Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Année Universitaire 2020-2021

1ère Année LMD MI

Durée : 01H30.

Epreuve finale : Algèbre 1

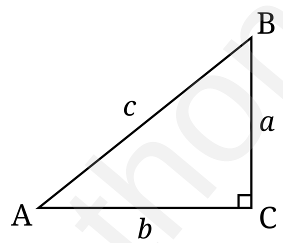
Les calculatrices et téléphones portables sont strictement interdits

Exercice 1 : (10 points)

1. Écrire la proposition suivante avec des quantificateurs puis donnez sa négation :
"Pour tout nombre réel x, il existe au moins un entier naturel N supérieur strictement à x".

2. L'assertion suivante est-elle vraie ou fausse ? Justifiez :
"Si le palmier nous donne des melons alors $5 - 3 = 3$".

3. Montrer par l'absurde que dans un triangle rectangle avec des côtés de longueurs a, b et c, on a : $a + b > c$.



Montrer la relation précédente par un raisonnement directe.

4. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x) = 2x^2 - 4x + 1$.
i. f est-elle injective ? surjective ? Justifiez vos réponses.
ii. Déterminer l'image directe par f de l'intervalle $[0, 2]$.
iii. Déterminer l'image réciproque par f de l'intervalle $[0, 1]$.

Exercice 2 : (06 points)

On considère la relation $\mathcal{R}$ sur $\mathbb{N}^*$ définie par :

$$\forall n, m \in \mathbb{N}^* : n\mathcal{R}m \iff \exists k \in \mathbb{N} : n = m^k.$$

1. Vérifier que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre. Est-ce que l'ordre est total ?
2. Déterminer l'ensemble des majorants, l'ensemble des minorants, la borne supérieure et la borne inférieure de la partie $A = \{2, 4, 8\}$.
La partie A possède-t-elle un plus grand élément ? un plus petit élément ?

Exercice 3 : (04 points)

Soit E un ensemble, $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$. Montrer que :
1. $(A \setminus C) \setminus (B \setminus C) = A \setminus (B \cup C)$.
2. $(A \setminus B) \cup (A \setminus C) = A \setminus (B \cap C)$.

Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Année Universitaire 2020-2021

1ère Année LMD MI

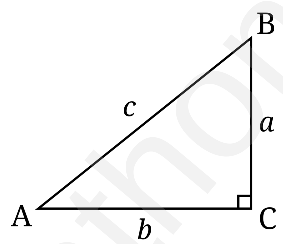
Durée : 01H30.

Corrigé de l'épreuve finale : Algèbre 1

Les calculatrices et téléphones portables sont strictement interdits

Exercice 1 : (10 points)

1. Écrire la proposition suivante avec des quantificateurs puis donnez sa négation :
"Pour tout nombre réel x, il existe au moins un entier naturel N supérieur strictement à x".
2. L'assertion suivante est-elle vraie ou fausse ? Justifiez :
"Si le palmier nous donne des melons alors $5-3=3$".
3. Montrer par l'absurde que dans un triangle rectangle avec des côtés de longueurs a, b et c, on a : $a+b>c$.



Montrer la relation précédente par un raisonnement directe.
4. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x) = 2x^2 - 4x + 1$.
i. f est-elle injective ? surjective ? Justifiez vos réponses.
ii. Déterminer l'image directe par f de l'intervalle $[0, 2]$.
iii. Déterminer l'image réciproque par f de l'intervalle $[0, 1]$.

Solution Exercice 1 :

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N} : N > x$. $\boxed{0.25pt}$. Sa négation : $\exists x \in \mathbb{R}, \forall N \in \mathbb{N} : N \leqslant x$. $\boxed{0.25pt}$.
2. Notons par p : "le palmier nous donne des melons", et par q : "$5-3=3$". Alors l'assertion : "Si le palmier nous donne des melons alors $5-3=3$" est vraie car l'implication $p \Rightarrow q$ est fausse dans le seul cas où p est vraie et q est fausse. $\boxed{0.5pt}$

3. Montrons par l'absurde que dans un triangle rectangle avec des côtés de longueurs a, b et c, on a : $a + b > c$.
Supposons que $a + b \leqslant c$ $\boxed{0.5\text{pt}}$ $\Rightarrow a^2 + b^2 + 2ab = (a+b)^2 \leqslant c^2 = a^2 + b^2$ $\boxed{0.5\text{pt}}$ (d'après le théorème de Pythagore). Ceci implique que $2ab \leqslant 0$ $\boxed{0.5\text{pt}}$ contradiction car a, b sont des longueurs positives $\boxed{0.5\text{pt}}$. Donc on a bien $a + b > c$.

