



به نام خدا

تمرین سری دوم درس بهینه‌سازی

(نیمسال اول ۱۴۰۲)



۱- به سوالات زیر پاسخ دهید.

(a) نشان دهید برنامه ریزی خطی زیر infeasible است.

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & 3x_1 - 2x_2 \\ \text{subject to} \quad & x_1 + x_2 \leq 2 \\ & -2x_1 - 2x_2 \leq -10 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

(b) نشان دهید برنامه ریزی خطی زیر unbounded است.

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & x_1 - x_2 \\ \text{subject to} \quad & -2x_1 + x_2 \leq -1 \\ & -x_1 - 2x_2 \leq -2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

(c) مثالی از برنامه‌ریزی خطی بزنیید که feasible set نامحدود باشد ولی مقدار بهینه محدود است.

۲- مساله‌ی LP زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & c^T x \\ \text{subject to} \quad & Ax \leq b \end{aligned}$$

در این مساله، بردار هزینه‌ی c ، یک بردار تصادفی با توزیع نرمال است که میانگین آن c_0 و کواریانس آن $\Sigma = E(c - c_0)(c - c_0)^T$ است (ماتریس A و بردارهای b و x قطعی هستند). براساس این تعریف، برای بردار مفروض $x \in \mathbb{R}^n$ ، مقداری که هزینه‌ی $c^T x$ به دست می‌دهد یک متغیر تصادفی گوسی است.

یک روش برای مواجهه با تصادفی بودن $c^T x$ ، فرموله کردن مساله به صورت زیر است.

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & \beta \\ \text{subject to} \quad & \text{prob}(c^T x \geq \beta) \leq \alpha \\ & Ax \leq b \end{aligned}$$

در این مساله، α یک پارامتر با مقدار ثابت است که معمولاً مقدار 0.01 برای آن در نظر گرفته می‌شود. آیا این

مساله، یک مساله‌ی بهینه‌سازی محدب است؟ توضیح دهید.

۳- در این تمرین، یک مسأله بهینه‌سازی را به سه روش مختلف به صورت LP فرمول‌بندی می‌کنیم. شرکت آلفا سه نوع کاور مختلف برای محصولات اپل از جمله آی‌پاد، آی‌پد و آیفون تولید می‌کند. اگر همه امکانات شرکت را صرف تولید یک نوع کاور کنیم می‌توانیم روزانه ۶۰۰۰ کاور آی‌پاد یا ۵۰۰۰ کاور آیفون یا ۳۰۰۰ کاور آی‌پد تولید کنیم. تولید در پنج روز از هفته صورت می‌گیرد و قبل از توزیع باید در انبار ذخیره شود. بسته‌بندی ۱۰۰۰ کاور آی‌پاد به ۴۰ متر مکعب فضای انبارداری نیاز دارد. و همین طور بسته‌بندی ۱۰۰۰ کاور آیفون و آی‌پد به ترتیب ۴۵ و ۲۱۰ متر مکعب فضای انبارداری نیاز دارد. حداکثر فضای موجود ۶۰۰۰ متر مکعب است. شرکت آلفا موظف است حداقل ۵۰۰۰ کاور آی‌پاد و ۴۰۰۰ کاور آی‌پد در هفته تولید کند. واحد بازاریابی و فروش نیز تخمین زده است که تقاضا برای کاور آی‌پاد، آیفون و آی‌پد به ترتیب حداکثر ۱۰۰۰۰ و ۱۵۰۰۰ و ۸۰۰۰ واحد است و شرکت نمی‌خواهد بیش از این مقادیر تولید کند. در نهایت، سود خالص حاصل از فروش هر کاور آی‌پاد، آیفون و آی‌پد به ترتیب ۴ دلار، ۶ دلار و ۱۰ دلار است. هدف تعیین یک برنامه تولید هفتگی است که سود خالص کل را بیشینه کند.

(a) یک فرمول‌بندی LP ارائه دهید که متغیرهای آن بخشی از زمان است که هر روز به تولید هر محصول اختصاص می‌یابد. به عبارت دیگر، x_1 بخشی از مدت زمان که به تولید کاور آی‌پاد اختصاص می‌یابد، و همین طور x_2 و x_3 بخشی از زمان که به تولید کاور آیفون و آی‌پد اختصاص می‌یابد.

