Faculté de Physique, USTHB
$1^{\text{ère}}$ année Licence ST

Mai 2024

Epreuve finale (durée 1h30mn)

<u>Exercice 1</u> (7 pts)

Soient deux charges électriques ponctuelles identiques $q_A = q_B = q = 25\,nC$ fixées respectivement aux points $\mathbf{A}\,(3a, 0)$ et $\boldsymbol{B}\,(0, -a)$, avec $\boldsymbol{a} = \mathbf{3}\,\boldsymbol{cm}$ et $\mathbf{k} = \mathbf{9.10^9}\,\boldsymbol{SI}$, (voir **Figure 1**).

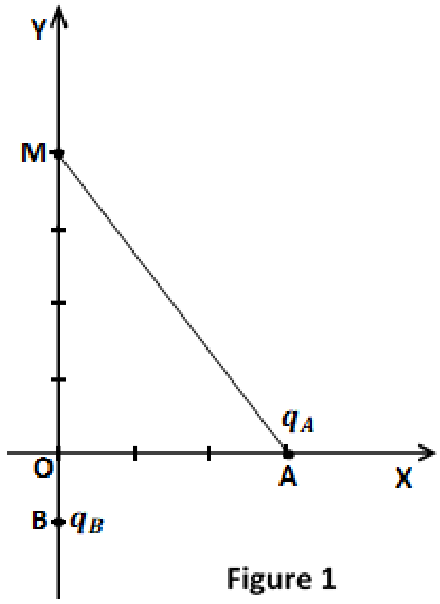


Figure 1

1) Au point **M** de coordonnées **(0,4a)** :

a) Déterminer le vecteur champ électrique $\vec{E}_M$, créé par ces deux charges, et le représenter .

Echelle : $1\,cm \to 6 \times 10^3 (V/m)$.

b) Calculer le potentiel électrique V_M créé par ces deux charges.

2) On fixe au point **M** une charge ponctuelle $\boldsymbol{Q} = \mathbf{1}\,\boldsymbol{nC}$. Calculer :

a) La force électrostatique exercée sur la charge $\boldsymbol{Q}$.

b) L'énergie potentielle de la charge $\boldsymbol{Q}$.

c) L'énergie interne **U** du système formé par les charges q_A, q_B et $\boldsymbol{Q}$.

3) On remplace la charge $\boldsymbol{Q}$ par un dipôle électrique de moment dipolaire, $\vec{p} = 10^{-10}\,\vec{j}$ (**C.m**). On suppose que le champ électrique $\vec{E}_M$ reste uniforme autour du point **M**.

a) Déterminer le moment du couple $\vec{\tau}$ du dipôle.

b) Quelle est la position d'équilibre stable du dipôle ? Justifier.

c) Représenter le dipôle dans cette position.

<u>Exercice 2</u> (6 Pts)

Soit un condensateur sphérique formé par deux armatures sphériques concentriques, de rayons R_1 et R_2, séparées par le vide et telles que $R_1 < R_2$. Le condensateur est relié à un générateur de force électromotrice $\mathbf{V_0}$ (voir figure 2).

On donne : $R_2 = 3\,R_1 = 9$ mm, $V_0 = 10$ V.

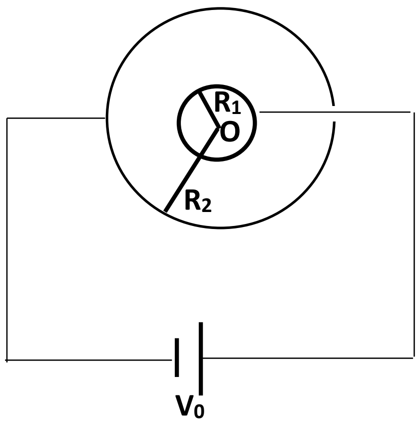


Figure 2

1) Représenter la distribution des charges Q_1 et Q_2 sur les surfaces des deux armatures. Quelle est la relation entre $\mathbf{Q_1}$ et $\mathbf{Q_2}$? Justifier.

2) En utilisant le théorème de Gauss, déterminer l'expression du vecteur champ électrique, $\vec{E}$, en un point M situé entre les deux armatures ($R_1 < r = OM < R_2$), en fonction de Q_1, **r et** ε_0.

3) En déduire l'expression de la différence de potentiel électrique $\mathbf{V_C}$ entre les deux armatures en fonction de Q_1, R_1, R_2 et ε_0.

