

✂—Examen Final de Probabilités et Statistiques—✂

Exercice 1 (07.50 points) : On a relevé la température minimale (en °C) enregistrée dans une ville donnée pendant les jours de la période hivernale, les résultats sont rassemblés dans le tableau ci-dessous :

Températures	-4	2	3	4	6	7	10
Fréquences f_i	0.1	0.2	0.2	0.1	0.05	0.2	f_7

- Déterminer : L'étendu, les modalités, le caractère et sa nature.
- Calculer la valeur de f_7 .
- Tracer le polygone de la distribution et déterminer le mode.
- Tracer la courbe des fréquences cumulées décroissantes.
- Déterminer la fonction de répartition de cette distribution et tracer son graphe.
- Calculer la Médiane, l'écart type et l'intervalle interquartile.
- Quelle est la proportion de jours pour laquelle on a observé une température :
 - Inférieure ou égale à 3° ?
 - Supérieure à 4° ?

Exercice 2 (07.50 points) : Une enquête s'intéresse au nombre d'employés de 92 entreprises d'une zone industrielle. Pour cela, on a enregistré les résultats suivants :

Nombre d'employés	[10, 20[[20, 40[[40, 50[[50, 80[[80, 100[
Nombre d'entreprises	9	26	19	24	n_5

- Calculer la valeur de n_5 et donner sa signification.
- Représenter graphiquement cette distribution et calculer le mode.
- Déterminer la fonction de répartition de cette distribution et tracer son graphe.
- Calculer l'écart type, la médiane et déterminer l'intervalle interquartile.
- Quel est le nombre d'entreprises dont le nombre d'employés est supérieur ou égal à 50 ?

Exercice 3 (05.00 points) : Dans une assemblée de 250 personnes, 120 sont des hommes. Parmi les 85 personnes qui maîtrisent l'Anglais, 50 sont des hommes. On discute avec une personne choisie au hasard dans cette assemblée.

- Quelle est la probabilité que la personne soit un homme ?
- Quelle est la probabilité que la personne soit un homme et qu'elle maîtrise l'Anglais ?
- Quelle est la probabilité que la personne soit un homme ou qu'elle maîtrise l'Anglais ?
- Quelle est la probabilité que la personne ne soit pas un homme et ne maîtrise pas l'Anglais (répondre à cette question par deux manières différentes) ?
- Sachant que la personne choisie maîtrise l'Anglais, quelle est la probabilité qu'elle soit un homme ?

Une rédaction claire et rigoureuse est exigée

Corrigé Examen Probabilités - Statistiques

2018 - 2019

Exo 1 :

1) Déterminer :

L'étendu : $E = x_{(Max)} - x_{(Min)} = 10 - (-4) = 14$ 0,25

Modalités : $-4, 2, 3, 4, 6, 7, 10$ 0,25

Caractère : Température minimale 0,25

Nature : quantitative discrète 0,25

2) calcul de f_7 :

on a $\sum_{i=1}^7 f_i = 1 \Leftrightarrow (0,1 + 0,2 + 0,2 + 0,1 + 0,05 + 0,2 + \frac{f_7}{1}) = 1$

