Correction de la série sur les lois de probabilité usuelles

Exo1 : *On lance trois fois une pièce de monnaie parfaitement équilibrée. Calculer, en utilisant deux méthodes différentes, la probabilité p pour qu'il y ait (1) trois faces, (2) deux faces, (3) une fois face, (4) aucune fois face.*

Solution : ***Méthode 1 :*** $\Omega=\{FFF,\ FFP, FPF,\ FPP,\ PFF,\ PFP, PPF, PPP\}$

(1) $P(FFF)=1/8$ (2) $P(\{FFP, FPF, PFF\})=3/8$ (3) $P(\{FPP,\ PFP, PPF\})=3/8$ (4) $P(\{PPP\})=1/8$

Méthode 2. On utilise la loi binomiale de paramètres n=3 et p=1/2 [X= nombre de F→B(3 , 1/2)]

(1) $k=3$; $P(X=3)= C_3^3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1.\frac{1}{8}.1=\frac{1}{8}$

(2) $k=2$; $P(X=2)= C_3^2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^1 = 3.\frac{1}{4}.\frac{1}{2}=\frac{3}{8}$

(3) $k=1$; $P(X=1)= C_3^1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 3.\frac{1}{2}.\frac{1}{4}=\frac{3}{8}$

(4) $k=0$; $P(X=0)= C_3^0\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^3 = 1.1.\frac{1}{8}=\frac{1}{8}$

Exo2 : *Une boîte contient 3 billes rouges et 2 billes blanches. On tire trois fois une bille de la boîte, et à chaque fois on la remet dans la boîte. Calculer la probabilité pour que (1) l'ont ait tiré une bille rouge, (2) l'on ait tiré 2 billes rouges, (3) l'on ait tiré au moins une bille rouge.*

Solution : ***Loi binomiale de paramètres n=3 et p= 3/5 d'où (1) 36/125 ; (2) 54/125 ; (3) 117/125***

Exo3 : *Une famille a 6 enfants. Calculer la probabilité pour qu'il y ait (1) 3 garçons et 3 filles, (2) moins de garçons que de filles. On suppose que la probabilité pour qu'un enfant soit un garçon est 1/2.*

Solution : ***On a : n=6 et p=q=1/2***

(1) $P(3\text{ garçons})= C_6^3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{20}{64}=\frac{5}{16}$

(2) ***Il y a moins de garçons que de filles s'il y a 0 , 1 ou 2 garçons. Par conséquent,***

$p=P(0\text{ garçon}) + P(1\text{garçon}) + P(2\text{ garçons})= \left(\frac{1}{2}\right)^6 + C_6^1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^5 + C_6^2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{11}{32}$

Exo4 : *la probabilité pour qu'un tireur atteigne une cible est 1/4. (1) En supposant qu'il tire 7 fois quelle est la probabilité p pour qu'il atteigne la cible au moins deux fois ? (2) Combien de fois doit-il tirer pour que la probabilité qu'il atteigne la cible au moins une fois soit plus grande que 2/3 ?*

Solution : ***(1) On cherche la somme des probabilités pour k = 2, 3 , 4, 5, 6 et 7. Il est plus simple dans ce cas de calculer la somme des probabilités pour k=0 et 1, ce qui revient à dire que le tireur n'atteint pas la cible ou l'atteint une fois, et de retrancher cette somme de 1.***

$P(\text{aucun succès})=\left(\frac{3}{4}\right)^7=\frac{2187}{16384}$, $P(1\text{ succès})= C_7^1\left(\frac{1}{4}\right)^1\left(\frac{3}{4}\right)^6=\frac{5103}{16384}$

d'où $p=1-\frac{2187}{16384}-\frac{5103}{16384}=\frac{4547}{8192}$

(2) La probabilité de ne pas atteindre la cible est q^n . ***On cherche donc le plus petit n tel que*** q^n ***soit plus petit que*** $1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$ ***où*** $q=1-p=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$. ***Par conséquent, on calcule les puissances successives de q jusqu'à ce que l'on ait*** $q^n<\frac{1}{3}$.

