Chapitre 9

Suites et séries de fonctions

9.1 Suites de fonctions

Soit I un intervalle non vide de $\mathbf{R}$:
- On dit que la suite d'applications $(f_n)_n$ est *simplement convergente* sur I si :
  pour tout $x \in I$, $\big(f_n(x)\big)_n$ est une suite convergente.
- On dit que la suite d'applications $(f_n)_n$ est *uniformément convergente* sur I si :
  $\left(\sup\limits_{x\in I}(f_n(x) - f(x))\right)_n$ est une suite convergente.

$\boxed{1}$ Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on définit $f_n : \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{nx}{n+x} \end{array}$

Montrer que $(f_n)_n$ converge simplement et uniformément sur $[0,1]$.

$\boxed{2}$ Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on définit $f_n : \begin{array}{ccc} [1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \ln\left(x + \dfrac{1}{n}\right) \end{array}$

a) Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge simplement sur $[1,+\infty[$.

b) Étudier la convergence uniforme sur $[1,+\infty[$.

$\boxed{3}$ Pour $n \in \mathbf{N}$ et $x \in \mathbf{R}_+$, on pose $f_n(x) = e^{-nx}$

a) Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge simplement sur $\mathbf{R}_+$ vers une fonction f que l'on déterminera.

b) Soit $a > 0$. Étudier la convergence uniforme sur $[a,+\infty[$ de $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$.

c) (i) Calculer $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}\left((f_n - f)\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right)$.

(ii) A-t-on convergence uniforme sur $[0,+\infty[$?

$\boxed{4}$ Pour $n \in \mathbf{N}$ et $x \in \mathbf{R}_+$, on pose $f_n(x) = \dfrac{x}{x+n}$.

a) Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge simplement sur $[0,1]$.

b) Étudier la convergence uniforme sur $[0,1]$.

c) Étudier la convergence simple et uniforme sur $[1,+\infty[$.

$\boxed{5}$ Mêmes questions avec $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+nx}$.

$\boxed{6}$ Étudier la convergence des suites de fonctions suivantes :

a) $f_n : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_+ & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & nx^2e^{-nx} \end{array}$

b) $f_n : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_+ & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{nx}{1+n^3x^2} \end{array}$

c) $f_n : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_+ & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\sin(nx)}{1+n^2x^2} \end{array}$

d) $f_n : \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{ne^{-x}+x^2}{n+x} \end{array}$ pour $n \geq 1$.

$\boxed{7}$ Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on définit $f_n : \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \sin \dfrac{1}{nx} \quad \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \longmapsto & 0 \end{array}$

a) Montrer que $(f_n)_n$ converge uniformément sur tout intervalle de la forme $[-M, M]$ avec $M \in \mathbf{R}_+^*$.

b) La convergence est-elle uniforme sur $\mathbf{R}$?

$\boxed{8}$ a) Pour $n \in \mathbf{N}$, on pose $f_n(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0,n] \\ -x+2n & \text{si } x \in [n,2n] \\ 0 & \text{si } x \geq 2n \end{cases}$

(i) Représenter f_n.

(ii) Étudier la convergence simple et uniforme sur $[0,+\infty[$.

b) Mêmes questions avec :

$$g_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{2n}\right[\cup \left]\frac{1}{n}, 1\right] \\ 1 & \text{si } x \in \left[\frac{1}{2n}, \frac{1}{n}\right] \end{cases}$$

$\boxed{9}$ Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n(x) = \begin{cases} nx & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{n}\right] \\ 1 & \text{si } x > \frac{1}{n} \end{cases}$

a) Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Étudier la convergence uniforme sur $[a, +\infty[$ de $(f_n)_n$.

b) A-t-on convergence uniforme sur $[0, +\infty[$?

> Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions continues sur I convergeant sur I vers $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$.
> – Si $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur I alors f est continue sur I.
> – Si $I = [a, b]$ et si $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur I alors :
> $$\lim_n \left(\int_a^b f_n(t)dt \right) = \int_a^b f(t)dt.$$
> – • Si $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur I,
> • si pour tout n, f_n est dérivable sur I,
> • si pour tout n, f_n' est continue sur I,
> • si $(f_n')_n$ converge uniformément sur I,
> alors $\lim_{n \longrightarrow +\infty} f_n'(x) = f'(x)$.

$\boxed{10}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}_+$, on pose $f_n(x) = x^n$.
Dire pourquoi $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ne converge pas uniformément sur $[0, 1]$.

$\boxed{11}$ Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n : \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & n^2 x e^{-nx} \end{array}$

a) Montrer que $(f_n)_n$ converge simplement sur $[0, 1]$.

b) Calculer $a_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(t)dt$ et $\lim_{n \longrightarrow +\infty} a_n$.

c) En déduire que la convergence ne peut pas être uniforme sur $[0, 1]$.

$\boxed{12}$ Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x e^{-nx^2} \end{array}$

a) Montrer que $(f_n)_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$.

b) Calculer $f_n'(0)$, $\lim_{n \longrightarrow +\infty} f_n'(0)$ et $\left(\lim_{n \longrightarrow +\infty} f_n \right)'(0)$.

c) Expliquer les résultats du 12b).

$\boxed{13}$ Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x}{n^2} e^{-\frac{x}{n}} \end{array}$

a) Montrer que $(f_n)_n$ converge uniformément vers 0 sur $\mathbb{R}_+$.

b) Calculer $\int_0^{+\infty} f_n(t)dt$.

c) Vérifier que $\lim_{n\longrightarrow+\infty}\int_0^{+\infty} f_n(t)dt \neq \int_0^{+\infty}\left(\lim_{n\longrightarrow+\infty} f_n\right)(t)dt$.
Expliquer pourquoi.

$\boxed{14}$ Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$.

a) Vérifier que $(f_n)_n$ est une suite de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que $(f_n)_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$.

c) La limite est-elle dérivable ?
Expliquer pourquoi ?

$\boxed{15}$ Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = \dfrac{2^n x}{1 + n2^n x^2}$.

a) Déterminer la limite simple f de f_n sur $[0, 1]$.

b) (i) Calculer $I_n = \int_0^1 f_n(t)dt$, $\lim_{n\longrightarrow+\infty} I_n$ et $\int_0^1 f(t)dt$.

(ii) En déduire que $(f_n)_n$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$.

c) Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que $(f_n)_n$ converge uniformément sur $[a, +\infty[$.

$\boxed{16}$ a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{n^2} - 1 + \dfrac{1}{n} & \text{si } x \in [n^2 - n, n^2] \\ -\dfrac{x}{n^2} + 1 + \dfrac{1}{n} & \text{si } x \in [n^2, n^2 + n] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Comparer $\lim_{n\longrightarrow+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)dx$ et $\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\lim_{n\longrightarrow+\infty} f_n\right)(x)dx$.

b) Même question avec :

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x & \text{si } x \in \left[0, \dfrac{1}{2n}\right[\\ n^2\left(\dfrac{1}{n} - x\right) & \text{si } x \in \left[\dfrac{1}{2n}, \dfrac{1}{n}\right] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$\boxed{17}$ Calculer :

a) $\lim_{n\longrightarrow+\infty}\left(\int_0^3 \dfrac{x^5}{(1+x^2)^n}dx\right)$.

b) $\lim_{n\longrightarrow+\infty}\left(\int_0^2 (1-x)e^{-x^n}dx\right)$.

$\boxed{18}$ a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

(i) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on a $0 \leq 1 - \dfrac{1}{1+\frac{t}{n}} \leq \dfrac{t}{n}$.

(ii) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a $0 \leq x - n\ln\left(1+\dfrac{x}{n}\right) \leq \dfrac{x^2}{2n}$.

(iii) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a $e^{-\frac{x^2}{2n}}e^x \leq \left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n \leq e^x$

b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n \end{array}$

(i) Déduire du 18a) que $(u_n)_n$ converge uniformément sur tout intervalle de la forme $[0, M]$ avec $M > 0$.

(ii) La convergence est-elle uniforme sur $\mathbb{R}_+$?

c) Soit $t \in \mathbb{R}_+$. Calculer $\displaystyle\lim_{n \longrightarrow +\infty} \int_0^t \left(1+\frac{x}{n}\right)^n dx$.

$\boxed{19}$ Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $f_n : \begin{array}{rcl} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & n^\alpha x^n(1-x) \end{array}$

a) Pour quelles valeurs de α, $(f_n)_n$ converge-t-elle uniformément sur $[0,1]$?

b) Soit $\alpha \geq 1$.
Montrer que pour tout $a \in\ ]0,1[$, $(f_n)_n$ converge uniformément sur $[0,a]$.

c) Soit $\alpha \in [1,2[$. Comparer $\displaystyle\lim_{n \longrightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(t)dt$ et $\displaystyle\int_0^1 \left(\lim_{n \longrightarrow +\infty} f_n\right)(t)dt$.

$\boxed{20}$ Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,2]$, on pose $f_n(x) = \dfrac{x^n}{1+x^n}$.

a) Montrer que $(f_n)_n$ converge simplement sur $[0,2]$.

b) Déterminer $\mathcal{D}$ sur lequel $(f_n)_n$ converge uniformément.

c) Montrer que $\displaystyle\lim_{n \longrightarrow +\infty} \int_0^2 f_n(t)dt = 1$.

$\boxed{21}$ Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n(x) = \begin{cases} \left(1-\dfrac{x^2}{n}\right)^n & \text{si } x \in [0,\sqrt{n}] \\ 0 & \text{si } x \in\ ]\sqrt{n}, +\infty[\end{cases}$

a) Montrer que $(f_n)_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers une fonction f que l'on déterminera.

b) Pour $n \geq 1$, on pose $u_n(x) = \ln\big(f_{n+1}(x)\big) - \ln\big(f_n(x)\big)$.
Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$ tels que $n \geq p$.
Montrer que u_n est une fonction bien définie, continue, dérivable, positive et croissante sur $[0, \sqrt{p}[$.

9.2 Séries de fonctions

Soit I un intervalle non vide de $\mathbf{R}$:
- $(\sum f_n)_n$ est une série de fonctions *simplement convergente* sur I si :
  $(S_n)_n$ est une suite d'applications simplement convergente sur I.
- $(\sum f_n)_n$ est une série de fonctions *uniformément convergente* sur I si :
  $(S_n)_n$ est une suite d'application uniformément convergente sur I.
- $(\sum f_n)_n$ est une série de fonctions *normalement convergente* sur I s'il existe une série convergente $(\sum a_n)_n$ telle que :
  $\forall x \in I \quad |f_n(x)| \leq a_n$.

22 Déterminer la convergence simple, uniforme, normale et absolue des séries de fonctions définies par :

a) $u_n(x) = x^n(1-x^n)$ si $n \in \mathbf{N}$ et $x \in [0,1]$.

b) $u_n(x) = \dfrac{x}{n(1+nx^2)}$ si $n \in \mathbf{N}^*$ et $x \in \mathbf{R}$.

c) $u_n(x) = (-1)^n \dfrac{e^{-nx^2}}{n^2+1}$ si $n \in \mathbf{N}$ et $x \in \mathbf{R}$.

23 Pour $x \in \mathbf{R}$ et $n \in \mathbf{N}$ on pose $u_n(x) = \dfrac{x}{(1+x)^n}$.

a) Déterminer le domaine sur lequel $(\sum u_n)_n$ converge simplement.

b) Montrer qu'il y a convergence uniforme de cette série sur un domaine de la forme $]-\infty, -2-\delta] \cup [\delta, +\infty[$ avec $\delta > 0$.

