به نام خدا

پاسخ تمرین سری **دوم** درس بهینه‌سازی

(نیمسال اول ۱۴۰۲)

۱- به سوالات زیر پاسخ دهید.

a) نشان دهید برنامه ریزی خطی زیر infeasible است.

$$\begin{array}{ll} maximize & 3x_1 - 2x_2 \\ subject\ to & x_1 + x_2 \leq 2 \\ & -2x_1 - 2x_2 \leq -10 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

b) نشان دهید برنامه ریزی خطی زیر unbounded است.

$$\begin{array}{ll} maximize & x_1 - x_2 \\ subject\ to & -2x_1 + x_2 \leq -1 \\ & -x_1 - 2x_2 \leq -2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

c) مثالی از برنامه‌ریزی خطی بزنید که feasible set نامحدود باشد ولی مقدار بهینه محدود است.

پاسخ:

a) اشتراک قیود داده شده تهی است یعنی feasible set تهی است یعنی مسأله infeasible است.

b) با رسم feasible set به راحتی می‌توان دریافت که با حرکت روی خط $-x_1 - 2x_2 = -2$ به طرف پایین-راست مقدار x_1 بیش‌تر و بیش‌تر می‌شود و مقدار x_2 کم و کم‌تر و بنابراین $p^* = +\infty$ یعنی مسأله unbounded است.

c)

$$\begin{array}{ll} minimize & x_1 + x_2 \\ subject\ to & -2x_1 + x_2 \leq -1 \\ & -x_1 - 2x_2 \leq -2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

۲- مساله‌ی LP زیر را درنظر بگیرید.

$$\begin{array}{ll} minimize & c^T x \\ subject\ to & Ax \preccurlyeq b \end{array}$$

در این مساله، بردار هزینه‌ی c، یک بردار تصادفی با توزیع نرمال است که میانگین آن $\boldsymbol{E}c = c_0$ و کواریانس آن $\boldsymbol{E}(c-c_0)(c-c_0)^T = \Sigma$ است (ماتریس A و بردارهای b و x قطعی هستند). براساس این تعریف، برای بردار مفروض $x \in \mathbb{R}^n$، مقداری که هزینه‌ی c^Tx به‌دست می‌دهد یک متغیر تصادفی گوسی است.

یک روش برای مواجهه با تصادفی بودن c^Tx، فرموله کردن مساله به‌صورت زیر است.

$$\begin{array}{ll} minimize & \beta \\ subject\ to & \boldsymbol{prob}(c^Tx \geq \beta) \leq \alpha \\ & Ax \preccurlyeq b \end{array}$$

در این مساله، α یک پارامتر با مقدار ثابت است که معمولا مقدار 0.01 برای آن درنظر گرفته می‌شود. آیا این مساله، یک مساله‌ی بهینه‌سازی محدب است؟ توضیح دهید.

پاسخ:

این مساله برحسب x محدب است.

با فرض آن‌که x ثابت باشد، c^Tx یک متغیر تصادفی است که دارای توزیع نرمال با میانگین c_0^Tx و واریانس $x^T\Sigma x$ است. بنابراین داریم:

$$prob(c^Tx \geq \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - c_0^Tx}{\left\|\Sigma^{\frac{1}{2}}x\right\|}\right),$$

که در آن $\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_x^\infty e^{-\frac{u^2}{2}}du$ است. این تابع یک تابع اکیدا نزولی است بنابراین:

$$prob(c^Tx \geq \beta) \leq \alpha \Leftrightarrow \left(\frac{\beta - c_0^Tx}{\left\|\Sigma^{\frac{1}{2}}x\right\|}\right) \geq \Phi^{-1}(\alpha) \Leftrightarrow \Phi^{-1}(\alpha)\left\|\Sigma^{\frac{1}{2}}x\right\| + c_0^Tx \leq \beta.$$

درصورتی که $\alpha \leq 0.5$ باشد، $\Phi^{-1}(\alpha) \geq 0$ خواهد بود. بنابراین این قید برحسب x محدب است. درنهایت براساس موارد گفته شده می‌توان مساله بهینه‌سازی مورد نظر را به‌صورت زیر نوشت:

$$\begin{array}{ll} minimize & \beta \\ subject\ to & \Phi^{-1}(\alpha)\left\|\Sigma^{\frac{1}{2}}x\right\| + c_0^Tx \leq \beta \\ & Ax \preccurlyeq b \end{array}$$

این مساله یک مساله محدب است که از یک تابع هدف خطی، یک قید نامساوی مرتبه دو و تعدادی قید نامساوی خطی تشکیل شده است.