Raisonnement directe :

$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$, et d'après le théorème de Pythagore on a :

$$(a+b)^2 = c^2 + 2ab > c^2$$

car $a, b > 0$, ce qui entraine que $a + b > c$. $\boxed{0.5\text{pt}}$

4. i. f n'est pas injective car l'équation $2x^2 - 4x + 1 = 0$ admet deux racines distinctes x_1 et x_2 telle que $0 < x_1 < x_2 < 2$. Donc $f(x_1) = f(x_2) = 0$ mais $x_1 \neq x_2$. $\boxed{1\text{pt}}$

Pour l'injectivité, on remarque que pour $y < -1$ l'équation $y = f(x)$ n'admet pas de solutions x c'est à dire pour un tel y il n'existe pas d'antécédant x. $\boxed{1\text{pt}}$

ii. L'image directe de $f([0,2]) = \{f(x)/x \in [0,2]\}$ $\boxed{0.5\text{pt}}$. On remarque que l'application f est décroissante sur $[0,1]$ et croissante sur $[1,2]$, donc
$f([0,2]) = f([0,1] \cup [1,2])) = f([0,1]) \cup f([1,2]) = [f(0), f(1)] \cup [f(1), f(2)]$.
Donc, $f([1,2]) = [-1,1] \cup [-1,1] = [-1,1]$. $\boxed{1\text{pt}}$

iii. L'image réciproque de $[0,1]$:

$$f^{-1}([0,1]) = \{x \in \mathbb{R}/f(x) \in [0,1]\}. \boxed{0.5\text{pt}}$$

Tout revient à trouver $x \in \mathbb{R}$ telle que $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$. Commençons par $f(x) \geqslant 0$. Il suffit de résoudre l'inégalié $2x^2 - 4x + 1 \geqslant 0$. On peut montrer facilement que le $x \in]-\infty, x_1[\cup]x_2, +\infty[$. $\boxed{1\text{pt}}$

Pour le cas $f(x) \leqslant 1$, on a $2x^2 - 4x + 1 \leqslant 1 \Rightarrow 2x(x-2) \leqslant 0$. Ce qui entraine que $x \in [0,2]$. $\boxed{1\text{pt}}$

L'image réciproque de $[0,1]$ est l'intersection de $]-\infty, x_1[\cup]x_2, +\infty[$ et $[0,2]$.
Donc

$$f^{-1}([0,1]) = [0, x_1] \cup [x_2, 2]. \boxed{0.5\text{pt}}$$

Exercice 2 : (06 points)

On considère la relation $\mathcal{R}$ sur $\mathbb{N}^*$ définie par :

$$\forall n, m \in \mathbb{N}^* : n\mathcal{R}m \Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{N} : n = m^k.$$

1. Vérifier que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre. Est-ce que l'ordre est total ?

2. Déterminer l'ensemble des majorants, l'ensemble des minorants, la borne supérieure et la borne inférieure de la partie $A = \{2, 4, 8\}$.
La partie A possède-t-elle un plus grand élément ? un plus petit élément ?

Solution Exercice 2 :

1. Montrons que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre partiel sur $\mathbb{N}^*$:

— $\mathcal{R}$ est réflexive car : $\forall n \in \mathbb{N} : n\mathcal{R}n \Leftrightarrow \exists k = 1 \in \mathbb{N}^* : n = n^1$. $\boxed{0.5\text{pt}}$

