

Chapitre V Les conducteurs

Les notions précédentes sont appliquées au conducteur. On montre ainsi que dans un conducteur $\vec{E} = \vec{0}$ et $V = \text{Cte}$.

Au voisinage de la surface d'un conducteur chargé, le champ électrostatique est perpendiculaire à cette surface.

Deux (ou plusieurs) conducteurs chargés placés ensemble subissent une influence (le champ électrostatique de l'un modifie la répartition des charges électriques de l'autre et inversement). L'ensemble forme un système en équilibre ; cet équilibre est unique.

L'influence entre deux conducteurs est dite totale si un conducteur entoure entièrement un autre conducteur. Ce cas-là est appliqué aux écrans électrostatiques et aux condensateurs.

Des exemples d'équilibre de systèmes de conducteurs chargés et de condensateurs sont traités à la fin de ce chapitre.

1 Les conducteurs en équilibre

1.1 Généralités

1.1.1 Les porteurs de charge :

Dans un isolant les charges sont fixes tandis que dans un conducteur les charges électriques peuvent se déplacer sous l'action d'une force électrostatique aussi petite soit-elle. Nous disons qu'un conducteur contient des porteurs de charges.

1.1.2 Modèle du métal en équilibre :

- Un métal est constitué d'atomes dont un (ou plusieurs) des électrons périphériques est relativement libre de se déplacer entre les ions positifs restés fixes aux noeuds du réseau cristallin. Ces électrons sont donc soumis à des forces électrostatiques même en l'absence de champ électrostatique extérieur et par conséquent sont animés de mouvements désordonnés.

Si nous regardons un élément de volume $d\tau$ très petit par rapport aux dimensions macroscopiques mais très grand par rapport aux dimensions atomiques, sa charge totale négative est en moyenne constante car le conducteur étant en équilibre, il n'y a pas de mouvement d'ensemble des porteurs de charges: macroscopiquement nous disons que cette grandeur est nivelée car nous négligeons les fluctuations dues aux mouvements désordonnés. Il en sera de même pour toutes les grandeurs électrostatiques : densité de charge, champ, potentiel.

- L'invariance de la répartition des charges implique qu'aucune force n'est appliquée aux porteurs de charges, donc le champ électrostatique interne est nul et par suite (théorème de Gauss) la densité totale de charge (électrons et ions positifs) est également nulle :

$$\vec{E} = \vec{0} \Rightarrow \rho = 0$$

Attention ! $\rho = 0$ ne signifie pas qu'il n'y a pas de charges à l'intérieur du conducteur, mais qu'il y a autant de charges négatives que positives.

- La relation générale $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$ nous indique que le potentiel est constant dans le conducteur et par continuité à la surface de celui-ci : le conducteur en équilibre est un volume équipotentiel : $V = \text{Cste}$

- Conséquence : l'intérieur d'un conducteur en équilibre n'étant pas chargé, la répartition des charges est superficielle avec une densité σ . La « cage » de Faraday ou le « plan d'épreuve » utilisé pour prélever des charges, sont des illustrations de ce fait.

1.1.3 Conducteurs creux :

La surface limitant la cavité est une équipotentielle. Si cette cavité ne contient pas de charge le potentiel ne peut y être extréum, il est donc constant. Par suite le champ électrostatique est nul et l'application du théorème de Gauss montre que la densité superficielle de charge sur la paroi interne est nulle.

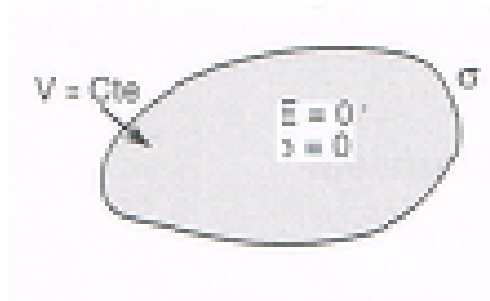


Figure V,1 : conducteur plein

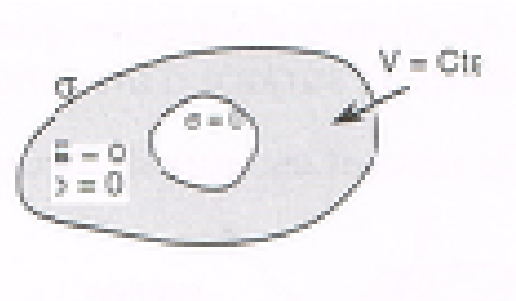


Figure V,2 : conducteur creux

1.2 Propriétés de l'espace environnant un conducteur

1.2.1 Lignes de champ et équipotentielles :

La surface du conducteur étant une équipotentielle, les lignes de champ sont perpendiculaires à cette surface (figure V.3a), les équipotentielles entourent le conducteur. Une ligne de champ pourra relier un point du conducteur à un point d'un autre conducteur ou se diriger vers l'infini (figure V.3b) mais ne pourra jamais relier un autre point du même conducteur.

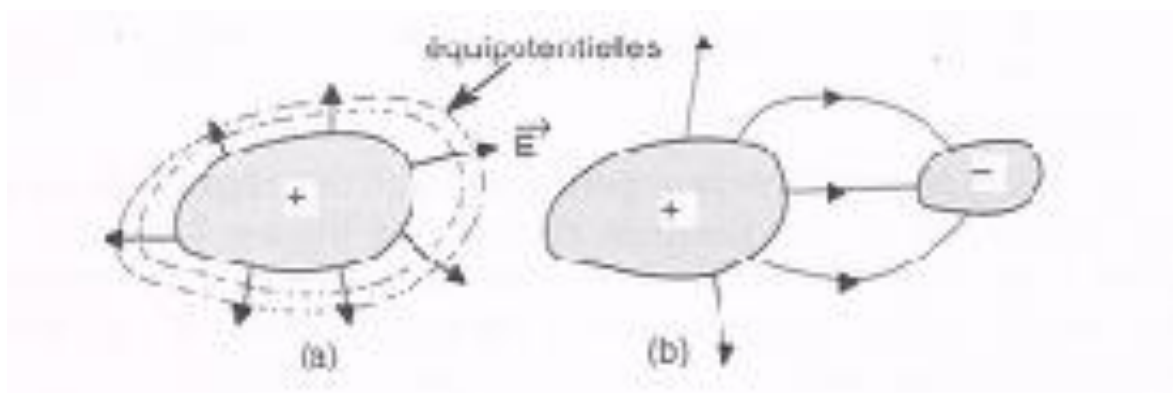


Figure V,3

1.2.2 Le théorème de Coulomb :

Considérons un métal et appliquons le théorème de Gauss à la surface fermée \mathcal{Z} (figure V.4) constituée par un demi-cylindre de base dS perpendiculaire à S placé à l'extérieur du conducteur et d'une surface quelconque placée à l'intérieur du conducteur et s'appuyant sur dS . Nous savons que le champ électrostatique est nul à l'intérieur et perpendiculaire à la surface S du conducteur à l'extérieur. Soit \vec{E} ce champ au voisinage de S .