۳- در این تمرین، یک مسأله بهینه‌سازی را به سه روش مختلف به صورت LP فرمول‌بندی می‌کنیم. شرکت آلفا سه نوع کاور مختلف برای محصولات اپل از جمله آی‌پاد، آی‌پد و آیفون تولید می‌کند. اگر همه امکانات شرکت را صرف تولید یک نوع کاور کنیم می‌توانیم روزانه ۶۰۰۰ کاور آی‌پاد یا ۵۰۰۰ کاور آیفون یا ۳۰۰۰ کاور آی‌پد تولید کنیم. تولید در پنج روز از هفته صورت می‌گیرد و قبل از توزیع باید در انبار ذخیره شود. بسته‌بندی ۱۰۰۰ کاور آی‌پاد به ۴۰ متر مکعب فضای انبارداری نیاز دارد. و همین طور بسته‌بندی ۱۰۰۰ کاور آیفون و آی‌پد به ترتیب ۴۵ و ۲۱۰ متر مکعب فضای انبارداری نیاز دارد. حداکثر فضای موجود ۶۰۰۰ متر مکعب است. شرکت آلفا موظف است حداقل ۵۰۰۰ کاور آی‌پاد و ۴۰۰۰ کاور آی‌پد در هفته تولید کند. واحد بازاریابی و فروش نیز تخمین زده است که تقاضا برای کاور آی‌پاد، آیفون و آی‌پد به ترتیب حداکثر ۱۰۰۰۰ و ۱۵۰۰۰ و ۸۰۰۰ واحد است و شرکت نمی‌خواهد بیش از این مقادیر تولید کند. در نهایت، سود خالص حاصل از فروش هر کاور آی‌پاد، آیفون و آی‌پد به ترتیب ۴ دلار، ۶ دلار و ۱۰ دلار است. هدف تعیین یک برنامه تولید هفتگی است که سود خالص کل را بیشینه کند.

a) یک فرمول‌بندی LP ارائه دهید که متغیرهای آن بخشی از زمان است که هر روز به تولید هر محصول اختصاص می‌یابد. به عبارت دیگر، x_1 بخشی از مدت زمان که به تولید کاور آی‌پاد اختصاص می‌یابد، و همین طور x_2 و x_3 بخشی از زمان که به تولید کاور آیفون و آی‌پد اختصاص می‌یابد.

b) یک فرمول‌بندی LP ارائه دهید که متغیرهای آن تعداد آیتم‌هایی است که در هفته از هر نوع تولید می‌شود. به عبارت دیگر، y_1 تعداد کاورهای آی‌پاد است که در طول هفته تولید می‌شود، و همین طور y_2 و y_3 تعداد کاورهای آیفون و آی‌پد است که در طول هفته تولید می‌شود.

c) یک فرمول‌بندی LP ارائه دهید که متغیرهای آن زمان مطلقی است که در هفته به تولید هر محصول اختصاص می‌یابد. به عبارت دیگر، z_1 زمان مطلقی است که به تولید کاور آی‌پاد در هفته اختصاص می‌یابد، و همین طور z_2 و z_3 زمان مطلقی است که به تولید کاور آیفون و آی‌پد در هفته اختصاص می‌یابد. هر روز کاری نیز شامل ۸ ساعت کاری است.

d) ارتباط بین متغیرهای x_1, x_2, x_3 از بند (a) و متغیرهای z_1, z_2, z_3 از بند (c) چیست؟ فرمولی برای محاسبه‌ی x_i از روی z_i ارائه دهید.

