Rouiba le, 11.11.2006

ECOLE NATIONALE PRÉPARATOIRE AUX ÉTUDES D'INGÉNIORAT
3ème ANNEE PREPARATOIRE
MODULE : PROBABILITES-STATISTIQUES

Epreuve Partielle 1

Durée : 2 heures

Exercice 1 (5 points)

Nous considérons une série statistique dont le nombre d'observations dépasse 30.

1. Expliciter comment déterminer le paramètre Q_3 (le troisième quartile) avant de regrouper les données en classes.

2. Après avoir regroupé les observations en classes, le paramètre Q_3 est supposé sur une droite, écrire l'équation de cette droite et déduire la valeur de Q_3.

Exercice 2 (8 points)

Soit la distribution suivante des salaires (en milliers de dinars) dans une entreprise.

classes	$[5,7[$	$[7,11[$	$[11,13[$	$[13,15[$	$[15,19[$
F_i	0.04	0.14	0.44	0.96	1

F_i : sont les fréquences cummulées.

1. Dresser l'histogramme des fréquences (la correction des fréquences est recommandée).

2. Calculer le mode, la médiane et la moyenne. Conclure quant à la symétrie de la distribution.

3. Calculer l'écart type.

4. On donne : $\sum_i n_i x_i = 1905$. Calculer l'effectif total n et l'effectif n_i de chaque classe.

Exercice 3 (7 points)

Le tableau ci-dessous donne la répartition de 100 employés en fonction du salaire hebdomadaire X (en milliers de DA) et de l'ancienneté Y (exprimée en années) :

$X \setminus Y$	$[0,4[$	$[4,8[$	$[8,12[$	$[12,16[$	$[16,20[$
$[4,10[$	12	10	10	8	0
$[10,16[$	8	14	5	4	4
$[16,22[$	0	6	5	6	3
$[22,28[$	0	0	0	2	3

1. (i) Que représente le nombre 14.

   (ii) Donner le pourcentage des employés ayant un salaire entre 10000 DA *et* 22000 DA.

   (iii) Donner le pourcentage des employés ayant une ancienneté dépassant 12 ans.

   Déterminer les distributions marginales des effectifs et des fréquences.

2. Etudier l'indépendance des deux caractères.

3. Déterminer la distribution conditionnelle de Y sachant $X \in [16,20[$ et trouver sa moyenne arithmétique.

E .N.P.E.I

Corrigé du 1er examen partiel de
Probabilités/Statistiques.
(Du 11/11/2006)

EXERCICE 1

1/ Calcul de Q_3 pour une série discrète :

-Ordonner la série

-Calculer Q=3n/4

-Si Q est entier : $Q_3=(x_Q+x_{Q+1})/2$

Sinon $Q_3=x_{[Q]+1}$

2/ Calcul de Q_3 pour un caractère continu

-Identifier la classe $[e_i,e_{i+1}[$ d'appartenance de Q_3

-Poser : $F_i=F(e_i)$, $F_{i+1}=F(e_{i+1})$, $f_i=F(e_{i+1})-F(e_i)$, $u_i=e_{i+1}-e_i$

-Equation de la droite $y = ax + b$ avec :

$$a = \frac{f_i}{u_i}; b = F_i - \frac{f_i}{u_i} e_i$$

-$Q_3 = e_i + u_i \dfrac{0.75 - F_i}{f_i}$

EXERCICE 2

1/ Histogramme

Les classes étant d'amplitudes inégales, il convient de corriger les fréquences (pour le tracé de l'histogramme et le calcul du mode) en utilisant la formule : $f_i^c = \frac{f_i}{a_i}.PGCD(a_1, a_2, ..., a_5)$.

D'où le tableau :

Classes	[5,7[	[7,11[	[11,13[	[13,15[	[15,19[
F_i	0.04	0.14	0.44	0.96	1
f_i	0.04	0.1	0.3	0.52	0.04
f_i^c	0.04	0.05	0.3	0.52	0.02
$f_i x_i$	0.24	0.9	3.6	7.28	0.68
$f_i x_i^2$	1.44	8.1	43.2	101.92	11.56
n_i	6	15	45	78	6

(les 3 dernières lignes ne concernent pas la question 1)

2 / Mode – Médiane – Moyenne arithmétique

a)Mode :

-classe modale [13,15[

-Mode= $13 + \dfrac{f_i^c - f_{i-1}^c}{(f_i^c - f_{i-1}^c) + (f_i^c - f_{i+1}^c)} PGCG(a_1,...,a_5)$

-Mode= $13 + 2.\dfrac{0.52 - 0.3}{(0.52 - 0.3) + (0.52 - 0.02)} = 13.6$

Mode = 13.6 milliers DA

b) Médiane

-classe médiane : [13,15[

-Médiane= $= 13 + 2\dfrac{0.5 - 0.44}{0.96 - 0.44} = 13.2$

Médiane = 13.2 milliers DA

c) Moyenne arithmétique

$-\bar{x} = \sum_{i=1}^{5} f_i.x_i = 12.7$

-Moyenne arithmétique= 12.7 milliers DA

Conclusion : Mode > Médiane > Moyenne arithmétique $\Rightarrow$ Distribution oblique à droite ou étalée à gauche (confirmée par l'histogramme).

