[تمارين في محور الدوال الأصلية]

تطبيق 01:

عين في كل حالة دالة أصلية للدالة f على I

$f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ و $I=]0;+\infty[$

$g(x)=e^{x}(e^{x}+4)$ و $I=\mathbb{R}$

$h(x)=\dfrac{1}{x\ln x^{2}}$ و $I=]0;+\infty[$

$k(x)=\dfrac{-e^{x}-2}{(e^{x}+2x)^{2}}$ و $I=[0;+\infty[$

$p(x)=\dfrac{1}{x^{2}}e^{\frac{1}{x}}$ و $I=]0;+\infty[$

$q(x)=\dfrac{x-1+\ln(x+1)}{x+1}$ و $I=]-1;+\infty[$

تطبيق 02:

لتكن G و g دالتين معرفتين على $]0;+\infty[$ بـ:

$$g(x)=\frac{2x-3+2x\ln x}{x} \quad \text{و} \quad G(x)=(ax+b)\ln x$$

1. عيّن العددين الحقيقيين a و b حتى تكون G دالة أصلية للدالة g على $]0;+\infty[$
2. استنتج دالة أصلية للدالة g تنعدم من أجل e

تطبيق 03:

لتكن f دالة معرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\left(1-\frac{1}{x}\right)(\ln x-2)$

1. بيّن أن $x\mapsto x\ln x-x$ دالة أصلية للدالة $x\mapsto \ln x$ على $]0;+\infty[$
2. استنتج عبارة F الدالة الأصلية للدالة f على $]0;+\infty[$ والتي تحقق $F(1)=-3$

تطبيق 04:

لتكن f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=xe^{2x+2}-x+1$

1. تحقق أنه من أجل كل $x\in\mathbb{R}$ لدينا:

$$2f(x)+f'(x)-f''(x)=1-2x-3e^{2x+2}$$

2. استنتج دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$

تطبيق 05:

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{-2;2\}$ بـ:

$$f(x)=\frac{1}{x^{2}-4}$$

1. جد عددين حقيقين a و b حيث من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}-\{-2;2\}$ لدينا:

$$f(x)=\frac{a}{x-2}+\frac{b}{x+2}$$

2. استنتج دالة أصلية F للدالة f والتي تحقق $F(0)=1$

[حلول مقترحة]

حل التطبيق 01:

تعيين في كل حالة دالة أصلية للدالة f على I

لدينا: $$f(x)=\frac{\ln x}{x}=\frac{1}{x}\ln x$$

ومنه: $$\boxed{F(x)=\frac{(\ln x)^2}{2}+c}$$

لدينا: $$g(x)=e^x(e^x+4)$$

ومنه: $$\boxed{G(x)=\frac{(e^x+4)^2}{2}+c}$$

لدينا: $$h(x)=\frac{1}{x\ln x^2}=\frac{\frac{1}{x}}{\ln x^2}=\frac{\frac{1}{x}}{2\ln x}=\frac{1}{2}\frac{\frac{1}{x}}{\ln x}$$

ومنه: $$\boxed{H(x)=\frac{1}{2}\ln|\ln x|+c}$$

لدينا: $$k(x)=\frac{-e^x-2}{(e^x+2x)^2}-\frac{e^x+2}{(e^x+2x)^2}$$

ومنه: $$\boxed{K(x)=-\frac{1}{e^x+2x}+c}$$

لدينا: $$p(x)=\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}=-\left(-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}\right)$$

ومنه: $$\boxed{P(x)=-e^{\frac{1}{x}}+c}$$

لدينا:
$$\begin{aligned}q(x)&=\frac{x-1+\ln(x+1)}{x+1}\\&=\frac{x-1}{x+1}+\frac{\ln(x+1)}{x+1}\\&=\frac{x+1-2}{x+1}+\frac{\ln(x+1)}{x+1}\\&=\frac{x+1}{x+1}+\frac{-2}{x+1}+\frac{\ln(x+1)}{x+1}\\&=1-2\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+1}\ln(x+1)\end{aligned}$$

ومنه: $$\boxed{Q(x)=x-2\ln(x+1)+\frac{(\ln(x+1))^2}{2}+c}$$

حل التطبيق 02:

1 تعيين العددين الحقيقين a و b حتى تكون G دالة أصلية للدالة g على $]0;+\infty[$:

$$G'(x)=a\ln x+\frac{1}{x}(ax+b)=\frac{ax\ln x+ax+b}{x}$$

بالمطابقة نجد: $a=2$ و $b=-3$

2 استنتاج دالة أصلية للدالة g تنعدم من أجل e:

لدينا:

$$G(x)=(2x-3)\ln x+c$$

ومنه:

$$\begin{aligned} G(e)=0 &\Longrightarrow (2e-3)\ln e + c = 0\\ &\Longrightarrow 2e-3+c=0\\ &\Longrightarrow c = 3-2e \end{aligned}$$