$\Leftrightarrow 0,85 + \frac{f_7}{1} = 1$

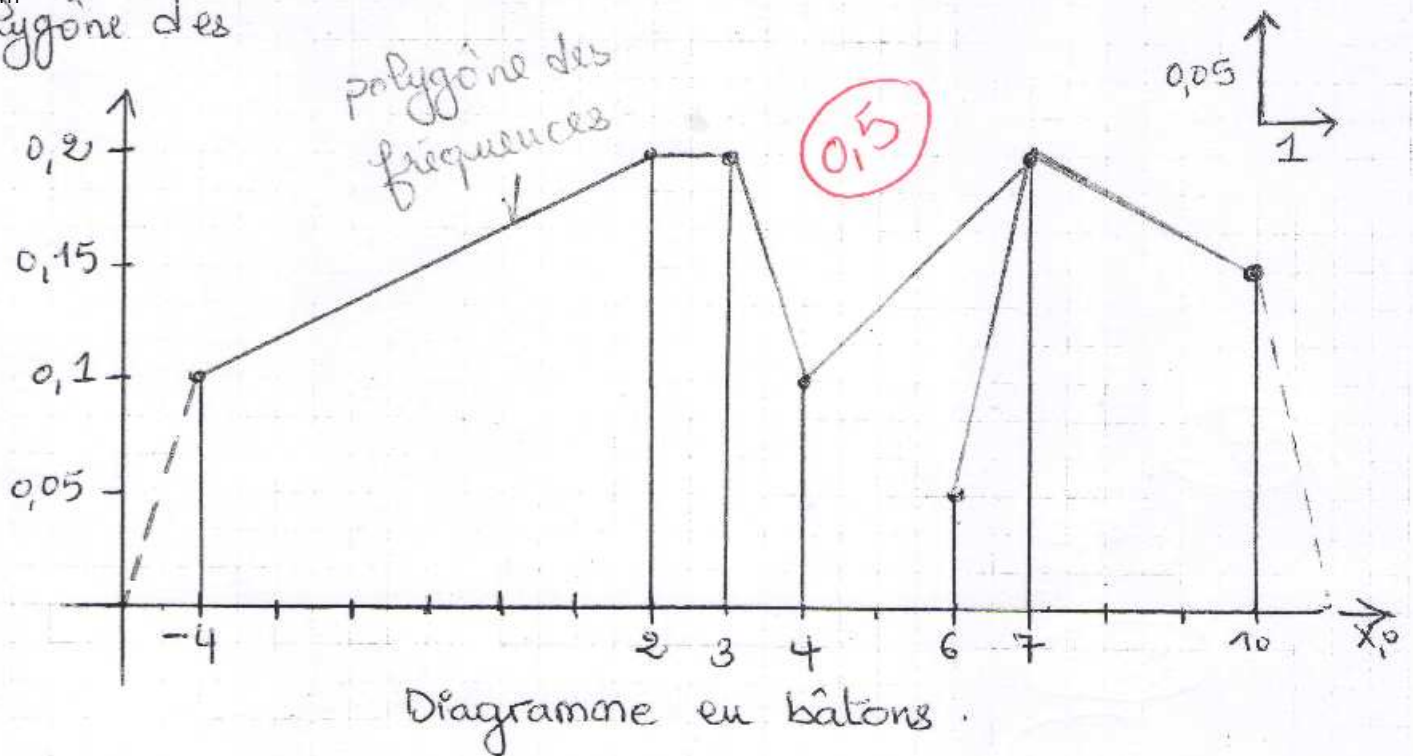
$\Leftrightarrow \frac{f_7}{1} = 1 - 0,85 = 0,15$

$\Leftrightarrow f_7 = 0,15$ 0,5

3) Tableau Statistique :

x_i	f_i	$F_i \uparrow$	$F_i \downarrow$	$f_i \cdot x_i$	$f_i \cdot x_i^2$
-4	0,1	0,1	1	-0,4	1,6
2	0,2	0,3	0,9	0,4	0,8
3	0,2	0,5	0,7	0,6	1,8
4	0,1	0,6	0,5	0,4	1,6
6	0,05	0,65	0,45	0,3	1,8
7	0,2	0,85	0,35	1,4	9,8
10	0,15	1	0,15	1,5	15
total	1	—	—	4,2	32,4

