Série d'éxercices : valeurs+vecteurs propres+daigonalisation

Exercice 1

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

1. Trouver toutes les valeurs propres de A et leurs vecteurs propres correspondants.
2. Trouver une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP = D$ soit diagonale.
3. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2

Soit la matrice A suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$$

1. Trouver toutes les valeurs propres de A et les vecteurs propres associés.
2. A est-elle diagonalisable ?.

Exercice 3

Soient $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Trouver toutes les valeurs propres et les vecteurs propres correspondants de A et de B considérés comme des matrices sur :

(i) le corps des réels $\mathbb{R}$,

(ii) le corps des complexes $\mathbb{C}$.

Exercice 4

Diagonaliser la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercice 5

Soient les Matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

A et B sont-elles diagonalisables ?

Exercice 6

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

1. Déterminer les valeurs propres de A
2. En déduire que la matrice A n'est pas diagonalisable .

Exercice 7

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites réelles définies sous forme récurrente par $u_0 = 1$, $v_0 = 1$, $w_0 = -1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par le système suivant :

$$(S)\begin{cases} u_{n+1} = 2u_n + 3v_n - 3w_n \\ v_{n+1} = -u_n + w_n \\ w_{n+1} = -u_n + v_n \end{cases}$$

1. Écrire le système (S) sous la forme matricielle $X_{n+1} = AX_n$ avec $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
2. Calculer les valeurs propres de A. En déduire que A est diagonalisable. Proposer une base $\mathcal{B}$ de vecteurs propres de A.
3. Soit P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à $\mathcal{B}$. Calculer P et P^{-1} , puis expliciter la matrice D définie par $D = P^{-1}AP$.
4. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
5. En déduire les expressions de u_n, v_n et w_n en fonction de n

Exercice 8

Soit A la matrice suivante $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

1. Déterminer les valeurs prpres de A.
2. Démontrer que A est diagonalisable et déterminer une matrice D diagonale et une matrice P inversible telles $A = P^{-1}DP$.
3. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.