پاسخ:

(a

$$maximize\ 120000x_1 + 150000x_2 + 150000x_3$$

$$subject\ to$$

$x_1 + x_2 + x_3 \leq 1$: بیشینه تولید روزانه

$1200x_1 + 1125x_2 + 3150x_3 \leq 6000$: انبارداری

$30000x_1 \geq 5000$: کمینه تولید آی‌پاد

$15000x_3 \geq 4000$: کمینه تولید آی‌پد

$30000x_1 \leq 10000$: بیشینه تقاضای آی‌پاد

$25000x_2 \leq 15000$: بیشینه تقاضای آیفون

$15000x_3 \leq 8000$: بیشینه تقاضای آی‌پد

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

b)

$$maximize\ 4y_1 + 6y_2 + 10y_3$$

$$subject\ to$$

$\frac{1}{6000}y_1 + \frac{1}{5000}y_2 + \frac{1}{3000}y_3 \leq 5$: بیشینه تولید هفتگی

$0.04y_1 + 0.045y_2 + 0.21y_3 \leq 6000$: انبارداری

$y_1 \geq 5000$: کمینه تولید آی‌پاد

$y_2 \geq 4000$: کمینه تولید آی‌پد

$y_1 \leq 10000$: بیشینه تقاضای آی‌پاد

$y_2 \leq 15000$: بیشینه تقاضای آیفون

$y_3 \leq 8000$: بیشینه تقاضای آی‌پد

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

c)

$$maximize\ 3000z_1 + 3750z_2 + 3750z_3$$

$$subject\ to$$

$$z_1 + z_2 + z_3 \leq 40$$

تولید آی‌پاد : $z_1 \le 40$

تولید آیفون : $z_2 \le 40$

تولید آی پد : $z_3 \le 40$

انبارداری : $30z_1 + 28.125z_2 + 78.75z_3 \le 6000$

کمینه تولید آی‌پاد : $750z_1 \ge 5000$

کمینه تولید آی‌پد : $375z_3 \ge 4000$

بیشینه تقاضای آی‌پاد : $750z_1 \le 10000$

بیشینه تقاضای آیفون : $625z_2 \le 15000$

بیشینه تقاضای آی‌پد : $375z_3 \le 8000$

$$z_1, z_2, z_3 \ge 0$$

d)

$$z_1 = 40x_1, \qquad z_2 = 40x_2, \qquad z_3 = 40x_3$$

۴- تابع $f(x_1, x_2) = 4x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2$ را درنظر بگیرید. با فرض شروع از نقطه $\boldsymbol{x}^{(0)} = [1, 1]^T$، یک گام از روش نیوتون را برای به دست آوردن پاسخ کمینه این تابع بنویسید. (فرض کنید $\alpha = 1$ باشد)

پاسخ:

با فرض شروع از $\boldsymbol{x}^{(0)} = [1, 1]^T$ داریم:

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 8x_1 & -2x_2 \\ 2x_2 & -2x_1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 8 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{H}^{-1}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

با فرض $\alpha = 1$ داریم:

$$\Delta \mathbf{x}^0 = -\mathbf{H}^{-1}\, \nabla f(\mathbf{x}^0) = -\begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

بنابراین

$$\mathbf{x}^1 = \mathbf{x}^* = \mathbf{x}^0 + \Delta\mathbf{x}^0 = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-1\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

$$f(\mathbf{x}^*) = 0$$

۵- فرض کنید می‌خواهیم پاسخ کمینه را برای تابع $f(x_1, x_2) = 10x_1^2 + x_2^2$ به‌دست آوریم. با فرض آن‌که نقطه شروع $(1,1)$ باشد، دوگام از الگوریتم steepest descent را برای رسیدن به پاسخ بهینه‌ی این تابع بنویسید (توجه شود که در این الگوریتم اندازه قدم بایستی طوری انتخاب شود که بیشترین کاهش در جهت نزول گرادیان حاصل شود).

