Université de Skikda *28/01/2018*

Faculté de technologie

Département de technologie, 2ème ST

*Module: **Maths 3***

Examen

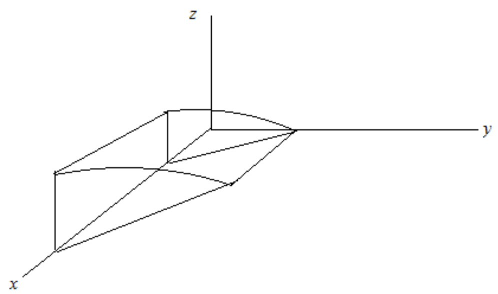
Exercice n°1 8points

1) Calculer les intégrales suivantes

$$I = \int\int xy\, dxdy \text{ avec } 1 \leq x \leq 2 \ et\ x \leq y \leq x\sqrt{3}$$

$$J = \int\int \frac{1}{(x+y)^2}\, dxdy \text{ avec } 3 \leq x \leq 4 \ et\ 1 \leq y \leq 2$$

2) Calculer l'intégrale triple de $f(x, y, z) = z$ sur le domaine **V** situé dans le 1/8ème d'espace définie par $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ et limité par les plans $y = 0$, $z = 0$, $x + y = 2$, $2y + x = 6$ et le cylindre $y^2 + z^2 = 4$



Exercice n°2 8 points

1) Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$(1 + x^2)y' + 4xy = 0 \quad \text{avec} \quad y(4) = \frac{1}{17}$$

2) Résoudre l'équation différentielle de Bernoulli suivante :

$$2x\frac{dy}{dx} - y = \frac{-x}{y} \quad \text{avec} \quad y(1) = 2$$

Exercice n°3 4 points

Etudier la nature des séries suivantes :

$$\sum_{n\geq 1} \frac{2^n n!}{n^n} \qquad \sum_{n\geq 1} \frac{\sin\theta}{\sqrt{n(n^3+1)}} \text{ avec } \theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$$

التمرين 1 : 8 نقاط

1) احسب التكاملات التالية :

$$I = \iint xy \, dx\, dy \ : \ 1 \leq x \leq 2 \ , \ x \leq y \leq x\sqrt{3}$$

$$J = \iint \frac{1}{(x+y)^2} \, dx\, dy \ : \ 3 \leq x \leq 4 \ , \ 1 \leq y \leq 2 .$$

2) احسب التكامل الثلاثي للدالة $f(x,y,z) = z$ على المجال V الموجود في ثمن الفضاء المعرف ب : $x \geq 0$ ، $y \geq 0$ ، $z \geq 0$ والمحدود بالأسطح $y = 0$ ، $z = 0$ ، $x + y = 2$ ، $2y + x = 6$ والأسطوانة $y^2 + z^2 = 4$
(أعطي الشكل)

التمرين 2 : 8 نقاط .

1) حل المعادلة التفاضلية التالية :

$$(1+x^2)y' + 4xy = 0 \ : \ y(4) = \frac{1}{17}$$

2) حل المعادلة التفاضلية لبرنولي التالية

$$2x\frac{dy}{dx} - y = \frac{-x}{y} \ : \ y(1) = 2 .$$

التمرين 3 : 4 نقاط .

1 ادرس طبيعة السلاسل التالية

$$\sum_{n \geq 1} \frac{2^n n!}{n^n} \ , \ \sum_{n \geq 1} \frac{\sin\theta}{\sqrt{n(n^3+1)}} \text{ حيث } \theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$$

2 ^{ème} année ST
Correction de l'Examen Maths3

Exercice 1 (8 points)

1/ $I = \int\int xydxdy$ avec $1 \leq x \leq 2$ et $x \leq y \leq x\sqrt{3}$

$I = \int_1^2 \underbrace{\int_x^{x\sqrt{3}} xydydx}_{(*)}$

$(*) = \int_x^{x\sqrt{3}} xydy = x\frac{y^2}{2}\Big]_x^{x\sqrt{3}} = \frac{1}{2}x\left(3x^2 - x^2\right) = x^3$ **(1)**

$I = \int_1^2 x^3dx = \frac{x^4}{4}\Big]_1^2 = \frac{16}{4} - \frac{1}{4}$ **(0,75)**