Le flux du champ est : $\phi = \vec{E} \cdot \vec{dS} = \vec{E} \cdot \vec{n} dS = E dS$

D'après le théorème de Gauss : $\phi = \frac{\sigma dS}{\epsilon_0}$ donc $\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}$

« Le champ électrostatique présente une discontinuité à la traversée de la surface d'un conducteur. »

Ce résultat est appelé théorème de Coulomb.

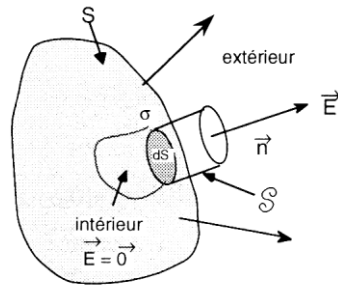


Figure V,4

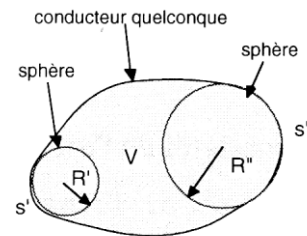


Figure V,5

1.2.3 Répartition des charges à la surface d'un conducteur :

Considérons une sphère conductrice de rayon R ayant la charge totale $Q = 4\pi R^2 \sigma$.

À l'intérieur, le potentiel est constant, sa valeur est $V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R}$; on en déduit donc la

$$\text{relation } V = \frac{\sigma R}{\epsilon_0}$$

Un conducteur quelconque peut présenter des régions de sa surface assimilables à des portions de sphères (figure V.5) pour lesquelles la relation précédente sera applicable. Chacune de ces zones a une densité superficielle différente, par exemple σ' et σ'' . Le potentiel étant le même dans ces deux régions on en déduit :

$$\epsilon_0 V = R' \sigma' = R'' \sigma''$$

Ainsi si $R' \ll R''$ alors $\sigma' \gg \sigma''$ par suite $E' \gg E''$.

Le champ électrostatique est d'autant plus intense que la surface d'un corps conducteur a un rayon de courbure plus petit.

Cette propriété s'appelle le pouvoir des pointes et s'illustre expérimentalement par des expériences très simples telle que le « tourniquet » électrique.

1.2.4 Pression électrostatique :

Si on considère un élément de surface dS d'un conducteur chargé, il est clair que cet élément de charge $dq = \sigma dS$ subit une force de répulsion de la part des autres charges de la surface totale du conducteur (figure V.6).

Le champ électrostatique donné par le théorème de Coulomb est la somme du champ \vec{E}_1 créé par dS et du champ \vec{E}_2 créé par le reste de la surface : $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$

La force de répulsion s'exerçant sur dS est :

$$d\vec{F} = \sigma dS \vec{E}_2 = \sigma dS (\vec{E} - \vec{E}_1)$$

Sachant que $\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}$ (théorème de Coulomb) et $\vec{E}_1 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{n}$ champ donné par un plan infini,

puisque la surface dS est vue sous un angle solide égal à 2π du point O où sont exprimés ces champs, on obtient :

$$d\vec{F} = \sigma dS \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{n} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} \vec{n} dS = p \vec{n} dS \quad \text{avec} \quad p = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} \text{ pression électrostatique.}$$

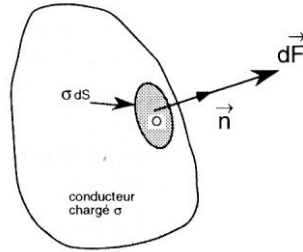


Figure V,6

2 Les systèmes de conducteurs

2.1 Les éléments correspondants

Reprenons la figure V.3 b et considérons une surface fermée constituée par un tube de champ s'appuyant sur une surface S de charge q sur le conducteur A et sur une surface S' de charge q' sur le conducteur A' et fermé aux extrémités par des surfaces quelconques Σ et Σ' respectivement dans les conducteurs A et A' .

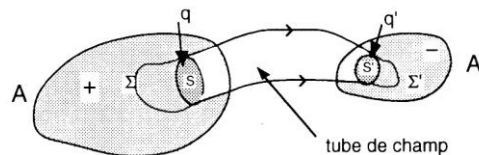


Figure V,7 : éléments correspondants

Le flux du champ électrostatique à travers cette surface étant nul, la somme des charges est nulle : $q + q' = 0$.

Le théorème des éléments correspondants s'énonce ainsi :

« Les charges de deux éléments correspondants sont égales et opposées. »

2.2 L'influence

2.2.1 Définition :

Lorsqu'on place un conducteur chargé dans un champ électrostatique, la répartition des charges superficielles est modifiée ; on dit que le conducteur a été influencé par le champ.

A l'équilibre, la surface du conducteur doit toujours être une équipotentielle.

2.2.2 Influence de deux conducteurs :

Soit un conducteur A appelé inducteur supposé chargé positivement son potentiel étant $V > 0$, et un conducteur A' influencé par A appelé induit. Deux cas peuvent se présenter :

a) A' est isolé (charge constante)

Supposons par exemple sa charge totale nulle donc son potentiel nul. Lorsqu'on approche A de A' le champ électrostatique de A déplace les charges de A' : il attire les charges négatives et repousse les charges positives ; les tubes de champ existant entre A et A' sont conformes au théorème des éléments correspondants.

Ce déplacement de charges induit donc un champ électrostatique dirigé de « + » vers « - » et par suite un potentiel $V' > 0$ inférieur à V . Ainsi, l'influence conserve la charge totale d'un conducteur isolé, mais modifie la répartition des charges et le potentiel.

Si $V > 0 \Rightarrow V > V' > 0$; si $V < 0 \Rightarrow V < V' < 0$.

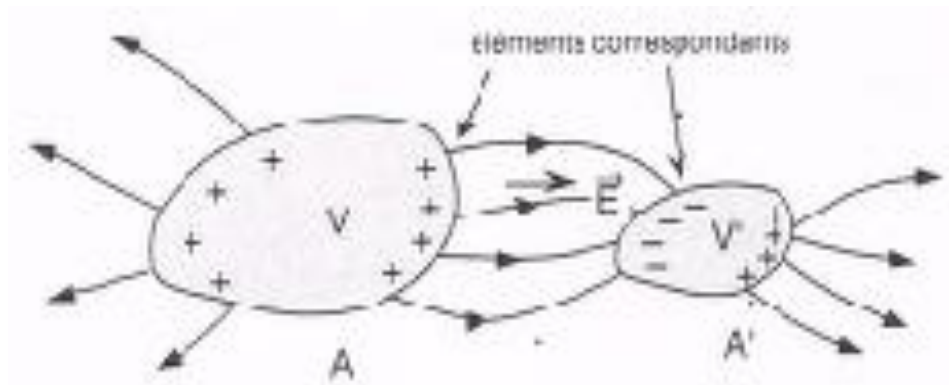


Figure V,8

b) A' est à potentiel constant

L'influence maintient sur A' les seules charges de signe opposé à celui des charges de A, les charges de même signe que A s'écoulant vers la source de potentiel constant (par exemple la « terre ») ; ceci conformément au théorème des éléments correspondants.

L'influence modifie la charge totale d'un conducteur maintenu à un potentiel constant.

