TD N 01

LES VECTEURS

Exercice 01 :

Deux points A et B dont les coordonnées sont données par : A(2,3,-3) ; B(5,7,-3).

- Déterminer le module, les composantes, la direction (les cosinus directeurs) et le sens du vecteur $\overrightarrow{AB}$;

- Déterminer les composantes du vecteur $\vec{V}$ perpendiculaire $\overrightarrow{AB}$ à appartenant au plan (0, x, y).

Corrigé :

$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A).\vec{i} + (y_B - y_A).\vec{j} + (z_B - z_A).\vec{k} = (5-2).\vec{i} + (7-3).\vec{j} + (-3+3).\vec{k} \;=\; 3\vec{i} + 4\vec{j}$

1. Caractéristiques du vecteur $\overrightarrow{AB}$:

a. Module : $\overrightarrow{AB} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

b. Les composantes : $x_{AB} = 3$, $y_{AB} = 4$

c. La direction (le support) : Obtenu en déterminant les cosinus directeurs :

$$\cos(\vec{i}, \overrightarrow{AB}) = \cos\left(\frac{x_{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|}\right) = \cos\left(\frac{3}{5}\right) = 0{,}6 \Rightarrow \alpha = \cos^{-1}(0{,}6) = 53{,}13°$$

$$\cos(\vec{j}, \overrightarrow{AB}) = \cos\left(\frac{y_{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|}\right) = \cos\left(\frac{4}{5}\right) = 0{,}8 \Rightarrow \beta = \cos^{-1}(0{,}8) = 36;87°$$

$$\cos(\vec{k}, \overrightarrow{AB}) = \cos\left(\frac{z_{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|}\right) = \cos\left(\frac{0}{5}\right) = 0 \Rightarrow \gamma = \cos^{-1}(0) = \frac{\pi}{2}$$

Le support se trouve dans le plan $(0, x, y)$.

c. Le sens :

Toutes les composantes sont positives, alors $\overrightarrow{AB}$ est orienté positivement suivant les deux axes Ox et Oy.

2. Les composantes du vecteur perpendiculaire à $\overrightarrow{AB}$:

Soit le vecteur $\vec{V}$ orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et appartenant au plan $(0, x, y)$. Donc :

$$\vec{V}.\overrightarrow{AB} = 0 \;:\; (x.\vec{i} + y.\vec{j}) \bullet (3.\vec{i} + 4.\vec{j}) = 3x + 4y = 0, \text{ soit } y = \frac{3}{4}x.$$

Tout vecteur dont le support est la droite $y = \frac{3}{4}x$ est un vecteur orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et appartenant au plan $(0, x, y)$.

$$\vec{V} \wedge \overrightarrow{AB} = \vec{0} \;:\; \begin{cases} x.i \\ y.j \wedge \overrightarrow{AB} = \vec{0} \\ z.k \end{cases}$$

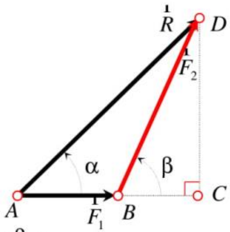
Exercice 02 :

La résultante $\vec{R}$ de deux forces $\vec{F_1}$ et $\vec{F_2}$, de module égal à 50 N et fait un angle 30° par rapport à $\vec{F_1}$, de module égal à 15 N.

- Déterminer le module de la force $\vec{F_2}$ et la l'angle entre les deux vecteurs $\vec{F_1}$ et $\vec{F_2}$.

Corrigé :

Nous devons former deux équations à deux inconnues $\vec{F}_2$ et β à partir de la figure ci-dessous.
D'une part, selon le théorème de Pythagore :
Pour simplifier l'écriture, posons $\|\vec{F}_1\| = F_1$, $\|\vec{F}_2\| = F_2$ et $\|\vec{R}\| = R$.



$R^2 = \overline{AD}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CD}^2$,

Avec $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC} = F_1 + F_2.\cos\beta$; $\overline{CD} = F_2.\sin\alpha$

D'où :

$R^2 = (F_1 + F_2.\cos\beta)^2 + F_2{}^2.\sin^2\beta$

$R^2 = F_1{}^2 + F_2{}^2.\cos^2\beta + F_2{}^2.\sin^2\beta + 2F_1.F_2.\cos\beta$

$R^2 = F_1{}^2 + F_2{}^2 + 2F_1.F_2.\cos\beta \quad (1)$

D'autre part, nous cherchons une équation différente qui contient $\cos\beta$:

$\overline{AC} = R.\cos\alpha = \overline{AB} + \overline{BC} = F_1 + F_2.\cos\beta$

d'où :

$F_2.\cos\beta = R.\cos\alpha - F_1 \qquad (2)$

Substituons $F_2.\cos\beta$ de (2) dans (1) :

$R^2 = F_1{}^2 + F_2{}^2 + 2F_1.(R.\cos\alpha - F_1)$

Soit :

$F_2 = \sqrt{R^2 + F_1{}^2 + 2F_1.R.\cos\alpha} = \sqrt{50^2 + 15^2 - 2.15.50.\cos 30} = 37{,}76 \text{ N}$

Et,

$\cos\beta = \dfrac{R.\cos\alpha - F_1}{F_2} = \dfrac{50.\cos 30 - 15}{44{,}44} = 0{,}7495 \Rightarrow \beta = \cos^{-1}(0{,}7495) = 41{,}45°$

Exercice 03 :

Pour les vecteurs $\vec{V_1} = 2\vec{i} - \vec{j} + 5\vec{k}$; $\vec{V_2} = -3\vec{i} + 1{,}5\vec{j} - 7{,}5\vec{k}$; $\vec{V_3} = -5\vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k}$, Calculer : $\vec{V_1}\bullet\vec{V_2}$, $\vec{V_1}\bullet\vec{V_1}$; $\vec{V_2}\bullet\vec{V_2}$, $\vec{V_1}\wedge\vec{V_2}$, $\vec{V_2}\wedge\vec{V_3}$, $\vec{V_3}\wedge\vec{V_2}$, $\vec{V_1}\bullet(\vec{V_2}\wedge\vec{V_3})$ et $\vec{V_1}\wedge(\vec{V_2}\wedge\vec{V_3})$.

Corrigé :

a. $\vec{V_1}\bullet\vec{V_2} = (2\vec{i} - \vec{j} + 5\vec{k})\bullet(-3\vec{i} + 1{,}5\vec{j} - 7{,}5\vec{k}) = 2.(-3) + (-).1{,}5 + 5.(-7{,}5) =$

b. $\vec{V_1}\bullet\vec{V_1} = (2\vec{i} - \vec{j} + 5\vec{k})\bullet(2\vec{i} - \vec{j} + 5\vec{k}) = 2^2 + (-1)^2 + 5^2 =$

c. $\vec{V_2}\bullet\vec{V_2} = (-3\vec{i} + 1{,}5\vec{j} - 7{,}5\vec{k})\bullet(-3\vec{i} + 1{,}5\vec{j} - 7{,}5\vec{k}) = (-3)^2 + (1{,}5)^2 + (-7{,}5)^2 =$

d. $\vec{V_1}\wedge\vec{V_2} = \begin{cases} 2\vec{i} \\ -\vec{j} \\ 5\vec{k} \end{cases} \wedge \begin{cases} -3\vec{i} \\ 1{,}5\vec{j} \\ -7{,}5\vec{k} \end{cases} = \begin{cases} ((-1).(-7{,}5) - 5.1{,}5)\vec{i} = 0\vec{i} \\ -(2.(-7{,}5) - 5.(-3))\vec{j} = 0\vec{j} \\ (2.1{,}5 - (-1).(-3))\vec{k} = 0\vec{k} \end{cases}$

$\vec{V_1}\wedge\vec{V_2} = 0 \Rightarrow \vec{V_1} // \vec{V_2}$
Les deux vecteurs sont colinéaires.

e. $\vec{V_2}\wedge\vec{V_3} = \begin{cases} -3\vec{i} \\ 1{,}5\vec{j} \\ -7{,}5\vec{k} \end{cases} \wedge \begin{cases} -5\vec{i} \\ 4\vec{j} \\ \vec{k} \end{cases} = \begin{cases} (1{,}5.1 - (-7{,}5).(4))\vec{i} = 31{,}5\vec{i} \\ -((-3).1 - (-7{,}5).(-5))\vec{j} = 40{,}5\vec{j} \\ ((-3).4 - 1{,}5.(-5))\vec{k} = -4{,}5\vec{k} \end{cases}$

f. $\overrightarrow{V_3} \wedge \overrightarrow{V_2} = \begin{cases} -5\vec{i} \\ 4\vec{j} \\ \vec{k} \end{cases} \wedge \begin{cases} -3\vec{i} \\ 1{,}5\vec{j} \\ -7{,}5\vec{k} \end{cases} = \begin{cases} -\left(1{,}5.1-(-7{,}5).(4)\right)\vec{i} = -31{,}5\vec{i} \\ \left((-3).1-(-7{,}5).(-5)\right)\vec{j} = -40{,}5\vec{j} = -\overrightarrow{V_2} \wedge \overrightarrow{V_3} \\ -\left((-3).4-1{,}5.(-5)\right)\vec{k} = 4{,}5\vec{k} \end{cases}$

$\overrightarrow{V_3} \wedge \overrightarrow{V_2} = -\overrightarrow{V_2} \wedge \overrightarrow{V_3}$
Le produit vectoriel n'est pas commutatif.