$\boxed{I = \frac{15}{4}}$ **(0,25)**

$J = \int\int \frac{1}{(x+y)^2}dxdy$ avec $3 \leq x \leq 4$ et $1 \leq y \leq 2$

$J = \int_1^2 \underbrace{\int_3^4 \frac{1}{(x+y)^2}dxdy}_{(*)}$

$(*) = \int_3^4 \frac{1}{(x+y)^2}dx = \frac{-1}{x+y}\Big]_3^4 = \frac{-1}{4+y} + \frac{1}{3+y} = \frac{1}{3+y} - \frac{1}{4+y}$ **(1)**

$J = \int_1^2 \left(\frac{1}{3+y} - \frac{1}{4+y}\right)dy = \ln|3+y| - \ln|4+y|\Big]_1^2$ **(0,5)**

$\boxed{J = 2\ln 5 - \ln 6 - \ln 4}$ **(0,5)**

2/ $f(x,y,z) = z$ on va calculer $\int\int\int zdxdydz$, on cherche les bornes de l'intégral

* on a

$\left.\begin{array}{r} x+y=2 \Longrightarrow x = 2-y \\ 2y+x=6 \Longrightarrow x = 6-2y \end{array}\right\} \Longrightarrow 2-y \leq x \leq 6-2y$ (puisque pour $y \geq 0$ on a $2-y$ et toujours positive)

* on a aussi $y^2 + z^2 = 4 \Longrightarrow z = -\sqrt{4-y^2}$ ou $z = \sqrt{4-y^2}$

puisque le domaine est limité pa le cylindre d'équation $y^2 + z^2 = 4$, et $z \geq 0$ on trouve

$0 \leq z \leq \sqrt{4-y^2}$

* dans $y^2 + z^2 = 4$ si $z = 0$ on trouve $y = 2$ d'où on a $0 \leq y \leq 2$

$Alors I = \int_0^2 \underbrace{\int_0^{\sqrt{4-y^2}} \underbrace{\int_{2-y}^{6-2y} z dx}_{(*)} dz}_{(**)} dy$ **(0,5)** les bornes de x **(0,5)** les bornes de y **(0,5)** les bornes de z

$(*) = \int_{2-y}^{6-2y} z dx = zx\rfloor_{2-y}^{6-2y} = z(6-2y-2+y) = z(4-y)$ **(0,75)**

$(**) = \int_0^{\sqrt{4-y^2}} z(4-y)dz = (4-y)\dfrac{z^2}{2}\Big]_0^{\sqrt{4-y^2}} = (4-y)\dfrac{(4-y^2)}{2}$ **(0,5)**

$= \dfrac{1}{2}\left(y^3-4y^2-4y+16\right) = \frac{1}{2}y^3 - 2y^2 - 2y + 8$

$I = \int_0^2 \left(\dfrac{1}{2}y^3 - 2y^2 - 2y + 8\right) dy = \dfrac{1}{8}y^4 - \dfrac{2}{3}y^3 - y^2 + 8y\Big]_0^2$ **(1)**

$\boxed{I = \dfrac{26}{3}}$ **(0,25)**

<u>Exercice 2</u> (8 points)

1/ $(1+x^2)y' + 4xy = 0$ avec $y(4) = \dfrac{1}{17}$

$(1+x^2)y' + 4xy = 0 \Longrightarrow (1+x^2)\dfrac{dy}{dx} = -4xy$

$\Longrightarrow \dfrac{dy}{y} = \dfrac{-4x}{1+x^2}dx \Longrightarrow \dfrac{dy}{y} = -2\dfrac{2x}{1+x^2}dx$

$\Longrightarrow \ln|y| = -2\ln\left(1+x^2\right) + \ln c \Longrightarrow \ln|y| = \ln\dfrac{c}{\left(1+x^2\right)^2}$ **(2)** la méthode

$\Longrightarrow$ la solution générale est $\boxed{y = \dfrac{c}{\left(1+x^2\right)^2}}$ **(0,5)**

on a $y(4) = \dfrac{1}{17} \Longrightarrow y(4) = \dfrac{c}{\left(1+16\right)^2} = \dfrac{c}{\left(17\right)^2} = \dfrac{1}{17} \Longrightarrow \boxed{c = 17}$ **(0,25)**

d'où la solution particulière est $\boxed{y = \dfrac{17}{\left(1+x^2\right)^2}}$ **(0,25)**

