Subject:

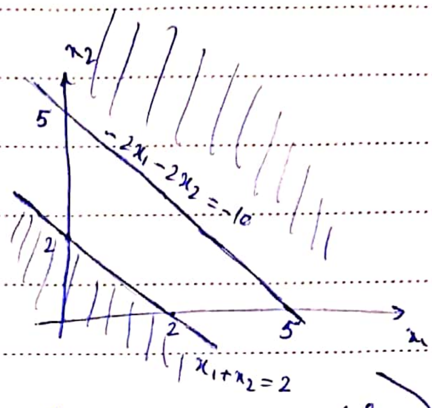
Year : Month: Date:

401133011 تمرین سری دوم بهینه‌سازی

جواب ۱) a.

$\max \quad 3x_1 - 2x_2$

$$\text{sub to} \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 2 \\ -2x_1 - 2x_2 \leq -10 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$



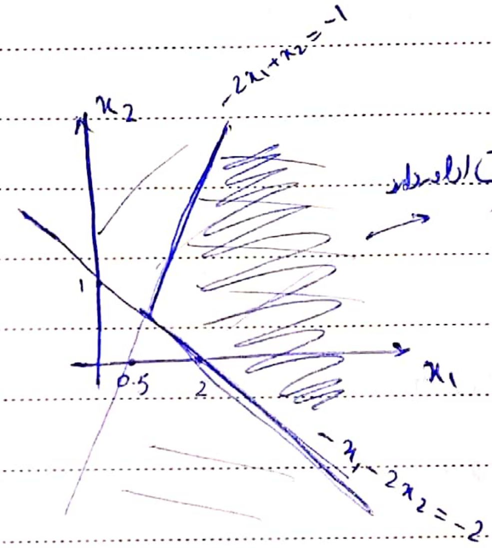

این مسئله feasible نیست

اشتراک $f_1(x_1,x_2)$ و $f_2(x_1,x_2)$ تهی می‌باشد.

b)

$\max \quad x_1 - x_2$

$$\text{sub to} \begin{cases} -2x_1 + x_2 \leq -1 \\ -x_1 - 2x_2 \leq -2 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$




تا $x_1$ی بی‌نهایت امتداد

$x_1 = \infty$

پس feasible set برای $x_1 - x_2$ مسئله unbounded است

c) همین مسئله b به صورت معکوس یعنی به صورت min می‌نویسیم:

$\max \quad x_1 - x_2$

$$\text{sub to:} \begin{cases} -2x_1 + x_2 \geq 1 \\ -x_1 - 2x_2 \geq -2 \\ x_1, x_2 \leq 0 \end{cases}$$

یا

$\min \quad x_1 \cancel{-x_2}$

$\text{sub to:} \quad 2x_1 + x_2 \leq -1$

$-x_1 - 2x_2 \leq -2$

$x_1, x_2 \geq 0$

TISS

Subject:
Year : Month: Date:

۱۲

$E c = c_0$

$E(c-c_0)(c-c_0)^T = \Sigma$

$\min \; c^T x$

sub to $Ax \leq b$ $\longrightarrow$ $\min \; B$

$Prob(c^T x \geq B) \leq \alpha$

$Ax \leq b$

$c^T x \xrightarrow[\text{نرمال}]{} m = c_0^T x$, $Var = x^T \Sigma x$ $\Rightarrow Prob(c^T x \geq B) = \left(\frac{B - c_0^T x}{\|\Sigma^{1/2} x\|}\right)$

نرمال $\Phi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty e^{-u^2/2} du$

$\Rightarrow \Phi\left(\frac{B - c_0^T x}{\|\Sigma^{1/2} x\|}\right) \leq \alpha$

$\rightarrow \frac{B - c_0^T x}{\|\Sigma^{1/2} x\|} \leq \Phi^{-1}(\alpha)$ ✓

Convex
$\alpha < 0.5$
$B \geq 6 E c^T x$

$\rightarrow \min \; B$

$\Phi^{-1}(\alpha) \|\Sigma^{1/2} x\| + c_0^T x \leq B$

$Ax \leq b$

---

۱۳) ۶۰۰۰ $\times$ اسپاد ($x_1$) = کل امکانات

روزانه: ۵۰۰۰ $\times$ آیفون ($x_2$) = کل امکانات

۳۰۰۰ $\times$ آی‌پد ($x_3$) = کل امکانات

روزانه $\Leftarrow$ $\begin{cases} x_1 \leq 6000 \\ x_2 \leq 5000 \\ x_3 \leq 3000 \end{cases}$

درهفته $\begin{cases} x_1 \geq 5000 \\ x_3 \geq 4000 \end{cases}$

سختی‌ها: 
۱۰۰۰ اسپاد: ۴۰ سنتیمتر
۱۰۰۰ آیفون: ۴۵ سنتیمتر
۱۰۰۰ آی‌پد: ۲۱۰ سنتیمتر

کل فضا / ۹۰۰۰ سنتیمتر: برای ۵ روز

* maximize $4x_1 + 6x_2 + 10x_3$

عمق شرکت درهفته: $\begin{cases} x_1 \geq 5000 & x_1 \leq 10000 \\ x_3 \geq 4000 \quad \text{وارضاء} & x_2 \leq 15000 \\ & x_3 \leq 8000 \end{cases}$

TISS

Subject:

Year : Month: Date:

a) به صورت روزانه.

