Université Abdelemalek Essaadi
ENSA Tanger

Introduction à la résolution des équations aux dérivées partielles

Pr. HAMI Youssef

Département de Mathématique et Informatique

10 *Décembre* 2021

Module : Maths pour l'ingénieur
Élément de Module : Analyse Numérique
Bibliographie :

- **Mathématiques Tout-en-un pour la licene 3. Jean-pierre Ramis et al.**
- **Claire David, Pierre Gosselet : Équations aux dérivées partielles. 2éme Edition Dunod 2015.**
- **H. Brezis. Analyse fonctionnelle : Théorie et applications. Collection Mathématiques appliquées pour la maitrise. Masson, Paris, 1983.**

Sommaire de l'élément de module

Chapitre 1 : Introduction à la résolution des équations aux dérivées partielles (EDP) :

- Équation des ondes ou des cordes vibrantes
- Équation de la chaleur

Chapitre 2 : Formulation variationnelle des EDP
Chapitre 3 : Méthodes de résolution numérique des EDP :

- Différences finies
- Éléments finis
- Volumes finis

Plan

Plan

Terminologie usuelle

Définition

Une équation aux dérivées partielles ou EDP est une équation reliant une fonction $u = u(x_1, .., x_n)$ à ses dérivées partielles

$$(E) \qquad F(u, x_1, .., x_n, \frac{\partial u}{\partial x_1}, .., \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x_1}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} ...) = 0$$

Une telle équation est dite d'ordre m quand elle contient au moins une dérivée partielle d'ordre maximum m.
L'équation (E) est dite :

- Linéaire : si F est linéaire en u et ses dérivées partielles.
- Semi-linéaire : si F est linéaire en ses dérivées partielles.
- Quasi-linéaire : si F est linéaire en sa dérivée partielle d'ordre m.
- Non-linéaire : si F n'est pas linéaire en au moins une dérivée partielle.

Classification des EDP d'ordre 2

Définition

L'EDP (E) est dite homogène si la fonction F est sans terme source ou sans second membre.

Définition

$$a(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} + 2b(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial^2 y} + G(u,x,y,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}) = 0$$

où a, b, c désignent des fonctions à deux variables x et y et G une focntion définie dans un ouvert de $\mathbb{R}^5$. Cette EDP est dite

1. hyperbolique si $b^2(x,y) - a(x,y)c(x,y) > 0$
2. parabolique si $b^2(x,y) - a(x,y)c(x,y) = 0$
3. elliptique si $b^2(x,y) - a(x,y)c(x,y) < 0$

Exemples

1. $\dfrac{\partial^2 u(x,y)}{\partial^2 x} = 0$ donne $u(x,y) = f(y)x + g(y)$
2. $\dfrac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y} = 0$ donne $u(x,y) = C(x) + D(y)$
3. $\dfrac{\partial^2 u(x,y)}{\partial^2 x} + u(x,y) = 0$ devient $v'' + v = 0$ si $v(x) = u(x,y)$
4. $\dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial^2 t} = \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial^2 x}$ Équation des cordes vibrantes (hyperbolique).
5. $\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial^2 x}$ Équation de la chaleur (parabolique).
6. $\dfrac{\partial^2 u(x,y)}{\partial^2 x} + \dfrac{\partial^2 u(x,y)}{\partial^2 y} = -f(x,y)$ Équation de Poisson (elliptique).

Conditions initiales et aux limites

Définition

- Une condition initiale est la valeur de la solution d'une équation d'évolution à l'instant initial.
- Une condition aux limites est une contrainte sur les valeurs que prennent les solutions des EDP sur une frontière du domaine d'étude.

Exemples de conditions au bord

- Condition de Dirichlet : $u = g$ sur une partie du bord $\partial\Omega$, où g est une fonction donnée.
- Condition de Neumann : $\frac{\partial u}{\partial n} = \nabla u.n = g$ où n est la normale exterieur unitaire à Ω.
- Condition de Robin (mixtes) : $\frac{\partial u}{\partial n} + \alpha u = g$ sur une partie du bord $\partial\Omega$.

Exemples d'EDP

Équation de transport (Évolution)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + c\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 & x \in \Omega = [0,1], t > 0 \\ u(0,x) = u_0(x) & \forall x \in \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(0,x) = u_1(x) & \forall x \in \Omega \end{cases}$$

La fonction u représente par exemple une quantité en x et à l'instant t transportée par une vitesse c.