Application : La norme produit vectoriel $\overrightarrow{V_1} \wedge \overrightarrow{V_2}$ fournit une mesure de la surface du parallélogramme dont les côtés sont les vecteurs $\overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_2}$. $\left\|\overrightarrow{V_1} \wedge \overrightarrow{V_2}\right\| = S_{12}$

. Le produit mixte $\overrightarrow{V_1} \bullet \left(\overrightarrow{V_2} \wedge \overrightarrow{V_3}\right) = 0$.
$\overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_2}$ et $\overrightarrow{V_3}$ se trouvent dans un même plan.

g. $\overrightarrow{V_1} \bullet \left(\overrightarrow{V_2} \wedge \overrightarrow{V_3}\right) = \begin{cases} 2\vec{i} \\ -\vec{j} \\ 5\vec{k} \end{cases} \bullet \begin{cases} -3\vec{i} \\ 1{,}5\vec{j} \\ -7{,}5\vec{k} \end{cases} \wedge \begin{cases} -5\vec{i} \\ 4\vec{j} \\ \vec{k} \end{cases} = \begin{cases} 2\vec{i} \\ -\vec{j} \\ 5\vec{k} \end{cases} \bullet \begin{cases} 31{,}5\vec{i} \\ 40{,}5\vec{j} \\ -4{,}5\vec{k} \end{cases} = 2.31{,}5 - 1.40{,}5 - 5.4{,}5 = 0$

Application : Le produit mixte donne une mesure du volume d'un parallélépipède dont les côtés sont les vecteurs $\overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_2}$ et $\overrightarrow{V_3}$.

h. $\overrightarrow{V_1} \wedge \left(\overrightarrow{V_2} \wedge \overrightarrow{V_3}\right) = \begin{cases} 2\vec{i} \\ -\vec{j} \\ 5\vec{k} \end{cases} \wedge \begin{cases} -3\vec{i} \\ 1{,}5\vec{j} \\ -7{,}5\vec{k} \end{cases} \wedge \begin{cases} -5\vec{i} \\ 4\vec{j} \\ \vec{k} \end{cases} = \begin{cases} 2\vec{i} \\ -\vec{j} \\ 5\vec{k} \end{cases} \wedge \begin{cases} 31{,}5\vec{i} \\ 40{,}5\vec{j} \\ -4{,}5\vec{k} \end{cases} = \begin{cases} -198\vec{i} \\ -166{,}5\vec{j} \\ 112{,}5\vec{k} \end{cases}$

$\overrightarrow{V_1} \wedge \left(\overrightarrow{V_2} \wedge \overrightarrow{V_3}\right) \neq \left(\overrightarrow{V_1} \wedge \overrightarrow{V_2}\right) \wedge \overrightarrow{V_3}$
Le produit double vectoriel n'est pas associatif.

Exercice 04 :

Pour les deux vecteurs de l'exercice 01, dont O est l'origine des axes de coordonnées, calculer :.

a. *Les produits scalaires :* $\overrightarrow{OA} \bullet \overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OA} \bullet \overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB} \bullet \overrightarrow{OB}$;

b. *Les produits vectoriels :* $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}$ *et* $\overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{OA}$. *En déduire la surface du triangle OAB ;*

c. *Déterminer le vecteur* $\overrightarrow{AC}$ *de module égal à 5 et normal au plan formé par OA et OB ;*

d. *Le double produit vectoriel :* $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{AB}$;

e. *Le produit mixte :* $\overrightarrow{OA} \bullet \left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right)$. En déduire le volume du parallélépipède dont les cotés sont les vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

Corrigé :

$\overrightarrow{OA} = 2\vec{i} - 3\vec{j} - 3\vec{k}$; $\overrightarrow{OB} = 5\vec{i} + 7\vec{j} - 3\vec{k}$

a. $\overrightarrow{OA} \bullet \overrightarrow{OB} = \left(2\vec{i} - 3\vec{j} - 3\vec{k}\right) \bullet \left(5\vec{i} + 7\vec{j} - 3\vec{k}\right) = 2.5 + (-3).7 + (-3).(-3) = -2$

$\overrightarrow{OA} \bullet \overrightarrow{OA} = \left(2\vec{i} - 3\vec{j} - 3\vec{k}\right) \bullet \left(2\vec{i} - 3\vec{j} - 3\vec{k}\right) = 2^2 + (-3)^2 + (-3)^2 = 22$

$\overrightarrow{OA} \bullet \overrightarrow{OB} = \left(5\vec{i} + 7\vec{j} - 3\vec{k}\right) \bullet \left(5\vec{i} + 7\vec{j} - 3\vec{k}\right) = 5^2 + 7^2 + (-3)^2 = 83$

b. $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB} = \begin{cases} 2\vec{i} \\ -3\vec{j} \\ -3\vec{k} \end{cases} \wedge \begin{cases} 5\vec{i} \\ 7\vec{j} \\ -3\vec{k} \end{cases} = \begin{cases} 9+21 \\ -(-6+15) = \\ 14+15 \end{cases} \begin{cases} 30\vec{i} \\ -9\vec{j} = -\overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{OA} \\ 19\vec{k} \end{cases}$

Surface du triangle :

La surface du triangle formé par les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ est la moitié de la quantité $\left\|\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}\right\|$:

$$S_{OAB}=\frac{1}{2}S_{OAOB}=\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}\right\|=\frac{1}{2}\sqrt{30^2+(-9)^2+(19)^2}=\frac{36,63}{2}=18,31\,\textit{Unités de surface}.$$

c . Vecteur $\overrightarrow{AC}$:

D'une part, $\overrightarrow{AC}$ est perpendiculaire au plan $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)\Rightarrow\overrightarrow{AC}=\lambda.\left(\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}\right)$ tel que $\lambda\in\mathbb{R}$.

D'autre part, $\left\|\overrightarrow{AC}\right\|=5$.

$$\left\|\overrightarrow{AC}\right\|=\left\|\lambda.\left(\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}\right)\right\|=\lambda.\left\|\left(\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}\right)\right\|=36,63\lambda.\vec{k}=5\Rightarrow\lambda=\frac{5}{36,63}=0,136$$

D'où :

$$\overrightarrow{AC}=4,01\vec{i}-1,23\vec{j}+2,59\vec{k}$$

d . *Le double produit vectoriel :* $\overrightarrow{OA}\wedge\left(\overrightarrow{OB}\wedge\overrightarrow{AB}\right)$

$$\overrightarrow{OA}\wedge\left(\overrightarrow{OB}\wedge\overrightarrow{AB}\right)=\begin{cases}2\vec{i}\\-3\vec{j}\\-3\vec{k}\end{cases}\wedge\begin{cases}5\vec{i}\\7\vec{j}\\-3\vec{k}\end{cases}\wedge\begin{cases}3\vec{i}\\4\vec{j}\\0\vec{k}\end{cases}=\begin{cases}2\vec{i}\\-3\vec{j}\\-3\vec{k}\end{cases}\wedge\begin{cases}12\vec{i}\\-9\vec{j}\\-1\vec{k}\end{cases}=\begin{cases}-24\vec{i}\\-34\vec{j}\\18\vec{k}\end{cases}$$

e . *Le produit mixte :* $\overrightarrow{OA}\bullet\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)$

$$\overrightarrow{OA}\bullet\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)=\left(2\vec{i}-3\vec{j}-3\vec{k}\right)\bullet\begin{cases}3\vec{i}\\4\vec{j}\\0\vec{k}\end{cases}\wedge\begin{cases}4,01\vec{i}\\-1,23\vec{j}\\2,59\vec{k}\end{cases}=\left(2\vec{i}-3\vec{j}-3\vec{k}\right)\bullet\left(10,36\vec{i}-7,77\vec{j}-19,73\vec{k}\right)$$

$=20,72+23,31+59,19=103,22$ *Unités de volume* : Volume du parallélépipède dont les cotés sont les vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

Exercice 05 :

On donne les composantes des vecteurs $\overrightarrow{V_1}=3\vec{i}+5\vec{k}$; $\overrightarrow{V_2}=5\vec{i}+y.\vec{j}+z.\vec{k}$; $\overrightarrow{V_3}=3\vec{i}+2y.\vec{j}-2\vec{k}$; $\overrightarrow{V_4}=x.\vec{i}+2\vec{j}+10\vec{k}$ dans un repère orthonormé .

- *Déterminer y et z pour que les vecteurs et* $\overrightarrow{V_2}$ *soient colinéaires.*
- *Déterminer x pour que les vecteurs* $\overrightarrow{V_3}$ *et* $\overrightarrow{V_4}$ *soient perpendiculaires.*

Corrigé :

1. $\overrightarrow{V_1}\,//\,\overrightarrow{V_2}\Rightarrow\overrightarrow{V_1}\wedge\overrightarrow{V_2}=\vec{0}$: $\overrightarrow{V_1}\wedge\overrightarrow{V_2}=\begin{cases}3\vec{i}\\5\vec{j}\\0\vec{k}\end{cases}\wedge\begin{cases}5\vec{i}\\y.\vec{j}\\z.\vec{k}\end{cases}=\begin{cases}(5z-0y).\vec{i}=0.\vec{i}\Rightarrow z=0\\-(3z-0.5).\vec{j}=0.\vec{j}\Rightarrow z=0\\(3y-5.5).\vec{k}=0.\vec{k}\Rightarrow y=\dfrac{25}{3}\end{cases}$

2. $\overrightarrow{V_1}\perp\overrightarrow{V_2}\Rightarrow\overrightarrow{V_1}\bullet\overrightarrow{V_2}=0$:

$$\overrightarrow{V_1}\bullet\overrightarrow{V_2}=\left(3\vec{i}+2y.\vec{j}-2\vec{k}\right)\bullet\left(x.\vec{i}+2\vec{j}+10\vec{k}\right)=3x+4y-20=0\Rightarrow x=\frac{40}{3}.$$

TD N : 01

Exercice N :01

Soient A et B deux points dans l'espace tels que : A(2,3,-3) ; B(5,7,-3), calculer :

1/- Les produits scalaires : $\vec{OA} \bullet \vec{OB}, \vec{OA} \bullet \vec{OA}$,

2/- Les produits vectoriels : $\vec{OA} \wedge \vec{OB}, \vec{OA} \wedge \vec{OA}$. En déduire la surface du triangle OAB.

