Td sur les fonctions

Exercice 1

$f: R \to R, f(x) = x^2 + bx + c$ où b, c sont des réels quelconques non nuls

1. Mettre $f(x)$ sous sa forme canonique.
2. En déduire que f n'est pas surjective.
3. Montrer que le graphe de la fonction admet un axe de symétrie d'équation $x = -\frac{b}{2}$
4. En déduire que f n'est pas injective.
5. Montrer que si $g: R \to \left[c - \frac{b^2}{4}; +\infty\right[, g(x) = f(x)$, alors g est surjective.
6. Montrer que si $h: \left[-\frac{b}{2}; +\infty\right[\to R, h(x) = f(x)$, alors h est injective.
7. En déduire que la fonction $\varphi: \left[-\frac{b}{2}; +\infty\right[\to \left[c - \frac{b^2}{4}\right[, \varphi(x) = f(x)$ est une bijectin et trouver φ^{-1}

Solution

1. $f(x) = (x + \frac{b}{2})^2 + c - \frac{b^2}{4}$
2. Pour tout x dans R $(x + \frac{b}{2})^2 \geq 0$ donc $\underbrace{(x + \frac{b}{2})^2 + c - \frac{b^2}{4}}_{f(x)} \geq c - \frac{b^2}{4} > c - \frac{b^2}{4} - 1$

   Donc pour tout x dans R $f(x) \neq c - \frac{b^2}{4} - 1$ donc f n'est pas surjective.
3. Soit y dans R tel que $\frac{x+y}{2} = -\frac{b}{2}$, donc $x + y = -b$ et donc $y = -b - x$ et on a :

   $$f(-b-x) = \left(-b - x + \frac{b}{2}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4} = \left(-x - \frac{b}{2}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4} = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4} = f(x)$$

   Donc $f(-b-x) = f(x)$ et et la droite $x = \frac{-b}{2}$ et bien un axe de symétrie verticale.
4. $f(-b-x) = f(x)$ et si on choisit $x = 0$, alors $-b - x = -b \neq 0$ et $f(-b) = f(0)$ donc f n'est pas injective.
5. Pour tout $y \geq c - \frac{b^2}{4}$ on a : $g(x) = y$ équivaut à $(x + \frac{b}{2})^2 = y - (c - \frac{b^2}{4})$ et comme $y \geq c - \frac{b^2}{4}$ alors l'équation $(x + \frac{b}{2})^2 = y - (c - \frac{b^2}{4})$ admet au moins une solution donc g est surjective.
6. Soit u, v dans $\left[-\frac{b}{2}; +\infty\right[$, on a :

   $h(u) = h(v)$ équivaut à $(u + \frac{b}{2})^2 = (v + \frac{b}{2})^2$ et qui équivaut à son tour à $u = v$ ou $u = -v$ mais si $u = -v$ alors u sera dans l'intervalle $\left]-\infty; -\frac{b}{2}\right[$ ce qui est contraire à l'hypothèse donc il ne reste que la solution $u = v$ et h est donc injective.
7. Soit y dans $\left[c - \frac{b^2}{4}; +\infty\right[$, et considérons l'équation $y = \varphi(x)$ d'inconnue x dans $\left[-\frac{b}{2}; +\infty\right[$:

   $y = \varphi(x)$ équivaut à $x^2 + bx + c - y = 0$; calculons le discriminant Δ :

   $\Delta = b^2 - 4c + 4y$ comme $y \geq c - \frac{b^2}{4}$ donc $\Delta \geq 0$ donc l'équation admet au moins une solution donc l'applicatin est $\boldsymbol{\varphi}$ **est surjective** ; calculons les deux solutions possibles :

   $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2}$; $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2}$ mais $x_1 \notin \left[-\frac{b}{2}; +\infty\right[$, donc l'équation n'admet qu'une seule solution, donc $\boldsymbol{\varphi}$ **est injective**. Finalement elle est bien bijective et on a :

$$\varphi^{-1}: \left[c - \frac{b^2}{4}; +\infty\right[\to \left[-\frac{b}{2}; +\infty\right[, \varphi^{-1}(x) = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4c - x}}{2}$$

Exercice 2

$g: \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ \ g(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$.