$\left(\frac{3}{4}\right)^1=\frac{3}{4}\nless\frac{1}{3}$; $\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{9}{16}\nless\frac{1}{3}$; $\left(\frac{3}{4}\right)^3=\frac{27}{64}\nless\frac{1}{3}$; mais $\left(\frac{3}{4}\right)^4=\frac{81}{256}<\frac{1}{3}$

Autrement dit, le tireur doit tirer 4 fois.

Exo5 : Dans les pièces détachées fabriquées par une usine, 2% sont défectueuses. Pour un chargement de 3600 pièces détachées qui quitte l'usine, quel est le nombre moyen de pièces défectueuses et l'écart-type correspondant ?

Solution : $\boldsymbol{\mu = np = 72 \quad et \quad \sigma = \sqrt{npq} = 8.4}$

Exo6 : Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite. Calculer :
$P(0 \leq X \leq 1.42)$; $P(-0.73 \leq X \leq 0)$; $P(-1.37 \leq X \leq 2.01)$; $P(0.65 \leq X \leq 1.26)$;
$P(-1.79 \leq X \leq -0.54)$; $P(X \geq 1.13)$; $P(|X| \leq 0.5)$.

Solution :

$\boldsymbol{P(0 \leq X \leq 1.42) = F(1.42) - F(0) = 0.9222 - .5 = 0.4222}$

$\boldsymbol{P(-0.73 \leq X \leq 0) = F(0) - F(-0.73) = F(0) - (1 - F(0.73)) = 0.2673}$

$\boldsymbol{P(-1.37 \leq X \leq 2.01) = F(2.01) - F(-1.37) = F(2.01) - (1 - F(1.37)) = 0.8925}$

$\boldsymbol{P(0.65 \leq X \leq 1.26) = F(1.26) - F(0.65) = 0.154}$

$\boldsymbol{P(-1.79 \leq X \leq -0.54) = F(-0.54) - F(-1.79) = 1 - F(0.54) - (1 - F(1.79)) = 0.2579}$

$\boldsymbol{P(X \geq 1.13) = 1 - F(1.13) = 0.1292}$

$\boldsymbol{P(|X| \leq 0.5) = P(-0.5 \leq X \leq 0.5) = 2F(0.5) - 1 = 0.383}$

Exo7 : Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite. Calculer la valeur de t sachant que :
(1) $P(0 \leq X \leq t) = 0.4236$; *(2)* $P(X \leq t) = 0.7967$; *(3)* $P(t \leq X \leq 2) = 0.1000$

Solution :

(1) $\boldsymbol{P(0 \leq X \leq t) = F(t) - F(0) = 0.4236 \quad \leftrightarrow \quad F(t) = 0.4236 + F(0) = 0.4236 + 0.5 = 0.9236}$
d'après la table de laloi normale centrée réduite t=1.43

(2) $\boldsymbol{P(X \leq t) = 0.7967 \quad \leftrightarrow \quad t = 0.83}$

(3) $\boldsymbol{P(t \leq X \leq 2) = 0.1000 \leftrightarrow F(2) - F(t) = 0.1 \leftrightarrow F(t) = F(2) - 0.1 = 0.9772 - 0.1 = 0.8772}$
d'après la table de la loi normale centrée réduite $\boldsymbol{0.8770 \leq 0.8772 \leq 0.8790}$ ***donc*** $\boldsymbol{1.16 \leq t \leq 1.17}$
on prendra t=1.165

Exo8 : Soit X une variable aléatoire distribuée normalment avec une moyenne égale à 8 et un écart-type égal à 4. Calculer : (i) $P(5 \leq X \leq 10)$; *(ii)* $P(10 \leq X \leq 15)$; *(iii)* $P(X \geq 15)$; *(iv)* $P(X \leq 5)$

Solution : il faut effectuer un changement de variable et passer par le cas particulier d'une loi centrée réduite et puis utiliser sa table. Pour calculer les probabilités ci-dessus on effectue le changement de variable $\boldsymbol{Z = \frac{X-\mu}{\sigma}}$.

