Solution TD n°3 : Fonctions d'une variable réelle.

Ex 1 : ① $f(x) = \sqrt{6 - |x-2|}$

La fonction f est définie ssi $6 - |x-2| \geq 0$

$$\Leftrightarrow |x-2| \leq 6$$

$$\Leftrightarrow -6 \leq x-2 \leq 6.$$

$$\Leftrightarrow -4 \leq x \leq 8.$$

Ainsi, $D_f = [-4, 8]$.

② $f(x) = \frac{1}{x} \ln\left(\frac{e^x - 1}{x}\right)$.

La fonction f est définie ssi $x \neq 0$ et $\frac{e^x-1}{x} > 0$.

pour cela, regardons le tableau des signes de $\frac{e^x-1}{x}$.

x	$-\infty$ $-$ 0	$+$ $+\infty$
$e^x - 1$	$-$	$+$
$\frac{e^x-1}{x}$	$+$	$+$

Ainsi, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

③ $f(x) = \dfrac{x - \sqrt{|x^2 - 1|}}{\sqrt[3]{x^3 - 1}}$

La fonction f est définie ssi $x^3 - 1 \neq 0$

$$x^3 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x^3 \neq 1 \Leftrightarrow x \neq 1.$$

Ainsi,

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\} =]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[.$$

Ex2 : I) La parité des fonctions.

① $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$.

La fonction f est définie dans $\mathbb{R}$ car $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x + 1 \neq 0$.

On a : $\forall x$, $(x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow -x \in \mathbb{R})$. Ainsi,

$$f(-x) = \frac{e^{-x} - 1}{e^{-x} + 1} = \frac{e^{-x}(1 - e^x)}{e^{-x}(1 + e^x)} = \frac{1 - e^x}{1 + e^x} = -\left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right)$$

$$= -f(x).$$

Donc, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = -f(x)$ $\Rightarrow$ f est une fonction impaire.

② $f(x) = \cos x + \sin x$.

$D_f = \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow -x \in \mathbb{R}$. Donc,

$f(-x) = \cos(-x) + (\sin(-x)) = \cos x - \sin x$.

Ainsi, $f(-x) \neq f(x)$ et $f(-x) \neq -f(x)$

$\Rightarrow$ f n'est ni paire, ni impaire.

③ $f(x) = \cos(2x) + tg^2(x)$.

$$= \cos(2x) + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}$$

La fonction f est définie ssi $\cos x \neq 0$ càd

$x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Donc, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{ \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \}$.

$\forall x, (x \in D_f \Leftrightarrow -x \in D_f)$ et on a :

$$f(-x) = \cos(-2x) + tg^2(-x) = \cos(2x) + (-tgx)^2$$
$$= \cos(2x) + tg^2 x = f(x)$$

$\Rightarrow f$ est paire.

II) La périodicité des fonctions.

Si f est une fonction périodique de période T, alors la fonction $g : x \longmapsto f(ax+b)$, $a \neq 0$ est périodique de période $\frac{T}{a}$.

Remarquons que

$$g\left(x+\frac{T}{a}\right) = f\left(a\left(x+\frac{T}{a}\right)+b\right) = f(ax+T+b)$$
$$= f(ax+b+T) = f(ax+b)$$
$$= g(x).$$

① $f(x) = \cos\left(\frac{3x}{2}\right)$.

$D_f = \mathbb{R}$.

La fonction $\cos x$ est périodique de période 2π, alors $f(x) = \cos\left(\frac{3x}{2}\right)$ est périodique de période $T = \frac{2\pi}{\frac{3}{2}} = \frac{4\pi}{3}$.

② $f(x) = \cos(2x) - \sin(4x)$; $D_f = \mathbb{R}$.

Remarquons que si f_1 est périodique de période T_1 et si f_2 est périodique de période T_2, alors s'il existe deux entiers $n, m \in \mathbb{N}^*$ tels que

$$nT_1 = mT_2, \text{ alors}$$

$f_1 + f_2$, $f_1 - f_2$, $f_1 f_2$ et $\frac{f_1}{f_2}$ sont périodiques de périodes $nT_1 = mT_2$.

Posons $f_1(x) = \cos(2x)$ et $f_2(x) = \sin(4x)$.

Alors

f_1 est périodique de période $T_1 = \pi$ et

f_2 " " " " $T_2 = \frac{\pi}{2}$.

$\{nT_1, n \in \mathbb{N}^*\} = \{\pi, 2\pi, 3\pi, \ldots\}$ et

$\{mT_2, m \in \mathbb{N}^*\} = \{\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, \ldots\}$. Ainsi,

f est périodique de période π.