24 Étudier les domaines de convergence simple et de convergence uniforme des séries de fonctions définies par :

a) $u_n(x) = \dfrac{\sin(2^n \pi x)}{2^n}$ si $n \in \mathbf{N}$ et $x \in \mathbf{R}$.

b) $u_n(x) = e^{-n^2 x}$ si $n \in \mathbf{N}$ et $x \in \mathbf{R}$.

c) $u_n(x) = \dfrac{e^{-n^2 x}}{n^2}$ si $n \in \mathbf{N}^*$ et $x \in \mathbf{R}$.

d) $u_n(x) = \dfrac{1}{2^{n-1}\sqrt{1+nx}}$ si $n \in \mathbf{N}$ et $x \in \mathbf{R}_+$.

e) $u_n(x) = \dfrac{\cos(nx)}{e^{nx}}$ si $n \in \mathbf{N}$ et $x \in \mathbf{R}$.

25 Soit $p \in \mathbf{N}$. Pour $n \in \mathbf{N}^*$ et $x \in \mathbf{R}$, on pose $u_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{n^p}$.

a) Montrer que si $p > 1$ alors $(\sum u_n)_n$ converge uniformément sur $\mathbf{R}$.

b) Soient $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ tels que $2k\pi < \alpha < \beta < 2(k+1)\pi$.
Montrer que si $0 < p \leq 1$ alors $(\sum u_n)_n$ converge uniformément sur $[\alpha, \beta]$.

26 a) Montrer que si une série d'applications est normalement convergente alors elle est uniformément convergente.

b) Pour $n \in \mathbf{N}$ et $x \in [0,1]$, on pose $u_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{(n+1)(x+1)}$.

(i) Montrer que $(\sum u_n)$ converge uniformément sur $[0,1]$.

(ii) Montrer que la convergence n'est pas normale.

27 Pour $n \in \mathbf{N}$ et $x \in \mathbf{R}_+$, on pose $u_n(x) = (-1)^n \dfrac{e^{-nx}}{n+1}$.

a) Montrer que $(\sum u_n)_n$ converge simplement sur $\mathbf{R}_+$ vers une fonction f.

b) Soit $a \in \mathbf{R}_+^*$. Montrer que $(\sum u_n)_n$ converge normalement sur $[a, +\infty[$. A-t-on convergence normale sur $]0, +\infty[$? sur $[0, +\infty[$?

c) Vérifier que pour tout $x \in \mathbf{R}_+$, on a : $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n+1} u_k(x) \leq f(x) \leq \sum_{k=1}^{2n} u_k(x)$.

d) En déduire que $(\sum u_n)_n$ est uniformément convergente sur $[0, +\infty[$.

28 Pour $n \in \mathbf{N}$ et $x \in \mathbf{R}_+$, on pose $u_n(x) = ne^{-nx}$

a) Montrer que $(\sum u_n)_n$ converge simplement sur $\mathbf{R}_+^*$.

b) Montrer que $(\sum u_n)_n$ converge uniformément sur tout intervalle de la forme $[a, +\infty[$ où $a \in \mathbf{R}_+^*$ mais ne converge pas uniformément sur $[0, +\infty[$.

c) Soit $x \in [1, +\infty[$. Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} ne^{-nx}$ α

29 Pour $n \in \mathbf{N}^*$ et $x \in \mathbf{R}$, on pose $f_n(x) = \dfrac{\arctan(nx)}{n^2}$.

a) Montrer que $(\sum f_n)$ converge sur $\mathbf{R}$ vers une fonction S.

b) Montrer que S est continue sur $\mathbf{R}$.

c) (i) Montrer que $(\sum f_n')$ converge normalement sur tout intervalle de la forme $]-\infty, -T] \cup [T, +\infty[$ avec $T > 0$.

(ii) En déduire que S est C^1 sur $\mathbf{R}^*$.

30 Pour $n \in \mathbf{N}$ et $x \in \mathbf{R}$, on pose $u_n(x) = e^{-nx} \sin \dfrac{\pi}{2^n}$.

a) Montrer que $(\sum u_n)$ converge sur $\mathbf{R}$ vers une fonction f.

b) Montrer que pour tout $x \in \mathbf{R}_+$, $f'(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n'(x)$.

31 Pour $x \in \mathbf{R}$, on pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + \sin(nx)}$.

a) Montrer que f est bien définie sur $\mathbf{R}$.

b) Étudier la continuité de f sur $\mathbf{R}$.

32 Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0, 1]$, on pose $u_n(x) = \dfrac{x^n}{n^2(1 + x^n)}$.

a) Étudier la convergence de cette série sur $[0, 1]$.

b) $f : x \longmapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ est-elle dérivable sur $[0, 1]$?

33 Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0, 1]$, on pose $u_n(x) = \ln\left(1 + \dfrac{x}{n}\right) - \dfrac{x}{n}$.

a) Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de cette série de fonctions sur $[0, 1]$.

b) Montrer que $x \longmapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n}\right)$ est dérivable.

c) Calculer $f'(1)$.

34 Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}_+$, on pose $f_n(x) = (-1)^n \ln\left(1 + \dfrac{x}{n(1 + x)}\right)$.

a) Montrer que $(\sum_n f_n)$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.

b) Montrer que $(\sum_n f_n)$ ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}_+$.

c) Montrer que $(\sum_n f_n)$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$.

35 Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $u_n(x) = \dfrac{x^{4n+3}}{4n+3} + \dfrac{x^{4n+1}}{4n+1} - \dfrac{x^{2n+2}}{2n+2}$.

a) Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Déterminer un équivalent de $u_n(x)$ quand n tend vers $+\infty$.

b) En déduire que $(\sum_n u_n)_n$ converge sur $[-1, 1]$.

c) (i) Soit $a \in [0, 1[$. Montrer que $(\sum_n u_n')$ converge uniformément sur $[-a, a]$.

(ii) Montrer que $(\sum_n u_n')$ n'est pas uniformément convergente sur $]-1, 1[$.

d) (i) Soit $x \in]-1, 1[$.

Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(0)$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n'(x)$.

En déduire $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$.

(ii) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $q > p > 1$, on a :

$$\ln\left(\frac{q}{p-1}\right) < \sum_{k=p}^{q} \frac{1}{k} < \ln\left(\frac{q+1}{p-1}\right).$$

En déduire que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(1) = \frac{\ln 2}{2} + 1$.

(iii) $(\sum_n u_n)_n$ converge-t-elle sur $[-1, 1]$?

$\boxed{32}$ Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0,1]$, on pose $u_n(x) = \dfrac{x^n}{n^3(1+x^n)}$.

a) Étudier la convergence de cette série sur $[0,1]$.

b) $f : x \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ est-elle dérivable sur $[0,1]$?

$\boxed{33}$ Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0,1]$, on pose $u_n(x) = \ln\left(1+\dfrac{x}{n}\right) - \dfrac{x}{n}$.

a) Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de cette série de fonctions sur $[0,1]$.

b) Montrer que $x \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\ln(1+\dfrac{x}{n}) - \dfrac{x}{n}\right)$ est dérivable.

c) Calculer $f'(1)$.

$\boxed{34}$ Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}_+$, on pose $f_n(x) = (-1)^n \ln\left(1+\dfrac{x}{n(1+x)}\right)$.

a) Montrer que $(\sum f_n)$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.

b) Montrer que $(\sum f_n)$ ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}_+$.

c) Montrer que $(\sum f_n)$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$.

$\boxed{35}$ Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $u_n(x) = \dfrac{x^{4n+3}}{4n+3} + \dfrac{x^{4n+1}}{4n+1} - \dfrac{x^{2n+3}}{2n+3}$.

a) Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Déterminer un équivalent de $u_n(x)$ quand n tend vers $+\infty$.

b) En déduire que $(\sum u_n)_n$ converge sur $[-1,1]$.

c) (i) Soit $a \in\ ]0,1[$. Montrer que $(\sum u'_n)$ converge uniformément sur $[-a,a]$.

(ii) Montrer que $(\sum u'_n)$ n'est pas uniformément convergente sur $]-1,1[$.

d) (i) Soit $x \in\ ]-1,1[$.

Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(0)$, $\sum_{n=0}^{+\infty} u'_n(x)$.

En déduire $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$.

(ii) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $q > p > 1$, on a :

$$\ln\left(\frac{q}{p-1}\right) < \sum_{n=p}^{q} \frac{1}{n} < \ln\left(\frac{q+1}{p-1}\right).$$

En déduire que $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(1) = \dfrac{\ln 2}{2} + 1$.

(iii) $(\sum u_n)_n$ converge-t-elle sur $[-1,1]$?

$\boxed{36}$ Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = \ln\left(\cos \dfrac{x}{2^n}\right)$.

a) Montrer que $(\sum f_n)_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.

b) Soit $x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$. On pose $v_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} f_k(x) + \ln\left(\sin \dfrac{x}{2^n}\right)$.

(i) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a $v_n(x) = v_{n-1}(x) - \ln 2$.

(ii) En déduire $\displaystyle\lim_{n \longrightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$.

c) Soit $x \in \left[\dfrac{\pi}{2}, +\infty\right[$.

(i) Montrer qu'il existe un rang n_0 à partir duquel f_n est définie.

(ii) En posant $u = \dfrac{x}{2^{n_0}}$, montrer que : $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{+\infty} \ln\left(\cos \frac{x}{2^n}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \ln\left(\cos \frac{u}{2^n}\right)$.

En déduire $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{+\infty} \ln\left(\cos \frac{x}{2^n}\right)$ en fonction de x et n_0.

d) Que se passe-t-il quand $x \in \left]-\infty, 0\right]$?

9.3 Trucs & astuces

Pour montrer qu'une suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément sur $[a, b]$, on peut :

- Montrer que $\displaystyle\lim_{n \longrightarrow +\infty} \left(\sup_{x \in [a,b]} |f_n(x) - f(x)|\right) = 0$.
- Montrer que $\displaystyle\sup_{x \in [a,b]} |f_n(x) - f(x)| \leq a_n$ ave $\displaystyle\lim_{n \longrightarrow +\infty} a_n = 0$.
- Montrer que : $\forall \epsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq n_0$, $\forall x \in [a, b]$, $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$.
- Montrer que $(f_n)_n$ est uniformément de CAUCHY :
  $\forall \epsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n, p \geq n_0$, $\forall x \in [a, b]$, $|f_n(x) - f_p(x)| < \epsilon$.

Pour montrer qu'une suite de fonctions ne converge pas uniformément sur $[a, b]$, on peut :

- Montrer que $\displaystyle\lim_{n \longrightarrow +\infty} \left(\sup_{x \in [a,b]} |f_n(x) - f(x)|\right) \neq 0$.
- Trouver $x_n \in \mathbb{R}$ tel que $\displaystyle\lim_{n \longrightarrow +\infty} (f_n(x_n) - f(x_n)) \neq 0$.
- Montrer que f_n est continue sur $[a, b]$ alors que $\displaystyle\lim_n f_n$ ne l'est pas.
- Montrer que f_n est continue sur $[a, b]$ alors que :
  $$\int_a^b \left(\lim_n f_n\right)(t)dt \neq \lim_n \left(\int_a^b f_n(t)dt\right).$$

9.4 Indications

Suites de fonctions

$\boxed{1}$ Majorer $|f_n(x) - x|$.

$\boxed{2}$ b) Étudier $\varphi : x \longmapsto \ln\left(x + \frac{1}{n}\right) - \ln x$.

$\boxed{7}$ a) Pour tout $u \in \mathbb{R}_+$, $|\sin u| \leq |u|$.

$\boxed{11}$ b) Faire une intégration par parties.

$\boxed{17}$ On rappelle que si $(f_n)_n$ est une suite de fonctions continues convergeant uniformément alors $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \int_a^b f_n(t)dt = \int_a^b \left(\lim\limits_n f_n\right)(t)dt$.

$\boxed{20}$ c) $\int_0^2 f_n(t)dt = \int_0^{1-a} f_n(t)dt + \int_{1-a}^{1+a} f_n(t)dt + \int_{1+a}^2 f_n(t)dt$.