Polygone des



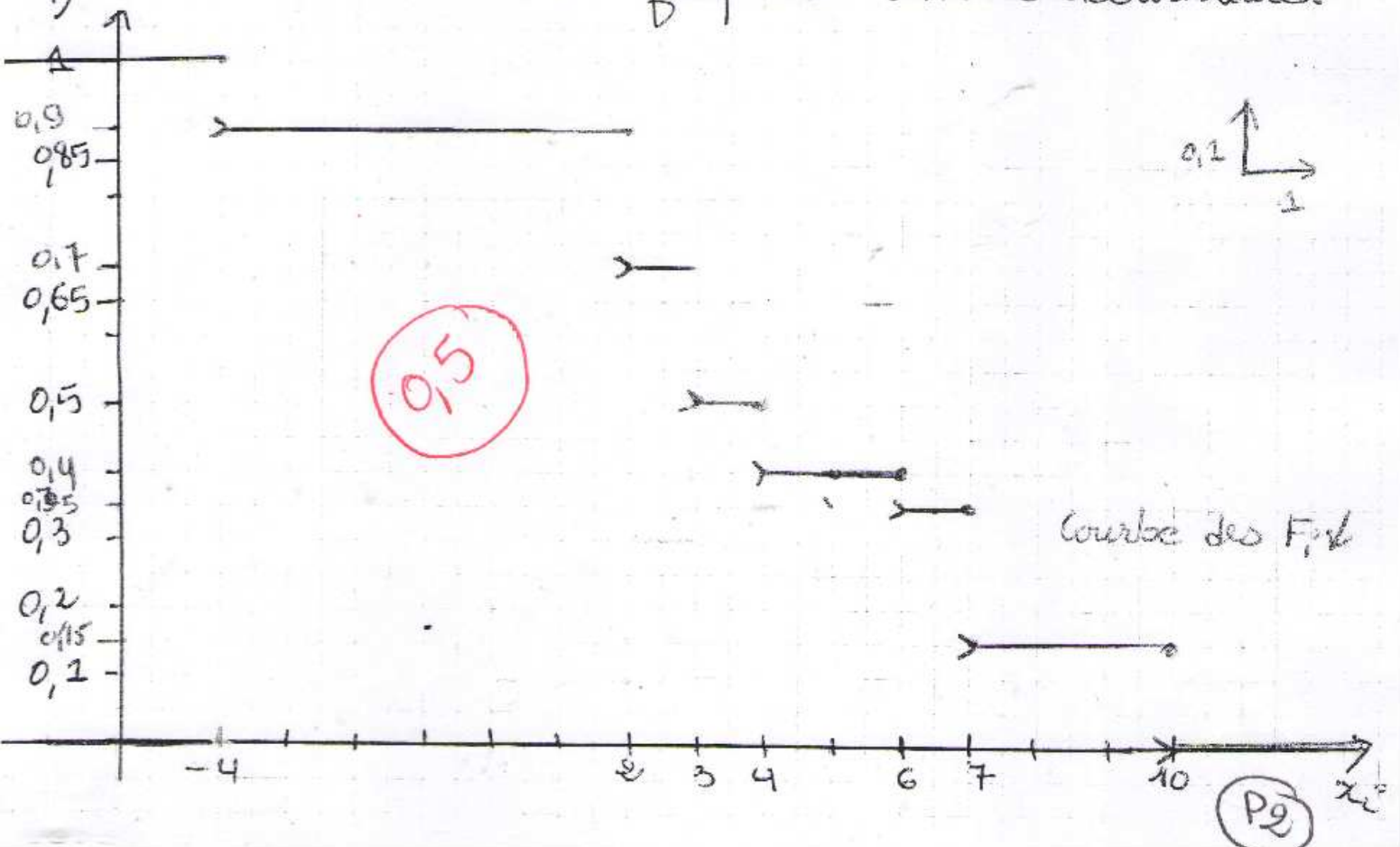
Déterminer le mode :

M_0 : La modalité qui a la plus grande fréquence.

$M_0 = 2$, $M_0 = 3$ et $M_0 = 7$ (0.75)

c'est une série trimodale.