3/- Le produit mixte : $\vec{OB} \bullet (\vec{AB} \wedge \vec{AC})$. Que représente ce produit (C(1,2,3))

Exercice N :02

On donne les composantes des vecteurs : $\vec{V}_1 = 3\vec{i} + \vec{k}$, $\vec{V}_2 = 5\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, $\vec{V}_3 = 3\vec{i} + 2y\vec{j} - 2\vec{k}$ et $\vec{V}_4 = x\vec{i} + 2\vec{j} + 10\vec{k}$

- Déterminer les composantes du vecteur unitaire $\mathbf{V_1}$.

- Déterminer y et z pour que les vecteurs $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ soient colinéaires.

- Déterminer x pour que les vecteurs $\vec{V}_3$ et $\vec{V}_4$ soient perpendiculaire

Exercice N :03

Déterminer le module et la direction de la résultante des deux forces $\vec{A}$ et $\vec{B}$ de modules 100N et 50N respectivement, sachant que $(\vec{A}, \vec{B}) = 60^0$ (Fig.1).

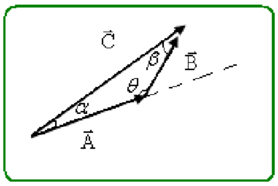


Figure 1

Exercice sup

-Demontrer que le produit scalaire $\vec{A}.\vec{B}$ est commutatif (تبديلي).

On donne les trois vecteur suivants : $\vec{A} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$, $\vec{B} = \vec{i} - 4\vec{k}$, $\vec{C} = 4\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$

1- Calculer le produit scalaire $\vec{A}.\vec{B}$

2- Calculer le produit vectoriel $\vec{A} \wedge \vec{C}$

3- Les vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{C}$ sont-ils lineairement independants ?

Corrigé série TD N:1

Exercice 1

A(2,3,-3) ; B(5,7,-3); C(1,2,3)

1- Les produits scalaires

$\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix}2\\3\\-3\end{pmatrix}; \overrightarrow{OB}\begin{pmatrix}5\\7\\-3\end{pmatrix}; \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}$ =2x5+3X7+(-3)x(-3)=40

$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OA} = \|\overrightarrow{OA}\|^2 = \left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^2 = 4+9+9 = 22$

2- Les produits vectoriels

$\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 3 & -3 \\ 5 & 7 & -3 \end{vmatrix} = 12\vec{\imath} - 9\vec{\jmath} - \vec{k} = \overrightarrow{W}$

- Surface du triangle OAB:

S=1/2$\|\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}\| = 1/2(\sqrt{226})$

$\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OA} = \vec{0}$; $(\overrightarrow{OA}\, parallele$ à $\overrightarrow{OA})$

3- Produit mixte

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix}; \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\-1\\6\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{OA}.(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 3 & 4 & 0 \\ -1 & -1 & 6 \end{vmatrix} = -9$

$|\overrightarrow{OA}.(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC})|$ *represente le volume de la forme OABC*

Exercice 2:

$\overrightarrow{V_1}\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}; \overrightarrow{V_2}\begin{pmatrix}5\\Y\\Z\end{pmatrix}; \overrightarrow{V_3}\begin{pmatrix}3\\2Y\\-2\end{pmatrix}; \overrightarrow{V_4}\begin{pmatrix}X\\2\\10\end{pmatrix}$

1- le vecteur unitaire

$\vec{\mu}_{V_1} = \frac{\overrightarrow{V_1}}{\|\overrightarrow{V_1}\|} = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}$

2-

$\overrightarrow{V_1}$ *et* $\overrightarrow{V_2}$ *sont colinéaires* $\Rightarrow$ *ils sont parallèles et appartiennent au meme plan*

a- même plan: $\overrightarrow{V_1} \in (XOZ)\ car\ y_1 = 0\ donc\ y_2 = 0 \Rightarrow y = 0$

b- $\overrightarrow{V_1} \parallel \overrightarrow{V_2} \Rightarrow \overrightarrow{V_1} \times \overrightarrow{V_2} = \vec{0}$ ou $\overrightarrow{V_1} = \alpha\, \overrightarrow{V_2}$

$$\overrightarrow{V_1} \times \overrightarrow{V_2} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 0 & 1 \\ 5 & y & Z \end{vmatrix} = \vec{\imath}(y) - \vec{\jmath}(3Z-5) + \vec{k}(3Y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} DONC$$

y=0, 3z-5=0, et 3Y=0 ; d'où Z=5/3

3- $\overrightarrow{V_3}\ et\ \overrightarrow{V_4}\ sont\ perpendiculaires\ donc\ \overrightarrow{V_3}.\overrightarrow{V_4} = 0;$

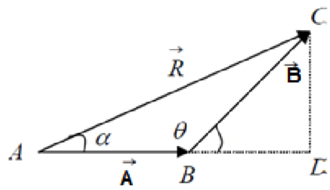
$\overrightarrow{V_3}.\overrightarrow{V_4} = 3x + 4y - 20 = 0; sachant\ que\ y = 0, x = \frac{20}{3}$

donc : x=20/3; y=0; Z=5/3.

Exercice 3:

l'angle entre $\vec{A}\ et\ \vec{B}\ est\ \theta' = 60, donc\ \theta = 180 - 60 = 120$

- le module de la résultante C en appliquant la loi des cosinus



$$R = C = \sqrt{A^2 + B^2 - 2A.B.cos120} = 132{,}2N$$

- La direction de la résultante (α,β) en appliquant la loi des sinus

$$\frac{sinus\alpha}{B} = \frac{sinus\ \theta}{C} \Rightarrow sinus\alpha = sinus\theta\frac{B}{C} = 0{,}32 \Rightarrow \alpha = 18°, 66$$

β=180-18,66-120=41°,34

Exercice supplémentaire

$\vec{A}.\vec{B} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$

$= x_2x_1 + y_2y_1 + z_2z_1\ (puisque\ la\ multiplication\ est\ commutative)$

$donc\ \vec{A}.\vec{B} = \vec{B}.\vec{A}\ (le\ produit\ scalaire\ est\ commutatif)$

- $\vec{A}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}; \vec{B}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}; \vec{C}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

1 - $\vec{A}.\vec{B} = 2 + 4 = 6$

2- $\vec{A} \times \vec{C} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & -2 \end{vmatrix} = i(0) - j(0) + k(0) = \vec{0}$

3- les vecteurs A et C sont linéairement **dépendant** car leur produit vectoriel est nul.

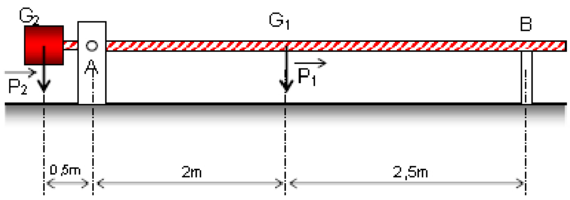
TD N 02

LA STATIQUE

Exercice 1

Déterminer la réaction dans l'articulation A et l'appui B.

Le poids de la barre P_1=10daN, Le contre poids P_2=20 daN.

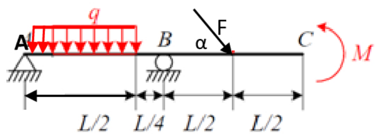


Exercice N :02

Soit la poutre AC supportant une charge repartie q, une force F et un moment M. La poutre est en équilibre statique.

- Déterminez les réaction en A et B.

q= 5KN/m, F=3KN, M=12KN.m, α=30°, L=4m.



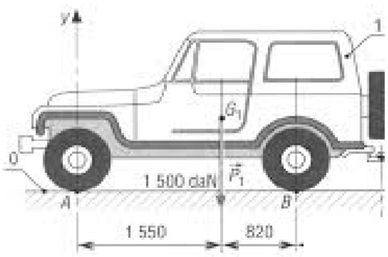
Exercice N :03

Considérons le système constitué d'une voiture d'un poids P1.

1- Déterminer les actions du sol sur les roues de la voiture (si la voiture est au repos).

2- Si le coefficient de frottement de la route f=0.5,

- quelle est la force minimale horizontale doit-on appliquer pour que la voiture commence à rouler vers l'arrière.



Corrigé Série Statique

Exercice 1

- les actions agissantes sur le système

$\vec{\boldsymbol{P}}_2\begin{pmatrix}\boldsymbol{0}\\-\boldsymbol{P}_2\end{pmatrix},\overrightarrow{\boldsymbol{R}_A}\begin{pmatrix}\boldsymbol{R}_{Ax}\\\boldsymbol{R}_{AY}\end{pmatrix}\ (\boldsymbol{Articulation}),\overrightarrow{\boldsymbol{P}_1}\begin{pmatrix}\boldsymbol{0}\\-\boldsymbol{P}_1\end{pmatrix},\overrightarrow{\boldsymbol{R}_B}\begin{pmatrix}\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{R}_B\end{pmatrix}(\boldsymbol{appui\ plan\ ou\ simple}),$

-détermination des réactions aux appuis

$$\sum\vec{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{ext}}=\vec{\boldsymbol{0}}\Rightarrow\vec{\boldsymbol{P}}_2\begin{pmatrix}\boldsymbol{0}\\-\boldsymbol{P}_2\end{pmatrix}+\ \overrightarrow{\boldsymbol{R}_A}\begin{pmatrix}\boldsymbol{R}_{Ax}\\\boldsymbol{R}_{Ay}\end{pmatrix}+\vec{\boldsymbol{P}}_1\begin{pmatrix}\boldsymbol{0}\\-\boldsymbol{P}_1\end{pmatrix}+\ \overrightarrow{\boldsymbol{R}_B}\begin{pmatrix}\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{R}_B\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{0}\end{pmatrix}$$

