Préparation au Concours Cycle Polytechnicien
Filière universitaire : candidats internationaux
(O.Granier, ITC, du 24 au 29 octobre 2011)

TD corrigés d'électromagnétisme

1) Bobines de Helmholtz :

On considère une distribution de courants cylindriques autour de l'axe (Ozà qui crée un champ magnétique sur l'axe Oz colinéaire à cet axe.

1) Rappeler l'expression du champ créé par une spire de rayon a parcourue par une intensité I à la distance z du centre de cette spire sur l'axe de la spire.

2) On se place maintenant (tout en étant toujours à la côte z) à une distance r relativement faible de l'axe. En écrivant la conservation du flux du champ magnétique, montrer que le champ possède une composante radiale donnée par :

$$B_r = -\frac{r}{2}\frac{\partial B_z}{\partial z}$$

2) Champ électrique et champ magnétique :

Soit C un cylindre de révolution d'axe (Oz), de rayon a et de longueur très grande devant a. C, chargé uniformément avec la densité volumique ρ, est mis en rotation autour de (Oz) avec la vitesse angulaire ω (supposée indépendante du temps jusqu'à la dernière question) sans que cette rotation affecte la répartition des charges dans C.

a) Déterminer dans tout l'espace le champ électrique $\vec{E}$.

b) Déterminer dans tout l'espace le champ magnétique $\vec{B}$.

c) Déterminer de même un potentiel vecteur $\vec{A}$ du champ $\vec{B}$.

d) Que peut-on dire si ω varie dans le temps "pas trop rapidement" ? Quel est dans ce dernier cas l'intérêt du calcul de $\vec{A}$ fait en (3) ?

Solution :

a) On utilise la théorème de Gauss : (le champ électrique est radial)

Pour r > a : $2\pi rhE(r)=\frac{1}{\varepsilon_0}\pi a^2 h\rho \quad soit \quad E(r)=\frac{\rho}{2\varepsilon_0}\frac{a^2}{r}$

Pour r < a : $2\pi rhE(r)=\frac{1}{\varepsilon_0}\pi r^2 h\rho \quad soit \quad E(r)=\frac{\rho}{2\varepsilon_0}r$

On vérifie que le champ électrique est continu à la traversée du cylindre (en r = a).

b) On utilise le théorème d'Ampère : (le champ magnétique est selon l'axe du solénoïde et on sait qu'il est nul à l'extérieur). On choisit un contour rectangulaire dont un côté parallèle à l'axe est dans le solénoïde et un autre à l'extérieur. Alors :

$$B(r)=\mu_0\int_r^a \rho\omega r'dr'=\frac{\mu_0\rho\omega}{2}(a^2-r^2) \qquad \text{(Pour r < a)}$$

c) Le potentiel vecteur est défini par $\vec{B}=\overrightarrow{rot}\vec{A}$. Le calcul est identique au calcul du potentiel vecteur créé par un solénoïde classique infini.

On considère un solénoïde infini de section circulaire de rayon R, constitué de n spires jointives par unité de longueur et parcouru par un courant d'intensité I.

Le plan contenant l'axe du solénoïde et le point M étant un plan d'antisymétrie : $\vec{A}(M)=A(r)\,\vec{u}_\theta$

En prenant comme contour un cercle centré sur l'axe (Oz) et perpendiculaire à cet axe :

$$\oint_{(C)}\vec{A}.d\vec{\ell}=\iint_{(S)}\vec{B}.\vec{n}\,dS$$

On obtient : Si r > R : $2\pi rA(r)=\int_0^a\frac{1}{2}\mu_0\rho\omega(a^2-r^2)2\pi rdr=\pi\mu_0\rho\omega(\frac{a^4}{2}-\frac{a^4}{4})=\pi\mu_0\rho\omega\frac{a^4}{4}$,

soit :

$$A(r)=\mu_0\rho\omega\frac{a^4}{8r}$$

Si r < R :

$$2\pi rA(r)=\int_0^r\frac{1}{2}\mu_0\rho\omega(a^2-r'^2)2\pi r'dr'=\pi\mu_0\rho\omega(\frac{a^2r^2}{2}-\frac{r^4}{4})=\pi\mu_0\rho\omega\frac{1}{4}\left(2a^2-r^2\right)r^2$$

Soit : $$A(r)=\mu_0\rho\omega\frac{1}{8}\left(2a^2-r^2\right)r$$

On constate que le potentiel vecteur est continu à la traversée de la surface r = a du solénoïde.

d) Ces calculs restent valables dans l'ARQS et la connaissance du potentiel vecteur permet de traiter les problèmes d'induction faisant intervenir le champ électromoteur de Neumann, $-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$.

3) Condensateur alimenté à haute fréquence :

Un condensateur plan, constitué de deux plaques circulaires d'axe (Oz) et de rayon R, séparées par une distance e faible devant R, est alimenté par un générateur de tension sinusoïdale de pulsation ω.

a) Pour ce système à symétrie cylindrique, on écrira le champ électrique sous la forme :

$$\vec{E} = E(r)\cos\omega t\,\vec{u}_z$$

Quelle est l'équation différentielle vérifiée par la fonction E(r) ?