4) Etablir l'expression de la capacité **C** du condensateur en fonction de R_1, R_2 et ε_0. Calculer sa valeur.

5) Calculer l'énergie $\mathbf{U_0}$ emmagasinée dans le condensateur.

6) Un deuxième condensateur de capacité $C' = 5 \times 10^{-13} F$ est relié, en série, au condensateur précédent (voir figure 3).

a) Calculer la capacité équivalente C_{eq} à cette association de condensateurs.

b) Calculer la charge **Q** du condensateur équivalent ainsi que l'énergie **U** emmagasinée par ce dernier.

c) Comparer la valeur de **U** à celle de U_0 calculée dans la question 5 et conclure.

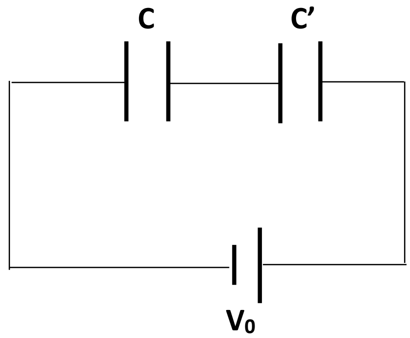


Figure 3

Exercice 3 (7 pts)

On considère le circuit électrique de la figure 4 composé d'un générateur de f.é.m. E_1 et de résistance interne r_1, d'un générateur réversible de f.é.m. E_2 et de résistance interne r_2, de deux résistances R_1 et R_2, d'un condensateur de capacité **C** et de deux interrupteurs K_1 et K_2.

On donne : $E_1 = 20$ Volts, $E_2 = 13$ Volts, $r_1 = r_2 = 1\ \Omega$, $R_1 = 5\ \Omega$ et $C = 2\ \mu F$.

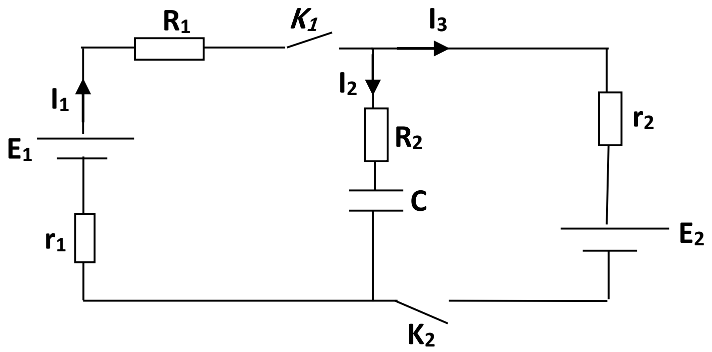


Figure 4

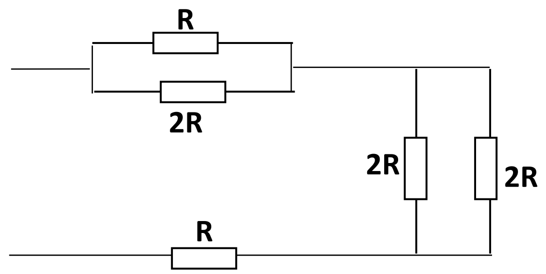


Figure 5

Important : Les parties 1 et 2 sont indépendantes.

Partie 1 : K_1 et K_2 étant fermés et le condensateur est **complètement chargé**.

1) La résistance R_2 est une association de résistances représentée sur la figure 5. Calculer la résistance **R**, sachant que la résistance équivalente $R_2 = 8\ \Omega$.

2) Calculer les intensités des courants I_1, I_2 et I_3 circulant dans chaque branche du circuit de la figure 4.

3) Déterminer la différence de potentiel V_C aux bornes du condensateur.

4) Le générateur réversible fonctionne-t-il comme un générateur ou un récepteur ?

5) Faire le bilan d'énergie du circuit.

Partie 2 : K_1 et K_2 étant ouverts et le condensateur est **complétement déchargé**.

À t = 0 s, on ferme l'interrupteur K_1.

1) Etablir l'équation différentielle régissant l'évolution de la charge ***q(t)*** du condensateur.
2) Déterminer l'expression de la charge ***q(t)*** accumulée dans le condensateur.
3) Donner les expressions de la charge finale Q_f du condensateur ainsi que le temps caractéristique **τ** du circuit. Calculer leurs valeurs.