$R_{Ax}=0\ \dots\dots\dots\dots..(1)$

$-P_2-P_1+R_{Ay}+R_B=0\ \dots\dots.(2)$

$\sum\vec{\boldsymbol{M}}_{/A}=\vec{\boldsymbol{0}}\Rightarrow\underbrace{\vec{\boldsymbol{M}}_{RA/A}}_{=0}+\vec{\boldsymbol{M}}_{RB/A}+\vec{\boldsymbol{M}}_{P1/A}+\vec{\boldsymbol{M}}_{P2/A}=\vec{\boldsymbol{0}}$

$\begin{pmatrix}AB\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\R_B\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}AG1\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\-P_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-AG2\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\-P_2\end{pmatrix}=0$

$AB.R_B-AG1.P_1+AG2.P_2=0\ \dots\dots.(3)$

de (3) $R_B=\frac{AG1.P_1-AG2.P_2}{AB}=\frac{2.5-20.0,5}{4,5}=0daN$

en remplaçant dans (2):

$R_{Ay}=P_1+P_2-R_B=25daN$

$$\overrightarrow{\boldsymbol{R}_B}\begin{pmatrix}\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{0}\end{pmatrix},\overrightarrow{\boldsymbol{R}_A}\begin{pmatrix}\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{25}\end{pmatrix}$$

Exercice 2

- les actions externes: F, charge repartie q, moment M, un appui simple en B, un appui double en A.
- la charge répartie q est réduite en une force concentrée F_q au milieu de (L/2) : F_q=q.L/2
-la réaction en B est perpendiculaire sur l'appui
- la réaction en A a deux composantes inconnues.

- la projection des action:

$$\vec{\boldsymbol{R}}_A\begin{pmatrix}\boldsymbol{R}_{Ax}\\\boldsymbol{R}_{Ay}\end{pmatrix},\vec{\boldsymbol{R}}_B\begin{pmatrix}\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{R}_B\end{pmatrix},\vec{\boldsymbol{F}}_q\begin{pmatrix}\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{F}_q\end{pmatrix},\vec{\boldsymbol{F}}\ \begin{pmatrix}\boldsymbol{Fcos\ \alpha}\\-\boldsymbol{Fsin\alpha}\end{pmatrix}$$

- détermination des réactions en A et B

principe fondamental de la statique: (M=**<u>12KN</u>**.m)

$$\sum \vec{\boldsymbol{F}}_{ext} = \vec{\mathbf{0}} \Rightarrow \vec{\boldsymbol{R}}_A \begin{pmatrix} R_{Ax} \\ \boldsymbol{R}_{Ay} \end{pmatrix} + \vec{\boldsymbol{R}}_B \begin{pmatrix} 0 \\ \boldsymbol{R}_B \end{pmatrix} + \vec{\boldsymbol{F}_q} \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ -\boldsymbol{q}.\boldsymbol{L}/\mathbf{2} \end{pmatrix} + \vec{\boldsymbol{F}} \begin{pmatrix} \boldsymbol{Fcos\alpha} \\ -\boldsymbol{Fsin\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

$$\sum \vec{\boldsymbol{M}}_{/A} = \vec{\mathbf{0}} \Rightarrow \cancelto{0}{\vec{\boldsymbol{M}}_{RA/A}} + \vec{\boldsymbol{M}}_{RB/A} + \vec{\boldsymbol{M}}_{Fq/A} + \vec{\boldsymbol{M}}_{F/A} = \vec{\mathbf{0}}$$

On aura 3 équations avec trois inconnus (R_{ax}, R_{Ay}, R_B)?

Sur l'axe OX: R_{Ax}+F.cosα=0.......(1) R_{Ax}=- F.cosα

Sur l'axe OY: R_{Ay}+R_B-q.L/2-F.sinα=0.......(2)

$$\begin{pmatrix} AD \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -F_q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} AB \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ R_B \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} AE \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} F.cos\alpha \\ -F.sin\alpha \end{pmatrix} + \mathrm{M}$$

$$= -AD.F_q + AB.R_B - AE.F.sin\alpha + M = 0 \ldots\ldots\ldots(3)$$

de (3) : $R_B = \frac{AD.F_q + AE.F.sin\alpha - M}{AB} = \frac{\left(\frac{L}{4}.\frac{L}{2}.5 + \frac{5L}{4}.3.sin30°\right) - M}{\frac{3L}{4}} = \frac{10 + 15.\frac{\sqrt{3}}{2} - 12}{3}$ =1,83KN

R_{Ax}=-2,59KN; R_{Ay}=9,68KN

$$\vec{\mathrm{R}}_\mathrm{A}\begin{pmatrix} -2{,}59 \\ 9{,}68 \end{pmatrix}; \vec{\mathrm{R}}_\mathrm{B}\begin{pmatrix} 0 \\ 1{,}83 \end{pmatrix}$$

Exercice 3

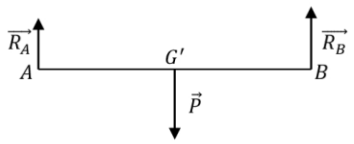
La voiture a un poids qui se réparti sur les roues , par raison de symétrie on va considérer deux roues et les réactions déterminées seront devisées sur les quatre roues.

1- Détermination des actions du sol sur les roues: **(sol lisse)**

En considérant que le sol est lisse , l'action du sol sur la roue est considérée comme un appui simple (donc perpendiculaire sur le plan de contact).

Simplification du système sous forme d'une ligne (glisser les forces vers les roues):

$\vec{\boldsymbol{R}}_A \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \boldsymbol{R}_A \end{pmatrix}, \vec{\boldsymbol{P}} \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ -\boldsymbol{P} \end{pmatrix}, \vec{\boldsymbol{R}}_B \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \boldsymbol{R}_B \end{pmatrix}$



nous avons deux inconnus à déterminer R_A *et* R_B; on aura besoin à deux équations (au minimum)

Application du principe fondamentale de la statique: (PFS)

$$\sum \vec{\boldsymbol{F}}_{ext} = \vec{\mathbf{0}}; \sum \vec{\boldsymbol{M}}_{/A} = \overrightarrow{\mathbf{0}};$$

(toute les forces sont parallèles donc pour simplifier on va faire la projection sur un axe parallèle a ces forces : dans ce cas l'axe OY)

l'axe 0Y: $R_A + R_B - P = 0 \ldots\ldots\ldots (1)$

$\sum \vec{M}_{/A} = \vec{0} \Rightarrow \underbrace{\vec{M}_{RA/A}}_{0} + \vec{M}_{RB/A} + \vec{M}_{P/A} = \vec{0}$; $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{R_B} + \overrightarrow{AG'} \times \vec{P} = \vec{0}$

$\binom{AB}{0} \times \binom{0}{R_B} + \binom{AG'}{0} \times \binom{0}{-P} = AB.R_B - AG'.P = 0 \ldots\ldots\ldots (2)$

(système avec deux equations avec deux inconnus)

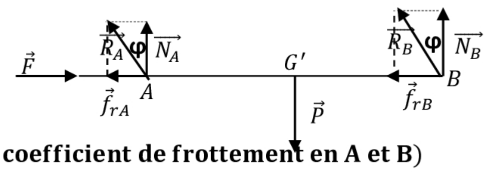
de (2): $R_B = AG'.\frac{P}{AB} = 1550.\frac{1500}{1550+820} = 981 daN = 9810N$

En remplaçant dans (1): R_A=P-R_B=519daN=5190N.

2- Force minimale pour basculer la voiture vers l'arrière (**sol avec frottement**)

- dans ce cas l'action du sol n'est pas perpendiculaire sur le plan de contact avec la roue (incliné avec **un angle φ**)

$\vec{R}_A \binom{f_{rA}}{N_A}$; $\vec{R}_B \binom{f_{rB}}{N_B}$; $\vec{F} \binom{-F?}{0}$



$f = tan\varphi = \frac{f_{rA}}{N_A} = \frac{f_{rB}}{N_B}$ (**le sol a le meme coefficient de frottement en A et B**)

$f_{rA} = f.N_A;\ f_{rB} = f.N_B$

juste avant de bouger vers l'arrière; la voiture est en état statique limite donc:

$$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0} \Rightarrow \vec{R}_A \binom{f_{rA}}{N_A} + \vec{R}_B \binom{f_{rB}}{N_B} + \vec{F} \binom{-F}{0} + \vec{P} \binom{0}{-P} = \binom{0}{0}$$

$f.N_A + f.N_B = F \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$

$N_A + N_B = P \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$

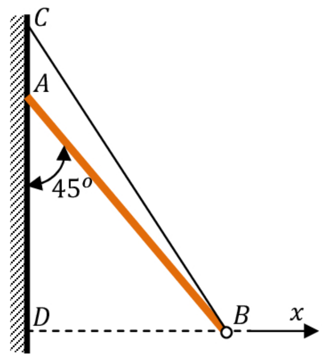
$\sum \vec{M}_{/A} = \vec{0} \Rightarrow \underbrace{\vec{M}_{RA/A}}_{0} + \vec{M}_{RB/A} + \vec{M}_{P/A} + \underbrace{\vec{M}_{F/A}}_{0} = \vec{0}$

de (1) et (2): $F = f.P$=0.5X1500=750daN (force minimale pour faire bouger la voiture vers l'arrière).

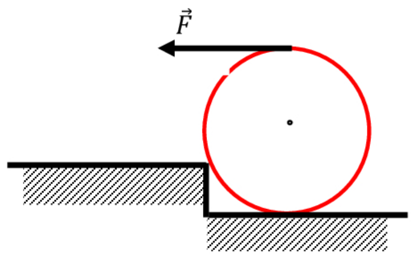
TD N 02
LA STATIQUE

Exercice N° 1:
L'extrémité supérieure A d'une barre homogène AB pesant $5\ daN$ et longue de $2\ m$ s'appuie sur un mur vertical lisse. Un filin BC est attaché à son extrémité inferieur B.

