	Ecole Supérieure des Technologies de l'Informatique & du Numérique	**2020/2021**
	2ème année Classe Préparatoire	**Examen**
		Analyse 4

Exercice 1. (04 *points*) *Etudier la nature des séries suivantes:*

$$\sum_{n\geq 0}\frac{1}{\sqrt{n!}} \quad ; \sum_{n\geq 1}\left(\frac{1-(-1)^n}{n}\right) \quad ; \sum_{n\geq 1}\left(e^{\frac{1}{n}}-e^{\frac{1}{n+1}}\right)$$

Exercice 2. (04 *points*) *On pose*

$$f_n(x) = x(1-x)^n \,,\, x\in[0,1]$$

1. *Étudier la convergence simple de la série de fonctions* $\sum f_n$. *Calculer sa somme* $S(x)$.
2. *La série* $\sum f_n$ *est-elle uniformément convergente sur* $[0,1]$ *?*

Exercice 3. (06 *points*) *Soient* $\mathbb{R}_2[X]$ *l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égale à* 2 *et* $B=\{1,\ X,\ X(X-1)\}$ *une base de* $\mathbb{R}_2[X]$.

1. *Déterminer le rayon de convergence de la série entière* $\sum\limits_{n\geq 0}P(n)x^n$ *avec* $P\in\mathbb{R}_2[X]$.
2. *Montrer qu'ils existent* $\alpha_i\in\mathbb{R}$ *tel que*

$$\sum_{n\geq 0}P(n)x^n = \sum_{i=0}^{i=2}\alpha_i\frac{x^i}{(1-x)^{i+1}}$$

3. *Déduire la somme de la série* $\sum\limits_{n\geq 0}(n^2+n+1)x^n$.

Exercice 4. (06 *points*)*Soit la fonction* 2π- *périodique définie pour tout* $x\in[-\pi,\pi]$ *par*

$$f(x)=\sin\left(\frac{x}{2}\right)$$

1. *Tracer le graphe de* f.
2. *Déterminer la série de fourier associeé à* f.
3. *Déduire la somme de la série numérique suivante* $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{(2n+1)}{16n^2+16n+3}$.