Faculty of Physics, USTHB
1^{st} year License ST

May 2024

FINAL EXAM-PHYS2 (1 h 30 mn)

Problem-1 (7 pts)

Consider two identical point charges, $q_A = q_B = q = 25\ nC$, fixed respectively at the points A (3a,0) and B (0,-a) (see Figure 1).

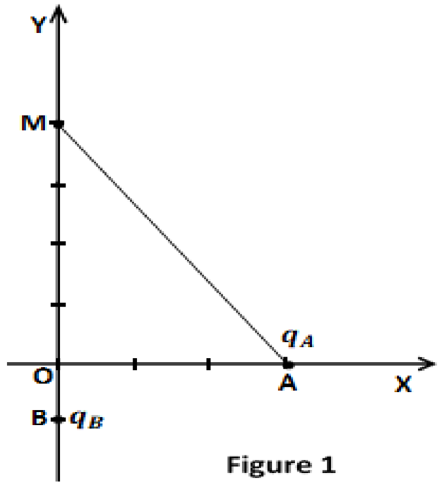


Figure 1

Data: $a = 3\ cm$ and $k = 9 \times 10^9$ (SI).

1- Calculate the electric field vector $\vec{E}_M$ generated by these two charges at point **M** (0, 4a). Draw it.
Use the scale, $1cm$: $6 \times 10^3 (V/m)$.

2- What is the electric potential V_M generated by these two charges at point **M** (0, 4a)?

3- A point charge $Q = 1\ nC$ is fixed at point **M**. Calculate:

a) The electric force acting on the charge Q.

b) The electric potential energy acquired by the charge Q.

c) The internal energy U of the system of charges q_A, q_B and Q.

4- We replace the charge Q by an electric dipole of moment $\vec{p} = 10^{-10}\ \vec{j}$ (C.m). We assume that the electric field $\vec{E}_M$ remains uniform around the point **M**.

a) Determine the torque acting on the dipole.

b) What is the stable equilibrium position of the dipole? Justify your answer.

c) Draw the dipole in this position.

Problem-2 (6 Pts)

Consider a spherical capacitor formed by two concentric spherical conductors of radii R_1 and R_2 ($R_1 < R_2$), separated by vacuum. The capacitor is connected to a generator of electromotive force V_0 (see Figure 2).

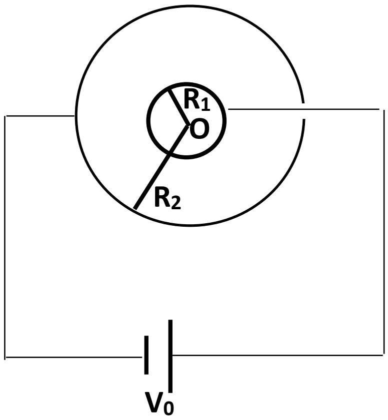


Figure 2

Data: $R_2 = 3\ R_1 = 9$ **mm,** and, $V_0 = 10$ **V.**

1- Depict qualitatively the distribution of charges on both spheres. Let be Q_1 and Q_2 , the charges carried by the surfaces of the conductors. How are Q_1 and Q_2 related? Justify your answer.

2- Using Gauss's theorem, determine the expression of the electric field vector $\vec{E}$, at a point M located between the two conductors at a distance **r**, in terms of Q_1, **r** and ε_0. We have, $R_1 < r = OM < R_2$.

3- Deduce the expression of the electric potential difference U_C between the capacitor conductors in terms of Q_1, R_1, R_2 and ε_0.

4- Derive the expression for the capacitance C of the capacitor in terms of $\mathbf{R_1}$, $\mathbf{R_2}$ and $\boldsymbol{\varepsilon_0}$. Calculate its value.

5- Calculate the energy $\mathbf{W_{C0}}$ stored in the capacitor.

6- A second capacitor of capacitance $\boldsymbol{C' = 5 \times 10^{-13} F}$ is connected in series to the previous capacitor (see figure 3).

a) Calculate the equivalent capacitance $\mathbf{C_{eq}}$ of this combination of capacitors.

b) Calculate the electric charge **Q** of the equivalent capacitor as well as its stored energy $\mathbf{W_C}$.

c) Compare $\mathbf{W_C}$ to $\mathbf{W_{C0}}$ obtained in question 5 and conclude.