1) Trouver la distance AC a laquelle il faut fixer le filin au mur pour que la barre soit en équilibre en formant un angle de 45^oo avec la verticale.
2) Trouver la tension du filin T et la réaction R du mur.

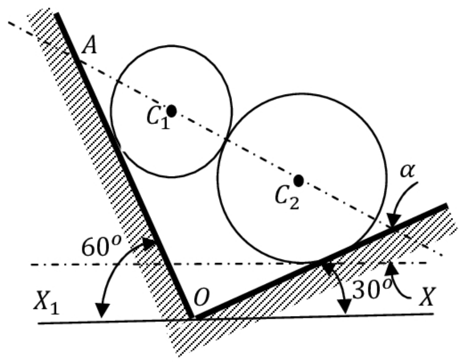


Exercice N° 2:
Trouver la force minimale F nécessaire pour élever un cylindre de $150\ daN$ et de $2\ m$ de diamètre au-dessus d'une marche de 40 cm de hauteur au moyen d'un câble enroulé autour du cylindre sur lequel on tire horizontalement.



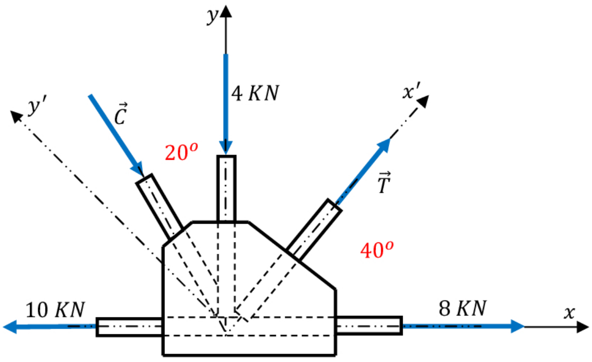
Exercice N° 3:
Deux cylindres homogènes lisses tangents sont placés entre deux plans inclinés lisses OA et OB ; l'un d'eux de centre C_1 pèse $10\ N$, l'autre de centre C_2 pèse $30\ N$.

Déterminer l'angle α que forme la droite C_1C_2 avec l'axe horizontal X_1OX, les pressions N_1 et N_2 des cylindres sur les plans ainsi que la grandeur N de la pression reciproque des cylindres.



Exercice N° 4:

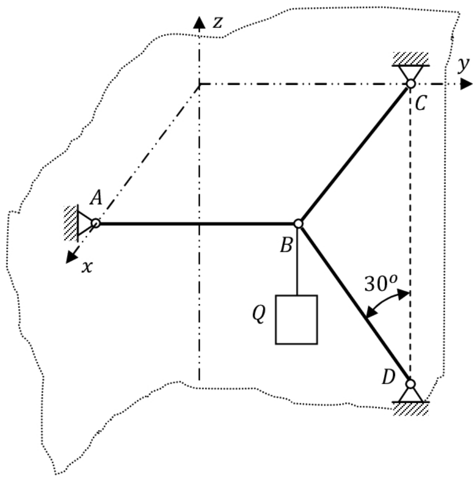
Déterminer les grandeurs des forces $\vec{C}$ et $\vec{T}$ qui, en memo temps que les trois forces représentées sur la figure, agissent au nœud d'un treillis de pont.



Exercice N° 5:

Les barres $AB, BC\ et\ BD$ sont articulées entre elles en B et aux points d'appuis $A, C\ et\ D$ de telle façon que AB et BC forment un plan horizontal, tandis que $BC\ et\ BD$ forme un plan vertical. En B, on suspend une charge Q de 330 daN.

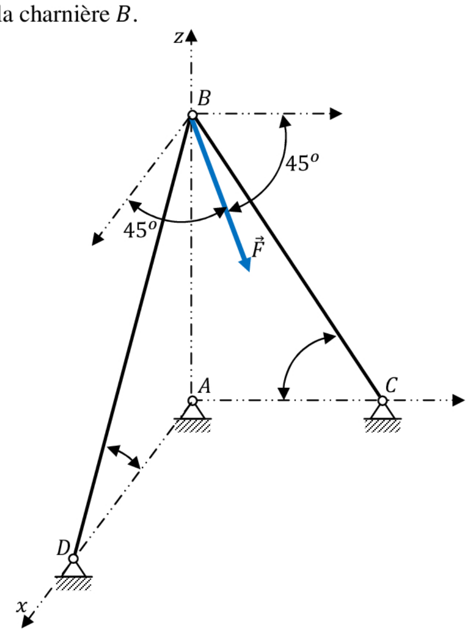
Déterminer les réactions des barres sur la charnière B.



Exercice N° 6:

Un montant AB et des supports $BC\ et\ CD$ articulés entre eux au point B et aux points fixes $C\ et\ D$ forment une ferme. Celle-ci est chargée en B par une force horizontale $F\ = 100\ N$.

Déterminer les efforts dans le montant et les supports (les poids de tous les éléments sont négligeables



Exercice N° 1:

$$AD = AB\ cos\ 45^o = DB ==> \ tg\varphi = \frac{DB}{CD} = \frac{AB\cos 45^o}{AC + AD}$$

$tg\varphi = \frac{MB}{KM}$ avec $MB = \frac{AB}{2}\cos 45^o = \frac{\sqrt{2}}{2}\ m$

$$KM = AD = \sqrt{2}\,m \quad ==> \quad tg\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

$==> \quad \varphi = 26{,}56^o$

$$AC = CD - AD = \frac{DB}{tg\ \varphi} - AD = \frac{AB\cos 45^o}{tg\ \varphi} - AD = \frac{2\cos 45^o}{\frac{1}{2}} - \sqrt{2} = \sqrt{2}m$$

………………………………………………………

A l'équilibre nous avons $\sum \vec{F} = \vec{P} + \vec{R} + \vec{T} = \vec{0}$

Soit $\sum Fx = 0$ et $\sum Fy = 0$

On obtient les équations suivantes:

$R - T\sin\varphi = 0 \quad (1)$

$T\cos\varphi - P = 0 \quad (2)$

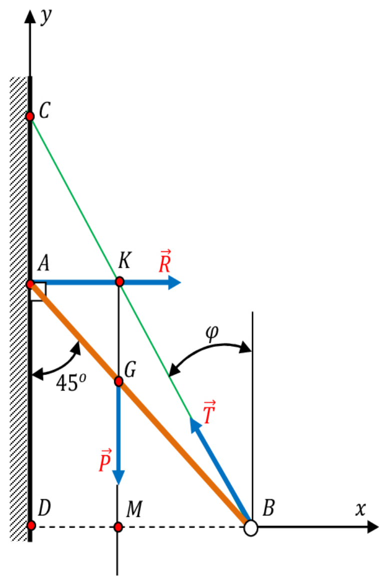
De (2) $==> \ T = \frac{P}{\cos\varphi}$

et de (1) $==> \ R = T sin\ \varphi = P\ tg\ \varphi$

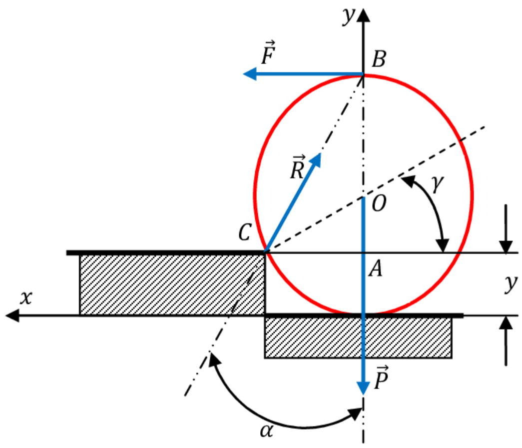
Avec $\varphi = 26{,}65^o \quad ==> \cos\varphi = 0{,}89$

$T = 5{,}61\ daN$

$R = 2{,}5\ daN$



Exercice N° 2:



La force minimale sera atteinte si le corps est à l'état de repos ou en mouvement uniforme (vitesse constante).

Soit $\sum \vec{F} = \vec{P} + \vec{R} + \vec{F} = \vec{0}$

$\begin{cases} \sum Fx = 0 & -Rsin\,\alpha + F = 0 \quad (1) \\ \sum Fy = 0 & -P + R\cos\alpha = 0 \quad (2) \end{cases}$

De la géométrie, on a:

$\cos\alpha = \frac{AB}{CB}$; $CB = \sqrt{(CA)^2 + (AB)^2}$; $AB = D - y = 200 - 40 = 160\ cm$

$OA = \frac{D}{2} - y = 100 - 40 = 60\ cm$; $CA = \sqrt{(OC)^2 - (OA)^2} = \sqrt{(OC + OA)(OC - OA)}$

$CA = \sqrt{(100 + 60)(100 - 60)} = \sqrt{160.40} = 80\ cm$;

$CB = \sqrt{(80)^2 + (160)^2} = 80\sqrt{5}cm = 178{,}88\ cm$

$\cos\alpha = \frac{160}{80\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$; $\sin\alpha = \frac{CA}{CB} = \frac{80}{80\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$

Des équations (1) et (2), on obtient:

$R = \frac{P}{\cos\alpha}$; $F = Rsin\,\alpha = \frac{P}{\cos\alpha}.\sin\alpha = P\ tg\alpha$

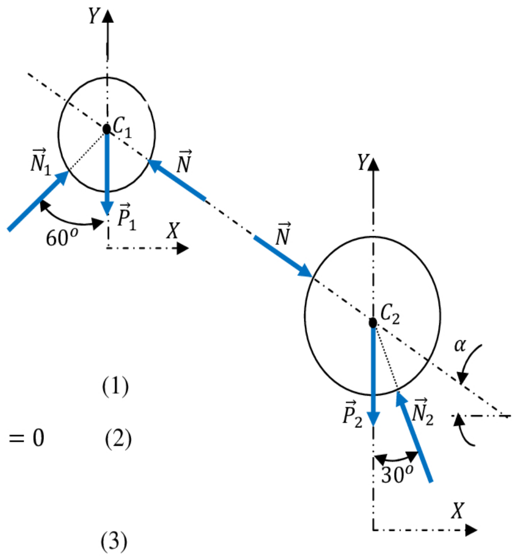
$$R = \frac{150.5}{2\sqrt{5}} = \frac{150\sqrt{5}}{2} = 75\sqrt{5}\ daN$$

$$F = Rsin\,\alpha = 75\sqrt{5}.\frac{\sqrt{5}}{5} = 75\ daN$$

Exercice N° 3:

Le système est composé de deux corps. Il faut les décomposer et appliquer le principe de Newton. On remarque que chaque corps est soumis à trois forces.

