Serie 1 (Ensembles)

Ex1 : E un ensemble et A et B deux parties de E

On pose : $A \Delta B = (A \setminus B) \sqcup (B \setminus A)$.

L'ensemble $A \Delta B$ s'appelle : la différence symétrique de A et B.

1. Montrer que : $A \Delta B = (A \sqcup B) \setminus (A \cap B)$.

   et que : $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$

2. Prouver que : $A \Delta B = (A \cap \overline{B}) \sqcup (\overline{A} \cap B)$

   et que : $A \Delta B = \overline{A} \Delta \overline{B}$.

3. Montrer que : $A \Delta \overline{B} = A \Delta \overline{C} \iff B = C$.

Ex2 : 1°. On considère les deux ensembles suivants :

$$A = \{x \in \mathbb{R} \ / \ |x| > 2\} \quad \text{et} \quad B = \left\{x \in \mathbb{R} \ / \ \frac{3x-2}{x+2} > 1\right\}$$

Montrer que : $A = B$.

2°. On considère l'ensemble :

$$H = \left\{x \in \mathbb{R} \ / \ \frac{|x|}{x^2+1} \leqslant \frac{1}{2}\right\}.$$

Montrer que : $H = \mathbb{R}$.

Ex3 : 1°. Soit E et F deux ensembles. A et C deux parties de E et B et D deux parties de F.

Démontrer que : $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$

2°. Soit $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x^2 + y^2 \leqslant 1\}$

Démontrer que D ne peut pas s'écrire comme le produit cartésien de deux parties de $\mathbb{R}$.