1. Montrer que pour tous x dans **R** on a : $-1 \leq g(x) < 1$
2. Montrer que g n'est ni injective ni surjective
3. Dresser le tableau des variations de cette application.
4. En déduire deux intervalles A , B de façon que l'application $f: A \to B, f(x) = g(x)$, soit une bijection, et déterminer son application réciproque f^{-1}.

Solution :

1. Pour tout x on a : $x^2 - 1 < x^2 + 1$ et comme $x^2 + 1 > 0$ alors $\frac{x^2-1}{x^2+1} < 1$, ceci d'une part ;
   D'autre part,
   $-1 \leq g(x) \Leftrightarrow \left(-1 \leq \frac{x^2-1}{x^2+1}\right) \Leftrightarrow (-x^2 - 1 \leq x^2 - 1) \Leftrightarrow (-x^2 \leq x^2)$
   Comme cette dernière inégalité est vraie pour tout x alors $-1 \leq g(x)$ est vraie aussi pour tout x.
2. $g(1) = g(-1)$ et $1 \neq -1$ donc g n'est pas injective
   Vu que $g(x) < 1$ donc pour tout x dans R $g(x) \neq 2$ donc 2 n'a pas d'antécédent et g n'est pas surjective.
3. $D_g = R$
   $$g'(x) = \frac{2x(x^2+1) - 2x(x^2-1)}{(x^2+1)^2} = \frac{4x}{(x^2+1)^2}$$
   Le dénominateur est trictement positif
   Donc $g'(x) > 0$ lorsque $x > 0$; $g'(x)$ <0 lorsque $x < 0$; et $g'(x) = 0$ lorsque $x = 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'x)$		-	0	+	
$g(x)$	+1	↘	-1	↗	+1

Si on choisit $A = [0; +\infty[$, alors la fonction f est strictement croissante sur A donc elle est injective.
Si on prend $= [-1; 1[$, alors tout y dans B admet un antécédent, en effet :

$$[y = f(x)] \Leftrightarrow [y = g(x)] \Leftrightarrow \left[y = \frac{x^2-1}{x^2+1}\right] \Leftrightarrow [(y-1)x^2 = -y - 1] \overset{y\neq 1}{\Leftrightarrow} [x^2 = \frac{1+y}{1-y}]$$

Et vu que $-1 \leq y < 1$ donc $0 \leq 1 + y < 2$ et $0 < 1 - y \leq 2$, donc $\frac{1+y}{1-y} \geq 0$ donc l'équation $x^2 = \frac{1+y}{1-y}$ admet pour solution $x = \pm\sqrt{\frac{1+y}{1-y}}$ et la fonction f devient surjective.

Ainsi la fonction $f: A \to B$ est une bijection et on a $f^{-1}: B \to A, f^{-1}(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$.

Exercice 3

$f: [1; +\infty[\to [0; +\infty[, f(x) = \sqrt{x - 1}$

Montrer que cette application est une bijection et déterminer f^{-1}

Solution

Pour tout y dans $[0;+\infty[$ on a :

$$[y=f(x)] \Leftrightarrow (y=\sqrt{x-1}) \Longrightarrow (x-1=y^2) \Longrightarrow (x=1+y^2)$$

Donc l'équation $y=f(x)$ admet une et une seule solution, donc f est bijective, elle admet donc une fonction réciproque $f^{-1}:[0;+\infty[\longrightarrow [1;+\infty[, f^{-1}(x)=1+x^2$

Exercice 4

1. Déterminer deux fonctions u, v de façon que $h=vou$ dans chacun des cas suivants :
   a. $h_1(x)=\sqrt{x+3}$ b. $h_2(x)=\frac{x^2-1}{x^2+1}$ c. $h_3(x)=e^{x-1}$
2. Calculer h_2oh_1 et h_3oh_2