Suites de fonctions

$\boxed{22}$ Calculer la somme partielle.

$\boxed{25}$ b) Utiliser le critère d'Abel.

$\boxed{26}$ Penser aux séries alternées.

$\boxed{28}$ c) Calculer $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} e^{-nx}$.

$\boxed{33}$ a) Vérifier que : $\forall v \in \mathbb{R}_+$, $|\ln(1+u) - u| \leq \frac{u^2}{2}$.

$\boxed{34}$ a) Faire un développement limité de $f_n(x)$.

$\boxed{35}$ d) La dérivée d'une fonction constante est nulle.

9.5 Bibliographie

- Azoulay E., Avignant J., *Maths 2e année*, tome 3, Ediscience, 1990.
- Delmer F., *Mathématiques, les séries*, Dunod, 1995.

9.4 Indications

Suites de fonctions

$\boxed{1}$ Majorer $|f_n(x) - x|$.

$\boxed{2}$ b) Étudier $\varphi : x \longmapsto \ln\left(x + \frac{1}{n}\right) - \ln x$.

$\boxed{7}$ a) Pour tout $u \in \mathbb{R}_+$, $|\sin u| \leq |u|$.

$\boxed{11}$ b) Faire une intégration par parties.

$\boxed{17}$ On rappelle que si $(f_n)_n$ est une suite de fonctions continues convergeant uniformément alors $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \int_a^b f_n(t)dt = \int_a^b \left(\lim\limits_n f_n\right)(t)dt$.

$\boxed{20}$ c) $\int_0^2 f_n(t)dt = \int_0^{1-a} f_n(t)dt + \int_{1-a}^{1+a} f_n(t)dt + \int_{1+a}^2 f_n(t)dt$.

Suites de fonctions

$\boxed{22}$ Calculer la somme partielle.

$\boxed{25}$ b) Utiliser le critère d'Abel.

$\boxed{26}$ Penser aux séries alternées.

$\boxed{28}$ c) Calculer $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} e^{-nx}$.

$\boxed{33}$ a) Vérifier que : $\forall v \in \mathbb{R}_+$, $\left|\ln(1+u) - u\right| \leq \frac{u^2}{2}$.

$\boxed{34}$ a) Faire un développement limité de $f_n(x)$.

$\boxed{35}$ d) La dérivée d'une fonction constante est nulle.

9.5 Bibliographie

– Azoulay E., Avignant J., *Maths 2e année*, tome 3, Ediscience, 1990.
– Delmer F., *Mathématiques, les séries*, Dunod, 1995.

Chapitre 9

Suites et séries de fonctions

$\frac{nx}{n(1+\frac{x}{n})} = \frac{x}{1+\frac{x}{n}}$ $= x$

9.1 Suites de fonctions

$\boxed{1}$ – Soit $x \in [0,1]$. $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \frac{nx}{n+x} = \lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \frac{x}{1+\frac{x}{n}} = x$.

– Pour tout $x \in [0,1]$, on a $\left|f_n(x) - x\right| = \left|\frac{-x^2}{n+x}\right| \leq \frac{1}{n+x} \leq \frac{1}{n+0}$.

Autrement dit, $0 \leq \sup\limits_{x \in [0,1]} \left|f_n(x) - x\right| \leq \frac{1}{n}$ donc $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \sup\limits_{x \in [0,1]} \left|f_n(x) - x\right| = 0$.

Conclusion : $\boxed{(f_n)_n \text{ converge uniformément sur } [0,1] \text{ vers } f : x \longmapsto x.}$

$\boxed{2}$ a) Soit $x \in [1, +\infty[$.

$\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \left(x + \frac{1}{n}\right) = x$ donc, ln étant continue, $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \ln\left(x + \frac{1}{n}\right) = \ln x$.

Conclusion : $\boxed{(f_n)_n \text{ converge simplement sur } [1,+\infty[\text{ vers } f : x \longmapsto \ln x.}$

b) Pour $n \in \mathbf{N}^*$ et $x \in [1, +\infty[$, on pose $\varphi(x) = \left|\ln\left(x + \frac{1}{n}\right) - \ln x\right| = \ln\left(1 + \frac{1}{nx}\right)$.

Pour tout $x \in [1, +\infty[$, $\varphi'(x) = \frac{1}{1+\frac{1}{nx}} \frac{-1}{nx^2} < 0$.) pour quoi ça.

Ainsi, $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \sup\limits_{[1,+\infty[} \left|f_n(x) - f(x)\right| = \lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \varphi_n(1) = \lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 0$.

Conclusion : $\boxed{(f_n)_n \text{ converge uniformément sur } [1,+\infty[\text{ vers } f : x \longmapsto \ln x.}$

$\boxed{3}$ a) Soit $x \in [0, +\infty[$.

$\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} e^{-nx} = 0$: $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge donc simplement vers $f : x \longmapsto 0$.

b) Pour tout $x \in [a, +\infty[$, on a $\left|f_n(x) - 0\right| \leq e^{-na}$: $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \sup\limits_{[a,+\infty[} \left|f_n(x) - 0\right| = 0$.

$\left(f_n(x)\right)_n$ converge donc uniformément sur $[a, +\infty[$ vers l'application nulle.

c) (i) $\lim_{n\to+\infty}\left((f_n-f)\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)=\lim_{n\to+\infty} e^{-\frac{1}{n}}=1.$

(ii) De 3(c)i), on en déduit que $\sup_{x\in[0,+\infty[}\left|f_n(x)-f(x)\right|\geq 1.$

Conclusion : $\boxed{(f_n)_n \text{ ne converge pas uniformément sur } [0,+\infty[.}$

4 a) Pour $x\in[0,1]$ fixé, on a $\lim_{n\to+\infty}\frac{x}{x+n}=0.$

$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc simplement sur $[0,1]$ vers l'application nulle.

b) Pour tout $x\in[0,1]$, on a $\left|\frac{x}{x+n}-0\right|\leq\frac{1}{x+n}\leq\frac{1}{0+n}.$

On en déduit que : $0\leq\lim_{n\to+\infty}\sup_{x\in[0,1]}\left|\frac{x}{x+n}-0\right|\leq\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0.$

Conclusion : $\boxed{(f_n)_n \text{ converge uniformément sur } [0,1] \text{ vers } 0.}$

c) – Pour tout $x\in[1,+\infty[$, $\lim_{n\to+\infty}\frac{x}{x+n}=0$: la suite converge donc simplement sur $[1,+\infty[$ vers 0.

– Soit $n_0\in\mathbb{N}^*$ $n_0\geq 1$ donc $\sup_{x\in[1,+\infty[}\left|f_{n_0}(x)-0\right|\geq\left|f_{n_0}(n_0)-0\right|=\frac{1}{2}.$) j'ai pas compris.

On a donc $\lim_{n\to+\infty}\sup_{x\in[1,+\infty[}\left|f_{n_0}(x)-0\right|\neq 0$: la convergence n'est donc pas uniforme sur $[1,+\infty[$.

5 a) $f_n(0)=0$. Si $x\in\,]0,1]$ alors $\lim_{n\to+\infty}\frac{nx}{1+nx}=\lim_{n\to+\infty}\frac{x}{\frac{1}{n}+x}=1.$

$(f_n)_n$ converge donc sur $[0,1]$ vers $f:\ \begin{array}{ccc}[0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & 1 \quad \text{si } x\neq 0\\ 0 & \longmapsto & 0\end{array}$

b) Pour $n\in\mathbb{N}^*$ et $x\in[0,1]$, on pose $\varphi(x)=\left|f_n(x)-f(x)\right|$.

Si $x\in\,]0,1]$, $\varphi(x)=\frac{1}{1+nx}$. φ étant décroissante sur $]0,1]$, on a :

$$\sup_{x\in\,]0,1]}\varphi(x)=\lim_{x\to0+}\frac{1}{1+nx}=1.$$

Or $\varphi(0)=~~1~~$ 0, donc $\sup_{x\in[0,1]}\varphi(x)=1$ et donc $\lim_{n\to+\infty}\sup_{x\in[0,1]}\varphi(x)\neq 0.$

Conclusion : $\boxed{(f_n)_n \text{ ne converge pas uniformément sur } [0,1].}$

c) Pour tout $x\geq 1$, on a $\left|\frac{nx}{1+nx}-1\right|=\frac{1}{1+nx}\leq\frac{1}{1+n}.$

Donc $\lim_{n\to+\infty}\sup_{x\in[1,+\infty[}\left|\varphi_n(x)\right|=0.$

Conclusion : $\boxed{(f_n)_n \text{ converge uniformément sur } [1,+\infty[.}$

6 a) – Pour $x\in\mathbb{R}_+$ fixé, on a $\lim_{n\to+\infty}nx^2e^{-nx}=0$: la suite converge donc simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers 0.

– Pour $n \in \mathbf{N}$ et $x \in \mathbf{R}_+$, on pose $\varphi(x) = \left|nx^2e^{-nx} - 0\right|$.
Pour tout $x \in \mathbf{R}_+$, $\varphi'(x) = (2nx - n^2x^2)e^{-nx}$ et donc :

x	0		$\frac{2}{n}$		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$+$	0	$-$	
φ		$\nearrow$	$\frac{4}{e^2n}$	$\searrow$	

Finalement, $\displaystyle\lim_{n\longrightarrow+\infty} \sup_{x\in[0,+\infty[} \left|f_n(x) - 0\right| = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \varphi\left(\frac{2}{n}\right) = 0.$

Conclusion : $\boxed{(f_n)_n \text{ converge uniformément sur } \mathbf{R}_+ \text{ vers l'application nulle.}}$

b) Pour $n \in \mathbf{N}$ et $x \in \mathbf{R}_+$, on pose $\varphi(x) = \left|\dfrac{nx}{1+n^3x^2} - 0\right|$.

En étudiant φ, on trouve que pour tout $x \in \mathbf{R}_+$, $\varphi(x) \leq \varphi\left(\sqrt{\dfrac{1}{n^3}}\right) = \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$.

On en déduit que $\displaystyle\lim_{n\longrightarrow+\infty} \sup_{x\in[0,+\infty[} \left|f_n(x) - 0\right| = 0.$

Conclusion : $\boxed{(f_n)_n \text{ converge uniformément sur } \mathbf{R}_+ \text{ vers l'application nulle.}}$

c) – $\displaystyle\lim_{n\longrightarrow+\infty} f_n(0) = 0.$

D'autre part, si $x \in \mathbf{R}_+^*$ est fixé, on a :

$$0 \leq \left|\frac{\sin(nx)}{1+n^2x^2}\right| \leq \frac{1}{1+n^2x^2} \text{ et } \lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{1}{1+n^2x^2} = 0.$$

On en déduit que $(f_n)_n$ converge simplement sur $\mathbf{R}_+$ vers 0.

– Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On a $f_n\left(\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{\sin 1}{2}$.