Déterminer la solution sous la forme d'une série entière développée en puissances de la variable sans dimension $x = \dfrac{r\omega}{c}$.

b) Pour $\omega = 20\,\pi\ MHz\ et\ R = 5\ cm$, que peut-on dire de la fonction E(r) à l'intérieur du condensateur ?

L'ARQS est –elle convenable ?

c) Que vaut le champ magnétique à l'intérieur du condensateur ?

Donnée : en coordonnées cylindriques, le laplacien d'une fonction $f(r,\theta,z)$ est :

$$\Delta f = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Solution :

a) Le champ électrique vérifie, en l'absence de courants et de charges :

$$\Delta\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0} \qquad soit \qquad \Delta E(r) + \frac{\omega^2}{c^2}E(r) = 0$$

Avec l'expression précédente du laplacien, il vient : $\dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dr}\left(r\dfrac{dE}{dr}\right) + \dfrac{\omega^2}{c^2}E = 0$

Soit : $\dfrac{d^2E}{dr^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{dE}{dr} + \dfrac{\omega^2}{c^2}E = 0$. On pose $x = \dfrac{r\omega}{c}$ et on cherche une solution de la forme (E_0, valeur du champ sur l'axe (Oz)) :

$$E(x) = E_0 + \sum_{n=1} a_n\, x^n$$

Alors : $\dfrac{dE}{dr} = \dfrac{dE}{dx}\dfrac{dx}{dr} = \dfrac{\omega}{c}\displaystyle\sum_{n=1} n a_n x^{n-1}$; $\dfrac{d^2E}{dr^2} = \dfrac{\omega}{c}\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\omega}{c}\displaystyle\sum_{n=1} n a_n x^{n-1}\right) = \dfrac{\omega^2}{c^2}\displaystyle\sum_{n=1} n(n-1)a_n x^{n-2}$

Et, par conséquent : $\dfrac{\omega^2}{c^2}\displaystyle\sum_{n=1} n(n-1)a_n x^{n-2} + \dfrac{\omega}{c}\dfrac{1}{x}\dfrac{\omega}{c}\displaystyle\sum_{n=1} n a_n x^{n-1} + \dfrac{\omega^2}{c^2}\displaystyle\sum_{n=1} a_n x^n = 0$

D'où : $\displaystyle\sum_{n=1} n^2 a_n x^{n-2} + \sum_{n=1} a_n x^n = 0$

Soit : $a_n = -\dfrac{a_{n-2}}{n^2}$

avec $a_1 = 0$ (diverge en 0 sinon).

La solution recherchée est donc de la forme : $E(r) = E_0 \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{2^{2p}(p!)^2}\left(\frac{r\omega}{c}\right)^{2p}$

b) On pose $X = \frac{R\omega}{c} = 10^{-2}$; le champ peut s'écrire : $E(r) = E_0 \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{2^{2p}(p!)^2}\frac{1}{X^{2p}}\left(\frac{r}{R}\right)^{2p}$

Le champ est pratiquement uniforme à l'intérieur du condensateur et vaut : $E(r) = E_0$

L'ARQS est bien vérifiée ; en effet, les retards sont bien négligeables vis-à-vis du temps caractéristique T :

$$\Delta t \approx \frac{R}{c} = 1{,}67.10^{-10}\ s << T = \frac{2\pi}{\omega} = 10^{-7}\ s$$

Par contre, si $X \in [1,10]$, les termes de la série donnant E(r) ne sont pas négligeables et le champ E(r) n'est plus uniforme.

c) Dans le condensateur, le champ magnétique est, pour ce problème à géométrie cylindrique, de la forme :

$$\vec{B} = B(r,t)\,\vec{u}_\theta$$

Le théorème d'Ampère généralisé indique que la circulation du champ magnétique sur un cercle de rayon r (r < R) et d'axe (Oz) est égale au flux du courant de déplacement à travers le disque correspondant, multiplié par μ_0 :

$$2\pi\ r\ B(r,t) = \mu_0\ \pi\ r^2\ \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} = \mu_0\ \pi\ r^2\ \varepsilon_0\ E(r)(-\omega \sin \omega t)$$

Soit : $\vec{B}(r,t) = -\frac{1}{2}\frac{\omega}{c^2} rE(r)\sin \omega t\ \vec{u}_\theta$

Si l'ARQS est vérifiée, alors $E(r) = E_0$ et : $\vec{B}(r,t) = -\frac{1}{2}\frac{\omega}{c^2} rE_0 \sin \omega t\ \vec{u}_\theta$

4) Energie magnétique stockée dans une bobine :

Une bobine de longueur ℓ, de rayon a et d'axe (Oz), est constituée par un enroulement de n spires circulaires jointives par unité de longueur. On utilisera pour l'étude qui suit l'approximation du solénoïde infini et on se place dans l'ARQS.

1) Déterminer le champ magnétique créé par la bobine parcourue par le courant I.

2) Quelle est l'énergie magnétique de la bobine ? En déduire la valeur de l'inductance L de la bobine.

3) La bobine est placée dans un circuit série avec une résistance R et un générateur de fém constante U_0. Déterminer l'expression I(t) du courant dans la bobine en fonction du temps.

4) Calculer les champs magnétique et électrique créés par la bobine en tout point à l'instant t.

5) Déterminer les densités volumiques d'énergies magnétique et électrique. Que peut-on dire du rapport de ces deux énergies ? Conclure.

