

Bibm@th.net   

Rechercher sur le site...



Rechercher sur le site...

[Accueil](#) [Lycée](#) [Supérieur](#) [Bibliothèques](#) [Références](#) [Thèmes](#) [Forum](#)
[Math Sup](#) [Math Spé](#) [Capes](#) [Agreg interne](#) [BTS](#)

[Accueil](#) >

[Lycée](#) >
[Collège](#)
[Seconde](#)

[Supérieur](#) >
[Math Sup](#)
[Math Spé](#)
[Capes](#)
[Agreg interne](#)
[BTS](#)

[Bibliothèques](#) >
[Bibliothèque d'exercices](#)
[Bibliothèque de problèmes](#)
[Automatismes](#)

[Références](#) >
[Dictionnaire](#)
[Biographie de mathématiciens](#)
[Formulaire](#)
[Lexique français/anglais](#)

[Thèmes](#) >
[Cryptographie et codes secrets](#)
[Jeux et énigmes](#)
[Carrés magiques](#)
[Mathématiques au quotidien](#)
[Dossiers](#)

[Forum](#) >

Ressources mathématiques > Documents pour la math sup >

Ensembles, applications, relations

Pour comprendre le cours

Exercice 1 ★ - Écriture en extension [Signaler une erreur] [Ajouter à ma feuille d'exos]

Énoncé ▼

Écrire en extension (c'est-à-dire en donnant tous leurs éléments) les ensembles suivants :

$$A = \{\text{nombres entiers compris entre } \sqrt{2} \text{ et } 2\pi\}.$$

$$B = \left\{x \in \mathbb{Q}; \exists(n, p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, x = \frac{p}{n} \text{ et } 1 \leq p \leq 2n \leq 7\right\}.$$

Indication ▼

Pour B , prendre garde aux répétitions.

Corrigé ▼

On a :

$$A = \{2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Pour écrire B , on remarque que $1/2 \leq n \leq 7/2 \implies n = 1, 2 \text{ ou } 3$. Pour chaque valeur possible de n , on écrit les valeurs possibles de p , et on obtient :

$$B = \left\{1, 2, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right\}.$$

On n'a pas écrit plusieurs fois 1, qui s'obtient aussi avec $2/2$ et $3/3$, ni plusieurs fois 2, qu'on obtient avec $2/1$, $4/2$ et $6/3$.

Exercice 2 ★ - Ensemble des parties [Signaler une erreur] [Ajouter à ma feuille d'exos]

Énoncé ▼

Écrire l'ensemble des parties de $E = \{a, b, c, d\}$.

Indication ▼

Écrire toutes les parties à 0 éléments, toutes les parties à 1 éléments, etc... On doit trouver $2^4 = 16$ éléments dans $\mathcal{P}(E)$.

Corrigé ▼

On classe les parties suivant leur nombre d'éléments :

- 0 éléments : Il n'y a que l'ensemble vide : \emptyset .
- 1 élément : Il y a les 4 singletons : $\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}$.
- 2 éléments : Il y a 6 parties à 2 éléments :

$$\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}.$$

- 3 éléments : Il y a 4 parties à 3 éléments :

$$\{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}.$$

- 4 éléments : Il n'y a qu'une partie à 4 éléments : l'ensemble E lui-même.

L'ensemble des parties de E comporte donc $16 = 2^4$ éléments.

Exercice 3 ★ - Encore des exemples [Signaler une erreur] [Ajouter à ma feuille d'exos]

Énoncé ▼

Les applications suivantes sont-elles injectives, surjectives, bijectives?

1. $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, n \mapsto n + 1$.
2. $g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, n \mapsto n + 1$.
3. $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (x + y, x - y)$.

Indication ▼

1. 0 a-t-il un antécédent?
- 2.
3. Résoudre un système d'équations.

Corrigé ▼

1. f est clairement injective, mais n'est pas surjective car 0 n'a pas d'antécédent.
2. g est bijective : l'équation $n + 1 = k$, avec $k \in \mathbb{Z}$ admet une unique solution $n \in \mathbb{Z}$ qui vaut $n = k - 1$.
3. h est bijective : prenons en effet un couple (x_1, y_1) de \mathbb{R}^2 , et essayons de résoudre le système :

$$\begin{cases} x + y &= x_1 \\ x - y &= y_1 \end{cases}$$

Ce système possède une unique solution, donnée par $x = (x_1 + y_1)/2$ et $y = (x_1 - y_1)/2$.
L'application est bijective.

Exercice 4 ★ - Exemples d'image directe et d'image réciproque [Signaler une erreur] [Ajouter à ma feuille d'exos]

Enoncé ▼

1. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$, et soit $A = [-1, 4]$. Déterminer
 - 1.1. l'image directe de A par f ;
 - 1.2. l'image réciproque de A par f .
2. On considère la fonction $\sin : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Quelle est l'image directe, par \sin , de \mathbb{R} ? De $[0, 2\pi]$? de $[0, \pi/2]$? Quelle est l'image réciproque, par \sin , de $[0, 1]$? de $[3, 4]$? de $[1, 2]$?

Indication ▼

- 1.
- 2.

Corrigé ▼

1.
 - 1.1. On cherche toutes les valeurs prises par x^2 lorsque x parcourt $[-1, 4]$. Entre -1 et 0 , ce sont toutes les valeurs de 0 à 1 qui sont prises, et entre 0 et 4 , toutes les valeurs entre 0 et 16 . On a donc $f(A) = [0, 16]$.
 - 1.2. On a $x \in f^{-1}(A)$ si et seulement si $x^2 \in [-1, 4]$. Bien sûr, les valeurs négatives sont exclues, et pour que x^2 soit dans $[0, 4]$, il est nécessaire et suffisant que $x \in [-2, 2]$. On a donc $f^{-1}(A) = [-2, 2]$.
2. L'image directe de \mathbb{R} comme de $[0, 2\pi]$ est $[-1, 1]$. L'image directe de $[0, \pi/2]$ est $[0, 1]$. Pour déterminer l'image réciproque de $[0, 1]$, on cherche les réels x tels que $\sin(x) \in [0, 1]$. Ce sont tous les réels qui peuvent s'écrire $u + k2\pi$, avec $u \in [0, \pi]$ et $k \in \mathbb{Z}$. On peut encore écrire cet ensemble

$$\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [2k\pi, (2k + 1)\pi].$$

Aucun réel n'a son sinus dans $[3, 4]$. L'image réciproque de $[3, 4]$ est donc l'ensemble vide. Enfin, l'image réciproque de $[1, 2]$ est identique à l'image réciproque de $\{1\}$, et elle est égale à $\{\pi/2 + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$.

Exercice 5 ★ - Composition non commutative [Signaler une erreur] [Ajouter à ma feuille d'exos]

Énoncé ▼

1. Soient f et g les deux fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définies par

$$f(x) = 3x + 1 \text{ et } g(x) = x^2 - 1.$$

Calculer $f \circ g$ et $g \circ f$.

2. Dans les exemples suivants, déterminer deux fonctions u et v telles que $h = u \circ v$:

$$h_1(x) = \sqrt{3x-1} \quad h_2(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \quad h_3(x) = \frac{1}{x+7}.$$

Indication ▼

Corrigé ▼

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$f \circ g(x) = f(x^2 - 1) = 3(x^2 - 1) + 1 = 3x^2 - 2.$$

D'autre part, on a

$$g \circ f(x) = g(3x + 1) = (3x + 1)^2 - 1 = 9x^2 + 6x.$$

En particulier, on a $f \circ g \neq g \circ f$.

2. Pour chacun des cas, on peut poser :

2.1. $u(x) = \sqrt{x}, v(x) = 3x - 1;$

2.2. $u(x) = \sin x, v(x) = x + \frac{\pi}{2};$

2.3. $u(x) = \frac{1}{x}, v(x) = x + 7.$

Exercice 6 ★ - Composition et injectivité [Signaler une erreur] [Ajouter à ma feuille d'exos]

Énoncé ▼

Soient f et g les applications de \mathbb{N} dans \mathbb{N} définies par $f(x) = 2x$ et

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{si } x \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } x \text{ est impair.} \end{cases}$$

Déterminer $g \circ f$ et $f \circ g$. Les fonctions f et g sont-elles injectives? surjectives? bijectives?