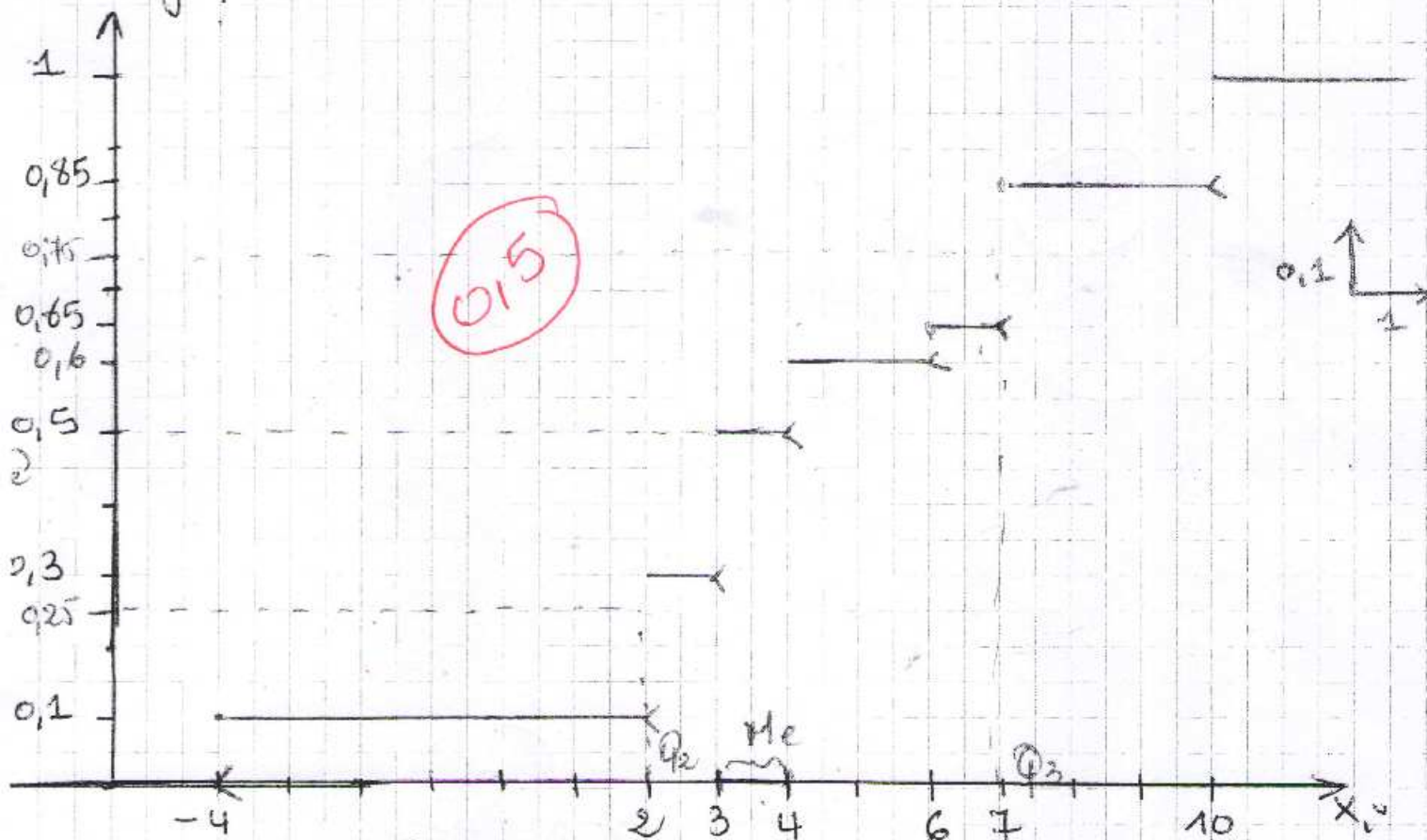
4) Tracer la courbe des fréquences cumulées décroissantes.



5) Déterminer la fonction de répartition :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < -4 \\ 0,1 & -4 \leq x < 2 \\ 0,3 & 2 \leq x < 3 \\ 0,5 & 3 \leq x < 4 \\ 0,6 & 4 \leq x < 6 \\ 0,65 & 6 \leq x < 7 \\ 0,85 & 7 \leq x < 10 \\ 1 & x \geq 10 \end{cases}$$

Le graphe de $F(x)$:



Graphique de la fonction de répartition

4) Calcul :

Médiane : $M_e = ?$ D'après le graphe de $F(x)$.

On a $F(M_e) = 0,5 \Rightarrow$ L'intervalle médian est $[3, 4[$

$$M_e = \frac{3+4}{2} = 3,5$$

(P3)

Ecart type :

Moyenne :

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \cdot x_i = \sum_{i=1}^7 f_i \cdot x_i = 4,2 \quad (0,25)$$

Variance :

$$V(x) = \sum_{i=1}^7 f_i \cdot x_i^2 - \bar{X}^2 = (32,4) - (4,2)^2 = 32,4 - 17,64 = 14,76 = 14,76 \quad (0,25)$$

Ecart type : $\sigma_x = \sqrt{V(x)} = \sqrt{14,76} = 3,84 \quad (0,25)$

L'intervalle interquartile :