$\underline{\text{III}}$) Soit $f(x) = E(x) - x$

On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad E(x) \leq x < E(x)+1$$

$$\Rightarrow E(x) + n \leq x+n < E(x)+1+n.$$

Mais $E(x+n)$ est le plus grand entier vérifiant $E(x+n) \leq x+n$ donc

$$E(x)+n \leq E(x+n) \quad \ldots (\alpha)$$

D'autre part,

$$E(x+n) \leq x+n < E(x+n)+1$$

$$\Rightarrow E(x+n)-n \leq x$$ et on sait que

$E(x)$ est le plus grand entier vérifiant $E(x) \leq x$.

Donc, $E(x+n)-n \leq E(x)$

$$\Rightarrow E(x+n) \leq E(x)+n \quad \ldots (\alpha\alpha)$$

D'après (α) et $(\alpha\alpha)$, on a :

$$E(x+n) = E(x)+n \quad , \quad n \in \mathbb{Z} \; , \; x \in \mathbb{R}.$$

Maintenant, pour $f(x) = E(x) - x$, $D_f = \mathbb{R}$ et on a :

$$f(x+1) = E(x+1) - (x+1)$$

$$= E(x)+1-x-1 = E(x)-x = f(x).$$

$\Rightarrow f$ est périodique de période 1.

Ex3 : 1) On a pour tout $x \in [2, +\infty[$,

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 2 + \sqrt{3 - g(x)}$$

$$f(g(x)) = 2+\sqrt{3-(-x^2+4x-1)}$$
$$= 2+\sqrt{x^2-4x+4}$$
$$= 2+\sqrt{(x-2)^2} = 2+|x-2|$$

pour $x \in [2,+\infty[$, $x \geq 2$. Donc

$|x-2| = x-2$ et on a :

$(f \circ g)(x) = 2+x-2 = x$.

2) pour tout $x \in]-\infty, 3]$,

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = -(f(x))^2 + 4(f(x)) - 1$$
$$= -(2+\sqrt{3-x})^2 + 4(2+\sqrt{3-x}) - 1$$
$$= -(4+3-x+4\sqrt{3-x}) + 8 + 4\sqrt{3-x} - 1$$
$$= -4-3+x-4\sqrt{3-x}+8+4\sqrt{3-x}-1$$
$$= x.$$

3) Puisque les deux ensembles de définition de $f \circ g$ et $g \circ f$ sont différents, on ne peut pas conclure que $g \circ f = f \circ g$. En revanche, pour $x \in [2,3]$, on a : $(g \circ f)(x) = (f \circ g)(x)$.

Ex 4 : (1) $\lim_{x \to 1^+} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-x^2} \right) = ?$

$$\lim_{x \to 1^+} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-x^2} \right) = \lim_{x \to 1^+} \frac{\cancel{1} + x - \cancel{1}}{1-x^2} = -\infty$$

(2) $\lim_{x \to 0} x\,E\left(\frac{1}{x}\right) = ?$

On sait que
$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \frac{1}{x} - 1 < E\left(\frac{1}{x}\right) \leq \frac{1}{x}$

Ainsi,
si $x > 0$, alors $1 - x < x\,E\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$
si $x < 0$, alors $1 \leq x\,E\left(\frac{1}{x}\right) < 1 - x$

En utilisant le théorème d'encadrement,

$$\lim_{x \to 0^+} x\,E\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x \to 0^-} x\,E\left(\frac{1}{x}\right) = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} x\,E\left(\frac{1}{x}\right) = 1$$

(3) $$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(1+e^{2x})}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln\left(e^{2x}\left(e^{-2x}+1\right)\right)}{x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(e^{2x}) + \ln(e^{-2x}+1)}{x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left(2 + \frac{\ln(e^{-2x}+1)}{x} \right) = 2$$

(4) $\lim_{x \to +\infty} e^{x - \sin x} = ?$

On a :

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad -1 \leq \sin x \leq 1$

$\Leftrightarrow \quad -1 \leq -\sin x \leq 1$

$\Leftrightarrow \quad x-1 \leq x - \sin x \leq x+1$

$\Rightarrow \quad x - \sin x \geq x-1$

Donc,

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^{x-\sin x} \geq e^{x-1}$ et

puisque $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{x-1} = +\infty$, alors

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^{x-\sin x} = +\infty$.

Ex 5 :

① $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -\sqrt{-x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$

Si $x > 0$, alors $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue.

Si $x < 0$, alors $x \mapsto -\sqrt{-x}$ est continue.

Maintenant, la continuité au point 0.

