



۱- برنامه‌ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} & \text{minimize } 4x_1 + 3x_2 \\ & \text{subject to } 5x_1 + x_2 \geq 11 \\ & 2x_1 + x_2 \geq 8 \\ & x_1 + 2x_2 \geq 7 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

دوگان متناظر با این مسأله را بنویسید و پاسخ مسأله دوگان را بیابید.

۲- فرض کنید یک سیستم فرستنده بیسیم دارای n فرستنده است. فرستنده j با توان $p_j \geq 0$ ارسال را انجام می‌دهد و m موقعیت مختلف برای دریافت سیگنال‌ها در نظر گرفته شده است. بهره فرستنده j به موقعیت i را با $g_{i,j}$ نشان می‌دهیم. بنابراین توان سیگنال ارسال شده توسط فرستنده j و دریافت شده در موقعیت i برابر است با $g_{i,j}p_j$ و در نتیجه توان کل دریافتی در موقعیت i برابر حاصل جمع تمامی توان‌های دریافتی از همه فرستنده‌ها است. می‌خواهیم مینیمم مجموع توان ارسالی را بیابیم به این شرط که توان دریافتی در هر موقعیت حداقل P باشد.
(الف) این مسأله را فرمول‌بندی کنید.
(ب) شرایط KKT را برای آن بنویسید.

۳- فرض کنید x_i که در آن $i = 1, \dots, n$ متغیرهای تصادفی مستقل از هم باشند که از توزیع پواسون پیروی می‌کنند طوری که:

$$\text{prob}(x_i = k) = \frac{e^{-\mu_i} \mu_i^k}{k!},$$

باشد که در آن میانگین‌های μ_i نامعلوم هستند. متغیرهای x_i تعداد دفعاتی را نشان می‌دهند که یکی از n رویداد مستقل در یک دوره معین رخ داده است. هدفی که دنبال می‌شود آن است که بتوانیم میانگین‌های μ_i را با استفاده از تعداد m آشکارساز تخمین بزنیم. در آزمایشی که بدین منظور انجام می‌شود اگر رویداد i رخ دهد، احتمال آن که آشکارساز j بتواند آن را تشخیص دهد p_{ji} خواهد بود. فرض می‌کنیم که مقادیر احتمال‌های p_{ji} داده شده باشند طوری که برای

آن‌ها داریم: $p_{ji} \geq 0$ و $\sum_{j=1}^m p_{ji} \leq 1$. تعداد کل رویدادهای ثبت شده توسط آشکارساز j با y_j نشان داده می‌شود بنابراین:

$$y_j = \sum_{i=1}^n y_{ji}, j = 1, \dots, m.$$

مسالهای تخمین بیشینه‌درست‌نمایی^۱ را برای تخمین میانگین‌های μ_i براساس مشاهدات $y_j, j = 1, \dots, m$ به‌صورت یک مساله بهینه‌سازی محدب بنویسید.

(راهنمایی: متغیرهای y_{ji} دارای توزیع پواسون با میانگین $p_{ji}\mu_i$ هستند به این معنی که برای آن‌ها داریم:

$$\text{prob}(y_{ji} = k) = \frac{e^{-p_{ji}\mu_i} (p_{ji}\mu_i)^k}{k!}.$$

مجموع n متغیر تصادفی مستقل با توزیع پواسون با میانگین‌های $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ دارای توزیع پواسون با میانگین $\lambda_1 + \dots + \lambda_n$ است.

۴- فرض کنید $y \in \{0,1\}$ یک متغیر تصادفی باشد که به‌صورت زیر تعریف شده است:

$$y = \begin{cases} 1 & a^T u + b + v \leq 0 \\ 0 & a^T u + b + v > 0 \end{cases}$$

در این رابطه $u \in \mathbb{R}^n$ است و v نیز یک متغیر تصادفی با توزیع گوسی با میانگین صفر و واریانس یک است.

تخمین ML را برای یافتن a و b ، با فرض آنکه داده‌های $(u_i, y_i), i = 1, \dots, N$ داده شده باشند به‌صورت یک مسالهای بهینه‌سازی محدب بنویسید.

۵- مساله تقریب زیر را در نظر بگیرید.

$$\min \sum_{i=1}^m \phi(r_i)$$

$$\text{s.t. } r = Ax - b$$

$$x \in \mathbb{R}^n, \quad A \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

(a) دوگان این مساله را برحسب تابع conjugate جریمه بیابید.

(b) اگر تابع جریمه $\phi(x)$ ، deadzone linear با پهنای $w = 1$ باشد، دوگان مسالهای بالا را بیابید.