Équation de Poisson (Stationnaire)

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{sur } \Omega \\ u = g & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Si $f = 0$ elle s'appelle l'équation de Laplace. u étant la densité volumique de charge, pour une région Ω de l'espace donnée.

Plan

Changement de variables

Principe

L'idée est de se ramener à une équation réécrite en variables u et v que l'on sait facilement à résoudre.

Exemple

On veut résoudre l'EDP :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = a, \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \text{ (avec } a \text{ est une constante)} \tag{1}$$

Utiliser le changement de variables :
$\phi(x,y) = (u,v) = (x+y, x-y)$, on a ϕ est une fonction de classe C^1. On obtient alors,

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = f\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right) = F(u,v)$$

Changement de variables

Par conséquent l'équation (1) s'écrit :

$$\frac{\partial F}{\partial v}(u, v) = \frac{a}{2}$$

Solution

Il existe une fonction g dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que

$$F(u, v) = \frac{a}{2}v + g(u)$$

Ce qui implique que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = F(x + y, x - y) = \frac{a}{2}(x - y) + g(x + y)$$

Méthode de séparation des variables

Principe

La méthode consiste à chercher une solution de l'équation qui s'écrit sous la forme d'un produit de focntion en chacune de ses variables.

Exemple

On considère l'EDP :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y), \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \tag{2}$$

On cherche une solution de l'équation sous la forme :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = F(x)G(y),$$

où F et G sont deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

Solution

L'équation (2) se réécrit donc sous la forme :

$$G(y)\frac{\partial F}{\partial x}(x) = F(x)\frac{\partial G}{\partial y}(y)$$

Alors $\exists c \in \mathbb{R}, \qquad F' = cF \quad et \quad G' = cG.$
On reconnait deux équations différentielles linéaires et homogènes du premier ordre :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = \lambda e^{c(x+y)}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

Remarques

- La solution par séparation de variables ne fournit qu'une solution particulière ou un ensemble de solutions particulières mais en aucun cas l'ensemble des solutions d'une EDP.
- Toute combinaison linéaire finie de ces solutions est aussi une solution.

Méthode de courbes caractéristiques

Principe

On considère l'EDP linéaire d'ordre 1 d'inconnue $u : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + a(t,x)\dfrac{\partial u}{\partial x} + b(t,x)u = f(t,x) & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(0,x) = g(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

où a, b, f et g des focnctions régulières données.
Soit $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ donnée. On appelle courbe caractéristique passant par (t_0, x_0) la solution (si elle existe) du problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = a(t, x(t)) & t > 0 \\ x(t_0) = x_0 & . \end{cases}$$

Méthode de courbes caractéristiques

Méthode

Pour $t \geq 0$, notons $v(t) = u(t, x(t))$ la réstriction de u à la courbe caractéristique. On a $v(t_0) = u(t_0, x_0)$

$$v'(t) = \partial_t u(t, x(t)) + a(t, x(t))\partial_x u(t, x(t))$$

- Si $\forall (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R},\ b(t, x) = f(t, x) = 0$ alors $v'(t) = 0$ d'où
$$v(t_0) = v(0) = u(0, x(0)) = g(x(0))$$
- Si $f(t, x) = 0$ alors $v'(t) + b(t, x(t))v(t) = 0$ donc
$$v(t) = g(x(0))e^{-\int_0^t b(s,x(s))ds}$$

Méthode de courbes caractéristiques

- Dans le cas général, on doit résoudre l'équation différentielle ordinaire (EDO)

$$v'(t) + b(t, x(t))v(t) = f(t, x(t))$$

Comme on connait la solution de l'équation homogène, il ne reste à calculer qu'une solution particulière de l'équation complète par la variation de la constante, et on trouve

$$v(t) = g(x(0))e^{-\int_0^t b(s,x(s))ds} + \int_0^t f(s, x(s))e^{\int_0^s b(r,x(r))dr}ds$$

Avec $x(s)$ par la solution du problème de Cauchy.

Exercices

$3, 4$ et 5 série 1.

