fb/ mehda abderrahmane

Université A. Mira
Dpt : ST 2ième année licence

20/02/10

Examen du module de Maths 3

Exercice 1 (1,5 pts) :

Etudier la convergence de la série suivante :

$$\frac{1}{2.3}+\frac{1}{4.5}+\frac{1}{6.7}+\cdots$$

Exercice 2(4 pts) :

Etudier la série de terme général $U_n=\frac{(-1)^n}{n+\sin n}$.

Exercice 3 (6 pts) :

Etudier la convergence simple, la convergence uniforme de la suite d'applications suivante :

$$f_n(x)=\frac{x}{n+x^2} \quad n\geq 1,\ x\in R$$

Exercice 4 (7 pts) :

Soit $U_n(x)=e^{-x\sqrt{n}}$ $\forall\,(n,x)\in N\text{x}R$

1. Soit a > 0.Montrer la convergence normale de la série de fonctions de terme général $U_n(x)$ Sur [a, + ∞[.Cette série est-elle normalement convergente sur R_+ ?
2. Soit U, sa limite. Montrer que la fonction U est continue sur R_+^*
3. Montrer que la fonction U est dérivable sur R_+^* etque sa dérivée est donnée par :

$$\forall\ x\in R_+^* \qquad u'(x)=-\sum_{n\geq 0}\sqrt{n}\,e^{-x\sqrt{n}}$$

4. Que se passe t-il si $x<0$

Exercice 5 : (1,5 pts) : Au choix 1) ou 2)

1) Déterminer le domaine de convergence de la série suivante:

$$\sum_{n\geq 0}(n^2+3n+2)x^n$$

2) Etudier la convergence de la série de terme général U_n = Arctang ($\frac{1}{1+n+n^2}$) et calculer sa somme.

Ind : Arctang ($\frac{a-b}{1+ab}$) = Arctang (a) - Arctang (b)

Corrigé de l'examen de Math 3. 2009/2010

Ex1

$$\frac{1}{2.3}+\frac{1}{4.5}+\frac{1}{6.7}+\cdots = \sum_{n\geq 1}\frac{1}{2n(2n+1)} - \frac{1}{2}\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n(2n+1)}$$

$$\frac{1}{n(2n+1)} \sim \frac{1}{2n^2} \quad \text{et} \quad \sum_{n\geq 1}\frac{1}{2n^2} = \frac{1}{2}\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$$

$\sum \frac{1}{n^2}$ CV (Serie de Riemann pour $\alpha = 2 > 1$)

$$\Rightarrow \sum_{n\geq 1}\frac{1}{2n(2n+1)} \text{ CV}$$

Ex2

$$\sum_{n\geq 1} U_n \quad \text{avec} \quad U_n = \frac{(-1)^n}{n+\sin n}$$

$$U_n = \frac{(-1)^n}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{\sin n}{n}}\right) = \frac{(-1)^n}{n}\left(1+\frac{\sin n}{n}\right)^{-1} \quad \frac{\sin n}{n} \to 0 \text{ pd } n \to +\infty$$

$$\Rightarrow \left(1+\frac{\sin n}{n}\right)^{-1} = \left(1-\frac{\sin n}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \Rightarrow U_n = \frac{(-1)^n}{n}\left(1-\frac{\sin n}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

$$\Rightarrow U_n = \frac{(-1)^n}{n} - \frac{(-1)^n \sin n}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

* $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n}$ CV (Serie alternée avec $\frac{1}{n} \searrow 0$)

* $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n \sin n}{n^2}$ C.A car $\left|\frac{(-1)^n \sin n}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$ et $\sum \frac{1}{n^2}$ CV. $\Rightarrow$

$$\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n \sin n}{n^2} \text{ CV}$$

et enfin $o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ CV. $\Rightarrow \sum \frac{(-1)^n}{n+\sin n}$ CV.

fb/ mehda abderrahmane

Ex3

$$f_n(x) = \frac{x}{n+x^2} \qquad n \geq 1 \qquad x \in \mathbb{R}.$$

1°) C.S

si $x=0$ $\quad f_n(x) = 0$

si $x \neq 0$ $\quad \lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) = 0$

$\Rightarrow f_n(x) \xrightarrow{CS} f(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

2°) C.U

$\left(f_n \xrightarrow{CU} f = 0\right) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad |f_n(x) - 0| < \varepsilon$?

Etudions les f_n : f_n.

f_n est impaire $\Rightarrow$ on l'étudie sur $[0, +\infty[$.

$$f_n'(x) = \frac{n+x^2-2x^2}{(n+x^2)^2} = \frac{n-x^2}{(n+x^2)^2}$$

x	0		$\sqrt{n}$		$+\infty$
f_n'		$+$	0	$-$	
f_n	0	$\nearrow$	$f_n(\sqrt{n})$	$\searrow$	0

$f_n'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{n}$.

$$f_n(\sqrt{n}) = \frac{\sqrt{n}}{n+n} = \frac{\sqrt{n}}{2n} = \frac{1}{2\sqrt{n}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \qquad f_n(x) \leq f_n(\sqrt{n})$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0(\varepsilon) \qquad |f_n(x)| \leq \frac{1}{2\sqrt{n}} < \varepsilon$

$\Rightarrow f_n \xrightarrow{CU} 0$ sur $\mathbb{R}$.

fb/ mehda abderrahmane

Ex4

1. a) C.N $(a>0)$ sur $[a,+\infty[$

$x \geq a \Rightarrow x\sqrt{n} \geq a\sqrt{n} \Rightarrow -x\sqrt{n} \leq -a\sqrt{n}$

$\Rightarrow e^{-x\sqrt{n}} \leq e^{-a\sqrt{n}}$

et $e^{-a\sqrt{n}}$ est le t.g d'une serie cv

en effet : $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 e^{-a\sqrt{n}} = 0 \Rightarrow \exists M>0$ tq $e^{-a\sqrt{n}} \leq \frac{M}{n^2}$

$\sum \frac{1}{n^2}$ cv $\Rightarrow \sum\limits_{n\geq 0} e^{-a\sqrt{n}}$ cv $\Rightarrow \sum\limits_{n\geq 0} e^{-x\sqrt{n}}$ cv sur $[a,+\infty[$ $\forall a>0$

b) C.N sur $\mathbb{R}_+$

pour $x=0$ $e^{-x\sqrt{n}} = e^0 = 1 \not\to 0 \Rightarrow \sum e^{-x\sqrt{n}}$ dv pour $x=0$

$\Rightarrow \sum e^{-x\sqrt{n}}$ ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}_+$

2. Soit $U = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{k=n} e^{-x\sqrt{k}}$.

$\sum\limits_{n\geq 0} U_n(x)$ c.N sur $[a,+\infty[\Rightarrow \sum\limits_{n\geq 0} U_n(x)$ cu sur $[a,+\infty[$

et $\forall n$ U_n est cont sur $[a,+\infty[\overset{th}{\Longrightarrow} U$ est cont sur $[a,+\infty[$ $\forall a>0$

et comme la $\sum$ dv pour $x=0 \Rightarrow$

U est cont sur $\mathbb{R}_+^*$

3. Etudions la cu de la serie derivée sur $\mathbb{R}_+^*$

soit $\left(-\sum \sqrt{n}\, e^{-x\sqrt{n}}\right)$ $x>0$, de la même façon que dans (1.a) on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2\sqrt{n}\, e^{-x\sqrt{n}} = 0 \Rightarrow \sqrt{n}\, e^{-x\sqrt{n}} \leq \frac{M}{n^2}$

fb/ mehda abderrahmane

$\Rightarrow \sum \sqrt{n}\, e^{-x\sqrt{n}}$ CU sur $\mathbb{R}_+^*$ $\Rightarrow -\sum \sqrt{n}\, e^{-x\sqrt{n}}$ CU sur $\mathbb{R}_+^*$

on a :

$$\left.\begin{array}{l} \cdot\ U_n \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}_+^* \\ \cdot\ \sum U_n \xrightarrow{CV} U \text{ sur } \mathbb{R}_+^* \\ \cdot\ \sum U'_n \xrightarrow{CU} U \quad " \quad " \end{array}\right\} \Rightarrow (\sum U_n)' = \sum (U'_n)$$

ie $U'(x) = -\sum_{n\geq 0} \sqrt{n}\, e^{-x\sqrt{n}}$.

4° si $x<0$ $e^{-x\sqrt{n}} \longrightarrow +\infty \Rightarrow \sum U_n(x)$ DV.

Ex 5

1] $n^2+3n+2 \sim n^2$ et $\frac{(n+1)^2}{n^2} \longrightarrow 1 \Rightarrow R_c = 1$

si $x=1$ $\sum (n^2+3n+2)$ DV car $n^2+3n+2 \longrightarrow +\infty$.

si $x=-1$ $\sum (n^2+3n+2)(-1)^n$ DV. $(-1)^n(n^2+3n+2) \not\longrightarrow 0$.
(pas de limite !)

$\Rightarrow D_c =]-1, 1[$.

2°] $U_n = \operatorname{Arctg} \frac{1}{1+n^2+n} = \operatorname{Arctg} \frac{1}{1+n(n+1)} = \operatorname{Arctg} n+1 - \operatorname{Arctg} n$

on a : $a = n+1$ et $b = n$.

$\operatorname{Arctg} \frac{1}{n^2+n+1} \sim \operatorname{Arctg} \frac{1}{n^2} \sim \frac{1}{n^2}$ au $V(+\infty)$; $\sum \frac{1}{n^2}$ CV.

$\Rightarrow \sum \operatorname{Arctg} \frac{1}{1+n^2+n}$ CV ; Calculons sa somme S.

$S = \lim_{n\to+\infty} (\operatorname{Arctg} 1 - \operatorname{Arctg} 0 + \operatorname{Arctg} 2 - \operatorname{Arctg} 1 + \cdots + \operatorname{Arctg}(n+1))$

$= \lim_{n\to+\infty} \operatorname{Arctg}(n+1) = \frac{\pi}{2}$

fb/ mehda abderrahmane

fb/ mehda abderrahmane

Université A. Mira
Dpt : ST 2ième année licence

20/02/10

Examen du module de Maths 3

Exercice 1 (1,5 pts) :

Etudier la convergence de la série suivante :

$$\frac{1}{2.3}+\frac{1}{4.5}+\frac{1}{6.7}+\cdots$$

Exercice 2(4 pts) :

Etudier la série de terme général $U_n=\frac{(-1)^n}{n+\sin n}$.

Exercice 3 (6 pts) :

Etudier la convergence simple, la convergence uniforme de la suite d'applications suivante :

$$f_n(x)=\frac{x}{n+x^2} \qquad n\geq 1,\ x\in R$$

Exercice 4 (7 pts) :

Soit $U_n(x)=e^{-x\sqrt{n}} \quad \forall\,(n,x)\in N\text{x}R$

1. Soit a > 0.Montrer la convergence normale de la série de fonctions de terme général $U_n(x)$ Sur [a, + ∞[.Cette série est-elle normalement convergente sur R_+ ?
2. Soit U, sa limite. Montrer que la fonction U est continue sur R_+^*
3. Montrer que la fonction U est dérivable sur R_+^* etque sa dérivée est donnée par :

$$\forall\ x\in R_+^* \qquad u'(x)=-\sum_{n\geq 0}\sqrt{n}\,e^{-x\sqrt{n}}$$

4. Que se passe t-il si $x<0$

Exercice 5 : (1,5 pts) : Au choix 1) ou 2)

1) Déterminer le domaine de convergence de la série suivante:

$$\sum_{n\geq 0}(n^2+3n+2)x^n$$

2) Etudier la convergence de la série de terme général U_n = Arctang ($\frac{1}{1+n+n^2}$) et calculer sa somme.