Indication ▼

Il suffit d'appliquer les définitions. Pour calculer $f \circ g(x)$, on distinguera deux cas.

Corrigé ▼

On a $g \circ f(x) = g(2x)$. Mais $2x$ est pair, et donc $g(2x) = (2x)/2 = x$. Ainsi, $g \circ f(x) = x$.

D'autre part, si x est pair, on a $f \circ g(x) = f(x/2) = x$. Si x est impair, $f \circ g(x) = f(0) = 0$. En particulier, on a $f \circ g \neq g \circ f$ puisque $f \circ g(1) = 0$ alors que $g \circ f(1) = 1$.

f n'est pas surjective, car les nombres impairs ne sont pas des valeurs prises par f . En revanche, f est injective car si $f(x) = f(y)$, on a $2x = 2y$ et donc $x = y$.

g n'est pas injective, car $g(1) = g(3) = 0$ alors que $1 \neq 3$. En revanche, g est surjective. Prenons en effet y n'importe quel entier naturel. Alors, $2y$ est pair et $g(2y) = (2y)/2 = y$.

Des deux études précédentes, on déduit par définition que ni f ni g ne sont bijectives.

Exercice 7 ★★ - Calcul de la réciproque [Signaler une erreur] [Ajouter à ma feuille d'exos]**Énoncé** ▼

Démontrer que la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ définie par

$$f(x) = \frac{e^x + 2}{e^{-x}}$$

est bijective. Calculer sa bijection réciproque f^{-1} .

Indication ▼

Prendre $y > 0$ et résoudre l'équation $y = f(x)$. On doit trouver une unique valeur pour x .

Corrigé ▼

La première chose à remarquer est que f s'écrit plus facilement

$$f(x) = e^{2x} + 2e^x.$$

Soit $y > 0$. Alors on a

$$y = f(x) \iff e^{2x} + 2e^x - y = 0.$$

On pose alors $X = e^x$ et l'équation est équivalente à l'équation du second degré

$$X^2 + 2X - y = 0$$

dont les racines sont

$$X_1 = -1 - \sqrt{1+y} \text{ et } X_2 = -1 + \sqrt{1+y}.$$

Mais $e^x > 0$, et donc on a

$$y = f(x) \iff e^x = -1 + \sqrt{1+y} \iff x = \ln(-1 + \sqrt{1+y}).$$

L'équation $y = f(x)$ admet donc toujours une unique solution. La fonction f est bijective et

$$f^{-1}(y) = \ln(-1 + \sqrt{1+y}).$$

Exercice 8 ★★ - Avec des nombres complexes [Signaler une erreur] [Ajouter à ma feuille d'exos]**Énoncé** ▼

Démontrer que l'application

$$\begin{aligned} f : \mathbb{C} \setminus \{-3\} &\rightarrow \mathbb{C} \setminus \{i\} \\ z &\mapsto \frac{iz-i}{z+3} \end{aligned}$$

est une bijection. Déterminer sa bijection réciproque.

Indication ▼

Prouver que pour tout $w \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$, l'équation $f(z) = w$ admet une unique solution $z \in \mathbb{C} \setminus \{-3\}$ et déterminer cette solution.

Corrigé ▼

On va démontrer directement que f est bijective en prouvant que, pour tout $w \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$, l'équation $f(z) = w$ admet une unique solution $z \in \mathbb{C} \setminus \{-3\}$. Pour cela, on remarque que

$$\begin{aligned} \frac{iz-i}{z+3} = w &\iff iz-i = wz+3w \\ &\iff (i-w)z = 3w+i. \end{aligned}$$

Puisque $w \neq i$, ceci est encore équivalent à

$$z = \frac{3w + i}{i - w}.$$

L'équation admet une unique solution : f est bijective et sa bijection réciproque est donnée par

$$f^{-1}(w) = \frac{3w + i}{i - w}.$$

Exercice 9 ★ - Nature des relations [Signaler une erreur] [Ajouter à ma feuille d'exos]

Enoncé ▼

Dire si les relations suivantes sont réflexives, symétriques, antisymétriques, transitives :

1. $E = \mathbb{Z}$ et $x\mathcal{R}y \iff x = -y$;
2. $E = \mathbb{R}$ et $x\mathcal{R}y \iff \cos^2 x + \sin^2 y = 1$;
3. $E = \mathbb{N}$ et $x\mathcal{R}y \iff \exists p, q \geq 1, y = px^q$ (p et q sont des entiers).

Quelles sont parmi les exemples précédents les relations d'ordre et les relations d'équivalence?

Indication ▼

1. A-t-on $1\mathcal{R}1$?
2. Utiliser $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ pour démontrer que c'est réflexif et symétrique.
3. Remarquer que si $x\mathcal{R}y$, alors $x \leq y$.

Corrigé ▼

1. La relation n'est pas réflexive, car 1 n'est pas en relation avec lui-même. En effet, $1 \neq -1$. La relation est symétrique, car $x = -y \iff y = -x$. Elle n'est pas antisymétrique, car $1\mathcal{R}-1$ et $-1\mathcal{R}1$, alors que $1 \neq -1$. Elle n'est pas transitive, sinon, comme elle est symétrique, elle serait réflexive. On peut aussi vérifier que $1\mathcal{R}-1$, $-1\mathcal{R}1$ et 1 et 1 ne sont pas en relation. Cette relation n'est ni une relation d'équivalence, ni une relation d'ordre.

2. De la formule $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, on déduit que la relation est réflexive. Elle est aussi symétrique. En effet, si $x\mathcal{R}y$, ie $\cos^2 x + \sin^2 y = 1$, alors on a

$$\sin^2 x + \cos^2 x + \cos^2 y + \sin^2 y = (\cos^2 x + \sin^2 y) + (\cos^2 y + \sin^2 x) = 1 + (\cos^2 y + \sin^2 x)$$

d'une part, et

$$\sin^2 x + \cos^2 x + \cos^2 y + \sin^2 y = 1 + 1 = 2$$

d'autre part, ce qui entraîne bien

$$\cos^2 y + \sin^2 x = 1$$

et donc la relation est symétrique.

Elle n'est pas antisymétrique, car $0\mathcal{R}2\pi$ et $2\pi\mathcal{R}0$ alors que $0 \neq 2\pi$.

Elle est transitive. Si $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$, on a

$$\cos^2 x + \sin^2 y = 1 \text{ et } \cos^2 y + \sin^2 z = 1$$

soit en sommant

$$\cos^2 x + (\cos^2 y + \sin^2 y) + \sin^2 z = 2$$

ce qui implique

$$\cos^2 x + \sin^2 z = 1.$$

On a donc affaire à une relation d'équivalence.

3. La relation est réflexive (prendre $p = q = 1$), elle n'est pas symétrique car si $x\mathcal{R}y$, on a forcément $x \leq y$. Ainsi, on a $2\mathcal{R}4$ (prendre $p = 2, q = 1$), alors qu'on n'a pas $4\mathcal{R}2$. La relation est

antisymétrique : si $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x$, alors on a $x \leq y$ et $y \leq x$ et donc $x = y$. Enfin, la relation est transitive. Si $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$, alors il existe des entiers $p, q, a, b \geq 1$ tels que

$$y = px^q \text{ et } z = ay^b.$$

On en déduit

$$z = a(px^q)^b = (ap^b)x^{bq}$$

et donc $x\mathcal{R}z$. La relation est une relation d'ordre.

Exercice 10 ★ - Classe d'équivalence sur \mathbb{R}^2 [Signaler une erreur] [Ajouter à ma feuille d'exos]

Énoncé ▼

Sur \mathbb{R}^2 , on définit la relation d'équivalence \mathcal{R} par

$$(x, y)\mathcal{R}(x', y') \iff x = x'.$$

Démontrer que \mathcal{R} est une relation d'équivalence, puis déterminer la classe d'équivalence d'un élément $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

Indication ▼

Corrigé ▼

La relation \mathcal{R} est une relation d'équivalence. En effet, elle est

- réflexive : $(x, y)\mathcal{R}(x, y)$ car $x = x$;
- symétrique : si $(x, y)\mathcal{R}(x', y')$, alors $x = x'$ ce qui s'écrit aussi $x' = x$ et qui est équivalent à $(x', y')\mathcal{R}(x, y)$.
- transitive : si $(x, y)\mathcal{R}(x', y')$ et si $(x', y')\mathcal{R}(x'', y'')$, alors on a $x = x'$ d'une part et $x' = x''$ d'autre part, donc $x = x''$ ce qui entraîne $(x, y)\mathcal{R}(x'', y'')$.