Donc $\displaystyle\lim_{n\longrightarrow+\infty} \sup_{x\in[0,+\infty[} \left|f_n(x) - 0\right| \neq 0.$

Conclusion : $\boxed{(f_n)_n \text{ ne converge pas uniformément sur } [0,+\infty[.}$

d) – Pour $x \in [0,1]$ fixé, $\displaystyle\lim_{n\longrightarrow+\infty}\left(e^{-x} + \frac{x^2}{n}\right) = e^{-x}$ et $\displaystyle\lim_{n\longrightarrow+\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right) = 1.$

Conclusion : $\boxed{\displaystyle\lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{ne^{-x}+x^2}{n+x} = e^{-x}}$

– Pour tout $x \in [0,1]$, on a :

$$\begin{aligned}
\left|\frac{ne^{-x}+x^2}{n+x} - e^{-x}\right| &= \left|\frac{x^2 - xe^{-x}}{n+x}\right| = |x|\left|\frac{x-e^{-x}}{n+x}\right| \\
&\leq |x|\left|\frac{x-e^{-x}}{n+0}\right| \leq \frac{|x-e^{-x}|}{n} && \text{car } |x| \leq 1 \\
&\leq \frac{|x| + |e^{-x}|}{n} \leq \frac{1+|e^{-x}|}{n} \leq \frac{2}{n} && \text{car } |e^{-x}| = e^{-x} \leq e^0.
\end{aligned}$$

Ainsi, $\displaystyle\lim_{n\longrightarrow+\infty} \sup_{x\in[0,1]} \left|f_n(x) - e^{-x}\right| = 0.$

Conclusion : $\boxed{(f_n)_{n\in\mathbf{N}} \text{ converge uniformément sur } [0,1] \text{ vers } f : x \longmapsto e^{-x}}$

7 a) – $f_n(0) = 0$ et si $x \neq 0$, $\left|x^2 \sin \frac{1}{nx}\right| \leq x^2 \left|\frac{1}{nx}\right|$.

Conclusion : $\boxed{\forall x \in \mathbf{R}, \quad \lim_{n \longrightarrow +\infty} f_n(x) = 0}$

– Soit $M \in \mathbf{R}_+^*$.

Pour tout $x \in [-M, M]$, on a $\left|f_n(x) - 0\right| \leq \left|x^2 \sin \frac{1}{nx}\right| \leq \frac{x^2}{n|x|} \leq \frac{M}{n}$.

Comme $\lim_{n \longrightarrow +\infty} \sup_{x \in [-M,M]} \left|f_n(x) - 0\right| = 0$, $(f_n)_n$ converge uniformément sur $[-M, M]$ vers 0.

b) $\lim_{n \longrightarrow +\infty} \left|f_n(n) - 0\right| = \lim_{n \longrightarrow +\infty} n^2 \sin \frac{1}{n^2} = 1 \neq 0$.

Conclusion : $\boxed{\text{La convergence n'est pas uniforme sur } \mathbf{R}.}$

8 a) (i) Soit $n \in \mathbf{N}$. Représentation de f_n : cf. figure 9.1

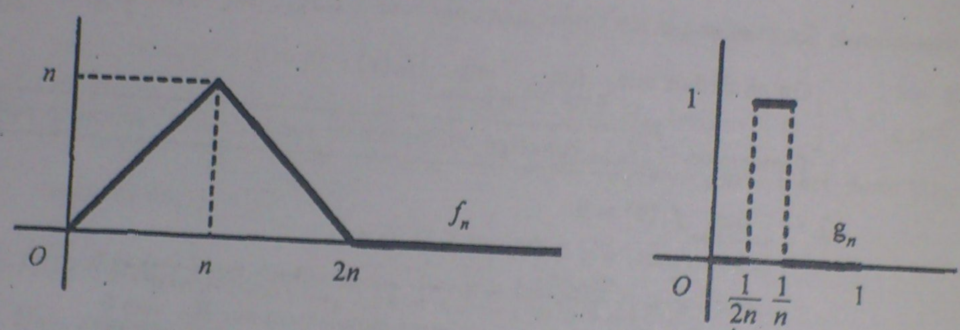

FIG. 9.1 – Représentation de f_n et g_n

(ii) – Soit $x \in \mathbf{R}_+$. Pour tout $n \geq x$, on a $f_n(x) = x$.

Conclusion : $\boxed{\lim_{n \longrightarrow +\infty} f_n(x) = f(x) = x}$

– Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on a $\left|f_n(2n) - f(2n)\right| = |0 - 2n| \geq 2$.

Conclusion : $\boxed{\lim_{n \longrightarrow +\infty} \sup_{x \in \mathbf{R}_+} \left|f_n(x) - f(x)\right| \neq 0}$

b) (i) Soit $n \in \mathbf{N}$. Représentation de g_n : cf. figure 9.1

(ii) – Soit $x \in \,]0, +\infty[$. Pour tout $n \geq \frac{1}{x}$, on a $g_n(x) = 0$.
D'autre part, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on a $g_n(0) = 0$.

Conclusion : $\boxed{(g_n) \text{ converge simplement sur } [0, +\infty[\text{ vers } 0.}$

– Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on a $g_n\left(\frac{3}{4n}\right) - 0 = 1$.

On en déduit que $\sup_{x \in \,]0,+\infty[} \left|g_n(x)\right| \geq 1$.

Conclusion : $\boxed{(g_n)_n \text{ ne converge pas uniformément sur } [0, +\infty[.}$

9 a) – $\lim_{n \longrightarrow +\infty} f_n(0) = 0$.

D'autre part, si $x \in \mathbf{R}_+^*$ alors pour tout $n > \frac{1}{x}$, on a $f_n(x) = 1$.
$(f_n)_n$ converge donc sur $\mathbf{R}_+$ vers $f: \begin{array}{rcl} \mathbf{R}_+ & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & 1 \quad \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \longmapsto & 0 \end{array}$

– Il existe $n_0 \in \mathbf{N}^*$ tel que $\frac{1}{n_0} < a$.
Pour tout $x \in [a, +\infty[$ et pour tout $n \geq n_0$, on a $f_n(x) = 1$.
Finalement, pour tout $x \in [a, +\infty[$, on a $\left|f_n(x) - f(x)\right| = 0$.

Conclusion : $\boxed{(f_n)_n \text{ converge uniformément sur } [a, +\infty[\text{ vers } f.}$

b) – Soit $n \in \mathbf{N}^*$: $f_n\left(\frac{1}{2n}\right) - f\left(\frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{2}$.

Conclusion : $\boxed{\text{La convergence n'est pas uniforme sur } [0, +\infty[.}$

– f n'étant pas continue sur $\mathbf{R}_+$ alors que f_n l'est, la convergence ne peut pas être uniforme sur $\mathbf{R}_+$.

10 – Si $x \in [0, 1[$ alors $\lim_{n \longrightarrow +\infty} x^n = 0$. D'autre part $\lim_{n \longrightarrow +\infty} 1^n = 1$.
$(f_n)_n$ converge donc sur $[0, 1]$ vers $f: \begin{array}{rcl} [0,1] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & 0 \quad \text{si } x \neq 1 \\ 1 & \longmapsto & 1 \end{array}$

– On suppose que $(f_n)_n$ converge uniformément sur $[0, 1]$ vers f. Comme f_n est continue sur $[0, 1]$, $\lim_n f_n$ est continue sur $[0, 1]$ d'après le théorème. Ce qui est faux.

Conclusion : $\boxed{(f_n)_{n \in \mathbf{N}} \text{ ne converge pas uniformément sur } [0, 1].}$

11 a) Soit $x \in [0, 1]$. $\lim_{n \longrightarrow +\infty} f_n(x) = 0$.

Conclusion : $\boxed{(f_n)_n \text{ converge simplement sur } [0, 1] \text{ vers } 0.}$

b) – Soit $n \in \mathbf{N}$. Grâce à une intégrations par parties, on a :

$$\begin{aligned} a_n &= \int_0^1 n^2 t e^{-nt} dt = \left[n^2 t \frac{-1}{n} e^{-nt}\right]_0^1 - \int_0^1 n^2 \frac{-1}{n} e^{-nt} dt \\ &= -ne^{-n} + n \int_0^1 e^{-nt} dt = -ne^{-n} + n\left[-\frac{1}{n} e^{-nt}\right]_0^1 = 1 - e^{-n} - ne^{-n} \end{aligned}$$

– $\lim_{n \longrightarrow +\infty} a_n = 1 - \lim_{n \longrightarrow +\infty} e^{-n} - \lim_{n \longrightarrow +\infty} ne^{-n} = 1$.

c) Si $(f_n)_n$ converge uniformément alors, f_n étant continues sur $[0, 1]$, on a :

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(t) dt = \int_0^1 0\, dt. \text{ Ce qui est faux.}$$

Conclusion : $\boxed{\text{La convergence n'est pas uniforme sur } [0, 1].}$

12 a) – Soit $x \in \mathbf{R}$. $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} e^{-nx^2} = 0$: $(f_n)_n$ converge sur $\mathbf{R}$ vers 0.

– Pour $n \in \mathbf{N}$ et $u \in \mathbf{R}_+$, on pose $\varphi(u) = \left|ue^{-nu^2} - 0\right|$.
En étudiant φ sur $\mathbf{R}_+$, on trouve que :

$$\sup_{u \in [0,+\infty[} \varphi(u) = \varphi\left(\frac{1}{\sqrt{2n}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2n}} e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2en}}.$$

Finalement, $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \left(\sup\limits_{x \in \mathbf{R}} \left|xe^{-nx^2} - 0\right|\right) = \lim\limits_{n} \frac{1}{\sqrt{2en}} = 0.$

Conclusion : $\boxed{(f_n)_n \text{ converge uniformément sur } \mathbf{R} \text{ vers } 0.}$

b) – $\forall x \in \mathbf{R}$, $f_n'(x) = e^{-nx^2}(1 - 2nx^2)$ donc $f_n'(0) = 1$.
– $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} f_n'(0) = 1$.
– $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} f_n$ est la fonction nulle : sa dérivée en 0 vaut donc 0.

c) $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} f_n'(0) \neq \left(\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} f_n\right)'(0)$: on ne peut pas intervertir limite et dérivée bien que l'on ait la convergence uniforme de $(f_n)_n$. Cela vient du fait que la convergence uniforme de $(f_n')_n$ n'est pas vérifiée.

13 a) Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Pour $x \in \mathbf{R}_+$, on pose $\varphi(x) = \frac{x}{n^2} e^{-\frac{x}{n}} - 0$.

En étudiant φ sur $\mathbf{R}_+$, on trouve que $\sup\limits_{x \in [0,+\infty[} \varphi(x) = \varphi(n) = \frac{1}{n} e^{-1} = \frac{1}{ne}$.

Comme $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \frac{1}{ne} = 0$, $(f_n)_n$ converge uniformément sur $\mathbf{R}_+$.

b) Soit $M \in \mathbf{R}_+^*$. Avec une intégration par parties, on obtient :

$$\int_0^M \frac{t}{n^2} e^{-\frac{t}{n}} dt = \left[\frac{t}{n^2}(-n)e^{-\frac{t}{n}}\right]_0^M + \int_0^M \frac{1}{n} e^{-\frac{t}{n}} dt$$
$$= -\frac{M}{n} e^{-\frac{M}{n}} + \left[-e^{-\frac{t}{n}}\right]_0^M = -\frac{M}{n} e^{-\frac{M}{n}} - e^{-\frac{M}{n}} + 1.$$

Conclusion : $\boxed{\int_0^{+\infty} f_n(t)dt = 1}$

c) $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} f_n$ est l'application nulle donc $\int_0^{+\infty} (\lim\limits_{n} f_n)(t)dt = 0$.

On a donc $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t)dt \neq \int_0^{+\infty} \left(\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} f_n\right)(t)dt$: l'intervalle d'intégration doit être fermé borné pour pouvoir appliquer le théorème.

14 a) Soit $n \in \mathbf{N}^*$. $x \longmapsto x^2 + \frac{1}{n}$ est dérivable et strictement positive sur $\mathbf{R}$ et $u \longmapsto \sqrt{u}$ est dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$.

Conclusion : $\boxed{f_n \text{ est dérivable sur } \mathbf{R}.}$

b) – Soit $x \in \mathbb{R}$. $\displaystyle\lim_{n \longrightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} = \sqrt{x^2} = |x|$.

– Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\left|\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - |x|\right| = \frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} + |x|} \leq \frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{0 + \frac{1}{n}} + 0} = \sqrt{\frac{1}{n}}$.

Comme $\displaystyle\lim_{n \longrightarrow \infty} \sqrt{\frac{1}{n}}$, $(f_n)_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers $x \longmapsto |x|$.

c) $x \longmapsto |x|$ n'est pas dérivable en 0.