Application

Équation de transport (Évolution)

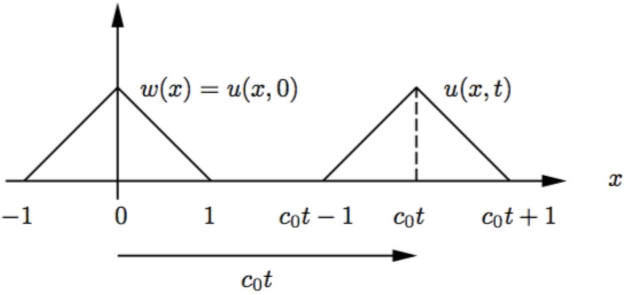
$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + c_0 \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 & x \in \Omega = \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x,0) = w(x) & \forall x \in \Omega \end{cases}$$

La fonction u représente par exemple une quantité en x et à l'instant t transportée par une vitesse c_0, et w étant la donnée initiale une fonction régulière définie sur Ω.
La solution est donnée par $u(x,t) = w(x - c_0 t)$.

Application

$$w(x) = \begin{cases} 1-x & \text{si } x \in [0,1], \\ 1+x & \text{si } x \in [-1,0], \\ 0 & \text{si } x \notin [-1,+1]. \end{cases}$$

Nous observons que la condition initiale w est transportée le long de l'axe Ox, à la vitesse c_0



Plan

Modèle (phénomène de propagation)

Introduction

On considère l'équation des ondes uni-dimensionnelle :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial^2 t} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} = 0, \quad \forall (t, x) \in]0, +\infty[\times \mathbb{R}$$

où $c > 0$. Cette équation décrit la propagation d'une onde. Par exemple la propagation d'une vague à la surface de l'océan ($u(t,x)$ est la hauteur de la vague au point x à l'instant t) ou la propagation d'un signal éléctrique dans un câble ($u(t,x)$ est la valeur du champ électrique au point x à l'instant t).

Par changement linéaire

$y = x + ct$ et $z = x - ct$, la solution (où ϕ et ψ de C^2)

$$u(t,x) = \phi(x+ct) + \psi(x-ct)$$

Formule d'Alembert

L'équation des ondes uni-dimensionnelle muni des conditions initiales, on supose que f est de classe C^2 et g de classe C^1,

$$u(0,x) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = g(x)$$

admet une unique solution de C^2 donnée par

$$u(t,x) = \frac{1}{2}[f(x-ct) + f(x+ct)] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)ds$$

Remarques

- Si f et g sont analytiques alors u l'est aussi, ces conditions ne provoque aucune régularisante.
- Si f et g sont à support compact alors u l'est aussi, ces conditions se propagent à vitesse finie c.

Modèle (phénomène de propagation)

Introduction

L'équation des ondes en $[0, L]$ s'écrit :

$$(Eq1) \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial^2 t} - c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial^2 x} = 0 & & x \in]0, L[, t > 0 \\ u(0, x) = f(x), & \dfrac{\partial u}{\partial t}(0, x) = g(x) & x \in [0, L] \\ u(t, 0) = 0, & u(t, L) = 0 & t \geq 0 \end{cases}$$

Elle modèlise la vibration d'une corde de longeur L tendue entre deux points. La constante c est la vitesse de propagation de l'onde et les fonctions f et g sont respectivement, l'état et la vitesse initiale. On supose que f est de classe C^2 et g de classe C^1.

Remarque

On a $f(0) = f(L) = 0$ et $g(0) = g(L) = 0$

Méthode de séparation des variables

On suppose que $\forall (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times [0,L], \quad u(t,x) = T(t) \times X(x)$
(Eq1) s'écrit

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}, \begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0 & X(0) = X(L) = 0 \text{ et } x \in [0,L] \\ T''(t) - \lambda c^2 T(t) = 0 & t \in \mathbb{R}^+ \end{cases}$$

Pour trouver une solution non nulle, $\lambda = \lambda_n = -(\frac{n\pi}{L})^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$
Enfin

$$\begin{cases} X_n(x) = B_n \sin(\frac{n\pi x}{L}) & x \in [0,L] \\ T_n(t) = C_n \cos(\frac{\pi nc}{L} t) + D_n \sin(\frac{\pi nc}{L} t) & t \in \mathbb{R}^+ \end{cases}$$