Ind : Arctang ($\frac{a-b}{1+ab}$) = Arctang (a) - Arctang (b)

fb/ mehda abderrahmane

Corrigé

Ex1 (1,5)

$$\frac{1}{2.3} + \frac{1}{4.5} + \frac{1}{6.7} + \dots$$

0,5

0,5 $= \sum_{n\geq 1} \frac{1}{2n(2n+1)}$ et $\frac{1}{2n(2n+1)} \sim \frac{1}{4n^2}$

$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{4n^2} = \frac{1}{4} \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ et $\sum \frac{1}{n^2}$ CV car c'est une

0,5 série de Riemann $\alpha = 2 > 1$

$\Rightarrow \sum_{n\geq 1} \frac{1}{2n(2n+1)}$ CV

Ex2 (4,5) $U_n = \frac{(-1)^n}{n+\sin n}$

0,5 0,5

$U_n = \frac{(-1)^n}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{\sin n}{n}}\right) = \frac{(-1)^n}{n}\left(1+\frac{\sin n}{n}\right)^{-1}$ $\frac{\sin n}{n} \longrightarrow 0$ $n \to +\infty$

$\Rightarrow U_n = \frac{(-1)^n}{n}\left(1 - \frac{\sin n}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ 0,5

$= \frac{(-1)^n}{n} - \frac{(-1)^n \sin n}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ 0,5

* $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ CV car c'est une série alternée avec $\frac{1}{n} \searrow 0$ 0,5
* $\sum \frac{(-1)^n \sin n}{n^2}$ CA car $\left|\frac{(-1)^n \sin n}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$ et $\sum \frac{1}{n^2}$ CV $\Rightarrow \sum \frac{(-1)^n}{n} \sin$ CV
* $\sum o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ CV 0,5

$\Rightarrow \sum \frac{(-1)^n}{n+\sin n}$ CV.

Ex3

$f_n(x) = \frac{x}{n+x^2}$ $n \geq 1$ $x \in \mathbb{R}$.

* C.S

si $x = 0$ $f_n(x) = 0$ 0,5

fb/ mehda abderrahmane

si $x = 0$ $\quad \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$ $\quad$ 0,5

$\Rightarrow \quad f_n(x) \xrightarrow{CS} f(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

0,5

C.U (4,5)

$f_n \xrightarrow{CU} f = 0 \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_0 \ |f_n(x) - 0| < \varepsilon$

on etudie la fonction f_n

on remarque que f_n est impaire on l'etudie donc sur $[0, +\infty[$

$f'_n(x) = \dfrac{n + x^2 - 2x^2}{(n+x^2)^2} = \dfrac{n - x^2}{(n+x^2)^2}$ $\quad$ 0,5

$f'_n(x) = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{n}$ $\quad$ 0,5

x	0		$\sqrt{n}$		$+\infty$
f'_n		$+$	0	$-$	
f_n	0	$\nearrow$	$f_n(\sqrt{n})$	$\searrow$	0

1

$f_n(\sqrt{n}) = \dfrac{\sqrt{n}}{n+n} = \dfrac{\sqrt{n}}{2n} = \dfrac{1}{2\sqrt{n}} \xrightarrow{n\to+\infty} 0$ $\quad$ 1

$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \quad f_n(x) \leq f_n(\sqrt{n})$ $\quad$ 0,5

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \ \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_0(\varepsilon) \quad |f_n(x)| \leq \dfrac{1}{2\sqrt{n}} < \varepsilon$

$\Rightarrow \quad f_n \xrightarrow{CU} 0$ sur $\mathbb{R}$. $\quad$ 1pt

fb/ mehda abderrahmane

Ex4 (7pts)

1.a) Cvn. $(a>0)$

$x \geq a \Rightarrow x\sqrt{n} \geq a\sqrt{n} \Rightarrow -x\sqrt{n} \leq -a\sqrt{n}$

$\Rightarrow e^{-x\sqrt{n}} \leq e^{-a\sqrt{n}}$

et $e^{-a\sqrt{n}}$ est le t.g d'une serie CV

en effet : $\lim_{n\to+\infty} n^2 e^{-a\sqrt{n}} = 0 \Rightarrow \exists M>0 \text{ tq } e^{-a\sqrt{n}} \leq \frac{M}{n^2}$

$\sum \frac{1}{n^2}$ CV $\Rightarrow \sum e^{-a\sqrt{n}}$ CV $\Rightarrow \sum_{n\geq 0} e^{-x\sqrt{n}}$ CN sur $[a+\infty[$ $\forall a>0$

1b) CN sur $\mathbb{R}_+$

pour $x=0$ $e^{-x\sqrt{n}} = e^0 = 1 \not\to 0$

0,5

$\Rightarrow \sum e^{-x\sqrt{n}}$ div pour $x=0 \Rightarrow \sum e^{-x\sqrt{n}}$ ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}_+$

2. soit $u = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{k=n} e^{-x\sqrt{k}}$

0,5 $\sum_{n\geq 0} U_n(x)$ CN sur $[a+\infty[\Rightarrow \sum_{n\geq 0} U_n(x)$ CU sur $[a+\infty[$

et les U_n sont cont sur $[a+\infty[\Rightarrow u$ est cont sur $[a+\infty[$

0,5

et comme la serie div pour $x=0 \Rightarrow$ $\forall a>0$

0,5 $u(x) = \sum U_n(x)$ est cont sur $\mathbb{R}_+^*$

3. Etudions la CU de la serie derivée sur $\mathbb{R}_+^*$

soit $(-\sum \sqrt{n}\, e^{-x\sqrt{n}})$ $x>0$

on a : $\lim_{n\to+\infty} n^2\sqrt{n}\, e^{-x\sqrt{n}} = 0 \Rightarrow \sqrt{n}\, e^{-x\sqrt{n}} \leq \frac{M}{n^2}$

$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ CV $\Rightarrow \sum \sqrt{n}\, e^{-x\sqrt{n}}$ CU sur $\mathbb{R}_+^*$

$\Rightarrow -\sum \sqrt{n}\, e^{-x\sqrt{n}}$ CU sur $\mathbb{R}_+^*$

fb/ mehda abderrahmane

bs : U_n sont dériv sur $\mathbb{R}_+^*$

1 | . $\sum U_n$ cv ; U sur " $\Rightarrow$ $(\sum U_n)' = \sum U_n'$

. $\sum U_n'$ cU " "

où $U'(x) = -\sum_{n\geq 0} \sqrt{n}\, e^{-x\sqrt{n}}$

4. si $x < 0$ $e^{-x\sqrt{n}} \longrightarrow +\infty$ $\Rightarrow$ $\sum U_n(x)$ d/v

0,5

Ex 5 (1,5)

1) $n^2+3n+2 \sim n^2$ et $\frac{(n+1)^2}{n^2} \longrightarrow 1$

0,5 $\Rightarrow R_c = 1$

0,5 si $x = 1$ $\sum (n^2+3n+2)$ d/v. car $n^2+3n+2 \longrightarrow +\infty$

0,5 si $x = -1$ $\sum (n^2+3n+2)(-1)^n$ d/v car $(-1)^n(n^2+3n+2) \not\longrightarrow 0$ (n'a pas de limite)

$\Rightarrow D_c =]-1, 1[$.

2). $U_n = \text{Arctg}\frac{1}{1+n^2+n} = \text{Arctg}\frac{1}{1+n(n+1)} = \text{Arctg}\, n+1 - \text{Arctg}\, n$

0,5 on a : $a = n+1$ et $b = n$

0,5 $\text{Arctg}\frac{1}{1+n^2+n} \sim \text{Arctg}\frac{1}{n^2} \sim \frac{1}{n^2}$ au $V(+\infty)$

$\sum \frac{1}{n^2}$ cv $\Rightarrow$ $\sum \text{Arctg}\frac{1}{1+n+n^2}$ cv

calculons sa somme $S = \sum_{n\geq 0} \text{Arctg}\frac{1}{1+n+n^2}$

0,5 $S = \lim_{n\to+\infty} (\text{Arctg}\, 1 - \text{Arctg}\, 0 + \cancel{\text{Arctg}\, 2} - \cancel{\text{Arctg}\, 1} + \dots + \text{Arctg}\, n+1)$

$= \lim_{n\to+\infty} \text{Arctg}\, n+1 = \frac{\pi}{2}$

* on peut prendre aussi $a = \frac{1}{n}$ et $b = \frac{1}{n+1}$ $\Rightarrow$ $\frac{a-b}{1+ab} = \frac{1}{1+n^2+n}$

Corrigé de l'examen de Maths 03

fb/ mehda abderrahmane

Ex1 (6pts)

1) Soit $\sum_{n\geq 1} \frac{a^n}{n^2 3^n}$ on pose $U_n = \frac{a^n}{n^2 3^n}$

1pts

$$\left|\frac{U_{n+1}}{U_n}\right| = \left|\frac{a^{n+1}}{(n+1)^2 3^{n+1}}\right| \left|\frac{n^2 3^n}{a^n}\right| = \frac{|a|}{3}\left(\frac{n}{n+1}\right)^2 \xrightarrow{n\to+\infty} \frac{|a|}{3}$$

Si $\frac{|a|}{3} < 1$ ie $|a| < 1$ $\sum U_n$ cv (critère de d'Alembert)

$\frac{|a|}{3} > 1$ ie $|a| > 1$ $\sum U_n$ dv

Si $|a| = 3 \Rightarrow a = \pm 3$ on étudie séparément les 2 cas

$a = 3 \rightarrow U_n = \frac{3^n}{n^2 3^n} = \frac{1}{n^2}$ $\sum \frac{1}{n^2}$ cv (Riemann $\alpha = 2 > 1$)

$a = -3$ on a $U_n = \frac{(-1)^n}{n^2}$ $\sum \frac{(-1)^n}{n^2}$ cA $\Rightarrow$ cs

$\Rightarrow \sum U_n$ cv $\forall a \in [-3, 3]$

2) $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^2 \ln n}$ soit $U_n = \frac{1}{n^2 \ln n}$

on a $\lim_{n\to+\infty} n^2 U_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\ln n} = 0 \Rightarrow \exists n_0 > 0$ tq $\forall n \geq n_0$ $n^2 U_n \leq 1$

$\Rightarrow U_n \leq \frac{1}{n^2}$ $\forall n \geq n_0$. $\Rightarrow \sum U_n$ cv

puisque $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^2} = \sum \frac{1}{n^2}$

Ex2 (6pts) $\sum_{n\geq 1} \frac{2+\cos n}{n^p}$ on sait que $\forall n \in \mathbb{N}$

$-1 \leq \cos n \leq 1 \Rightarrow 1 \leq 2 + \cos n \leq 3$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$\forall n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$ ie $n \in \mathbb{N}^*$ $\frac{1}{n^p} \leq \frac{2+\cos n}{n^p} \leq \frac{3}{n^p}$

$$\frac{2+\cos n}{n^p} \leq \frac{3}{n^p} \Rightarrow \sum_{n\geq 1} \frac{2+\cos n}{n^p} \text{ CV } \forall p>1$$

$$\frac{1}{n^p} \leq \frac{2+\cos n}{n^p} \Rightarrow \sum_{n\geq 1} \frac{2+\cos n}{n^p} \text{ dv } \forall p \leq 1$$

3 pts pour chaque cas.

Ex 3 (8 pts) (1+2+2+2+2)

1) $D_f = ?$

$x=0$ $f_n(x)=0 \Rightarrow \sum_{n\geq 1} f_n(0)$ CV.

$x \neq 0$ $f_n(x) \sim \frac{x}{n^2x^2} = \frac{1}{xn^2}$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{xn^2} = \frac{1}{x}\sum \frac{1}{n^2}$ CV

(Riemann encore)

$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}$ $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ CV $\Rightarrow D_f = \mathbb{R}$.

2) $f_n'(x) = \frac{1-nx^2}{n(1+nx^2)^2}$ $f_n'(x)=0 \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{n}}$

f_n étant impaire on l'étudie sur $D_e = [0 \; +\infty[$

x	0		$\frac{1}{\sqrt{n}}$		$+\infty$
f_n'		$+$	0	$-$	
f_n		$\nearrow$		$\searrow$	

$\Rightarrow \sup |f_n(x)| = f_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{2n^{3/2}}$

$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{2n^{3/2}} = \frac{1}{2}\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{3/2}}$ CV (Riem $\alpha = \frac{3}{2}$)

$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}$ $f_n(x) \leq \frac{1}{2n^{3/2}}$ et

$\Rightarrow \sum f_n(x)$ CN sur $\mathbb{R}$.

3) Continuité de f.