(b) یک فرمول‌بندی LP ارائه دهید که متغیرهای آن تعداد آیت‌هایی است که در هفته از هر نوع تولید می‌شود. به عبارت دیگر، y_1 تعداد کاورهای آی‌پاد است که در طول هفته تولید می‌شود، و همین طور y_2 و y_3 تعداد کاورهای آیفون و آی‌پد است که در طول هفته تولید می‌شود.

(c) یک فرمول‌بندی LP ارائه دهید که متغیرهای آن زمان مطلق است که در هفته به تولید هر محصول اختصاص می‌یابد. به عبارت دیگر، z_1 زمان مطلق است که به تولید کاور آی‌پاد در هفته اختصاص می‌یابد، و همین طور z_2 و z_3 زمان مطلق است که به تولید کاور آیفون و آی‌پد در هفته اختصاص می‌یابد. هر روز کاری نیز شامل ۸ ساعت کاری است.

(d) ارتباط بین متغیرهای z_1, z_2, z_3 از بند (c) و متغیرهای x_1, x_2, x_3 از بند (a) چیست؟ فرمولی برای محاسبه‌ی z_i از روی x_i ارائه دهید.

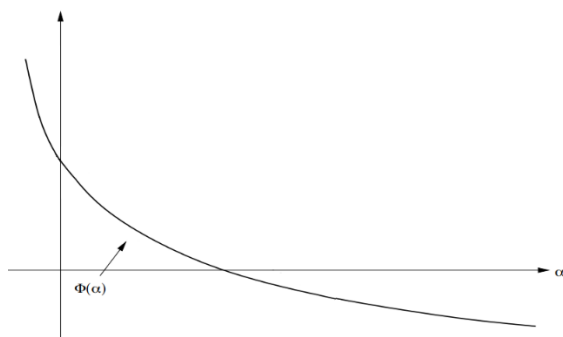
۴- تابع $f(x_1, x_2) = 4x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2$ را در نظر بگیرید. با فرض شروع از نقطه $\mathbf{x}^{(0)} = [1, 1]^T$ یک گام از روش نیوتون را برای به دست آوردن پاسخ کمینه این تابع بنویسید. (فرض کنید $\alpha = 1$ باشد)

۵- فرض کنید می‌خواهیم پاسخ کمینه را برای تابع $f(x_1, x_2) = 10x_1^2 + x_2^2$ به‌دست آوریم. با فرض آن که نقطه شروع $(1, 1)$ باشد، دوگام از الگوریتم steepest descent را برای رسیدن به پاسخ بهینه‌ی این تابع بنویسید (توجه شود که در این الگوریتم اندازه قدم بایستی طوری انتخاب شود که بیشترین کاهش در جهت نزول گرادیان حاصل شود).

۶- تابع $f(x_1, x_2) = 12x_1^2 + 4x_2^2 - 12x_1x_2 + 2x_1$ را در نظر بگیرید. با استفاده از قاعده به‌روزرسانی BFGS و روش Exact line search، پاسخ کمینه این تابع را با شروع از نقطه‌ی $x_0^T = (-1, -2)$ پیدا کنید. (راهنمایی: برای قاعده به‌روزرسانی BFGS به رابطه‌ی (2.21) کتاب Nocedal مراجعه کنید).

۷- مساله پیدا کردن مقدار کمینه برای تابع $f(x, y) = (1 - x)^2 + 100(y - x^2)^2$ را در نظر بگیرید. با فرض آنکه در نقطه شروع $x_0 = [5, 5]^T$ قرار داشته باشیم و همچنین در اولین تکرار $\Delta_0 = 1$ باشد و مقدار $\hat{\Delta} = 100$ ، $\eta = 0.15$ باشد. مراحل اجرای الگوریتم trust-region (dogleg) را برای یک گام بنویسید (برای مقادیر حد‌آستانه‌ای که ρ_k در الگوریتم Trust-region بایستی با آن‌ها مقایسه شود، همان مقادیر پیش‌فرضی را در نظر بگیرید که در الگوریتم 4.1 از کتاب Nocedal آورده شده است).