پاسخ:

$$\nabla f(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix}20x_1\\2x_2\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}^0 = [1 \quad 1]^T$$

$$\boldsymbol{s}^0 = -\nabla f(\boldsymbol{x}^0) = [-20 \quad -2]^T$$

$$\boldsymbol{x}^1 = \boldsymbol{x}^0 + \lambda_0 \boldsymbol{s}^0 = \left[1-20\lambda_0 \quad 1-2\lambda_0\right]^T$$

$$f(\boldsymbol{x}^1) = 10(1-20\lambda_0)^2 + (1-2\lambda_0)^2$$

$$df/d\lambda_0 = 8008\lambda_0 - 404 = 0 \qquad \lambda_0 = 0.05045$$

$$\boldsymbol{x}^1 = \left[-8.991\text{x}10^{-3} \quad 0.8991\right]^T$$

$$\boldsymbol{s}^1 = -\nabla f(\boldsymbol{x}^1) = \left[0.1798 \quad -1.798\right]$$

$$\boldsymbol{x}^2 = \boldsymbol{x}^1 + \lambda_1 \boldsymbol{s}^1 = \left[-8.991\text{x}10^{-3} \;\; +0.1798\lambda_1 \;\; +0.8991 \;\; -1.798\lambda_1\right]^T$$

$$f(\boldsymbol{x}^2) = 10(-8.991\text{x}10^{-3} + 0.1798\lambda_1)^2 + (0.8991 - 1.798\lambda_1)^2$$

$$df/d\lambda_1 = 7.112168\ \lambda_1 - 3.26549 = 0 \qquad \lambda_1 = 0.459$$

$$\boldsymbol{x}^2 = \left[0.07354 \quad 0.07382\right]^T$$

٦- تابع $f(x_1,x_2) = 12x_1^2 + 4x_2^2 - 12x_1x_2 + 2x_1$ را درنظر بگیرید. با استفاده از قاعده به‌روزرسانی BFGS و روش Exact line search، پاسخ کمینه این تابع را با شروع از نقطه‌ی $x_0^T = (-1,-2)$ پیدا کنید. (راهنمایی: برای قاعده به‌روزرسانی BFGS به رابطه‌ی (2.21) کتاب Nocedal مراجعه کنید.)

پاسخ:

با شروع از نقطه‌ی $x_0^T = (-1,-2)$ جهت حرکت با استفاده از گرادیان و به‌صورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$\nabla f(x_0) = \begin{bmatrix} 24x_1 - 12x_2 + 2 \\ 8x_2 - 12x_1 \end{bmatrix}_{x=x_0}$$

$$p_0 = -\nabla f(x_0) = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

به این ترتیب پس از اعمال گام اول خواهیم داشت:

$$x_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix} + \alpha_1 \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$f(\alpha_1) = 12(-1-2\alpha_1)^2 + 4(-2+4\alpha_1)^2 - 12(-1-2\alpha_1)(-2+4\alpha_1) + 2(-1-2\alpha_1)$$

به این ترتیب مقدار α_1 که به ازای آن تابع f کمینه می‌شود با استفاده از شرط $\frac{df}{d\alpha_1} = 0$ محاسبه می‌شود و برابر است با: $\alpha_1 = 0.048077$

به این ترتیب داریم:

$$x_1 = \begin{bmatrix} -1.0961 \\ -1.8077 \end{bmatrix}, \qquad \nabla f(x_1) = \begin{bmatrix} -2.6154 \\ -1.3077 \end{bmatrix}$$

به این ترتیب داریم:

$$s_0 = x_1 - x_0 = \begin{bmatrix} -1.0961 \\ -1.8077 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.0961 \\ 0.1923 \end{bmatrix}$$

$$y_0 = \nabla f(x_1) - \nabla f(x_0) = \begin{bmatrix} -2.6154 \\ -1.3077 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4.6154 \\ 2.6923 \end{bmatrix}$$

$$s_0^T y_0 = 0.96127$$

$$s_0 y_0^T = \begin{bmatrix} -0.0961 \\ 0.1923 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4.6154 & 2.6923 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.44354 & -0.25873 \\ -0.88754 & 0.51773 \end{bmatrix}$$

$$s_0 s_0^T = \begin{bmatrix} 0.00923 & -0.01848 \\ -0.01848 & 0.03698 \end{bmatrix}$$