6) Quelle est l'expression du flux du vecteur de Poynting à travers la surface délimitant le volume de la bobine ? Commentaires.

Solution :

1) Le champ magnétique est $\vec{B} = \mu_0 n I(t) \vec{u}_z$.

2) L'énergie magnétique s'écrit de deux manières :

$$\frac{B^2}{2\mu_0}(\pi a^2 \ell) = \frac{1}{2} L I^2 \qquad d'ou \qquad L = \mu_0 n^2 \ell \pi a^2 = 100\ mH$$

3) Classiquement : $I(t) = \frac{e}{R}(1 - \exp(-t/\tau)),\ \tau = \frac{L}{R}$.

4) On note $B_0 = \frac{\mu_0 n e}{R}$; à l'intérieur, $\vec{B} = B_0(1 - e^{-t/\tau})\vec{u}_z$. A l'extérieur, le champ est nul.

Le champ électrique est orthoradial (faire une étude de symétries) ; il dépend de r et du temps.

On applique le théorème de Stokes en prenant un cercle comme contour :

Si r < a : $\vec{E}(r,t) = -\mu_0 n \frac{r}{2} \frac{dI(t)}{dt} \vec{u}_\theta$

Si r > a : $\vec{E}(r,t) = -\mu_0 n \frac{a^2}{2r} \frac{dI(t)}{dt} \vec{u}_\theta$

L'énergie volumique magnétique vaut : $e_B = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{\mu_0 n^2 I^2}{2}$. L'énergie volumique électrique vaut, par exemple en r = a où elle est maximale : (en utilisant $\varepsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$)

$$e_E = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E(a)^2 = \frac{a^2 \mu_0 n^2}{8c^2}\left(\frac{dI}{dt}\right)^2$$

On évalue le rapport :

$$\frac{e_E(r=a)}{e_B} = \frac{a^2}{4c^2}\left(\frac{(dI/dt)}{I}\right)^2 = \frac{a^2}{4c^2}\frac{1}{\tau^2} \approx 1{,}7.10^{-5} \qquad (Avec\ R = 10\ k\Omega)$$

L'énergie électrique est négligeable ; dans l'ARQS, une bobine est essentiellement magnétique !

5) On évalue le vecteur de Poynting en r = a :

$$\Pi(a,t) = \frac{1}{\mu_0}\vec{E} \wedge \vec{B} = \frac{1}{\mu_0}\left(-\mu_0 n \frac{a}{2}\frac{dI(t)}{dt}\vec{u}_\theta\right) \wedge \left(\mu_0 n I \vec{u}_z\right) = -\frac{1}{2}\mu_0 n^2 a I(t) \frac{dI(t)}{dt}\vec{u}_r$$

Le flux entrant à travers la bobine est alors :

$$\Phi = \left(\frac{1}{2}\mu_0 n^2 a I(t)\frac{dI(t)}{dt}\right) 2\pi a \ell = L I(t)\frac{dI(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} L I^2\right)$$

Ce flux correspond bien à la variation de l'énergie emmagasinée sous forme magnétique par la bobine par unité de temps.

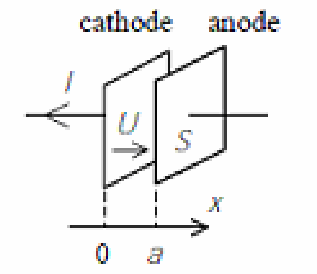
5) Diode à vide :

Une diode à vide est formée de deux plaques métalliques de surface S distantes de a. La cathode chauffée émet des électrons (de charge – e et de masse m) sans vitesse initiale. On s'intéresse au régime permanent. Les effets de bord sont négligés, le champ électrique E(x) et le potentiel V(x) sont uniformes dans une section. Le potentiel de la cathode est nul et la tension d'alimentation est U. Il existe une charge d'espace ρ(x).

a) Déterminer les relations liant V(x), la densité de courant j(x), ρ(x) et le courant I.

b) Déterminer l'équation différentielle vérifiée par V(x) dans la diode. La résoudre.

c) Tracer la caractéristique I = f(U) de ce dipôle.



d) Quelle est la puissance volumique fournie par le champ électrique aux charges en mouvement ? En déduire ka puissance totale volumique absorbée par la diode.

Solution :

a-b) En régime permanent, $div\vec{j} = 0,\ soit\ \frac{dj}{dx} = 0,\ donc\ j = cste = j_0$. Par ailleurs :

$$j = -j_0 = \rho(x)v(x) < 0 \quad ; \quad I = Sj_0 \quad ; \quad div\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad ; \quad \vec{E} = -\overrightarrow{grad}V \quad soit \quad \Delta V = \frac{d^2V}{dx^2} = -\frac{\rho(x)}{\varepsilon_0}$$

