

## ✠-Examen de Rattrapage de Probabilités et Statistiques-✠

**Exercice 1** (06.00 points) :

Au service du personnel, on compte 12 célibataires parmi les 30 employés. On désire faire un sondage : pour cela on choisit un groupe de quatre personnes dans ce service.

1. Quel est le nombre de groupes différents possibles ?
2. Quel est le nombre de groupes ne contenant aucun célibataire ?
3. Quel est le nombre de groupes contenant exactement deux célibataires ?
4. Quel est le nombre de groupes contenant au moins un célibataire ?

**Exercice 2** (08.00 points) :

Le personnel d'un hôpital est réparti en trois catégories : les médecins, les soignants et le personnel AT (Administratif ou Technique). 12% sont des médecins et 71% sont des soignants. 67% des médecins sont des hommes et 92% des soignants sont des femmes. De plus, on sait que 80% du personnel de l'hôpital est féminin. Un membre du personnel de cet hôpital est tiré au hasard.

1. Quelle est la probabilité que la personne désignée soit un AT ?
2. Sachant que la personne désignée est un médecin. Quelle est la probabilité qu'elle soit une femme ?
3. Sachant que la personne désignée est un soignant. Quelle est la probabilité qu'elle soit un homme ?
4. Quelle est la probabilité que la personne désignée soit un homme ?
5. Quelle est la probabilité que l'on désigne une femme soignante ?
6. Un homme a été désigné. Quelle est la probabilité qu'il soit médecin ?
7. Quelle est la probabilité que la personne désignée soit une femme sachant qu'elle fait partie du personnel AT ?

**Exercice 3** (06.00 points) :

Soit  $X$  une variable aléatoire de densité de probabilité  $f$  définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 0.5x, & \text{si } x \in [0, 1]; \\ 0.5, & \text{si } x \in [1, 2]; \\ 1.5 - 0.5x, & \text{si } x \in [2, 3]; \\ 0, & \text{sinon;} \end{cases}$$

1. Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire  $X$ .
2. Calculer  $E(X)$ .
3. Calculer  $P(1 \leq X \leq \frac{5}{2})$  et  $P(X > 3)$ .
4. Déduire la valeur de  $x_0$  pour que,  $P(X \leq x_0) = \frac{1}{4}$ .

—Bonne Chance—

Mme DJOUADI & Mr Boualem

# Corrigé Examen

## Probabilité - Statistique

### 2020-2021

Exercice N°1: 06 pts

①  $C_{30}^4 = 27405$  groupes possibles. 1 pt

②  $C_{18}^4 = 3060$  groupes possibles. 1 pt

③  $C_{12}^2 \times C_{18}^2 = 10098$  groupes possibles 2 pt

④  $C_{30}^4 - C_{18}^4 = 27405 - 3060 = 24345$  groupes possibles 2 pt

ou

$$\begin{aligned}
 & \underbrace{C_{12}^1 * C_{18}^3}_{9792} + \underbrace{C_{12}^2 * C_{18}^2}_{10098} + \underbrace{C_{12}^3 * C_{18}^1}_{3960} + \underbrace{C_{12}^4}_{495} \\
 &= 9792 + 10098 + 3960 + 495 \\
 &= 24345 \text{ groupes possibles. } \checkmark
 \end{aligned}$$

# Exercice N°2 : 08 pts

Soient les événements suivants :

M : "La personne est un Médecin".

AT : "La personne est un Administratif ou Technique".

S : "La personne est un Soignant".

H : "La personne est un Homme".

F : "La personne est une femme".

on a les données suivantes :

$$P(M) = 0,12 \quad \text{=} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{0,5 pt}$$

$$P(S) = 0,71 \quad \text{=}$$

$$\textcircled{1} \quad P(AT) = 1 - P(M) - P(S) \\ = 1 - 0,12 - 0,71 = 0,17$$

$$P(AT) = 0,17 \quad \text{=} \quad \textcircled{1} \text{ pt}$$

$$\textcircled{2} \text{ on a } P(H/M) = 0,67.$$

$$P(F/M) = 1 - P(H/M) = 1 - 0,67 = 0,33$$

$$P(F/M) = 0,33 \quad \text{=} \quad \textcircled{1} \text{ pt}$$



3) on a  $P(F/S) = 0,92$

$$P(H/S) = 1 - P(F/S) = 1 - 0,92 = 0,08$$

$$P(H/S) = 0,08 = \textcircled{1} \text{ pt}$$

4) on a  $P(F) = 0,80$

$$P(H) = 1 - P(F) = 1 - 0,80 = 0,20$$

$$P(H) = 0,20 = \textcircled{1} \text{ pt}$$

5) Une femme soignante se brasoit par l'évènement  $F \cap S$ .