$\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ CN sur $\mathbb{R}$ $\Rightarrow \sum_{n\geq 1} f_n(x)$ CU $\forall x \in \mathbb{R}$

fb/ mehda abderrahmane

suite

- $\forall n$ f_n cont sur $\mathbb{R}$ (Rapport de fns continues sur $\mathbb{R}$) et $n(1+nx^2) \neq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$

- $\sum f_n$ CU sur $\mathbb{R}$

fb/ mehda abderrahmane

$\Rightarrow f = \sum_{n \geq 1} f_n$ est continue sur $\mathbb{R}$

4) CW de $\sum_{n \geq 1} f_n'(x)$ sur $[x_0, +\infty[$ $x_0 > 0$

on a $f_n'(x) = \dfrac{1 - nx^2}{n(1+nx^2)^2} \leq \dfrac{1}{n(1+nx^2)^2} \leq \dfrac{1}{n^3 x^4}$.

et $\cancel{\dfrac{1}{n(1+nx^2)^2}}$ $\cancel{\sim}$ $\cancel{\dfrac{1}{n^3 x^4}}$ $(\cancel{*})$

pour $x \geq x_0$ $n^3 x^4 \geq n^3 x_0^4 \Rightarrow \dfrac{1}{n^3 x^4} \leq \dfrac{1}{n^3 x_0^4}$

$\sum_{n \geq 1} \dfrac{1}{n^3 x_0^4} = \dfrac{1}{x_0^4} \sum_{n \geq 1} \dfrac{1}{n^4}$ CV $\Rightarrow \sum_{n \geq 1} f_n'(x)$ CW $\forall x \geq x_0$, $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$

5) a) : $(f_n)_{n \geq 1}$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$.

b) • $\sum_{n \geq 1} f_n \xrightarrow{CS} f$ sur $\mathbb{R}$.

c) • $\sum_{n \geq 1} f_n' \xrightarrow{CU} f$ sur $[x_0, +\infty[$ car $\sum_{n \geq 1} f_n'$ CW sur $[x_0$ $\forall x_0 \geq 0$

(a, b et c) $\Rightarrow$ f est dérivable sur $[x_0 +\infty[$. $\forall x_0 > 0$

comme f est impaire $\Rightarrow$ f est dérivable aussi sur $]-\infty, -x_0]$ $\forall x_0 \in \mathbb{R}_+^*$.

comme x_0 est quelconque ds $\mathbb{R}_+^* \Rightarrow f$ est dérivable $\forall x \in]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ ie $\mathbb{R}^*$

Corrigé de l'examen de Maths 03

fb/ mehda abderrahmane

Ex1 (6pts)

1) Soit $\sum_{n\geq 1} \frac{a^n}{n^2 3^n}$ on pose $U_n = \frac{a^n}{n^2 3^n}$

1pts

$$\left|\frac{U_{n+1}}{U_n}\right| = \left|\frac{a^{n+1}}{(n+1)^2 3^{n+1}}\right| \left|\frac{n^2 3^n}{a^n}\right| = \frac{|a|}{3}\left(\frac{n}{n+1}\right)^2 \xrightarrow{n\to+\infty} \frac{|a|}{3}$$

Si $\frac{|a|}{3} < 1$ ie $|a| < 1$ $\sum U_n$ cv (critère de d'Alembert)

$\frac{|a|}{3} > 1$ ie $|a| > 1$ $\sum U_n$ dv

Si $|a| = 3 \Rightarrow a = \pm 3$ on étudie séparément les 2 cas

$a = 3 \rightarrow U_n = \frac{3^n}{n^2 3^n} = \frac{1}{n^2}$ $\sum \frac{1}{n^2}$ cv (Riemann $\alpha = 2 > 1$)

$a = -3$ on a $U_n = \frac{(-1)^n}{n^2}$ $\sum \frac{(-1)^n}{n^2}$ cA $\Rightarrow$ cs

$\Rightarrow \sum U_n$ cv $\forall a \in [-3, 3]$

2) $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^2 \ln n}$ soit $U_n = \frac{1}{n^2 \ln n}$

on a $\lim_{n\to+\infty} n^2 U_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\ln n} = 0 \Rightarrow \exists n_0 > 0$ tq $\forall n \geq n_0$ $n^2 U_n \leq 1$

$\Rightarrow U_n \leq \frac{1}{n^2}$ $\forall n \geq n_0$. $\Rightarrow \sum U_n$ cv

puisque $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^2} = \sum \frac{1}{n^2}$

Ex2 (6pts) $\sum_{n\geq 1} \frac{2+\cos n}{n^p}$ on sait que $\forall n \in \mathbb{N}$

$-1 \leq \cos n \leq 1 \Rightarrow 1 \leq 2 + \cos n \leq 3$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$\forall n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$ ie $n \in \mathbb{N}^*$ $\frac{1}{n^p} \leq \frac{2+\cos n}{n^p} \leq \frac{3}{n^p}$

$$\frac{2+\cos n}{n^p} \leq \frac{3}{n^p} \Rightarrow \sum_{n\geq 1} \frac{2+\cos n}{n^p} \text{ CV } \forall p>1$$

$$\frac{1}{n^p} \leq \frac{2+\cos n}{n^p} \Rightarrow \sum_{n\geq 1} \frac{2+\cos n}{n^p} \text{ dv } \forall p \leq 1$$

3 pts pour chaque cas.

Ex 3 (8 pts) (1+2+2+2+2)

1) $D_f = ?$

$x=0$ $f_n(x)=0 \Rightarrow \sum_{n\geq 1} f_n(0)$ CV.

$x \neq 0$ $f_n(x) \sim \frac{x}{n^2x^2} = \frac{1}{xn^2}$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{xn^2} = \frac{1}{x}\sum \frac{1}{n^2}$ CV

(Riemann encore)

$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}$ $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ CV $\Rightarrow D_f = \mathbb{R}$.

2) $f_n'(x) = \frac{1-nx^2}{n(1+nx^2)^2}$ $f_n'(x)=0 \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{n}}$

f_n étant impaire on l'étudie sur $D_e = [0 \; +\infty[$

x	0		$\frac{1}{\sqrt{n}}$		$+\infty$
f_n'		$+$	0	$-$	
f_n		$\nearrow$		$\searrow$	

$\Rightarrow \sup |f_n(x)| = f_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{2n^{3/2}}$

$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{2n^{3/2}} = \frac{1}{2}\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{3/2}}$ CV (Riem $\alpha = \frac{3}{2}$)

$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}$ $f_n(x) \leq \frac{1}{2n^{3/2}}$ et

$\Rightarrow \sum f_n(x)$ CN sur $\mathbb{R}$.

3) Continuité de f.

$\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ CN sur $\mathbb{R}$ $\Rightarrow \sum_{n\geq 1} f_n(x)$ CU $\forall x \in \mathbb{R}$

fb/ mehda abderrahmane

3-4

- $\forall n$ f_n cont sur $\mathbb{R}$ (Rapport de fns continues sur $\mathbb{R}$) et $n(1+nx^2) \neq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$

- $\sum f_n$ CU sur $\mathbb{R}$

fb/ mehda abderrahmane

$\Rightarrow f = \sum_{n \geq 1} f_n$ est continue sur $\mathbb{R}$

4) CW de $\sum_{n \geq 1} f_n'(x)$ sur $[x_0, +\infty[$ $x_0 > 0$

on a $f_n'(x) = \dfrac{1 - nx^2}{n(1+nx^2)^2} \leq \dfrac{1}{n(1+nx^2)^2} \leq \dfrac{1}{n^3 x^4}$.

et $\cancel{\dfrac{1}{n(1+nx^2)^2}}$ $\cancel{\sim}$ $\cancel{\dfrac{1}{n^3 x^4}}$ $(\cancel{*})$

pour $x \geq x_0$ $n^3 x^4 \geq n^3 x_0^4 \Rightarrow \dfrac{1}{n^3 x^4} \leq \dfrac{1}{n^3 x_0^4}$

$\sum_{n \geq 1} \dfrac{1}{n^3 x_0^4} = \dfrac{1}{x_0^4} \sum_{n \geq 1} \dfrac{1}{n^4}$ CV $\Rightarrow \sum_{n \geq 1} f_n'(x)$ CW $\forall x \geq x_0$, $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$

5) a) : $(f_n)_{n \geq 1}$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$.

b) • $\sum_{n \geq 1} f_n \xrightarrow{CS} f$ sur $\mathbb{R}$.

c) • $\sum_{n \geq 1} f_n' \xrightarrow{CU} f$ sur $[x_0, +\infty[$ car $\sum_{n \geq 1} f_n'$ CW sur $[x_0$ $\forall x_0 \geq 0$

(a, b et c) $\Rightarrow$ f est dérivable sur $[x_0 +\infty[$. $\forall x_0 > 0$

comme f est impaire $\Rightarrow$ f est dérivable aussi sur $]-\infty, -x_0]$ $\forall x_0 \in \mathbb{R}_+^*$.

comme x_0 est quelconque ds $\mathbb{R}_+^*$ $\Rightarrow$ f est dérivable $\forall x \in]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ ie $\mathbb{R}^*$

fb/ mehda abderrahmane

Université A.Mira
Faculté de la technologie
Département ST2

Examen de Maths 03

07/04/2012

Exercice 1 (4pts)

Etudier la nature de chacune des séries suivantes :

1. $\sum_{n\geq 0} \frac{n}{2^n+1}$ 1 pt

2. $\sum_{n\geq 0} \frac{n^2+5n}{4n^4+\sin n+\ln n}$ 1 pt

3. $\sum_{n\geq 0} \sqrt{\frac{n-1}{n^4+1}}$ 1 pt

4. $\sum_{n\geq 0} \frac{10n+1}{2n}$ 1 pt

Exercice 2 (4pts)

En utilisant les développements limités étudier la nature de la série suivante :

$$\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n\sqrt{n}}$$

Rappel : $(1+x)^\alpha = 1+\alpha x+\alpha(\alpha-1)\frac{x^2}{2!}+o(x^2)$.

Exercice 3 (8pts) :

Soit $U_n(x) = e^{-x\sqrt{n}} \quad \forall n \in N ; \forall x \in R$

3pts (2 + 1)

1. Soit $a > 0$.Montrer la convergence normale de la série de fonction de terme général $U_n(x)$ sur $[a, +\infty[$.Cette série est-elle normalement convergente sur R^+ ?

2pts 2. Soit U sa limite. Montrer que la fonction U est continue sur R_+^*

3. Montrer que la fonction U est dérivable sur R_+^* et que sa dérivée est donnée par :

2pts $\forall x \in R_*^+ \quad U'(x) = -\sum_{n\geq o} \sqrt{n}e^{-x\sqrt{n}}$

4. Que se passe-t-il si $x < o$.

1pt

Exercice 4 (4pts) : Choisir entre 1 et 2.

1. Soit la série entière $\sum_{n\geq 0} \frac{n+2}{n+1} x^n$

a. Déterminer le rayon de convergence de cette série. 1 pt

b. En déduire son domaine de convergence. 2 pts (1 + 0,5 + 0,5)

c. Calculer la somme de cette série. 1 pt

2. a) Calculer la somme S de la série de terme général : $U_n = \frac{an^2+bn+c}{n!}$ sachant que $e^x = \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$.

b) Déterminer $a, b, et\ c\ pour\ que\ S = 0$.

Corrigé de l'examen de Maths 03

fb/ mehda abderrahmane

Ex 1. (4 pts)

1. $\sum_{n\geq 0} \frac{n}{2^n+1}$ on a $\frac{n}{2^n+1} \sim \frac{n}{2^n}$ et $\sum_{n\geq 0} \frac{n}{2^n}$ cv donc $\sum \frac{n}{2^n+1}$ cv

pt $\sum_{n\geq 0} \frac{n}{2^n}$ cv d'après la règle de d'Alembert $\left(\frac{n+1}{2^{n+1}} \Big/ \frac{n}{2^n}\right) \longrightarrow \frac{1}{2} < 1$

2. $\sum_{n\geq 1} \frac{n^2+5n}{4n^2+\sin n+\ln n}$

pt car $\frac{n^2+5n}{4n^2+\sin n+\ln n} \sim \frac{1}{4n^2}$ $\sum \frac{1}{4n^2}$ cv $\Rightarrow \sum u_n$ cv

3. $\sum_{n\geq 1} \sqrt{\frac{n-1}{n^4+1}}$ on a $\sqrt{\frac{n-1}{n^4+1}} \sim \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n^4}} = \frac{1}{n^{3/2}}$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{3/2}}$ cv

(car c'est une série de Riemann $\alpha = \frac{3}{2} > 1$)

1pt et donc $\sum_{n\geq 1} \sqrt{\frac{n-1}{n^4+1}}$ cv.