2/ $2x\dfrac{dy}{dx} - y = \dfrac{-x}{y}$ avec $y(1) = 2$ équation de Bernoulli

$\Longrightarrow \dfrac{dy}{dx} - \dfrac{y}{2x} = \dfrac{-1}{2y} = \dfrac{-1}{2}y^{-1}$

on divise l'équation par $y^{-1} \Longrightarrow y\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{y^2}{2x} = \dfrac{-1}{2}$ **(0,25)**

on pose $z = y^2$ **(0,25)**

$\Longrightarrow \dfrac{dz}{dx} = 2y\dfrac{dy}{dx}$ **(0,25)**

l'équation devient $\dfrac{1}{2}\dfrac{dz}{dx} - \dfrac{1}{2x}z = \dfrac{-1}{2} \Longrightarrow$ l'équation linéaire

$\dfrac{dz}{dx} - \dfrac{1}{x}z = -1$ **(0,25)**

on pose $z = uv$ **(0,25)** $\Longrightarrow \dfrac{dz}{dx} = u\dfrac{dv}{dx} + v\dfrac{du}{dx}$ **(0,25)** l'équation linéaire devient $u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} - \frac{1}{x}uv = -1$

$\Longrightarrow u\underbrace{\left(\frac{dv}{dx} - \frac{1}{x}v\right)}_{=0} + v\frac{du}{dx} = -1$ **(0,5)**

on a $\frac{dv}{dx} - \frac{1}{x}v = 0 \Longrightarrow \frac{dv}{dx} = \frac{1}{x}v \Longrightarrow \frac{dv}{v} = \frac{dx}{x} \Longrightarrow \ln|v| = \ln|x|$ **(0,5)**

$\Longrightarrow \boxed{v = x}$ **(0,25)**

on a aussi $v\frac{du}{dx} = -1$ on remplace v par x, on trouve $x\frac{du}{dx} = -1$

$\Longrightarrow du = -\frac{dx}{x}$ **(0,25)** $\Longrightarrow \boxed{u = -\ln|x| + c}$ **(0,5)**

$\Longrightarrow \boxed{z = uv = x(-\ln|x| + c)}$ **(0,5)**

puisque $z = y^2 \Longrightarrow y = \sqrt{z} \Longrightarrow$ la solution générale est

$\boxed{y = \sqrt{x(-\ln|x| + c)}}$ **(0,5)**

on a $y(1) = 2 \Longrightarrow y(1) = \sqrt{c} = 2 \Longrightarrow \boxed{c = 4}$ **(0,25)**

d'où la solution particulière est

$\boxed{y = \sqrt{x(-\ln|x| + 4)}}$ **(0,25)**

Exercice 3 (4 points)

1/ $\sum_{n\geq 1} \frac{2^n n!}{n^n}$ on utilise D'Alembert

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{2^n n!}{n^n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{2^n n!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2n^n}{(n+1)^n}$$

$= \lim_{n\to+\infty} 2\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{2}{e} < 1 \Longrightarrow$la série converge **(2)**

2/ $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin\theta}{\sqrt{n(n^3+1)}}$ avec $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ on utilise Riemann pour $\alpha = 2$

$\lim n^\alpha u_n = \lim n^2 \frac{\sin\theta}{\sqrt{n(n^3+1)}} = \lim n^2 \frac{\sin\theta}{n^2} = \sin\theta$, puisque $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

$\Longrightarrow \sin\theta \in]0, 1[$ donc on a

$\left.\begin{array}{c} \alpha = 2 > 1 \\ l = \sin\theta \neq \infty \end{array}\right\} \Longrightarrow$d'après Riemann la série converge **(2)**

Remarques : D'autres méthodes,

Exercice 2:

1/ $(1+x^2)y' + 4xy = 0$ avec $y(4) = \frac{1}{17}$

équation linéaire $\frac{dy}{dx} + \frac{4xy}{(1+x^2)} = 0$ on pose $y = uv$

$\Longrightarrow \frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$, l'équation devient $u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} + \frac{4x}{(1+x^2)}uv = 0$

$$\Longrightarrow u\underbrace{\left(\frac{dv}{dx}+\frac{4x}{(1+x^2)}v\right)}_{=0}+v\frac{du}{dx}=0$$

$$\frac{dv}{dx}+\frac{4x}{(1+x^2)}v=0\Longrightarrow\frac{dv}{dx}=-\frac{4x}{(1+x^2)}v\Longrightarrow\frac{dv}{v}=-\frac{4x}{(1+x^2)}dx$$

$\Longrightarrow \ln|v|=-2\ln\left|1+x^2\right|\Longrightarrow$

$$\boxed{v=\frac{1}{(1+x^2)^2}}$$

on a aussi $v\dfrac{du}{dx}=0\Longrightarrow\dfrac{1}{(1+x^2)^2}\dfrac{du}{dx}=0\Longrightarrow du=0\Longrightarrow\boxed{u=c}$