3/ Ecart type

$-\sigma = \left[\sum_{i=1}^{5} f_i.x_i^2 - \bar{x}^2\right]^{1/2} = 2.22$

-Ecart type=2.22 milliers DA

4/ Effectifs

$-n = \dfrac{\sum_{i=1}^{5} n_i.x_i}{\bar{x}} = 1905/12.7 = 150$

$-n_i = n.f_i$ (Voir tableau)

EXERCICE 3

1/ Pourcentages – Effectifs et fréquence marginaux

- Le nombre 14 représente le nombre d'employés ayant une ancienneté entre 4 et 8 ans et un salaire entre 10000 et 16000 DA.

-Pourcentage des employés ayant un salaire entre 10000 et 22000 DA = 35+20=55%

-Pourcentage des employés ayant une ancienneté dépassant 12 ans=20+10=30%

-Distributions marginales des effectif et fréquence de X :

Classes	[4,10[	[10,16[	[16,22[	[22,28[
Effectifs $n_{i.}$	40	35	20	5
Fréquences $f_{i.}$	0.40	0.35	0.20	0.05

- Distributions marginales des effectif et fréquence de Y :

Classes	[0,4[	[4,8[	[8,12[	[12,16[	[16,20[
Effectifs $n_{.j}$	20	30	20	20	10
Fréquences $f_{.j}$	0.20	0.30	0.20	0.20	0.10

2/ Indépendance des deux caractères

-X et Y sont dépendants s'il existe (i,j) tel que : $n_{ij} \neq \frac{n_{i.}.n_{.j}}{n}$

-Contre exemple : i=4 et j=2 : $0 \neq 30 * 5/100$

-Les deux caractères sont dépendants

3/ Distribution conditionnelle

La distribution conditionnelle de Y sachant que $x \in [16,22[$ est donnée par : $f_{j/i=3} = \frac{n_{ij}}{n_{i.}}$. D'où le tableau :

Classes	[0,4[	[4,8[	[8,12[	[12,16[	[16,20[
y_j	2	6	10	14	18
Fréquences $f_{j/i=3}$	0	0.30	0.25	0.30	0.15
$y_j.f_{j/i=3}$	0	1.8	2.5	4.2	2.7

De la dernière ligne du tableau, on déduit la moyenne arithmétique de Y sachant que $x \in [16,22[$:

$$\bar{y}_{i=3} = \sum_{j=1}^{5} f_{j/i=3}.y_j = 11.2 ans$$

17/03/2007

ÉCOLE NATIONALE PRÉPARATOIRE AUX ÉTUDES D'INGÉNIORAT
$3^{ème}$ ANNÉE PRÉPARATOIRE

PARTIEL 2
MODULE : PROBABILITÉS-STATISTIQUES

Exercice 1 (4 points=1+1.5+1+0.5)

Un prélèvement sur 17 patients a donné les résultats résumés dans le tableau ci-dessous.

X	329.64	450.06	369.42	326	630	245.19	473.73	520
Y	417.69	381.27	377.26	543	839	377	775.85	393
534.30	2387	385	368.93	363	677	84.72	342	610.12
652.85	3315	1023	564.80	470	778	2031	470	456.82

❶ Calculer les moyennes et variances marginales, et déduire les écarts types.

❷ Trouver les équations des deux droites d'ajustement linéaires D, D'.

❸ Tracer D, D' dans le même repère, et ajuster les aux points de nuages $(x_i, y_i)_{i=1,8}$.

❹ Conclure.

Exercice 2 (4 points=1+1.5+1.5)

On s'intéresse à une population de 1000 automobilistes débutants. Une enquête a révélée que, durant leur première année de conduite, 10 automobilistes ont provoqué un accident mortel. On tire un échantillon de 600 automobilistes et on désigne par X le nombre d'automobilistes qui ont provoqué un accident mortel.

❶ Quel est la loi de X. Déduire son espérance et sa variance.

❷ Calculer $P(X = 0)$ de deux manières différentes.

On admet que les individus de la population n'ont pas le même comportement en conduite. Soient C_1 l'ensemble des individus dangereux, d'effectif 100 avec une probabilité 0.4 de provoquer un accident mortel et C_2 l'ensemble d'individus "bon conducteurs" avec une probabilité de 0.2 de provoquer un accident mortel. Quel est la probabilité de provoquer un accident mortel ?