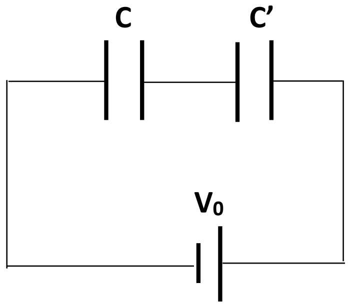


Figure 3

<u>Problem-3</u> (7 pts)

Consider the electric circuit of figure 4 that is composed of a generator of *e.m.f* $\boldsymbol{E_1}$ and internal resistance $\boldsymbol{r_1}$, a reversible generator of *e.m.f* $\boldsymbol{E_2}$ and internal resistance $\mathbf{r_2}$, two resistors of resistance $\mathbf{R_1}$ and $\mathbf{R_2}$, a capacitor of capacitance **C** and two switches $\mathbf{K_1}$ and $\mathbf{K_2}$.

<u>Data</u>: $\mathbf{E_1 = 20\ V}$, $\mathbf{E_2 = 13\ V}$, $\mathbf{r_1 = r_2 = 1\ \Omega}$, $\mathbf{C = 2\mu F}$ and $\mathbf{R_1 = 5\ \Omega}$.

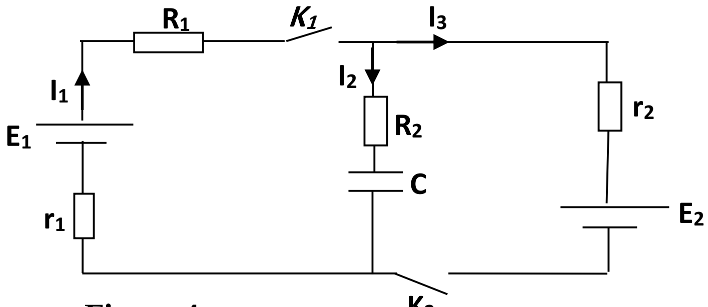


Figure 4

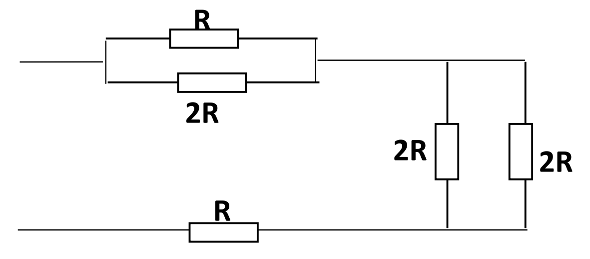


Figure 5

<u>Important: Parts 1 and 2 are independent.</u>

<u>Part 1</u>*: The switches* $\boldsymbol{K_1}$ *and* $\boldsymbol{K_2}$ *are closed and the capacitor is* ***<u>fully charged</u>****.*

1) In fact, $\mathbf{R_2}$ is a combination of resistances depicted on figure 5. Calculate the resistance **R**, given that $\mathbf{R_2 = 8\ \Omega}$.

2) Determine the intensities of the electric currents I_1, I_2 and I_3 flowing through the branches of the circuit of figure 4.

2) Determine the voltage $\mathbf{U_C}$ at the terminals of the capacitor.

3) Is the reversible generator running as a generator or a receiver?

4) Check the energy balance of the circuit.

<u>Part 2:</u> *The switches* $\boldsymbol{K_1}$ and $\boldsymbol{K_2}$ *are open and the capacitor is* ***<u>fully discharged</u>****.*

At t = 0 s, we close the switch $\boldsymbol{K_1}$.

1) Establish the differential equation governing the evolution of the capacitor charge q(t).

2) Find the expression of the capacitor charge q(t).

3) Deduce the expression of the capacitor final charge Q_f and the circuit time constant $\boldsymbol{\tau}$. Calculate theirs values.

Faculté de Physique, USTHB **Mai 2024**

1ère année Licence ST

Corrigé de l'Epreuve finale (durée 1h30mn)

<u>Exercice 1</u> (7 pts)

1) a) Le champ électrique au point M

$\vec{E}_{\mathrm{M}} = \vec{E}_A(\mathrm{M}) + \vec{E}_B(\mathrm{M})$ 0.25

$\vec{E}_{\mathrm{A}}(\mathrm{M}) = E_{Ax}\,\vec{\imath} + E_{Ay}\,\vec{\jmath}$, $\vec{E}_{\mathrm{B}}(\mathrm{M}) = E_{By}\,\vec{\jmath}$

