Série d'éxercices : Calcul Matriciel

Exercice 1

Dans $M(2)$, l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2, on considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

1. Calculer $A + B$, $A \times B$, $B \times A$, A^2 et B^2.
2. A-t-on $(A + B)^2 = A^2 + B^2 + 2.(A \times B)$?

Exercice 2

Soit E l'ensemble des matrices M d'ordre 3 qui ont la forme suivante :

$$M = \begin{pmatrix} a+b & c & b \\ c & a+c & c \\ b & c & a-b \end{pmatrix} \text{ où } (a, b, c) \in \mathbb{R}^3.$$

1. Montrer que toute matrice M de E peut s'écrire sous la forme $M = aI + bJ + cK$ où I, J et K sont des matrices d'ordre 3 à déterminer.
2. La matrice $N = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ appartient-elle à E ?

Exercice 3

Calculer les déterminants suivants :

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad D_2 = \begin{vmatrix} c & c & 1+c \\ 1+a & a & a \\ b & 1+b & b \end{vmatrix}$$

Exercice 4

Soit la matrice $A_m = \begin{pmatrix} 1-m & 1 & -1 \\ 1 & 1-m & 1 \\ -1 & 1 & 1-m \end{pmatrix}$

Déterminer la valeur de m pour que A_m soit inversible.

Exercice 5

On considère la matrice : $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

1. Calculer A^2
2. vérifier que $A^2 - 4A = -4I_3$
3. En déduire que A est inversible et donner A^{-1} en fonction de A.

Exercice 6

Donner l'inverse de la Matrice $K = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

Exercice 7

On considère la matrice $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

1. Calculer J^2
2. En déduire que la matrice J est inversible (on exprimera J^{-1} en fonction de J).

Exercice 8

Dans M(3) , on considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

et on pose $B = A + 3I_3$.

1. Exprimer B^2 en fonction de B .
2. En déduire A^2 en fonction de A .
3. La matrice A est-elle inversible ?

Exercice 9

On considère le système linéaire

$$\left\{\begin{array}{llllll} (m-1)x & + & 2y & + & 2z & = m-1 \\ 2x & + & (m+1)y & + & z & = m-2 \\ -2x & + & -3y & + & (m-3)z & = m-3 \end{array}\right. \quad , \quad m \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

, $m \in \mathbb{R}$.

1. Pour quelle(s) valeur(s) du paramètre m , le système (1) est-il de Cramer ?
2. Résoudre (1) pour $m = 3$

Exercice 10

On considère le système linéaire

$$\left\{\begin{array}{llllll} -2x & + & y & + & 2z & = 1 \\ x & - & 2y & + & 2z & = 1 \\ 2x & + & 2y & + & z & = 5 \end{array}\right. \tag{2}$$

1. Ecrire le système (2) sous sa forme matricielle $A.X = B$.

2. Calculer A^2 et en déduire A^{-1}.
3. En déduire la solution du système (2).
4. Résoudre le système (2) par la méthode de Cramer.

Exercice 11

On considère le système linéaire

$$\begin{cases} x+z+t=1 \\ x+y=0 \\ 2x+2y+z+t=1 \\ x+t=0 \end{cases} \tag{3}$$

1. Ecrire le système (3) sous la forme matricielle $A.X = B$.
2. Résoudre le système (3) par la méthode d'inversion de la matrice.
3. Vérifier que le système (3) est de Cramer.
4. Résoudre le système (3) par la méthode de Cramer.