Ainsi, les probabilités obtenues pour la loi centrée réduite permettent de calculer les probabilités pour une loi normale quelconque à l'aide du changement de variable $\boldsymbol{Z = \frac{X-\mu}{\sigma}}$, ***à savoir*** $\boldsymbol{P(a \leq X \leq b) = P(a' \leq Z \leq b')}$ ***où*** $\boldsymbol{a' = \frac{a-\mu}{\sigma}}$ ***et*** $\boldsymbol{b' = \frac{b-\mu}{\sigma}}$ ***; la probabilité cherchée revient donc à lire sur la table de la loi centrée réduite, la probabilité de se trouver entre a' et b'.***

(i) $\boldsymbol{P(5 \leq X \leq 10) = P\left(\frac{5-8}{4} \leq Z \leq \frac{10-8}{4}\right)}$ **où** $\boldsymbol{Z = \frac{X-8}{4}}$ ***d'où***

$\boldsymbol{P(5 \leq X \leq 10) = P(-0.75 \leq Z \leq 0.5) = F(0.5) - F(-0.75) = F(0.5) - (1 - F(0.75)) = 0.4649}$

(ii) ***idem pour*** $\boldsymbol{P(10 \leq X \leq 15) = 0.2684}$

(iii) ***idem pour*** $\boldsymbol{P(X \geq 15) = 0.0401}$

(iv) ***idem pour*** $\boldsymbol{P(X \leq 5) = 0.2266}$

Exo9 : *On suppose que la température T pendant le mois de Juin suit une loi normale de moyenne 20° et d'écart-type 3°. Calculer la probabilité p pour que la température soit comprise entre 21° et 26°.*

Solution : $p = P(21 \leq T \leq 26) = P\left(\frac{21-20}{3} \leq Z \leq \frac{26-20}{3}\right) = P(0.33 \leq Z \leq 2) = 0.3479$

Exo10 : *On suppose que la taille de 2000 élèves est distribuée normalement avec une moyenne de 155 cm et un écart-type de 20 cm. Calculer le nombre d'élèves ayant des tailles (i) inférieures ou égales à 100 cm, (ii) comprises entre 120 et 130 cm, (iii) comprises entre 150 et 175 cm, (iv) supérieures ou égales à 200 cm.*

Solution :

(i) $P(X \leq 100) = P\left(Z \leq \frac{100-155}{20}\right)$ ***où*** $Z = \frac{X-155}{20}$.

$P(X \leq 100) = P(Z \leq -2.75) = 1 - F(2.75) = 1 - 0.9970 = 0.003$

Ω est équiprobable donc P(A)= $\frac{CardA}{Card\Omega}$ ***d'où CardA= P(A) Card Ω. et par suite le nombre d'élèves ayant des tailles inférieures ou égales à 100 cm est N=0.003×2000=6***

On fait pareil pour les autres question et on retrouve (ii) N=131 , (iii) N=880 et (iv) N=24

Exo11 : *Sur un grand nombre de personnes on a constaté que la répartition du taux de cholestérol suit une loi normale avec les résultats suivants : - 56% ont un taux inférieur à 165 cg; - 34% ont un taux compris entre 165 cg et 180 cg; - 10% ont un taux supérieur à 180 cg. Quelle est le nombre de personnes qu'il faut prévoir de soigner dans une population de 10000 personnes, si le taux maximum toléré sans traitement est de 182 cg?*

Solution :

Si X est de moyenne m et d'écart-type σ alors $Y = \frac{X-m}{\sigma}$ suit une loi centrée réduite. Donc si $P[X \leqslant 165]$ alors $P[\frac{X-m}{\sigma} \leqslant \frac{165-m}{\sigma}] = 0,56$. Or on peut lire dans la table de Gauss $F(0.15) = 0.5596$.