La conservation de l'énergie mécanique donne : $\frac{1}{2}mv(x)^2 - eV(x) = 0$. On en déduit $\rho(x) = \frac{j(x)}{v(x)} = -j_0\sqrt{\frac{m}{2e}}\sqrt{\frac{1}{V(x)}}$, d'où l'équation différentielle vérifiée par V(x) : $\frac{d^2V}{dx^2} = \frac{j_0}{\varepsilon_0}\sqrt{\frac{m}{2e}}\sqrt{\frac{1}{V(x)}}$. On cherche des solutions de la forme Ax^α :

$$\alpha = \frac{4}{3} \quad et \quad A = \left(\frac{9}{4}\frac{j_0}{\varepsilon_0}\sqrt{\frac{m}{2e}}\right)^{\frac{2}{3}}$$

c) En x = a, V(a) = U, d'où : $U = \left(\frac{9}{4}\frac{j_0}{\varepsilon_0}\sqrt{\frac{m}{2e}}\right)^{\frac{2}{3}} a^{\frac{4}{3}}$. Avec $j_0 = \frac{I}{S}$: $U = \left(\frac{9}{4}\frac{I}{S\varepsilon_0}\sqrt{\frac{m}{2e}}\right)^{\frac{2}{3}} a^{\frac{4}{3}}$, il vient :

$$I = \frac{4S\varepsilon_0}{9a^2}\sqrt{\frac{2e}{m}}\,U^{\frac{3}{2}}$$

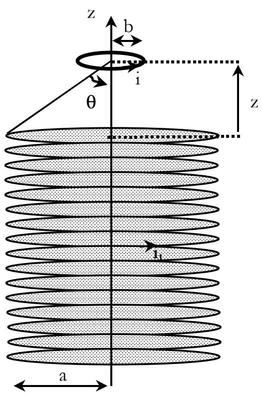
d) La puissance volumique est $p_v = jE = j_0 \dfrac{dV}{dx} = \dfrac{4}{3} A j_0 x^{\frac{1}{3}}$. La puissance totale est :

$$P = \iiint_{diode} p_v d\tau = S j_0 \int_0^a \frac{dV}{dx} dx = S j_0 U$$

6) Lévitation électromagnétique :

Un long solénoïde vertical (semi - infini) à section circulaire (de rayon a et possédant n spires jointives par unité de longueur) est parcouru par un courant d'intensité $i_1 = i_{1,m} \cos \omega t$. Une bobine circulaire constituée de N spires de rayon b << a, de résistance R, d'inductance L et de masse m, est placée au-dessus du solénoïde à une distance z de son extrémité. On repère la position de la bobine par l'angle θ.

a) Calculer la force magnétique moyenne $\langle F \rangle$ appliquée à la bobine. Pour quelle valeur i_{01m} de i_{1m} la spire peut-elle léviter, juste au-dessus du solénoïde, à la cote z ? L'équilibre est-il stable ?



b) Quelle est alors la puissance P_0 dissipée par effet Joule dans la bobine ?

c) Applications numériques :

$L = 0{,}7\ mH$; $R = 0{,}2\ \Omega$; $fréquence = 5\ kHz$; $b = 1\ cm$; $a = 3\ cm$; $mg = 0{,}3\ N$; $N = 100$; $n = 10^4\ spires.m^{-1}$

Comparer les valeurs de R et de Lω. Calculer i_{01m} et P_0.

Solution :

a) Il faut déterminer le courant dans la bobine. Pour cela, il faut déterminer la fém d'induction. Le champ magnétique créé par le solénoïde au niveau de la spire est (voir cours de sup) :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 n i_{1,m} \cos \omega t}{2}(1-\cos\theta)\vec{e}_z \qquad \text{(Avec } \tan\theta = \frac{a}{z}\text{)}$$

Le flux à travers la bobine vaut : $\Phi = \dfrac{\mu_0 n N \pi b^2}{2}(1-\cos\theta) i_{1,m} \cos \omega t$

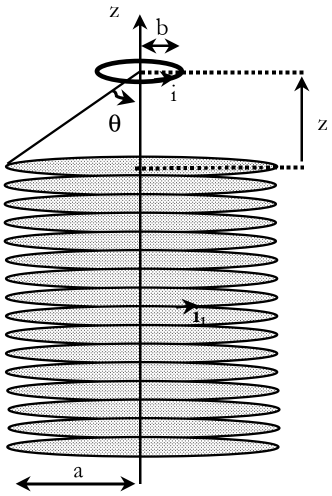
On peut définir le coefficient de mutuelle induction entre la spire et le solénoïde :

$$M = \frac{\mu_0 nN\pi b^2}{2}(1-\cos\theta) \qquad alors \qquad \Phi = Mi_{1,m}\cos\omega t$$

L'équation électrique de la bobine est alors : $Ri + L\frac{di}{dt} + M\frac{di_1}{dt} = 0$

On se place en régime sinusoïdal forcé : $i = I_m e^{j\omega t}e^{j\varphi}$. Alors :

$$Ri + jL\omega i + jM\omega i_1 = 0 \qquad \text{soit} \qquad I_m e^{j\varphi} = -\frac{jM\omega}{R+jL\omega}i_{1m} = \frac{M\omega}{jR-L\omega}i_{1m}$$



On en déduit :

$$I_m = \frac{M\omega}{\sqrt{R^2+L^2\omega^2}}i_{1m} \qquad \text{et} \qquad \tan\varphi = \frac{R}{L\omega} \quad (Avec\ \cos\varphi = -\frac{L\omega}{\sqrt{R^2+L^2\omega^2}} < 0)$$

La force de Laplace subie par la spire est, si l'on ne prend en compte que la coordonnée axiale du champ magnétique :

$$d\vec{f} = id\ell\vec{u}_\theta \wedge B\vec{u}_z = iBd\ell\vec{u}_r$$

Globalement, cette force résultante est nulle. On doit prendre en compte la coordonnée radiale du champ.