Exercice 3 (6 points=(3=1+1+1)+(3=1+1+1))

Un fabriquant de parfum veut promouvoir un type de parfum dont il fabrique. Il décide alors d'offrir des places de cinéma dans la moitié des boites de parfum mises en vente. Parmi les boites gagnantes, 60% permettent de gagner exactement une place de cinéma et 40% exactement deux places de cinéma. On note $P(A|B)$ la probabilité conditionnelle de l'événement A sachant que l'événement B est réalisé.

A Un client achète une boite de ce parfum.On considère les événements suivants :

1. G="le client achète une boite gagnante"
2. U="le client gagne exactement une place de cinéma"
3. D="le client gagne exactement deux places de cinéma".

   1. Donner $P(G), P(U|G)$ et $P(D|G)$
   2. Montrer que la probabilité de gagner exactement une place de cinéma est égale à 0.3.
   3. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de places de cinéma gagnées par le client. Déterminer la loi de probabilité de X. Calculer l'espérance mathématique de X.

B Un autre client achète deux jours de suite une boite de ce parfum.

1. Déterminer la probabilité qu'il ne gagne aucune place de cinéma.
2. Déterminer la probabilité qu'il gagne au moins une place de cinéma.
3. Montrer que la probabilité qu'il gagne exactement deux places de cinéma est égale 0.29.

Exercice 4 (6 points=(4=1+1+2)+2)

Une variable aléatoire X est dite de Cauchy si sa fonction de densité est donnée par :

$$f_X(x) = \frac{k}{a^2 + x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

où k et a sont des constantes et $a > 0$.

1. Trouver la valeur de k.
2. Calculer la fonction de répartition de X.
3. Calculer l'espérance et la variance de X.

Si Y a une distribution uniforme dans $(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2})$ quelle est la loi de la variable aléatoire $Z = tg(Y)$? donner la fonction de densité de Z.

ÉCOLE NATIONALE PRÉPARATOIRE AUX ÉTUDES
D'INGÉNIORAT
3ème ANNÉE PRÉPARATOIRE

Corrigé : PARTIEL 2 : PROBABILITÉS-STATISTIQUES

Exercice 1(4 points=1+1.5+1+0.5)

Un prélèvement sur 17 patients a donné les résultats résumés dans le tableau ci-dessous.

1. Les moyennes, les variances marginales et les écarts types :
$\overline{x} = 535.065$, $\overline{y} = 815.620$
$V(x) = 234873.816$, $V(y) = 541890.119$
$\sigma_x = 484.638$, $\sigma_y = 736.132$
2. Les équations des deux droites d'ajustement linéaires D, D' :
$a = \dfrac{cov(x,y)}{V(x)} = 1.145$; $b = \overline{y} - a\overline{x}$
$y = 1.145x + 202.970$, $a' = \dfrac{cov(x,y)}{V(y)} = 0.496$; $b' = \overline{x} - a'\overline{y}$
$x = 0.496y + 130.518$
3. Graphe : Chaque droite est construite à partir de deux points au moins.
4. Conclusion : $corr = 0.754$, c'est une correlation positive forte assez bonne. les deux droites sont proche l'une de l'autre de même direction, l'examen graphique conforte cette constatation.

Exercice 2 (4 points=1+1.5+1.5)

1. La loi de X : A = "Un automobiliste provoque un accident mortel" avec probabilité $p = \dfrac{1}{100}$
$\overline{A}$ = "Un automobiliste ne provoque pas un accident mortel" avec probabilité $q = \dfrac{99}{100}$. X la v.a. qui représente le nombre d'automobilistes qui provoquent un accident mortel suit une loi binomiale $\mathscr{B}(600; 0.01)$.
$P(X = k) = C_{600}^{k}(0.01)^{k}(0.99)^{(600-k)}$ pour $k = 0, 1, ..., 600$.
Espérance : $E(X) = np = 600 \times 0.01 = 6$. Variance : $V(X) = npq = 5.94$.
2. Calcule de $P(X = 0)$.
– Méthode 1 : **Directe** : $P(X = 0) = C_{600}^{0}(0.01)^{0}(0.99)^{(600-0)} = 0.0024$.
– Méthode 2 : **Approximation par la loi de poisson** : $P(X = 0) = \dfrac{\lambda^0 e^{-\lambda}}{0!}$; $\lambda = 6$; $P(X = 0) = 0.0024$.

La probabilité de provoquer un accident mortel : $|C_1| = 100$ avec $P(A|C_1) = 0.4$.
$|C_2| = 900$ avec $P(A|C_2) = 0.2$.
$P(A) = P(A|C_1)P(C_1) + P(A|C_2)P(C_2) = 0.22$.

Exercice3(6 points=1+1.5+1.5)

1. a) L'arbreci-co ntred écritlesdifferen tes situationsp ossibles.

