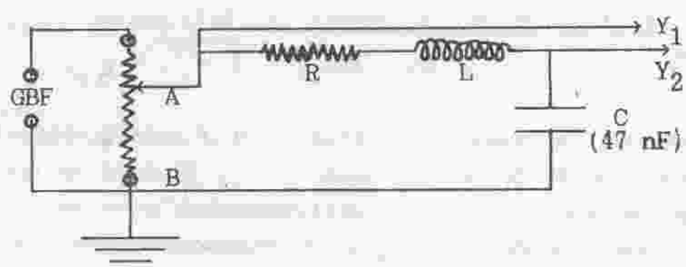
$$\ddot{Q} + 2\,\delta\,\dot{Q} + \omega_o^2\,Q = 0$$

qui représente bien le mouvement libre du système. La solution Q(t) tendant asymptotiquement vers 0, la charge q(t) tendra vers la valeur $\pm C\,e_o$.

Remarque: Certains types de GBF délivrent un signal carré non alternatif, c'est à dire que e(t) est égal à e_o pendant une demi-période et nul pendant la seconde demi-période. Les équations ci-dessus doivent donc être modifiées en conséquence.

1. Dispositif expérimental (figure 4)

Figure 4



Le générateur de fonctions (GBF) possédant une résistance interne non négligeable (généralement de 50 Ω), on utilise un pont diviseur permettant d'obtenir entre les points A et B, un générateur de faible résistance interne. En utilisant la valeur des différentes résistances (données en salle de TP), calculer cette résistance

GENIE DES PROCEDES fan page

interne.
Le signal V_{AB} délivré entre A et B est observé sur la voie Y_1 de l'oscilloscope. Régler son amplitude à une valeur inférieure à 0.5 Volt

2. Observation des différents régimes

La tension $V_C(t)$ aux bornes de C est envoyée sur la voie Y_2 de l'oscilloscope. Observer l'évolution de la forme de $V_C(t)$ quand on fait varier la résistance d'une grande à une petite valeur. Comparer la valeur asymptotique de $V_C(t)$ à la valeur prévue.

Mesurer la résistance critique R_c, valeur de R pour laquelle on obtient le régime critique. Une valeur précise est généralement impossible. On proposera donc la fourchette la plus étroite possible pour R_c. En déduire la valeur de l'inductance L de la bobine.

3. Le régime oscillatoire amorti

La résistance R étant fixée à zéro, l'amortissement est assuré par les autres résistances présentes dans le circuit (générateur, bobine, connexions, contacts). Mesurer le décrément logarithmique D ainsi que la période T des oscillations avec le maximum de précision.

En déduire le facteur d'amortissement δ, le facteur de qualité Q, la valeur de l'inductance L et celle de la somme des résistances présentes dans le circuit avec les incertitudes correspondantes. Comparer L à la valeur obtenue à partir de la mesure de R_c.

4. Application à la mesure de résistances et de capacités inconnues

Remplacer la résistance variable AOIP par la résistance R_x et le condensateur de 47 nF par la capacité C_x. Etudier de nouveau le régime pseudo-périodique obtenu. En utilisant les résultats précédents, en déduire les valeur de R_x et C_x avec les incertitudes correspondantes.

GENIE DES PROCEDES fan page

12,5

TP N°1

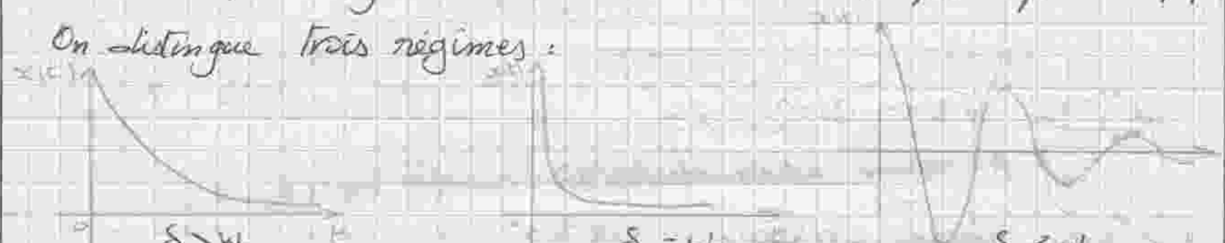
Oscillations Libres Des Systemes A un Degré De Liberté

I Etude d'un systeme mécanique à un degré de liberté.

Le mouvement de m obeit à l'équation différentielle suivante : $\ddot{x}+2\delta\dot{x}+\omega_0^2x=0$

avec : $\delta=\alpha/2m$ facteur d'amortissement et $\omega_0^2=K/m$ la pulsation propre

On distingue trois régimes :



$\delta>\omega_0$ apériodique | $\delta=\omega_0$ critique | $\delta<\omega_0$ pseudo-périodique

Le régime pseudo-périodique :

l'équation caractéristique : $r^2+2\delta r+\omega_0^2=0 \Rightarrow \Delta=\delta^2-\omega_0^2$

dans le cas où $\Delta<0$ on a un régime pseudo-periodique

$r_{1,2}=-\delta\pm j\sqrt{\omega_0^2-\delta^2}$. La solution devient

$$x(t)=e^{-\delta t}(C_1\cos\beta t+C_2\sin\beta t)=Ce^{-\delta t}\cos(\beta t+\varphi)$$

avec : $C_1=C\sin\varphi$ et $C_2=C\cos\varphi$.

$$x(t)=Ce^{-\delta t}\cos(\omega_a t+\varphi)$$ / $\omega_a^2=\omega_0^2-\delta^2$ pseudo-pulsation.