Le champ magnétique en dehors de l'axe est obtenu à partir de la conservation du flux magnétique : on prend pour cela un petit cylindre centré sur l'axe Oz, de hauteur dz et de rayon r faible :

$$\pi r^2\frac{dB_z(z,0)}{dz} + 2\pi rB_r(r,z) = 0 \qquad donc \qquad B_r(r,z) = -\frac{r}{2}\frac{dB_z(z,0)}{dz}$$

La force de Laplace est alors :

$$d\vec{f} = id\ell\vec{u}_\theta \wedge B_r\vec{u}_r = -iB_r d\ell\vec{u}_z \qquad soit \qquad \vec{F} = i\pi Nb^2\frac{dB_z(z,0)}{dz}\vec{u}_z$$

Or : $\frac{dB}{dz} = \frac{\mu_0 ni_{1,m}\cos\omega t}{2}\sin\theta\frac{d\theta}{dz}$

Or, $\dfrac{d\theta}{dz} = -\dfrac{1}{a}\sin^2\theta$ (Utiliser $\tan\theta = \dfrac{a}{z}$), d'où : $\dfrac{dB}{dz} = -\dfrac{\mu_0 n i_{1,m}\cos\omega t}{2a}\sin^3\theta$

La force devient : $\vec{F} = -\dfrac{\pi b^2 \mu_0 N n i i_{1,m}\cos\omega t}{2a}\sin^3\theta\,\vec{u}_z$

Soit : $\vec{F} = -\dfrac{\pi b^2 \mu_0 N n I_m i_{1,m}\cos\omega t\cos(\omega t+\varphi)}{2a}\sin^3\theta\,\vec{u}_z$

En valeur moyenne : ($\cos\omega t\cos(\omega t+\varphi) = \dfrac{1}{2}(\cos(2\omega t+\varphi)+\cos\varphi)$)

$$\left\langle \vec{F} \right\rangle = -\frac{\pi b^2 \mu_0 n N I_m i_{1,m}}{4a}\sin^3\theta\cos(\varphi)\vec{u}_z$$

Avec : $I_m = \dfrac{M\omega}{\sqrt{R^2+L^2\omega^2}} i_{1m}$ *et* $\cos\varphi = -\dfrac{L\omega}{\sqrt{R^2+L^2\omega^2}}$, il vient :

$$\left\langle \vec{F} \right\rangle = \frac{\pi b^2 \mu_0 n N M L \omega^2 i_{1m}^2}{4a(R^2+L^2\omega^2)}\sin^3\theta\,\vec{u}_z$$

C'est bien une force répulsive (dirigée vers le haut).

Juste au - dessus du solénoïde, $\theta = \pi/2$. La lévitation est possible si la force de répulsion est supérieure au poids :

$$\frac{\pi b^2 \mu_0 n N M L \omega^2 i_{1m}^2}{4a(R^2+L^2\omega^2)} > mg$$

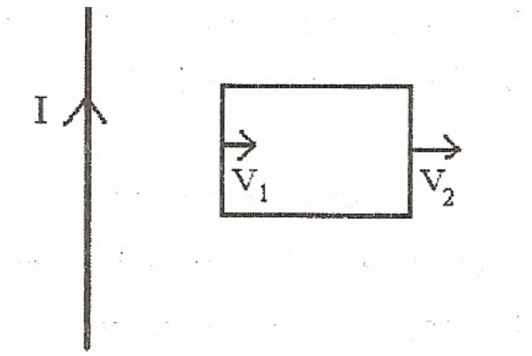
C'est un équilibre stable : si la masse monte, la force de répulsion diminue et la masse retombera. Idem si elle commence par descendre.

2) La puissance dissipée par effet Joule dans la bobine est :

$$P = R\frac{I_m^2}{2} = \frac{RM^2\omega^2}{2(R^2+L^2\omega^2)} i_{1m}^2$$

7) Induction de Lorentz :

Le fil infini est parcouru par un courant constant I.



2 barres conductrices verticales se déplacent sur deux rails conducteurs horizontaux fixes.

On note v_1 et v_2 les vitesses constantes des deux barres (avec v_1 plus petite que v_2).

On note r_{10} et r_{20} les distances des deux barres au fil à l'instant initial.

a) Déterminer le champ magnétique créé en tout point de l'espace par le fil infini.

b) Calculer la fém qui apparaît dans le cadre. On donnera deux méthodes.

8) Effet de peau dans un conducteur ohmique plongé dans un solénoïde :

Un solénoïde cylindrique d'axe (O,z) de rayon r_0 comportant n spires par mètre est parcouru par un courant variable dont l'intensité est $i(t) = I\cos(\omega t)$. On admet que le champ magnétique propre créé par le solénoïde est uniforme à l'intérieur ($r < r_0$) $\vec{B} = \mu_0 n i(t)\vec{u}_z$, nul à l'extérieur ($r > r_0$) et que le champ électrique est orthoradial $\vec{E} = E(r,t)\vec{u}_\theta$.

1. Déterminer le champ électrique $\vec{E}$ à l'intérieur du solénoïde.

2. On place un cylindre massif long de conductivité γ, de hauteur h et de rayon $r_1 < r_0$ à l'intérieur du solénoïde. Déterminer la densité de courant $\vec{j}$ créée par le champ électrique $\vec{E}$. Quel est l'effet observable associé à ces courants ?