Soitl a boite est gagnante,so it elle nel' esip as.

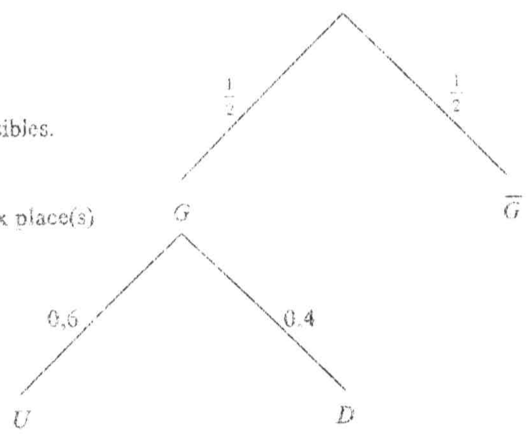
Si elle est gagnante, elle contient soit une, soit deux place(s) deciné ma.

Onaimm édiatement:

$P(G) = 0,5$

$P(U|G) = 0,6$

$P(D|G) = 0,4$



b) L'événement "gagnerex actementune plac ed ecinéma" est $G \cap U$.

Ona

$$P(G \cap U) = P(U \cap G) = P(U|G)\,P(G) = 0,6 \times 0,5 = 0,3$$

c) Calculonslap ~~ro~~babilitéde gagnerresp ectivement0 ,1et2 plac e(s)d eciné ma.

$P(X=0) = P(\overline{G}) = 0,5$

$P(X=1) = P(G \cap U) = 0,3$

$P(X=2) = P(G \cap D) = P(D/G)\,P(G) = 0,4 \times 0,5 = 0,2$

X	0	1	2	Total
Probabilités	0,5	0,3	0,2	1

On résumelaloide pro babilitéd e Xd ansletab leausuiva nt :

L'espérancem athématique $E(X)$d elavaria blealé atoire X estd onnéep arlafor mule:

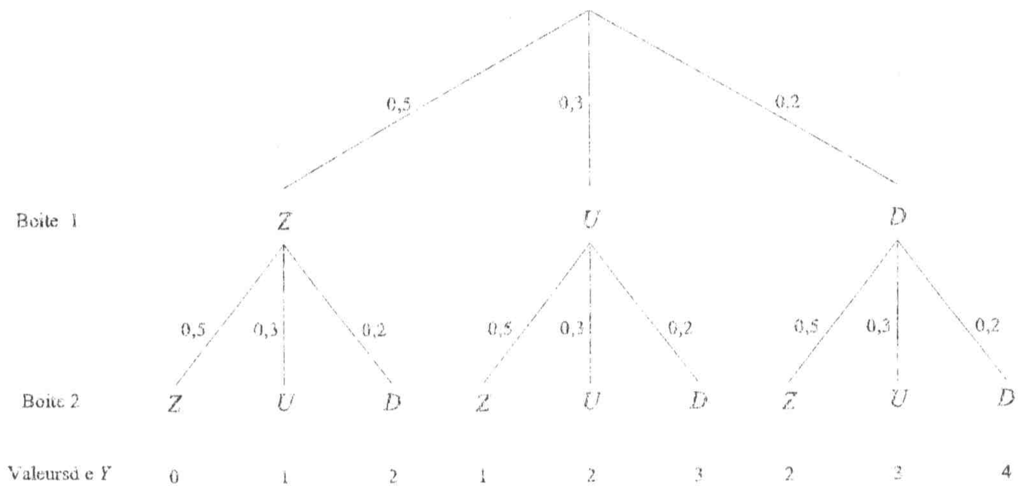
$$E(X) = 0,7$$

2. Notons Ylavaria blea léatoire correspondant auno mbred ebo ites gagnées par ceclient.

Lesdiff érentesva leursp ossiblesde Yso nt:0 ou1 ou 2o u3o u4 .

L'arbre ci-dessousil lustre toutesiessituation s possibles:

(Ona note Zl' événement" la boite rapportezéro p laced eciné ma".E nf ait, $Z = \overline{G}$)



a) Probabilitéq u'ilnega gne aucunep laced eciné ma : $P(Y=0) = 0,5 \times 0,5 = 0,25$(C hemin Z-Zsurl' arbre)

b) L'événement" ilg agne au moins une place de cinéma" estl e contraire de l'événement" iln e gagne aucune place de cinéma" : $P(Y \geqslant 1) = 1 - p(Y = 0) = 1 - 0,25 = 0,75$.

c) Probabilité qu'il gagne exactement deux places de cinéma :

$$P(Y = 2) = 0,5 \times 0,2 + 0,3 \times 0,3 + 0,2 \times 0,5 = 0,29$$

(Chemins D-Z ou U-U ou Z-D)

Exercice 4 (6 points=(3=1+1+1)+(3=1+1+1))

Une variable aléatoire X est dite de Cauchy si sa fonction de densité est donnée par :

$$f_X(x) = \frac{k}{a^2 + x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

où k et a sont des constantes et $a > 0$.