Solution :

a. Pour calculer $h_1(x)$ on calcule d'abord $x+3$ puis on prend la racine du résultat, on prend donc $u: R \to R, u(x)=x+3$ et $v: R \to R, v(x)= \sqrt{x}$ et on a :
$$(vou)(x)=v[u(x)]=v(x+3)=\sqrt{x+3}=h_1(x)$$
b. $u(x)=x^2,\ v(x)=\frac{x-1}{x+1}$ et on a :
$$(vou)(x)=v[u(x)]=v(x^2)=\frac{x^2-1}{x^2+1}=h_2(x)$$
c. $u(x)=x-1, v(x)=e^x$ et on a :
$$(vou)(x)=v[u(x)]=v(x-1)=e^{x-1}=h_3(x)$$

Exercice 5

Soient $f:E \to F$ et $g:F \to G$ et $h:G \longrightarrow H$ trois applications. Montrer que :

1. Si gof est injective alors f est injective
2. Si gof est surjective alors g est surjective
3. Si gof et hog sont bijective alors f, g, h sont toutes bijectives.
4. Si gof est injective et f surjective alors g est injective
5. Si gof est surjective et g injective alors f est surjective

Solution

1. Si $f(a)=f(b)$ alors $g[f(a)]=g[f(b)]$ car g est une application, donc $(gof)(a)=(gof)(b)$ par définition, or gof est injective donc $a=b$. Donc f est injective
2. Soit z dans G, $gof:E \to G$ est surjective, donc il existe un x dans E tel que $(gof)(x)=z$, Donc $g[f(x)]=z$, mais $f(x) \in F$, et si on pose $f(x)=y$ alors $g(y)=z$ et donc g est surjective.
3. Si gof est bijective alors f est injective car gof est aussi injective, et g est surjective car gof est aussi surjective (d'après les questions précédentes), ceci d'une part ;
   D'autre part hog est bijective donc étant injective, alors g est injecitve, et étant surjective alors h est surjective.
   On vient de montrer que g est surjective et injective donc g est bijective ; donc g^{-1} existe et est aussi bijective , et comme la composée de deux bijection est une bijection alors la composée $g^{-1}o(gof)$ est bijective mais $g^{-1}o(gof)=(g^{-1}og)of$ or $g^{-1}og=Id_F$ et $Id_Fof=f$ donc f est une bijection.
   Pour les meme raisons $(hog)og^{-1}=ho(gog^{-1})=hoId_F=h$ et $(hog)og^{-1}$ est la composée de deux bijection , hog et g^{-1}, donc h est une bijection.

4. Soient a, b dans F tels que $g(a) = g(b)$.
   a et b étant dans F et f est surjective, alors a et b possède des antécédents dans E, autrement dit il existe α, β dans E tels que $a = f(\alpha)$ et $b = f(\beta)$ et $g(a) = g(b)$ devient $g[f(\alpha)] = g[f(\beta)]$ c'est-à-dire $gof(\alpha) = gof(\beta)$ or gof est injective dnc $\alpha = \beta$ et donc $f(\alpha) = f(\beta)$ donc $a = b$ et ainsi g est innjective.
5. Soit y dans F, alors g(y) est dans G, or gof est surjective donc il existe un x dans E tel que gof(x)=g(y) ou bien g[f(x)]=g(y) et comme g est injective alors f(x)=y donc y admet un antécédent x dans E donc f est surjective.

Exercice 6

$f: R \to R, f(x) = x^2 - 3x, A =]-5; 3], \quad B = [-2; 4]$

1. Dresser le tableau de variation de cette application
2. Calculer $f(A), f^{-1}(B)$ (décomposer les intervalles et utiliser le théorème sur les images directes et réciproques)

Solution

1. $f'(x) = 2x - 3$ donc $f'(x) > 0$ quand $x > \frac{3}{2}$; $f'(x) < 0$ quand $x < \frac{3}{2}$; $f'(x)$ =0 quand $x = \frac{3}{2}$

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{9}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

