Développer et factoriser

Développer

Développer une expression, c'est l'écrire sous la forme d'une somme.

Pour développer un produit, on utilise les règles de distributivités suivantes :

$$k(a+b) = k \times a + k \times b$$

$$(a+b)(c+d) = a \times c + a \times d + b \times c + b \times d$$

Exemples :

$$-2(3x-4) = -2 \times (3x) + (-2) \times (-4) = -6x + 8$$

$$(x-2)(3x+1) = x \times 3x + x \times 1 + (-2) \times 3x + (-2) \times 1 = 3x^2 + x - 6x - 2$$

$$= 3x^2 - 5x - 2$$

• Réduire une expression, c'est effectuer les sommes algébriques de même nature.

Exemples :

$$2x+1+3x^2-5x+2x^2=1+(2x-5x)+\left(3x^2+2x^2\right)=1-3x+5x^2$$

$$2-3x+2x+2x^2+2x^3-4-x^2+5x=(2-4)+(-3x+2x+5x)+\left(2x^2-x^2\right)+2x^3$$

$$=-2+4x+x^2+2x^3$$

• Ordonner c'est écrire dans l'ordre des puissances croissantes ou des puissances décroissantes.

Exemples :

$$2x+1-2x^2=-2x^2+2x+1$$

$$x^2-3x^3+5-4x=-3x^3+x^2-4x+5$$

Factoriser

Factoriser une expression, c'est l'écrire sous la forme d'un produit.

Un moyen de factoriser est de repérer un facteur commun et d'utiliser la formule déjà rencontrée :

$$k \times a + k \times b = k(a+b)$$

Exemples :

$\underline{2} - \underline{2}x = \underline{2}(1-x)$ 2 est un facteur commun.

$$\underline{(x+2)}(3x-1) + \underline{(x+2)}(x-5) = \underline{(x+2)}[(3x-1)+(x-5)]$$
$$= (x+2)(4x-6)$$

$x+2$ est un facteur commun.

$$\boxed{(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$$

Quand on utilise cette formule pour développer, ne pas oublier le double produit !

Exemples :

$$(x+3)^2 = x^2 + 2x \times 3 + 3^2 = x^2 + 6x + 9$$

$$(3x+4)^2 = (3x)^2 + 2 \times (3x) \times 4 + 4^2 = 9x^2 + 24x + 16$$

On peut aussi utiliser cette formule pour factoriser.

Exemples :

$$x^2 + 10x + 25 = x^2 + 2 \times x \times 5 + 5^2 = (x+5)^2$$

$$4x^2 + 12x + 9 = (2x)^2 + 2 \times 2x \times 3 + 3^2 = (2x+3)^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Quand on utilise cette formule pour développer, ne pas oublier le double produit !

Exemples :

$$(x-4)^2 = x^2 - 2x\times 4 + 4^2 = x^2 - 8x + 16$$

$$(4x-1)^2 = (4x)^2 - 2\times(4x)\times 1 + 1^2 = 16x^2 - 8x + 1$$

On peut aussi utiliser cette formule pour factoriser.

Exemples :

$$x^2 - 6x + 9 = x^2 - 2\times x\times 3 + 3^2 = (x-3)^2$$

$$9x^2 - 12x + 4 = (3x)^2 - 2\times 3x\times 2 + 2^2 = (3x-2)^2$$

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

On peut donc utiliser cette formule pour factoriser lorsque qu'on a une expression à deux termes, un seul signe moins et deux carrés.

Exemples : $9x^2 - 16 = (3x)^2 - 4^2 = (3x-4)(3x+4)$

$$(x+3)^2 - (2x-1)^2 = [(x+3)-(2x-1)][(x+3)+(2x-1)]$$
$$= (x+3-2x+1)(x+3+2x-1) = (-x+4)(3x+2)$$

On peut aussi utiliser cette formule pour développer.

Exemples : $(x-2)(x+2) = x^2 - 2^2 = x^2 - 4$

$$(3x-1)(3x+1) = (3x)^2 - 1^2 = 9x^2 - 1$$

On donne l'expression suivante :

$$E = (3x - 1)^2 - (3x - 1)(x + 4)$$

a) Développer E.

b) Factoriser E.

Exercice 1 : aide

Pour la question a, utiliser la deuxième identité remarquable et la distributivité.

Pour la question b, (3x-1) est un facteur commun…

Exercice 1 : solution

$E = (3x - 1)^2 - (3x - 1)(x + 4)$

a) Développer E.

$E = (3x - 1)^2 - (3x - 1)(x + 4)$
$E = (9x^2 - 6x + 1) - (3x^2 + 12x - x - 4)$
$E = 9x^2 - 6x + 1 - 3x^2 - 12x + x + 4$
$\mathbf{E = 6x^2 - 17x + 5}$

b) Factoriser E.