1. $k = \frac{a}{\pi}$.
2. La fonction de répartition de X : $F_X(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} Arctg\left(\frac{x}{a}\right)$
3. Calcule de l'espérance : $E(X) = 0$;
4. la variance de X n'existe pas.

Y a une distribution uniforme dans $(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2})$.

La loi de la variable aléatoire $Z = tg(Y)$:

Le fonction de répartition de X est :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x \leq -\frac{\pi}{2} \\ \frac{1}{\pi}(x + \frac{\pi}{2}) & x \in]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[\\ 1 & x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

La fonction de densité de Z :

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) \\ &= P(tgX \leq y) \\ &= P(X \leq Arctg(y)) \\ &= F_X(Arctg(y)) \\ &= \frac{1}{\pi}\left(Arctg(y) + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \frac{1}{\pi} Arctg(y) + \frac{1}{2}, \quad \forall y \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

NB : Concernant $E(x)$:

$$E(x) = \lim_{x \to \infty} \int_{-x}^{x} \frac{t\,k\,dt}{a^2 + t^2}$$

$$\varphi(t) = \frac{kt}{a^2 + t^2} \quad \text{impaire}$$

donc $E(x) = 0$.

19/05/2007

ÉCOLE NATIONALE PRÉPARATOIRE AUX ÉTUDES D'INGÉNIORAT
$3^{ème}$ ANNÉE PRÉPARATOIRE

SYNTHÈSE
MODULE : PROBABILITÉS-STATISTIQUES

Exercice 1 (4 points=0.5+0.5+2(0.5+1+0.5)+0.5+0.5)

Le coût annuel de maintenance d'un équipement informatique varie avec l'âge t des appareils. Le tableau suivant indique, pour un même type d'équipement, ce coût y en fonction de t. Dans ce tableau la troisième ligne correspond au logarithme népérien $z = lny$ du coût.

Age t_i en années	1	2	3	4	5	6
Coûts Y_i en KDA	14	15.5	18	20	23.3	28
$Z_i = ln(Y_i)$						

❶ Représenter le nuage de points $M_i(t_i, Z_i)$ dans un repère orthogonal du plan.

❷ Peut-on envisager un ajustement affine de ce nuage ? Expliquer.

❸ Déterminer, pour la série statistique double des deux variables (t, Z),
① le coefficient de corrélation linéaire r ;
② une équation $z = \phi(t) = at + b$ de la droite de régression linéaire D de Z en t, par la méthode des moindres carrés.
③ Tracer la droite D. Que peut-on observer pour D et le point $G(\overline{t}, \overline{Z})$?

❹ Déduire une expression du coût y en fonction de l'âge t.

❺ En admettant que l'évolution constatée du coût pendant ces six années puisse être utilisée pour prévoir le coût de la maintenance les années suivantes, indiquer les valeurs à envisager pour $t = 7$ et $t = 8$.

Exercice 2(6 points=1.5+1.5+1.5+1.5)

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la même loi géométrique $G(p)$.On pose : $U = \min(X, Y), V = \max(X, Y)$.

❶ Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire U.

❷ Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire V.Calculer son espérance mathématique et sa variance.

❸ Calculer le coefficient de corrélation de U et V.

❹ Déterminer la loi du couple aléatoire (U, V) : retrouver les résultats des questions précédentes.

Exercice 3(6 points=1+2(1.5+0.5)+2(1+1)+1)

Soit X une v.a. continue de fonction de répartition

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{2}{3}x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

❶ Déterminer la fonction densité de probabilité $f(x)$.

❷ Calculer le moment d'ordre n de X;. En déduire l'espérance et la variance de X.

❸ Calculer la fonction génératrice de X. Retrouver l'espérance et la variance de X.

❹ Calculer : $P(E(X) - \sqrt{V(X)} < X < E(X) - \sqrt{V(X)}$.

(N.B./ On a :$\Gamma(x) = \int_0^\infty u^{x-1}e^{-u}du$)

Exercice 4(4 points=2+2)

On considère une variable aléatoire X de fonction de densité

$$f_X(x) = \frac{\beta}{\delta}\left(\frac{x}{\delta}\right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{x}{\delta}\right)^{\beta}} \quad ; \qquad \text{pour } x > 0$$

$\delta > 0$ et $\beta > 0$.

❶ Déterminer la fonction de répartition de X.

❷ Calculer $E(X)$ et V(X).