⚠ : f_n dérivable et converge uniformément ne suffit pas pour avoir f dérivable.

15 a) $\displaystyle\lim_{n \longrightarrow +\infty} f_n(0) = 0$.

Pour $x \in \,]0,1]$, $\displaystyle\lim_{n \longrightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{2^n x}{n 2^n x^2} = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{1}{nx} = 0$.

Conclusion : $\boxed{(f_n)_n \text{ converge sur } [0,1] \text{ vers } 0.}$

b) (i) – $$\int_0^1 \frac{2^n t}{1 + n2^n t^2} dt = \int_0^{1+n2^n} \frac{\frac{1}{2n}}{u} du \qquad \text{en posant } u = 1 + n2^n t^2$$
$$= \frac{1}{2n} \left[\ln|u|\right]_0^{1+n^2 n}$$

Conclusion : $\boxed{I_n = \frac{1}{2n} \ln(1 + n2^n)}$

– $$\lim_{n \longrightarrow +\infty} I_n = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{\ln(n2^n)}{2n} + \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{\ln\left(\frac{1}{n2^n} + 1\right)}{2n}$$
$$= \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{\ln n}{2n} + \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{n \ln 2}{2n} + 0.$$

Conclusion : $\boxed{\lim_{n \longrightarrow +\infty} I_n = \frac{\ln 2}{2}}$

– $\displaystyle\int_0^1 0 \, dt = 0$.

(ii) Comme $0 \neq \dfrac{\ln 2}{2}$, la convergence n'est pas uniforme sur $[0,1]$ donc sur $\mathbb{R}$.

c) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f_n'(x) = \dfrac{2^n(1 - n2^n x^2)}{(1 + n2^n x^2)^2}$.

Il existe n_0 tel que si $n \geq n_0$ alors $\dfrac{1}{\sqrt{n2^n}} < a$. Pour $n > \dfrac{1}{\sqrt{n2^n}}$ on a donc :

$$\begin{array}{c|ccccccc}
x & 0 & & \frac{1}{\sqrt{n2^n}} & & a & & +\infty \\
\hline
f_n'(x) & & + & 0 & & - & & \\
\hline
f_n & 0 & \nearrow & & & f_n(a) & \searrow & 0
\end{array}$$

Ainsi, $\forall x \in [a, +\infty[$, $|f_n(x)| \leq f_n(a) \sim \dfrac{1}{na}$ et $\displaystyle\lim_{n \longrightarrow +\infty} \left(\sup_{[a,+\infty[} |f_n - 0| \right) = 0$.

Conclusion : $\boxed{(f_n) \text{ converge uniformément sur } [a, +\infty[.}$

16 a) – Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)dt = \int_{n^2-n}^{n^2}\left(\frac{t}{n^2} - 1 + \frac{1}{n}\right)dt + \int_{n^2}^{n^2+n}\left(-\frac{t}{n^2} + 1 + \frac{1}{n}\right)dt$$
$$= \left[\frac{t^2}{2n^2} - t + \frac{t}{n}\right]_{n^2-n}^{n^2} + \left[-\frac{t^2}{2n^2} + t + \frac{t}{n}\right]_{n^2}^{n^2+n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}.$$

Conclusion : $\boxed{\lim_{n \longrightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)dt = 1}$

– $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\lim_{n\longrightarrow+\infty} f_n\right)(x)dx = 0.$

b) On trouve $\displaystyle\lim_{n \longrightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)dt = \frac{1}{4}$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\lim_{n\longrightarrow+\infty} f_n\right)(x)dx = 0.$

17 a) – Soit $x \in [0,3]$. $\displaystyle\lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{x^5}{(1+x^2)^n} = 0.$

On pose $\varphi(x) = \left|\dfrac{x^5}{(1+x^2)^n} - 0\right|$. L'étude de φ sur $[0,3]$ montre que :

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \sup_{x\in[0,3]} \varphi(x) = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \varphi\left(\sqrt{\frac{5}{5-2n}}\right) = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{(5-2n)^{\frac{5}{2}}}{\left(\frac{10-2n}{5-2n}\right)^n} = 0.$$

Conclusion : $\boxed{\left(\dfrac{x^5}{(1+x^2)^n}\right)_n \text{ converge uniformément vers 0 sur } [0,3].}$

– On en déduit que : $\displaystyle\lim_n\left(\int_0^3 \frac{x^5}{(1+x^2)^n}dx\right) = \int_0^3 \lim_n\left(\frac{x^5}{(1+x^2)^n}\right)dx = 0.$

b) – Soit $x \in [0,2]$. On pose $f_n(x) = (1-x)e^{-x^n}$.

- Si $x \in [0,1[$ alors $\displaystyle\lim_{n\longrightarrow+\infty} (1-x)e^{-x^n} = (1-x)e^0 = 1-x.$
- Si $x = 1$ alors $\displaystyle\lim_{n\longrightarrow+\infty} (1-x)e^{-x^n} = 0e^{-1} = 0.$
- Si $x \in]1,2]$ alors $\displaystyle\lim_{n\longrightarrow+\infty} (1-x)e^{-x^n} = (1-x)\times 0 = 0.$

(f_n) converge donc vers f : $\begin{array}{rcll} [0,2] & \longrightarrow & \mathbb{R} & \\ x & \longmapsto & 1-x & \text{si } x\in[0,1[\\ x & \longmapsto & 0 & \text{si } x \in [1,2] \end{array}$

– On pose $\varphi(x) = |f_n(x) - f(x)|$. Pour tout $x \in [0,2]$, $e^{x^n} \geq x^n$ et :

- Si $x \in [0,1]$, $\varphi(x) \leq \dfrac{1-x}{x^n} = g(x)$ avec $g'(x) = 0 \Longleftrightarrow x = \dfrac{n}{n+1}$.
- Si $x \in [1,2]$, $\varphi(x) \leq \dfrac{x-1}{x^n} = g(x)$ avec $g'(x) = 0 \Longleftrightarrow x = \dfrac{n}{n-1}$.

Finalement, pour tout $x \in [0,2]$, $\varphi(x) \leq \max\left(\dfrac{(n+1)^{n-1}}{n^n}, \dfrac{(n-1)^{n-1}}{n^n}\right)$.

Conclusion : $\boxed{(f_n) \text{ converge uniformément vers } f \text{ sur } [0,2].}$

– On en déduit que $\displaystyle\lim_n\left(\int_0^2 (1-x)e^{-x^n}dx\right) = \int_0^2 \lim_n\left((1-x)e^{-x^n}\right)dx = \frac{1}{2}.$

18 a) (i) – Comme $t \geq 0$, on a $1+\frac{t}{n} \geq 1$ et donc $\frac{1}{1+\frac{t}{n}} \leq 1$.

– $\frac{t}{n}+\frac{1}{1+\frac{t}{n}}-1=\frac{\left(\frac{t}{n}\right)^2}{1+\frac{t}{n}} \geq 0$.

Conclusion : $\boxed{\forall t \in \mathbf{R}_+,\ 0 \leq 1-\frac{1}{1+\frac{t}{n}} \leq \frac{t}{n}}$

(ii) Soit $x \in \mathbf{R}_+$. Par positivité de l'intégrale, on obtient, en intégrant sur $[0,x]$:

$$\int_0^x 0\,dt \leq \int_0^x\left(1-\frac{1}{1+\frac{t}{n}}\right)dt \leq \int_0^x \frac{t}{n}dt.$$

Conclusion : $\boxed{0 \leq x - n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right) \leq \frac{x^2}{2n}}$

(iii) Soit $x \in \mathbf{R}_+$.

L'exponentielle étant croissante, on a $e^0 \leq \exp\left(x-n\ln(1+\frac{x}{n})\right) \leq e^{\frac{x^2}{2n}}$

c.-à-d. : $1 \leq \frac{e^x}{(1+\frac{x}{n})^n} \leq e^{\frac{x^2}{2n}}$

Conclusion : $\boxed{e^{-\frac{x^2}{2n}}e^x \leq \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \leq e^x}$

b) (i) – Soit $x \in \mathbf{R}_+$. En faisant tendre n vers $+\infty$ dans l'inégalité du 18(a)iii), on en déduit que : $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$

– Soit $M \in \mathbf{R}_+^*$. Pour tout $x \in [0,M]$, on a :

$0 \leq e^x - u_n(x) \leq e^x\left(1-e^{-\frac{x^2}{2n}}\right)$ avec 18a)

$\leq e^M\left(1-e^{-\frac{M^2}{2n}}\right)$.

Conclusion : $\boxed{\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}\ \sup\limits_{x\in[0,M]}\left|e^x-u_n(x)\right| = 0}$

(ii) En revanche, la convergence n'est pas uniforme sur $\mathbf{R}_+$ car :

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\ \sup_{x\in\mathbf{R}_+}\left|e^x-u_n(x)\right| \geq \lim_{n\longrightarrow+\infty}\left|e^n-u_n(n)\right| = +\infty.$$

c) Pour t fixé, $(u_n)_n$ converge uniformément sur $[0,t]$ vers $x \longmapsto e^x$ d'après 18(b)i) donc :

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\int_0^t u_n(x)dx = \int_0^t\left(\lim_{n\longrightarrow+\infty}u_n\right)(x)dx = \int_0^t e^x dx = e^t-1.$$

19 a) – $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} f_n(1) = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} f_n(0) = 0$.

Si $x \in \,]0,1[$, $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}(1-x)e^{n\ln x}e^{\alpha\ln n}$

$= \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}(1-x)e^{n\left(\ln x+\alpha\frac{\ln n}{n}\right)}$

$= \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}(1-x)e^{n\ln x} = 0$ car $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} n\ln x = -\infty$.

Conclusion : $\boxed{(f_n) \text{ converge simplement sur } [0,1] \text{ vers } 0.}$

– Pour $x \in [0,1]$, on pose $\varphi(x) = \left|f_n(x) - 0\right|$.

L'étude de φ donne : $\sup\limits_{x\in[0,1]} \varphi(x) = \varphi\left(\frac{1}{n+1}\right) = n^a\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \frac{1}{n+1}$.

On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sup\limits_{x\in[0,1]} \varphi(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} n^a \frac{1}{e}\frac{1}{n}$.

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} n^a \frac{1}{e}\frac{1}{n} = 0$ ssi $a-1<0$.

Conclusion : $\boxed{(f_n) \text{ converge uniformément sur } [0,1] \text{ ssi } a<1}$

b) Soit $a \in]0,1[$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que si $n \geq n_0$ alors $a < \frac{n}{n+1}$.

Soit $n \geq n_0$. f_n étant croissante sur $[0,a] \subset \left[0, \frac{n}{n+1}\right]$, $\sup\limits_{x\in[0,a]} f_n(x) = f_n(a)$.

Finalement, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sup\limits_{x\in[0,a]} |f_n(x) - 0|\right) = 0$.

Conclusion : $\boxed{(f_n)_n \text{ converge uniformément sur } [0,a]}$

c) – $\int_0^1 \left(\lim\limits_{n\to+\infty} f_n\right)(t)dt = \int_0^1 0\, dt = 0$.

– $\int_0^1 f_n(t)dt = \frac{n^a}{(n+1)(n+2)}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(t)dt = \lim\limits_{n\to+\infty} n^{a-2} = 0$.

⚠ : on peut avoir l'égalité alors que la convergence n'est pas uniforme.

$\boxed{20}$ a) – Soit $x \in [0,1[$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{x^n}{1+x^n} = \frac{0}{1+0} = 0$.

– $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(1) = \frac{1}{2}$.

– Soit $x \in]1,2]$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{x^n}{1+x^n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\frac{1}{x^n}+1} = \frac{1}{0+1} = 1$.