$E_{Ax} = -\left|\vec{E}_A(\mathrm{M})\right| \sin\alpha$, $E_{Ay} = \left|\vec{E}_A(\mathrm{M})\right| \cos\alpha$, $E_{By} = \left|\vec{E}_B(\mathrm{M})\right|\,\vec{\jmath}$ 0.25x3

$\left|\vec{E}_A(\mathrm{M})\right| = \frac{K|q_A|}{d_1^2} = \frac{Kq}{d_1^2}$, $\left|\vec{E}_B(\mathrm{M})\right| = \frac{K|q_B|}{d_2^2} = \frac{Kq}{d_2^2}$ 0.25x2

$d_1^2 = (3a)^2 + (4a)^2 = 25a^2$, $d_2^2 = 25a^2$, $\cos\alpha = \dfrac{4a}{d_1} = \dfrac{4}{5}$, $\sin\alpha = \dfrac{3a}{d_1} = \dfrac{3}{5}$ 0. 5

$\vec{E}_{\mathrm{M}} = -\frac{Kq}{25\,a^2}\,\frac{3}{5}\,\vec{\imath} + \frac{Kq}{25\,a^2}\,\frac{4}{5}\vec{\jmath} + \frac{Kq}{25\,a^2}\,\vec{\jmath}$ 0. 5

$\vec{E}_{\mathrm{M}} = \left(-6\times 10^3\ \vec{\imath} + 18\times 10^3\ \vec{\jmath}\right)(V/m)$ 0.25

b) Le potentiel au point M

$\mathrm{V_M} = V_{\mathrm{A}}(\mathrm{M}) + V_B(\mathrm{M}) = \frac{Kq_A}{5a} + \frac{Kq_B}{5a}$ 0.5

$\mathrm{V_M} = 2Kq\,\frac{1}{5a}$ 0.25 $\mathrm{V_M} = 3\times 10^3\ \mathrm{Volt}$ 0.25

2) a) La Force électrostatique exercée sur Q

$\vec{F} = Q\vec{E}_{\mathrm{M}} = \left(-6\ \times 10^{-6}\ \vec{\imath} + 18\times 10^{-6}\vec{\jmath}\ \right)(N)$ 0.25x2

b) L'énergie potentielle de la charge Q

$E_p = Q\ \mathrm{V_M} = Q\left[2Kq\,\frac{1}{5a}\right] = 2KQq\,\frac{1}{5a} \Rightarrow E_p = 3\times\ 10^{-6}\mathrm{J}$ 0.25x2

c) L'énergie interne du système $q_A, q_B\ et\ Q$

$U = K\dfrac{q_A q_B}{\sqrt{10}a} + K\dfrac{q_A Q}{5a} + K\dfrac{q_B Q}{5a} = Kq^2\dfrac{1}{\sqrt{10}a} + KqQ\left(\dfrac{2}{5a}\right)$ 0.5

$U = 622{,}927\mathrm{x}\,10^{-7}\,J.$ 0.25

3) a) Le moment du couple du dipôle

$\vec{\tau} = \vec{P}\wedge\vec{E}_{\mathrm{M}} = -\left(P_y\,E_x\right)\vec{k} = 6\times 10^{-7}\vec{k}\ (N.m)$ 0.25x2

b) La position d'équilibre stable du dipôle correspond à son énergie pot

$E_p = -\vec{P}.\vec{E}_{\mathrm{M}} = -\left|\vec{P}\right|.\left|\vec{E}_{\mathrm{M}}\right|.cos(\vec{P},\vec{E})$ 0.5

$E_{p\,min} \Rightarrow cos(\vec{P},\vec{E}_{\mathrm{M}}) = 1 \Rightarrow (\vec{P},\vec{E}_{\mathrm{M}}) = 0$, soit $\vec{P}$ et $\vec{E}_{\mathrm{M}}$ parallèles et de même sens.