Chercher la classe d'équivalence de (x_0, y_0) , c'est déterminer tous les couples (x, y) tels que $(x, y)\mathcal{R}(x_0, y_0)$. Mais,

$$(x, y)\mathcal{R}(x_0, y_0) \iff x = x_0.$$

Autrement dit, x doit être égal à x_0 et y peut être quelconque. On en déduit que la classe d'équivalence de (x_0, y_0) pour la relation d'équivalence \mathcal{R} est $\{(x_0, y); y \in \mathbb{R}\}$.

Ensembles

Exercice 11 ★ - Partie d'une union [Signaler une erreur] [Ajouter à ma feuille d'exos]

Énoncé ▼

Est-ce que $C \subset A \cup B$ entraîne $C \subset A$ ou $C \subset B$?

Indication ▼

Faire un dessin et donner un contre-exemple.

Corrigé ▼

Non! Prendre par exemple $A = \{1, 2\}$, $B = \{3, 4\}$ et $C = \{2, 3\}$.

Exercice 12 ★ - Trois ensembles [Signaler une erreur] [Ajouter à ma feuille d'exos]

Énoncé ▼

Soient A, B, C trois ensembles tels que $A \cup B = B \cap C$. Montrer que $A \subset B \subset C$.

Indication ▼

Corrigé ▼

Prenons $x \in A$. Alors $x \in A \cup B$, et donc $x \in B \cap C$. En particulier, $x \in B$, et donc $A \subset B$.
 Prenons maintenant $x \in B$. Alors $x \in A \cup B$, et donc $x \in B \cap C$. En particulier, $x \in C$, et donc $B \subset C$.
 .

Exercice 13 ★★ - Deux descriptions d'un même ensemble [Signaler une erreur] [Ajouter à ma feuille d'exos]

Enoncé ▼

Soit $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 4x - y = 1\}$ et $C = \{(t + 1, 4t + 3); t \in \mathbb{R}\}$. Démontrer que $A = C$.

Indication ▼

Procéder par double inclusion.

Corrigé ▼

On va procéder par double inclusion. Le plus facile est de prouver que $C \subset A$. En effet, prenons un couple $(x, y) \in C$. Alors on sait qu'il existe un $t \in \mathbb{R}$ tel que $x = t + 1$ et $y = 4t + 3$. Mais alors,

$$4x - y = 4t + 4 - 4t - 3 = 1$$

et donc on a bien $(x, y) \in A$.

Réciproquement, prenons $(x, y) \in A$ et prouvons que $(x, y) \in C$. C'est plus difficile, car il faut construire un réel t . On va procéder par analyse-synthèse. Si un tel t existe, alors nécessairement on doit avoir $t = x - 1$. Posons donc $t = x - 1$. Alors, $y = 4x - 1 = 4(t + 1) - 1 = 4t + 3$. On a donc bien $(x, y) = (t + 1, 4t + 3)$ et $(x, y) \in C$.

Exercice 14 ★★★ - Lois de Morgan [Signaler une erreur] [Ajouter à ma feuille d'exos]

Enoncé ▼

Soient A , B et C trois parties d'un ensemble E . Pour $X \subset E$, on note X^c le complémentaire de X dans E . Démontrer les lois de Morgan suivantes :

1. $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$
2. $(A^c)^c = A$
3. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$
4. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.

Indication ▼

Raisonner à chaque fois par double inclusion.

Corrigé ▼

On raisonne à chaque fois par double inclusion.

1. Soit $x \in (A \cap B) \cup C$. Alors $(x \in A \text{ et } x \in B) \text{ ou } x \in C$. Si $x \in A$ et $x \in B$, alors $x \in A \cup C$ et $x \in B \cup C$, et l'inclusion est prouvée. Sinon, c'est que $x \in C$, et dans ce cas on a aussi $x \in A \cup C$ et $x \in B \cup C$.

Réciproquement, si $x \in A \cup C$ et $x \in B \cup C$, on distingue deux cas :

- Si $x \in C$, alors $x \in (A \cap B)$ ou $x \in C$ et donc $x \in (A \cap B) \cup C$.
- Sinon, $x \notin C$. Mais alors, puisque $x \in A \cup C$, on a $x \in A$. De même, puisque $x \in B \cup C$, on a $x \in B$. Ceci prouve que $x \in A \cap B$ et donc $x \in (A \cap B) \cup C$.

2. On suppose que $x \in (A^c)^c$. Alors $x \notin A^c$, et donc $x \in A$. Réciproquement, si $x \in A$, alors $x \notin A^c$ et donc $x \in (A^c)^c$.

3. Soit $x \in (A \cap B)^c$. Alors $x \notin A \cap B$. On a donc $x \notin A$ ou $x \notin B$, c'est-à-dire $x \in A^c$ ou $x \in B^c$. On en déduit que $x \in A^c \cup B^c$. Réciproquement, soit $x \in A^c \cup B^c$. Alors $x \in A^c$ ou $x \in B^c$, c'est-à-dire $x \notin A$ ou $x \notin B$. En particulier, $x \notin A \cap B$ et donc $x \in (A \cap B)^c$.

4. On peut présenter aussi les raisonnements précédents sous forme d'équivalence. C'est ce que l'on fait pour ce dernier exemple :

$$\begin{aligned}
 x \in (A \cup B)^c &\iff x \notin A \cup B \\
 &\iff x \notin A \text{ et } x \notin B \\
 &\iff x \in A^c \text{ et } x \in B^c \\
 &\iff x \in A^c \cap B^c.
 \end{aligned}$$

Exercice 15 ★★★ - **Produit cartésien** [Signaler une erreur] [Ajouter à ma feuille d'exos]**Enoncé** ▼

Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1\}$. Démontrer que D ne peut pas s'écrire comme le produit cartésien de deux parties de \mathbb{R} .

Indication ▼

Faire un dessin, raisonner par l'absurde et considérer $(1, 0)$ et $(0, 1)$.

Corrigé ▼

Procédons par l'absurde et supposons qu'il existe $A, B \subset \mathbb{R}$ tels que $D = A \times B$. Alors le point $(1, 0) \in D$, et donc $1 \in A$. De même, $(0, 1) \in D$, et donc $1 \in B$. On en déduit que $(1, 1) \in A \times B = D$, ce qui n'est pas le cas. D n'est donc pas le produit cartésien de deux parties de \mathbb{R} .

Exercice 16 ★★★ - **Réunion et intersection égales** [Signaler une erreur] [Ajouter à ma feuille d'exos]**Enoncé** ▼

Soit E un ensemble et A, B, C trois éléments de $\mathcal{P}(E)$.

1. Démontrer que, si $A \cap B = A \cup B$, alors $A = B$.
2. Démontrer que, si $A \cap B = A \cap C$ et $A \cup B = A \cup C$, alors $B = C$. Une seule des deux conditions suffit-elle?

Indication ▼

1. Prendre $x \in A$ et démontrer par l'absurde que $x \in B$.
2. Prendre $x \in B$ et distinguer les cas $x \in A$ et $x \notin A$.

Corrigé ▼

1. Par symétrie du problème en A et B , il suffit de démontrer que $A \subset B$. Prenons $x \in A$ et supposons que $x \notin B$. Alors $x \in A \cup B$ mais $x \notin A \cap B$ et donc les ensembles $A \cap B$ et $A \cup B$ sont différents, une contradiction. C'est donc que $x \in B$.

2. Par symétrie du problème en B et C , il suffit de démontrer l'inclusion $B \subset C$. Soit donc $x \in B$. On distingue deux cas :

- ou bien $x \in A$. Dans ce cas, $x \in A \cap B = A \cap C$, et donc $x \in C$.
- ou bien $x \notin A$. Dans ce cas, $x \in A \cup B = A \cup C$ et donc $x \in A$ ou $x \in C$. Puisqu'on est dans le cas $x \notin A$, on en déduit que $x \in C$.

Dans tous les cas, on a démontré $x \in C$, et donc $B \subset C$. Une seule des deux conditions n'est pas suffisante :

- Si on suppose seulement que $A \cup B \subset A \cup C$, il suffit de prendre $A = \{1, 2\}$, $B = \{1\}$ et $C = \{2\}$. On a bien $A \cup B \subset A \cup C$, mais on n'a pas $B \subset C$.
- Si on suppose seulement que $A \cap B \subset A \cap C$, il suffit de prendre $A = C = \{1\}$ et $B = \{1, 2\}$.