2. <u>Calcul de f(A)</u> :
   $f(A) = f\left(\left[-5; \frac{3}{2}\right] \cup \left[\frac{3}{2}; 3\right]\right) = f(\left[-5; \frac{3}{2}\right]) \cup f(\left[\frac{3}{2}; 3\right])$
   Dans l'intervalle $[-5; 1]$ la fonction est continue strictement décroissante donc
   $f([-5\,; \frac{3}{2}]) = \left[f\left(\frac{3}{2}\right); f(-5)\right] = [-2.25; 40]$
   De meme $f([\frac{3}{2}\,; 3]) = \left[f\left(\frac{3}{2}\right); f(3)\right] = [-2.25; 0]$
   D'où $f(A) = [-2.25; 40] \cup [-2.25; 3] = [-2.25; 40]$
   <u>Calcul de $f^{-1}(B)$</u> :
   $x \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow f(x) \in B \Leftrightarrow (-2 \le x^2 - 3x \le 4) \Leftrightarrow (x^2 - 3x \ge -2$ et $x^2 - 3x \le 4)$
   - $(x^2 - 3x \ge -2) \Leftrightarrow (x^2 - 3x + 2 \ge 0) \Leftrightarrow (x \in]-\infty; 1] \cup [2; +\infty[)$
   - $(x^2 - 3x \le 4) \Leftrightarrow (x^2 - 3x - 4 \le 0) \Leftrightarrow x \in [-1; 4]$

   Donc $x \in f^{-1}(B)$ si et seulement si $x \in [-1; 1] \cup [2; 4]$ d'où $f^{-1}(B) = [-1; 1] \cup [2; 4]$.

Exercice 7

$E: R \to R, E(x) = [x]$

La partie entière $[x]$ de x est l'entier relatif n tel que $n \le x < n + 1$

1. Trouver $f(R)$
2. Etudier les propriétés de E (injective ?...)

Solution :

1. $y \in f(R)$ veut dire qu'il existe un réel x dans R tel que $y = [x]$, comme la partie entière est un entier relatif donc y doit etre un entier relatif ; donc $f(R) \subset Z$.
   Réciproquement si on y est un entier relatif alors $[y] = y$, donc y est dans f(R) et ainsi $f(R) = Z$
2. $0 \leq 0.5 < 1$ donc $[0.5 = 0]$; $0 \leq 0.3 < 1$ donc $[0.5 = 0]$; ceci suffit pour dire que la fonction partie entière n'est pas injective.
   Pour la surjectivité, on a vu que pour tout x dans R, $0.1 \neq f(x)$, donc f n'est pas surjective.

Exercice 8

1. $f: E \longrightarrow F$ une application, B et B' sont deux sous-ensembles de F.
   a. Montrer que $f^{-1}\left(\overline{B'}^F\right) = \overline{f^{-1}(B')}^E$
   b. Montrer que $f^{-1}(B - B') = f^{-1}(B) - f^{-1}(B')$
2. Donner un exemple de deux sous-ensemble I, J de F, avec $J \subset I$, et d'une application $f: R \longrightarrow R$ tels que $f(I - J) \neq f(I) - f(J)$
3. Soit A une partie de E.
   a. Montrer que si f est injective alors $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$. Est-ce que la réciproque est vraie.
   b. Montrer que si f est surjective alors $\overline{f(A)} \subset f(\bar{A})$. Etudier la réciproque.
   c. En déduire que si f est bijective alors $f(\bar{A}) = \overline{f(A)}$.

Solution

1.

1a. $x \in f^{-1}\left(\overline{B'}^F\right) \Leftrightarrow f(x) \in \overline{B'}^F \Leftrightarrow f(x) \notin B' \Leftrightarrow x \notin f^{-1}(B') \Leftrightarrow x \in \overline{f^{-1}(B')}^E$

1b. $x \in f^{-1}(B - B') \Leftrightarrow f(x) \in B - B' \Leftrightarrow (f(x) \in B et\, f(x) \notin B')$