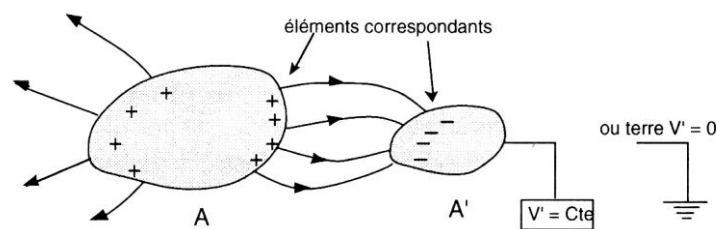


Figure V,9

Remarques:

- 1) Avec le frottement et le contact, l'influence est un autre procédé d'électrisation des conducteurs.
- 2) La terre constitue une bonne origine des potentiels, le schéma symbolique est donné sur la figure V.9.
- 3) Les seules situations possibles pour un conducteur sont : fixer sa charge totale (conducteur isolé) ou fixer son potentiel (conducteur relié à une « machine » ou à la « terre »).

2.2.3 L'influence totale :

Deux corps sont en influence totale lorsque l'induit entoure complètement l'inducteur (figure V.10). Supposons un conducteur A portant la charge $+q$ entouré par un conducteur B isolé portant la charge $+Q$. Le théorème des éléments correspondants montre aisément que la surface interne de B porte la charge $q' = -q$ (par influence de A ; toutes les lignes de champ issues de A atteignent B) et la face externe la charge $Q + q$.

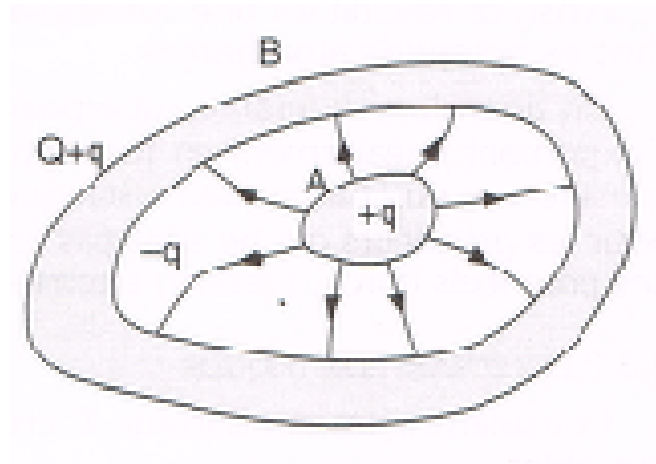


Figure V,10 : influence totale

On montre que la répartition des charges sur A et sur la face interne de B dépend de la position de A tandis que la répartition des charges externes $Q + q$ en est indépendante (tout se passe pour la surface externe comme si le conducteur B était plein).

2.3 Les théorèmes généraux

Lorsqu'on considère un système de conducteurs en équilibre, la connaissance du potentiel $V(x, y, z)$ permet la détermination complète de l'état électrostatique de ce système.

2.3.1 Théorème d'unicité :

On considère un ensemble de conducteurs $\{i\}$ en équilibre. La fonction potentiel V satisfait aux conditions :

$\Delta V = 0$ (Laplace) en dehors des conducteurs et $V = V_i$ sur le conducteur « i ». On montre que cette fonction V est unique.

2.3.2 Superposition des états d'équilibre

Considérons un système de conducteurs fixes et supposons par exemple que nous connaissions deux états d'équilibre dont les fonctions potentiels sont V_1 et V_2 . Ces potentiels satisfont aux conditions :

$$\Delta V_1 = 0, V_1 = V_{1i} \text{ sur le conducteur « i »}$$

$$\Delta V_2 = 0, V_2 = V_{2i} \text{ sur le conducteur « i »}$$

La linéarité de l'opérateur Δ et les conditions aux limites entraînent que $V = V_1 + V_2$ satisfait à $\Delta V = \Delta(V_1 + V_2) = 0$ et $V = V_i = V_{1i} + V_{2i}$ sur le conducteur « i ».

Plus généralement, on envisagera la superposition :

$$V = \alpha V_1 + \beta V_2 \text{ (avec } \alpha \text{ et } \beta \text{ constantes).}$$

Ainsi, ce résultat est une conséquence de la linéarité de la relation liant les potentiels aux charges.

On aura donc la même superposition pour toutes les grandeurs s'exprimant linéairement en fonction des charges ou des potentiels (c'est le cas du champ électrostatique). En revanche ceci sera faux pour les grandeurs qui ne sont pas fonctions linéaires des charges ou des potentiels (force, pression électrostatique, énergie).

2.3.3 Les écrans électriques :

Considérons un conducteur C creux. Deux situations sont envisageables.

1) Le conducteur C est maintenu à un potentiel constant (figure V.11 a)

Le potentiel de C étant fixé ($V = Cte$), les surfaces Σ_1 (intérieure) et Σ_2 (extérieure) sont des équipotentielles.

- Si l'on modifie les charges à l'intérieur de Σ_1 , les conditions aux limites à l'extérieur de C restent invariantes : les grandeurs électriques ne sont pas modifiées à l'extérieur de C .

- Si maintenant on modifie les charges à l'extérieur de C , puisque le potentiel sur Σ_1 reste invariant, les conditions aux limites à l'intérieur de C sont également invariantes : les grandeurs électriques ne sont pas modifiées.

Dans les deux cas on dit que C joue le rôle d'écran électrique (blindage). On réalise souvent ce type de blindage en maintenant l'écran au potentiel de la terre (zéro).

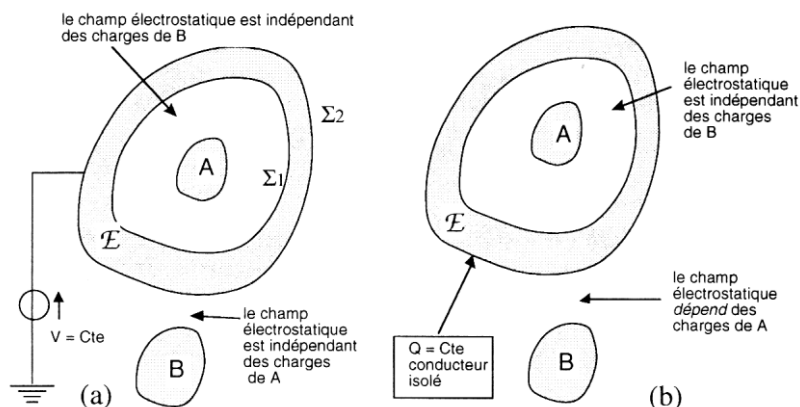


Figure V,11 : écrans électriques

2) Le conducteur C est isolé, sa charge est constante (figure V.11 b)

- Une modification à l'intérieur de C modifie le potentiel et le champ extérieur : C ne joue pas le rôle d'écran.

- Pour voir ce qui se passe lorsqu'on modifie l'extérieur de C , envisageons deux états :

état 1 : $Q_B = 0$ pas de charges à l'extérieur de C et $Q_A \neq 0 \Rightarrow \vec{E}_1 \neq \vec{0}$ dans la cavité

état 2 : $Q_B \neq 0$ des charges extérieures influencent C et $Q_A = 0 \Rightarrow \vec{E}_2 = \vec{0}$ dans la cavité

(voir « conducteur creux »). Superposons ces deux états : $\vec{E}_{int} = \vec{E}_1$

C joue le rôle d'écran pour l'intérieur du conducteur creux puisque le champ n'est pas modifié.