Corrigé synthèse Prob/Stats

Date : 20/05/07

t	Y	z=lny	t^2	Z^2	Z*t
1	14	2,639057	1	6,96462359	2,63905733
2	15,5	2,74084	4	7,51220404	5,48168005
3	18	2,890372	9	8,3542489	8,67111527
4	20	2,995732	16	8,97441185	11,9829291
5	23,3	3,148453	25	9,91275856	15,7422668
6	28	3,332205	36	11,1035869	19,9932271
Tot 21		17,74666	91	52,8218338	64,5102756

On peut envisager un ajustement linéaire
car le nuage de point est concentré autour d'une droite
passant par la plus part des points.

tbar= 3,5	Zbar= 2,95777654	Var(t)= 2,91666667
	cov(t,Z)= 0,3994947	Var(Z)= 0,0551969
		corr(t,Z)= 0,9956582

0,5

$$a = \frac{cov(x,y)}{V(x)}$$

$$b = \overline{y} - a\overline{x}$$

1	2,63906
3,5	2,9578
6	3,3322

a=	0,13697
b=	2,47838

1

Z=0,137t+2,4784

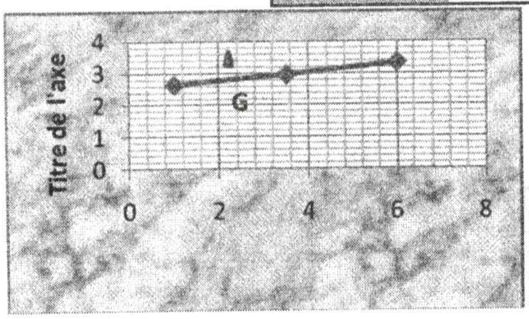
lnY=0,137t+2,4784 donc **Y=exp(0,137t+2,4784)**

0,5

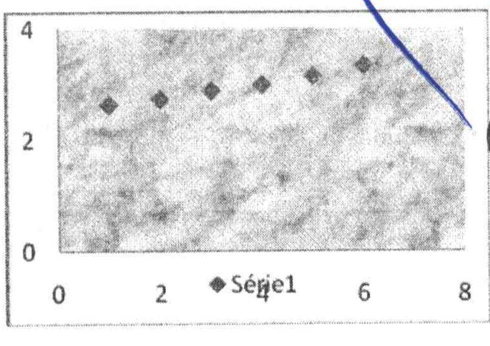
Y(7)=	**31,1**
Y(8)=	**35,66**

0,5

0,5



0,5



0,5

EXERCICE 2

1. X et Y prennent des valeurs entières non nulles, donc U et V prennent également des valeurs Entières non nulles. On a :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,$$
$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\mathsf{U}=k) &= \mathbb{P}(\min(\mathsf{X},\mathsf{Y})=k)\\
&= \mathbb{P}\Big(((\mathsf{X}=k)\cap(\mathsf{Y}=k))\cup((\mathsf{X}=k)\cap(\mathsf{Y}>k))\cup((\mathsf{X}>k)\cap(\mathsf{Y}=k))\Big)\\
&= (q^{k-1}p)^2+2q^{k-1}p\sum_{j=k+1}^{\infty}q^{j-1}p = p^2q^{2k-2}(1+\frac{2q}{1-q}) = pq^{2k-2}(1+q)\\
&= (q^2)^{k-1}(1-q^2) \quad 1
\end{aligned}$$

Donc U suit Geom($1 - q^2$) ce qui est « évident » sans calcul : si X et Y représentent les nombres de tirages nécessaires pour obtenir la première boule blanche dans deux urnes identiques,
alors U représente le nombre de tirages nécessaires pour obtenir la première boule blanche *dans l'une ou l'autre urne*.

2. **Loi de** V = max(X ;□Y)

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,$$
$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\mathsf{V}=k) &= \mathbb{P}(\max(\mathsf{X},\mathsf{Y})=k)\\
&= \mathbb{P}\Big(((\mathsf{X}=k)\cap(\mathsf{Y}=k))\cup((\mathsf{X}=k)\cap(\mathsf{Y}<k))\cup((\mathsf{X}<k)\cap(\mathsf{Y}=k))\Big)\\
&= (q^{k-1}p)^2+2q^{k-1}p\sum_{j=1}^{k-1}q^{j-1}p = p^2q^{k-1}(q^{k-1}+2\frac{1-q^{k-1}}{1-q})\\
&= pq^{k-1}(2-q^{k-1}-q^k) \quad 0{,}5
\end{aligned}$$

<u>Calcul de l'espérance mathématique de V</u>

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\mathsf{V}) &= p\sum_{k=1}^{\infty}kq^{k-1}(2-q^{k-1}-q^k) \quad 0{,}25\\
&= 2p\sum_{k=1}^{\infty}kq^{k-1}-p(q+1)\sum_{k=1}^{\infty}k(q^2)^{k-1}\\
&= p(\frac{2}{(1-q)^2}-\frac{1+q}{(1-q^2)^2}) \qquad \text{car} \qquad \sum_{k=1}^{\infty}kx^{k-1}=\frac{1}{(1-x)^2} \text{ si } |x|<1\\
&= \frac{1+2q}{1-q^2}.
\end{aligned}$$