Si $\begin{cases} x(0)=x_0 \\ \dot{x}(0)=0 \end{cases}$ $\quad x(0)=C\cos\varphi=x_0$

$$\dot{x}(t)=Ce^{-\delta t}\left[-\delta\cos(\omega_a t+\varphi)-\omega_a\sin(\omega_a t+\varphi)\right]$$

$\dot{x}(0)=0 \Rightarrow C\left[-\delta\cos\varphi-\omega_a\sin\varphi\right]=0$

$\Rightarrow \omega_a\sin\varphi=-\delta\cos\varphi \Rightarrow tg\varphi=-\frac{\delta}{\omega_a}$

$\begin{cases} \omega_a^2=\omega_0^2-\delta^2 \\ \omega_a^2=\omega_0^2-\omega_a^2tg^2\varphi \end{cases}$ car $\delta=-\omega_a tg\varphi$

GENIE DES PROCEDES fan page

$\omega_0^2 = \omega_a^2 + \omega_a^2 tg^2\varphi = \omega_a^2(1+tg^2\varphi) = \frac{\omega_a^2}{\cos^2\varphi} \Rightarrow \cos\varphi = \frac{\omega_a}{\omega_0}$

donc : $C\frac{\omega_a}{\omega_0} = x_0 \Rightarrow C = x_0\frac{\omega_0}{\omega_a}$

d'où : $\boxed{x(t) = x_0 \frac{\omega_0}{\omega_a} e^{-\delta t} \cos(\omega_a t + \varphi)}$

Dispositif expérimental

On a choisi :

- un signal carré
- Une fréquence de 100 Hz pour que la période soit grande et le signal visible.

1er cas : Régime apériodique.

C'était la charge et la décharge.

2e cas : Régime Critique. $\omega_a^2 = 0$

On diminue la valeur de la résistance jusqu'à $R = 900\ \Omega$.

On voit un signal carré

$\omega_a^2 = \omega_0^2 - \delta^2 = 0 \Rightarrow \omega_0^2 = \delta^2$ avec : $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ et $\delta^2 = \left(\frac{R_c}{2L}\right)^2 = \frac{R_c^2}{4L^2}$

donc : $R_c^2 \times C = 4L \Rightarrow L = \frac{R_c^2 \times C}{4}$

A.N : $L = \frac{900^2 \times 47\times10^{-9}}{4} \Rightarrow$ $L = 9,51 \times 10^{-3}$ Henry

3e cas : Régime Oscillatoire

On met la boite ADIP en zéro, on voit un signal oscillatoire

$\Delta = \frac{1}{n}\log\frac{y(t_0)}{y(t_0+nT_a)} = \delta T_a$ on a : $T_a = 2,8 \times 50 \times 10^{-6} = 14\times10^{-5}$ s

$y(t_0) = 3,8$ cm , $y(t_0+3T_a) = 2,2$ cm

$\Delta = \frac{1}{3}\log\frac{0,76}{0,44} = 0,18$, on a : $\Delta = \delta T_a \Rightarrow \delta = \frac{\Delta}{T_a} = \frac{0,18}{14\times10^{-5}}$

$\delta = 12,85\times10^{2}\ s^{-1}$

GENIE DES PROCEDES fan page

$$\omega_0^2 = \frac{40}{T_a^2} + \frac{D^2}{T_a^2} = \frac{40 + 0{,}18}{(14\times10^{-5})^2} = 2{,}05\times10^9$$

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} \Rightarrow L = \frac{1}{\omega_0^2 C} = \frac{1}{2{,}05\times 47\times10^{-9}} = 10{,}37\ 10^{-3}\ \text{Henry}$$

$$\delta = \frac{R}{2L} \Rightarrow R = 2L\delta$$

$$= 2\times 10{,}37\cdot10^{-3}\times 12{,}85\times10^{2} = 27{,}57\ \Omega$$

3)

Cx_2 et Rx_1

$$T_a = 3{,}5\times 50\times10^{-6} = 17{,}5\ 10^{-5}\ s$$

$$D = \frac{1}{n}\,\text{Log}\,\frac{y(t_0)}{y(t_0+nT_a)} = ?\quad y(t_0) = 3{,}5\ cm\ ,\ y(t_0+3T_a) = 1{,}6\ cm$$

donc, $D = \frac{1}{3}\,\text{Log}\,\frac{3{,}5}{1{,}6} = 0{,}26$

$$\omega_0^2 = \frac{40+D}{T_a^2} = \frac{40+0{,}26}{(17{,}5\ 10^{-5})^2} = 1{,}31\ 10^{9}$$

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC_x} \Rightarrow C_x = \frac{1}{L\omega_0^2} = \frac{1}{10{,}37\ 10^{-3}\cdot 1{,}31\ 10^{9}} = 73{,}6\ 10^{-9}\ F$$

$$= 73{,}6\ nF$$

$$\delta = \frac{D}{T_a} = \frac{0{,}26}{17{,}5\ 10^{-5}} = 1485\ s^{-1}$$

$$R' = R_x + R_{circuit}$$

$$\delta = \frac{R'}{2L} \Rightarrow R' = 2L\delta = 2\times10{,}37\times10^{-3}\times1485 = 31{,}86\ \Omega$$

$$R_x = R' - R_{circuit} = 31{,}86 - 27{,}57 = 4{,}29\ \Omega$$