Exercise 5

$$\|Ax - b\|_2, \ Cx = 0 \to \min$$

Lagrange multiplier

$$(Ax - b)^T (Ax - b) + \lambda^T Cx \to \min$$

$$x^T A^T b - 2b^T Ax + \lambda^T Cx$$

Продифф по x:

$$2A^T Ax - 2b^T A + \lambda^T C = 0$$

$$\cancel{2x - 2b^T A (A^T A)^{-1} \lambda^T C (A^T A)^{-1} = 0}$$

$\cancel{2x}$

По λ: $x^T C^T = 0$

$$2x^TA^TA - 2b^TA + \lambda^TC = 0$$

$$2x^T - 2b^TA(A^TA)^{-1} + \lambda^TC(A^TA)^{-1} = 0 \quad (*)$$

$$\overset{0}{\cancel{2x^TC^T}} - 2b^TA(A^TA)^{-1}C^T + \lambda^TC(A^TA)^{-1}C^T = 0$$

$$-2b^TA(A^TA)^{-1}C^T + \lambda^TC(A^TA)^{-1}C^T = 0$$

$$2b^TA(A^TA)^{-1}C^T = \lambda^TC(A^TA)^{-1}C^T$$

$$\Rightarrow \lambda^T = 2b^TA(A^TA)^{-1}C^T\left(C(A^TA)^{-1}C^T\right)^{-1}$$

Подставим в $(*)$

$$2x^T = -2b^TA(A^TA)^{-1} + 2bA(A^TA)^{-1}C^T\left(C(A^TA)^{-1}C^T\right)^{-1}C\cdot$$

$$x^T = b^TA(A^TA)^{-1}\left[\hat{1} - C^T\left(C(A^TA)^{-1}C^T\right)^{-1}C\cdot(A^TA)^{-1}\right]$$

$$x = \left[\hat{1} - (A^TA)^{-1}C^T\left(C(A^TA)^{-1}C^T\right)^{-1}C\right](A^TA)^{-1}A^Tb$$

//