۸- نشان دهید که اگر $0 < c_2 < c_1 < 1$ باشد ممکن است هیچ اندازه قدمی وجود نداشته باشد که بتواند شروط ولف را برآورده سازد. (راهنمایی: برای این منظور می‌توانید این امر را برای تابعی مانند شکل زیر نشان دهید).



۹- با توجه به مفاهیم نرخ همگرایی به سوالات زیر پاسخ دهید:
الف) همگرایی سری $x_k = \frac{1}{k!}$ را از نظر Q-superlinearly و Q-quadratically بررسی کنید.

ب) سری $\{x_k\}$ به صورت زیر تعریف شده است:

$$x_k = \begin{cases} \left(\frac{1}{4}\right)^{2^k}, & k \text{ even} \\ \frac{(x_{k-1})}{k}, & k \text{ odd} \end{cases}$$

همگرایی این سری را از نظر Q-quadratically و Q-superlinearly بررسی کنید.

۱۰- نشان دهید که اگر بردارهای غیرصفر p_0, p_1, \dots, p_l در رابطه‌ی زیر صدق می‌کنند، آنگاه این بردارها نسبت به یکدیگر مستقل خطی خواهند بود.

$$p_i^T A p_j = 0, \text{ for all } i \neq j$$

در این رابطه A نشان‌دهنده‌ی یک ماتریس متقارن مثبت معین است. از این مساله چه نتیجه‌ای در مورد تعداد جهت‌های کانجوگیت ماتریس A می‌توان گرفت؟

فرمت گزارش:

- گزارش بایستی حاوی تمام نتایج بدست آمده از شبیه‌سازی‌های کامپیوتری در قالب فایل PDF باشد. همچنین انتظار می‌رود که در این گزارش برای سوالات پیاده‌سازی، تحلیل خود را از نتایج به‌دست آمده ارائه دهید.
- در صورتی که تمرینات را به‌صورت دست‌نویس حل می‌کنید. فایل‌های عکس تمرینات را با کیفیت مناسب و به‌ترتیب سوالات در یک فایل pdf قرار دهید و درنهایت این فایل را آپلود نمایید.
- فایل گزارش خود را تنها به‌شکل StdNum.pdf نام‌گذاری کنید. (مانند 9272203.pdf)

فرمت کدها:

- برای هر تمرین شبیه‌سازی کامپیوتری بایستی فایل کد جداگانه در محیط MATLAB، Python یا R تهیه شود.
- هر فایل کد خود را به شکل k_Q نامگذاری کنید. که k بیانگر شماره سوال شبیه‌سازی خواهد بود.

نحوه تبدیل:

- فایل‌های کد و گزارش خود را که طبق فرمت‌های فوق تهیه شده‌اند، در قالب یک فایل فشرده بارگذاری نمایید. فایل فشرده را تنها به شکل StdNum.zip نامگذاری نمایید. (مانند 9272203.zip)

تذکر:

- در صورتی‌که پارامتر خاصی در سوالات مشخص نشده با توجه به اطلاعاتی که در ارتباط با محدوده پارامتر دارید، مقدار دلخواهی انتخاب کنید و آن را در گزارش توضیح دهید.
- تحویل بخش‌های تئوری و پیاده‌سازی هر تمرین به‌صورت جداگانه خواهد بود. ارسال تمرین‌های تئوری تا یک روز تاخیر بلامانع است. پس از آن پاسخ این بخش بارگذاری خواهد شد و لذا مواردی که پس از بارگذاری پاسخ‌ها ارسال شوند قابل قبول نخواهد بود.
- برای تمرین‌های بخش پیاده‌سازی در مجموع ۷ روز تاخیر مجاز است (برای کل تمرینات جمع تاخیرهای شما نباید از ۷ روز بیشتر شود). در صورت تاخیر بیشتر از ۷ روز کسر ۵ درصد نمره از نمره کل تمرینات پیاده‌سازی به ازای هر روز تاخیر مد نظر قرار خواهد گرفت.
- در صورت شبیه بودن تمارین دانشجویان، نمره تمرین بین دانشجویان با تمرین مشابه تقسیم خواهد شد.
- در صورت وجود هرگونه سوال یا ابهام با یکی از ایمیل‌های زیر ارتباط برقرار کنید.

- farzane.abdoli@aut.ac.ir
- meysam.fozi@aut.ac.ir
- b.roshanfekr@aut.ac.ir