3. En déduire le champ magnétique $\vec{B}_i$ créé sur l'axe par les courants et donner la condition sous laquelle ce champ (appelé champ induit) est négligeable devant celui créé par le solénoïde.

4. Si cette condition n'est pas vérifiée, indiquer sans justification la répartition des courants dans le cylindre.

Solution :

1) On utilise l'expression intégrale de l'équation de MF (obtenue avec le théorème de Stokes) :

$$\oint_{(C)} \vec{E}.d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt}\left(\iint_{(S)} \vec{B}.\vec{n}dS\right) = -\frac{d\Phi}{dt}$$

Avec les hypothèses de l'énoncé :

$$2\pi r E(r) = -\mu_0 n \frac{di}{dt}\pi r^2 \qquad soit \qquad \vec{E} = -\frac{\mu_0 n r}{2}\frac{di}{dt}\vec{u}_\theta$$

2) Loi d'Ohm locale : $\vec{j} = \gamma\vec{E} = -\frac{\gamma\mu_0 n r}{2}\frac{di}{dt}\vec{u}_\theta = \frac{\gamma\mu_0 n r}{2} I\omega\sin(\omega t)\vec{u}_\theta$.

Echauffement dû à l'effet Joule :

$$p_J = \vec{j}.\vec{E} = \frac{\gamma\mu_0^2 n^2 r^2}{4}\left(\frac{di}{dt}\right)^2$$

3) On a des solénoïdes emboîtés ; pour un solénoïde situé entre r et r + dr, le champ magnétique sur l'axe est :

$$d\vec{B}_i = \frac{\gamma\mu_0^2 n r}{2} I\omega\sin(\omega t)dr\vec{u}_z \quad et \quad \vec{B}_i = \frac{\gamma\mu_0^2 n}{2} I\omega\sin(\omega t)\vec{u}_z\int_0^{r_1} r dr$$

Finalement :

$$\vec{B}_i = \frac{\gamma \mu_0^2 n}{4} I \omega r_1^2 \sin(\omega t) \vec{u}_z$$

On évalue le rapport des deux champs magnétiques :

$$\frac{B_i}{\mu_0 n I} \approx \frac{\gamma \mu_0}{4} \omega r_1^2 << 1 \qquad si \qquad r_1 << \sqrt{\frac{4}{\mu_0 \gamma \omega}} = \sqrt{2}\delta$$

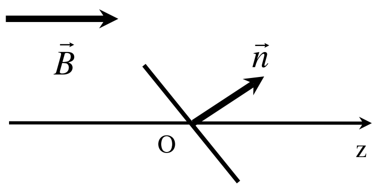
Soit r_1 << l'épaisseur de peau.

4) Sinon, on a effet de peau et le courant n'existe que sur la partie périphérique du cylindre de l'ordre de quelques δ.

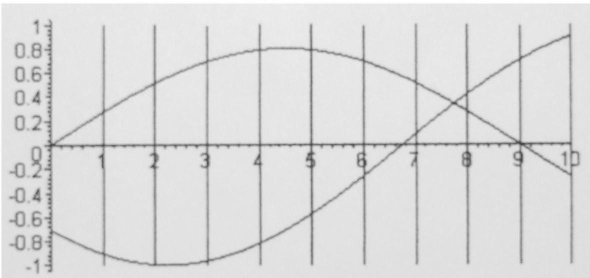
9) Bobine en mouvement dans un solénoïde :

Une bobine plate est constituée de N = 1 000 tours de fils enroulés sur un support circulaire de centre O et de rayon a = 0,1 m. Cette bobine est mise en rotation à vitesse angulaire ω autour de l'axe Oy au moyen d'un moteur électrique. La bobine est fermée sur elle même et placée dans un champ magnétique uniforme $\vec{B} = B_0 \vec{e}_z$, avec $B_0 = 0{,}01\,T$. La tension d'alimentation du moteur est $u(t) = E\cos\omega t$ et à t = 0, la normale à la bobine $\vec{n}$ est confondue avec $\vec{e}_z$. u(t) est de fréquence 50 Hz.

A un instant quelconque t la vue en coupe est donc la suivante :



On mesure l'intensité dans la bobine au moyen d'un multimètre utilisé en position AC dans la gamme 2 A. L'indication est 1,54 A.



A l'oscilloscope on observe u(t) ainsi qu'une tension proportionnelle au courant i(t) passant dans la bobine :

a) Pourquoi existe-t-il un courant dans la bobine ? Déterminer l'équation différentielle vérifiée par i(t).

b) À partir expérimentaux, calculer la résistance et l'inductance de la bobine.

c) La bobine maintenant alimentée par un générateur continu de fem E = 10 V est placée au centre d'un solénoïde très long caractérisé par n = 100 spires par mètre (le champ B_0 est supprimé). De même que précédemment, la bobine est en rotation autour de l'axe Oy. Calculer la tension qui apparaît aux bornes de la bobine.

Solution :

a) Il y a un courant par l'effet de la fem induite (flux variable). On obtient $e = Ri + Ldi/dt$ avec $e = -d\Phi/dt$, où $\Phi = B_0 N\pi a^2 \cos\omega t$, soit $e = \Phi_0\omega\sin\omega t$.

