Série d'éxercices : Espace vectoriel

Exercice 1

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, on considère le sous ensemble $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + z = 0 \;\; et \;\; y - z = 0\}$

1. montrer que V est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. Donner une base de V et en déduire sa dimension.

Exercice 2

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, on considère les sous ensembles suivants :

$V_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = 0\}$ et $V_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = y = z\}$.

1. Montrer que V_1 et V_2 sont des sous espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.
2. Trouver une base de chacun des sous espaces vectoriels V_1 et V_2.
3. Déterminer $V_1 \cap V_2$.

Exercice 3

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère le sous espace $V = vect\Big((1, 1, -1); (1, 1, 1); (-1, 1, 1)\Big) = \Big\langle(1, 1, -1); (1, 1, 1); (-1, 1, 1)\Big\rangle$

1. Déterminer la dimension du sous espace vectoriel V.
2. Comparer V et $\mathbb{R}^3$.
3. Exprimer le vecteur $u = (2, 0, 0)$ dans la base $\Big\{(1, 1, -1); (1, 1, 1); (-1, 1, 1)\Big\}$.

Exercice 4

Dan $\mathbb{R}^3$, on considère le sous espace $W = vect\Big((-1, 1, -1); (1, -1, 1); (-1, 1, 1)\Big)$.

1. Déterminer la dimension du sous espace vectoriel W.
2. Comparer W et $\mathbb{R}^3$.

Exercice 5

Dans $\mathbb{R}^4$, on considère le sous espace $H = vect\Big((2, 1, 1, 2); (1, 0, 1, 1); (0, 1, -1, 0)\Big)$

Donner une base de H et en déduire sa dimension.

Exercice 6

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs $v_1 = (1, 1, 1)$ $v_2 = (1, 1, a)$ et $v_3 = (1, a, a)$ où $a \in \mathbb{R}$.

Discuter suivant le paramètre a :

1. La dépendance des vecteurs v_1 , v_2 et v_3.
2. Le rang du système $\{v_1, v_2, v_3\}$.

Exercice 7

Soit E l'ensemble des matrices M d'ordre 3 qui ont la forme suivante :

$$M = \begin{pmatrix} a+b & c & b \\ c & a+c & c \\ b & c & a-b \end{pmatrix} \text{ où } (a,b,c) \in \mathbb{R}^3.$$

1. Montrer que toute matrice M de E peut s'écrire sous la forme $M = aI + bJ + cK$ où I, J et K sont des matrices d'ordre 3 à déterminer.
2. En déduire que E est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}(3)$ dont on donnera une base.

Exercice 8

On considère les vecteurs $v_1 = (1,0,0,1)$, $v_2 = (0,1,1,0)$, $v_3 = (1,1,0,0)$ et $v_4 = (0,0,1,0)$.
Montrer que $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 9

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$, on considère le sous ensemble $F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 / x - t = y - z = m\}$.

1. Pour quelle(s) valeur(s) du paramètre m , F est-il un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.
2. Pour $m = 0$, trouver une base de F.

Exercice 10

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $B = \{e_1, e_2, e_3\}$, on considère les vecteurs : $e_1^{'} = e_1 + e_2 + e_3$, $e_2^{'} = e_2$ et $e_3^{'} = e_3$

1. vérifier que $B^{'} = \{e_1^{'}, e_2^{'}, e_3^{'}\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer les matrices de passage $P_{BB'}$ et $P_{B'B}$.

Exercice 11

1. L'ensemble $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}(2) / a + d = b + c \right\}$ est-il un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}(2)$?
2. Si oui, on donnera une base et la dimension de G.

Exercice 12

Dans $\mathcal{M}(3)$, on considère la matrice $C = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

Déterminer le rang de la matrice C.

Exercice 13

Dans $\mathcal{M}(3)$ l'ensemble des matrices d'ordre 3 , on considère la matrice $A_m = \begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & m & 1 \\ m & 1 & m \end{pmatrix}$ où $m \in \mathbb{R}$

Discuter, suivant les valeurs du paramètre m, le rang de la matrice A_m.

Exercice 14

On considère la matrice $S_m = \begin{pmatrix} m & 1 & m \\ 1 & m & 1 \\ m & 1 & m^2 \end{pmatrix}$ où $m \in \mathbb{R}$

1. Montrer que $det(S_m) = m(m+1)(m-1)^2$
2. Discuter, suivant les valeurs du paramètre m, le rang de la matrice S_m.

Exercice 15

Dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $B_c = \{e_1, e_2, e_3\}$, on considère les vecteurs : $u_1 = (1, 1, 0)$; $u_2 = (1, -1, 1)$ et $u_3 = (0, 1, 1)$

1. Vérifier que $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$
2. Déterminer la matrice de passage P_{B/B_c}

Exercice 16

Soit $E = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}\}$ l'ensemble des suites qui est un espace vectoriel réel.

$F = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \;\; converge \;\; vers \;\; 0\}$.

$G = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \;\; converge\}$.

1. Montrer que F est un sous espace vect de E.
2. G est-il un sous espace vectoriel de E ?