La cage ou le cylindre de Faraday, le blindage électrostatique, sont des applications des écrans électrostatiques.

2.4 Capacités et coefficients d'influence

2.4.1 Conducteur unique :

Soit un conducteur isolé dans l'espace portant la charge Q , son potentiel étant V . Si sa charge est αQ (α constante), son potentiel sera αV . Donc Q et V sont proportionnels. On écrit :

$$Q = CV \quad (C \text{ s'appelle capacité})$$

- Dans le système SI l'unité de capacité s'exprime en farads (symbole F), mais on utilise généralement des sous-multiples tels que le microfarad (μF), le nanofarad (nF), le picofarad (pF) avec :

$$1 \mu F = 10^{-6} F, 1 nF = 10^{-9} F, 1 pF = 10^{-12} F.$$

2.4.2 Système de conducteurs

Si on considère un système de n conducteurs dont l'équilibre est caractérisé par les charges $\{Q_1, \dots, Q_n\}$ et les potentiels $\{V_1, \dots, V_n\}$ le raisonnement précédent appliqué à chaque conducteur

(superposition des états d'équilibre) montre que les charges sont des fonctions linéaires et homogènes des potentiels et réciproquement :

$Q_i = \sum_{j=1}^n C_{ij} V_j$ ou $(V_i = \sum_{j=1}^n G_{ij} C_j)$ soit sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \dots \\ Q_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{n1} & C_{n2} & \dots & C_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \dots \\ V_n \end{bmatrix}$$

Les éléments C_{ij} de cette matrice carrée ne dépendent que de la géométrie du système de conducteurs. Dans le système SI, ces coefficients s'expriment en farad. L'élément C_{ii} de la diagonale correspond à la capacité du conducteur « i » en présence de tous les autres conducteurs. L'élément C_{ij} ($i \neq j$) est appelé coefficient d'influence du conducteur « j » sur le conducteur « i ».

On montre que :

- La matrice (C_{ij}) est symétrique : $C_{ij} = C_{ji}$

- Les coefficients C_{ii} sont positifs, les coefficients C_{ij} ($i \neq j$) sont négatifs avec :

$$C_{ii} \geq \left| \sum_{i \neq j} C_{ij} \right| \quad (1)$$

3 Les condensateurs

3.1 Définition

3.1.1 Charge d'un condensateur :

Un condensateur est un ensemble de deux conducteurs en influence totale. Ces conducteurs sont appelés armatures. L'armature interne A_1 porte la charge $Q_1 = Q$, charge du condensateur, elle est entourée par l'armature externe A_2 (figure V.12) dont la charge totale est Q_2 .

Il est évident que :

$Q_2 = Q_i + Q_e$ avec $Q_i = -Q$.

On pose $C_{11} = C$ capacité du condensateur ($C > 0$).

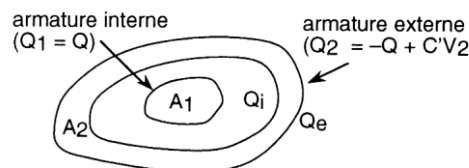


Figure V,12 : condensateur

La relation (1) appliquée dans ce cas donne $C = -C_{12} = -C_{21}$

$Q_1 = Q = C_{11}V_1 + C_{12}V_2 = C(V_1 - V_2)$

$Q_2 = Q_i + Q_e = C_{21}V_1 + C_{22}V_2 = -CV_1 + C_{22}V_2$ donc $Q_e = (C_{22} - C)V_2 \equiv C'V_2$

avec $C' = C_{22} - C$ Par suite, la relation matricielle précédente devient :

$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C & -C \\ -C & C' + C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

C' représentant la capacité du conducteur A_2 considéré comme seul dans l'espace n'a pas d'intérêt spécifique pour ce dispositif (la charge de l'armature externe $Q_2 = -Q + C'V_2 \cong -Q$). En revanche, la charge du condensateur, charge de l'armature interne est :

$$Q = C(V_1 - V_2) \quad (2)$$

Ainsi, la charge d'un condensateur est proportionnelle à la différence de potentiel entre ses armatures.

Le coefficient de proportionnalité C , capacité, dépend de la géométrie des armatures.

3.1.2 Le conducteur plan :

Il est constitué par deux plans parallèles de surface S distants de e (figure V.13a) et uniformément chargé $+\sigma$ et $-\sigma$.

L'application du théorème de Coulomb donne immédiatement le champ (supposé uniforme)

$E = \sigma/\epsilon_0 = Q/\epsilon_0 S$ et par suite la différence de potentiel $V_1 - V_2 = -\int E dl = Qe/\epsilon_0 S$ d'où $C = \epsilon_0 S/e$

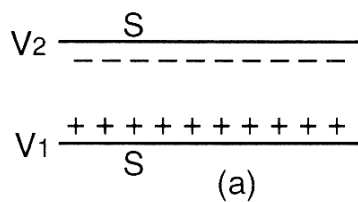


Figure V,13 : condensateur plan

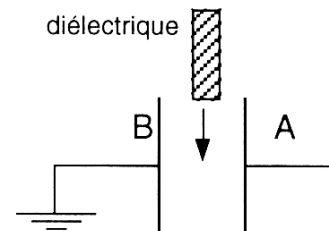
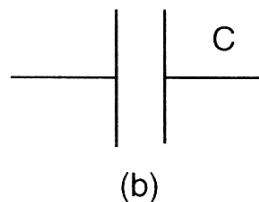


Figure V,14

Le modèle du condensateur plan (figure V.13b) est généralement utilisé pour schématiser les condensateurs.

3.1.3 Exemples :

Les condensateurs sont généralement sphériques, cylindriques ou plans. On peut ajuster la capacité par des associations (série ou parallèle), par des armatures mobiles (condensateurs variables) ou en utilisant des diélectriques (voir ci-dessous).

3.2 Le phénomène de « condensation »

On considère un plan A portant la charge Q , son potentiel est V . On approche un plan identique B relié à la terre (potentiel zéro). Le potentiel de A devient $V' < V$ car la capacité de l'ensemble AB (condensateur plan) a augmenté. Pour obtenir de nouveau le potentiel V sur A, il faut lui apporter de nouvelles charges. Ainsi, pour le même potentiel V , le conducteur A porte une charge plus grande en présence du conducteur B : il y a « condensation » de l'électricité. Le phénomène est encore augmenté en introduisant entre les armatures A et B (figure V.14) une lame diélectrique de permittivité relative ϵ_r

la capacité du condensateur $C = \epsilon_0 S/e$ devient $C' = \epsilon_0 \epsilon_r S/e$ car $\epsilon_r > 1$.

4. Les conducteurs hors d'équilibre

Soient deux conducteurs A et B isolés, respectivement au potentiel V_A (charge Q_A) et V_B (Q_B) supposons $V_A > V_B$. Si nous relions A et B par un fil conducteur, nous constatons qu'il y a égalité des potentiels et variation des charges de A et B. En effet, l'existence d'une ddp entre A et B établit un champ électrostatique dirigé dans le sens des potentiels décroissants. Ce champ exerce alors une force sur les charges. Ce déplacement des charges crée un courant électrique dont le débit s'appelle intensité $I = dq/dt$ (voir Électrocinétique).