Exercice 17 ★★★ - **Différence symétrique** [Signaler une erreur] [Ajouter à ma feuille d'exos]**Enoncé** ▼

Soit E un ensemble, et A, B deux sous-ensembles de E . On appelle **différence symétrique** de A et B , notée $A \Delta B$, le sous-ensemble de E :

$$A \Delta B = \{x \in A \cup B; x \notin A \cap B\}.$$

1. Interpréter les éléments de $A \Delta B$.
2. Montrer que $A \Delta B = (A \cap C_E B) \cup (B \cap C_E A)$ ($C_E A$ désigne le complémentaire de A dans E).
3. Calculer $A \Delta A$, $A \Delta \emptyset$, $A \Delta E$, $A \Delta C_E A$.
4. Démontrer que pour tous A, B, C sous-ensembles de E , on a :

$$(A \Delta B) \cap C = (A \cap C) \Delta (B \cap C).$$

Indication ▼

- 1.
2. Raisonner par double inclusion.
3. Utiliser par exemple l'écriture précédente.
4. Raisonner par double inclusion.

Corrigé ▼

1. Les éléments de $A \Delta B$ sont les éléments qui appartiennent à A ou à B , mais qui n'appartiennent pas simultanément aux deux (dans un langage informatique, on pourrait parler de "ou exclusif").
2. Soit $x \in A \Delta B$. Par symétrie du problème, on peut toujours supposer que $x \in A$. Nécessairement, $x \notin B$. On en déduit que $x \in A$ et $x \in C_E B$. Ceci donne $x \in A \cap C_E B$. Réciproquement, si par exemple $x \in A \cap C_E B$, $x \in A$ et $x \notin B$, et donc $x \in A \cup B$ et $x \notin A \cap B$. L'autre possibilité se traite exactement de la même façon.
3. En utilisant ou la définition (c'est plus clair avec l'interprétation de la première question), ou le résultat précédent, on a :

$$A \Delta A = \emptyset.$$

$$A \Delta \emptyset = A.$$

$$A \Delta E = C_E A.$$

$$A \Delta C_E A = E.$$

4. Comme toujours, on raisonne par double inclusion. Si $x \in (A \Delta B) \cap C$, alors $x \in A \Delta B$ et $x \in C$. Si on a $x \in A$, alors $x \notin B$, et $x \in C$, ce qui donne encore : $x \in A \cap C$ et $x \notin B \cap C$. On a bien $x \in (A \cap C) \Delta (B \cap C)$. Le cas où $x \in B$ se traite exactement de la même façon (par symétrie). Réciproquement, si $x \in (A \cap C) \Delta (B \cap C)$, supposons par exemple que $x \in (A \cap C)$. Alors $x \notin B \cap C$, ce qui implique $x \notin B$ ou $x \notin C$. Mais, $x \in (A \cap C) \implies x \in A$ et $x \in C$. On en déduit que $x \notin B$. D'où $x \in A \Delta B$, et $x \in C$, ce qui est le résultat que nous voulions prouver. L'autre cas se traite également par symétrie.

Exercice 18 ★★★★★ - Retour sur la différence symétrique [Signaler une erreur] [Ajouter à ma feuille d'exos]

Enoncé ▼

Soit E un ensemble et soient A, B deux parties de E . On rappelle que la \emph{différence symétrique} de A et B est définie par

$$A \Delta B = (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)$$

où \bar{A} (resp. \bar{B}) désigne le complémentaire de A (resp. de B) dans E . Démontrer que $A \Delta B = B$ si et seulement si $A = \emptyset$.

Indication ▼

Pour la réciproque, prouver séparément que $A \cap B = \emptyset$ et que $A \cap \bar{B} = \emptyset$.

Corrigé ▼

Il y a d'abord un sens qui est facile : si $A = \emptyset$, alors par définition de la différence symétrique, on a bien $A \Delta B = B$ car $A = \emptyset$ et $\bar{A} \cap B = B$. Réciproquement, si $A \Delta B = B$, il faut prouver que $A = \emptyset$. On va découper la preuve en deux parties :

1. on prouve que $A \cap B = \emptyset$. En effet, prenons $x \in B$. Alors, en particulier $x \in A \Delta B$, et donc $x \in A \cap \bar{B}$ ou $x \in \bar{A} \cap B$. La première éventualité est impossible (car $x \in B$) et donc on a $x \in \bar{A} \cap B$. Ainsi, tout élément de B est aussi dans \bar{A} , et donc $A \cap B = \emptyset$.
2. on va aussi prouver que $A \cap \bar{B} = \emptyset$. En effet, imaginons qu'on puisse trouver un élément dans $A \cap \bar{B}$. Alors cet élément serait aussi dans $A \Delta B = B$, ce qui est impossible puisqu'il serait simultanément dans B et dans \bar{B} .

La confrontation des deux propriétés précédentes entraîne alors que $A = \emptyset$.

Exercice 19 ★★★ - Fonction caractéristique [Signaler une erreur] [Ajouter à ma feuille d'exos]

Enoncé ▼

Soit A une partie d'un ensemble E . On appelle fonction caractéristique de A l'application f de E dans l'ensemble à deux éléments $\{0, 1\}$ telle que :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

Soient A et B deux parties de E , f et g leurs fonctions caractéristiques. Montrer que les fonctions suivantes sont les fonctions caractéristiques d'ensembles que l'on déterminera :

1. $1 - f$;
2. fg ;
3. $f + g - fg$.

Indication ▼

On retrouve les trois opérations classiques sur les ensembles.

Corrigé ▼

1. $h = 1 - f$ est la fonction caractéristique du complémentaire de A , \bar{A} . En effet, on a $h(x) = 0$ si $f(x) = 1$, c'est-à-dire si $x \in A$, c'est-à-dire si $x \notin \bar{A}$, et $h(x) = 1$ si $f(x) = 0$, c'est-à-dire si $x \notin A$, c'est-à-dire si $x \in \bar{A}$.
2. $h = fg$ est la fonction caractéristique de $A \cap B$. En effet, si $x \in A \cap B$, alors $f(x) = g(x) = 1$, et donc $h(x) = 1$. Si $x \notin A \cap B$, alors ou bien $x \notin A$ et $f(x) = 0$ ou bien $x \notin B$ et $g(x) = 0$. Dans tous les cas, $h(x) = 0$.
3. $h = f + g - fg$ est la fonction caractéristique de $A \cup B$. En effet, si $x \notin A \cup B$, alors $f(x) = g(x) = 0$, et donc $h(x) = 0$. Si $x \in A \cup B$, alors on peut distinguer trois cas :
 - $x \in A$ et $x \in B$: on a alors $f(x) = g(x) = 1$, et $h(x) = 1 + 1 - 1 = 1$;
 - $x \in A$ et $x \notin B$: on a alors $f(x) = 1$ et $g(x) = 0$, soit $h(x) = 1 + 0 - 0 = 1$;
 - $x \notin A$ et $x \in B$: on a alors $f(x) = 0$ et $g(x) = 1$, soit $h(x) = 0 + 1 - 0 = 1$.

Applications

Exercice 20 ★★★ - Un exemple avec des fonctions [Signaler une erreur] [Ajouter à ma feuille d'exos]

Enoncé ▼

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 2x/(1 + x^2)$.

1. f est-elle injective? surjective?
2. Montrer que $f(\mathbb{R}) = [-1, 1]$.
3. Montrer que la restriction $g : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$, $g(x) = f(x)$ est une bijection.

Indication ▼

1. Calculer $f(2)$ et $f(1/2)$. Montrer que 2 n'a pas d'antécédent.
2. Résoudre l'équation $f(x) = y$.
3. Montrer qu'il n'y a qu'une solution!

Corrigé ▼

1. f n'est pas injective, car $f(2) = f(1/2) = 4/5$. f n'est pas surjective, car $y = 2$ n'a pas d'antécédent : en effet, l'équation $f(x) = 2$ devient $2x = 2(1 + x^2)$ soit $x^2 - x + 1 = 0$ qui n'a pas de solutions dans \mathbb{R} .

