Exercice 1

Soit $k > 0$. On cherche la fonction u satisfaisant les relations suivantes:

$$\left\{\begin{array}{ll} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) - k\dfrac{\partial^2 u}{\partial^2 x}(x,t) = f(x,t) & \forall x \in]0,1[,\ \forall t > 0 \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 & \forall t > 0 \\ u(x,0) = w(x) & \forall x \in]0,1[\end{array}\right.$$

1. Soit N un entier naturel, $h = \dfrac{1}{N+1}$ et $x_j = jh$ pour tout $j \in \{0, 1, .., N+1\}$.
   Discrétiser par rapport à la variable x en utilisant la méthode de différences finies pour avoir:
   $$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{d\vec{u}(t)}{dt} + A\vec{u}(t) = \vec{f}(t) \quad \forall t > 0 \\ \vec{u}(0) = \vec{w} \end{array}\right.$$
   On note $\forall i \in \{1, .., N\},\ u_i(t) \approx u(x_i, t),\ \vec{u}(t) = (u_1(t), ..., u_N(t))^T$ et
   $$\vec{f}(t) = (f(x_1,t), ..., f(x_N,t))^T, \quad \vec{w} = (w(x_1), ..., w(x_N))^T$$

2. Soit $\tau > 0$ un pas de temps donné et on pose $t_n = n\tau$, pour $n \in \mathbf{N}$.
   Soit $\vec{u}^n$ une approximation de $\vec{u}(t)$ au temps t_n. Donner le schéma d'Euler progressif.
   Ce schéma est-elle explicite? En déduire une discrétisation complète du problème initial.

3. On suppose que f est nulle.
   (a) On fixe l'entier n et on suppose que $2k\tau \leq h^2$
   Montrer que si tous les u_i^n sont positifs, alors tous les u_i^{n+1} sont aussi positifs. Et
   $$\max_{1\leq i\leq N} |u_i^{n+1}| \leq \max_{1\leq i\leq N} |u_i^n|$$
   Cette relation garantit que le schéma d'Euler progressif trouvée en 2. est stable dés que $2k\tau \leq h^2$
   (b) On considère le cas où la condition initiale est définie par $w(x) = 1$ si $0 < x < 1$.
   On choisit $k = 1,\ N = 4$ et $\tau = \frac{1}{25}$ de sorte que $2k\tau > h^2$.
   Construire et représenter la solution numérique pour $n \in \{1, 2, .., 9\}$. En déduire que le schéma est numériquement instable.

Exercice 2

Soit $f \in \mathbf{L^2}(]\mathbf{0},\mathbf{1}[)$. On s'intéresse au problème suivant :

$$\left\{\begin{array}{ll} -u''(x) = f(x) & \text{si } x \in]0,1[\\ u(0) = u(1) = 0 & \end{array}\right.$$

Soit n un entier naturel, $h = \dfrac{1}{n+1}$, $x_i = ih$ pour $i \in \{0, 1, .., n+1\}$, et $K_i = [x_i, x_{i+1}]$ pour $i \in \{0, 1, .., n\}$. Soit

$$H_n = \{v \in C([0,1], \mathbf{R}) / \quad \mathbf{v}|_{\mathbf{K_i}} \in \mathbf{P_1},\ \forall \mathbf{i} \in \{\mathbf{0}, \mathbf{1}, .., \mathbf{n}\},\ \textbf{et } \mathbf{v(0) = v(1) = 0}\}$$

où P_1 désigne l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à 1.

1. Montrer que $H_n \subset H_0^1$.
2. Pour $i \in \{1,..,n\}$, on pose :

$$\phi_i(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{|x - x_i|}{h} & \text{si } x \in K_i \cup K_{i-1} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

   (a) Montrer que $\phi_i \in H_n$ pour tout $i \in \{1,..,n\}$

   (b) Montrer que H_n est engendré par la famille $\{\phi_1, ..., \phi_n\}$.

   (c) Quelle est la dimension de l'espace H_n

3. Donner le système linéaire obtenu en remplacant H par H_n dans la formulation faible. Comparer avec le schéma obtenu par différences finies.

<u>Exercice 3</u>

Soit $f \in \mathbf{L^2}(]\mathbf{0}, \mathbf{1}[)$. On s'intéresse au problème suivant :

$$\begin{cases} -u''(x) + u(x) = f(x) & \text{si } x \in]0,1[\\ u'(0) - u(0) = 0 \\ u'(1) = -1 \end{cases}$$

1. Ecrire une discrétisation du problème par différences finies pour un maillage non uniforme. Ecrire le système linéaire obtenu.
2. Ecrire une discrétisation du problème par volumes finies pour un maillage non uniforme. Ecrire le système linéaire obtenu.
3. Ecrire une discrétisation du problème par éléments finis conformes de type Lagrange P_1 pour un maillage non uniforme. Ecrire le système linéaire obtenu.