De même, si $P[X \geqslant 180]$ alors $P[\frac{X-m}{\sigma} \geqslant \frac{180-m}{\sigma}] = 0.1$. Donc $P[\frac{X-m}{\sigma} \leqslant \frac{180-m}{\sigma}] = 0.9$ et l'on peut lire de même $F(1.28) = 0.8997$.

Pour trouver m et σ il suffit de résoudre le système d'équations : $\frac{165-m}{\sigma} = 0.15$ et $\frac{180-m}{\sigma} = 1.28$ d'où $\sigma \simeq 13.27$, $m \simeq 163$ cg. Alors, $P[X \geqslant 182] = P[\frac{X-m}{\sigma} \geqslant \frac{182-m}{\sigma}] = 1 - F(1.43) = 0.0764$.

Sur 10000 personnes on estime le nombre de personnes à soigner de l'ordre de 764 personnes ; en fait la théorie de l'estimation donnera une fourchette.

Loi de Poisson

Exo12 : *On suppose que dans un livre de 200 pages, 220 erreurs d'impression sont distribuées au hasard. Calculer la probabilité pour qu'une page donnée contienne (1) aucune erreur, (2) une erreur, (3) 2 erreurs, (4) 2 erreurs ou plus.*

Solution : (1) 0.333 (2) 0.366 (3) 0.201 (4) 0.301

Exo13 : *On suppose que 2% des êtres humains en moyenne sont gauchers. Calculer la probabilité pour que parmi 100 personnes, 3 ou plus soient des gauchers.*

Solution : 0.325

Exo14 : *On suppose qu'il y a 2 suicides en moyenne par an dans une population de 50 000 individus. Calculer la probabilité pour que dans une ville de 100 000 habitants, le nombre de suicides pour une année donnée soit :*

a) 0 , b) 1 , c) 2 , d) supérieur ou égal à 2.

***Solution :** a) 0.0183 0 , b) 0.0732 , c) 0.1464 , d) 0.909.*

***Exo15 :** On effectue un contrôle de fabrication sur des pièces dont une proportion p = 0.02 est défectueuse.*
1. On contrôle un lot de 1000 pièces :
Soit X la variable aléatoire : «nombre de pièces défectueuses parmi 1000». Quelle est la vraie loi de X ? (on ne donnera que la forme générale); quel est son espérance, son écart-type ?
2. En approchant cette loi par celle d'une loi normale adaptée, calculez la probabilité pour que X soit compris entre 18 et 22 (P[18≤ X ≤ 22]) ; on fera les calculs avec et sans correction de continuité. On fera également les calculs avec la vraie loi pour comparer.

Solution :

1. La loi de X est la loi binomiale $B(1000; 0.02)$, d'espérance 20, d'écart-type $\sqrt{19.6}$.
2. En approchant cette loi par celle d'une loi normale de paramètre $m = 20$, écart-type $\sqrt{19.6}$. $P[18 \leqslant X \leqslant 22] = P[(17.5-20)/\sqrt{19.6} \leqslant (X-20)/\sqrt{19.6} \leqslant (22.5-20)/\sqrt{19.6}] \simeq 0.428$.
   Sans correction de continuité on trouve $P[(17-20)/\sqrt{19.6} \leqslant (X-20)/\sqrt{19.6} \leqslant (22-20)/\sqrt{19.6}] \simeq 0.348$.
   Approchée par la loi de Poisson de paramètres : espérance 20 et variance 20, on trouve $P[18 \leqslant X \leqslant 22] \simeq 0.423$.
   Enfin par la vraie loi binomiale : on trouve $P[18 \leqslant X \leqslant 22] \simeq 0.427$.