$\Leftrightarrow [x \in f^{-1}(B)$ et $x \notin f^{-1}(B')]$

$\Leftrightarrow [x \in f^{-1}(B) - f^{-1}(B')]$

On peut le voir autrement en remarquant que $B - B' = B \cap \overline{B}'^F$ et en appliquant le théorème sur les image réciproque :

$$f^{-1}(B - B') = f^{-1}\left(B \cap \overline{B'}^F\right) = f^{-1}(B) \cap f^{-1}\left(\overline{B'}^F\right) \overset{1a.}{=} f^{-1}(B) \cap \overline{f^{-1}(B')}^E$$
$$= f^{-1}(B) - f^{-1}(B')$$

2. $I = [0; 2] \cup \{3\}$; $J = [0; 2]$; $f: R \to R, f(x) = x^2$
   J est inclus dans I, $I - J = \{3\}$, $f(I) = [0; 4] = f[J)$, $f(I - J) = \{9\}$
   $f(I) - f(J) = \emptyset \neq \{9\} = f(I - J)$
   <u>On peut prendre un autre exemple :</u>
   $f: R \to R, x \to sinx,$
   $I = [0; \pi]$ $J = [\frac{\pi}{2}; \pi]$
   $J \subset I,$ $I - J = \left[0; \frac{\pi}{2}\right[$
   $f(I) = [0; 1] = f(J)$ $f(I - J) = [0; 1[\neq f(I) - f(J) = \emptyset$
   <u>et un a autre exemple</u> :
   $f(x) = |x|,$ $I = [-2; 3]$ $J = [-2; 1]$
   $J \subset I,$ $I - J =]1; 3]$ $f(I) = [0; 3]$ $f(J) = [0; 2]$
   $f(I) - f(J) =]2; 3] \neq f(I - J) =]1; 3]$
   <u>Exercice</u> : trouver un exemple en utilisant la fonction partie entière

3. a. Soit <u>y dans $f(\bar{A})$</u> ; il existe un x dans $\bar{A}$ tel que $y = f(x)$. il faut montrer que y n'appartient pas à $f(A)$, pour cela supposons par l'absurde que y appartient à $f(A)$, alors il existe un x' dans A tel que $y = f(x')$, donc $f(x) = f(x')$ et comme la fonction est injective alors $x = x'$ donc x est aussi dans A or, x est dans $\bar{A}$, ce qui est impossible à avoir, donc l'hypothèse que y est dans A est fausse, donc <u>y est dans $\overline{f(A)}$</u>, donc $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$
   <u>Voyons si la réciproque est vraie</u> :
   Supposons pour cela que pour tout A dans E, $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$ et essayons de voir si f est injective : soit x et x' dans E tel que $x \neq x'$
   $x \neq x'$ implique $x' \in \overline{\{x\}}$ donc $f(x') \in f(\overline{\{x\}})$ or par hypothèse $f(\overline{\{x\}}) \subset \overline{f(\{x\}}$ donc $f(x') \in \overline{f(\{x\})}$ d'où $f(x') \notin f(\{x\})$ c'est-à-dire $f(x') \neq f(x)$;
   on a prouver que $x \neq x'$ implique $(x') \neq f(x)$ et si on prend la contraposée on aura $f(x) = f(x')$ implique $x = x'$ donc f est injective. On a donc une équivalence entre f est injective et $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$ pour tout A dans E.
   b. Supposons que f est surjective et montrons que pour tout A dans E $\overline{f(A)} \subset f(\bar{A})$:
      Soit <u>y dans $\overline{f(A)}$</u> alors $y \notin f(A)$, alors pour tout x dans A $y \neq f(x)$, or f est surjective, donc il existe un x' dans E tel que $y = f(x)$, mais comme x' ne peut etre dans A alors x' est dans $\bar{A}$, et donc $f(x')$ est dans $f(\bar{A})$, or $f(x') = y$, donc <u>$y \in f(\bar{A})$.</u>
      Réciproquement supposons que pour tout A dans E on ait $\overline{f(A)} \subset f(\bar{A})$, et essayons de voir si f est surjective :
      Supposons par l'absurde que f ne soit pas surjective, alors il existe un élément y dans F tel que pour tout x dans E $y \neq f(x)$, ceci veut dire que $y \in f(E)$, donc $y \in \overline{f(E)}$ or $\overline{f(E)} \subset f(\bar{E})$, donc $y \in f(\bar{E})$ or $\bar{E} = \emptyset$ et $f(\emptyset) = \emptyset$ donc $y \in \emptyset$ ce qui est impossible. Donc un tel élément y n'existe pas, donc tout les éléments de F possèdent des antécédent, ce qui veut dire que f est surjective.
      Ainsi on a bien une équivalence entre la surjectivité et le fait que pour tout A dans $\overline{f(A)} \subset f(\bar{A})$.

