تمرين في الحساب مع الحل النموذجي خاص بشعبتي الرياضي و التقني رياضي

نص التمرين :

1) أدرس تبعا لقيم العدد الطبيعي n ، باقي القسمة الإقليدية لكل من العددين 3^n و 4^n على 7 .

2) برهن أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$ يكون العدد : $2\times 2012^{6n+4}+3\times 1432^{3n+2}$ قبلا للقسمة على 7 .

3) نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدها العام u_n حيث : $u_n=2\times 3^n+3\times 4^n$.

أ) أحسب بدلالة n المجموع : $S_n=u_0+u_1+....+u_n$.

ب) ماهي قيم الأعداد الطبيعية n التي يكون من أجلها المجموع S_n قبلا للقسمة على 7 ؟.

الإجابة النموذجية

---

1) بواقي القسمة الإقليدية لكل من 3^n و 4^n على 7 :

- $3^0\equiv 1[7]$ ، $3^1\equiv 3[7]$ ، $3^2\equiv 2[7]$ ، $3^3\equiv 6[7]$ ، $3^4\equiv 4[7]$ ، $3^5\equiv 5[7]$ ، $3^6\equiv 1[7]$.

قيم n	$6k$	$6k+1$	$6k+2$	$6k+3$	$6k+4$	$6k+5$
بواقي قسمة 3^n على 7	1	3	2	6	4	5

- $4^0\equiv 1[7]$ ، $4^1\equiv 4[7]$ ، $4^2\equiv 2[7]$ ، $4^3\equiv 1[7]$.

قيم n	$3k$	$3k+1$	$3k+2$
بواقي قسمة 3^n على 7	1	4	2

2) برهان أن : $2\times 2012^{6n+4}+3\times 1432^{3n+2}$ يقبل القسمة على 7 من أجل كل عدد طبيعي n :

✓ $2012\equiv 3[7]$ ، أي : $2012^{6n+4}\equiv 3^{6n+4}[7]$ ، ومنه : $2012^{6n+4}\equiv 4[7]$.

✓ $1432\equiv 4[7]$ ، أي : $1432^{3n+2}\equiv 4^{3n+2}[7]$ ، ومنه : $1432^{3n+2}\equiv 2[7]$.

إذن : $2\times 2012^{6n+4}+3\times 1432^{3n+2}\equiv 8+6[7]$ ، أي : $2\times 2012^{6n+4}+3\times 1432^{3n+2}\equiv 14[7]$ ، ومنه :

$2\times 2012^{6n+4}+3\times 1432^{3n+2}\equiv 0[7]$. و هو المطلوب .

3) أ) حساب بدلالة n المجموع $S_n=u_0+u_1+....+u_n$:

نلاحظ أن المتتالية (u_n) هي مجموع متتاليتين هندسيتين إحداهما أساسها 3 و حدها الأول 2 ، والثانية أساسها 4 و حدها الأول 3 ، أي : $S_n=2\left[\dfrac{1-3^{n+1}}{1-3}\right]+3\left[\dfrac{1-4^{n+1}}{1-4}\right]$ ، ومنه : $S_n=\left[3^{n+1}-1\right]+\left[4^{n+1}-1\right]$ ،

أي : $S_n=3^{n+1}+4^{n+1}-2$.

ب) قيم n حتى يكون S_n قبلا للقسمة على 7 :

✓ $S_n \equiv 0[7]$ معناه : $3^{n+1} + 4^{n+1} \equiv 2[7]$.

قيم n	$6k$	$6k+1$	$6k+2$	$6k+3$	$6k+4$	$6k+5$
باقي قسمة 3^n على 7	1	3	2	6	4	5
باقي قسمة 4^n على 7	1	4	2	1	4	2

نلاحظ أن : $3^n + 4^n \equiv 2[7]$ ، لما : $n = 6k$ ، و منه : $3^{n+1} + 4^{n+1} \equiv 2[7]$ ، لما : $n+1 = 6k$.

أي لما : $n = 6k - 1$ أو : $n = 6(k-1) + 5$.

لنضع : $k' = k - 1$ ، أي : $n = 6k' + 5$ ، حيث : $k' \in \mathbb{N}$.

ومنه حتى يكون S_n قابلا للقسمة على 7 ، يجب أن يكون $n = 6k' + 5$ ، حيث : $k' \in \mathbb{N}$.

بالتوفيـــــــــــق للجميـــــــــــع

كتابة الأستاذ : بلقاسم عبدالرزاق