$Q_1 = 2 \quad (0,25)$
 $Q_3 = 7 \quad (0,25)$ } d'après le graphe de $F(x)$

L'intervalle : $Q_3 - Q_1 = 7 - 2 = 5 \quad (0,25)$

7) La Proportion de jours pour laquelle on a observé une température :

a) inférieure ~~à~~ 3° ?
ou égale

$$\bar{F}_3 = F_1 + F_2 + F_3 = 0,1 + 0,2 + 0,2 = 0,5 \quad (0,5)$$

Donc il y a 50% de jours pour lesquels on a observé une température inférieure à 3°.

b) Supérieure à 4° ?

$$F_4 = F_7 + F_6 + F_5 = 0,15 + 0,2 + 0,05 = 0,4 \quad (0,5)$$

Donc il y a 40% de jours pour lesquels on a observé une température supérieure à 4°.

Exo 2 :

1) Calculer n_5 :

$$\text{on } \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^5 n_i = n \\ n = 92 \end{array} \right\} \Leftrightarrow 9 + 26 + 19 + 24 + n_5 = 92$$

$$\Leftrightarrow 78 + n_5 = 92$$

$$\Leftrightarrow n_5 = 92 - 78 = 14$$

$$n_5 = 14$$

0,25

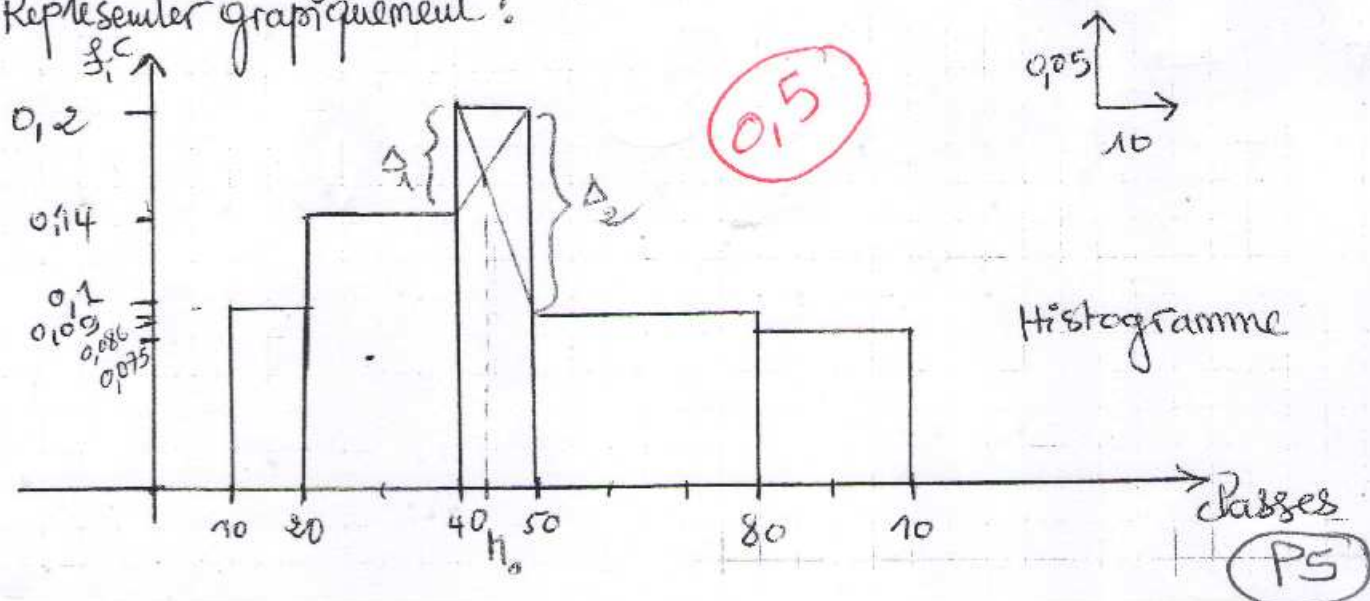
Sa signification :

$n_5 = 14$ signifie qu'il y a 14 entreprises dont le nombre d'employés est compris dans l'intervalle $[80, 100[$.

le Tableau Statistique :

