5/ Resolution des Systemes lineaires

Définition :

Un système linéaire est un système d'équations linéaires à n équations et n inconnus et donné par le système suivant :

$$(\ast)\quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

où les $a_{ij} \in \mathbb{R}$ pour $1 \le i,j \le n$ et $b_i \in \mathbb{R}$ pour $1 \le i \le n$ et les x_i sont des inconnus

Le Système $(\ast)$ peut s'écrire sous la forme $A.X = B$ où

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$ une matrice d'ordre n

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

5-1/ Resolution du système $(\ast)$ par l'inversion de la matrice

Le Système $(\ast) \iff AX = B$

Si A est inversible alors le système $(\ast)$ admet une seule solution qui est

$$X = A^{-1}B.$$

Exemple : On veut résoudre le système $\begin{cases} x + z = 1 \\ 2y + 4z = -1 \\ x - 3y - z = 4 \end{cases} \quad (S)$

$(S) \iff AX = B$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

1/ Déterminons A^{-1}.

on a : $\det A = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 8 \neq 0$ donc A est inversible

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix} +\begin{vmatrix}2 & 4\\ -3 & -1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}0 & 4\\ 1 & -1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}0 & 2\\ 1 & -3\end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix}0 & 1\\ -3 & -1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & -3\end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix}0 & 1\\ 2 & 4\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & 4\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 4 & -2 \\ -3 & -2 & 3 \\ -2 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow {}^t\tilde{A} = \begin{pmatrix} 10 & -3 & -2 \\ 4 & -2 & -4 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det A}\,{}^t\tilde{A} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 10 & -3 & -2 \\ 4 & -2 & -4 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & \frac{-3}{8} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{8} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

2/ En déduire la solution de (S)

$$(S) \Leftrightarrow A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\\4\end{pmatrix} \Leftrightarrow A^{-1}A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix}1\\-1\\4\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix}1\\-1\\4\end{pmatrix}$$ car $A^{-1}A = I_3$ matrice unité.

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & -\frac{3}{8} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{8} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{4}\times 1 - \frac{3}{8}(-1) - \frac{1}{4}\times 4 \\ \frac{1}{2}\times 1 - \frac{1}{4}(-1) - \frac{1}{2}\times 4 \\ -\frac{1}{4}\times 1 + \frac{3}{8}(-1) + \frac{1}{4}\times 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{8} \\ -\frac{5}{4} \\ \frac{3}{8} \end{pmatrix}$$

alors $\begin{cases} x = \frac{5}{8} \\ y = -\frac{5}{4} \\ z = \frac{3}{8} \end{cases}$

5-2 / Résolution du système (*) par la méthode de Cramer

Le système (*) $\Leftrightarrow AX = B$ avec $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

Définissons la matrice A_j d'ordre n par

$$A_j = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

A_j est la matrice obtenue en remplaçant la $j^{ème}$ colonne de A par la colonne du second membre B.

La règle de Cramer va nous permettre de calculer la solution du système, dans le cas où $\det A \neq 0$, en fonction des déterminants des matrices A et A_j.

Théorème: Règle de Cramer

Soit $AX = B$ un système de n équations et n inconnues. Si $\det A \neq 0$, alors l'unique solution $(x_1, \ldots, x_n)$ du système est donnée par:

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A}, \quad x_2 = \frac{\det A_2}{\det A}, \quad \ldots\ldots, \quad x_n = \frac{\det A_n}{\det A}.$$

Exemple: Considerons le système $\begin{cases} x + 2z = 6 \\ -3x + 4y + 6z = 30 \\ -x - 2y + 3z = 8 \end{cases}$

On a, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 4 & 6 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 30 \\ 8 \end{pmatrix}$

alors $A_1 = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 30 & 4 & 6 \\ 8 & -2 & 3 \end{pmatrix}$; $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 \\ -3 & 30 & 6 \\ -1 & 8 & 3 \end{pmatrix}$ et $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ -3 & 4 & 30 \\ -1 & -2 & 8 \end{pmatrix}$

On a, $\det A = 44$; $\det A_1 = -40$; $\det A_2 = 72$ et $\det A_3 = 152$

La solution est alors:

$$x = \frac{\det A_1}{\det A} = \frac{-40}{44} = -\frac{10}{11}, \quad y = \frac{\det A_2}{\det A} = \frac{72}{44} = \frac{18}{11} \quad \text{et} \quad z = \frac{\det A_3}{\det A} = \frac{152}{44} = \frac{38}{11}$$