On a : $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0 = f(0)$

et $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} -\sqrt{-x} = 0 = f(0)$.

Donc, f est continue en 0 $\Rightarrow$ f est continue dans $\mathbb{R}$.

(2) $f(x) = E(x) + \sqrt{x - E(x)}$.

puisque $x \geq E(x)$, $x \in \mathbb{R}$, alors f est bien définie.

Remarquons que la fonction partie entière est continue sur $]n, n+1[$, $n \in \mathbb{Z}$ et la fonction $\sqrt{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$, donc f est continue sur tout intervalle $]n, n+1[$, $n \in \mathbb{Z}$.

Maintenant, pour la continuité en $n \in \mathbb{Z}$.

On a : $\quad f(n) = E(n) + \sqrt{n - E(n)} = n$.

Soit $x \in]n, n+1[$, alors $E(x) = n$ et on a :

$$f(x) = n + \sqrt{x - n}.$$ Ceci implique que

$$\lim_{x \to n^+} f(x) = n = f(n)$$

D'autre part, soit $x \in]n-1, n[$, alors $E(x) = n-1$ et on a :

$$f(x) = n-1 + \sqrt{x - (n-1)}.$$

$$\lim_{x \to n^-} f(x) = n-1+1 = n = f(n).$$

Ainsi f est continue en $n \Rightarrow f$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Ex 6 : On a : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \longmapsto f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(ax)}{x} & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ 2be^x - x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Remarquons que pour $x>0$ et $x<0$, la fonction f est continue. Pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$, il faut qu'elle soit continue en à droite et à gauche de 0.

On a : $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} 2be^x - x = 2b = f(0) = 1$

$\Rightarrow b = 1/2$

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin(ax)}{x} = a \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin(ax)}{ax} = a = f(0) = 1$

$\Rightarrow a = 1$

Ex7 : (1) $f(x) = \sin(x)\sin\left(\frac{1}{x}\right)$

Remarquons que f est continue sur $\mathbb{R}^*$.

$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \sin x \sin\frac{1}{x} = 0$ car

$0 \leq \left|\sin(x)\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq |\sin x| \to 0$ quand $x\to 0$

Donc, f est prolongeable par continuité en 0

et on a :

$$F(x) = \begin{cases} \sin x \sin\frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

(2) $f(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2}$.

f est continue sur $\mathbb{R}\setminus\{\pm 1\}$.

$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2} = \lim_{x\to 1} \frac{1+x-2}{1-x^2} = \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{1-x^2}$

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{(1-x)(1+x)} = \lim_{x\to 1} \frac{-1}{1+x} = \frac{-1}{2}.$$

Donc f est prolongeable par continuité en 1 et on a :

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2} & , x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\} \\ -1/2 & x = 1 \end{cases}$$

Ex 8 : Remarquons que $f(x) = x + e^x$ est continue sur $\mathbb{R}$

et on a : $f(0) = 1 > 0$ et $f(-1) = -1 + e^{-1} < 0$

$(e^{-1} = \frac{1}{e})$

Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $x + e^x = 0$ admet une solution dans $\mathbb{R}$.

De plus, puisque f est strictement croissante $\left(f'(x) = 1 + e^x > 0\right)$ alors, cette solution est unique.

Ex 9 (Facultatif) : ① $f(x) = \sqrt{\frac{2+3x}{5-2x}}$

La fonction f est bien définie ssi $2+3x \geq 0$ et $5-2x > 0$

ou $2+3x \leq 0$ et $5-2x < 0$

① $\begin{cases} 2+3x \geq 0 \\ 5-2x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq -2/3 \\ x < 5/2 \end{cases} \Rightarrow x \in \left[-\frac{2}{3}, \frac{5}{2}\right[$

② $\begin{cases} 2+3x \leq 0 \\ 5-2x < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq -2/3 \\ x > \frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow$ cet ensemble est vide car il n'y a pas d'intersection.

Donc, $D_f = \left[-\frac{3}{3}, \frac{5}{2}\right[$.

(2) $f(x) = \dfrac{1}{\cos x}$

La fonction f est bien définie ssi $\cos x \neq 0$.

On sait que $\cos x = 0 \iff x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$

Ainsi $D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

(3) $f(x) = \dfrac{\sqrt{\ln x}}{1 - \ln x}$. La fonction f est bien définie

ssi $1 - \ln x \neq 0$ et $\ln x \geqslant 0$ et $x > 0$.

$1 - \ln x \neq 0 \iff x \neq e$.

$\ln x \geqslant 0 \iff x \geqslant 1$.

Ainsi, $D_f = [1, +\infty[\setminus \{e\} = [1, e[\cup]e, +\infty[$.