4. $\sum \frac{10n+1}{2n}$ ~~cv~~ car $\frac{10n+1}{2n} \longrightarrow \frac{10}{2} = 5 \neq 0$

Ex 2 (4 pts)

$$\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n\sqrt{n}} \quad ?$$

$$\frac{(-1)^n}{n+(-1)^n\sqrt{n}} = \frac{(-1)^n}{n\left(1+\frac{(-1)^n\sqrt{n}}{n}\right)} = \frac{(-1)^n}{n}\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)^{-1}$$

$$= \frac{(-1)^n}{n}\left(1-\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \qquad 1pt$$

$$= \frac{(-1)^n}{n} - \frac{1}{n\sqrt{n}} + \frac{(-1)^n}{n^2} + o\left(\frac{(-1)^n}{n^2}\right)$$

- $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ cv car c'est une série alternée où $\left(\frac{1}{n}\right) \searrow 0$ (Leibniz) $\longrightarrow$ 1pt
- $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n\sqrt{n}} = \sum \frac{1}{n^{3/2}}$ cv (Riemann $\alpha = \frac{3}{2} > 1$) 0,5
- $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2}$ cv car $\left|\frac{(-1)^n}{n^2}\right| = \frac{1}{n^2}$ et $\sum \frac{1}{n^2}$ cv. $\Rightarrow \sum \frac{(-1)^n}{n^2}$ cv et donc elle cv. 0,5

ici aussi on peut utiliser le critère de Leibniz.

$\left(\frac{1}{n^2}\right) \searrow 0 \Rightarrow \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2}$ cv

$\sum_{n\geq 1} o\left(\frac{(-1)^n}{n^2}\right)$ cv car $o\left(\frac{(-1)^n}{n^2}\right)$ est majoré par le t.g. d'une serie cv.

ie $\exists M>0$ tq $\left|o\left(\frac{(-1)^n}{n^2}\right)\right| \leq \frac{M}{n^2}$.

$\Rightarrow$) ...) ...) et iv) $\Rightarrow \sum_{n\geq 5} \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n\sqrt{n}}$ cv.

Ex 3 (8 pts)

1. Montrons la c.n de la serie de t.g $U_n(x)$ sur $[a,+\infty[$ $\forall a>0$

en effet $a>0$ et $x\geq a \rightarrow x\sqrt{n} \geq a\sqrt{n} \rightarrow -x\sqrt{n} \leq -a\sqrt{n}$.

$\Rightarrow e^{-x\sqrt{n}} \leq e^{-a\sqrt{n}}$ car (la fn exp est $\nearrow$)

et $\lim_{n\to+\infty} n^2 e^{-a\sqrt{n}} = 0 \Rightarrow \exists M>0$ tq $e^{-a\sqrt{n}} < \frac{M}{n^2}$ $\forall n>0$

d'où la cv de la $\sum e^{-a\sqrt{n}}$

$U_n(x)$ est donc majoré par le t.g d'une serie numerique convergente. ce qui entraine la convergence normale de la $\sum_{n\geq 1} U_n(x)$. pour $x=0$ la serie est $\sum 1$ ce cv pas

2. soit $U(x) = \sum_n e^{-x\sqrt{n}}$ $x\in]0,+\infty[$. soit $a\in]0,+\infty[$

- on a d'après 1: $\sum e^{-x\sqrt{n}}$ cn sur $[a,+\infty[\Rightarrow \sum_n e^{-x\sqrt{n}}$ cu sur $[a,+\infty[$

- $x \mapsto e^{-x\sqrt{n}}$ est continue sur $\mathbb{R}$ en particulier sur $[a,+\infty[$ pour chaque n.

-) et ..) entraine que U est continue sur $[a,+\infty[$.

ie que U est continue au point a $\forall a\in]0,+\infty[$.

$\Rightarrow U$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

fb/ mehda abderrahmane

3. Montrons que u est derivable sur $\mathbb{R}_+^*$

- d'après 1. $\sum u_n(x)$ cs sur $[a,+\infty[$

- les fonctions $(u_n)_n$ sont de classe C^1 sur $[a,+\infty[$.

- $\sum \sqrt{n}\, e^{-x\sqrt{n}}$ cu sur $[a,+\infty[$ pour les mêmes raisons que dans 2.

ie $\sqrt{n}\, e^{-x\sqrt{n}} \leq \sqrt{n}\, e^{-a\sqrt{n}}$ et $\sum \sqrt{n}\, e^{-a\sqrt{n}}$ cv

$\Rightarrow \sum \sqrt{n}\, e^{-x\sqrt{n}}$ cn normalement sur $[a,+\infty[$

$\Rightarrow u$ est derivable sur $[a,+\infty[$.

on a : $\forall a \in \mathbb{R}_+^*$ u est derivable au point a.

$\Rightarrow u$ est derivable sur $\mathbb{R}_+^*$

et $u'(x) = -\sum \sqrt{n}\, e^{-x\sqrt{n}}$ $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$

4. Si $x<0$ $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x\sqrt{n}} = +\infty \Rightarrow \sum_n e^{-x\sqrt{n}}$ dv.

fb/ mehda abderrahmane

Ex 4

1.) a. Calcul du rayon de cv

soit $a_n = \frac{n+2}{n+1}$ $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 \Rightarrow R = 1$.

b. d'après a) la $\sum \frac{n+2}{n+1} x^n$ cv $\forall x \in]-1,1[$

pour $x=1$ on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n+2}{n+1} x^n = 1 \neq 0 \Rightarrow \sum \frac{n+2}{n+1} x^n$ dv pour $x=1$

pour $x=-1$ on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n+2}{n+1}(-1)^n$ n'existe pas $\Rightarrow \sum \frac{n+2}{n+1} x^n$ dv pour $x=-1$

le domaine de cv est donc l'intervalle $]-1,1[$.

c. Calcul de la somme de la série

$\sum\limits_{n\geq 0} \frac{n+2}{n+1} x^n = \sum\limits_{n\geq 0} \left(\frac{n+1+1}{n+1} x^n\right) = \sum\limits_{n\geq 0} \left(x^n + \frac{x^n}{n+1}\right)$

On sait que $\sum_{n\geq 0} x^n$ cv $\forall x \in]-1,1[$ et $\sum_{n\geq 0} x^n = \frac{1}{1-x}$

et $\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n+1}$ cv sur $]-1,1[$ et $\sum \frac{x^n}{n+1} = \frac{1}{x}\sum \frac{x^{n+1}}{n+1}$ si $x \neq 0$

$= 0$ si $x = 0$

$\sum \frac{x^{n+1}}{n+1}$ est une primitive de la fonction $\frac{1}{1-x}$ sur $]-1,1[$.

$$\Rightarrow \sum \frac{x^{n+1}}{n+1} = -\ln(1-x)$$

d'où $$\sum \frac{n+2}{n+1} x^n = \begin{cases} \frac{1}{1-x} - \frac{\ln(1-x)}{x} & \text{si } x \neq 0,\ x \in]-1,1[\\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

2. $S = \sum U_n$ avec $U_n = \frac{an^2+bn+c}{n!}$

a)

$$U_n = \frac{a(n^2-n+n)+bn+c}{n!} = \frac{a(n^2-n)}{n!} + \frac{an+bn}{n!} + \frac{c}{n!}$$

$$= \frac{an(n-1)}{n!} + \frac{(a+b)n}{n!} + \frac{c}{n!}$$

$$= \frac{a}{(n+2)!} + \frac{a+b}{(n-1)!} + \frac{c}{n!}$$

$$\Rightarrow \sum U_n = ae + (a+b)e + ce \quad \text{car } \sum \frac{x^n}{n!} = e^x$$

$$= e(2a+b+c)$$

pour $x=1$ on a $e = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!}$

$$\Rightarrow S = e(2a+b+c)$$

b) si $2a+b+c = 0 \Rightarrow S = 0$.

fb/ mehda abderrahmane

fb/ mehda abderrahmane

Université A. Mira
Dpt : ST 2ième année licence

20/02/10

Examen du module de Maths 3

Exercice 1 (1,5 pts) :

Etudier la convergence de la série suivante :

$$\frac{1}{2.3}+\frac{1}{4.5}+\frac{1}{6.7}+\cdots$$

Exercice 2(4 pts) :

Etudier la série de terme général $U_n=\frac{(-1)^n}{n+\sin n}$.

Exercice 3 (6 pts) :

Etudier la convergence simple, la convergence uniforme de la suite d'applications suivante :

$$f_n(x)=\frac{x}{n+x^2} \quad n\geq 1,\ x\in R$$

Exercice 4 (7 pts) :

Soit $U_n(x)=e^{-x\sqrt{n}}$ $\forall\,(n,x)\in N\text{x}R$

1. Soit a > 0.Montrer la convergence normale de la série de fonctions de terme général $U_n(x)$ Sur [a, + ∞[.Cette série est-elle normalement convergente sur R_+ ?
2. Soit U, sa limite. Montrer que la fonction U est continue sur R_+^*
3. Montrer que la fonction U est dérivable sur R_+^* etque sa dérivée est donnée par :

$$\forall\ x\in R_+^* \qquad u'(x)=-\sum_{n\geq 0}\sqrt{n}\,e^{-x\sqrt{n}}$$

4. Que se passe t-il si $x<0$

Exercice 5 : (1,5 pts) : Au choix 1) ou 2)

1) Déterminer le domaine de convergence de la série suivante:

$$\sum_{n\geq 0}(n^2+3n+2)x^n$$

2) Etudier la convergence de la série de terme général U_n = Arctang ($\frac{1}{1+n+n^2}$) et calculer sa somme.

Ind : Arctang ($\frac{a-b}{1+ab}$) = Arctang (a) - Arctang (b)

Corrigé de l'examen de Math 3. 2009/2010

Ex1

$$\frac{1}{2.3}+\frac{1}{4.5}+\frac{1}{6.7}+\cdots = \sum_{n\geq 1}\frac{1}{2n(2n+1)} - \frac{1}{2}\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n(2n+1)}$$

$$\frac{1}{n(2n+1)} \sim \frac{1}{2n^2} \quad \text{et} \quad \sum_{n\geq 1}\frac{1}{2n^2} = \frac{1}{2}\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$$

$\sum \frac{1}{n^2}$ CV (Serie de Riemann pour $\alpha = 2 > 1$)

$$\Rightarrow \sum_{n\geq 1}\frac{1}{2n(2n+1)} \text{ CV}$$

Ex2

$$\sum_{n\geq 1} U_n \quad \text{avec} \quad U_n = \frac{(-1)^n}{n+\sin n}$$

$$U_n = \frac{(-1)^n}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{\sin n}{n}}\right) = \frac{(-1)^n}{n}\left(1+\frac{\sin n}{n}\right)^{-1} \quad \frac{\sin n}{n} \to 0 \text{ pd } n \to +\infty$$

$$\Rightarrow \left(1+\frac{\sin n}{n}\right)^{-1} = \left(1-\frac{\sin n}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \Rightarrow U_n = \frac{(-1)^n}{n}\left(1-\frac{\sin n}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

$$\Rightarrow U_n = \frac{(-1)^n}{n} - \frac{(-1)^n \sin n}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

* $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n}$ CV (Serie alternée avec $\frac{1}{n} \searrow 0$)

* $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n \sin n}{n^2}$ C.A car $\left|\frac{(-1)^n \sin n}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$ et $\sum \frac{1}{n^2}$ CV. $\Rightarrow$

$$\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n \sin n}{n^2} \text{ CV}$$

et enfin $o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ CV. $\Rightarrow \sum \frac{(-1)^n}{n+\sin n}$ CV.

fb/ mehda abderrahmane

Ex3

$$f_n(x) = \frac{x}{n+x^2} \qquad n \geq 1 \qquad x \in \mathbb{R}.$$

1°) C.S

si $x=0$ $\quad f_n(x) = 0$

$$\Rightarrow f_n(x) \xrightarrow{CS} f(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

si $x \neq 0$ $\quad \lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) = 0$

2°) C.U

$$\left(f_n \xrightarrow{CU} f = 0\right) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 \quad |f_n(x) - 0| < \varepsilon \ ?$$

Etudions les f_n : f_n.

f_n est impaire $\Rightarrow$ on l'étudie sur $[0, +\infty[$.