وعليه:

$$\boxed{G(x) = (2x-3)\ln x + 3 - 2e}$$

حل التطبيق 03:

1. تبيين أن $x \longmapsto x\ln x - x$ دالة أصلية للدالة $x \longmapsto \ln x$ على $]0;+\infty[$:

$$\begin{aligned} (x\ln x - x)' &= \ln x + \frac{1}{x}x - 1\\ &= \ln x + 1 - 1\\ &= \ln x \end{aligned}$$

2. استنتاج عبارة F الدالة الأصلية للدالة f على $]0;+\infty[$ والتي تحقق $F(1) = -3$:

لدينا:

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(1-\frac{1}{x}\right)(\ln x - 2)\\ &= \ln x - 2 - \frac{1}{x}\ln x + 2\frac{1}{x} \end{aligned}$$

وعليه:

$$\begin{aligned} F(x) &= x\ln x - x - 2x - \frac{(\ln x)^2}{2} + 2\ln x + c\\ &= x\ln x - 3x - \frac{(\ln x)^2}{2} + 2\ln x + c \end{aligned}$$

لدينا:

$$\begin{aligned} F(1) = -3 &\Longrightarrow -3 + c = -3\\ &\Longrightarrow c = 0 \end{aligned}$$

وعليه:

$$\boxed{F(x) = x\ln x - 3x - \frac{(\ln x)^2}{2} + 2\ln x}$$

حل التطبيق 04:

1. التحقق أنه من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ لدينا: $2f(x) + f'(x) - f''(x) = 1 - 2x - 3e^{2x+2}$:

لدينا:

$$f'(x) = e^{2x+2} + 2xe^{2x+2} - 1$$

وّ

$$f''(x) = e^{2x+2} + 2e^{2x+2} + 4xe^{2x+2}$$

ومنه:

$$\begin{aligned} 2f(x) + f'(x) - f''(x) &= 2xe^{2x+2} - 2x + 2 + e^{2x+2} + 2xe^{2x+2} - 1 - e^{2x+2} - 2e^{2x+2} - 4xe^{2x+2}\\ &= 1 - 2x - 3e^{2x+2} \end{aligned}$$

2. استنتاج دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$:

لدينا:

$$\begin{aligned} 2f(x) + f'(x) - f''(x) = 1 - 2x - 3e^{2x+2} &\Longrightarrow 2f(x) = 1 - 2x - 3e^{2x+2} - f'(x) + f''(x)\\ &\Longrightarrow f(x) = \frac{1}{2} - x - \frac{3}{2}e^{2x+2} - \frac{f'(x)}{2} + \frac{f''(x)}{2} \end{aligned}$$

ومنه:

$$F(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}\frac{1}{2}e^{2x+2} - \frac{f(x)}{2} + \frac{f'(x)}{2} + c$$

$$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{4}e^{2x+2} - \frac{xe^{2x+2} - x + 1}{2} + \frac{e^{2x+2} + 2xe^{2x+2} - 1}{2} + c$$
$$= \frac{2x - 2x^2 - 3e^{2x+2} - 2xe^{2x+2} + 2x - 2 + 2e^{2x+2} + 4xe^{2x+2} - 2}{4} + c$$
$$= \boxed{\frac{1}{4}(2xe^{2x+2} - e^{2x+2} - 2x^2 + 4x - 4) + c}$$

حل التطبيق 05:

❶ ايجاد عددين حقيقين a و b حيث من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R} - \{-2; 2\}$ لدينا: $f(x) = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x+2}$:

لدينا:

$$f(x) = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x+2}$$
$$= \frac{ax + 2a + bx - 2b}{(x-2)(x+2)}$$
$$= \frac{(a+b)x + 2a - 2b}{x^2 - 4}$$

بالمطابقة نجد:

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ 2a - 2b = 1 \end{cases}$$

ومنه:

$$\begin{cases} 2a + 2b = 0 \\ 2a - 2b = 1 \end{cases}$$

بجمع المعادلتين نجد:

$$4a = 1 \Longrightarrow \boxed{a = \frac{1}{4}}$$

بالتعويض نجد:

$$\boxed{b = -\frac{1}{4}}$$

ومنه:

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{4(x-2)} - \frac{1}{4(x+2)}}$$

❷ استنتج دالة أصلية F للدالة f والتي تحقق $F(0) = 1$

لدينا:

$$f(x) = \frac{1}{4(x-2)} - \frac{1}{4(x+2)} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2}\right)$$

ومنه:

$$F(x) = \frac{1}{4}(\ln|x-2| - \ln|x+2|) + c$$
$$= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + c$$

لدينا:

$$F(1) = 0 \Longrightarrow \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + c = 0$$
$$\Longrightarrow \frac{1}{4}\ln\left|\frac{-2}{2}\right| + c = 0$$
$$\Longrightarrow c = 0$$

وعليه:

$$\boxed{F(x) = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|}$$