Exercice 9

Soit f une application $X \to Y$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

a. f est injective
b. pour chaque sous-ensemble A de X , $f^{-1}(f(A)) = A$
c. pour chaque couple de sous-ensemble A, B de X, $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$

Solution

On montre que a.$\Longrightarrow b. \Longrightarrow c. \Longrightarrow a.$

<u>a.$\Longrightarrow b.$</u> :

Soit A inclus dans X et x dans $f^{-1}(f(A))$:

$$x \in f^{-1}(f(A)) \Leftrightarrow [f(x) \in f(A)] \Leftrightarrow [\exists x' \in A: f(x') = f(x)] \overbrace{\underbrace{\Longrightarrow}_{injective}}^{f} (x = x') \Longrightarrow (x \in A)$$

Donc $f^{-1}(f(A))$ est inclus dans A

Réciproquement, soit x dans A, donc $f(x)$ est dans $f(A)$, donc par définition de l'image réciproque de $f(A)$, x est dans $f^{-1}(f(A))$. Donc sans qu'on est besoin de l'injectivité $A \subset f^{-1}(f(A))$. Ainsi, $f^{-1}(f(A)) = A$.

<u>b.$\Longrightarrow c.$</u>

On a vu au cours que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$; reste à montrer que: $f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$

Soit $\underline{a \in f(A) \cap f(B)}$:

$a \in f(A) \cap f(B) \Leftrightarrow [a \in f(A)$ et $a \in f(B)] \Leftrightarrow [\exists x \in A{:}\, f(x) = a$ et $\exists x' \in B{:}\, f(x') = a]$

$$\Longrightarrow (f(x) = f(x') = a) \Longrightarrow [f^{-1}(f(\{x\})) = f^{-1}(f(\{x'\})]$$

Or par hypothèse pour tout ensemble A dans X $f^{-1}(f(A))$, donc si on prend A={x} alors $f^{-1}(f(\{x\})) = x$ et $f^{-1}(f(\{x'\})) = x'$ donc $x = x'$ donc $x \in A \cap B$ et donc $f(x) \in f(A \cap B)$, or $f(x) = a$ donc $\underline{a \in f(A \cap B)}$. Donc $f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$.

$\underline{c. \Longrightarrow a.}$

Soit x, x'deux elements de X tels que $f(x) = f(x')$:

$f(x) = f(x') \Leftrightarrow \{f(x)\} = \{f(x')\} \Longrightarrow \{f(x)\} \cap \{f(x')\} \neq \emptyset \Longrightarrow f(\{x\}) \cap f(\{x'\}) \neq \emptyset$

Or on sat par hypothèse (c.) que $f(\{x\}) \cap f(\{x'\}) = f(\{x\} \cap \{x'\})$ donc $f(\{x\} \cap \{x'\}) \neq \emptyset$, donc $\{x\} \cap \{x'\} \neq \emptyset$ donc $\{x\} = \{x'\}$ donc $x = x'$

On a :

$[(a \Longrightarrow b) \wedge (b \Longrightarrow c)]$ donc $(a \Longrightarrow c)$ or $(c \Longrightarrow a)$ donc $(a \Leftrightarrow c)$

$[(b \Longrightarrow c) \wedge (c \Longrightarrow a)]$ donc $(b \Longrightarrow a)$ or $(a \Longrightarrow b)$ donc $(a \Leftrightarrow b)$

Donc les trois propositions sont bien équivalentes.