Si le conducteur a une section S , cette intensité s'exprime en fonction du flux d'un vecteur \vec{j} appelé densité de courant : $I = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$

Si on appelle $\rho(t)$ la densité volumique de charge à l'instant t , on montre

que la relation (utilisation du théorème de Green) : $\text{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ exprime la conservation de la quantité d'électricité.

- En régime permanent, $\rho = \text{Cte}$, donc $\text{div} \vec{j} = 0$ qui exprime que le flux de \vec{j} est conservatif.
- La loi d'Ohm locale exprime que la densité de courant est proportionnelle au champ électrostatique ayant mis les charges en mouvement : $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ σ s'appelle la conductivité du matériau, elle s'exprime en $(\Omega\text{m})^{-1}$.
- On appelle conducteur ohmique, un conducteur homogène isotrope parcouru par un courant permanent de densité \vec{j} constante indépendante de \vec{E} . Dans le cas d'un conducteur cylindrique (section S longueur l) :

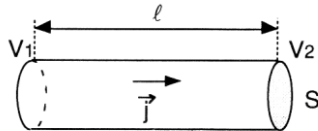


Figure V,15

$$I = jS \text{ et } V_1 - V_2 = El = j l / \sigma = I l / \sigma S$$

Cette relation exprime la loi d'Ohm : la différence de potentiel extrémités d'un conducteur ohmique est proportionnelle à l'intensité du courant qui le traverse : $V_1 - V_2 = RI$

Le coefficient R s'appelle résistance ; dans le système SI il s'exprime en ohms (symbole Ω). Son expression (généralisable à des conducteurs de forme quelconque) est :

$$R = \frac{1}{\sigma} \frac{l}{S} = \rho \frac{l}{S} \quad \text{avec} \quad \rho = \frac{1}{\sigma} \text{ résistivité (en } \Omega\cdot\text{m}).$$

- Pour un conducteur parfait $\sigma \rightarrow \infty$

5. Exemples d'équilibres entre conducteurs

Exercice d'application :

1 - On considère une sphère métallique creuse S_0 de rayon R_0 au potentiel V_0 constant. On place une charge ponctuelle $+q$ au centre O de cette sphère.

Déterminer le potentiel $V(r)$ et le champ électrostatique $E(r)$ en tout point M distant de $OM = r$ du centre de la sphère.

AN: $q=10^{-9}\text{C}$, $R_0=10\text{cm}$, $V_0=10\text{V}$.

2 - On remplace la sphère par un plan P métallique et infini au potentiel $V = 0$, la charge ponctuelle étant toujours au point O à la distance $OH = d$ de ce plan.

a) En appliquant la méthode des images électriques, déterminer le champ sur P en fonction de $HM = r$.

b) En déduire la densité de charge superficielle $\sigma(r)$ puis la charge totale de P .

c) Évaluer la force F agissant sur ce plan.

AN : $d=10\text{cm}$.

3 - On revient à la sphère de la question 1 au potentiel V_0 initial. S_0 est entourée de deux demi-sphères métalliques S_1 et S_2 initialement neutres (figure 4.16), l'ensemble formant une sphère S concentrique à S_0 de rayon intérieur R_i et de rayon extérieur R_e

a) Quel est le potentiel de S_0 ? Évaluer le potentiel et la charge de la sphère S . Calculer puis représenter $V(r)$ potentiel en un point M tel que $OM = r$.

b) On relie la sphère S au sol (potentiel zéro). Que devient le potentiel de la sphère S_0 ? Exprimer et représenter $V(r)$ comme ci-dessus.

c) A partir de l'état précédent (b), la sphère S est maintenant isolée et on relie la sphère S_0 au sol. Évaluer la nouvelle charge de S_0 ainsi que le potentiel et les charges de la sphère S. Exprimer et représenter $V(r)$. AN : $R_0=10\text{cm}, R_i=11\text{cm}, R_e=12\text{cm}$.

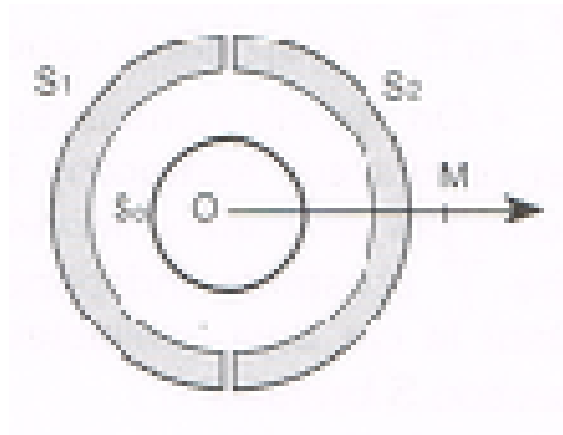


Figure V,16

Solution :

1- La sphère joue le rôle d'écran électrique, puisqu'elle est maintenue à un potentiel constant. La symétrie sphérique implique que les grandeurs champ et potentiel ne dépendent que de r : $E(r) = -dV(r)/dr$.

• Si $r > R_0$ tout se passe comme si on avait une charge ponctuelle en O de valeur

$$Q = 4\pi\epsilon_0 R_0 V_0 :$$

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} = V_0 \frac{R_0}{r} \Rightarrow E(r) = V_0 \frac{R_0}{r^2}$$

• À l'intérieur de la sphère : $V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} + Cste$ la continuité du potentiel nous donne la valeur de la constante :

$$V_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R_0} + Cste \quad \text{donc} \quad V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_0} \right) + V_0 \Rightarrow E(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2}$$

• Si $r = R_0$ le champ subit la discontinuité : $\Delta E = \frac{V_0}{R_0} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_0^2}$

• AN (V en volts et E en V.m^{-1}) : $r > R_0$; $V(r) = 1/r$ $E(r) = 1/r^2$;
 $r < R_0$ $V(r) = 9/r - 80$ et $E(r) = 9/r^2$; $r = R_0$ $\Delta E = 800 \text{ V.m}^{-1}$.

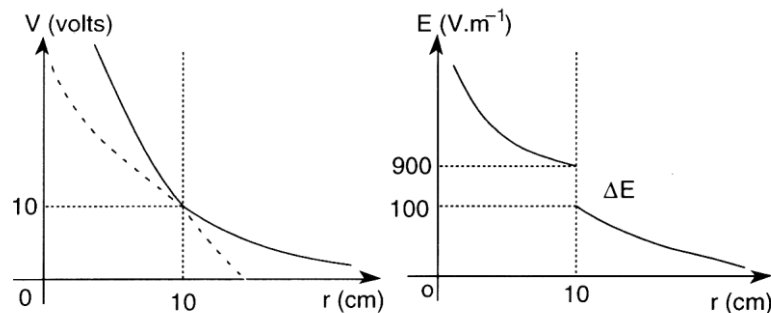


Figure V,17

• A partir de l'expression de $\sigma = Q/S$ et en appliquant $\Delta E = \sigma/\epsilon_0$, on retrouve le résultat précédent.