^۱ Maximum likelihood

۶- نیم فضایی را که در زیر تعریف شده است در نظر بگیرید. هدف یافتن نقطه‌ای داخل این نیم فضا است که کمترین نرم اقلیدسی را داشته باشد. این مساله را به فرم یک مساله‌ی بهینه‌سازی نوشته و با استفاده از شروط KKT حل نمایید.

$$H = \{x \in \mathbb{R}^n | a^T x + b \geq 0\} \text{ where } a \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}$$

۷- یک مساله‌ی بهینه‌سازی محدب بدون قیود تساوی به صورت زیر را در نظر بگیرید.

$$\min f_0(x)$$

$$\text{s. t. } f_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m$$

نشان دهید اگر x^* و λ^* شروط KKT را برآورده نمایند رابطه‌ی زیر برای تمامی x های شدنی برقرار خواهد بود.

$$\nabla f(x^*)^T (x - x^*) \geq 0$$

۸- مساله‌ی بهینه‌سازی محدب زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned} &\text{minimize} && f_0(x) \\ &\text{subject to} && f_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m \\ &&& Ax = b \\ &&& x^T x \leq R^2 \end{aligned}$$

فرض کنید $\tilde{\phi}$ نشان دهنده‌ی تابع logarithmic barrier مربوط به این مساله باشد. مقدار $a > 0$ را طوری پیدا کنید که $\nabla^2 (tf_0(x) + \tilde{\phi}(x)) \succeq aI$ که در آن $t > 0$ است به ازای تمامی x های شدنی^۲ برقرار باشد.

فرمت گزارش:

- گزارش بایستی حاوی تمام نتایج بدست آمده از شبیه‌سازی‌های کامپیوتری در قالب فایل PDF باشد. همچنین انتظار می‌رود که در این گزارش برای سوالات پیاده‌سازی، تحلیل خود را از نتایج به‌دست آمده ارائه دهید.
- در صورتی که تمرینات را به‌صورت دست‌نویس حل می‌کنید. فایل‌های عکس تمرینات را با کیفیت مناسب و به‌ترتیب سوالات در یک فایل pdf قرار دهید و درنهایت این فایل را آپلود نمایید.
- فایل گزارش خود را تنها به‌شکل StdNum.pdf نام‌گذاری کنید. (مانند 9272203.pdf)

فرمت کدها:

- برای هر تمرین شبیه‌سازی کامپیوتری بایستی فایل کد جداگانه در محیط MATLAB، Python یا R تهیه شود.
- هر فایل کد خود را به شکل k_Q نامگذاری کنید. که k بیانگر شماره سوال شبیه‌سازی خواهد بود.

نحوه تبدیل:

- فایل‌های کد و گزارش خود را که طبق فرمت‌های فوق تهیه شده‌اند، در قالب یک فایل فشرده بارگذاری نمایید. فایل فشرده را تنها به شکل StdNum.zip نامگذاری نمایید. (مانند 9272203.zip)

تذکر:

- در صورتی‌که پارامتر خاصی در سوالات مشخص نشده با توجه به اطلاعاتی که در ارتباط با محدوده پارامتر دارید، مقدار دلخواهی انتخاب کنید و آن را در گزارش توضیح دهید.
- تحویل بخش‌های تئوری و پیاده‌سازی هر تمرین به‌صورت جداگانه خواهد بود. ارسال تمرین‌های تئوری تا یک روز تاخیر بلامانع است. پس از آن پاسخ این بخش بارگذاری خواهد شد و لذا مواردی که پس از بارگذاری پاسخ‌ها ارسال شوند قابل قبول نخواهد بود.
- برای تمرین‌های بخش پیاده‌سازی در مجموع ۷ روز تاخیر مجاز است (برای کل تمرینات جمع تاخیرهای شما نباید از ۷ روز بیشتر شود). در صورت تاخیر بیشتر از ۷ روز کسر ۵ درصد نمره از نمره کل تمرینات پیاده‌سازی به ازای هر روز تاخیر مد نظر قرار خواهد گرفت.
- در صورت شبیه بودن تمارین دانشجویان، نمره تمرین بین دانشجویان با تمرین مشابه تقسیم خواهد شد.
- در صورت وجود هرگونه سوال یا ابهام با یکی از ایمیل‌های زیر ارتباط برقرار کنید.

- farzane.abdoli@aut.ac.ir
- meysam.fozi@aut.ac.ir
- b.roshanfekr@aut.ac.ir