2. L'équation $f(x) = y$ est équivalent à l'équation $yx^2 - 2x + y = 0$. Cette équation a des solutions réelles si et seulement si $\Delta = 4 - 4y^2 \geq 0$, donc il y a des solutions si et seulement si $y \in [-1, 1]$. Ainsi, on a exactement $f(\mathbb{R}) = [-1, 1]$.

3. Soit $y \in]-1, 1[\setminus \{0\}$. Les solutions possibles de l'équation $g(x) = y$ sont $x = \frac{1 - \sqrt{1 - y^2}}{y}$ ou $x = \frac{1 + \sqrt{1 - y^2}}{y}$. La deuxième solution n'appartient pas à $[-1, 1]$ (elle est strictement supérieure à 1 si $y > 0$, et strictement inférieure à -1 si $y < 0$). D'autre part, $x = \frac{1 - \sqrt{1 - y^2}}{y} = \frac{y}{1 + \sqrt{1 - y^2}}$ est dans $[-1, 1]$. En effet,

$$1 \leq 1 + \sqrt{1 - y^2} \implies 0 < \frac{1}{1 + \sqrt{1 - y^2}} \leq 1$$

tandis que

$$-1 < y < 1.$$

On en déduit que

$$-1 \leq \frac{-1}{1 + \sqrt{1 - y^2}} \leq y \leq \frac{1}{1 + \sqrt{1 - y^2}} \leq 1.$$

D'autre part, si $y = 1$, l'équation $g(x) = 1$ a pour unique solution $x = 1$ tandis que si $y = -1$, l'équation $g(x) = -1$ a pour unique solution $x = -1$. Enfin, si $y = 0$, l'équation $g(x) = 0$ admet pour unique solution $x = 0$.

Dans tous les cas, on a prouvé que pour tout $y \in [-1, 1]$, l'équation $g(x) = y$ admet une unique solution avec $x \in [-1, 1]$. Nous avons bien prouvé que g est une bijection.

Exercice 21 ★★ - Composition itérée [Signaler une erreur] [Ajouter à ma feuille d'exos]

Enoncé ▼

Soit $f(x) = \frac{x}{x+1}$. Déterminer $f \circ f \circ \dots \circ f(x)$ (où le symbole f apparaît n fois) en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$ et de $x \in \mathbb{R}$.

Indication ▼

Calculer $f \circ f(x)$ pour émettre une conjecture. Démontrer la conjecture par récurrence.

Corrigé ▼

On va commencer par calculer $f \circ f(x)$ pour émettre une conjecture. On a

$$f \circ f(x) = \frac{\frac{x}{x+1}}{\frac{x}{x+1} + 1} = \frac{x}{2x + 1}.$$

Ceci nous conduit à conjecturer que

$$f \circ f \circ \dots \circ f(x) = \frac{x}{nx + 1}.$$

Démontrons ce résultat par récurrence. Il est vrai au rang $n = 1$ et $n = 2$. Supposons le résultat démontré au rang $n - 1$. Alors

$$f \circ f \circ \dots \circ f(x) = \frac{\frac{x}{x+1}}{(n-1)\frac{x}{x+1} + 1} = \frac{\frac{x}{x+1}}{\frac{(n-1)x + x + 1}{x+1}} = \frac{x}{nx + 1}.$$

Le résultat est donc encore vrai au rang n . Par le principe de récurrence, il est vrai pour tout entier n . Remarquons que la rédaction ne s'est posée la question de savoir pour quelle valeur de x on pouvait définir $f \circ f \circ \dots \circ f(x)$. Voici une jolie question subsidiaire...

Exercice 22 ★★★★★ - Une bijection de \mathbb{N}^2 dans \mathbb{N} [Signaler une erreur] [Ajouter à ma feuille d'exos]**Énoncé** ▼

Soit $f : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}^*$, $(n, p) \mapsto 2^n(2p + 1)$. Démontrer que f est une bijection. En déduire une bijection de \mathbb{N}^2 sur \mathbb{N} .

Indication ▼

Pour prouver l'injectivité, on pourra démontrer qu'un nombre pair et qu'un nombre impair ne peuvent pas être égaux. Pour prouver la surjectivité, on pourra utiliser une décomposition en produit de facteurs premiers.

Corrigé ▼

Remarquons d'abord que f est bien à valeurs dans \mathbb{N}^* . Prouvons ensuite que f est injective. Soient (n, p) et (m, q) deux éléments de \mathbb{N}^2 tels que $f(n, p) = f(m, q)$. Alors on a $2^n(2p + 1) = 2^m(2q + 1)$. Supposons par exemple $n \geq m$. Alors on obtient

$$2^{n-m}(2p + 1) = 2q + 1.$$

Si $n \neq m$, le terme de gauche est pair et celui de droite est impair, une contradiction. Donc $n = m$. On obtient alors $2p + 1 = 2q + 1$, soit aussi $p = q$. Finalement, on a bien $(n, p) = (m, q)$ et donc f est injective. Prouvons ensuite que f est surjective. Soit $l \in \mathbb{N}^*$. Alors l se décompose en produit de facteurs premiers

$$l = 2^n p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r},$$

avec $p_i, i \geq 2$, des nombres premiers impairs. Le produit de nombres impairs étant impair, on sait que $p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r}$ est impair et s'écrit donc $2p + 1$, avec $p \in \mathbb{N}$. On a donc $l = 2^n(2p + 1) = f(n, p)$ et f est surjective. Pour trouver une bijection de \mathbb{N}^2 dans \mathbb{N} , il suffit de composer avec une bijection de \mathbb{N}^* dans \mathbb{N} , par exemple l'application $n \mapsto n - 1$. Ainsi, l'application $g : (n, p) \mapsto 2^n(2p + 1) - 1$ est une bijection de \mathbb{N}^2 dans \mathbb{N} .

Exercice 23 ★★★★★ - Un exemple avec de l'arithmétique [Signaler une erreur] [Ajouter à ma feuille d'exos]**Énoncé** ▼

Soit $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{Q}$, $(p, q) \mapsto p + \frac{1}{q}$. f est-elle injective, surjective?

Indication ▼

Pour démontrer que f est injective, appliquer la définition, et mettre les p ensemble, les q ensemble. Pour traiter la surjectivité, essayer de trouver un antécédent à $2/3$.

Corrigé ▼

On va commencer par prouver que f est injective. Prenons (p, q) et (p', q') tels que $f(p, q) = f(p', q')$. On souhaite prouver que $(p, q) = (p', q')$.

$$f(p, q) = f(p', q') \iff p' - p = \frac{1}{q} - \frac{1}{q'}.$$

Mais $0 < \frac{1}{q'} \leq 1$ et $-1 \leq -\frac{1}{q} < 0$. On en déduit que

$$-1 < \frac{1}{q} - \frac{1}{q'} < 1$$

On a donc $|p - p'| < 1$, alors que $p - p'$ est un entier. On en déduit que $p = p'$, puis, utilisant de nouveau que $f(p, q) = f(p', q')$, que $q = q'$.

On va ensuite prouver que f n'est pas surjective. En effet, $2/3$ n'a pas d'antécédents. Sinon, il s'écrit $p + \frac{1}{q}$. Puisque $p < p + 1/q = 2/3 \leq p + 1$, il faudrait nécessairement que $p = 0$. Et donc on aurait $\frac{2}{3} = \frac{1}{q}$ soit $q = 3/2$, ce qui n'est pas un entier. Donc f n'est pas surjective.

Exercice 24 ★★★★★ - Devinettes... [Signaler une erreur] [Ajouter à ma feuille d'exos]

Enoncé ▼

1. Déterminer une bijection de $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^*$.
2. Déterminer une bijection de $\{1/n; n \geq 1\}$ dans $\{1/n; n \geq 2\}$.
3. Dédurre de la question précédente une bijection de $[0, 1]$ dans $[0, 1[$.
4. Déterminer une bijection de $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$.

Indication ▼

1. Pensez au décalage....
2. Décalez toujours, mais les dénominateurs!
3. Séparer $[0, 1]$ en 2 parties : les réels qui s'écrivent $1/n$, et les autres. Pour les premiers, prendre l'application précédente. Pour les seconds, appliquer l'identité!
4. Envoyer les entiers naturels pairs sur les entiers positifs, les entiers naturels impairs sur les entiers négatifs.