Classes	n_i	f_i	a_i	x_i	f_i^c	F_i	N_i	$f_i x_i$	$f_i x_i^2$
$[10, 20[$	9	0,09	10	15	0,09	0,09	92	1,35	20,25
$[20, 40[$	26	0,28	20	30	0,14	0,37	83	8,4	252
$[40, 50[$	19	0,20	10	45	0,20	0,57	57	9	405
$[50, 80[$	24	0,26	30	65	0,086	0,83	38	16,9	1098,5
$[80, 100[$	14	0,15	20	90	0,075	1,1	14	13,5	1215
Total	92	1	—	—			0	49,5	2990,75

2) Représenter graphiquement :



Mode : $M_0 \in [40, 50[$ 0,25

$$M_0 = e_{i-1} + a \frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} = 40 + (10) \times \frac{(0,2 - 0,14)}{(0,2 - 0,14) + (0,2 - 0,08)}$$

$$= 40 + 10 \times \frac{0,06}{0,06 + 0,12} = 43,33$$

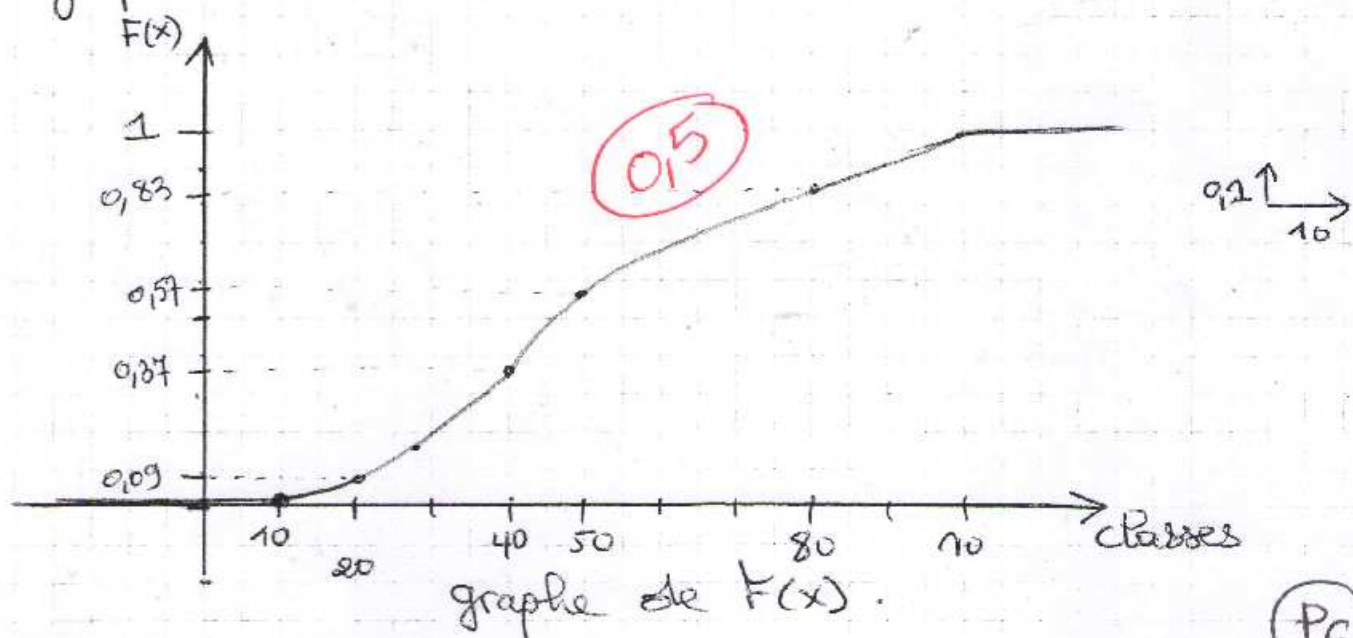
0,5

3) La Fonction de Répartition

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < e_0 \\ F(e_{i-1}) + \frac{f_i}{a_i} (x - e_{i-1}) & x \in [e_{i-1}, e_i[\\ 1 & x \geq e_k \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & x < 10 \\ 0 + \frac{0,09}{10} (x - 10) \checkmark & x \in [10, 20[\\ 0,09 + \frac{0,28}{20} (x - 20) \checkmark & x \in [20, 40[\\ 0,37 + \frac{0,20}{10} (x - 40) \checkmark & x \in [40, 50[\\ 0,57 + \frac{0,26}{30} (x - 50) \checkmark & x \in [50, 80[\\ 0,83 + \frac{0,15}{20} (x - 80) \checkmark & x \in [80, 100[\\ 1 & x \geq 100 \end{cases}$$