$E = (3x - 1)^2 - (3x - 1)(x + 4)$
$E = (3x - 1)[(3x - 1) - (x + 4)]$
$E = (3x - 1)[3x - 1 - x - 4]$
$\mathbf{E = (3x - 1)(2x - 5)}$

Exercice 2 : énoncé

On considère l'expression A(x) suivante :

$A(x) = (3x - 4)(x - 6) - (x - 6)(2x + 7) - 3x(x - 6).$

1. Développer, réduire et ordonner A(*x*).

2. Factoriser A(*x*).

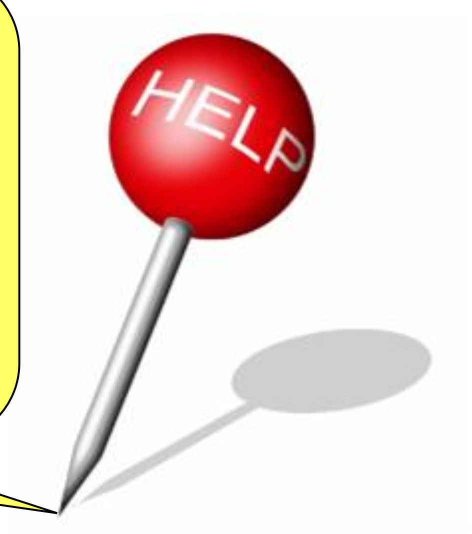
3. Calculer la valeur numérique de A lorsque *x* vaut 6.

Exercice 2 : aide

1. Pour cette question, utiliser la distributivité et faire attention aux signes moins devant les parenthèses !

2. x-6 est un facteur commun.

3. Il suffit de remplacer x par 6…



1. Développer, réduire et ordonner A(x).

$A(x) = (3x - 4)(x - 6) - (x - 6)(2x + 7) - 3x(x - 6)$
$A(x) = (3x^2 - 18x - 4x + 24) - (2x^2 + 7x - 12x - 42) - (3x^2 - 18x)$
$A(x) = 3x^2 - 18x - 4x + 24 - 2x^2 + 12x - 7x + 42 - 3x^2 + 18x$
$A(x) = \mathbf{-2x^2 + x + 66}$

2. Factoriser A(x).

$A(x) = (3x - 4)(x - 6) - (x - 6)(2x + 7) - 3x(x - 6)$
$A(x) = (x - 6)\,[(3x - 4) - (2x + 7) - 3x]$
$A(x) = (x - 6)\,(3x - 4 - 2x - 7 - 3x) = \mathbf{(x - 6)\,(-2x - 11)}$

3. Calculer la valeur numérique de A lorsque x vaut 6.

Lorsque $x = 6$, $A(x{=}6) = (6 - 6)(-12 - 11) = 0 \times (-23) = \mathbf{0}$

On donne l'expression de A suivante :

$$A = (2x - 10)(x + 4) - (x + 4)^2.$$

1. Développer et réduire A.

2. Factoriser A.

Exercice 3 : aide

Pour la question 1 : utiliser la première identité remarquable et faire attention aux signes négatifs…

Pour la question 2 : (x+4) est un facteur commun.

$A = (2x - 10)(x + 4) - (x + 4)^2.$

1. Développer et réduire A.

$A = (2x - 10)(x + 4) - (x + 4)^2$

$A = (2x^2 + 8x - 10x - 40) - (x^2 + 8x + 16)$

$A = 2x^2 + 8x - 10x - 40 - x^2 - 8x - 16$

$\mathbf{A = x^2 - 10x - 56}$

2. Factoriser A.

$A = (2x - 10)(x + 4) - (x + 4)^2$

$A = (x + 4)[(2x - 10) - (x + 4)]$

$A = (x + 4)[2x - 10 - x - 4]$

$\mathbf{A = (x + 4)(x - 14)}$

Soit l'expression : E = $x^2 - 4 - (x + 2)(3x - 5)$.

1. Développer E.
2. Calculer E lorsque $x = \frac{1}{2}$.
3. Factoriser $x^2 - 4$.
4. Factoriser E.

Exercice 4 : aide

1. Utiliser la distributivité et faire attention au signe négatif devant la parenthèse.
2. Remplacer *x* par ½.
3. Utiliser la 3ème identité remarquable.
4. Utiliser la question 3, et factoriser par *x*+2.

$E = x^2 - 4 - (x + 2)(3x - 5)$

1. Développer E.

$E = x^2 - 4 - (x + 2)(3x - 5)$
$E = x^2 - 4 - (3x^2 - 5x + 6x - 10)$
$E = x^2 - 4 - 3x^2 + 5x - 6x + 10$
$E = -2x^2 - x + 6$

2. Calculer E lorsque $x = \frac{1}{2}$.

$$E = -2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} + 6 = -2\times\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 6 = -\frac{2}{4} - \frac{1}{2} + 6 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 6 = -\frac{2}{2} + 6 = -1 + 6 = \mathbf{5}$$

3. Factoriser $x^2 - 4$.

$$x^2 - 4 = x^2 - 2^2$$
$$= (x + 2)(x - 2)$$

4. Factoriser E.

$$E = (x + 2)(x - 2) - (x + 2)(3x - 5)$$
$$E = (x + 2)[(x - 2) - (3x - 5)]$$
$$E = (x + 2)(x - 2 - 3x + 5)$$
$$E = (x + 2)(-2x + 3)$$

Simplifier les expressions suivantes :

$$A=\left(1+\sqrt{2}\right)^2$$

$$B=\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)^2+\left(\sqrt{15}-1\right)^2$$

$$C=\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)$$

Exercice 5 : aide

Pour A : utiliser la $1^{\text{ère}}$ identité remarquable.