— $\mathcal{R}$ est anti-symétrique. En effet :

$$\begin{cases} n\mathcal{R}m \Rightarrow \exists k_1 \in \mathbb{N} : n = m^{k_1} \\ m\mathcal{R}n \Rightarrow \exists k_2 \in \mathbb{N} : m = n^{k_2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n^{k_2} = m^{k_1 k_2} \\ n = m^{k_1} \\ m = n^{k_2} \end{cases} \boxed{0.5\text{pt}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m = m^{k_1 k_2} \\ n = m^{k_1} \\ m = n^{k_2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m(1 - m^{k_1 k_2 - 1}) = 0 \\ n = m^{k_1} \\ m = n^{k_2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_1 k_2 = 1 \text{ car } m \neq 0. \\ n = m^{k_1} \\ m = n^{k_2} \end{cases} \boxed{0.5\text{pt}}$$

Ce qui donne que $k_1 = k_2 = 1$ et $n = m$. $\boxed{0.5\text{pt}}$

— $\mathcal{R}$ est transitive car :

$$\begin{cases} m\mathcal{R}n \Rightarrow \exists k_1 \in \mathbb{N} : m = n^{k_1} \\ n\mathcal{R}p \Rightarrow \exists k_2 \in \mathbb{N} : n = p^{k_2} \end{cases} \Rightarrow m = p^{k_1 k_2}. \boxed{0.5\text{pt}}$$

$$\Rightarrow \exists k = k_1 k_2 \in \mathbb{N} : m = p^{k_1 k_2} \Rightarrow m\mathcal{R}p. \boxed{0.5\text{pt}}$$

Conclusion : $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre partiel car par exemple 2 n'est pas en relation avec 3 et inversement. $\boxed{0.5\text{pt}}$

2. M est un majorant de $A \Leftrightarrow \forall n \in A : n\mathcal{R}M$ $\boxed{0.25\text{pt}}$ $\Rightarrow \exists k \in \mathbb{N} : n = M^k$.

$$\begin{cases} 2 = M^{k_1}, k_1 \in \mathbb{N} \\ 4 = M^{k_2}, k_2 \in \mathbb{N} \\ 8 = M^{k_3}, k_3 \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Le seul M qui convient est $M = 2$. L'ensemble des majorants $\mathcal{M} = \{2\}$ $\boxed{0.25\text{pt}}$ $\Rightarrow Sup A = 2$. $\boxed{0.5\text{pt}}$

m est un minorant de $A \Leftrightarrow \forall n \in A : m\mathcal{R}n$ $\boxed{0.25\text{pt}}$ $\Rightarrow \exists k \in \mathbb{N} : m = n^k$.

$$\begin{cases} m = 2^{k_1}, k_1 \in \mathbb{N} \\ m = 4^{k_2}, k_2 \in \mathbb{N} \\ m = 8^{k_3}, k_3 \in \mathbb{N} \end{cases}$$

L'ensemble des minorants $\mathcal{N} = \{64^k / k \in \mathbb{N}\}$ 0.25pt

$\Rightarrow inf A$ n'existe pas. 0.5pt

A possède un plus grand élément $\max A = 2$ et ne possède pas de plus petit élément. 0.5pt

Exercice 3 : (04 points)

Soit E un ensemble, $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$. Montrer que :

1. $(A \setminus C) \setminus (B \setminus C) = A \setminus (B \cup C)$.
2. $(A \setminus B) \cup (A \setminus C) = A \setminus (B \cap C)$.

Solution Exercice 3 :

1.

$$\begin{array}{rcl}
(A \setminus C) \setminus (B \setminus C) & = & (A \cap \overline{C}) \cap \overline{(B \cap \overline{C})} \\
& = & (A \cap \overline{C}) \cap (\overline{B} \cup C) \\
& = & (A \cap \overline{C} \cap \overline{B}) \cup (A \cap \overline{C} \cap C) \\
& = & A \cap \overline{C} \cap \overline{B} \\
& = & A \cap (\overline{B} \cap \overline{C}) \\
& = & A \cap \overline{(B \cup C)} \\
& = & A \setminus (B \cup C).
\end{array}$$

2pt

2.

$$\begin{array}{rcl}
(A \setminus B) \cup (A \setminus C) & = & (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap \overline{C}) \\
& = & A \cap (\overline{B} \cup \overline{C}) \\
& = & A \cap \overline{(B \cap C)} \\
& = & A \setminus (B \cap C).
\end{array}$$

2pt