به این ترتیب با جایگذاری موارد فوق در رابطه‌ی (2.21) از کتاب Nocedal داریم:

$$H_1 = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{0.96127}\begin{bmatrix} 0.44354 & -0.25873 \\ -0.88754 & 0.51773 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{0.96127}\begin{bmatrix} 0.44354 & -0.88754 \\ -0.25873 & 0.51773 \end{bmatrix}\right) + \frac{1}{0.96127}\begin{bmatrix} 0.00923 & -0.01848 \\ -0.01848 & 0.03698 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.37213 & 0.60225 \\ 0.60225 & 1.10385 \end{bmatrix}$$

حال جهت حرکت با استفاده از رابطه‌ی $p_k = -H_k \nabla f(x_k)$ به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$p_1 = -\begin{bmatrix} 0.37213 & 0.60225 \\ 0.60225 & 1.10385 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2.6154 \\ -1.3077 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.7608 \\ 3.0186 \end{bmatrix}$$

به این ترتیب x_2 برابر خواهد بود با:

$$x_2 = \begin{bmatrix} -1.0961 \\ -1.8077 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 1.7608 \\ 3.0186 \end{bmatrix}$$

حال با برابر قرار دادن $\frac{df(x_2)}{d\alpha_2} = 0$ خواهیم داشت: $\alpha_2 = 0.4332055$ و همچنین خواهیم داشت:

$$x_2 = \begin{bmatrix} -0.3333 \\ -0.5000 \end{bmatrix}, \quad \nabla f(x_2) \approx \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

که این امر به معنای آن است که به جواب مساله همگرا شده‌ایم.

۷- مساله پیدا کردن مقدار کمینه برای تابع $f(x,y) = (1-x)^2 + 100(y-x^2)^2$ را درنظر بگیرید. با فرض آنکه در نقطه شروع $x_0 = [5,5]^T$ قرار داشته باشیم و همچنین در اولین تکرار $\Delta_0 = 1$ باشد و مقدار $\hat{\Delta} = 100$، $\eta = 0.15$ باشد. مراحل اجرای الگوریتم trust-region (dogleg) را برای یک گام بنویسید (برای مقادیر حدآستانه‌ای که ρ_k در الگوریتم Trust-region بایستی با آن‌ها مقایسه شود، همان مقادیر پیش‌فرضی را درنظر بگیرید که در الگوریتم 4.1 از کتاب Nocedal آورده شده است.)

پاسخ:

ابتدا با محاسبه گرادیان و هسین تابع داده شده داریم:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -400(y - x^2)x - 2 + 2x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 200y - 200x^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x} = 1200x^2 - 400y + 2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -400x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y} = 200$$

حال برای محاسبه p_k داریم:

$$P^U = -\frac{g^T g}{g^T B g} g = [-1.4226, 0.1422]^T$$

$$|P^U| = 1.4297 > \Delta_0$$

$$p_k = \frac{\Delta_k P^U}{|P^U|} = [-0.995, 0.0995]^T$$

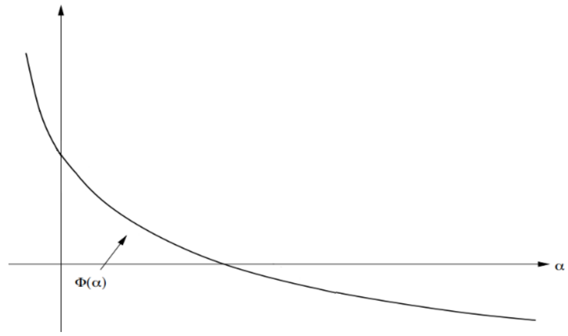
حال برای محاسبه ρ_k داریم:

$$\rho_k = \frac{f(x_k) - f(x_k + p_k)}{m_k(0) - m_k(p_k)} = 1.0724$$

با توجه به اینکه مقدار به‌دست آمده برای $\rho_k > \frac{3}{4}$ و $\|p_k\| = \Delta_k$ است $\Delta_{k+1} = \min(2\Delta_k, \widehat{\Delta}) = 2$ خواهد بود و x_k به‌صورت زیر به‌روزرسانی می‌شود (دقت شود با توجه به آنکه در مرحله صفر از اجرای الگوریتم Trust-region هستیم مقدار $k = 0$ است).