$$f_n'(x) = \frac{n + x^2 - 2x^2}{(n+x^2)^2} = \frac{n - x^2}{(n+x^2)^2}$$

x	0		$\sqrt{n}$		$+\infty$
f_n'		$+$	0	$-$	
f_n	0	$\nearrow$	$f_n(\sqrt{n})$	$\searrow$	0

$$f_n'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{n}.$$

$$f_n(\sqrt{n}) = \frac{\sqrt{n}}{n+n} = \frac{\sqrt{n}}{2n} = \frac{1}{2\sqrt{n}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

$$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \qquad f_n(x) \leq f_n(\sqrt{n})$$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0(\varepsilon) \qquad |f_n(x)| \leq \frac{1}{2\sqrt{n}} < \varepsilon$$

$$\Rightarrow f_n \xrightarrow{CU} 0 \quad \text{sur } \mathbb{R}.$$

fb/ mehda abderrahmane

Ex4

1. a) C.N $(a>0)$ sur $[a,+\infty[$

$x \geq a \Rightarrow x\sqrt{n} \geq a\sqrt{n} \Rightarrow -x\sqrt{n} \leq -a\sqrt{n}$

$\Rightarrow e^{-x\sqrt{n}} \leq e^{-a\sqrt{n}}$

et $e^{-a\sqrt{n}}$ est le t.g d'une serie cv

en effet : $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 e^{-a\sqrt{n}} = 0 \Rightarrow \exists M>0$ tq $e^{-a\sqrt{n}} \leq \frac{M}{n^2}$

$\sum \frac{1}{n^2}$ cv $\Rightarrow \sum\limits_{n\geq 0} e^{-a\sqrt{n}}$ cv $\Rightarrow \sum\limits_{n\geq 0} e^{-x\sqrt{n}}$ cv sur $[a,+\infty[$ $\forall a>0$

b) C.N sur $\mathbb{R}_+$

pour $x=0$ $e^{-x\sqrt{n}} = e^0 = 1 \not\to 0 \Rightarrow \sum e^{-x\sqrt{n}}$ dv pour $x=0$

$\Rightarrow \sum e^{-x\sqrt{n}}$ ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}_+$

2. Soit $U = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{k=n} e^{-x\sqrt{k}}$.

$\sum\limits_{n\geq 0} U_n(x)$ c.N sur $[a,+\infty[\Rightarrow \sum\limits_{n\geq 0} U_n(x)$ cu sur $[a,+\infty[$

et $\forall n$ U_n est cont sur $[a,+\infty[\overset{th}{\Rightarrow} U$ est cont sur $[a,+\infty[$ $\forall a>0$

et comme la $\sum$ dv pour $x=0 \Rightarrow$

U est cont sur $\mathbb{R}_+^*$

3. Etudions la cu de la serie derivée sur $\mathbb{R}_+^*$.

soit $\left(-\sum \sqrt{n}\, e^{-x\sqrt{n}}\right)$ $x>0$, de la même façon que dans (1.a) on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2\sqrt{n}\, e^{-x\sqrt{n}} = 0 \Rightarrow \sqrt{n}\, e^{-x\sqrt{n}} \leq \frac{M}{n^2}$

fb/ mehda abderrahmane

$\Rightarrow \sum \sqrt{n}\, e^{-x\sqrt{n}}$ CU sur $\mathbb{R}_+^*$ $\Rightarrow -\sum \sqrt{n}\, e^{-x\sqrt{n}}$ CU sur $\mathbb{R}_+^*$

on a :

$$\left.\begin{array}{l} \cdot\ U_n \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}_+^* \\ \cdot\ \sum U_n \xrightarrow{CV} U \text{ sur } \mathbb{R}_+^* \\ \cdot\ \sum U'_n \xrightarrow{CU} U \quad \text{"} \quad \text{"} \end{array}\right\} \Rightarrow (\sum U_n)' = \sum (U'_n)$$

ie $U'(x) = -\sum_{n\geq 0} \sqrt{n}\, e^{-x\sqrt{n}}$.

4° si $x<0$ $e^{-x\sqrt{n}} \longrightarrow +\infty \Rightarrow \sum U_n(x)$ DV.

Ex 5

1] $n^2+3n+2 \sim n^2$ et $\frac{(n+1)^2}{n^2} \longrightarrow 1 \Rightarrow R_c = 1$

si $x=1$ $\sum (n^2+3n+2)$ DV car $n^2+3n+2 \longrightarrow +\infty$.

si $x=-1$ $\sum (n^2+3n+2)(-1)^n$ DV. $(-1)^n(n^2+3n+2) \not\longrightarrow 0$.
(pas de limite !)

$\Rightarrow D_c =]-1, 1[$.

2°] $U_n = \operatorname{Arctg} \frac{1}{1+n^2+n} = \operatorname{Arctg} \frac{1}{1+n(n+1)} = \operatorname{Arctg} n+1 - \operatorname{Arctg} n$

on a : $a = n+1$ et $b = n$.

$\operatorname{Arctg} \frac{1}{n^2+n+1} \sim \operatorname{Arctg} \frac{1}{n^2} \sim \frac{1}{n^2}$ au $V(+\infty)$; $\sum \frac{1}{n^2}$ CV.

$\Rightarrow \sum \operatorname{Arctg} \frac{1}{1+n^2+n}$ CV ; Calculons sa somme S.

$S = \lim_{n\to+\infty} (\operatorname{Arctg} 1 - \operatorname{Arctg} 0 + \operatorname{Arctg} 2 - \operatorname{Arctg} 1 + \cdots + \operatorname{Arctg}(n+1))$

$= \lim_{n\to+\infty} \operatorname{Arctg}(n+1) = \frac{\pi}{2}$

fb/ mehda abderrahmane

fb/ mehda abderrahmane

Tasdawit n'Bgayet
Université de Béjaïa

Université A/MIRA de Béjaia

Faculté de la Technologie

Département ST 2

2012/2013

Examen de Maths 3

Exercice 1 :(04pts)

Étudier la nature de chacune des séries suivantes :

(a) $\sum_{n\geq 0} \frac{n^2+2n}{n^4+3n^3+1}$ (b) $\sum_{n\geq 0} \left(\frac{n^n}{n!}\right)$

(c) $\sum_{n\geq 0} \frac{-n+1}{4n+5}$ (d) $\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{\ln n}$

Exercice 2 :(06pts)

On considère la série entière suivante :

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\ln n}{n^2} x^n \qquad (*)$$

1. Déterminer le rayon de convergence R et l'intervalle de convergence I de la série entière $(*)$.
2. Etudier la nature des séries suivantes :

   (a) $\sum_{n\geq 1} \frac{\ln n}{n^2}$, (b) $\sum_{n\geq 1} (-1)^n \frac{\ln n}{n^2}$.
3. En déduire le domaine de convergence de la série $(*)$.

Exercice 3(05pts)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par,

$$f(x) = \frac{e^{x^2}-1}{x}$$

1. Développer en série entière la fonction f ainsi que sa dérivée f'.
2. En se servant de la première question, déduire la somme de la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n-1)^2}{n!}$$

Exercice 4 :(05pts)

Calculer la somme de chacune des séries entières suivantes :

(a) $S(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} nx^n$ (b) $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{2n}$

fb/ mehda abderrahmane

Solution de l'EMD "Maths 3"

Exercice 1

Étudier la nature de chacune des séries suivantes :

$$\sum_{n\geq 0} \frac{n^2+2n}{n^4+3n^3+1}$$

1pt

(a) :

On pose :

$$U_n = \frac{n^2+2n}{n^4+3n^3+1}$$

on a :

$$U_n \sim^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

1pt

Comme $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n^2}$ est convergente,il en est de même pour $\sum_{n\geq 0} \frac{n^2+2n}{n^4+3n^3+1}$.

(b) :

En utilisant le critère de D'Alembert :

On pose $U_n = \frac{n^n}{n!}$, $\lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e > 1$

La série en question est divergente.

1pt

(c) :

$U_n = \frac{-n+1}{4n+5}$, $\lim_{n\longrightarrow+\infty} U_n = \frac{-1}{4} \neq 0$

1pt

La condition nécessaire n'est pas satisfaite,la série en question est divergente.

(d) :

La série est alternée,on pose :

$$v_n = \frac{1}{\ln n}$$

On a $v_n \searrow$ car $\ln n \nearrow$ et $\lim_{n\longrightarrow+\infty} v_n = 0$.

D'après le critère de Leibnitz la série alternée est convergente.

exercice 2 :

1)

On pose :

$$a_n = \frac{\ln n}{n^2}$$

$$R = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$$

1,5pt

fb/ mehda abderrahmane

Car

$$\ln(n+1) = \ln n + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

Remarque :
L'étudiant peut écrire $\ln(n+1) \sim \ln n$ quand n est assez grand.

$$I =]-1, 1[$$ 0,5 pt

2)
On a pour tout $n > 0$:

$$\frac{\ln n}{n^2} < \frac{\sqrt{n}}{n^2} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$$

Comme la série de terme général $\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ est convergente,d'après le critère de comparaison la série $\sum_{n\geq 1} \frac{\ln n}{n^2}$ est convergente. 1,5 pt

La série $\sum_{n\geq 1} (-1)^n \frac{\ln n}{n^2}$ est absolument convergente, donc elle est convergente. 1,5 pt

Remarque :
L'étudiant peut utiliser le critère de Leibnitz pour la série $\sum_{n\geq 1} (-1)^n \frac{\ln n}{n^2}$.

En fin
Le domaine de convergence est $D = [-1, 1]$. 1 pt

Exercice 3 :
1)
On a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$ 0,5 pt

ce qui implique

$$e^{x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{n!} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{n!}$$ 1 pt

On déduit pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$\boxed{f(x) = \frac{e^{x^2} - 1}{x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n-1}}{n!}}$$ 0,5 pt

Donc

$$\boxed{f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n-1}{n!} x^{2n-2}}$$ 1 pt

fb/ mehda abderrahmane

2)
On a :

$$xf'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n-1}{n!} x^{2n-1}$$ 0,5 pt

$$(xf'(x))' = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n-1)^2}{n!} x^{2n-2}$$ 0,5 pt

Ce qui donne,pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$f'(x) + xf''(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n-1)^2}{n!} x^{2n-2}$$ 0,5 pt

Pour $x = 1$

$$\boxed{f'(1) + f''(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n-1)^2}{n!}}$$ 0,5 pt

Exercice 4 :
(a)
On a pour tout $x \in]-1, 1[$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$ 0,5 pt

par dérivation

$$\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$ 0,75 pt

En multipliant les deux membres de cette équation par x

$$\sum_{n=1}^{+\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2} = x + \sum_{n=2}^{+\infty} nx^n$$ 0,75 pt

d'où

$$\boxed{\sum_{n=2}^{+\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2} - x}$$ 0,5 pt

(b)
On a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}$$ 1 pt

On substitue x par x^2,on obtient

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{2n} = \frac{x^2}{(1-x^2)^2}}$$ 1,5 pt

fb/ mehda abderrahmane

Tasdawit n'Bgayet
Université de Bejaia

Université A/MIRA de Béjaia
Faculté des Sciences Exactes
Département ST2

2012/2013

Examen de rattrapage de Maths3

Exo 1 :
Etudier la nature des séries suivantes :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}e^{-n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} n^n e^{-\frac{1}{n}},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n\sqrt{n}}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(1+\frac{1}{n})}{n^4+1}.$$

Exo 2 :
Donner la nature des séries alternées suivantes :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{e^{\sqrt{n}}} \qquad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{n^2+(-1)^n}$$

Exo 3 :
On considère la série entière suivante :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} x^n$$

D son domaine de convergence, I son intervalle de convergence et R son rayon de convergence.
1. Calculer R, déduire I.
2. Déterminer D .

Indication : Utiliser $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n} = 1.$

Exo 4 :
Calculer la somme de chacune des séries entières suivantes :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)!+1}{n!} x^{n+1}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+2)}$$

fb/ mehda abderrahmane

Solutions

Exo 1

nature de la série $\sum_{n\geq 1} \sqrt{n}\, e^{-n}$?