(2) la methode

d'où $\boxed{y=\dfrac{c}{(1+x^2)^2}}$ **(0,5)**

on a $y(4)=\dfrac{1}{17}\Longrightarrow y(4)=\dfrac{c}{(1+16)^2}=\dfrac{c}{(17)^2}=\dfrac{1}{17}\Longrightarrow\boxed{c=17}$ **(0,25)**

d'où la solution particulière est

$$\boxed{y=\frac{17}{(1+x^2)^2}}$$ **(0,25)**

* l'équation linéaire on peut aussi utiliser la méthode où $y_h(x)=K\exp(\int P(x)dx)$

<u>Exercice 3:</u>

2/ $\sum\limits_{n\geq1}\dfrac{\sin\theta}{\sqrt{n\left(n^3+1\right)}}$ avec $\theta\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ on utilise la comparaison

on a $\theta\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ alors $\sin\theta\in]0,1[$, d'où $0<\dfrac{\sin\theta}{\sqrt{n\left(n^3+1\right)}}<\dfrac{1}{\sqrt{n\left(n^3+1\right)}}<\dfrac{1}{n^2}$

la série $\sum\limits_{n\geq1}\dfrac{1}{n^2}$ est une série de Riemann qui converge puique $p=2>1$

d'où la série $\sum\limits_{n\geq1}\dfrac{\sin\theta}{\sqrt{n\left(n^3+1\right)}}$ converge par comparaison

** On peut aussi dire $0<\dfrac{\sin\theta}{\sqrt{n\left(n^3+1\right)}}<\dfrac{1}{\sqrt{n\left(n^3+1\right)}}$, puis on utilise le critère de Riemann $\alpha=2$ pour démontrer la convergence de la série $\sum\limits_{n\geq1}\dfrac{1}{\sqrt{n\left(n^3+1\right)}}$

Exercice 1:

2/ On utilise les coordonnées cylindriques

On pose $\begin{cases} x = x \\ y = r\cos\theta \quad r > 0 \\ z = r\sin\theta \end{cases}$

d'où $I = \int\int\int z dxdydz = \int\int\int r\sin\theta r dr d\theta dx$

* d'après le graphe on a $\boxed{0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}}$ **(0,5)**

* on $y^2 + z^2 = 4 \Longrightarrow r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta = r^2 = 4 \Longrightarrow r = 2$

$\Longrightarrow \boxed{0 < r < 2}$ **(0,5)**

* on a $\begin{array}{c} x + y = 2 \Longrightarrow x = 2 - y \\ 2y + x = 6 \Longrightarrow x = 6 - 2y \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{c} x = 2 - r\cos\theta \\ x = 6 - 2r\cos\theta \end{array}$

$\Longrightarrow \boxed{2 - r\cos\theta \leq x \leq 6 - 2r\cos\theta}$ **(0,5)**

D'où, $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 \int_{2-r\cos\theta}^{6-2r\cos\theta} r\sin\theta r dx dr d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\int_0^2 \underbrace{\int_{2-r\cos\theta}^{6-2r\cos\theta} r^2\sin\theta dx}_{(*)} dr}_{(**)} d\theta$

$(*) = \int_{2-r\cos\theta}^{6-2r\cos\theta} r^2\sin\theta dx = r^2\sin\theta x\Big]_{2-r\cos\theta}^{6-2r\cos\theta}$

$= r^2\sin\theta\,(6 - 2r\cos\theta - 2 + r\cos\theta) = r^2\sin\theta\,(4 - r\cos\theta)$ **(0,75)**

$(**) = \int_0^2 r^2\sin\theta\,(4 - r\cos\theta)\,dr = \int_0^2 \left(4r^2\sin\theta - r^3\sin\theta\cos\theta\right) dr$

$= \dfrac{4}{3}r^3\sin\theta - \dfrac{r^4}{4}\sin\theta\cos\theta\Big]_0^2 \int_0^2 \left(4r^2\sin\theta - r^3\sin\theta\cos\theta\right) dr$ **(1)**

$= \dfrac{32}{3}\sin\theta - 4\sin\theta\cos\theta$

$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\dfrac{32}{3}\sin\theta - 4\sin\theta\cos\theta\right) d\theta = \dfrac{-32}{3}\cos\theta - 2\sin^2\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$ **(0,5)**

$\boxed{I = \dfrac{26}{3}}$ **(0,25)**