Les équations d'équilibre pour chaque corps s'écrivent:



Corps 1:

$N_1 \sin 60^o - N \cos \alpha = 0$ (1)

$N_1 \cos 60^o + N \sin \alpha - P_1 = 0$ (2)

Corps 2:

$\mathrm{N} \cos \alpha - N_2 \sin 30^o = 0$ (3)

$N_2 \cos 30^o - N \sin \alpha - P_2$ (4)

de (1), (2), (3) et (4)

$$==> \begin{cases} P_1 - N_1 \cos 60^O = N_2 \cos 30^O - P_2 \\ N_1 \sin 60^O = N_2 \sin 30^o \end{cases} ==> N_1 \cos 30^O = N_2 \sin 30^O ==> N_1 = N_2\, tg\, 30^o$$

$$P_1 - N_2 \operatorname{tg} 30^o \cos 60^o = N_2 \cos 30^O - P_2 \quad ==>$$

$$N_2 \cos 30^O + N_2\, tg\, 30^o \cos 60^o = P_2 + P_1 \quad ==> N_2 = \frac{P_2 + P_1}{\cos 30^O + tg\, 30^o \cos 60^o}$$

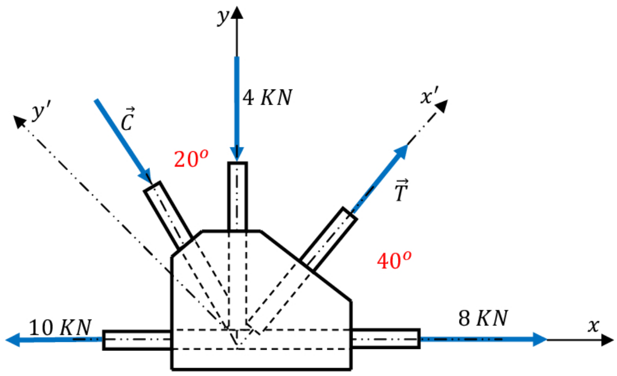
soit : $N_2 = 34{,}64\ N$; $N_1 = 20\ N$

$$\left.\begin{matrix} N \sin \alpha = N_2 \cos 30^O - P_2 \\ N \sin \alpha = N_2 \sin 30^o \end{matrix}\right\} ==> tg\ \alpha = \frac{N_2 \cos 30^O - P_2}{N_2 \sin 30^o}$$

soit : $tg\ \alpha = 0$ $\alpha = 0$

alors $N = N_1 \sin 60^O = 17{,}32\ N$

Exercice N° 4:



A l'équilibre $\sum \vec{F} = \vec{0}$

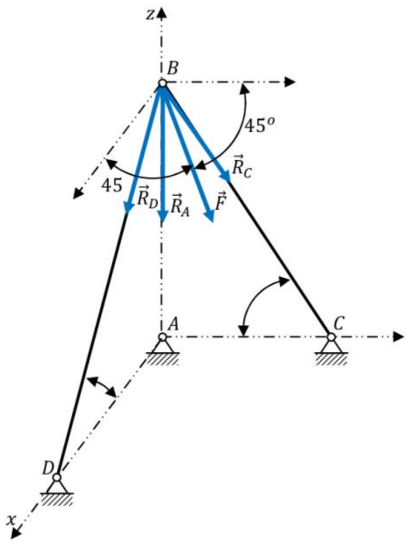
on obtient les équations suivantes:

$\sum F_x = 0 \quad ===> \quad 10 - 8 + T\cos 40^o + C\sin 20^o = 0 \qquad (1)$

$\sum F_y = 0 \quad ===> \quad T\sin 40^o - C\cos 20^o - 4 = 0 \qquad (2)$

$$\left.\begin{matrix} 0{,}766\,T + 0{,}342\,C = -2 \\ 0{,}642\,T - 0{,}939\,C = 4 \end{matrix}\right\} \quad ==> \quad T = -0{,}53\,KN \quad ; \quad C = -4{,}66\,KN$$

Exercice N° 6:



Même explication que celle de l'exercice précédent.

$$\sum F_X = F\cos 45^o + R_D \cos 30^o = 0$$

$$\sum F_Y = F\sin 45^o + R_C \cos 60^o = 0$$

$$\sum F_Z = -R_D\ \sin 30^o - R_C \sin 60^o - R_A = 0$$

$$R_D\ = -\frac{F\cos 45^o}{\cos 30^o} = -\frac{F\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = -\frac{F\sqrt{6}}{3}$$

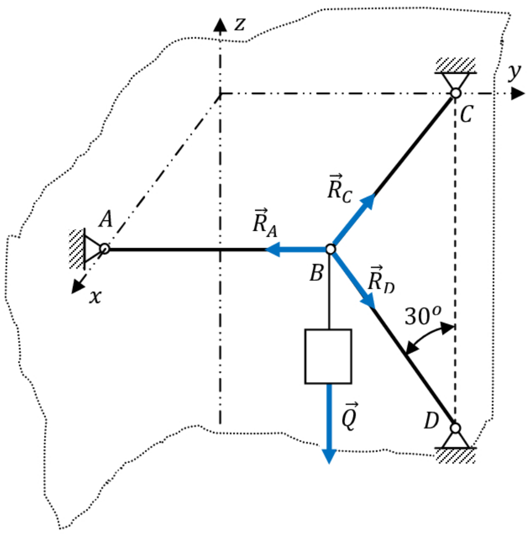
$$R_C\ = -\frac{F\sin 45^o}{\cos 60^o} = -F\sqrt{2}$$

$$R_A\ = -R_D\ \sin 30^o - R_C \sin 60^o = \frac{F\sqrt{6}}{6} + \frac{F\sqrt{6}}{2} = \frac{2F\sqrt{6}}{3}$$

Application numérique :

$R_A\ = 163{,}29\ N$; $R_C\ = -141{,}42\ N$; $R_D\ = -81{,}64\ N$

Exercice N° 5:



Les poids des 03 barres AB,BC, BD sont négligeables, d'où chacune d'elles n'est soumise qu'aux réactions des liaisons. Puis qu'elles sont liées aux extrémités, le nombre de réactions pour chacun est de deux. Selon le principe de la statique, elles sont en équilibre que si les réactions aux extrémités de chaque barre sont directement opposées. Ceci nous détermine les directions des réactions sur les barres. Afin d'étudier leur équilibre, il suffit d'envisager l'équilibre de leur liaison commune, point de concours de toute le forces appliquées au système.

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \qquad ==> \qquad \begin{cases} \sum F_X = 0 \\ \sum F_Y = 0 \\ \sum F_Z = 0 \end{cases}$$

$$-R_C - R_D \sin 30^o = 0 \qquad (1) \qquad ==> \quad R_C = -R_D \sin 30^o$$

$$R_A = 0 \qquad (2)$$

$$-Q - R_D \cos 30^o = 0 \qquad (3) \qquad ==> \quad R_D = -\frac{Q}{\cos 30^o}$$

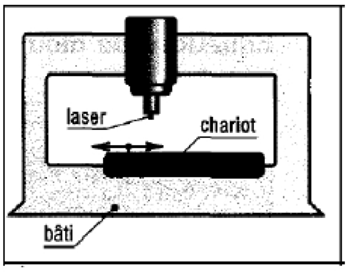
et $\qquad R_C = Q\ tg\ 30^o$

Application numérique:

$R_A = 0 \qquad ; \qquad R_D = -380{,}05\ N \qquad ; \qquad R_C = 190{,}52\ N$

TD 03
LA CINEMATIQUE

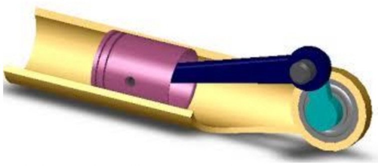
Exercice 1: **Chariot de machine outil**

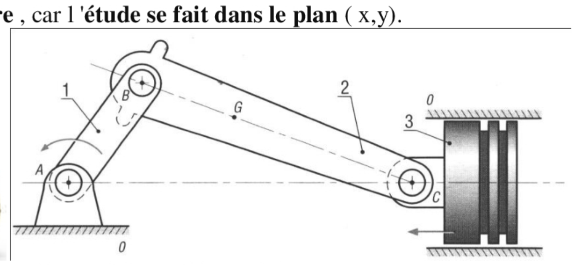


Le chariot d'une machine pour découpage laser atteint la vitesse de 10 cm/s en 2 secondes.
Le chariot évolue à vitesse constante pendant 8 secondes puis s'arrête en l'espace de 12,5 cm. Les accélérations et décélérations sont supposées constantes.
1) Déterminer les équations de mouvement pour chacune des trois phases.
2) Tracer les graphes des accélérations, des vitesses et des positions.

Exercice 2 : Système bielle -manivelle

L'ensemble proposé ci-contre représente schématiquement le système bielle **2**, manivelle **1** et piston **3** d'un moteur à essence. Les liaisons en **A** $_{1/0}$, **B**$_{2/1}$ et **C**$_{3/2}$ sont des **liaisons pivots** et la liaison du **Piston** $_{3/0}$ sera considérée comme une **liaison glissière** , car l '**étude se fait dans le plan** (x,y).