$$P(F \cap S) = P(F/S) P(S) \quad \left. \begin{array}{l} \text{la formule des probabilités} \\ \text{conditionnelles.} \end{array} \right\}$$

$$= 0,92 \cdot 0,71 = 0,6532 = \textcircled{1} \text{ pt}$$

6)  $P(M/H) = \frac{P(M \cap H)}{P(H)} = \frac{P(H/M) P(M)}{P(H)}$

$$= \frac{0,67 \cdot 0,12}{0,2} = 0,402 = \textcircled{1} \text{ pt}$$

$$\textcircled{7} \quad P(F/AT) = ?$$

On utilisant la formule des probabilités totales

$$P(H) = P(H/M) \cdot P(M) + P(H/S)P(S) + P(H/AT)P(AT) = 0,2$$

$$\Leftrightarrow P(H/AT) = 0,3694 = \textcircled{1} \text{ pt}$$

$$P(F/AT) = 1 - P(H/AT)$$

$$= 1 - 0,3694 = 0,6305 = \textcircled{0,5} \text{ pt}$$

Exercice N°3: 06 Pts soit

$$f(x) = \begin{cases} 0,5x & \text{si } x \in ]0,1] \\ 0,5 & \text{si } x \in ]1,2] \\ 1,5 - 0,5x & \text{si } x \in ]2,3] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

① La fonction de répartition :

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

Cas 1 : si  $x \in ]-\infty, 0[$

$$F_X(x) = 0$$

Cas 2 : si  $x \in ]0,1]$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^0 f(t) dt + \int_0^x f(t) dt$$

$$= \int_0^x 0,5t dt = \left[ \frac{1}{4}t^2 \right]_0^x = \frac{1}{4}x^2$$

Cas 3: si  $x \in ]1, 2]$

$$\begin{aligned}
 F_X(x) &= \int_{-\infty}^0 \cancel{f(t)} dt + \int_0^1 f(t) dt + \int_1^x f(t) dt \\
 &= \int_0^1 0,5 t dt + \int_1^x 0,5 dt \\
 &= \frac{1}{4} [t^2]_0^1 + \frac{1}{2} [t]_1^x = \frac{1}{2} x - \frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

Cas 4: si  $x \in ]2, 3]$

$$\begin{aligned}
 F_X(x) &= \int_{-\infty}^0 \cancel{f(t)} dt + \int_0^1 f(t) dt + \int_1^2 f(t) dt + \int_2^x \cancel{f(t)} dt \\
 &= \int_0^1 0,5 t dt + \int_1^2 0,5 dt + \int_2^x (1,5 - 0,5 t) dt \\
 &= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} [t^2]_1^2 + \frac{3}{2} [t]_2^x - \frac{1}{2} [t^2/2]_2^x \\
 &= -\frac{1}{4} x^2 + \frac{3}{2} x - \frac{5}{4}
 \end{aligned}$$

Cas 5: si  $x \geq 3$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$$

$$F_X(x) = 1.$$



Donc la fonction de Répartition est

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in ]-\infty, 0] \\ \frac{1}{4}x^2 & \text{si } x \in ]0, 1] \\ \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} & \text{si } x \in ]1, 2] \\ -\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{5}{4} & \text{si } x \in ]2, 3] \\ 1 & \text{si } x \geq 3. \end{cases}$$

2



②  $E(X) = ?$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

$$= \int_{-\infty}^0 x f(x) dx + \int_0^1 x \frac{1}{2} dx + \int_1^2 \left( \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}x^2 \right) dx + \int_2^{+\infty} x f(x) dx$$

$$= \left[ \frac{x^3}{6} \right]_0^1 + \left[ \frac{x^2}{4} \right]_1^2 + \left[ \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{6}x^3 \right]_2^3$$

$$= 1,5$$

$$\boxed{E(X) = 1,5} \quad \text{①}$$

③ Calculer  $P(1 \leq X \leq \frac{5}{2}) = ?$

$$P(1 \leq X \leq \frac{5}{2}) = F(\frac{5}{2}) - F(1) = \frac{3}{2}(2,5) - \frac{1}{4}(2,5)^2 - \frac{5}{4} - \frac{1}{4}$$

$$= 0,6875 \quad \text{①}$$

• Calculer  $P(X > 3) = ?$

$$P(X > 3) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - 1 = 0.$$

$$P(X > 3) = 0. \quad \text{①}$$

④ Déterminer  $x_0$  :

$$P(X \leq x_0) = \frac{1}{4} \Rightarrow x_0 = 1 \quad \text{①}$$