Le graphe de $F(x)$:



4) Calcul :

1) Ecart type :

$$\frac{\text{Moyenne}}{\bar{x}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^5 n_i x_i = \sum_{i=1}^5 f_i x_i = 49,15$$

0,25

Variance :

$$V(x) = \sum_{i=1}^5 f_i x_i^2 - \bar{x}^2 = 2990,75 - 2415,72$$

$$V(x) = 575,03$$

0,25

Ecart type :

$$\sigma_x = \sqrt{V(x)} = \sqrt{575,03} = 23,98$$

0,25

2) Médiane :

$$M_e \in [40, 50]$$

0,25

$$M_e = e_{i-1} + \frac{a_i}{f_i} (F(M_e) - F(e_{i-1}))$$

$$= 40 + \frac{10}{0,20} (0,50 - 0,37) = 46,5$$

0,25

3) L'intervalle interquartile :

$$Q_1 \in [20, 40]$$

0,25

$$Q_1 = e_{i-1} + \frac{a_i}{f_i} (F(Q_1) - F(e_{i-1})) = 20 + \frac{20}{0,28} (0,25 - 0,09) = 31,40$$

0,25

$$Q_3 \in [50, 80]$$

0,25

$$Q_3 = e_{i-1} + \frac{a_i}{f_i} (F(Q_3) - F(e_{i-1})) = 50 + \frac{30}{0,26} (0,75 - 0,57) = 70,7$$

0,25

D'où

$$Q_3 - Q_1 = 70,7 - 31,40 = 39,3$$

0,25

5) Le Nombre d'entreprises dont le nombre d'employés est

≥ 50 est

0,25

$$N_4 \checkmark = 38 \text{ entreprises (voir le tableau)}$$

P7

Exo 3 : $N = 250$ personnes

On a les événements suivants :

 H : « La personne est un homme » \bar{H} : « La personne est une femme » A : « La personne maîtrise l'anglais » \bar{A} : « La personne ne maîtrise pas l'anglais »

D'après les données on peut avoir le tableau suivant :

	A	\bar{A}	Total
H	50	70	120
\bar{H}	35	95	130
Total	85	165	250

$\text{Card}(\Omega) = 250$

$\text{Card}(H) = 120$

$\text{Card}(A) = 85$

1) Quelle est la probabilité que la personne soit un homme?

$$P(H) = \frac{\text{Nbre cas Favorables}}{\text{Nbre cas possible}} = \frac{120}{250} = 0,48$$

0,5

2) Quelle est la probabilité que la personne soit un homme et qu'elle maîtrise l'anglais?

$$P(H \cap A) = \frac{50}{250} = 0,2$$

0,5

3) Quelle est la probabilité que la personne soit un homme ou qu'elle maîtrise l'anglais?

P87

$$P(H \cup A) = P(H) + P(A) - P(H \cap A) \quad (0,5)$$

$$= \frac{120}{250} + \frac{85}{250} - \frac{50}{250} = \frac{155}{250} = 0,62 \quad (0,5)$$

4) Quelle est la probabilité que la personne ne soit pas un homme et ne maîtrise pas l'anglais?

1ère Méthode :

$$P(\bar{H} \cap \bar{A}) = 1 - P(H \cup A) = 1 - 0,62 = 0,38 \quad (0,5)$$

2ème Méthode :

$$P(\bar{H} \cap \bar{A}) = \frac{|\bar{H} \cap \bar{A}|}{|S|} = \frac{95}{250} = 0,38 \quad (0,5)$$

5) Sachant que la personne choisie maîtrise l'anglais, quelle est la probabilité qu'elle soit un homme.

$$P(H/A) = \frac{P(A \cap H)}{P(A)} = \frac{\frac{50}{250}}{\frac{85}{250}} = \frac{50}{85} = 0,58 \quad (1)$$

Puisque

$$P(A) = \frac{85}{250}$$