- Déterminez la nature des mouvements suivants :$Mvt_{1/0}$, $Mvt_{3/0}$, $Mvt_{2/0}$.
- En déduire la nature des trajectoires : $TB_{1/0}$,$TC_{2/0}$.

- Connaissant la vitesse en rotation du vilebrequin, ω=constante ,
- Ecrire les équations du mouvement du piston 3.

Déterminer la vitesse linéaire du piston (3) (dans la position indiquée par trois méthodes)
- Analytique
- Graphique
  a- équiprojectivité.
  b- centre instantané des rotations CIR.

Solution

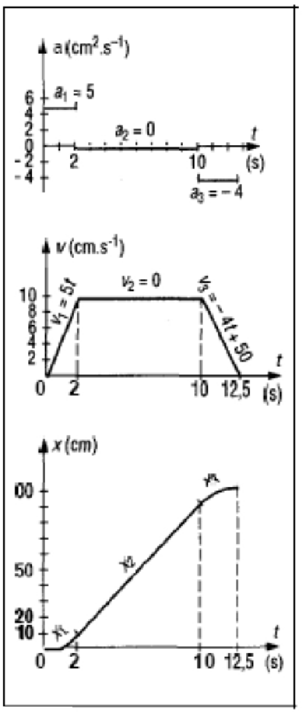
Exercice 1:

Phase 1 : accélération a_1 ;
conditions initiales : $x_1(0) = 0$ et $v_0(1) = 0$

Forme générale : $v_1 = a_1 t$ et $x_1 = \frac{a_1 t^2}{2}$

pour $t = 2$: $v_1 = 10\ cm.s^{-1} = a_1 \times 2 \Rightarrow a_1 = 5$

$a_1 = 5\ cm.s^{-2}$ $\quad v_1 = 5t$ $\quad x_1 = 2,5t^2$



Remarque : pour $t = 2$; $x_1 = 2,5 \times 2^2 = 10$ cm.

Phase 2 : translation uniforme à la vitesse
$v_2 = 10\ cm.s^{-1}$; $x_2 = 10t + x_2(0)$
à $t = 2$; $x_2 = 10 = 10 \times 2 + x_2(0) \Rightarrow x_2(0) = -10$

$a_2 = 0$ $\quad v_2 = 10\ cm.s^{-1}$ $\quad x_2 = 10t - 10$

Remarque : pour $t = 2 + 8 = 10$;
$x_2 = 10 \times 10 - 10 = 90$ cm

Phase 3 : mouvement décéléré, la vitesse passe de $10\ cm.s^{-1}$ à 0 sur 12,5 cm.

$v_{3f}^2 = v_0^2 + 2a_3(x_3 - x_0)$
$0 = 10^2 + 2a_3(12,5)$
et $[a_3 = -4\ cm.s^{-2}]$

$\boxed{v_0 = 10 \quad v_{3f} = 0 \quad x_3 - x_0 = 12,5}$

$v_3 = a_3 t + v_0(3) = -4t + v_0(3)$
Pour $t = 10$; $v = 10 = -4 \times 10 + v_0(3)$ et $v_0(3) = 50$
$x_3 = -2t^2 + 50t + x_0(3)$
Pour $t = 10$; $x = 90 = -2 \times 10^2 + 50 \times 10 + x_0(3)$
$x_0(3) = -210$

$a_3 = -4\ cm.s^{-2}$ $\quad v_3 = -4t + 50$ $\quad x_3 = -2t^2 + 50t - 210$

$t = 12,5$ s lorsque $v = 0$.

Exercice 2

- mouvement (1) rotation : trajectoire circulaire

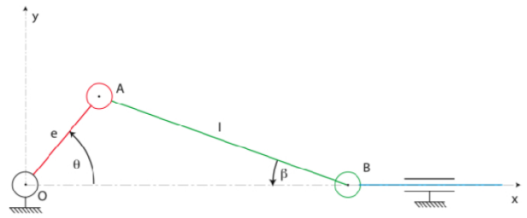
- - mouvement (3) translation : trajectoire rectiligne

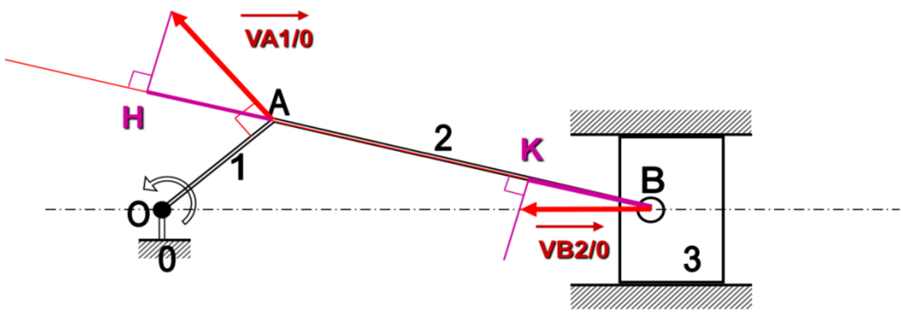
-- mouvement (2) plan (translation +rotation) : trajectoire

loi de mouvement du piston:

$$x(t) = R\cos\omega t + \sqrt{l^2 - R^2\sin^2\omega t}$$

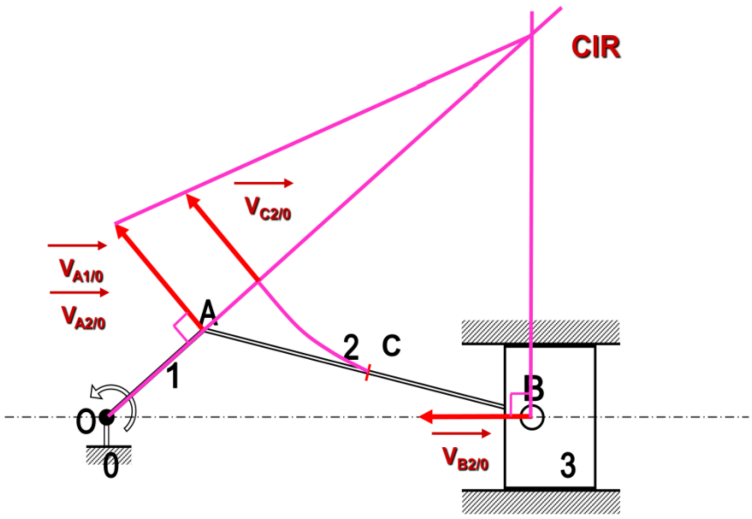
$$v(t) = -R\sin\omega t\left[\sin\omega t + \frac{1}{2}\cdot\frac{R\sin 2\omega t}{\sqrt{l^2 - R^2\sin^2\omega t}}\right]$$





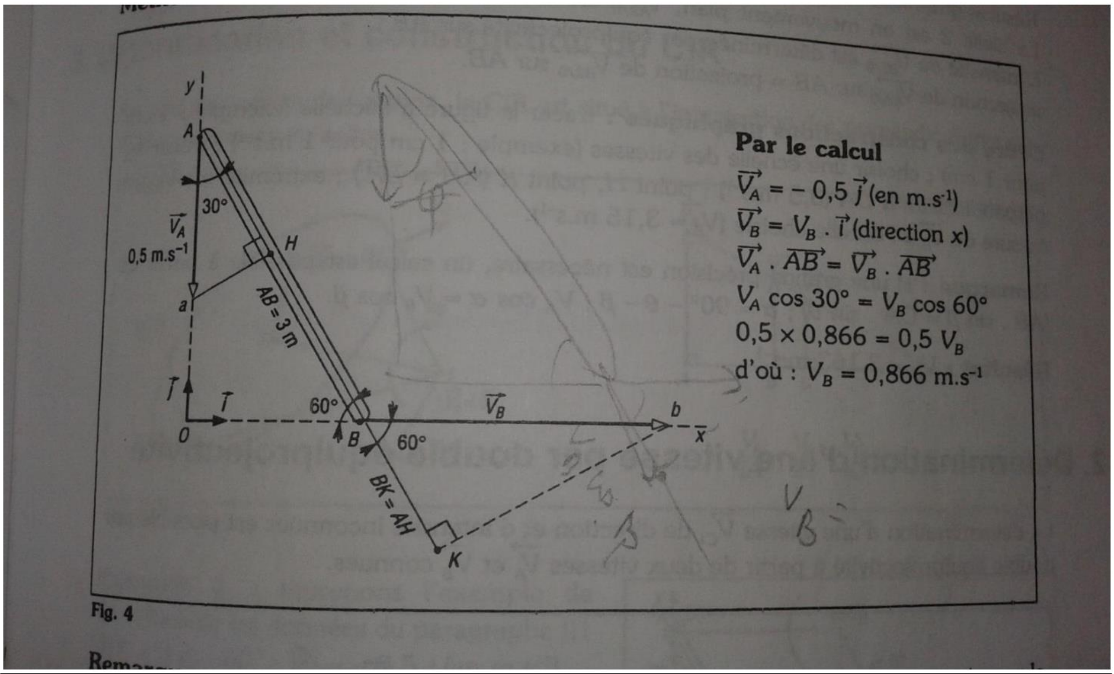
$\overrightarrow{VB3/0}$ et $\overrightarrow{VB2/0}$

$\overrightarrow{VB3/0} = \overrightarrow{VB2/0}$



Exercice 3

a- équiprojectivité



Par le calcul

$\vec{V_A} = -0,5\,\vec{j}$ (en m.s^{-1})

$\vec{V_B} = V_B \,.\, \vec{i}$ (direction x)

$\vec{V_A} \,.\, \vec{AB} = \vec{V_B} \,.\, \vec{AB}$

$V_A \cos 30° = V_B \cos 60°$

$0,5 \times 0,866 = 0,5\, V_B$

d'où : $V_B = 0,866$ m.s^{-1}

b- Méthode CIR

($AB = 3$ m ; 60° ; $\vec{V_A} = -0,5\,j$ (en m.s^{-1})).