Par sommation formelle

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n \cos(\frac{\pi nc}{L} t) + b_n \sin(\frac{\pi nc}{L} t)] \sin(\frac{n\pi x}{L}) \qquad (3)$$

Lemme

Soit f une fonction de classe C^2 sur $[0, L]$ telle que $f(0) = f(L) = 0$. Alors elle est développée en série de Fourier

$$\forall x \in [0, L], \quad f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \sin(\frac{n\pi x}{L})$$

où

$$\forall n \geq 1, \quad a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin(\frac{n\pi x}{L}) dx$$

Remarque

On définit

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \in [0, L] \\ -f(-x) & x \in [-L, 0] \end{cases}$$

une fonction $2L$ périodique, impaire de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ sauf en $L\mathbb{Z}$.

Solution

Proposition

Soit f une fonction de classe C^2 sur $[0, L]$ tq $f(0) = f(L) = 0$. et soit g une fonction de classe C^1 sur $[0, L]$ telle que $g(0) = g(L) = 0$. On supoose de plus que $f''(0) = f''(L) = 0$ et $g'(0) = g'(L) = 0$. Alors l'équation de la corde $(Eq1)$ admet une unique solution u de classe C^2 sur $\mathbb{R}^+ \times [0, L]$ donnée par :

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{+\infty}[a_n \cos(\frac{\pi nc}{L}t) + b_n \sin(\frac{\pi nc}{L}t)] \sin(\frac{n\pi x}{L})$$

où $\forall n \geq 1$ et les coefficients de Fourier

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \sin(\frac{n\pi x}{L})dx,\ \ b_n = \frac{2}{n\pi c}\int_0^L g(x) \sin(\frac{n\pi x}{L})dx$$

Preuve

Si u est une solution de classe C^2, d'aprés le lemme on écrit :

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n(t) \sin(\frac{n\pi x}{L})$$

où

$$\forall n \geq 1, \quad A_n(t) = \frac{2}{L} \int_0^L u(t,x) \sin(\frac{n\pi x}{L}) dx$$

Par double IPP, on montre que cette fonction vérifie l'EDL :

$$A_n''(t) = -(\frac{cn\pi}{L})^2 A_n(t)$$

D'où

$$A_n(t) = a_n \cos(\frac{\pi nc}{L} t) + b_n \sin(\frac{\pi nc}{L} t)$$

Preuve

Inversement, on écrit $u(t,x) = v(t,x) + w(t,x)$ avec

$$\begin{aligned} v(t,x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(\frac{\pi nc}{L} t) \sin(\frac{n\pi x}{L}) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{2} [\sin(\frac{\pi n}{L}(x+ct)) + \sin(\frac{n\pi}{L}(x-ct))] \\ &= \frac{1}{2}[\tilde{f}(x+ct) + \tilde{f}(x-ct)] \end{aligned}$$

où $\tilde{f}$ est une focntion $2L$ périodique impaire de classe C^2 définit précédement (Lemme) et $\forall n \geq 1$,

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin(\frac{n\pi x}{L}) dx$$

Et par suite on vérifie que v est solution de l'équation des ondes.

Preuve

$$G(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^x g(y)dy & \text{si } x \in [0, L] \\ \displaystyle\int_0^{-x} g(y)dy & \text{si } x \in [-L, 0] \end{cases}$$

G est $2L$ périodique paire de classe C^2. Par IPP, le coefficient de Fourier :

$$\forall n \geq 1, \quad \frac{2}{L}\int_0^L G(x)\cos(\frac{n\pi x}{L})dx = -cb_n$$

$$\begin{aligned} w(t,x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(\frac{\pi nc}{L}t)\sin(\frac{n\pi x}{L}) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{2}[-\cos(\frac{\pi n}{L}(x+ct)) + \cos(\frac{n\pi}{L}(x-ct))] \\ &= \frac{1}{2c}[G(x+ct) + G(x-ct)] \end{aligned}$$

Et par suite on vérifie que w est solution de l'équation des ondes.

Modèle dans un milieu infini

Introduction

L'équation des ondes en $\mathbb{R}$ s'écrit :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial^2 t} - c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial^2 x} = 0 & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(0,x) = u_0(x) & x \in \mathbb{R} \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = u_1(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Elle modèlise la propagation d'une onde dans un milieu infini. La constante c est la vitesse de propagation de l'onde et les fonctions u_0 et u_1 sont respectivement, l'état et la vitesse initiale.
On s'intéresse aux solutions périodiques : $u(t,x) = u(t, x + L)$ avec L est la périodicité qui est une donnée. Les conditions initiales u_0 et u_1 sont supposées périodiques et admettent un développement en série de Fourier.