~~maximize $4x_1 + 6x_2 + 10x_3$~~

یک روز کاری = ۸ ساعت = 480 دقیقه

= ۶۰۰۰ آی‌پاد ← هر آی‌پاد $\frac{8}{100} = 0.08$ دقیقه

= ۵۰۰۰ آیفون ← هر آیفون: 0.096 دقیقه

= ۳۰۰۰ آی‌پد ← هر آی‌پد: 0.16 دقیقه

$\Rightarrow$ maximize $4x_1 + 6x_2 + 10x_3$

subj to $0.08x_1 + 0.096x_2 + 0.16x_3 \leq 480$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

b) تعداد گوشی‌هایی که در هفته تولید می‌شود ← در هفته تحت مفهوم مطرح شده.

maximize $4y_1 + 6y_2 + 10y_3$

subj to
$$\begin{cases} 5000 \leq y_1 \leq 10000 \\ 0 \leq y_2 \leq 15000 \\ 4000 \leq y_3 \leq 8000 \\ 0.04y_1 + 0.045y_2 + 0.21y_3 \leq 6000 \end{cases}$$

c)

maximize $4z_1 + 6z_2 + 10z_3$

subj to: $0.08z_1 + 0.096z_2 + 0.016z_3 \leq 480 \times 5$

$5000 \leq z_1 \leq 10000$

$0 \leq z_2 \leq 15000$

$4000 \leq z_3 \leq 8000$

$0.04z_1 + 0.045z_2 + 0.21z_3 \leq 6000$

به جای اینکه z، ۵ برابر x کرده است * ← Constraint هم ۵ برابر شده.

TISS

Subject:

Year : Month: Date:

۴) $f(x_1, x_2) = 4x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 x_2 \quad , \quad \underset{k=0}{x^{(0)}} = [1,1]^T \quad , \underline{\alpha = 1}$

α را داریم، به دست آوردن جهت حرکت $(P_k)$ اهمیت دارد.

$$P_k = -(\nabla^2 f_{(x_k)})^{-1} \nabla f_{(x_k)}$$

$$\Rightarrow x^{(1)} = x^{(0)} + 1 \cdot (-\nabla^2 f(1,1))^{-1} \nabla f(1,1)$$

$$H = \begin{bmatrix} 8 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} , \quad \nabla f = \begin{matrix} 8x_1 - 2x_2 \\ -2x_1 + 2x_2 \end{matrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$H^{-1} = \begin{bmatrix} 1/8 & 1/4 \\ 1/4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow x^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1/8 & 1/4 \\ 1/4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/4 \\ -0.5 \end{bmatrix}$$

---

۵) $f(x_1, x_2) = 10x_1^2 + x_2^2 \quad , \quad x^{(0)} = (1,1)$

Steepest descent: $x_{k+1} = x_k + \alpha_k (-\nabla f(x_k))$

$$-\nabla f_{(1,1)} = \begin{bmatrix} -20x_1 \\ -2x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20 \\ -2 \end{bmatrix} \quad , \alpha = ?$$

راه حل: (شرایط wolfe، ...)

می‌خواهیم کمینه مقدار f برابر صفر شود

پس α را قدری قرار می‌دهیم که حاصل به صفر نزدیک شود.

صحیح و خطا.

$$\Rightarrow x^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -20\alpha_1 \\ -2\alpha_1 \end{bmatrix}$$

$$\min \quad f(x_1^{(1)}, x_2^{(2)}) = 10(1-20\alpha_1)^2 + (1-2\alpha_1)^2$$

$$f'(\alpha) = 20 \times (-20)(1-20\alpha_1) - 4 \times (1-2\alpha_1)$$

$$= -400 + 20 \times 400\alpha_1 - 4 + 8\alpha_1 = 0$$

$$\Rightarrow \alpha_1 \sim 0.505$$

TISS

Subject:

Year : Month: Date:

ادامه 5)

$$\Rightarrow x^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -20 \times 0.505 \\ -2 \times 0.505 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9.1 \\ -0.01 \end{bmatrix}$$

$$-\nabla f_{(2)} = \begin{bmatrix} -182 \\ -0.02 \end{bmatrix} \rightarrow x^{(2)} = \begin{bmatrix} -9.1 \\ -0.01 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -182\alpha_2 \\ -0.02\alpha_2 \end{bmatrix}$$

$$\min f(x^{(2)}) = 10(-9.1 - 182\alpha_2)^2 + (-0.01 - 0.02\alpha_2)^2 \checkmark$$

---

6)

$$f(x_1, x_2) = 12x_1^2 + 4x_2^2 - 12x_1x_2 + 2x_1$$

BFGS: exact line search $\qquad x^{(0)} = (-1, -2)^T$

درمطالب تدریس نشده!