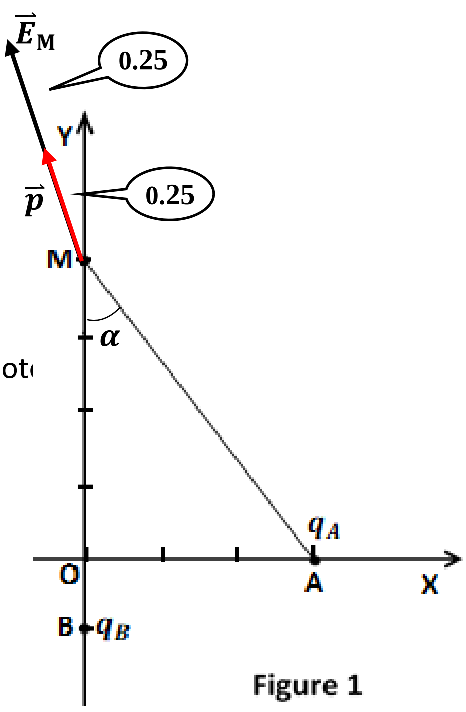


Figure 1

Exercice 2 (6 Pts)

1) Représentation des charges sur les deux sphères (figure 2). 0.5

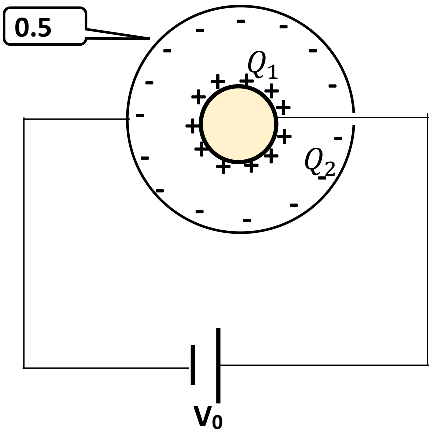


Figure 2

Relation entre Q_1 *et* Q_2 : $Q_1 = -Q_2$ à l'équilibre électrostatique à cause de l'influence entre les armatures.

2) Expression du vecteur champ électrique, $\vec{E}$, entre les deux armatures en utilisant le théorème de Gauss :

$$\iint_{S_G} \vec{E}\cdot\overrightarrow{dS} = \frac{\sum Q_{int}}{\varepsilon_0}$$ 0.25

$$\iint_{S_G} \vec{E}\cdot\overrightarrow{dS} = |\vec{E}|S_G$$ 0.25

Sachant que $S_G = 4\pi r^2$ et $\sum Q_{int} = Q_1$, on obtient :

$$|\vec{E}| = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$ 0.5

$$Le\ champ\ est\ radial\ et\ sortant\ de\ Q_1, \vec{E} = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\vec{u}_r$$ 0.25

0.25

3) $dV = -\vec{E}.\overrightarrow{dl} = -E.dr \Rightarrow \int_{V(R_1)}^{V(R_2)} dV = -\int_{R_1}^{R_2} E\,.dr = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{R_1}^{R_2}\left(-\frac{dr}{r^2}\right)$

$$\Rightarrow V(R_2) - V(R_1) = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right)$$ 0.5

La différence de potentiel entre les armatures du condensateur :

$$V_C = V(R_1) - V(R_2) = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{R_2 - R_1}{R_1R_2}$$ 0.5

4) Expression de la capacité **C** du condensateur : $V(R_1) - V(R_2) = V_0$ donc

$$C = \frac{Q_1}{V_0} = 4\pi\varepsilon_0\frac{R_1R_2}{R_2 - R_1} = 5\times 10^{-13}F$$ 0.5

5) Energie emmagasinée dans le condensateur

$U_0 = \frac{1}{2}CV_0^2 = 2{,}5\times 10^{-11}\,J$ 0.5

6) **a)** La capacité équivalente de l'association des deux condensateurs

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C} + \frac{1}{C'} = \frac{C + C'}{CC'} \Rightarrow C_{eq} = \frac{CC'}{C + C'}$$ 0.5

$$\Rightarrow C_{eq} = 2{,}5\times 10^{-13}F$$ 0.25

b) La charge accumulée dans le condensateur équivalent

$$V_0 = \frac{Q}{C_{eq}} \Rightarrow Q = V_0C_{eq} = 2{,}5\times 10^{-12}C$$ 0.5

L'énergie emmagasinée par le premier condensateur :

$$U_1 = \frac{1}{2}QV_0 = 1{,}25\times 10^{-11}J$$ 0.25

c) La valeur de U_1 est la moitié de celle de U_0. 0.25

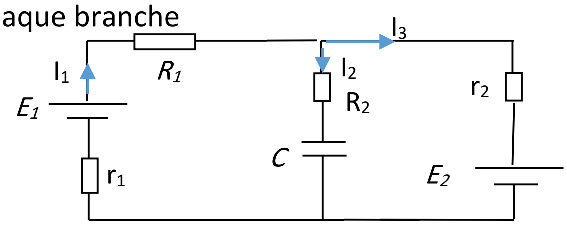
Conclusion : Pour la même tension, l'énergie emmagasinée dans un condensateur est proportionnelle à la capacité de ce dernier. 0.25