$u_n = \sqrt{n}\, e^{-n} > 0, \forall n \geq 1$

- $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = e^{-1} < 1 \Rightarrow \sum_{n\geq 1} u_n$ conv $\rightarrow$ 1,25

- $v_n = n^n e^{-\frac{1}{n}} > 0, \forall n \geq 1$

$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{v_n} = \lim_{n\to+\infty} n\, e^{-\frac{1}{n^2}} = +\infty \Rightarrow \sum_{n\geq 1} v_n$ div 1,25

- $w_n = \frac{\sin^2 n}{n\sqrt{n}} > 0, \forall n$

on a $w_n \leq \frac{1}{n\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{3/2}} \quad \forall n \geq 1$

la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{3/2}}$ cv $\Rightarrow \sum_{n\geq 1} w_n$ cv 1,25

(PO comparaison)

- $K_n = \frac{\log(1+\frac{1}{n})}{n^4+1} > 0; \forall n > 0$

$\log(1+\frac{1}{n}) \sim \frac{1}{n}$ qd n suffisamment grand.

$\left(K_n \overset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n(n^4+1)} \overset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^5} \right)$

$\sum \frac{1}{n^5}$ cv $\overset{cq}{\Longrightarrow} \sum K_n$ cv 1,25

Exo 2

- $u_n = \frac{1}{e^{\sqrt{n}}} \xrightarrow{\text{Tend}} 0 \Longrightarrow \sum (-1)^n u_n$ CV (2,5)

  $\searrow$ (car $e^{\sqrt{n}} \nearrow$)

- $\cos n\pi = (-1)^n$, $\forall n$

  donc $\sum_{n\geq 2} \frac{\cos n\pi}{n^2+(-1)^n} = \sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{n^2+(-1)^n}$.

  $\begin{cases} u_n = \frac{1}{n^2+(-1)^n} \text{ est décroissante (car } n^2+(-1)^n \nearrow) \\ \lim_{n\to+\infty} u_n = 0 \text{, d'après le critère de Leibniz } \sum u_n \text{ CV} \end{cases}$ (2,5)

Exo 3

$\rho = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \times \frac{n^n}{n!} = \lim \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = e^{-1}$

$R = \frac{1}{\rho} = e \longrightarrow$ (1,5)

$I =]-e, e[\longrightarrow$ (0,5)

- En $x = e$, on obtient

  $\sum \frac{n!}{n^n} e^n$; $\lim_{n\to+\infty} \frac{n!\, e^n}{n^n} = +\infty \Longrightarrow$

  la CNC n'est pas satisfaite, la série en question diverge en $x = e$. (1,25)

En $x = -e$, on obtient $\sum (-1)^n \frac{n!}{n^n} e^n$

$$\lim_{n\to+\infty} \left| (-1)^n \frac{n!}{n^n} e^n \right| = +\infty \Longrightarrow$$

$$\lim_{n\to+\infty} (-1)^n \frac{n!}{n^n} e^n \neq 0 \Longrightarrow$$

CNC n'est pas satisfaite, la série entière diverge en $x = -e$. (1,25)

$$D =]-e, e[\quad (0,5)$$

Exo 4.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{(n-1)!+1}{n!} \right) x^{n+1} = S \quad ?$$

$$\frac{(n-1)!}{n!} + \frac{1}{n!} = \frac{(n-1)!}{n(n-1)!} + \frac{1}{n!} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n!}$$

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n!} \right) x^{n+1}$$

On a $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ (0,25)

$\times x$ on obtient

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n!} = x e^x \Longrightarrow \boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n!} = x(e^x - 1)}$$

(0,75 pt)

fb/ mehda abderrahmane

d'autre part

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \quad \forall x \in]-1,1[\quad \rightarrow (0{,}5)$$

En intégrant de 0 à x, on obtient

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = -\ln(1-x) \quad (0{,}5) \iff$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x) \quad (0{,}5) \rightarrow (*)$$

En multipliant (*) par x

(0,5)

on aura :

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[: \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n} = -x\ln(1-x) \quad (0{,}5)}$$

Conclusion, $\forall x \in]-1,1[$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{(n-1)!+1}{n!}\right) x^{n+1} = x(e^x-1) - x\ln(1-x) \quad (0{,}5)$$

$$= x\left[e^x - 1 - \ln(1-x)\right]$$

fb/ mehda abderrahmane

Université A/MIRA de Béjaia
Faculté : Technologie
Département : ST2

Année universitaire 2013-2014
Examen de Rattrapage : Maths 3
Durée : 2 heures

04/09/2014.

Exercice 1 :(6 pts)
Étudier la nature des séries suivantes :

1) $\sum_{n\geq 1} \cos \frac{\pi n+1}{n}$

2) $\sum_{n>1} \frac{e^{-n^2}}{n-1}$

3) $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n-e^{-n}}$

4) $\sum_{n\geq 0} \frac{n}{n^2-(-1)^n}$

Exercice 2 :(8 pts)
Soit la série de fonctions, $\sum_{n\geq 0} f_n$, dont le terme général est donnée par :

$$f_n(x) = \frac{x}{n(1+nx^2)}.$$

1. Étudier, sur $\mathbb{R}$, la convergence simple, convergence normale, uniforme de cette série .

Considérons la fonction, s, définie par :

$$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n(1+nx^2)}.$$

2. la fonction s est-elle dérivable sur $\mathbb{R}^*_+$? (justifier).

Exercice 3 :(6 pts)
Déterminer le rayon de convergence et la somme des séries entières suivantes :

(a) $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^{n+1}n}{(n+1)(n+2)} x^n.$

(b) $\sum_{n\geq 0} (2n+1)x^n.$

1. Conv simple sur 2 pts — Solution Ex02 — I

• Etudier, sur $\mathbb{R}$, la convergence simple de la série de fonctions $\sum \frac{x}{n(1+nx^2)}$

Cas particulier, pour $x=0$ on obtient $\sum 0$ CV 0,5

si $x \neq 0$, on a

$$\sum \frac{x}{n(1+nx^2)} = x \sum \frac{1}{n(1+nx^2)}$$

$$\frac{1}{1+nx^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{nx^2}, \text{ par conséquent}$$

$$\frac{1}{n(1+nx^2)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2x^2}$$

la série $\sum \frac{1}{n^2x^2}$ CV pour tout $x \in \mathbb{R}_*$, par équivalence $\sum \frac{1}{n(1+nx^2)}$ CV pour tout $x \in \mathbb{R}_*$

En résumé 1,5

la série de fonction en question est simplement convergente sur $\mathbb{R}$.

• Etudier, sur $\mathbb{R}$, la convergence normale de $\sum f_n(x)$

Calculons $\sup_{x \in \mathbb{R}} f_n(x)$.

$$f_n'(x) = \frac{1-nx^2}{n(1+nx^2)^2}$$ 0,5

x	$-\infty$		$-\sqrt{\frac{1}{n}}$		$\sqrt{\frac{1}{n}}$		$+\infty$
$f_n'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
	0	↘	$\frac{-1}{n\sqrt{n}}$	↗	$\frac{1}{n\sqrt{n}}$	↘	0

0,5

• $\lim_{x \to \pm\infty} f_n(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x}{n^2x^2} = 0$

$$f_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{2n} = \frac{1}{2n\sqrt{n}}$$

$$f_n\left(\frac{-1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{-1}{2n\sqrt{n}}$$

fb/ mehda abderrahmane

Il est clair que

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)| = \frac{1}{n\sqrt{n}}$$ 0,5

Comme $\sum_n \frac{1}{n\sqrt{n}}$ CV,

par définition de la convergence Normale,

la série de fonction $\sum_n f_n(x)$ est Normalement convergente sur $\mathbb{R}$. 0,5

- la convergence uniforme

CVN sur $\mathbb{R}$ $\Longrightarrow$ CV unif sur $\mathbb{R}$. 1

2°

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n(1+nx^2)}$$

S est-elle dérivable ?

Soit $[a,b] \subset \mathbb{R}_*^+$

(a) pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $f_n \in C^1([a,b])$

(b) il existe $x_0 \in [a,b]$ tq $\sum f_n(x_0)$ CV (question 1°)

(c) la série de fonction $\sum f_n'$ CV unif sur $[a,b]$

en effet :

$$\sum f_n'(x) = \sum \frac{1-nx^2}{n(1+nx^2)^2}$$

Il est clair que :

$$\left|\frac{1-nx^2}{n(1+nx^2)^2}\right| \leq \frac{1+nx^2}{n(1+nx^2)^2}$$

$$\leq \frac{1}{n^2x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}^*$$

$$\leq \frac{1}{a^2n^2}$$

Comme $\sum \frac{1}{a^2n^2}$ est convergente, la série de fonction $\sum_n f_n'(x)$ est Normalement convergente sur $[a,b]$

$\Longrightarrow \sum f_n'(x)$ unif CV dans $[a,b]$

de (a), (b) et (c) la fonction S est dérivable sur $[a,b]$. Comme $[a,b]$ est quelconque dans $\mathbb{R}_*^+$ alors S est dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$

fb/ mehda abderrahmane

II

$\forall x \in]-1,1[$:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n .$$

cette égalité peut s'écrire sous cette forme : 0,5

$$\boxed{\frac{1}{1-x} = 1 + x + x\,\varepsilon(x)} \quad (*)$$

avec $\lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$ $(x\varepsilon(x) = o(x))$

bien sûr x est toujours dans $]-1,1[$.

si on pose $x = \frac{(-1)^n}{n^2} \in]-1,1[$ $\forall n \geq 2$

dans le terme v_n, en utilisant $(*)$, devient

$$v_n = \frac{1}{n}\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^2} + \frac{(-1)^n}{n^2}\varepsilon\left(\frac{(-1)^n}{n^2}\right)\right)$$

c-à-d

$$v_n = \frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{n^3} + \frac{(-1)^n}{n^3}\varepsilon\left(\frac{(-1)^n}{n^2}\right)$$ 0,25

Etudier la série $\sum v_n$, revient tout simplement à l'étude des séries $\sum \frac{1}{n}$, $\sum \frac{(-1)^n}{n^3}$ et

$$\sum \frac{(-1)^n}{n^3}\varepsilon\left(\frac{(-1)^n}{n^2}\right)$$

où bien

$$\sum o\left(\frac{(-1)^n}{n^2}\right).$$

$\sum \frac{1}{n}$ div 0,5

$\sum \frac{(-1)^n}{n^3}$ cv (car elle cv absolument) (ou Liebniz) 0,5

$\sum o\left(\frac{(-1)^n}{n^2}\right)$ cv 0,5

car $\left|o\left(\frac{(-1)^n}{n^2}\right)\right| \leq \frac{1}{n^3}$

en résumé la série en question est divergente 0,25

fb/ mehda abderrahmane

I

Corrigé de l'examen de Rattrapage

Solution de l'ex 01

Exo 1 (sur 06 points).

nature de $\sum_{n>0} \cos\frac{\pi n+1}{n}$

On pose $u_n = \cos\frac{\pi n+1}{n}$

On a : $\lim_{n\to+\infty} u_n = -1 \neq 0 \xRightarrow{CNC}$ la série $\sum u_n$ div

sur (1 point)

nature de $\sum_{n>1} \frac{e^{-n^2}}{n-1}$.

On pose $u_n = \frac{e^{-n^2}}{n-1}$.

d'abord, $u_n > 0, \forall n > 1$, (0,25)

donc l'application du critère d'Alembert est autorisée, en effet :

$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0 < 1 \Longrightarrow \sum u_n$ CV

(1 pt)

nature de $\sum_{n\geq1} \frac{(-1)^n}{n-e^{-n}}$

On pose $v_n = \frac{1}{n-e^{-n}}$

Comme $v_n > 0$ $(n \geq 1)$, la série en question est alternée, l'application du critère de Leibniz est autorisée. En effet :

$\lim_{n\to} v_n = 0$ et

$v_n \searrow$ (car $n - e^{-n} \nearrow$), les conditions du critère de Leibniz sont vérifiées alors $\sum (-1)^n v_n$ CV.

(1,25)

nature de $\sum_{n\geq0} \frac{n}{n^2-(-1)^n}$.

On pose :

$v_n = \frac{n}{n^2-(-1)^n}$.

La quantité v_n peut s'écrire sous cette forme :

$v_n = \frac{1}{n} \times \frac{1}{1-\frac{(-1)^n}{n^2}}$,

$\forall n > 0$.

par ailleurs,

fb/ mehda abderrahmane

Exo 3

II1

• Rayon de conv.