2 - a) Si on connaît pour une distribution de charges donnée une surface S équipotentielle V_0 séparant l'espace en deux régions (l'intérieur et l'extérieur de S), on peut métalliser cette surface, la porter au potentiel V_0 et supprimer les charges intérieures sans modifier le potentiel à l'extérieur de S (S joue le rôle d'écran).

Inversement, si on remplace une surface métallique au potentiel V_0 en présence de charges extérieures q_e par des charges q_i intérieures à S telles que la distribution $\{q_e ; q_i\}$ crée la même équipotentielle V_0 à la place de S, les charges q_i sont appelées images électriques des charges q_e dans la surface S.

Sachant que le plan médiateur d'un dipôle $(+q, -q)$ est une équipotentielle zéro, on peut remplacer la charge $+q$ en présence du plan à la distance d (figure V.18) par la charge $+q$ et son image $-q$ à la distance 2d (figure V.19) :

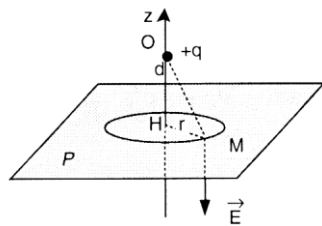


Figure V,18

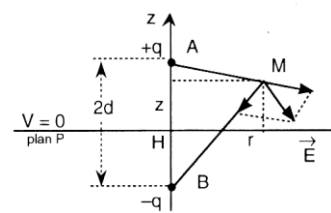


Figure V,19

Pour un point M quelconque l'expression du champ est :

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\vec{r}_1}{r_1^3} - \frac{\vec{r}_2}{r_2^3} \right) \quad \text{avec} \quad r_1 = AM \text{ et } r_2 = BM$$

Si $z = 0$ ($r_1 = r_2$), il est très facile de voir que le champ est perpendiculaire au plan $z = 0$ et dirigé vers $z < 0$:

$$E(z = 0) = E(r)$$

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{-2qd}{(d^2 + r^2)^{3/2}}$$

Il y a symétrie de révolution autour de l'axe Hz (variable r seule).

b) On utilise le théorème de Coulomb : $\sigma = E\epsilon_0$

$$\sigma(r) = \frac{E_0}{\left(1 + \left(\frac{r}{d}\right)^2\right)^{3/2}} \quad \text{avec} \quad E_0 = E(r = 0) = \frac{-2q}{4\pi\epsilon_0 d^2} = -1800 \text{ V } \cdot \text{m}^{-1}$$

par suite : $Q = \int \sigma dS = 2\pi \int \sigma r dr = -q$ ce résultat était prévisible puisque le plan P est en influence totale.

c) Nous utilisons maintenant la pression électrostatique (dirigée vers l'extérieur de la surface, figure V.6).

La force est dirigée vers la charge $+q$:

$$F = \int p dS = \int \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} dS = \int_0^\infty \frac{\pi \sigma^2 r dr}{\epsilon_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{2d} \right)^2 = 2.25 \cdot 10^{-7} \text{ N}.$$

(résultat évident à partir de la loi de Coulomb exprimée pour deux charges $+q$ et $-q$ distantes de 2d).

3 - a) S_0 est isolée, sa charge $Q = 4\pi\epsilon_0 R_0 V_0 = 1,11 \cdot 10^{-10} \text{ C}$ est constante, mais en présence de S son potentiel change. Il y a influence totale, donc la surface intérieure de S se charge $-Q$ et par suite la surface extérieure se charge $+Q$. D'où le nouveau potentiel de S_0 , (on rappelle que $V_0 = Q/4\pi\epsilon_0 R_0$) :

$$V_{S_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{Q_i}{R_i} = V_0 \left(1 + \frac{R_0}{R_e} - \frac{R_0}{R_i} \right) = 9,24V \quad (1)$$

• Le potentiel de S est celui d'une sphère conductrice de rayon R_e et de charge $+Q$ (charges superficielles extérieures) :

$$V_S = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_e} = V_0 \frac{R_0}{R_e} = 8,33V \quad (2)$$

• Entre les deux sphères le potentiel s'écrit :

$$V(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} + Cste = V_0 \frac{R_0}{r} + Cste \quad \text{La constante se détermine par la continuité du potentiel}$$

$$V(r = R_0) = V_{S_0} \text{ ou } V(r = R_i) = V_S \Rightarrow Cste = V_0 R_0 \left(\frac{1}{R_e} - \frac{1}{R_i} \right) \text{ d'où}$$

$$V(r) = V_0 R_0 \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{R_e} - \frac{1}{R_i} \right) \dots\dots\dots (3)$$

• A l'extérieur des sphères ($r > R_e$) le potentiel est évident :

$$V(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} = V_0 \frac{R_0}{r} \quad (4)$$

En rassemblant les résultats (1), (2), (3), (4), nous obtenons :

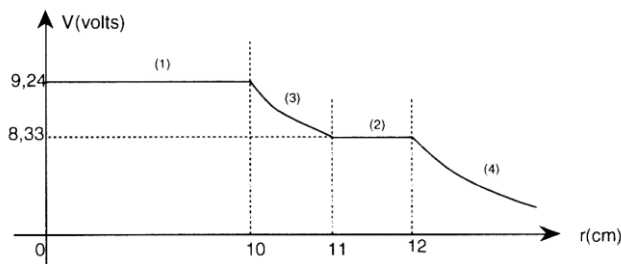


Figure V,20 (échelle quelconque)

b) Si la sphère S est au potentiel zéro sa charge totale est égale à $-Q$ car la charge extérieure disparaît ; le potentiel de la sphère S change, d'après (1) :

$$V_{S_0} \Rightarrow V_{S'_0} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_0} - \frac{1}{R_i} \right) = V_0 \left(1 - \frac{R_0}{R_i} \right) = 0,909V .$$

Entre les sphères (figure V.22 a) le potentiel est égal à : $V(r) = V_0 R_0 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_i} \right)$

N.B. Lorsqu'un conducteur chargé par influence est relié au sol, les charges « + » (« - ») disparaissent si la charge du corps inducteur est négative (positive).

c) La charge $-Q$ initiale de la sphère S se répartit de nouveau en une charge intérieure Q'_i et une charge extérieure Q'_e telles que :

$$-Q = Q'_i + Q'_e \quad (5) \quad \text{Mais, l'influence étant totale, la charge } Q' \text{ de la sphère } S_0 \text{ est égale et opposée à } Q'_i : \quad Q = -Q'_i \quad (6)$$

Par ailleurs, d'après (1) :

$$V_{S_0} = 0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q'}{R_0} + \frac{Q_e}{R_e} + \frac{Q_i}{R_i} \right) \quad (7)$$

En combinant ces trois relations (5), (6) et (7), on obtient :

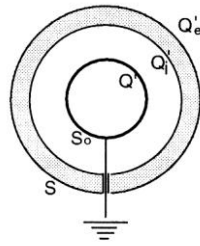


Figure V.21

$$Q' = Q \frac{R_0 R_i}{R_0 R_i + R_i R_e - R_0 R_e} = 0.9; Q_i = -Q';$$

$$Q_e = Q'' - Q = -0.1Q \quad \text{avec} \quad Q = 1.11 \cdot 10^{-10} C$$

$$\text{potentiel de la sphère } S \text{ devient } V_{S'} = -0.1V_0 \frac{R_0}{R_e} = -0.83V$$

Entre les sphères le potentiel est $V(r) = 0.9V_0 R_0 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_0} \right) < 0$ (figure V.22 b) ;

pour $r > R_e$ le potentiel est $V(r) = -0.1V_0 \frac{R_0}{r} < 0$.