Pour B : utiliser la $1^{\text{ère}}$ et la 2^{nde} identité remarquables.

Pour C : utiliser la $3^{\text{ème}}$ identité remarquable.

Exercice 5 : solution

$$A=\left(1+\sqrt{2}\right)^2=1^2+2\times1\times\sqrt{2}+\sqrt{2}^2=1+2\sqrt{2}+2=3+2\sqrt{2}$$

$$B=\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)^2+\left(\sqrt{15}-1\right)^2=\left(\sqrt{3}\right)^2+2\times\sqrt{3}\times\sqrt{5}+\left(\sqrt{5}\right)^2+\left(\sqrt{15}\right)^2-2\times\sqrt{15}\times1+1^2$$

$$B=3+2\sqrt{15}+5+15-2\sqrt{15}+1=24$$

$$C=\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)=\sqrt{2}^2-\sqrt{3}^2=2-3=-1$$

Pour chacune des expressions suivantes, effectuer le développement puis la factorisation.

$A = (3x + 1)(6x - 9) - (2x - 3)^2$

$B = (2x + 1)^2 - 64$

$C = 1 - (x - 2)^2$

$A = (3x + 1)(6x - 9) - (2x - 3)^2$

- **Développement :**

$A = 3x \times 6x - 3x \times 9 + 1 \times 6x - 1 \times 9 – ((2x)^2 - 2 \times 2x \times 3 + 3^2)$

$= 18x^2 - 27x + 6x – 9 – (4x^2 - 12x + 9)$

$= 18x^2 - 21x - 9 - 4x^2 + 12x - 9$

$\mathbf{A = 14x^2 - 9x - 18}$

- **Factorisation :**

$A = (3x + 1) \times 3 \times (2x - 3) - (2x - 3) \times (2x - 3)$

$A = (2x - 3) \times [3 \times (3x + 1) - (2x - 3)]$

$A = (2x - 3) \times [9x + 3 - 2x + 3]$

$\mathbf{A = (2x - 3)(7x + 6)}$

Exercice 6 : solution

$\boxed{B = (2x+1)^2 - 64}$

- **<u>Développement :</u>**

$$B = (4x^2 + 4x + 1) - 64 = 4x^2 + 4x - 63$$

- **<u>Factorisation :</u>**

$$B = (2x+1)^2 - 8^2 = (2x+1-8)(2x+1+8) = (2x-7)(2x+9)$$

$$\boxed{C = 1 - (x - 2)^2}$$

- **<u>Développement :</u>**

$$C = 1 - \left(x^2 - 4x + 4\right) = 1 - x^2 + 4x - 4 = -x^2 + 4x - 3$$

- **<u>Factorisation :</u>**

$$C = 1^2 - \left(x - 2\right)^2 = \left(1 - x + 2\right)\left(1 + x - 2\right) = \left(-x + 3\right)\left(x - 1\right)$$

Evaluons nous

1) Quel est le développement correct pour l'expression suivante : $(2x-1)^2$.

$a)\ 4x^2-1$

$b)\ 4x^2-4x+1$

$c)\ 4x^2+1$

Réponse :

b) $(2x-1)^2=4x^2-4x+1$ (Réponse obtenue grâce à la 2nde identité remarquable.)

En effet , l'expression est de la forme « $(a-b)^2$ » donc son développement sera de la forme « $a^2-2ab+b^2$ ».

2) Quel est la factorisation correcte pour l'expression suivante : $4x^2 - 25$.

$a)\left(2x-5\right)\left(2x+5\right)$

$b)\ \left(2x-5\right)^2$

$c)\left(4x-5\right)\left(4x-5\right)$

Réponse :

a) $4x^2 - 25 = (2x-5)(2x+5)$ (Réponse obtenue grâce à la 3ème identité remarquable.)

En effet, l'expression est de la forme « a^2-b^2 » donc sa factorisation sera de la forme « (a-b)(a+b) ».

3) Parmi les expressions proposées, indiquer laquelle est égale à : $(2x-1)(x-5)-(2x-1)^2$.

$a)\ (2x-1)(x-6)$

$b)\ (2x-1)(-x-4)$

$c)\ (2x-1)(-x-6)$

Réponse :

b) (En effet : $(2x-1)(x-5) - (2x-1)^2 = (2x-1)\,[\,(x-5) - (2x-1)]$

$= (2x-1)\,(-x-4)\,)$