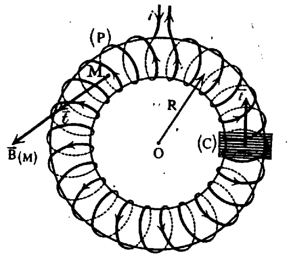
b) La solution en régime forcé est $i = I_0\cos(\omega t - \psi - \pi/2)$, avec $I_0 = \Phi_0\omega/\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}$ et $\tan\psi = L\omega/R$. i(t) est donc en retard par rapport à u(t). On mesure un déphasage de 6,75 carreaux, soit -135°, donc $L\omega/R = 1$. Ainsi, $I_{eff} = \Phi_0\omega/2R$. On trouve $R = 32\,\Omega$ *et* $L = 0{,}1\,H$.

c) La bobine est parcourue par I = E / R. Pour déterminer le flux à travers le solénoïde on utilise le coefficient de mutuelle M. Si i_0 est le courant dans le solénoïde, le flux dans le bobine est $\mu_0 n i_0 N\pi a^2\cos\omega t$. Donc $M = \mu_0 nN\pi a^2\cos\omega t$, le flux à travers le solénoïde devient $(\mu_0 nN\pi a^2\cos\omega t)I$ et le fem induite vaut :

$$e = \mu_0 nN\pi a^2\omega\frac{E}{R}\sin\omega t = 3{,}87\sin\omega t\ (V)$$

10) Inductance mutuelle :

Sur un tore engendré par la rotation d'un cercle de rayon a sont bobinées régulièrement N spires parcourues par un courant i. Sur cet enroulement (P) est constituée une bobine (C) comportant n spires de rayon a.



Calculer le coefficient d'inductance mutuelle M des deux enroulements (P) et (C).

Solution :

On calcule le flux envoyé par le champ magnétique créé par le tore sur la bobine : $\phi = Mi$

où i est le courant qui circule dans le tore.

Le théorème d'Ampère (voir cours de sup) permet de déterminer le champ créé par le tore à l'intérieur (il est nul à l'extérieur) : $\vec{B} = \frac{\mu Ni}{2\pi}\frac{1}{r}\vec{u}_\theta$

On suppose, pour simplifier les calculs, que le tore est mince de sorte que le champ magnétique soit uniforme $(r \approx R)$. Le flux à travers la bobine devient : $\phi = n\frac{\mu Ni}{2\pi}\frac{1}{R}\pi a^2 \quad d'où \quad M = \frac{\mu_0 Nna^2}{2R}$

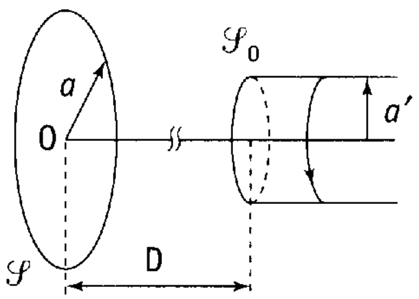
11) Quantité d'électricité induite :

(S) est une spire de centre 0 et de rayon a. Elle possède une résistance R et un coefficient d'auto-inductance L. (S_0) est un solénoïde « semi - infini », de rayon a', comportant n spires par unité de longueur. Les axes de (S) et (S_0) sont communs et le point O est situé à une distance D de la face d'entrée du solénoïde.

Dans toute la suite, on supposera que l'on a : D » a' et D » a.

Le coefficient de mutuelle entre (S) et (S_0) est donné par : $M = \dfrac{\mu_0 n \pi\, a^2 a'^2}{4\,D^2}$

On crée un courant I constant dans le solénoïde.



1. Déterminer la quantité totale d'électricité q qui aura traversé toute section du fil constituant la spire. Commenter.

2. On suppose que le courant I est créé à partir de t = 0 de façon « suffisamment rapide ». Préciser. Quelle est alors l'expression du courant i(t > 0) circulant dans La spire ? Commenter.

Solution :

1) Quand on crée le courant I dans le solénoïde, il apparaît un flux variable à travers la spire. On note i' le courant dans le solénoïde, variant de 0 à I sur une durée τ. Si i est le courant dans la spire (S), alors la fém qui se crée est :

$$e = -\frac{d\phi'}{dt} = -M\frac{di'}{dt} = Ri + L\frac{di}{dt}$$

On intègre entre 0 et τ :

$$-M\int_0^\tau di' = \int_0^\tau Ridt + \int_0^\tau Ldi = \int_0^\tau Rdq + \int_0^\tau Ldi$$

Soit, avec i(τ) = i(0) = 0 et i'(τ) = I :

$$-MI = Rq_{ind} \qquad soit \qquad q_{ind} = -\frac{M}{R}I$$

On remarque que $q_{ind} < 0$: le signe – est lié à i < 0 (loi de Lenz).

2) La spire est caractérisée par L et R (temps caractéristique $\tau_c = L/R$. On suppose que $\tau << \tau_c$. On repart de :

$$-M\frac{di'}{dt} = Ri + L\frac{di}{dt}$$

que l'on intègre entre 0 et $\tau = 0^+ << \tau_c$, afin d'obtenir en quelque sorte une condition initiale :

$$-MI = \int_0^\tau Ridt + L\big(i(\tau) - i(0)\big) \quad d'où \quad i(\tau) = -\frac{MI}{L}$$

On a considéré que $\int_0^\tau Ridt = Rq(\tau) \xrightarrow{\tau \to 0} 0$.