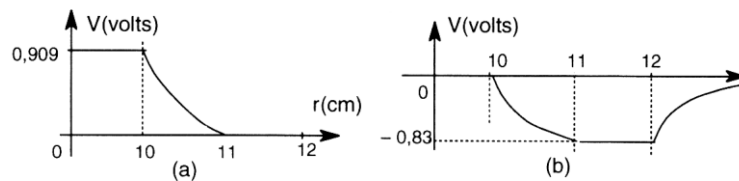


Figure V.22 (échelle quelconque)

N.B. Le potentiel d'une sphère conductrice uniformément chargée se calcule par :

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_S \frac{\sigma dS}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\pi \frac{Q}{4\pi R^2} \frac{2\pi R \sin \theta d\theta}{R} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^2}$$

c'est la valeur en tout point de la sphère et en particulier en son centre.

6. Coefficients d'influence et capacités

Exercice d'application :

On considère deux sphères S_1 et S_2 métalliques centrées respectivement en O_1 et O_2 , de rayons R_1 et R_2 ($R_1 > R_2$) portant les charges Q_1 et Q_2 aux potentiels V_1 et V_2 . On pose $O_1 O_2 = d$ et on suppose $d \gg R_1$ et R_2 .

1 - On relie S_1 et S_2 par un fil fin et conducteur. On néglige le phénomène d'influence entre les sphères. Quelles sont les nouvelles distributions de charges sur ces sphères ainsi que la valeur du champ électrostatique au voisinage de chacune d'elle si $Q_2 = 0$?

AN : $Q_1 = 10^{-9} C, R_1 = 10 \text{ cm}, R_2 = 1 \text{ cm}$.

2 - On supprime le fil et on tient compte de l'influence.

a) Pourquoi peut-on écrire $Q_i = \sum_{j=1}^2 C_{ij} V_j$ avec $i = 1, 2$?

b) En utilisant l'identité de Gauss $\sum_i Q_i V_i' = \sum_i Q_i' V_i$; pour les

conducteurs en équilibre, montrer que $C_{12} = C_{21}$.

c) Calculer pour les deux sphères les quatre coefficients C_{ij} . Examiner le cas $d \rightarrow \infty$.

AN : on donne $R_1 = R_2 = 1 \text{ cm}$, $d = 50 \text{ cm}$.

- On fixe $V_1 = 1000 \text{ V}$, $V_2 = 0 \text{ V}$ calculer Q_1 et Q_2 .

- On fixe $Q_1 = 10^{-8} \text{ C}$, $Q_2 = 10^{-9} \text{ C}$ calculer V_1 et V_2 .

3 - On suppose maintenant que $d = 0$ avec de nouveau $R_1 > R_2$.

a) Pourquoi obtient-on un « condensateur » ?

b) Calculer sa capacité C .

c) On suppose que $R_1 = R_2 + e$ avec $e \ll R_1$ et R_2 . Exprimer C en fonction de e . Comparer ce résultat à la capacité d'un condensateur plan. Généraliser ce résultat.

AN : $R_2 = 1 \text{ cm}$, $e = 0,5 \text{ mm}$.

4 - On considère maintenant deux condensateurs de capacité C' et C'' que l'on associe en série, puis en parallèle.

Déterminer dans chaque cas la capacité du condensateur équivalent à cette association.

AN : $C' = 1 \mu\text{F}$ et $C'' = 2 \mu\text{F}$.

5 - Pour l'air sec considéré comme diélectrique, on donne le potentiel disruptif :

$V_d = 2\,000 + 3\,000 d$ (d en mm et supérieur à 1 mm, $P = 1 \text{ atm}$). En déduire l'épaisseur minimale e et la capacité C

si $S = 10 \text{ cm}^2$ et si on applique une tension de $8\,000 \text{ V}$. Que devient la capacité de ce condensateur si on remplace l'air par du papier paraffiné dont $\epsilon_r = 2,5$ ou du mica dont $\epsilon_r = 8$?

Solution :

1 - Il y a conservation de la charge $Q_1 = Q'_1 + Q'_2$ les sphères étant au même potentiel

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q'_1}{R_1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q'_2}{R_2}$$



FigureV,23

$$\text{d'où : } \frac{Q'_1}{Q'_2} = \frac{R_1}{R_2} \Rightarrow Q'_1 = Q'_2 \frac{R_1}{R_1 + R_2} \quad \text{et} \quad Q'_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

Par ailleurs, l'influence étant négligée, les densités superficielles de charges sont uniformes sur chaque sphère :

$$\sigma_1 = \frac{Q'_1}{4\pi R_1 (R_1 + R_2)} \quad \text{et} \quad \sigma_2 = \frac{Q'_2}{4\pi R_2 (R_1 + R_2)}$$

L'application du théorème de Coulomb donne immédiatement :

$$E_1 = \sigma_1 / \epsilon_0 \quad \text{et} \quad E_2 = \sigma_2 / \epsilon_0, \quad \text{donc} \quad E_1 / E_2 = R_2 / R_1$$

Ces champs sont perpendiculaires aux sphères et sont inversement proportionnels aux rayons de courbure des sphères (pouvoir des pointes).

AN: $Q'_1 = 0,91 \cdot 10^{-9} \text{ C}$, $Q'_2 = 0,91 \cdot 10^{-10} \text{ C}$.

$E_1 = 818 \text{ V.m}^{-1}$ et $E_2 = 8181,8 \text{ V.m}^{-1}$

2 - a) Cette relation est une conséquence du théorème de superposition (page 96) :

	Pot. (S ₁)	Pot. (S ₂)	Charges S ₁	Charges S ₂
Etat 1	V ₁	0	C ₁₁ V ₁	C ₂₁ V ₁
Etat 2	0	V ₂	C ₁₂ V ₂	C ₂₂ V ₂
Superposition	V ₁	V ₂	C ₁₁ V ₁ +C ₁₂ V ₂	C ₂₁ V ₁ +C ₂₂ V ₂

b) Soit pour i = 1 ou 2 :

$$Q_i = C_{i1}V_1 + C_{i2}V_2 \text{ et } Q'_i = C_{i1}V'_1 + C_{i2}V'_2$$

Appliquons l'identité de Gauss :

$$\sum_i Q_i V'_i = C_{11}V_1V'_1 + C_{12}V_2V'_1 + C_{21}V_1V'_2 + C_{22}V_2V'_2$$

$$= \sum_i Q'_i V_i = C_{11}V''_1V_1 + C_{12}V'_2V_1 + C_{21}V'_1V_2 + C_{22}V'_2V_2$$

donc (C₁₂ - C₂₁)(V''₁V₂ - V₁V''₂) = 0 mais (V'_1V'_2 - V₁V''₂) ≠ 0 ce qui entraîne C₁₂ = C₂₁.

c) Si on tient compte du fait que d >> R₁ et R₂, on peut écrire :

$$V_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q_1}{R_1} + \frac{Q_2}{d} \right) \text{ et } V_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q_2}{R_2} + \frac{Q_1}{d} \right)$$

ces deux équations nous donnent sans difficulté :

$$C_{11} = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_1 d^2}{d^2 - R_1 R_2} ; C_{12} = C_{21} = -\frac{R_2}{d} C_{11} ; C_{22} = \frac{R_2}{R_1} C_{11}$$

Si d → ∞ ; C_{ii} → 4πϵ₀R_i (capacité propre d'une sphère) et C_{ij} → 0.