$(f_n)_n$ converge donc sur $[0,2]$ vers f :

$$\begin{array}{rcll} [0,2] & \longrightarrow & \mathbb{R} & \\ x & \longmapsto & 0 & \text{si } x \in [0,1[\\ 1 & \longmapsto & \frac{1}{2} & \\ x & \longmapsto & 1 & \text{si } x \in]1,2] \end{array}$$

b) Soient $a \in]0,1[$ et $b \in]1,2]$.

– Pour tout $x \in [0,a]$, on a $\left|f_n(x) - 0\right| \leq \frac{a^n}{1+0^n} = a^n$

– Pour tout $x \in [b,2]$, on a $\left|f_n(x) - 1\right| \leq \frac{1}{1+b^n}$.

D'où : $0 \leq \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sup\limits_{[0,a]\cup[b,2]} |f_n - f|\right) \leq \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\max\left(a^n, \frac{1}{1+b^n}\right)\right) = 0$.

Conclusion : $\boxed{(f_n)_n \text{ converge uniformément sur } [0,a] \cup [b,2]}$

– Pour $x \in [0,1]$, on pose $\varphi(x) = \left|f_n(x) - 0\right|$.

L'étude de φ donne : $\sup\limits_{x\in[0,1]} \varphi(x) = \varphi\left(\frac{n}{n+1}\right) = n^\alpha \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \frac{1}{n+1}$.

On en déduit que $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \sup\limits_{x\in[0,1]} \varphi(x) = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} n^\alpha \frac{1}{e}\frac{1}{n}$.

Or $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} n^\alpha \frac{1}{e}\frac{1}{n} = 0 \Longleftrightarrow \alpha - 1 < 0$.

Conclusion : $\boxed{(f_n) \text{ converge uniformément sur } [0,1] \Longleftrightarrow \alpha < 1}$

b) Soit $a \in]0,1[$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que si $n \geq n_0$ alors $a < \frac{n}{n+1}$.

Soit $n \geq n_0$. f_n étant croissante sur $[0,a] \subset \left[0, \frac{n}{n+1}\right]$, $\sup\limits_{x\in[0,a]} f_n(x) = f_n(a)$.

Finalement, $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \left(\sup\limits_{x\in[0,a]} \left|f_n(x) - 0\right|\right) = 0$.

Conclusion : $\boxed{(f_n)_n \text{ converge uniformément sur } [0,a].}$

c) – $\int_0^1 \left(\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} f_n\right)(t)dt = \int_0^1 0\, dt = 0$.

– $\int_0^1 f_n(t)dt = \frac{n^\alpha}{(n+1)(n+2)}$ donc $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \int_0^1 f_n(t)dt = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} n^{\alpha-2} = 0$.

⚠ : on peut avoir l'égalité alors que la convergence n'est pas uniforme.

20 a) – Soit $x \in [0,1[$. $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \frac{x^n}{1+x^n} = \frac{0}{1+0} = 0$.

– $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} f_n(1) = \frac{1}{2}$.

– Soit $x \in]1,2]$. $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \frac{x^n}{1+x^n} = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \frac{1}{\frac{1}{x^n}+1} = \frac{1}{0+1} = 1$.

$(f_n)_n$ converge donc sur $[0,2]$ vers f :
$$\begin{array}{rcll} [0,2] & \longrightarrow & \mathbb{R} & \\ x & \longmapsto & 0 & \text{si } x \in [0,1[\\ 1 & \longmapsto & \frac{1}{2} & \\ x & \longmapsto & 1 & \text{si } x \in]1,2] \end{array}$$

b) Soient $a \in]0,1[$ et $b \in]1,2]$.

– Pour tout $x \in [0,a]$, on a $\left|f_n(x) - 0\right| \leq \frac{a^n}{1+0^n} = a^n$.

– Pour tout $x \in [b,2]$, on a $\left|f_n(x) - 1\right| \leq \frac{1}{1+b^n}$.

D'où : $0 \leq \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \left(\sup\limits_{[0,a]\cup[b,2]} \left|f_n - f\right|\right) \leq \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \left(\max\left(a^n, \frac{1}{1+b^n}\right)\right) = 0$.

Conclusion : $\boxed{(f_n)_n \text{ converge uniformément sur } [0,a] \cup [b,2].}$

c) Soient $n \in \mathbb{N}^*$. f_n étant continue en 1, il existe $a \in]0,1[$ tel que si $|x-1| < a$ alors $\left|f_n(x) - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2na}$ c.-à-d. $\frac{1}{2} - \frac{1}{2na} \leq f_n(t) \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2na}$. D'où :

$$\int_{1-a}^{1+a}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2na}\right)dt \leq \int_{1-a}^{1+a} f_n(t)dt \leq \int_{1-a}^{1+a}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2na}\right)dt.$$

Autrement dit, $a - \frac{1}{n} \leq \int_{1-a}^{1+a} f_n(t)dt \leq a + \frac{1}{n}$.

Conclusion : $\boxed{\lim_{n \longrightarrow +\infty} \int_{1-a}^{1+a} f_n(t)dt = a}$

– Comme f_n converge uniformément sur $[0, 1-a] \cup [1+a, 2]$ d'après 20b), on a : $\lim_n \int_0^{1-a} f_n(t)dt = \int_0^{1-a} \lim_n f_n(t)dt$ et $\lim_n \int_{1+a}^{2} f_n(t)dt = \int_{1+a}^{2} \lim_n f_n(t)dt$.

Finalement, $\lim_n \int_0^2 f_n(t)dt = \lim_n \left(\int_0^{1-a} f_n(t)dt + \int_{1-a}^{1+a} f_n(t)dt + \int_{1+a}^{2} f_n(t)dt\right)$
$= 0 + a + (1-a)$.

Conclusion : $\boxed{\lim_{n \longrightarrow +\infty} \int_0^2 f_n(t)dt = 1}$

21 a) Soit $x \in \mathbb{R}_+$. $\exists n_0$, $\forall n \geq n_0$, $\sqrt{n} \geq x$ et $f_n(x) = \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n$.

Or $\lim_{n \longrightarrow +\infty} n \ln\left(1 - \frac{x^2}{n}\right) = -x^2$.

Conclusion : $\boxed{\lim_n \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n = e^{-x^2}}$

b) – Si $x \in [0, \sqrt{p}[$ alors $x \in [0, \sqrt{n}[\subset [0, \sqrt{n+1}[$ donc $f_n(x) = \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n$.
$f_n(x)$ et $f_{n+1}(x)$ sont donc bien strictement positifs.

Conclusion : $\boxed{\ln(f_n) - \ln(f_{n+1}) \text{ existe sur } [0, \sqrt{p}[.}$

– f_n est continue et dérivable sur $[0, \sqrt{p}[$ car c'est une composée de fonctions continues et dérivables sur $[0, \sqrt{p}[$. Le résultat est le même pour f_{n+1}.

Conclusion : $\boxed{u_n \text{ est continue et dérivable sur } [0, \sqrt{p}[.}$

– $\forall x \in [0, \sqrt{p}[$, $u_n'(x) = \dfrac{-(n+1)\frac{2x}{n+1}\left(1 - \frac{x^2}{n+1}\right)^n}{\left(1 - \frac{x^2}{n+1}\right)^{n+1}} + \dfrac{n\frac{2x}{n}\left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^{n-1}}{\left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n}$

$$= \frac{2x^3\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)}{\left(1 - \frac{x^2}{n+1}\right)\left(1 - \frac{x^2}{n}\right)} = \frac{2x^3}{(n+1-x^2)(n-x^2)} \geq 0.$$

Conclusion : $\boxed{u_n \text{ est croissante sur } [0, \sqrt{p}[.}$

– u_n étant croissante, on a : $\forall x \in [0, \sqrt{p}[$, $u_n(x) \geq u_n(0) = 0$.

9.2 Séries de fonctions

22 a) – Soient $x \in [0,1[$ et $n \in \mathbb{N}$.

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} u_k(x) = \sum_{k=0}^{n} \left(x^k - (x^2)^k\right) = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} - \frac{1-(x^2)^{n+1}}{1-x^2}.$$

Finalement, $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} u_k(x) = \dfrac{1}{1-x} - \dfrac{1}{1-x^2}$.

De plus, $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} u_k(1) = 0$.

Conclusion : $\boxed{\left(\sum u_n\right) \text{ converge vers } S : \begin{array}{rcl} [0,1] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{1-x} - \dfrac{1}{1-x^2} \\ 1 & \longmapsto & 0 \end{array}}$

– S_n est une somme finie de fonction f_n continues sur $[0,1]$ donc est continue sur $[0,1]$. La convergence ne peut pas être uniforme car S n'est pas continue en 1.

– La convergence n'étant pas uniforme, elle n'est pas normale.

– Pour tout $x \in [0,1]$, $x^n(1-x^n) \geq 0$: la convergence est absolue.

b) – Soient $x \in \mathbf{R}$ et $n \in \mathbf{N}^*$.

$|u_n(0)| = 0$ donc $\left(\sum |u_n|\right)$ converge en 0.

Si $x \neq 0$, $|u_n(x)| \sim \dfrac{|x|}{n(nx^2)} = \dfrac{1}{n^2|x|}$. Or $\dfrac{1}{n^2}$ est le terme général d'une série convergente donc $\dfrac{1}{n^2|x|}$ aussi : $\left(\sum |u_n|\right)$ converge sur $\mathbf{R}^*$.

Conclusion : $\boxed{\left(\sum u_n\right) \text{ converge absolument sur } \mathbf{R}.}$

– Pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a $u_n'(x) = \dfrac{1-nx^2}{(1+nx^2)^2 n}$.

On en déduit que $\sup\limits_{x \in \mathbf{R}} |u_n(x)| = u_n\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) = \dfrac{1}{2n\sqrt{n}}$.

$\dfrac{1}{2n\sqrt{n}}$ est le terme général d'une série convergente et ne dépend pas de x.

Conclusion : $\boxed{\left(\sum u_n\right) \text{ converge normalement sur } \mathbf{R}.}$

c) Pour tout $x \in \mathbf{R}$, $|u_n(x)| \leq \dfrac{e^0}{n^2+1}$.

$\dfrac{1}{n^2+1}$ étant le terme général d'une série convergente, $\left(\sum u_n\right)$ converge normalement, absolument et uniformément sur $\mathbf{R}$.

23 a) Soit $x \in \,]-\infty, -2] \cup [0, +\infty[$.

– Pour tout n, $|u_n(0)| = 0$: $\left(\sum |u_n|\right)$ converge en 0.

– Pour tout n, $u_n(-2) = -2(-1)^n$: $\left(\sum u_n\right)$ diverge en -2.

– Si $x > 0$ alors $\frac{1}{1+x} < 1$ et pour tout n : $\sum_{k=0}^{n} \frac{x}{(1+x)^k} = x\frac{1-(\frac{1}{1+x})^{n+1}}{1-\frac{1}{1+x}}$.

Conclusion : $\boxed{\lim_{n\longrightarrow+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k(x) = x+1}$

– Si $-2 < x < 0$ alors $\left|\frac{1}{1+x}\right| > 1$: $\lim_{n\longrightarrow+\infty} u_n(x) \neq 0$ et $(\sum u_n)$ diverge.

Conclusion : $\boxed{(\sum u_n) \text{ converge simplement sur }]-\infty,-2[\, \cup [0,+\infty[.}$

b) Soit $\delta > 0$.

– En étudiant le signe de u_n', on vérifie que u_n est strictement décroissante et négative sur $]-\infty,-1[$ donc : $\sup_{x\in\,]-\infty,-2-\delta]} |u_n(x)| = |u_n(-2-\delta)| = \frac{2+\delta}{(1+\delta)^n}$.