(4) $f(x) = \cot(\sqrt{x}) = \dfrac{\cos(\sqrt{x})}{\sin(\sqrt{x})}$.

La fonction f est définie ssi $\sin(\sqrt{x}) \neq 0$ et $x > 0$

càd $\sqrt{x} \neq \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$

$\iff x \neq \pi^2 k^2$, $k \in \mathbb{Z}$

Donc, $D_f = \mathbb{R}^+ \setminus \{\pi^2 k^2, k \in \mathbb{Z}\}$.

Ex10 (Facultatif)

(1) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x - \sqrt{x}}{\ln x + x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\cancel{x}\left(1 - \frac{\sqrt{x}}{x}\right)}{\cancel{x}\left(\frac{\ln x}{x} + 1\right)} = 1$

(2) $\lim_{x\to 0} x^2 E\left(\frac{1}{x}\right) = ?$

Remarquons qu'on a : $\frac{1}{x} - 1 < E\left(\frac{1}{x}\right) \leq \frac{1}{x}$, $x \neq 0$

$$\Rightarrow \quad x^2\left(\frac{1}{x} - 1\right) < x^2 E\left(\frac{1}{x}\right) \leq x$$

$$\Rightarrow \quad x - x^2 < x^2 E\left(\frac{1}{x}\right) \leq x$$

En utilisant le théorème d'encadrement et puisque $\lim_{x\to 0} x - x^2 = \lim_{x\to 0} x = 0$, alors $\lim_{x\to 0} x^2 E\left(\frac{1}{x}\right) = 0$

(3) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2)}{\sin^2 x} = ?$

On peut utiliser la règle de l'Hospital. On pose $f(x) = \ln(1+x^2)$ et $g(x) = \sin^2 x$. Alors

$$f'(x) = \frac{2x}{1+x^2} \quad \text{et} \quad g'(x) = 2\sin x \cos x$$

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{x}{\sin x} \cdot \frac{1}{(1+x^2)\cos x}.$$

On remarque que $\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 1$ $\left(\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1\right)$ et

$\lim_{x\to 0} \frac{1}{(1+x^2)\cos x} = 1$. Ainsi

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2)}{\sin^2 x} = 1$$

(4) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)-(1-x)}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}$ (conjugué)

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2\cancel{x}}{\cancel{x}(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})} = 1$$

⑤ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x\ln x+5}{x^2+4} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x\ln x\left(1+\frac{5}{x\ln x}\right)}{x^2\left(1+\frac{4}{x^2}\right)}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x}\left(\dfrac{1+\cancel{\frac{5}{x\ln x}}\to 0}{1+\underbrace{\cancel{\frac{4}{x^2}}}_{0}}\right) = 0.$

(6) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x})(\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x})}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\cancel{x}+\sqrt{x}-\cancel{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}} = \lim \dfrac{\cancel{\sqrt{x}}}{\cancel{\sqrt{x}}\left(\sqrt{\frac{x+\sqrt{x}}{x}}+1\right)}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{\sqrt{x}}{x}}+1} = 1/2.$

EXM: (Facultatif) ① $f(x) = \begin{cases} x+\dfrac{\sqrt{x^2}}{x} & \text{si } x\neq 0 \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases}$

Remarquons que $x+\dfrac{\sqrt{x^2}}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$. Pour le point 0.

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(x+\dfrac{x}{x}\right) = \lim\limits_{x\to 0^+}(x+1) = 1$ et

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-}\left(x-\dfrac{x}{x}\right) = \lim\limits_{x\to 0^-}(x-1) = -1$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$. Donc f n'est pas continue en 0.

(2) $f(x) = \begin{cases} 1 + x\cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^*$.

$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \left(1 + x\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right) = 1$ car

$\lim_{x \to 0} x\cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ $\left(0 < \left|x\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right| < |x| \right)$

Donc, puisque $\lim_{x \to 0} f(x) = 1 \neq f(0) = 0$, alors

f n'est pas continue en 0.

Ex 12 : (Facultatif)

1) On considère la fonction $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto g(x) = f(x) - x$.

Comme f est continue, alors g est aussi continue et on a :

$g(a) = f(a) - a \geq 0$ $\quad$ ($f(a) \in [a,b]$, par définition)

et $g(b) = f(b) - b \leq 0$ $\quad$ ($f(b) \in [a,b]$).

Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires,

il existe un $x_0 \in [a,b]$ tel que $g(x_0) = 0$

$\Rightarrow f(x_0) = x_0$.

2) Montrons que $\cos x = x$ admet une solution entre 0 et 1.