On peut aussi remarquer que U + V = X + Y, et donc

$$\mathbb{E}(\mathsf{V}) = \mathbb{E}(\mathsf{X})+\mathbb{E}(\mathsf{Y})-\mathbb{E}(\mathsf{U}) = \frac{2}{p}-\frac{1}{1-q^2} = \frac{1+2q}{1-q^2}.$$

Calcul de la variance de V

$$\mathbb{E}(\mathsf{V}^2) \;=\; p\sum_{k=1}^{\infty} k^2 q^{k-1}\left(2-(1+q)q^{k-1}\right) = \cdots = \frac{2(1+q)^3-(1+q^2)}{(1-q^2)^2}.$$

$$\mathbf{Var}(\mathsf{V}) = \mathbb{E}(\mathsf{V}^2) - \mathbb{E}(\mathsf{V})^2 = \frac{q(2q^2+q+2)}{(1-q^2)^2}.$$ 0,25

3. On remarque immédiatement que $\mathsf{UV} = \mathsf{XY}$ et donc, puisque X et Y sont indépendantes :

$$\mathbb{E}(\mathsf{UV}) = \mathbb{E}(\mathsf{XY}) = \mathbb{E}(\mathsf{X})\mathbb{E}(\mathsf{Y}) = \frac{1}{p^2}.$$

$$\mathbf{Cov}(\mathsf{U},\mathsf{V}) = \mathbb{E}(\mathsf{UV}) - \mathbb{E}(\mathsf{U})\mathbb{E}(\mathsf{V}) = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{1-q^2}\times\frac{1+2q}{1-q^2} = \frac{q^2}{p^2(1+q)^2}$$

Donc,

$$\rho(\mathsf{U},\mathsf{V}) = \frac{\frac{q^2}{p^2(1+q)^2}}{\sqrt{\frac{q^2}{(1-q^2)^2}\times\frac{q(2q^2+q+2)}{(1-q^2)^2}}} = \sqrt{\frac{q}{2q^2+q+2}}.$$ 1

On peut également remarquer

$\mathbf{Var}(\mathsf{X}+\mathsf{Y}) = \mathbf{Var}(\mathsf{X}) + \mathbf{Var}(\mathsf{Y}) = \mathbf{Var}(\mathsf{U}+\mathsf{V}) = \mathbf{Var}(\mathsf{U}) + \mathbf{Var}(\mathsf{V}) + 2\,\mathbf{Cov}(\mathsf{U}\square\mathsf{V})$

et déduire la covariance des variances qui sont connues.

4. On distingue trois cas :

1. Si $i > j$, 1

$$\mathbb{P}\big((\mathsf{U}=i)\cap(\mathsf{V}=j)\big) = 0.$$

2. Si $i = j$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big((\mathsf{U}=i)\cap(\mathsf{V}=i)\big) &= \mathbb{P}\big((\mathsf{X}=i)\cap(\mathsf{Y}=i)\big)\\ &= \mathbb{P}(\mathsf{X}=i)\mathbb{P}(\mathsf{Y}=i) = (q^{i-1}p)^2\\ &= p^2q^{2i-2}.\end{aligned}$$

3. Si $i < j$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big((\mathsf{U}=i)\cap(\mathsf{V}=j)\big) &= \mathbb{P}\Big(\big((\mathsf{X}=i)\cap(\mathsf{Y}=j)\big)\cup\big((\mathsf{X}=j)\cap(\mathsf{Y}=i)\big)\Big)\\ &= 2(q^{i-1}p)(q^{j-1}p)\\ &= 2p^2q^{i+j-2}.\end{aligned}$$

Loi marginale de U

$$\begin{aligned}\forall i \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(\mathsf{U}=i) &= \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}((\mathsf{U}=i)\cap(\mathsf{V}=j)) \\ &= p^2q^{2i-2} + \sum_{j=i+1}^{\infty} 2p^2q^{i+j-2} = p^2q^{2i-2} + 2p^2q^{2i-1}\frac{1}{1-q} \\ &= (1-q^2)(q^2)^{i-1}.\end{aligned}$$

On retrouve le résultat de la question 1. Les autres résultats s'obtiennent sans difficulté après quelques calculs.