Corrigé ▼

1. Posons $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^*$, définie par $f(n) = n + 1$. Remarquons f est bien à image dans \mathbb{N}^* . Il reste à prouver que f est bijective, ce qui est très facile avec la définition : si $n \in \mathbb{N}^*$, on a $f(k) = n \iff k + 1 = n \iff k = n - 1$, l'équation $f(k) = n$ admet une unique solution dans \mathbb{N} , ce qui dit bien que f est bijective.
2. Posons $g : \{1/n; n \geq 1\} \rightarrow \{1/n; n \geq 2\}$, définie par $g(1/n) = 1/(n + 1)$. Remarquons là aussi que l'ensemble d'arrivée est bien cohérent avec l'ensemble de départ. D'autre part, g est bijective.
3. C'est plus compliqué!!! Ecrivons $[0, 1] = \{1/n; n \geq 1\} \cup A$, où A est le complémentaire de $\{1/n; n \geq 1\}$ dans $[0, 1]$. On définit h de la façon suivante :
 - Si $x = 1/n$, alors $h(x) = 1/(n + 1)$.
 - Sinon, c'est-à-dire si $x \in A$, $h(x) = x$.
 Alors h est bijective! Prouvons d'abord qu'elle est injective : si $h(x) = h(x')$, on distingue 3 cas :
 - Si $x \in A$ et $x' \in A$, alors $h(x) = x$ et $h(x') = x'$ ce qui entraîne $x = x'$.
 - Si $x \in A$ et $x' \notin A$, écrivant $x' = 1/k$, on a $x = h(x) = h(x') = 1/(k + 1)$, ce qui implique $x \notin A$, ce qui est impossible.
 - Si $x \notin A$ et $x' \notin A$, écrivant $x = 1/k$ et $x' = 1/n$, on a $1/(k + 1) = h(x) = h(x') = 1/(n + 1)$ ce qui entraîne $k + 1 = n + 1$ et par suite $x = x'$.
 Dans tous les cas possibles, on trouve $x = x'$, et h est injective. Prouvons maintenant que h est surjective, et choisissons $y \in [0, 1]$. Si $y \in A$, en particulier $y \neq 1$, et on a $h(y) = y$. Si $y \notin A$, $y = 1/n$, où n est entier strictement plus grand que 1 puisque $y \neq 1$. On a alors $h(1/(n - 1)) = y$. Dans tous les cas, y possède un antécédent, ce qui prouve que h est surjective.
4. Rappelons que tout entier peut s'écrire $2k$ s'il est pair, et $2k + 1$ s'il est impair. Posons $f(2k) = k$, et $f(2k + 1) = -k - 1$. Reste à vérifier que f est bijective, ce qui est laissé au lecteur!

Exercice 25 ★★ - Composition, injectivité et surjectivité [Signaler une erreur] [Ajouter à ma feuille d'exos]

Enoncé ▼

On considère 4 ensembles A, B, C et D , et des applications $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow C$ et $h : C \rightarrow D$. Montrer que

$$g \circ f \text{ injective} \implies f \text{ injective},$$

$$g \circ f \text{ surjective} \implies g \text{ surjective}.$$

Montrer que :

$$(g \circ f \text{ et } h \circ g \text{ sont bijectives}) \iff (f, g \text{ et } h \text{ sont bijectives}).$$

Indication ▼

Pour la première implication, prendre a et b avec $f(a) = f(b)$ et composer par g . Pour la seconde, prendre $y \in C$, retrouver l'antécédent par $g \circ f$, puis revenir à g . Pour l'équivalence, un sens est facile. Pour l'autre, d'abord démontrer que g est bijective, et en déduire les autres.

Corrigé ▼

Première implication : si $f(a) = f(b)$, alors $g \circ f(a) = g \circ f(b)$, et puisque $g \circ f$ est injective, on en déduit $a = b$.

Deuxième implication : soit $y \in C$. Puisque $g \circ f$ est surjective, il existe $a \in A$ avec $g \circ f(a) = y$. Posons $b = f(a)$. On a alors $g(b) = y$, ce qui prouve que g est surjective.

Equivalence : d'abord, si f , g et h sont bijectives, la composée d'applications bijectives étant bijective, on en déduit que $g \circ f$ et $h \circ g$ sont bijectives. Réciproquement, puisque $g \circ f$ est bijective, elle est surjective, et on trouve que g est surjective. D'autre part, puisque $h \circ g$ est bijective, elle est injective et donc g est injective. On trouve donc que g est bijective. Puisque $g \circ f$ est bijective, composant par g^{-1} à gauche qui est bijective, f est bijective. De même, puisque $h \circ g$ est bijective et que g est bijective, $(h \circ g) \circ g^{-1}$ est bijective, et ceci est égal à h .

Exercice 26 ★★ - Image directe de l'image réciproque...et vice-versa! [Signaler une erreur] [Ajouter à ma feuille d'exos]

Enoncé ▼

Soient E et F deux ensembles et $f : E \rightarrow F$. Démontrer que

1. $\forall A \in \mathcal{P}(E), A \subset f^{-1}(f(A))$;
2. $\forall B \in \mathcal{P}(F), f(f^{-1}(B)) \subset B$.
3. Question subsidiaire (plus difficile) : a-t-on égalité en général?

Indication ▼

Il faut se laisser porter par les définitions....

Corrigé ▼

1. Soit $x \in A$. On a $f(x) \in f(A)$, et donc $x \in f^{-1}(f(A))$. Ainsi, on a prouvé l'inclusion $A \subset f^{-1}(f(A))$.
2. Soit $y \in f(f^{-1}(B))$. Alors il existe $x \in f^{-1}(B)$ tel que $y = f(x)$. Mais puisque $x \in f^{-1}(B)$, alors $f(x) \in B$. Et donc $y = f(x) \in B$. On a bien prouvé l'inclusion $f(f^{-1}(B)) \subset B$.
3. Les inclusions peuvent être strictes. Prenons $f : \{1, 2\} \rightarrow \{1, 2\}, 1 \mapsto 1$ et $2 \mapsto 1$ et $B = \{1, 2\}$. Alors $f^{-1}(B) = \{1, 2\}$ et $f(f^{-1}(B)) = \{1\}$ qui est différent de B . Pour l'autre exemple, prenons $A = \{1\}$. Alors $f(A) = \{1\}$ et $f^{-1}(f(A)) = \{1, 2\}$ qui est différent de A .

Exercice 27 ★★ - Ensembles et images réciproques [Signaler une erreur] [Ajouter à ma feuille d'exos]

Enoncé ▼

Soient E et F deux ensembles et soit $f : E \rightarrow F$. Soient également A et B deux parties de F .

1. Démontrer que $A \subset B \implies f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$. La réciproque est-elle vraie?
2. Démontrer que $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.
3. Démontrer que $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.

Indication ▼

- 1.
2. Pour une des deux inclusions, utiliser la question précédente.
- 3.

Corrigé ▼

1. Prenons $x \in f^{-1}(A)$. Alors $f(x) \in A$ et donc $f(x) \in B$, et donc $x \in f^{-1}(B)$, ce qui prouve l'inclusion $f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$. La réciproque n'est pas toujours vraie. Prenons $E = \{1\}$, $F = \{1, 2\}$, $f : E \rightarrow F$ définie par $f(1) = 1$, $A = \{2\}$ et $B = \{1\}$. Alors $f^{-1}(A) = \emptyset \subset f^{-1}(B) = \{1\}$. Et pourtant, A n'est pas inclus dans B .
2. On a $A \cap B \subset A$, et donc $f^{-1}(A \cap B) \subset f^{-1}(A)$. De même, $f^{-1}(A \cap B) \subset f^{-1}(B)$, et donc $f^{-1}(A \cap B) \subset f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.
Réciproquement, soit $x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$. Alors on a à la fois $f(x) \in A$ et $f(x) \in B$, ce qui entraîne $f(x) \in A \cap B$. Ainsi, $x \in f^{-1}(A \cap B)$, et donc $f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) \subset f^{-1}(A \cap B)$.
3. On a $A \subset A \cup B$ et donc $f^{-1}(A) \subset f^{-1}(A \cup B)$. De même, $f^{-1}(B) \subset f^{-1}(A \cup B)$ et donc $f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) \subset f^{-1}(A \cup B)$.
Réciproquement, si $x \in f^{-1}(A \cup B)$, alors $f(x) \in A \cup B$. Ainsi, ou bien $f(x) \in A$, ou bien $f(x) \in B$. Mais si $f(x) \in A$, on a $x \in f^{-1}(A) \subset f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$ et de même, si $f(x) \in B$, on a $x \in f^{-1}(B) \subset f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$. Dans tous les cas, on a prouvé que $x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$ et donc l'inclusion $f^{-1}(A \cup B) \subset f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.