Analyse de Fourier

Solution

$$u_0(x) = \frac{a_{0,0}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{0,n} \cos(n\frac{2\pi}{L}x) + \sum_{n=1}^{\infty} b_{0,n} \sin(n\frac{2\pi}{L}x)$$

$$u_1(x) = \frac{a_{1,0}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{1,n} \cos(n\frac{2\pi}{L}x) + \sum_{n=1}^{\infty} b_{1,n} \sin(n\frac{2\pi}{L}x)$$

Supposons que la solution admet un développement en série de Fourier en x

$$u(t,x) = \frac{a_0(t)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \cos(n\frac{2\pi}{L}x) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \sin(n\frac{2\pi}{L}x)$$

On peut dériver cette série terme à terme, on a alors

Analyse de Fourier

Solution

$$\frac{\partial^2 u}{\partial^2 t} = \frac{a_0''(t)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n''(t)\cos(n\frac{2\pi}{L}x) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n''(t)\sin(n\frac{2\pi}{L}x)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} = -\sum_{n=1}^{\infty} a_n(t)(n\frac{2\pi}{L})^2\cos(n\frac{2\pi}{L}x) - \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t)(n\frac{2\pi}{L})^2\sin(n\frac{2\pi}{L}x)$$

Deux séries de Fourier sont égales alors tous les termes sont égaux

$$\begin{cases} a_0''(t) = 0 \\ a_0(0) = a_{0,0} \\ a_0'(0) = a_{1,0} \end{cases} \quad \begin{cases} a_n''(t) + \lambda_n^2 a_n(t) = 0 \\ a_n(0) = a_{0,n} \\ a_n'(0) = a_{1,n} \end{cases} \quad \begin{cases} b_n''(t) + \lambda_n^2 b_n(t) = 0 \\ b_n(0) = b_{0,n} \\ b_n'(0) = b_{1,n} \end{cases}$$

pour tout $n \geq 1$ et $\lambda_n = cn\frac{2\pi}{L}$

Analyse de Fourier

Solution

Les coefficients de Fourier sont alors donnés par

$$\begin{cases} a_0(t) = a_{1,0}t + a_{0,0} \\ a_n(t) = a_{0,n}\cos(\lambda_n t) + \frac{a_{1,n}}{\lambda_n}\sin(\lambda_n t) \\ b_n(t) = b_{0,n}\cos(\lambda_n t) + \frac{b_{1,n}}{\lambda_n}\sin(\lambda_n t) \end{cases}$$

La solution est donc

$$\begin{aligned} u(x,t) = \; & \tfrac{1}{2}(a_{1,0}t + a_{0,0}) + \\ & \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_{0,n}\cos(\lambda_n t) + \frac{a_{1,n}}{\lambda_n}\sin(\lambda_n t)\right)\cos\left(n\frac{2\pi}{L}x\right) + \\ & \sum_{n=1}^{\infty}\left(b_{0,n}\cos(\lambda_n t) + \frac{b_{1,n}}{\lambda_n}\sin(\lambda_n t)\right)\sin\left(n\frac{2\pi}{L}x\right) \end{aligned}$$

Plan

Modèle (phénomène de diffusion)

Introduction

L'étude de l'évolution de la température à l'intérieur d'une tige rectiligne, homogène, de section petite par rapport à la longueur que l'on suppose infinie se modélise par :
Notons $u(t,x)$ la température de la tige en l'abscisse x au temps $t > 0$. L'EDP associée à ce modèle s'appelle l'équation de la chaleur :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x}(t,x)$$

avec $a^2 = \frac{\lambda}{\rho c}$ où λ est la conductivité de la tige, ρ sa masse volumique et c sa chaleur spécifique.

Remarque

L'équation de la chaleur est une équation parabolique.