Le CIR, I, est situé à l'intersection des perpendiculaires en A à $\vec{V_A}$ et en B à $\vec{V_B}$.

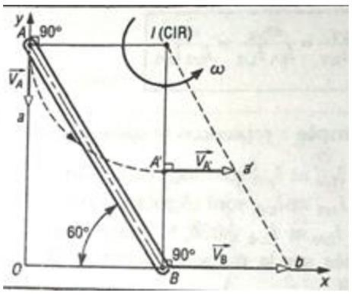
$\frac{V_B}{IB} = \frac{V_A}{IA} = \frac{V_{A'}}{IA'} = \omega$

avec $IA = IA' = AB \cos 60° = 1,5$ m

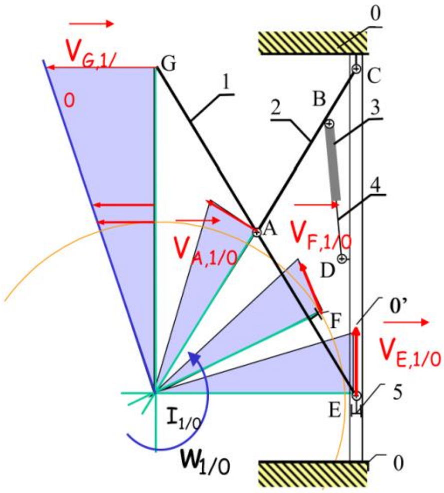
$IB = AB \sin 60° = 2,6$ m

$\omega = \frac{V_A}{IA} = \frac{0,5}{1,5} = 0,33$ rad . s^{-1}

$V_B = 0,33 \times 2,6 = 0,866$ m.s^{-1}



Exercice 4



Analytiquement : d'après Thalès

$$\frac{V_{F,1/0}}{IF} = \frac{V_{A,1/0}}{IA} = \frac{V_{E,1/0}}{IE} = \frac{V_{G,1/0}}{IG}$$

$$V_{A,1/0} = \frac{V_{F,1/0}}{IF} \times IA = \frac{40}{42} \times 45 = 42{,}9\,cm/s$$

$$V_{G,1/0} = \frac{V_{F,1/0}}{IF} \times IG = \frac{40}{42} \times 77 = 73{,}3\,cm/s$$

$$V_{E,1/0} = \frac{V_{F,1/0}}{IF} \times IE = \frac{40}{42} \times 45 = 42{,}9\,cm/s$$

Echelle : 1 / 20
Echelle des vitesses : 20 cm/s $\Leftrightarrow$ 1 cm

TD N: 04
CENTRE DE MASSE

Exercice : 01

Déterminer le barycentre (centre de masse) des figures suivantes. Proposer une méthode de décomposition en éléments infinitésimaux des corps qui ne peuvent être décomposés en éléments usuels (méthodes d'intégration simple, double et triple). Chercher la solution dans la documentation bibliographique.
Récapituler les résultats dans un seul tableau.

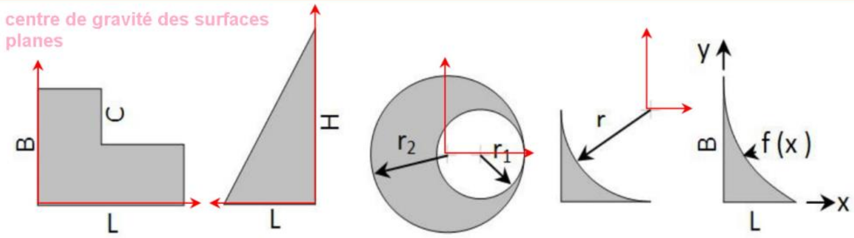
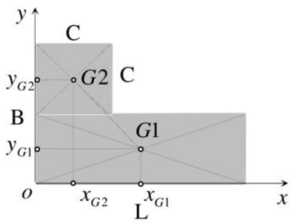


Fig. 1 :

a. Décomposons la figure en deux surfaces de formes usuelles (carrée + Rectangle).
b. Déterminons les caractéristiques géométriques de chaque surface usuelle : Les surfaces et les centres de gravité.

$$x_G = \frac{x_{G1}.S_1 + x_{G2}.S_2}{S_1 + S_2}$$
$$y_G = \frac{y_{G1}.S_1 + y_{G2}.S_2}{S_1 + S_2}$$



$$S_1 = L.(B-C) \;;\; S_2 = C^2$$
$$x_{G1} = \frac{L}{2} \;;\; x_{G2} = \frac{C}{2} \;;\; y_{G1} = \frac{B-C}{2} \;;\; y_{G2} = B - \frac{C}{2}.$$

D'où :

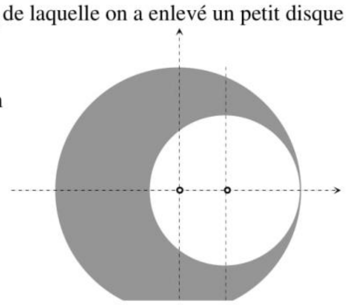
$$x_G = \frac{\frac{L}{2}.L.(B-C) + \frac{C}{2}.C^2}{L.(B-C)+C^2} = \frac{1}{2}.\frac{L^2.(B-C)+C^3}{L.(B-C)+C^2}$$
$$y_G = \frac{\frac{B-C}{2}.L.(B-C) + \left(B - \frac{C}{2}\right)C^2}{L.(B-C)+C^2} =$$

Si on suppose que l'échelle du schéma est réelle : B = 2C.

$$x_G = \frac{1}{2}.\frac{L^2+C^2}{L+C} \;;\; y_G = \frac{1}{2}.\frac{L.C+3C^2}{L+C}$$

Fig 3 : La figure est confectionnée d'un disque de rayon r_2 de laquelle on a enlevé un petit disque de rayon r_1.

Le choix des axes de coordonnées joue un rôle important. On peut simplifier les équations, en choisissant G2, un centre de repère.
Ainsi,



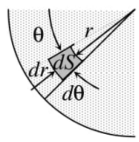
$$y_{G2} = y_{G1} = 0 \Rightarrow y_G = 0$$
$$x_G = \frac{x_{G1}.S_1 + x_{G2}.S_2}{S_1 + S_2}$$

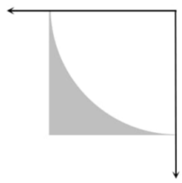
$$S_1 = \pi . r_1^2 \ ; \ S_2 = \pi . r_2^2$$
$$x_{G1} = r_2 - r_1 \ ; \ x_{G2} = 0 .$$

D’où :

$$x_G = \frac{-(r_2 - r_1)\pi . r_1^2 + 0\pi . r_1^2}{-\pi . r_1^2 + \pi . r_2^2} = \frac{-(r_2 - r_1).r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} = \frac{-(r_2 - r_1).r_1^2}{(r_2 - r_1).(r_2 + r_1)}$$
$$x_G = \frac{-.r_1^2}{r_2 + r_1} \ ; \ y_G = 0$$

Fig. 4 : La figure est confectionnée d’un carré de côté R *(de surface* $S_1 = R^2$ *)* de laquelle on a enlevé un quart de disque de rayon R *(de surface* $S_2 = \frac{\pi}{4} R^2$*)* .





A cause de la symétrie : $x_G = y_G$

$$x_G = y_G = \frac{x_{G1}.S_1 - x_{G2}.S_2}{S_1 - S_2}$$
$$x_{G1} = y_{G1} = \frac{R}{2}$$

Nous devons faire l’intégrale pour déterminer le centre de gravité du quart de disque. Divisons sa surface en éléments infinitésimaux de surface $dS = r.d\theta.dr$ et de coordonnées $x = r.\cos\theta$; $y = r.\sin\theta$.

La figure a une symétrie suivant l’axe médiane : $x = y$,

D'où :

$$x_G = y_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i dS_i}{\sum_{i=1}^{n} dS_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i dS_i}{\sum_{i=1}^{n} dS_i}$$

Quand $dS_i \to 0$,

$$x_G = y_G = \frac{\iint_S x.dS}{\iint_S dS} = \frac{\iint_S y.dS}{\iint_S dS} = \frac{\int_{r=0}^{R}\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} x.dS}{\int_{r=0}^{R}\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} dS} = \frac{\int_{r=0}^{R}\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} r.\cos\theta .r.d\theta .dr}{\int_{r=0}^{R}\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} r.d\theta .dr} = \frac{\int_{r=0}^{R}\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} r^2.\cos\theta .d\theta .dr}{\int_{r=0}^{R}\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} r.d\theta .dr}$$

$$= \frac{\int_{r=0}^{R} r^2.dr \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta .d\theta}{\int_{r=0}^{R} r.dr \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} .d\theta} = \frac{\left.\frac{r^3}{3}\right|_{r=0}^{R} .\sin\theta \Big|_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}}}{\left.\frac{r^2}{2}\right|_{r=0}^{R} .\theta \Big|_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}}} = \frac{\frac{R^3}{3}}{\frac{R^2}{2}.\frac{\pi}{2}} = \frac{4R}{3\pi}$$

Alors :

$$x_{G2} = y_{G2} = \frac{4R}{3\pi}$$

D’où :

$$x_G = y_G = \frac{\frac{R}{2}.R^2 - \frac{4R}{3\pi}.\frac{\pi}{4}.R^2}{R^2 - \frac{\pi}{4}.R^2} = \frac{\frac{R}{6}}{1 - \frac{\pi}{4}} = \frac{2}{3}.\frac{R}{4 - \pi}$$