Remarquons que

$\cos 0 = 1$ et $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ et puisque $\cos x$ est décroissante

entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, alors $\cos\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right) = [0,1]$.

Ainsi, $[0,1] \subset [0, \pi/2]$ donc ceci implique encore

que $\cos([0,1]) \subset [0,1]$.

D'après la question précédente, $\cos x : [0,1] \to [0,1]$ admet une solution entre 0 et 1.

3) On peut remarquer que la fonction $g :]0,1[\to]0,1[$
$x \mapsto g(x) = x^2$

n'admet pas de point fixe.

Ex13 : (Facultatif)

1) Soit $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$.

sur $[0,+\infty[$, $f(x) = \dfrac{x}{1+x} = 1 - \dfrac{1}{1+x}$ est continue et strictement croissante avec $f(0) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$.

Donc, f est une bijection de $[0,+\infty[$ vers $[0,1[$.

sur $]-\infty,0[$, $f(x) = -1 + \dfrac{1}{1-x}$ est continue et strictement croissante avec $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1$ et $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.

Donc, f est une bijection de $]-\infty,0[$ vers $]-1,0[$. Ainsi,

f est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $]-1,1[$.

2) pour $y \in [0,1[$, $x = f^{-1}(y) \in [0,+\infty[$ et $y = f(x)$

$$\Leftrightarrow x = \frac{y}{1-y}.$$

pour $y \in]-1,0[$, $x = f^{-1}(y) \in]-\infty,0[$ et $y = f(x)$

$$\Leftrightarrow x = \frac{y}{1+y}.$$ Ainsi,

$$\forall y \in]-1,1[, \quad f^{-1}(y) = \frac{y}{1-|y|}.$$

Ex 14 : (Facultatif)

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} - \frac{1}{x} & \text{si } x \geq 4 \\ (x+a)^2 & \text{si } x < 4 . \end{cases}$$

pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$, il suffit d'étudier la continuité au point 4.

$$\lim_{\substack{x \to 4 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 4 \\ >}} \sqrt{x} - \frac{1}{x} = \frac{7}{4}.$$

$$\lim_{\substack{x \to 4 \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 4 \\ <}} (x+a)^2 = (4+a)^2 .$$

pour que f soit continue en 4, il faut que

$$\lim_{\substack{x \to 4 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 4 \\ <}} f(x) \Leftrightarrow (4+a)^2 = \frac{7}{4}.$$

$$\Leftrightarrow |4+a| = \frac{\sqrt{7}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4+a = \frac{\sqrt{7}}{2} \\ -4-a = \frac{\sqrt{7}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{\sqrt{7}}{2} - 4 \\ a = -\frac{\sqrt{7}}{2} - 4 \end{cases}$$

Ex 15 : (Facultatif)

1) On a : $f_n'(x) = nx^{n-1} + (n-1)x^{n-2} + 2x + 1$, $n \geq 2$.

Remarquons que f_n' est strictement positive sur $]0, +\infty[$, donc f est strictement croissante. En plus

$$f_n(0) = -1 \quad \text{et} \quad \lim_{n \to +\infty} f_n(x) = +\infty .$$

Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, f_n s'annule dans un point u_n qui est unique.

2) On remarque que $u_n \in]0, \frac{2}{3}[$ car

$$f_n\left(\frac{2}{3}\right) \geq \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{2}{3} - 1 = \frac{1}{9} > 0$$ et

$f_n(0) = -1$.

D'autre part, u_n vérifie $f_n(u_n) = u_n^n + u_n^{n-1} + u_n^2 + u_n - 1 = 0$

$$\Rightarrow f_{n+1}(u_n) = u_n^{n+1} + u_n^n + u_n^2 + u_n - 1 = u_n^{n+1} - u_n^{n-1}$$

$$= u_n^{n-1}(u_n^2 - 1) < 0.$$

Ceci implique que $u_{n+1} \in]u_n, \frac{2}{3}[$ qui veut dire que (u_n) est croissante $(u_{n+1} > u_n)$ et majorée $(u_n < \frac{2}{3})$, donc elle converge.

On pose $l = \lim_{n \to +\infty} u_n$. Alors

$$u_n^2 + u_n - 1 = -u_n^n - u_n^{n-1} = -e^{n \ln u_n} - e^{(n-1)\ln u_n}$$

$$\lim_{n \to +\infty} n \ln(u_n) = \lim_{n \to +\infty} (n-1)\ln(u_n) = -\infty \quad \left(0 < u_n < \frac{2}{3} < 1\right).$$

En passant à la limite, on trouve

$$l^2 + l - 1 = 0 \Rightarrow l = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$