Exercice 28 ★★ - Ensembles et images directes [Signaler une erreur] [Ajouter à ma feuille d'exos]

Enoncé ▼

Soient E et F deux ensembles et soit $f : E \rightarrow F$. Soient également A et B deux parties de E .

1. Démontrer que $A \subset B \implies f(A) \subset f(B)$. La réciproque est-elle vraie?
2. Démontrer que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$. L'inclusion réciproque est-elle vraie?
3. Démontrer que $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

Indication ▼

- 1.
2. Utiliser la question précédente.
- 3.

Corrigé ▼

1. Prenons $y \in f(A)$. Alors il existe $x \in A$ tel que $y = f(x)$. Mais alors, $x \in B$ et donc $y \in f(B)$. Ceci prouve l'inclusion $f(A) \subset f(B)$. La réciproque n'est pas toujours vraie. Prenons $E = \{1, 2\}$, $F = \{1\}$, $f : E \rightarrow F$ définie par $f(1) = 1$, $f(2) = 1$, $A = \{1\}$ et $B = \{2\}$. Alors $f(A) = f(B) = \{1\}$ alors que pourtant A n'est pas inclus dans B .
2. On a $A \cap B \subset A$, et donc $f(A \cap B) \subset f(A)$. De même, $f(A \cap B) \subset f(B)$, et donc $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.
L'inclusion réciproque est fausse, ce que l'on constate en prenant exactement le même exemple.
3. On a $A \subset A \cup B$ et donc $f(A) \subset f(A \cup B)$. De même, $f(B) \subset f(A \cup B)$ et donc $f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B)$.
Réciproquement, si $y \in f(A \cup B)$, alors il existe $x \in A \cup B$ tel que $y = f(x)$. Mais si $x \in A$, on a $y \in f(A) \subset f(A) \cup f(B)$ et de même, si $x \in B$, on a $y \in f(B) \subset f(A) \cup f(B)$. Dans tous les cas, on a prouvé que $y \in f(A) \cup f(B)$ et donc l'inclusion $f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$.

Exercice 29 ★★★ - Image directe et injectivité [Signaler une erreur] [Ajouter à ma feuille d'exos]

Enoncé ▼

Soit $f : X \rightarrow Y$. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

1. f est injective.
2. Pour toutes parties A, B de X , on a $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

Indication ▼

Pour l'implication $2 \implies 1$, choisir $A = \{a\}$ et $B = \{b\}$.

Corrigé ▼

- $1 \implies 2$: D'abord, une inclusion est toujours vérifiée : prenons en effet $y \in f(A \cap B)$. Alors il existe $x \in A \cap B$ tel que $y = f(x)$. Mais alors, $y \in f(A)$ puisque $y = f(x)$ avec $x \in A$. De même, $y \in f(B)$. On en déduit que $y \in f(A) \cap f(B)$. Réciproquement, si $y \in f(A) \cap f(B)$, alors il existe $a \in A$ tel que $y = f(a)$ et $b \in B$ tel que $y = f(b)$. Mais puisque f est injective et que $f(a) = f(b)$, on a $a = b$, et donc $a \in A \cap B$. On en déduit que $y \in f(A \cap B)$.
- $2 \implies 1$: Soient a et b tels que $f(a) = f(b) = y$. Prenons $A = \{a\}$ et $B = \{b\}$. Remarquons que $f(A) = f(B) = \{y\}$. Alors, on a $f(A \cap B) = \{y\}$. En particulier, $A \cap B \neq \emptyset$, et donc $a = b$.

Exercice 30 ★★★★★ - Caractérisations [Signaler une erreur] [Ajouter à ma feuille d'exos]

Enoncé ▼

Soient X, Y deux ensembles et $f : X \rightarrow Y$ une application.

1. Montrer que f est injective si et seulement si, pour tout $g : Z \rightarrow X$ et tout $h : Z \rightarrow X$, on a $f \circ g = f \circ h \implies g = h$.
2. Montrer que f est surjective si et seulement si, pour tout $g : Y \rightarrow Z$ et tout $h : Y \rightarrow Z$, on a $g \circ f = h \circ f \implies g = h$.

Indication ▼

Les implications directes sont faciles. Démontrer les implications réciproques par contraposée.

1. Si $f(x) = f(y)$ construire g d'image $\{x\}$ et h d'image $\{y\}$.
2. L'idée est de construire g et h qui coïncident sur tout Y , sauf en un point qui n'est pas dans $f(X)$.

Corrigé ▼

1. Supposons d'abord f injective et soient $g : Z \rightarrow X$ et $h : Z \rightarrow X$ telles que $f \circ g = f \circ h$. Alors, pour tout z de Z , on a $f(g(z)) = f(h(z)) \implies g(z) = h(z)$ puisque f est injective. On a donc bien $g = h$.
Pour montrer l'implication réciproque, on procède par contraposée en supposant que f n'est pas injective. Soient $x \neq y$ tel que $f(x) = f(y)$. Posons $Z = \{0\}$, $g(0) = x$ et $h(0) = y$. Alors on a $f \circ g(0) = f \circ h(0) = f(x) = f(y)$ alors que $g \neq h$.
2. Supposons d'abord f surjective et soient $g : Y \rightarrow Z$ et $h : Y \rightarrow Z$ telles que $g \circ f = h \circ f$. Soit $y \in Y$. Il existe x de X tel que $y = f(x)$. On en déduit $g(y) = g \circ f(x) = h \circ f(x) = h(y)$, ce qui prouve $g = h$.
Pour montrer l'implication réciproque, on procède par contraposée en supposant que f n'est pas surjective. Il existe donc un point y_0 de Y qui n'est pas dans $f(X)$. On considère alors $Z = \{0, 1\}$, g défini sur Y par $g(y_0) = 1$ et $g(y) = 0$ sinon, h défini sur Y par $h(y) = 0$ pour tout y . Alors on a bien $g \circ f = h \circ f$ (car $f(x) \neq y_0$ pour tout x de X) et $h \neq g$.

Exercice 31 ★★★★★ - Bijectivité et passage au complémentaire [Signaler une erreur] [Ajouter à ma feuille d'exos]

Enoncé ▼

Soit $f : E \rightarrow F$. Montrer que f est bijective si et seulement si, pour tout A de $\mathcal{P}(E)$, on a $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$ (\overline{A} désigne le complémentaire de A).

Indication ▼

On peut découper l'exercice en deux sous-exercices :

- Montrer que f injective $\iff \forall A \in \mathcal{P}(E), f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$. Pour le sens réciproque, on pourrait notamment supposer $f(x) = f(y)$ avec $x \neq y$ et appliquer à $A = \{x\}$.
- Montrer que f surjective $\iff \forall A \in \mathcal{P}(E), f(\overline{A}) \supset \overline{f(A)}$. Pour la réciproque, prendre $A = E$.

Corrigé ▼

Pour l'implication directe, on suppose que f est bijective, et prenons A un élément de $\mathcal{P}(E)$. On doit montrer une double inclusion. Soit d'abord x dans $f(\overline{A})$. Alors $x = f(y)$ où $y \in \overline{A}$. Supposons que $x \in f(A)$. Alors $x = f(z)$ où $z \in A$. Mais alors, on a $f(y) = f(z)$ et par injectivité de f , on a $y = z$. Comme y est élément de \overline{A} et z est élément de son complémentaire, ceci est impossible et donc $x \notin f(A)$, c'est-à-dire qu'on a prouvé que $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.

Prouvons maintenant l'autre inclusion. Soit $x \in \overline{f(A)}$. Alors, puisque f est surjective, il existe y élément de E tel que $x = f(y)$. Mais y ne peut pas être élément de A sinon x serait élément de $f(A)$ ce qui n'est pas. Et donc y est élément de \overline{A} et $x \in f(\overline{A})$.

