Exemple :
$$A=\begin{pmatrix} 1/2 & 1 \\ 0 & -3/4 \end{pmatrix} \Rightarrow -2A=\begin{pmatrix} -2\times\frac{1}{2} & -2\times 1 \\ -2\times 0 & -2\times(-\frac{3}{4}) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 3/2 \end{pmatrix}$$

Exemple : Somme de matrices
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -3 & 1 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1+0 & 0+(-1) & (-1)+(-2) \\ 2+(-3) & 1+1 & 4+5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & 9 \end{pmatrix}$$

Exemple (produit de deux matrices)
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1\times0+2\times2+(-1)\times1 & 1\times1+2\times2+(-1)\times3 & 1\times1+2\times0+(-1)\times1 \\ 1\times0+0\times2+3\times(-1) & 1\times1+0\times2+3\times3 & 1\times1+0\times0+3\times1 \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -3 & 10 & 4 \end{pmatrix}$$

Exercice : Calculons :
$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 0 & -1 & 10 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1\times0+0\times1+(-2)\times(-1) & (-1)\times(-1)+0\times(-2)+(-2)\times1 & -1\times10+0\times0+(-2)\times1 \\ 1\times0+0\times1+4\times(-1) & 1\times(-1)+0\times(-2)+4\times1 & 1\times10+0\times0+4\times1 \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -12 \\ -4 & 3 & 14 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & -1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -2 & 3 & -5 \\ 1 & 4 & 6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1+0 & 2+2 & -5+(-4) \\ 0+(-2) & -1+3 & 0+(-5) \\ (-3)+1 & 0+4 & 1+6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 4 & -9 \\ -2 & 2 & -5 \\ -2 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

4-2/ Déterminant d'une matrice d'ordre 3

$$\det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = (-1)^2 a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + (-1)^{1+4} c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

Exemple :

$$\rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{2+1} 2 \begin{vmatrix} -5 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2} \times 0 \times \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{2+3} \times 1 \times \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= -2(-5-6) + 0 - (2-5) = 22 + 3 = 25$$

4-3/ Déterminant d'ordre n

Exemple : Calculons (dét d'une matrice d'ordre 4)

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (-1)^{1+2}(-2) \begin{vmatrix} 0 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2} \times 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= 2(-36) + (-9) = -81$$

5-2-1/ Comatrice

Exemple :

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 0 & 3 & 7\\ 5 & 1 & 0\end{pmatrix} \Rightarrow \tilde{A}=\begin{pmatrix} +\begin{vmatrix}3 & 7\\ 1 & 0\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}0 & 7\\ 5 & 0\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}0 & 3\\ 5 & 1\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}2 & -3\\ 1 & 0\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1 & -3\\ 5 & 0\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 2\\ 5 & 1\end{vmatrix}\\ +\begin{vmatrix}2 & -3\\ 3 & 7\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & -3\\ 0 & 7\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{vmatrix}\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \tilde{A}=\begin{pmatrix}-7 & 35 & -15\\ -3 & 15 & 9\\ 23 & -7 & 3\end{pmatrix}$$

5-2-2/ Adjointe d'une matrice

Exemple :

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 0 & 3 & 7\\ 5 & 1 & 0\end{pmatrix} \Rightarrow \tilde{A}=\begin{pmatrix}-7 & 35 & -15\\ -3 & 15 & 9\\ 23 & -7 & 3\end{pmatrix} \Rightarrow {}^t\tilde{A}=\begin{pmatrix}-7 & -3 & 23\\ 35 & 15 & -7\\ -15 & 9 & 3\end{pmatrix}$$

5-2-3/ Matrice inverse :

Exemple :

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 0 & 3 & 7\\ 5 & 1 & 0\end{pmatrix} \quad \text{alors } \det A = \begin{vmatrix}3 & 7\\ 1 & 0\end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix}2 & -3\\ 3 & 7\end{vmatrix} = -7+5\times 23 = 108$$

$$\text{Alors } A^{-1}=\frac{1}{\det A}\,{}^t\tilde{A} = \frac{1}{108}\begin{pmatrix}-7 & -3 & 23\\ 35 & 15 & -7\\ -15 & 9 & 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-7/108 & -3/108 & 23/108\\ \frac{35}{108} & \frac{15}{108} & \frac{-7}{108}\\ \frac{-15}{108} & \frac{9}{108} & \frac{3}{108}\end{pmatrix}$$