(a) : $R = 1 \longrightarrow$ 1,5

(b) : $R = 1 \longrightarrow$ 1,5

• calculons la somme :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n}{(n+1)(n+2)} x^n$$

On a

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} ; |x| < 1 \longrightarrow 0{,}5$$

$$\Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x} \longrightarrow (*)$$

en dérivant $*$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n x^{n-1} = \frac{-1}{(1+x)^2}$$

en multipliant par x

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n x^n = \frac{-x}{(1+x)^2}$$

En intégrant de 0 à x

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n x^{n+1}}{(n+1)} = \int_0^x \frac{-t}{(1+t)^2} dt$$

$$= f(x)$$

En intégrant une 2ème fois de 0 à x

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n x^{n+2}}{(n+1)(n+2)} = \int_0^x f(t) dt$$

ce qui revient à écrire :

$\forall x \in]-1, 0[\cup]0, 1[$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n x^n}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{x^2} \int_0^x f(t) dt$$

$$\Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n x^n}{(n+1)(n+2)} = \frac{-1}{x^2} \int_0^x f(t) dt$$

1

$$S(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x = 0 \\ -\frac{1}{x^2} \int_0^x f(t) dt ; x \neq 0 \text{ et } |x| < 1 \end{cases}$$

où

$$\int_0^x f(t) dt = \int_0^x \frac{-t}{(1+t)^2} dt$$

$$= \int_0^x \frac{-t-1+1}{(1+t)^2} dt$$

$$= -\int_0^x \frac{1}{1+t} dt + \int_0^x \frac{1}{(1+t)^2} dt$$

fb/ mehda abderrahmane

d'où bien Fve !

$$\int_0^x f(t)\,dt = -\ln(1+x) - \frac{1}{1+x} + 1$$

$$S(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{-\ln(1+x)}{x^2} - \dfrac{1}{x^2(1+x)} + \dfrac{1}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \text{ et } |x| < 1 \end{cases}$$

(b)

$$\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)\, x^n$$

on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad , |x| < 1 \qquad (1)$$

en dérivant

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

en multipliant par $2x$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} 2n x^n = \frac{2x}{(1-x)^2}$$

d'où bien

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} 2n x^n = \frac{2x}{(1-x)^2}} \qquad (2)$$

(1) + (2) $\Longrightarrow$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)\, x^n = \frac{2x}{(1-x)^2} + \frac{1}{1-x}$$

$$= S(x)$$

1,5

fb/ mehda abderrahmane

fb/mehda abderrahmane

جامعة بجاية
Tasdawit n'Bgayet
Université de Béjaïa

Université A/MIRA de Béjaia
Faculté de la Technologie
Département ST 2

30 janvier 2014

Examen de Maths3

Exercice 1 :(06pts)
Étudier la nature des séries numériques suivantes :

$$(i)\ \sum_{n\geq 0} \frac{e^{n^2}}{n!} \qquad (ii)\ \sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{\ln(\sqrt{n}+1)}$$

$$(iii)\ \sum_{n\geq 2} \frac{\cos^2 n}{n\sqrt{n}-1} \qquad (iv)\ \sum_{n\geq 1} \frac{e^{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}-1}{n\sqrt{n}}$$

Exercice 2 :(08pts)
Partie 1 :
On considère la suite de fonctions $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = \frac{e^{-nx^2}}{(n+1)^3}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

1. Étudier le sens de variation des fonctions f_n sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que cette suite converge simplement, sur $\mathbb{R}$, vers une fonction f que l'on déterminera.
3. Cette suite est-elle uniformément convergente sur $\mathbb{R}$? (justifier).

Partie 2 :
Soit la série de fonction $\sum_{n\geq 0} f_n$ dont le terme général est donné par :

$$f_n(x) = \frac{e^{-nx^2}}{(n+1)^3}$$

1. Étudier la nature de la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ sur $\mathbb{R}$.
2. En déduire que la fonction somme S, définie sur $\mathbb{R}$ par $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-nx^2}}{(n+1)^3}$, est continue.
3. Montrer que S est de classe $C^1(\mathbb{R})$. (indication : effectuer l'étude sur tout intervalle $[-a, a] \subset \mathbb{R}$, $a > 0$)
4. En déduire l'expression de $S'(x)$.

Exercice 3 :(06pts)
Déterminer le rayon de convergence R et la somme de la série entière suivante :

$$\sum_{n\geq 1} \frac{nx^n}{(n+1)}$$

Etudier la série entière précédente en $x = R$ et $x = -R$ (si $R \neq +\infty$) et en déduire le domaine de convergence.

fb/mehda abderrahmane

جامعة بجاية
Tasdawit n'Bgayet
Université de Béjaïa

Université A/MIRA de Béjaia
Faculté de la Technologie
Département ST 2

30 janvier 2014

Examen de Maths3

Exercice 1 :(06pts)

Étudier la nature des séries numériques suivantes :

01pt $(i)\ \sum_{n\geq 0} \frac{e^{n^2}}{n!}$ $\quad (ii)\ \sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{\ln(\sqrt{n}+1)}$ 01,50 pts

01pt $(iii)\ \sum_{n\geq 2} \frac{\cos^2 n}{n\sqrt{n}-1}$ $\quad (iv)\ \sum_{n\geq 1} \frac{e^{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}-1}{n\sqrt{n}}$ 02,50 pts

Solution :

1. On pose $U_n = \frac{e^{n^2}}{n!} \geq 0, \quad \forall n \geq 0$. Utilisons le critère de d'Alembert. Estimons, donc, le rapport entre deux termes successifs.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{e^{(n+1)^2}}{(n+1)!}\frac{n!}{e^{n^2}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{e^{n^2}e^{(2n+1)}\cancel{n!}}{(n+1)\cancel{n!}e^{n^2}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{e^{2n+1}}{n+1} = +\infty > 1$$

Ainsi, d'après la règle de d'Alembert, la série $\sum_{n\geq 0} \frac{e^{n^2}}{n!}$ diverge.

Exercice 2 :(08pts)

Partie 1 :

On considère la suite de fonctions $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = \frac{e^{-nx^2}}{(n+1)^3}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

1. Étudier le sens de variation des fonctions f_n sur $\mathbb{R}$.

Solution :

01pt

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a $\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = \lim_{x\to-\infty} f_n(x) = 0$.

Passons à la dérivée,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n'(x) = \frac{-2nxe^{-nx^2}}{(n+1)^3}.$$

Trouvons les points pour lesquels la dérivée s'annule,

$$f_n'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-2nxe^{-nx^2}}{(n+1)^3} = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Ainsi, $f_n'(x) < 0$ ssi $x \geq 0$, de même, $f_n'(x) \geq 0$ ssi $x < 0$. On en déduit, alors, que f_n est croissante si $x \in]-\infty, 0[$ et décroissante si $x \in]0, +\infty[$.

Elle atteint ainsi, son maximum pour $x = 0$ et pour cette valeur la fonction donne $f_n(0) = \frac{1}{(n+1)^3}$.

En résumé, on obtient le tableau des variations suivant,

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f_n'(x)$		$+$	0	$-$	
$f_n(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{(n+1)^3}$	$\searrow$	0

fb/mehda abderrahmane

2. Montrer que cette suite converge simplement, sur $\mathbb{R}$, vers une fonction f que l'on déterminera.

0,1pt

Solution :

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, fixé, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0 = f(x)$.

Ainsi, la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonctions $f : x \mapsto f(x) = 0$.

3. Cette suite est-elle uniformément convergente sur $\mathbb{R}$? (justifier).

Solution :

Il s'agit de calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n - f\|$ et de comparer le résultat avec 0.

0,1pt

Par définition, $\|f_n - f\| = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f_n - f| = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} \left| \dfrac{e^{-nx^2}}{(n+1)^3} - 0 \right| = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} \dfrac{e^{-nx^2}}{(n+1)^3}$.

Or, d'après le tableau de variations, $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} \dfrac{e^{-nx^2}}{(n+1)^3} = \dfrac{1}{(n+1)^3}$.

Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n - f\| = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{(n+1)^3} = 0$, ce qui montre que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément, sur $\mathbb{R}$, vers la fonction f.

Partie 2 :

Soit la série de fonction $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$ dont le terme général est donné par :

$$f_n(x) = \frac{e^{-nx^2}}{(n+1)^3}$$

1. Étudier la nature de la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$ sur $\mathbb{R}$.

Solution :

Etudions la série $\sum\limits_{n\geq 0} \|f_n\|$, sachant que, $\|f_n\| = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)|$.

0,5pt

Au regard du tableau des variations, il est clair que,

$$\forall n \in \mathbb{N} \text{ et } \forall x \in \mathbb{R}, |f_n(x)| \leq \frac{1}{(n+1)^3}$$

Ainsi, $\|f_n\| = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)| = \dfrac{1}{(n+1)^3}$. Par ailleurs, la série $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{1}{(n+1)^3}$ est une série convergente par comparaison à une série de Riemann.

On en déduit que la série de fonction $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$ est normalement convergente, par conséquent elle converge uniformément et simplement sur $\mathbb{R}$.

2. En déduire que la fonction somme S, définie sur $\mathbb{R}$ par $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{e^{-nx^2}}{(n+1)^3}$, est continue.

0,5pt

Solution :

Les fonctions f_n sont continue sur $\mathbb{R}$ et converge uniformément sur $\mathbb{R}$. Alors, en vertu du théorème de continuité des séries de fonctions, la somme $S(x) = \sum_{n\geq 0} f_n(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

3. Montrer que S est de classe $C^1(\mathbb{R})$. (indication : effectuer l'étude sur tout intervalle $[-a, a] \subset \mathbb{R}$, $a > 0$)

Solution :

(a) Les fonctions f_n sont de Classe $C^1(\mathbb{R})$.

fb/ mehda abderrahmane

(b) La série converge simplement, alors la fonction somme est bien définie. (il existe au moins $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que la série numérique $\sum_{n\geq 0} f_n(x_0)$ est convergente)

(c) Suivant l'indication, considérons un intervalle du type $[-a, a] \subset \mathbb{R}$ $(a > 0)$ quelconque. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [-a, a]$. On a

$$|f_n'(x)| = \left|\frac{-2nx\mathrm{e}^{-nx^2}}{(n+1)^3}\right| = \frac{2n|x|\mathrm{e}^{-nx^2}}{(n+1)^3} \leq \frac{2na}{(n+1)^3}.$$

La série $\sum_{n\geq 0} \frac{2na}{(n+1)^3}$ est convergente par comparaison à une série de Riemann convergente.
Ainsi, la série $\sum_{n\geq 0} f_n'$ converge normalement (donc uniformément) sur $[-a, a]$.
De (a), (b) et (c) on conclut que la somme S est de classe $C^1([-a, a])$, et par suite S est de classe $C^1(\mathbb{R})$.

4. En déduire l'expression de $S'(x)$.

Solution :

0,5pt

$$S'(x) = \sum_{n\geq 0} f_n'(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{-2nx\mathrm{e}^{-nx^2}}{(n+1)^3}.$$

Exercice 3 :(06pts)

0,3pts

Déterminer le rayon de convergence R et la somme de la série entière suivante :

0,1pt

$$\sum_{n\geq 1} \frac{nx^n}{(n+1)}$$

Etudier la série entière précédente en $x = R$ et $x = -R$ (si $R \neq +\infty$) et en déduire le domaine de convergence.

0,1pt 0,1pt

fb/ mehda abderrahmane

22 JAN 2013

Ex 1 (10)

$$\sum_{n\geq 1} \frac{e^{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} - 1}{n\sqrt{n}}$$ nature :

$\forall x \in \mathbb{R}$: $e^x = 1 + x + x\varepsilon(x)$ avec $\lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$.

On l'on peut écrire

$$e^x = 1 + x + o(x).$$

0,5

On pose $x = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, on a

$$e^{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} - 1 = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \varepsilon\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$$

d'où

$$\frac{e^{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} - 1}{n\sqrt{n}} = \frac{(-1)^n}{n^2} + \frac{(-1)^n}{n^2} \varepsilon\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$$

$\varepsilon \to 0$, $n \to +\infty$

0,5

la nature de $\sum \frac{e^{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} - 1}{n\sqrt{n}}$ dépend de la nature des séries

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2} \quad \text{et} \quad \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2} \varepsilon\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right).$$

$\sum \frac{(-1)^n}{n^2}$ CV (car elle CV Abs. où bien d'après le critère de Cauchy) 0,5

Comme $\lim_{n \to +\infty} \varepsilon\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) = 0$, à partir d'un certain rang $\left|\varepsilon\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right| < 1$ 0,5

ce qui conduit à écrire

$$\left|\frac{(-1)^n}{n^2}\varepsilon\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)\right| \leq \frac{1}{n^2} \quad \text{(à partir d'un certain rang)}$$

d'où conclure

$$\sum \frac{1}{n^2} \text{ CV} \xrightarrow[\text{d'après}]{\text{règle}} \sum \left|\frac{(-1)^n}{n^2}\varepsilon\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)\right| \text{ CV} \xrightarrow{\text{CVA}} \sum \frac{(-1)^n}{n^2}\varepsilon\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) \text{ CV}$$

d'où

$\sum \frac{e^{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} - 1}{n\sqrt{n}}$ est convergente 0,5

fb/ mehda abderrahmane

fb/ mehda abderrahmane

Exo3 (06 pts)

18 AVR 2013

$$\sum_{n\geq 1} \frac{n x^n}{(n+1)} \quad , \quad a_n = \frac{n}{n+1}$$

$$\rho = \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1 \quad ; \quad R = \frac{1}{\rho} = 1$$

01

$I =]-1, 1[$ Intervalle de CnV.