$$x_k = x_k + p_k = [4.005, 5.0995]^T$$

۸- نشان دهید که اگر $0 < c_2 < c_1 < 1$ باشد ممکن است هیچ اندازه قدمی وجود نداشته باشد که بتواند شروط ولف را برآورده سازد. (راهنمایی: برای این منظور می‌توانید این امر را برای تابعی مانند شکل زیر نشان دهید.)



پاسخ:

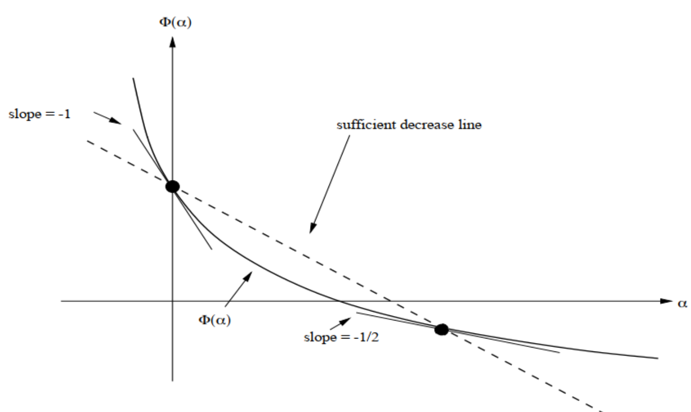
می‌خواهیم نشان دهیم که اگر c_1 بتواند از c_2 بزرگتر باشد، می‌توان تابعی پیدا کرد که به ازای آن هیچ اندازه قدمی $(\alpha > 0)$ شروط ولف را برآورده نسازد. برای این منظور تابع محدبی که در شکل زیر نشان داده شده است را درنظر بگیرید. فرض می‌کنیم مقدار $c_1 = 0.99$ باشد. در این شکل مشاهده می‌شود خط sufficient decrease در یک نقطه با تابع تلاقی داشته است. به علاوه به ازای تمامی نقاطی که در سمت چپ تلاقی قرار گرفته‌اند، داریم:

$$\phi'(\alpha) \leq -\frac{1}{2}$$

حال فرض کنید $c_2 = 0.1$ باشد بنابراین برای آنکه شرط curvature برآورده شود بایستی داشته باشیم:

$$\phi'(\alpha) \geq -0.1$$

واضح است که هیچ اندازه قدمی وجود ندارد که بتواند هر دو شرط ولف را همزمان برآورده سازد.



۹- با توجه به مفاهیم نرخ همگرایی به سوالات زیر پاسخ دهید:

الف) همگرایی سری $x_k = \frac{1}{k!}$ را از نظر Q-superlinearly و Q-quadratically بررسی کنید.

ب) سری $\{x_k\}$ به صورت زیر تعریف شده است:

$$x_k = \begin{cases} \left(\frac{1}{4}\right)^{2^k}, & k \text{ even} \\ \frac{(x_{k-1})}{k}, & k \text{ odd} \end{cases}$$

همگرایی این سری را از نظر Q-superlinearly و Q-quadratically بررسی کنید.

پاسخ:

الف) از تعریف نرخ همگرایی داریم:

$$x_k = \frac{1}{k!} \Rightarrow x^* = \lim_{k\to\infty} x_k = 0$$
$$\frac{\|x_{k+1} - x^*\|}{\|x_k - x^*\|} = \frac{k!}{(k+1)!} = \frac{1}{k+1} \xrightarrow{k\to\infty} 0.$$

که دلالت بر همگرایی Q-superlinearly سری $\{x_k\}$ دارد.

$$\frac{\|x_{k+1} - x^*\|}{\|x_k - x^*\|^2} = \frac{k!\,k!}{(k+1)!} = \frac{k!}{k+1} \longrightarrow \infty$$

رابطه ی بالا نیز دلالت بر عدم همگرایی Q-quadratically سری $\{x_k\}$ دارد.