AN : C₁₁ = C₂₂ = 1,11 pF, C₁₂ = C₂₁ = - 2.22.10⁻² pF. On fixe les potentiels ⇒ Q₁ = 1,11.10⁻⁹ C et Q₂ = - 2,22.10⁻¹¹ C. On fixe les charges ⇒ V₁ = 9018 V et V₂ = 1080 V.

3 - a) Si d = 0, (es deux sphères sont concentriques et en influence totale, c'est la définition d'un condensateur.

b) Si on appelle Q la charge de l'armature interne (sphère S₂) et V = V₂ - V₁, la capacité est donnée par Q = CV. Donc pour calculer C, nous devons calculer le champ électrostatique entre les armatures, puis la circulation qui donnera, par identification, le coefficient C.

La symétrie étant sphérique, on utilise le théorème de Gauss avec comme surface de Gauss une sphère Σ comprise entre S₁ et S₂ (figure V.24). Ce calcul simple a été effectué maintes fois :

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \vec{u} \quad (\text{ou } \vec{u} = \frac{\vec{r}}{r})$$

par suite :

$$V_2 - V_1 = \frac{-Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{R_2}^{R_1} \frac{dr}{r^2} = \frac{-Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right)$$

$$\text{d'où par identification : } C = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_1 - R_2}$$

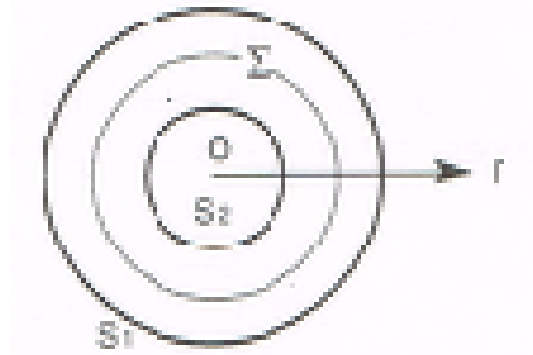


Figure V,24

c) Le calcul est simple : $C = 4\pi\epsilon_0 \frac{(R_2 + e)R_2}{e} \cong 4\pi\epsilon_0 \frac{R_2^2}{e} = \epsilon_0 \frac{S}{e}$ où

S représente la surface des armatures. AN : $C = 22 \text{ pF}$.

Ce résultat est celui du condensateur plan de surface S et d'épaisseur e.

N.B. Ce résultat peut se généraliser à un condensateur de forme quelconque dont les armatures sont très rapprochées (épaisseur constante e). Dans ces conditions, la démarche précédente s'applique encore, et le résultat est :

$C = \epsilon_0 S/e$; S étant l'aire de la surface de Gauss Σ .

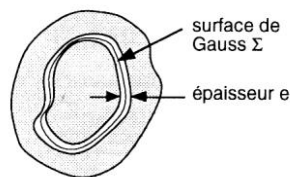


Figure V,25

4 - Association en parallèle :

Les armatures internes sont au même potentiel V_1 et les armatures externes au potentiel V_2 (figure V.26).

$Q' = C'(V_1 - V_2)$ et $Q'' = C''(V_1 - V_2)$

La charge totale est : $Q = Q' + Q'' = (V_1 - V_2)(C' + C'')$ ou $Q = C_{\text{parallèle}}(V_1 - V_2)$

avec $C_{\text{parallèle}} = C' + C'' = 3 \mu\text{F}$.

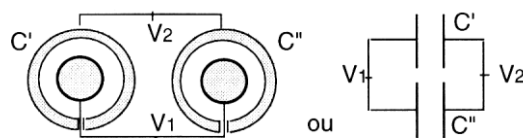


Figure V,26 : association en parallèle

Ce résultat se généralise à n condensateurs : $C_{\text{parallèle}} = \sum_1^n C_i$

Association en série :

Toutes les armatures internes portent la charge $+Q$ et les armatures externes la charge $-Q$ (influence de proche en proche).

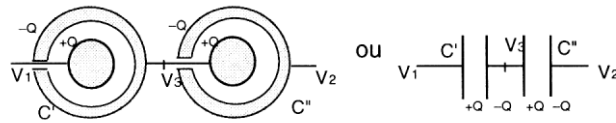


Figure V,27 : association en série

$$V_1 - V_2 = V_1 - V_3 + V_3 - V_2 = Q/C' + Q/C'' = Q(1/C' + 1/C'')$$

$$\text{Ou } V_1 - V_2 = Q/C_{\text{série}} \text{ avec } \frac{1}{C_{\text{série}}} = \frac{1}{C'} + \frac{1}{C''} \Rightarrow C = 0.66 \mu F$$

$$\text{Ce résultat se généralise pour } n \text{ condensateurs : } \frac{1}{C_{\text{série}}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i}$$

5 - Diélectriques

Le potentiel disruptif correspond à une étincelle se formant entre les plaques d'un condensateur à partir d'une certaine épaisseur (le milieu isolant devient conducteur). Pour l'air, si on applique une tension de 8000 V, il y correspond l'épaisseur $d = 2 \text{ mm}$ ($8000 = 2000 + 3000 d$) ce qui donne une capacité de $C = 4,4 \text{ pF}$.

Avec du papier paraffiné : $C = \epsilon_0 \epsilon_r S/e = 11,5 \text{ pF}$: $C_{\text{mica}} = 35,2 \text{ pF}$

Résumé :

Le conducteur est un volume équipotentiel : $V = \text{Cte}$. La répartition des charges est superficielle avec une densité s . À l'extérieur du conducteur et au voisinage de sa surface, le champ électrostatique est perpendiculaire à cette surface et est d'autant plus intense que le rayon de courbure de la surface est plus petit.

Pour un système de conducteurs chargés $\{Q_i\}$ en équilibre, la fonction potentiel V est unique, $\{V_i\}$ étant les valeurs des potentiels sur les conducteurs. Les charges sont des fonctions linéaires et homogènes des potentiels (et réciproquement) :

$$Q_i = \sum_{j \neq i}^n C_{ij} V_j$$

Les coefficients C_{ii} (positifs) sont les capacités, les coefficients C_{ij} (négatifs) sont les coefficients d'influence.

Le condensateur est un ensemble de deux conducteurs en influence totale. Il est caractérisé par sa capacité. L'association en série de plusieurs condensateurs diminue la capacité tandis que l'association en parallèle l'augmente.