Calculons la somme : $S(x)$,

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n+1} x^n \text{, où } x \in]-1,1[.$$

On a $\forall x \in]-1,1[: \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x} - 1 \quad (*)$$

En intégrant $(*)$ de 0 à x, on obtient

$$\forall x \in]-1,1[: \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = -\ln(1-x) - x \quad (**)$$

En divisant les deux membres de $(**)$ par x

$\forall x \in]-1,0[\cup]0,1[:$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n+1} = -\frac{\ln(1-x)}{x} - 1.$$

En dérivant cette formule ; on obtient

$\forall x \in]-1,0[\cup]0,1[$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n x^{n-1}}{n+1} = \frac{1}{x(1-x)} + \frac{\ln(1-x)}{x^2}$$

En multipliant par x, on a : $\forall x \in]-1,0[\cup]0,1[$.

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n x^n}{n+1} = \frac{1}{1-x} + \frac{\ln(1-x)}{x}.$$

Comme $S(0) = 0$, on a

$$\forall x \in]-1,1[: S(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1-x)}{x} + \dfrac{1}{1-x} & \text{si } x \in]-1,1[\cup]0,1[\\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

fb/ mehda abderrahmane

fb/ mehda abderrahmane

Université A. Mira
Dpt : ST 2ième année licence

20/02/10

Examen du module de Maths 3

Exercice 1 (1,5 pts) :

Etudier la convergence de la série suivante :

$$\frac{1}{2.3}+\frac{1}{4.5}+\frac{1}{6.7}+\cdots$$

Exercice 2(4 pts) :

Etudier la série de terme général $U_n=\frac{(-1)^n}{n+\sin n}$.

Exercice 3 (6 pts) :

Etudier la convergence simple, la convergence uniforme de la suite d'applications suivante :

$$f_n(x)=\frac{x}{n+x^2} \qquad n\geq 1,\ x\in R$$

Exercice 4 (7 pts) :

Soit $U_n(x)=e^{-x\sqrt{n}} \quad \forall\,(n,x)\in N\text{x}R$

1. Soit a > 0.Montrer la convergence normale de la série de fonctions de terme général $U_n(x)$ Sur [a, + ∞[.Cette série est-elle normalement convergente sur R_+ ?
2. Soit U, sa limite. Montrer que la fonction U est continue sur R_+^*
3. Montrer que la fonction U est dérivable sur R_+^* etque sa dérivée est donnée par :

$$\forall\ x\in R_+^* \qquad u'(x)=-\sum_{n\geq 0}\sqrt{n}\,e^{-x\sqrt{n}}$$

4. Que se passe t-il si $x<0$

Exercice 5 : (1,5 pts) : Au choix 1) ou 2)

1) Déterminer le domaine de convergence de la série suivante:

$$\sum_{n\geq 0}(n^2+3n+2)x^n$$

2) Etudier la convergence de la série de terme général U_n = Arctang ($\frac{1}{1+n+n^2}$) et calculer sa somme.

Ind : Arctang ($\frac{a-b}{1+ab}$) = Arctang (a) - Arctang (b)

fb/ mehda abderrahmane

Corrigé

Ex1 (1,5)

$$\frac{1}{2.3} + \frac{1}{4.5} + \frac{1}{6.7} + \dots$$

0,5

0,5 $= \sum_{n\geq 1} \frac{1}{2n(2n+1)}$ et $\frac{1}{2n(2n+1)} \sim \frac{1}{4n^2}$

$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{4n^2} = \frac{1}{4} \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ et $\sum \frac{1}{n^2}$ CV car c'est une série de Riemann $\alpha = 2 > 1$

0,5

$\Rightarrow \sum_{n\geq 1} \frac{1}{2n(2n+1)}$ CV

Ex2 (4,5) $U_n = \frac{(-1)^n}{n+\sin n}$

0,5 0,5

$U_n = \frac{(-1)^n}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{\sin n}{n}}\right) = \frac{(-1)^n}{n}\left(1+\frac{\sin n}{n}\right)^{-1}$ $\frac{\sin n}{n} \longrightarrow 0$ $n \to +\infty$

$\Rightarrow U_n = \frac{(-1)^n}{n}\left(1 - \frac{\sin n}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ 0,5

$= \frac{(-1)^n}{n} - \frac{(-1)^n \sin n}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ 0,5

* $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ CV car c'est une série alternée avec $\frac{1}{n} \searrow 0$ 0,5
* $\sum \frac{(-1)^n \sin n}{n^2}$ CA car $\left|\frac{(-1)^n \sin n}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$ et $\sum \frac{1}{n^2}$ CV $\Rightarrow \sum \frac{(-1)^n}{n} \sin$ CV
* $\sum o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ CV 0,5

$\Rightarrow \sum \frac{(-1)^n}{n+\sin n}$ CV.

Ex3

$f_n(x) = \frac{x}{n+x^2}$ $n \geq 1$ $x \in \mathbb{R}$.

* C.S

si $x = 0$ $f_n(x) = 0$ 0,5

fb/ mehda abderrahmane

si $x = 0$ $\quad \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$ $\quad 0{,}5$

$\Rightarrow \quad f_n(x) \xrightarrow{CS} f(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$0{,}5$

C.U (4,5)

$f_n \xrightarrow{CU} f = 0 \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_0 \ |f_n(x) - 0| < \varepsilon$

on etudie la fonction f_n

on remarque que f_n est impaire on l'etudie donc sur $[0, +\infty[$

$f'_n(x) = \dfrac{n + x^2 - 2x^2}{(n+x^2)^2} = \dfrac{n - x^2}{(n+x^2)^2}$ $\quad 0{,}5$

$f'_n(x) = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{n}$ $\quad 0{,}5$

x	0		$\sqrt{n}$		$+\infty$
f'_n		$+$	0	$-$	
f_n	0	$\nearrow$	$f_n(\sqrt{n})$	$\searrow$	0

1

$f_n(\sqrt{n}) = \dfrac{\sqrt{n}}{n+n} = \dfrac{\sqrt{n}}{2n} = \dfrac{1}{2\sqrt{n}} \xrightarrow{n\to+\infty} 0$ $\quad 1$

$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \quad f_n(x) \leq f_n(\sqrt{n})$ $\quad 0{,}5$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \ \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_0(\varepsilon) \quad |f_n(x)| \leq \dfrac{1}{2\sqrt{n}} < \varepsilon$

$\Rightarrow \quad f_n \xrightarrow{CU} 0$ sur $\mathbb{R}$. $\quad$ 1pt

fb/ mehda abderrahmane

Ex4 (7pts)

1.a) Cas. $(a>0)$

$x \geq a \Rightarrow x\sqrt{n} \geq a\sqrt{n} \Rightarrow -x\sqrt{n} \leq -a\sqrt{n}$

$\Rightarrow e^{-x\sqrt{n}} \leq e^{-a\sqrt{n}}$

et $e^{-a\sqrt{n}}$ est le t.g d'une serie CV

en effet : $\lim_{n\to+\infty} n^2 e^{-a\sqrt{n}} = 0 \Rightarrow \exists M>0 \text{ tq } e^{-a\sqrt{n}} \leq \frac{M}{n^2}$

$\sum \frac{1}{n^2}$ CV $\Rightarrow \sum e^{-a\sqrt{n}}$ CV $\Rightarrow \sum_{n\geq 0} e^{-x\sqrt{n}}$ CN sur $[a+\infty[$ $\forall a>0$

1b) CN sur $\mathbb{R}_+$

pour $x=0$ $e^{-x\sqrt{n}} = e^0 = 1 \not\to 0$

0,5

$\Rightarrow \sum e^{-x\sqrt{n}}$ div pour $x=0 \Rightarrow \sum e^{-x\sqrt{n}}$ ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}_+$

2. soit $u = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{k=n} e^{-x\sqrt{k}}$

0,5 $\sum_{n\geq 0} U_n(x)$ CN sur $[a+\infty[\Rightarrow \sum_{n\geq 0} U_n(x)$ CU sur $[a+\infty[$

et les U_n sont cont sur $[a+\infty[\Rightarrow u$ est cont sur $[a+\infty[$

0,5

et comme la serie div pour $x=0 \Rightarrow$ $\forall a>0$

0,5 $u(x) = \sum U_n(x)$ est cont sur $\mathbb{R}_+^*$

3. Etudions la CU de la serie derivée sur $\mathbb{R}_+^*$

soit $(-\sum \sqrt{n}\, e^{-x\sqrt{n}})$ $x>0$

on a : $\lim_{n\to+\infty} n^2\sqrt{n}\, e^{-x\sqrt{n}} = 0 \Rightarrow \sqrt{n}\, e^{-x\sqrt{n}} \leq \frac{M}{n^2}$

$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ CV $\Rightarrow \sum \sqrt{n}\, e^{-x\sqrt{n}}$ CU sur $\mathbb{R}_+^*$

$\Rightarrow -\sum \sqrt{n}\, e^{-x\sqrt{n}}$ CU sur $\mathbb{R}_+^*$

fb/ mehda abderrahmane

b) : U_n sont dériv sur $\mathbb{R}_+^*$

1 | . $\sum U_n$ cv ; U sur " $\Rightarrow$ $(\sum U_n)' = \sum U_n'$

. $\sum U_n'$ cU " "

où $U'(x) = -\sum_{n\geq 0} \sqrt{n}\, e^{-x\sqrt{n}}$

4. si $x < 0$ $e^{-x\sqrt{n}} \longrightarrow +\infty$ $\Rightarrow$ $\sum U_n(x)$ d'iv

0,5

Ex 5 (1,5)

1) $n^2+3n+2 \sim n^2$ et $\frac{(n+1)^2}{n^2} \longrightarrow 1$

0,5 ($\Rightarrow R_c = 1$

0,5 si $x = 1$ $\sum (n^2+3n+2)$ d'iv. car $n^2+3n+2 \longrightarrow +\infty$

0,5 si $x = -1$ $\sum (n^2+3n+2)(-1)^n$ d'iv car $(-1)^n(n^2+3n+2) \not\longrightarrow 0$ (n'a pas de limite)

$\Rightarrow D_c =]-1, 1[$.

2). $U_n = \text{Arctg}\frac{1}{1+n^2+n} = \text{Arctg}\frac{1}{1+n(n+1)} = \text{Arctg}\, n+1 - \text{Arctg}\, n$

0,5 (on a : $a = n+1$ et $b = n$

0,5 ($\text{Arctg}\frac{1}{1+n^2+n} \sim \text{Arctg}\frac{1}{n^2} \sim \frac{1}{n^2}$ au $V(+\infty)$

$\sum \frac{1}{n^2}$ cv $\Rightarrow$ $\sum \text{Arctg}\frac{1}{1+n+n^2}$ cv

calculons sa somme $S = \sum_{n\geq 0} \text{Arctg}\frac{1}{1+n+n^2}$

$S = \lim_{n\to+\infty} (\text{Arctg}\, 1 - \text{Arctg}\, 0 + \cancel{\text{Arctg}\, 2} - \cancel{\text{Arctg}\, 1} + \dots + \text{Arctg}\, n+1)$

0,5 $= \lim_{n\to+\infty} \text{Arctg}\, n+1 = \frac{\pi}{2}$

* on peut prendre aussi $a = \frac{1}{n}$ et $b = \frac{1}{n+1}$ $\Rightarrow$ $\frac{a-b}{1+ab} = \frac{1}{1+n^2+n}$