ب) ابتدا تعریف نرخ همگرایی را به طور جداگانه برای مقادیر 'k' زوج و فرد بررسی می نماییم:

برای مقادیر 'k' زوج داریم:

$$\frac{\|x_{k+1} - x^*\|}{\|x_k - x^*\|} = \frac{\frac{x_k}{k+1}}{\left(\frac{1}{4}\right)^{2^k}} = \frac{\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^{2^k}}{k+1}}{\left(\frac{1}{4}\right)^{2^k}} = \frac{1}{k+1} \to 0$$

برای مقادیر 'k' فرد داریم:

$$\frac{\|x_{k+1}-x^*\|}{\|x_k-x^*\|}=\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^{2^{k+1}}}{\frac{(x_{k-1})}{k}}=\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^{2^{k+1}}}{\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^{2^{k-1}}}{k}}\ k\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^{2^{k+1}}}{\left(\frac{1}{4}\right)^{2^{k-1}}}=k\left(\frac{1}{4}\right)^{2^{k-1}\times 3}\to 0$$

در نتیجه به طور کلی برای تمامی مقادیر زوج یا فرد داریم:

$$\frac{\|x_{k+1}-x^*\|}{\|x_k-x^*\|}=\to 0$$

لذا رشته ی مورد نظر Q-superlinear است.

همچنین برای مقادیر زوج 'k'، برای همگرایی Q-quadratically داریم:

$$\frac{\|x_{k+1}-x^*\|}{\|x_k-x^*\|^2}=\frac{\frac{x_k}{k+1}}{x_k^2}=\frac{1}{(k+1)}4^{2^k}\to\infty$$

لذا همگرایی سری مذکور Q-quadratically نمی باشد.

۱۰- نشان دهید که اگر بردارهای غیرصفر $p_0, p_1, \dots, p_l$ در رابطه‌ی زیر صدق می‌کنند، آنگاه این بردارها نسبت به‌یکدیگر مستقل خطی خواهند بود.

$$p_i^T A p_j = 0, for\ all\ i \neq j$$

در این رابطه A نشان‌دهنده‌ی یک ماتریس متقارن مثبت معین است. از این مساله چه نتیجه‌ای در مورد تعداد جهت‌های کانجوگیت ماتریس A می‌توان گرفت؟

پاسخ:

فرض کنید $p_0, \dots, p_l$ بردارهای کانجوگیت باشند. درصورتی که یکی از آن‌ها را (مانند p_i) براساس ترکیب خطی سایرین بنویسیم داریم:

$$p_i = \sigma_0 p_0 + \cdots + \sigma_{i-1}p_{i-1} + \sigma_{i+1}p_{i+1} + \cdots + \sigma_l p_l \qquad (1)$$

در این رابطه، $\sigma_k \ \ (k = 0,1, \dots, l)$ نشان‌دهنده‌ی ضرایب ترکیب خطی هستند. حال اگر طرفین رابطه فوق را در $p_0^T A$ ضرب کنیم داریم:

$$0 = p_0^T A p_i = \sigma_0 p_0^T A p_0 + \cdots + \sigma_l p_0^T A p_l = \sigma_0 p_0^T A p_0$$

برای آن‌که تساوی فوق برقرار باشد بایستی ضریب σ_0 مساوی با صفر باشد. به‌طور مشابه می‌توان نشان داد که بایستی سایر ضرایب σ_k نیز برابر با صفر باشند. به این ترتیب نتیجه می‌شود که مقدار p_i در رابطه‌ی (1) نیز بایستی برابر با صفر باشد که این برخلاف فرض مساله است. به این ترتیب با برهان خلفذثقخسسثلش نتیجه می‌شود که بایستی بردارهای $p_0, p_1, \dots, p_l$ نسبت به یکدیگر مستقل خطی باشند. از این مساله می‌توان نتیجه گرفت که ماتریس A حداکثر می‌تواند تعداد n جهت کانجوگیت داشته باشد.