– $\forall x \geq \delta$, $\left|\frac{x}{(1+x)^n}\right| \leq \frac{x}{1+x}\frac{1}{(1+x)^{n-1}} \leq \frac{1}{(1+x)^{n-1}} \leq \frac{1}{(1+\delta)^{n-1}}$.

$\frac{1}{1+\delta} < 1$ donc $(2+\delta)\times\left(\frac{1}{1+\delta}\right)^n$ et $\left(\frac{1}{1+\delta}\right)^{n-1}$ sont les termes généraux de séries convergentes.

Conclusion : $\boxed{(\sum u_n) \text{ converge uniformément sur }]-\infty,-2-\delta] \cup [\delta,+\infty[.}$

24 a) Pour tout $n \in \mathbf{N}$ et $x \in \mathbf{R}$, $\left|\frac{\sin(2^n\pi x)}{2^n}\right| \leq \frac{1}{2^n}$.

Conclusion :

$\boxed{\frac{\sin(2^n\pi x)}{2^n} \text{ est le terme général d'une série normalement convergente sur } \mathbf{R}.}$

b) – • Soit $x \in \mathbf{R}_-^*$. $\lim_{n\longrightarrow+\infty} e^{-n^2x} = +\infty$: $(\sum u_n)$ diverge.

• $\lim_{n\longrightarrow+\infty} u_n(0) = 1 \neq 0$: $(\sum u_n)$ diverge.

• Soit $x \in \mathbf{R}_+^*$. $\lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} = \lim_{n\longrightarrow+\infty} (e^{-x})^{2n+1} = 0 < 1$: le critère de D'Alembert donne la converge de $(\sum u_n)$.

Conclusion : $\boxed{(\sum u_n) \text{ converge simplement sur } \mathbf{R}_+^*.}$

– $u_n\left(\frac{1}{n^2}\right) = e^{-1}$ est le terme général d'une série divergente.

Conclusion : $\boxed{(\sum u_n) \text{ ne converge pas uniformément.}}$

c) – $\forall x \geq 0$, $\left|\frac{e^{-n^2x}}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$: $(\sum u_n)$ converge normalement donc uniformément sur $\mathbf{R}_+$ vers 0.

– Soit $x < 0$. $\lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{e^{-n^2x}}{n^2} = +\infty$: $(\sum u_n)$ diverge sur $\mathbf{R}_-^*$.

d) Pour tout $x \in \mathbf{R}_+$, $\dfrac{1}{2^{n-1}\sqrt{1+nx}} \leq \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

Conclusion : $\boxed{(\sum u_n) \text{ converge uniformément sur } \mathbf{R}_+.}$

e) – Soit $x \in \mathbf{R}$.

- Si $x \in \mathbf{R}_+^*$ alors $\left|\dfrac{\cos(nx)}{e^{nx}}\right| \leq \dfrac{1}{e^{nx}} = \left(\dfrac{1}{e^x}\right)^n$.
- Si $x = 0$ alors $u_n(0) = 1$ est le terme général d'une série divergente.
- Si $x \in \mathbf{R}_-^*$ alors $u_n(x)$ n'a pas de limite quand n tend vers $+\infty$.

Conclusion : $\boxed{(\sum u_n) \text{ converge simplement sur } \mathbf{R}_+^*.}$

– Pour $n \in \mathbf{N}^*$, $u_n\left(\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{\cos 1}{e}$ n'est pas le terme général d'une série convergente.

Conclusion : $\boxed{(\sum u_n) \text{ ne converge pas uniformément sur } \mathbf{R}_+^*.}$

– Soit $a \in \mathbf{R}_+^*$. Pour tout $x \in [a, +\infty[$, $|u_n(x)| \leq \dfrac{1}{e^{na}}$.

Conclusion : $\boxed{(\sum u_n) \text{ converge uniformément sur } [a, +\infty[.}$

25 a) Soit $p > 1$. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ et $x \in \mathbf{R}$, on a $\left|\dfrac{\sin(nx)}{n^p}\right| \leq \dfrac{1}{n^p}$.

Conclusion : $\boxed{(\sum u_n)_n \text{ converge normalement sur } \mathbf{R}.}$

b) Soit $p \in\ ]0, 1]$. $\dfrac{1}{n^p}$ est décroissant vers 0 et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin(kx)$ étant uniformément bornée sur $[\alpha, \beta]$ (cf. exercice 32 du chapitre 7) ; on peut appliquer le critère d'ABEL.

Conclusion : $\boxed{(\sum u_n) \text{ converge uniformément sur } [\alpha, \beta].}$

26 a) Soit $(\sum u_n)$ une série d'applications normalement convergente vers S.
Par définition, il existe a_n tel que :
– Pour tout $x \in \mathbf{R}$, $|u_n(x)| \leq a_n$.
– a_n est le terme général d'une série convergente.

Pour tout x, on a donc
$$\left|\sum_{k=0}^{n} u_k(x) - S(x)\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)\right| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} |u_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k.$$

Finalement, $\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k(x) - S(x)\right)_n$ converge uniformément vers 0.

Conclusion : $\boxed{(\sum u_n) \text{ est uniformément convergente.}}$

b) (i) – Soit $x \in [0, 1]$.
$\dfrac{(-1)^n}{(n+1)(x+1)}$ est le terme général d'une série alternée et $\dfrac{1}{(n+1)(x+1)}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$; d'après le théorème spécial des séries alternées, $(\sum u_n)$ converge donc (vers S).

– Pour tout $x \in [0,1]$, on a :

$$\left|S(x) - \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{(n+1)(x+1)}\right| = \left|\frac{1}{x+1}\right| \left|\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}\right|$$
$$\leq \frac{1}{0+1}\left|\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}\right|.$$

Or $\left|\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}\right|$ tend vers 0 quand N tend vers $+\infty$ indépendamment de x.

Conclusion : $\boxed{(\sum u_n) \text{ converge uniformément sur } [0,1].}$

(ii) Pour tout $x \in [0,1]$, $|u_n(x)| = \frac{1}{(n+1)(x+1)} \geq \frac{1}{2(n+1)}$.

$(\sum |u_n|)$ n'est donc pas absolument convergente donc ne peut pas être normalement convergente.

27 a) Soit $x \in [0,+\infty[$.

$\frac{e^{-nx}}{n+1}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ en décroissant : $(-1)^n \frac{e^{-nx}}{n+1}$ est donc le terme général d'une série alternée convergente.

b) – Pour tout $x \in [a,+\infty[$, on a $|u_n(x)| \leq e^{-nx} \leq e^{-na} = (e^{-a})^n$.
$(e^{-a})^n$ est le terme général d'une série géométrique de raison strictement inférieure à 1.

Conclusion : $\boxed{(\sum u_n) \text{ converge normalement sur } [a,+\infty[.}$

– $\sup_{x \in]0,+\infty[} \left|(-1)^n \frac{e^{-nx}}{n+1}\right| = \frac{1}{n+1}$.

$\frac{1}{n+1}$ étant le terme général d'une série divergente, on ne peut pas avoir la convergence normale sur $]0,+\infty]$ ni sur $[0,+\infty[$.

c) Soit $x \in \mathbb{R}_+$.

$u_n(x)$ étant le terme général d'une série alternée, sa somme est comprise entre deux termes consécutifs de la somme partielle.

Conclusion : $\boxed{\sum_{k=1}^{2n+1} u_k(x) \leq f(x) \leq \sum_{k=1}^{2n} u_k(x)}$

d) D'après 27c), $|f(x) - S_n(x)| \leq |S_{n+1}(x) - S_n(x)| = \frac{e^{-(n+1)x}}{n+2} \leq \frac{1}{n+2}$.

Conclusion : $\boxed{(\sum u_n)_n \text{ est uniformément convergente sur } [0,+\infty[.}$

28 a) Soit $x \in]0,+\infty[$.

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} = \lim_{n \to +\infty} \frac{n+1}{n} e^{-x} = \frac{1}{e^x} < 1$$

Conclusion : $\boxed{(\sum u_n)_n \text{ converge simplement sur } \mathbb{R}_+^*.}$

b) – Soit $a \in \mathbf{R}_+^*$. Pour tout $x \in [a, +\infty[$, on a $ne^{-nx} \leq ne^{-na}$. ne^{-na} est le terme général d'une série convergente : $(\sum u_n)_n$ converge normalement et donc uniformément sur $[a, +\infty[$.

– $(\sum u_n)$ ne converge pas uniformément sur $[0, +\infty[$ car ne converge pas en 0.

c) Pour $x \in [1, +\infty[$ et $n \in \mathbf{N}$, on pose $v_n(x) = e^{-nx}$

– Pour tout x, n, $v_n'(x) = -ne^{-nx} = -u_n(x)$. $(\sum u_n)$ étant uniformément convergente sur $[1, +\infty[$ d'après 28b), $(\sum v_n')$ l'est aussi et donc :

$$\forall x \in [1, +\infty[, \sum_{n=0}^{+\infty} v_n'(x) = \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\Big)'(x).$$

– Or $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} v_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (e^{-x})^n = \frac{1}{1-e^{-x}}$.

D'où : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} ne^{-nx} = -\sum_{n=0}^{+\infty} v_n'(x) = -\Big(\frac{1}{1-e^{-x}}\Big)'(x) = -\frac{e^x}{(1-e^x)^2}$.

Conclusion : $\boxed{\forall x \in [1, +\infty[, \sum_{n=0}^{+\infty} ne^{-nx} = \frac{e^{-x}}{(1-e^{-x})^2}}$

29 a) $\forall x \in \mathbf{R}$, $\arctan x \leq \dfrac{\pi}{2}$ d'où $f_n(x) \leq \dfrac{\pi}{2n^2}$.

Conclusion : $\boxed{(\sum u_n) \text{ converge normalement sur } \mathbf{R}.}$

b) $\forall n$, f_n est continue sur $\mathbf{R}$ et d'après 29a), $(\sum f_n)$ converge uniformément sur $\mathbf{R}$.

Conclusion : $\boxed{S \text{ est continue sur } \mathbf{R}.}$

c) (i) Soit $T > 0$. Pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f_n'(x) = \dfrac{1}{n(1+n^2x^2)} \sim \dfrac{1}{n^3x^2}$.

De plus, $\forall x \in\ ]-\infty, -T] \cup [T, +\infty[$, on a $\left|\dfrac{1}{n^3x^2}\right| \leq \dfrac{1}{T^2} \times \dfrac{1}{n^3}$.

$(\sum f_n')$ converge donc normalement sur $]-\infty, -T] \cup [T, +\infty[$.

(ii) Soit $x_0 \in \mathbf{R}^*$. D'après 29(c)i), $(\sum f_n')$ converge normalement sur $[|x_0|, +\infty[$.

Conclusion : $\boxed{S \text{ est } C^1 \text{ en } x_0 \in \mathbf{R}^*.}$

30 a) Pour tout $x \geq 0$, $\left|e^{-nx} \sin \dfrac{\pi}{2^n}\right| \leq \sin \dfrac{\pi}{2^n} \leq \dfrac{\pi}{2^n}$.

Conclusion : $\boxed{(\sum u_n) \text{ est normalement convergente sur } \mathbf{R}_+.}$

b) u_n est dérivable sur $\mathbf{R}_+$ et pour tout $x \geq 0$, $|u_n'(x)| = \left|-ne^{-nx} \sin \dfrac{\pi}{2^n}\right| \leq \dfrac{n\pi}{2^n}$: $(\sum u_n')$ est donc normalement convergente sur $\mathbf{R}_+$.

On peut donc permuter les $\sum$ et les dérivées : $\displaystyle\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\Big)'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n'(x)$.

31 Pour $n \geq 2$ et $x \in \mathbf{R}$, on pose $u_n(x) = \dfrac{1}{n^2 + \sin(nx)}$.

a) $\forall x \in \mathbf{R}$, $\left|\dfrac{1}{n^2 + \sin(nx)}\right| \leq \dfrac{1}{n^2 - 1}$ qui est le terme général d'une série convergente.