Solution Exercice 3 : +1

On a :

$$F(x) = 1 - \exp(-\frac{2}{3}x) \quad Si \quad x \succ 0$$
$$= 0 \quad Sinon$$

1) $f(x) = \dfrac{dF(x)}{dx} = \dfrac{2}{3}\exp(-\dfrac{2}{3}x) \quad Si \quad x \succ 0$ 1

2) $E(X^n) = \int_0^{\infty} x^n . \dfrac{2}{3}\exp(-\dfrac{2}{3}x)dx$

On pose $u = \dfrac{2}{3}x \Rightarrow du = \dfrac{2}{3}dx$

$$E(X^n) = \int_0^{\infty} (\frac{3}{2}u)^n . \frac{2}{3}\exp(-u)\frac{3}{2}du = (\frac{3}{2})^n \int_0^{\infty} u^n \exp(-u)du = (\frac{3}{2})^n \Gamma(n+1) = (\frac{3}{2})^n n!$$ 1,5

Pour n=1, on a $\mu = E(X) = \dfrac{3}{2}$ 0,5

Pour n=2, on a $E(X^2) = (\dfrac{3}{2})^2 2! = \dfrac{9}{2}$. D'où $Var(X) = \dfrac{9}{2} - (\dfrac{3}{2})^2 = \dfrac{9}{4} \Rightarrow \sigma_X = \dfrac{3}{2}$ 1

3) $M_X(t) = E(e^{tX}) = \int_0^{\infty} e^{tx} . \dfrac{2}{3}e^{-\frac{2}{3}x} dx = \dfrac{2}{3}\int_0^{\infty} e^{(t-\frac{2}{3})x} dx = \dfrac{2}{3(t-\frac{2}{3})} . [e^{(t-\frac{2}{3})x}]_{x=0}^{x=\infty}$ 1

Si $t \le \dfrac{2}{3}$ alors $M_X(t) = \dfrac{-2}{3t-2}$

On a : $M'_X(t) = \dfrac{6}{(3t-2)^2} \Rightarrow \mu = E(X) = M'_X(0) = \dfrac{3}{2}$ 1

Et $M''_X(t) = \dfrac{-36}{(3t-2)^3} \Rightarrow E(X^2) = M''_X(0) = \dfrac{9}{2}$; d'où : $Var(X) = \dfrac{9}{4}$ et $\sigma_X = \dfrac{3}{2}$

4) On a : $P(\mu-\sigma_X \prec X \prec \mu+\sigma_X) = P(0 \prec X \prec 3) = F(3) - F(0) = [1-e^{-\frac{2}{3}x}]_0^3 = 1-e^{-2} \approx 0.86$ 1

Exercice 4

1. **Fonction de répartition :** +1

$$F(x) = 1 - e^{-\left(\frac{x}{\delta}\right)^{\beta}}$$

2. **L'expérance et la variance :**

$$\mu = E(x) = \delta\Gamma\left(1+\frac{1}{\beta}\right) \quad \text{and} \quad \sigma^2 = V(x) = \delta^2\Gamma\left(1+\frac{2}{\beta}\right) - \delta^2\left[\Gamma\left(1+\frac{1}{\beta}\right)\right]^2$$

ÉCOLE NATIONALE PRÉPARATOIRE AUX ÉTUDES D'INGÉNIORAT

3ème ANNÉE PRÉPARATOIRE

Rattrapage / PROBABILITÉS-STATISTIQUES

04/06/07

EXERCICE 1 (3pts)

Un individu est tiré au hasard d'une population dans laquelle une personne sur 10000 est séropositive. On lui fait passer un test de dépistage de séropositivité. Sachant que le test est positif, quelle est la probabilité que la personne soit effectivement séropositive ?

Données :

- Si on est séropositif, alors le test est positif avec une probabilité de 0.99.
- Si on n'est pas séropositif, alors le test est positif avec une probabilité de 0.001.

EXERCICE 2 (7pts=3+2+2)

On tire trois boules d'une urne contenant deux boules rouges, trois boules blanches et quatre boules bleues. Soit (X,Y) le couple aléatoire où X représente le nombre de boules rouges et Y le nombre de boules blanches.

1. Donner la distribution conjointe.
2. Trouver les probabilités marginales correspondantes.
3. X, Y sont-elles indépendantes ?

EXERCICE 3 (5pts=2.5+2.5)

On considère un couple aléatoire (X,Y) de fonction densité conjointe $f_{X,Y}(x,y)$. Si X,Y sont indépendantes, déterminer la fonction densité de la variable aléatoire $Z = X/_Y$.

Application : appliquer le résultat ci-dessus pour $X,Y \sim N(0,1)$.

EXERCICE 4 (5pts=2+2+1)

L'expression mathématique d'un voltage est donnée par $V = Xcos(\nabla\omega t) + Ysin(\omega t)$ où ω est une constante qui représente la fréquence angulaire et X,Y sont deux variables aléatoires indépendantes de même loi $N(0,\sigma^2)$.

1. Montrer que V put être écrite comme $V = Rcos(\omega t - \Theta)$.
2. Donner la distribution de Θ et de R.
3. Quelle conclusion tirez-vous ?