Exercice 10

Etudier l'injectivité et la surjectivité des fonctions suivantes

1. $f{:}\, N \times N \to N, f(x,y) = x + y$
2. $g{:}\, N \times N \to N, g(x,y) = xy$
3. $j{:}\, R \times R \to R^*, j(x,y) = xy$
4. $d{:}\, Z \times Z^* \to Q, d(x,y) = \frac{x}{y}$
5. $h{:}\, \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ \ h(x,y) = xy + 1$
6. $i{:}\, R \times R \to R \times R,\ \ g(x,y) = (y,x)$
7. $h : \mathrm{Z} \to N \times Z, h(x) = (|x|, x)$

Solution :

1. $f(1,2) = f(0,3) = 3$ et $(1,2) \neq (0,3)$ donc f n'est pas injective
   Pour tous n dans N, on a $n = 0 + n = 0$ or $n = f(0,n)$ donc f est surjective
2. $g(2,3) = g(3,2) = 6$ et $(2,3) \neq (3,2)$ donc g n'est pas injective
   Pour tout entier n on a $1 \times n = n$ or $1 \times n = g(1,n)$ donc $n = g(1,n)$ donc g est surjective
6. $i(x,y) = i(x',y') \Leftrightarrow (y,x) = (y',x') \Leftrightarrow [(y = y')$ et $(x = x')]$ donc $(x,y) = (x',y')$ et i est donc injective.
   Pour tout couple (a,b) dans $R \times R$, on a $(a,b) = i(b,a)$ donc i est surjective.
7. $(1,1) = (|1|, 1) = (|-1|, 1)$ c'est-à-dire $h(-1) = h(1)$ et $-1 \neq 1$ donc h n'est pas injective.
   Si on considère le couple (1,-2) de $N \times Z$, alors pour tout x dans Z, $(|x|, x) \neq (1, -2)$, c'est-à-dire pour tout x dans Z $(1, -2) \neq h(x)$ donc h n'est pas surjective.

Exercice supplémentaries

1.Soit $f : E \to F$ une fonction. Déterminer si à partir des quatre propriétés suivantes on peut déduire que :

- f est injective
- f est surjective

- f est bijective
- on ne peut rien dire
  1. $\forall y \in F: f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset$
  2. $\forall y \in F: f^{-1}(\{y\})$ contient au plus un élément
  3. $\forall y \in f(E): f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset$
  4. $\forall y \in f(E): f^{-1}(\{y\})$ contient au plus un élément

2. Déterminer quelles sont parmi les fonctions suivantes de $\boldsymbol{Z} \times \boldsymbol{Z}$ dans $\boldsymbol{Z}$ celles qui sont injectives et celles qui sont surjectives

a. $f(n, m) = 3n - m$ c. $f(n, m) = n + m + 2$

b. $f(n, m) = m^2 - n^2$ d. $f(n, m) = |m| - |n|$

3. a. Montrer que toute fonction réelle d'une variable réelle strictement monotone est injective.

b. Donner un exemple d'une fonction de $\boldsymbol{R}$ dans $\boldsymbol{R}$ qui soit croissante et non injective

4. Soit *f* une fonction de ***R*** dans ***R*** vérifiant $f(x) = x^2$. trouver les ensembles suivatns :

a. $f^{-1}(\{0\})$ c. $f^{-1}(\{x : x \geq 3\})$

b. $f^{-1}(\{x : 0 < x < 1\})$ d. $f^{-1}(\{-1\})$

5. $g(x) = [x]$. Déterminer les ensembles suivants :

a. $g^{-1}(\{1\})$ c. $g^{-1}(\{x : 0 < x < 1\})$

b. b. $g^{-1}(\{-1, 0, 2\})$ d. $g^{-1}(\{x : 0 < x \leq 1\})$

6. Soit $f : A \to B$ une **application** ou *A* et *B* sont deux ensembles finis ayant même cardinal.
Montrer que *f* est injective si et seulement si *f* est surjective.