Pour $t > \tau = 0^+$, l'équation différentielle vérifiée par i est simplement :

$$Ri + L\frac{di}{dt} = 0 \quad d'où \quad i(t) = -\frac{MI}{L}e^{-t/\tau_c}$$

On peut retrouver la quantité de charge induite :

$$q_{ind} = -\frac{MI}{L}\int_0^\infty e^{-t/\tau_c}dt = -\frac{MI}{R}$$

12) Etude d'un haut-parleur :

On veut étudier un haut-parleur. On donne: la force de résistance de l'air - r $\vec{v}$, la force de rappel de la membrane - k $\vec{x}$, la tension U aux bornes des fils et le champ $\vec{B}$ créé par l'aimant dans l'entrefer.

1- Aspect qualitatif: comment ça marche ?

2- Pourquoi parle-t-on de couplage ?

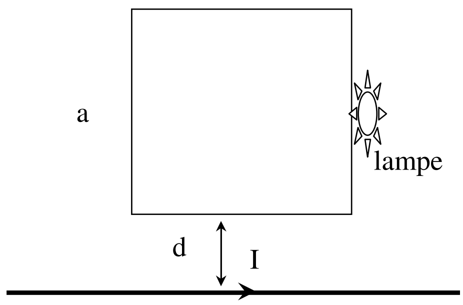
3- Déterminer l'équation différentielle reliant i, v et x.

4- Déterminer l'équation différentielle reliant i, v et U.

5- Que peut-on dire de la force électromotrice et de celle de Laplace ?

13) Allumage d'une ampoule :

Une bobine plate de section carrée de côté a est mise à proximité d'un fil haute tension parcouru par une intensité efficace I_{eff} (la fréquence est f). Une ampoule est ajoutée à une extrémité de la bobine et ne s'allume que pour une tension E > E_{seuil}.



Combien faut-il de spires à la bobine pour que la lampe s'allume ?

Solution :

Le champ magnétique créé par le fil est : $\vec{B} = \frac{\mu_0 I\sqrt{2}\cos\omega t}{2\pi}\frac{1}{r}\vec{e}_\theta$. Le flux de ce champ à travers la bobine est :

$$\Phi = Na\int_d^{d+a} B(r)dr = \frac{\mu_0 NaI\sqrt{2}\cos\omega t}{2\pi}\ln\frac{d+a}{d}$$

La tension efficace aux bornes de l'ampoule est :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} \quad d'où \quad E = \frac{\mu_0 \omega NaI}{2\pi}\ln\frac{d+a}{d} > E_{seuil}$$

14) Satellite en laisse :

Dans un article du journal "Le Monde", on annonce le lancement depuis la navette américaine Columbia d'un satellite italien. L'article apporte les informations suivantes :

- la navette est en orbite à une altitude de 296 km.

- elle "remorque" un satellite de masse 518 kg au bout d'un filin métallique de 2, 5 mm de diamètre et de 20 km de longueur, le satellite décrivant ainsi une orbite de rayon inférieur de 20 km à celui de l'orbite de Columbia.

- les ingénieurs espèrent que le déplacement du fil dans le champ magnétique terrestre permettra d'obtenir du courant électrique sous une tension de 5 000 V.

1- Analyser ces données et montrer qu'elles permettent d'estimer la valeur du champ magnétique qui règne dans la région où se déplace le fil.

Le résultat obtenu est-il cohérent avec vos connaissances sur le champ magnétique terrestre?

2- Dans le même quotidien, on apprend que le largage du satellite a été effectué le 25 février mais qu'il a été perdu au bout de quatre heures à la suite de la rupture du câble. Evaluer la tension T de celui-ci et discuter le résultat.

Solution :

1) Le champ électromoteur est $\vec{E}_m = \vec{v}\wedge\vec{B}$ et la fém induite vaut :

$$U \approx vB\ell \quad (\ell = 20\ km)$$

La vitesse du satellite sur une trajectoire circulaire est (h = 276 km) :

$$v = \sqrt{\frac{GM_T}{R_T+h}} = \sqrt{\frac{R_T^2 g_0}{R_T+h}} = 7,7\ km.s^{-1}$$

On en déduit $B = \frac{U}{\ell v} = 3,1.10^{-5}\ T$, compatible avec la valeur en France ($B_H = 2.10^{-5}\ T$).

2) On se place dans le référentiel de la navette, qui tourne à la vitesse angulaire :

$$m\omega^2 r = \frac{GmM_T}{r^2} \quad soit \quad \omega^2 = \frac{GM_T}{r^3}$$

Le satellite est à l'équilibre relatif :

$$0 = -T + \frac{Gm_s M_T}{(r-\ell)^2} - m_S \omega^2 (r-\ell)$$

Soit :

$$T = Gm_s M_T \left(\frac{1}{(r-\ell)^2} - \frac{1}{r^3}(r-\ell) \right) \approx Gm_s M_T \frac{1}{r^3}\left(r + 2\ell + r + \ell\right) = Gm_s M_T \frac{3\ell}{r^3}$$

Finalement :

$$T = m_s g_0 R_T^2 \frac{3\ell}{(R_T + h)^3} = 41,5\ N$$

Valeur trop faible pour avoir provoqué la rupture du câble