Conclusion : $\boxed{(\sum u_n) \text{ est normalement convergente sur } \mathbf{R} : f \text{ est définie sur } \mathbf{R}.}$

b) Pour tout n, u_n est continue sur $\mathbf{R}$. $(\sum u_n)$ convergeant uniformément sur $\mathbf{R}$ vers f, f est continue aussi sur $\mathbf{R}$.

32 a) Pour tout $x \in [0,1]$, $\dfrac{x^n}{n^3(1+x^n)} \leq \dfrac{1}{n^3(1+0)} = \dfrac{1}{n^3}$.

Conclusion : $\boxed{(\sum u_n) \text{ converge normalement sur } [0,1].}$

b) Pour tout $x \in [0,1]$, $|u_n'(x)| = \left|\dfrac{x^{n-1}}{n^2(1+x^n)^2}\right| \leq \dfrac{1}{n^2}$: $(\sum u_n')$ est normalement convergente sur $[0,1]$ donc uniformément convergente.
D'après 32a), $(\sum u_n)$ est également uniformément convergente.

Conclusion : $\boxed{f : x \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) \text{ est dérivable sur } [0,1] \text{ et } f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n'(x).}$

33 a) Pour tout $x \in [0,1]$, $\left|\ln\left(1 + \dfrac{x}{n}\right) - \dfrac{x}{n}\right| \leq \dfrac{x^2}{2n^2} \leq \dfrac{1}{2n^2}$.

Conclusion : $\boxed{(\sum u_n) \text{ converge normalement sur } [0,1].}$

b) u_n est dérivable sur $[0,1]$ et $(\sum u_n)$ converge uniformément sur $[0,1]$.
De plus, pour tout $x \in [0,1]$, $|u_n'(x)| = \left|\dfrac{-x}{n(n+x)}\right| \leq \dfrac{1}{n^2}$: u_n' est le terme général d'une série absolument convergente sur $[0,1]$.

Conclusion : $\boxed{x \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n}\right) \text{ est dérivable.}}$

c) $\forall x \in [0,1]$, $f'(x) = -x \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+x)}$ donc en particulier $f'(1) = -\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.

Conclusion : $\boxed{f'(1) = -1}$

34 a) Soit $x \in \mathbf{R}_+$. Pour n suffisamment grand, on a :

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n x}{n(1+x)} + \frac{x^2}{2n^2(1+x)^2} + \frac{1}{n^2}\epsilon(n) \text{ avec } \lim_{+\infty} \epsilon = 0.$$

$f_n(x)$ est donc la somme d'une série semi-convergente et de séries absolument convergentes : $(\sum f_n)$ converge donc simplement sur $\mathbf{R}_+$.

b) $|f_n(n)| = \ln\left(1 + \dfrac{1}{n+1}\right) \sim \dfrac{1}{n+1}$ diverge.
On ne peut donc pas majorer $|f_n(n)|$ par le terme général d'une série convergente.

Conclusion : $\boxed{(\sum f_n) \text{ ne converge pas normalement sur } \mathbf{R}_+.}$

c) $f_n(x)$ est le terme général d'une série alternée donc : $|S_n - S| \leq |f_{n+1}(x)|$.

Ainsi, $\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)\right| \leq \ln\left(1 + \frac{x}{(n+1)(1+x)}\right) \leq \frac{x}{(n+1)(1+x)} \leq \frac{1}{n+1}$;

$|S_n(x) - S(x)|$ converge donc uniformément vers 0.

Conclusion : $\boxed{(\sum f_n) \text{ converge uniformément sur } \mathbf{R}_+.}$

35 a) Soit $x \in \mathbf{R}$:

– Si $0 < x < 1$ alors $u_n(x) \sim -\frac{x^{2n+3}}{2n+3}$.

– Si $x = 1$ alors $u_n(x) = \frac{16n+9}{(4n+3)(4n+1)(2n+3)} \sim \frac{1}{2n^2}$.

– Si $x > 1$ alors $u_n(x) \sim \frac{x^{4n+3}}{4n+3}$.

b) – Si $x = 0$ et si $x = 1$ alors $(\sum u_n)$ converge.

– Si $0 < x < 1$ alors, d'après 35a), $\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| \sim \frac{-x^{2n+2+3}}{2n+2+3}\frac{2n+3}{-x^{2n+3}} \sim x^2$.

– u_n étant impaire, l'étude est identique sur $[-1, 0]$.

Conclusion : $\boxed{(\sum u_n)_n \text{ converge sur } [-1,1].}$

c) (i) $\forall x,\ u_n'(x) = x^{4n+2} + x^{4n} - x^{2n+2}$ est la somme de termes généraux de séries géométriques convergentes.
De plus, $\forall x \in [-a, a]$, $|u_n'(x)| \leq a^{4n+2} + a^{4n} + a^{2n+2}$ avec $a^{4n+2} + a^{4n} + a^{2n+2}$ somme de séries convergentes.

Conclusion : $\boxed{(\sum u_n')_n \text{ converge normalement sur } [-a,a].}$

(ii) $\lim_{x \to 1} u_n'(x) = 1$: $(\sum u_n')_n$ n'est pas uniformément convergente sur $]-1, 1[$.

d) (i) – Soit $N \in \mathbf{N}^*$. On a $\sum_{n=0}^{N} u_n(0) = \sum_{n=0}^{N} 0 = 0$. Donc $\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(0) = 0}$

– D'après 35(c)i), $(\sum u_n)$ converge uniformément sur $[-a, a]$ donc :

$$\forall x \in [-a,a],\ \left(\sum_{n=1}^{+\infty} u_n\right)'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n'(x).$$

$$\text{Or } \sum_{n=0}^{+\infty} u_n'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{4n+2} + \sum_{n=0}^{+\infty} x^{4n} - \sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n+2}$$
$$= x^2\sum_{n=0}^{+\infty}(x^4)^n + \sum_{n=0}^{+\infty}(x^4)^n - x^2\sum_{n=0}^{+\infty}(x^2)^n$$
$$= \frac{x^2}{1-x^4} + \frac{1}{1-x^4} - \frac{x^2}{1-x^2}.$$

Conclusion : $\boxed{\forall x \in [-a,a],\ \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)'(x) = 0}$

– $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est donc une fonction constante, par exemple, $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(0)$.

Soit $x_0 \in]-1,1[$. Soit $a \in]0,1[$ tel que $x_0 \in]-a,a[\subset]-1,1[$.

D'après ce qui précède, on a pour tout $x \in]-a,a[$, $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = 0$.

Conclusion : $\boxed{\forall x_0 \in]-1,1[,\ \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = 0}$

(ii) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $q > p > 1$.

– Si $x \in [p-1,p]$, $\frac{1}{p-1} \geq \frac{1}{x} \geq \frac{1}{p}$ d'où $\frac{1}{p-1} \geq \int_{p-1}^{p} \frac{dx}{x} \geq \frac{1}{p}$.

On en déduit que $\sum_{k=p-1}^{q-1} \frac{1}{k} \geq \int_{p-1}^{q} \frac{dx}{x} \geq \sum_{k=p}^{q} \frac{1}{k}$ et :

$$\int_{p-1}^{q} \frac{dx}{x} \geq \sum_{k=p}^{q} \frac{1}{k} \geq \int_{p}^{q+1} \frac{dx}{x}.$$

Conclusion : $\boxed{\ln\left(\frac{q}{p-1}\right) \geq \sum_{n=p}^{q} \frac{1}{n} \geq \ln\left(\frac{q-1}{p-1}\right)}$

– Soit $N \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N} u_n(1) &= \left(\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{4n+3} + \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{4n+1}\right) - \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{2n+3}\\ &= \sum_{n=0}^{2N+1} \frac{1}{2n+1} - \sum_{n=1}^{N+1} \frac{1}{2n+1}\\ &= 1 + \sum_{n=N+2}^{2N+1} \frac{1}{2n+1} = 1 + \sum_{n=2N+3}^{4N+3} \frac{1}{n} - \frac{1}{2}\sum_{n=N+2}^{2N+1} \frac{1}{n}.\end{aligned}$$

D'après ce qui précède, on en déduit que :

$$1 + \ln\left(\frac{4N+3}{2N+2}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{2N+1}{N+1}\right) \geq \sum_{n=0}^{N} u_n(1) \geq 1 + \ln\left(\frac{4N+2}{2N+2}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{2N}{N+1}\right).$$

Conclusion : $\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(1) = 1 + \frac{1}{2}\ln 2}$

(iii) On a $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = 0$ si $x \in]-1,1[$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(1) \neq 0$.

La limite de la série n'est donc pas continue sur $[-1,1]$: la convergence n'est donc pas uniforme sur $[-1,1]$.

36 a) Pour $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) \sim \left(\cos\frac{x}{2^n} - 1\right) \sim -\frac{1}{2}\frac{x^2}{2^{2n}}$.

Conclusion : $\boxed{(\sum f_n)_n \text{ converge simplement sur } \mathbb{R}.}$

b) (i) Si $n \in \mathbf{N}$, $v_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(\cos\frac{x}{2^k}\right) + \ln\left(\cos\frac{x}{2^n}\right) + \ln\left(\sin\frac{x}{2^n}\right)$

$$= v_{n-1}(x) - \ln\left(\sin\frac{x}{2^{n-1}}\right) + \ln\left(\cos\frac{x}{2^n}\right) + \ln\left(\sin\frac{x}{2^n}\right)$$

$$= v_{n-1}(x) + \ln\left(\frac{\sin\frac{x}{2^n}\cos\frac{x}{2^n}}{\sin\frac{x}{2^{n-1}}}\right)$$

$$= v_{n-1}(x) + \ln\left(\frac{1}{2}\right).$$

(ii) Donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} f_k(x) = v_n(x) - \ln\left(\sin\frac{x}{2^n}\right)$

$$= v_0(x) - n\ln 2 - \ln\left(\sin\frac{x}{2^n}\right) \quad \text{d'après 36(b)i)}$$

$$= \ln(\cos x) + \ln(\sin x) - n\ln 2 - \ln\left(\sin\frac{x}{2^n}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{\sin x\cos x}{2^n \sin\frac{x}{2^n}}\right).$$

Conclusion : $\boxed{\lim_{n\longrightarrow+\infty} \sum_{k=0}^{n} f_k(x) = \ln\left(\frac{\sin x\cos x}{x}\right)}$

c) (i) f_n est définie si $\cos\frac{x}{2^n} > 0$. Or il existe n_0 tel que si $n \geq n_0$ alors $\frac{x}{2^n} < \frac{\pi}{2}$.

Conclusion : $\boxed{\forall n \geq n_0,\ f_n \text{ est définie.}}$

(ii) $-\displaystyle\sum_{n=n_0}^{+\infty} \ln\left(\cos\frac{x}{2^n}\right) = \sum_{n=n_0}^{+\infty} \ln\left(\cos\frac{u}{2^{n-n_0}}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \ln\left(\cos\frac{u}{2^k}\right).$

$$-\sum_{n=n_0}^{+\infty} \ln\left(\cos\frac{x}{2^n}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \ln\left(\cos\frac{u}{2^k}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(u)$$

$$= \ln\left(\frac{\sin u\cos u}{u}\right) \quad \text{d'après 36b).}$$

Conclusion : $\boxed{\sum_{n=n_0}^{+\infty} \ln\left(\cos\frac{x}{2^n}\right) = \ln\left(\frac{2^{n_0-1}}{x}\sin\frac{x}{2^{n_0-1}}\right)}$

d) Si $x = 0$ alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} f_k(0) = 0$.

Pour tout n, f_n est paire : on calque le résultat de ci-dessus sur le cas $x > 0$.