طبق 2.21: $H_{k+1} = (1 - \rho_k s_k y_k^T) H_k (1 - \rho_k y_k s_k^T) + \rho_k s_k s_k^T$, $\rho_k = \frac{1}{y_k^T s_k}$

$$p_k = -H_k \nabla f_k$$

$$\nabla f = \begin{bmatrix} 24x_1 - 12x_2 + 2 \\ 8x_2 - 12x_1 \end{bmatrix} \rightarrow \nabla^2 f = \begin{bmatrix} 24 & -12 \\ -12 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow$$ شرط لازم این است شروع با خود

هسین مثبت معین باشد.

$$p_k = -\begin{bmatrix} -24 & 12 \\ 12 & -8 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cancel{56} \end{bmatrix} = \frac{1}{48}\begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}$$

$$x^{(1)} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \checkmark \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cancel{24} \end{bmatrix} = \checkmark$$

7) ابتدا به سراغ $P_B$ و $P_V$ می‌رویم، یعنی نرم $P_B$ را به دست می‌آوریم و با $\Delta$ مقایسه می‌کنیم، اگر $< \Delta$ بود $p^B$ جواب

$p^B$ است و اگر نبود، $p^V$ را با $\Delta$ مقایسه می‌کنیم.

$p^V + (\tau - 1)(p^B - p^V) \qquad \tau p^V$

TISS

Subject:

Year : Month: Date:

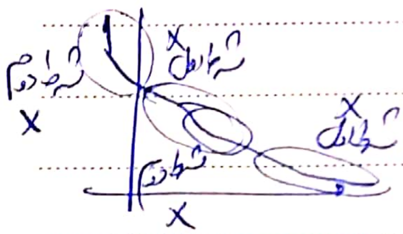
1: sufficient decrease: $f(x_k+\alpha p_k) \leq f(x_k) + c_1\alpha \nabla f_k^T p_k$ (۸

2) Curvature : $\nabla f(x_k+\alpha_k p_k)^T p_k \geq c_2 \nabla f_k^T p_k$

$0 < c_2 < c_1 < 1$

هرچه $c_1$ به یک نزدیک‌تر باشد، متعاقباً شرط اول سخت‌گیرتر خواهد شد. و ممکن است سخت‌تر اندازه گام پیدا شود.

شرط دوم هم اول جاهایی که $\phi'(\alpha)$ شیب منفی بزرگ هست رو حذف میکنه و عملاً دو شرط باهم هم‌زمان [illegible] برآورده میشن.




Q-superlinear همگرایی: $\lim_{k\to\infty} \frac{|x_{k+1}-L|}{|x_k-L|} = 0$ (۹

Q-Quadratic همگرایی: $\lim_{k\to\infty} \frac{|x_{k+1}-L|}{|x_k-L|^2} = 0$

a) $x_k = \frac{1}{k!} \Rightarrow \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{(k+1)!} - 0}{\frac{1}{k!} - 0} = \frac{1}{k} = 0$ ✓

همگرا از هر دو نقطه

$\lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{(k+1)!}}{(k!)^2} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{(k+1)k!} = 0$ ✓

TISS

Subject:

Year : Month: Date:

9) $L=0$

b) $$x_k = \begin{cases} \left(\frac{1}{4}\right)^{2^k} & , k: \text{even} \\ \frac{x_{k-1}}{k} & , k: \text{odd} \end{cases} = \begin{cases} \left(\frac{1}{4}\right)^{2^k} & , k: \text{even} \\ \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^{2^{k-1}}}{k} & , k: \text{odd} \end{cases}$$

k: even:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^{2^k}}{k}}{\left(\frac{1}{4}\right)^{2^k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} = 0 \checkmark$$

k: odd:

$$\lim \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^{2^{k+1}}}{\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^{2^{k-1}}}{k}} = \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^{2^{k+2}}}{k} = 0$$

پس Q-Superlinear ✓

نسبت به k اکسپوننت سریع‌تری کند

اما چون در مخرج توان ۲ هست و حد نتیجه ۰ میشه

تا کمتر از ۲ Q-Quadratic نیست ✓

---

10) $A: l\times l$

$P_i: l\times 1$

$$\Rightarrow [P_0 \cdots P_l] \begin{bmatrix} a_{00} & \cdots & a_{0l} \\ \vdots & & \\ a_{l0} & & a_{ll} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_0 \\ \vdots \\ P_l \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} P_0(a_{00}P_0 + a_{01}P_1 + \cdots + a_{0l}P_l) \\ + \\ + \\ P_l(a_{l0}P_0 + \cdots + a_{ll}P_l) \end{bmatrix} = 0$$

$$= a_{00}P_0 + a_{11}P_1 + \cdots a_{ll}P_l = 0 \rightarrow a_{00} = \cdots = 0$$

اما چون A مثبت معین است، پس نمی‌توانند همه عناصر صفر ~~$P_0 \cdots P_l$~~ صفر داشته باشد پس بردارهای P نسبت به هم مستقل خطی اند

A-Conjugate: $P_i^T A P_j$ , $i\neq j$ ⟵ A متقارن مثبت معین ⟵ معادل بودن P ها

مزدوج نسبت به A ⟵ l جهت مزدوج

TISS