Solution élémentaire

Proposition

Une solution de l'équation de la chaleur sans conditions

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x}(t,x) = 0, \quad t > 0,\ x \in \mathbb{R}$$

est donnée par

$$u(t,x) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}exp(-\frac{x^2}{4a^2 t})$$

Remarque

Cette solution est la densité gaussienne autour de 0 et d'écart type $a\sqrt{2t}$.

$$\forall t > 0, \quad u(t,.) \sim N(0, a\sqrt{2t})$$

Solution_elem.png

Équation de la chaleur

Introduction

On considère l'équation de la chaleur uni-dimensionnelle :

$$(Eq2)\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \kappa \dfrac{\partial^2 u}{\partial^2 x} = 0 & x \in]0, L[, t > 0 \\ u(0, x) = f(x) & x \in [0, L] \\ u(t, 0) = u(t, L) = 0 & t \geq 0 \end{cases}$$

Elle modèlise l'évolution de la distribution de température dans un cable de longeur L. La constante κ est le coefficient de conductivité (plus κ est grand, plus vite la chaleur se diffuse). La fonction f représente l'état initiale et on suppose que f est de classe C^2 sur $[0, L]$.

Remarque

On a $f(0) = f(L) = 0$

Méthode de séparation des variables

On suppose que $\forall (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times [0,L], \quad u(t,x) = T(t) \times X(x)$
(Eq2) s'écrit

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}, \begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0 & X(0) = X(L) = 0 \text{ et } x \in [0,L] \\ T'(t) - \lambda \kappa T(t) = 0 & t \in \mathbb{R}^+ \end{cases}$$

Pour trouver une solution non nulle, $\lambda = \lambda_n = -(\frac{n\pi}{L})^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$
Enfin

$$\begin{cases} X_n(x) = B_n \sin(\frac{n\pi x}{L}) & x \in [0,L] \\ T_n(t) = C_n \exp(-\frac{\kappa \pi^2 n^2}{L^2} t) & t \in \mathbb{R}^+ \end{cases}$$

Par sommation formelle

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \exp(-\frac{\kappa \pi^2 n^2}{L^2} t) \sin(\frac{n\pi x}{L}) \tag{4}$$

Solution

Proposition

Si f une fonction de classe C^2 sur $[0, L]$ tq $f(0) = f(L) = 0$.
Alors l'équation de la chaleur $(Eq2)$ admet une unique solution u de classe C^1 telle $\dfrac{\partial^2 u}{\partial^2 x}$ est continue sur $\mathbb{R}^+ \times [0, L]$ donnée par :

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \exp\left(-\frac{\kappa \pi^2 n^2}{L^2} t\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

où $\forall n \geq 1$,

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

De plus, cette solution est de classe C^∞ dans $]0, +\infty[\times[0, L]$

Méthode de séparation des variables

Preuve

Si u est une solution de (Eq2), d'aprés le lemme on écrit :

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n(t) \sin(\frac{n\pi x}{L})$$

où

$$\forall n \geq 1, \quad A_n(t) = \frac{2}{L} \int_0^L u(t,x) \sin(\frac{n\pi x}{L}) dx$$

Par IPP, on montre que cette fonction vérifie l'EDL :

$$A_n'(t) = -(\frac{\kappa n^2 \pi^2}{L^2}) A_n(t)$$

D'où

$$\forall n \geq 1, \qquad A_n(t) = a_n \exp(-\frac{\kappa n^2 \pi^2}{L^2} t), \; a_n = A_n(0)$$

Méthode de séparation des variables

Preuve

Inversement, Les coefficients a_n sont bornés :

$$\sup_{n\geq 1} |a_n| \leq 2 \sup_{0\leq x\leq L} |f(x)|$$

Et donc les coefficients de Fourier de $u(t,x)$ décroit exponentiellement en n dés que $t>0$ ainsi que ceux des dérivées temporelles de $u(t,x)$.

$$\forall i \geq 0, \quad [a_n \exp(-\frac{\kappa n^2\pi^2}{L^2}t)]^{(i)} = a_n(-\frac{\kappa n^2\pi^2}{L^2})^i \exp(-\frac{\kappa n^2\pi^2}{L^2}t)$$

D'où u est de classe C^∞.
Et par suite on vérifie que u est solution de l'équation de la chaleur.

Remarque

Noter que u a la régularité de la fonction f à $t=0$, mais elle devient de classe C^∞ dés que $t>0$. L'équation de la chaleur est dite régularisante.

Merci pour votre attention