Exercice 3 (7pts)

Partie 1 :

1) La résistance R = (3 /8) R_2 0.25 $\Rightarrow$ R = 3 Ω 0.25

2) Calcul des intensités des courants I_1, I_2 et I_3 circulant dans chaque branche



Le condensateur entièrement chargé$\Rightarrow I_2 = 0$ 0.25

$I_1 = I_3 + I_2 = I_3$ 0.25

0.25x3

$(R_1 + r_1 + r_2)I_1 + E_2 - E_1 = 0 \Rightarrow I_1 = I_3 = \dfrac{E_2 - E_1}{(R_1 + 2r_1)} = 1\ A$

3) La d.d.p. V_C aux bornes du condensateur C : $V_C = E_1 - (R_1 + r_1)I_1 = 14\ V$ 0.25

4) Le générateur de f.e.m E_2 fonctionne comme un récepteur car $I_3 > 0$. 0.25

5) Bilan du circuit

Puissance fournie par le générateur de f.e.m E_1 : $P_G = E_1 I_1 = 20\ W$, 0.5

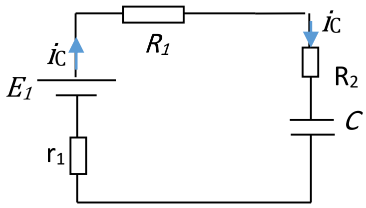
Puissance utile du générateur réversible de f.e.m E_2 : $P_u = E_2 I_3 = 13\ W$, 0.5

Puissance dissipée par effet Joule dans le circuit : $P_J = (R_1 + 2r_1){I_1}^2 = 7\ W$, 0.5

Bilan vérifié : $P_G = P_u + P_J = 20\ W.$ 0.25

Parie 2 : Le condensateur de capacité C est complètement déchargé. ***K₂*** ouvert et ***K₁*** fermé

1) L'équation différentielle régissant l'évolution de *q(t)* du condensateur :



$$\begin{cases} E_1 = (R_1 + R_2 + r_1)i_C + V_C \\ V_C = {}^{q}/_{C} \\ i_C = {}^{dq}/_{dt} \end{cases}$$ 0.25x3

$$On\ pose\ R_{eq} = R_1 + R_2 + r_1 \Rightarrow R_{eq}C\frac{dq}{dt} + q(t) = E_1 C$$ 0.5

2) L'expression de la charge *q(t)* solution de l'équation différentielle :

$$\frac{dq}{dt} + \frac{q}{R_{eq}C} = \frac{E_1}{R_{eq}} \Rightarrow R_{eq}C\frac{dq}{dt} = E_1 C - q(t) \Rightarrow \frac{dq}{(E_1 C - q(t))} = R_{eq}C\ dt$$

$$\Rightarrow -\ln\big(E_1 C - q(t)\big) = \big(R_{eq}C\big)t + Cste$$

$$\Rightarrow E_1 C - q(t) = B\ exp\left(-\frac{t}{R_{eq}C}\right) \quad avec\ \ B = e^{Cste} \Rightarrow q(t) = E_1 C - B\ exp\left(-\frac{t}{R_{eq}C}\right)$$

$$\Rightarrow \text{à } t = 0 : q(0) = 0 = E_1 C - B \Rightarrow B = E_1 C \ \Rightarrow q(t) = E_1 C\left[1 - exp\left(-\frac{t}{R_{eq}C}\right)\right]$$

$$q(t) = E_1 C\left[1 - exp\left(-\frac{t}{(R_1+R_2+r_1)C}\right)\right]$$ 0.5

3) Les expressions de **Q_f** et **τ** du circuit et leurs valeurs : L'analogie entre les deux expressions suivantes :

$$q(t) = E_1 C\left[1 - exp\left(-\frac{t}{(R_1 + R_2 + r_1)C}\right)\right] \quad et\ q(t) = Q_f\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$ 0.25

Conduit à $\begin{cases} Q_f = E_1 C = 40\ \mu C \\ \tau = (R_1 + R_2 + r_1)C = 28\ \mu s \end{cases}$ 0.5x2