Étudions maintenant l'implication réciproque, c'est-à-dire qu'on suppose que pour tout A de $\mathcal{P}(E)$, on a $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$. Prouvons d'abord que ceci entraîne que f est injective. En effet, pour x, y tels que $f(x) = f(y)$, supposons $x \neq y$. Posons $A = \{x\}$. On a $y \in \overline{A}$ et donc $f(y) \in f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$. Or, $f(A) = \{f(x)\}$, et donc $f(y) \neq f(x)$, une contradiction.

Prouvons enfin que f est surjective. Par hypothèse appliquée à $A = E$, on sait que $f(\overline{E}) = \overline{f(E)}$. Mais $f(\overline{E}) = f(\emptyset) = \emptyset$, et donc $\overline{f(E)} = \emptyset$ ce qui, en prenant le complémentaire, se traduit en $f(E) = F$, c'est-à-dire que f est surjective.

Exercice 32 ★★★★★ - Fonction définie sur l'ensemble des parties [Signaler une erreur] [Ajouter à ma feuille d'exos]

Énoncé ▼

Soient E un ensemble, $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble de ses parties, et A et B deux parties de E . On définit

$$\begin{aligned} f: \mathcal{P}(E) &\rightarrow \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \\ X &\mapsto (X \cap A, X \cap B). \end{aligned}$$

1. Montrer que f est injective si et seulement si $A \cup B = E$.
2. Montrer que f est surjective si et seulement si $A \cap B = \emptyset$.
3. Donner une condition nécessaire et suffisante sur A et B pour que f soit bijective. Donner dans ce cas la bijection réciproque.

Indication ▼

1. Pour le sens direct, raisonner par contraposée. Pour le sens réciproque, remarquer que $X = (X \cap A) \cup (X \cap B)$.
2. Pour le sens direct, prendre x dans A et regarder l'antécédent de $(\{x\}, \emptyset)$. Pour le sens direct, prendre $A' \subset A$ et $B' \subset B$, et poser $X = A' \cup B'$.
3. On a tout fait avant!

Corrigé ▼

1. Pour démontrer le sens direct, on raisonne par contraposée: si $A \cup B \neq E$, on prend $x \in E \setminus (A \cup B)$ et $X = \{x\}$. Alors $f(X) = (X \cap A, X \cap B) = (\emptyset, \emptyset)$ car x n'appartient ni à A ni à B . D'autre part, $f(\emptyset) = (\emptyset, \emptyset)$. Donc $f(X) = f(\emptyset)$ alors que $X \neq \emptyset$: f n'est pas injective.

Pour le sens réciproque, remarquons que pour tout $X \subset E$, puisque $A \cup B = E$, on a

$$X = X \cap E = X \cap (A \cup B) = (X \cap A) \cup (X \cap B).$$

Ainsi, si $X, X' \subset E$ sont tels que $f(X) = f(X')$, c'est-à-dire $X \cap A = X' \cap A$ et $X \cap B = X' \cap B$, on a

$$X = (X \cap A) \cup (X \cap B) = (X' \cap A) \cup (X' \cap B) = X'.$$

Ainsi, f est injective.

2. Supposons d'abord que f est surjective et prenons $x \in A$. Alors il existe $X \subset E$ tel que $f(X) = (\{x\}, \emptyset)$. Alors, on a $X \cap B = \emptyset$ et $x \in X \cap A$. Ainsi, $x \in X$ et donc $x \notin B$. Ainsi, on a $A \cap B = \emptyset$.

Réciproquement, si $A \cap B = \emptyset$, et prenons $A' \subset A$ et $B' \subset B$. Alors, posons $X = A' \cup B'$. Puisque $A \cap B = \emptyset$, on a $X \cap A = A'$ et $X \cap B = B'$ et donc $f(X) = (A', B')$: f est surjective.

3. D'après les questions précédentes, on a f bijective si et seulement si $A \cup B = E$ et $A \cap B = \emptyset$, ie si (A, B) est une partition de E . La bijection réciproque a été établie à la question précédente et est donnée par $(A', B') \mapsto A' \cup B'$.

Exercice 33 ★★★★★ - Fonctions et fonctions d'ensemble [Signaler une erreur] [Ajouter à ma feuille d'exos]

Enoncé ▼

Soient E et F deux ensembles, et $f : E \rightarrow F$. On définit deux applications $f^\#$ et $f_\#$ par :

$$\begin{aligned} f^\# : \mathcal{P}(E) &\rightarrow \mathcal{P}(F), f^\#(A) = f(A) \\ f_\# : \mathcal{P}(F) &\rightarrow \mathcal{P}(E), f_\#(A) = f^{-1}(A). \end{aligned}$$

Démontrer que

1. $f^\#$ est injective si et seulement si f est injective.
2. $f_\#$ est injective si et seulement si f est surjective.

Indication ▼

- 1.
2. Pour démontrer que $f_\#$ est injective, considérer A et B de même image par $f_\#$, et prendre $y \in A$. Utiliser alors que f est surjective...et essayer de prouver que $y \in B$. Dans l'autre sens, on pourra utiliser l'ensemble vide...

Corrigé ▼

1. Supposons d'abord que $f^\#$ est injective, et prouvons que f l'est. Soient $x, y \in E$ avec $f(x) = f(y)$. Posons $A = \{x\}$ et $B = \{y\}$. Alors $f^\#(A) = f^\#(B) = \{f(x)\}$. Ainsi, par injectivité de $f^\#$, $A = B$ et donc $x = y$. f est injective.

Réciproquement supposons que f est injective, et prouvons que $f^\#$ l'est aussi. Soient $A, B \in \mathcal{P}(E)$ tels que $f^\#(A) = f^\#(B)$. Prenons ensuite $x \in A$ et montrons que $x \in B$. On a $f(x) \in f(A) = f(B)$, donc il existe $y \in B$ tel que $f(x) = f(y)$. Maintenant, puisque f est injective, ceci entraîne que $x = y$. Ainsi, $x \in B$ et on a prouvé que $A \subset B$. Bien entendu, par symétrie du rôle joué par A et B , on a $A = B$ et $f^\#$ est injective.

2. Supposons d'abord que $f_\#$ est injective, et prouvons que f est surjective. Soit $y \in F$. Puisque $f_\#(\emptyset) = \emptyset$, on a $f_\#(\{y\}) \neq \emptyset$, et donc il existe $x \in f_\#(\{y\}) = f^{-1}(\{y\})$. Ainsi, $y = f(x)$ et f est surjective.

Supposons maintenant que f est surjective, et prouvons que $f_\#$ est injective. Soient $A, B \in \mathcal{P}(F)$ tels que $f_\#(A) = f_\#(B)$. Considérons $y \in A$. Alors, puisque f est surjective, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Mais $x \in f^{-1}(A)$ et donc $x \in f^{-1}(B)$ ce qui signifie que $f(x) \in B$. Mais $y = f(x)$, et donc $y \in B$. On a donc prouvé que $A \subset B$, et, toujours par symétrie du rôle joué par A et B , on en déduit que $A = B$, c'est-à-dire que $f_\#$ est injective.

Relations

Exercice 34 ★★ - Relation d'équivalence et fonction [Signaler une erreur] [Ajouter à ma feuille d'exos]

Enoncé ▼

On définit sur \mathbb{R} la relation $x\mathcal{R}y$ si et seulement si $x^2 - y^2 = x - y$.

1. Montrer que \mathcal{R} est une relation d'équivalence.
2. Calculer la classe d'équivalence d'un élément x de \mathbb{R} . Combien y-a-t-il d'éléments dans cette classe?

Indication ▼

1. Regrouper les x !
2. Pour x fixé, il faut trouver les solutions de $x^2 - y^2 = x - y$. Factoriser $x^2 - y^2$.

Corrigé ▼

1. Il suffit de remarquer que $x\mathcal{R}y \iff x^2 - x = y^2 - y \iff f(x) = f(y)$ avec $f: x \mapsto x^2 - x$. Il est alors aisé de vérifier en appliquant la définition que \mathcal{R} est une relation d'équivalence, c'est-à-dire qu'elle est réflexive, symétrique et transitive.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$. On cherche les éléments y de \mathbb{R} tels que $x\mathcal{R}y$. On doit donc résoudre l'équation (en y) $x^2 - y^2 = x - y$. Elle se factorise en

$$(x - y)(x + y) - (x - y) = 0 \iff (x - y) \times (x + y - 1) = 0.$$

Ses solutions sont $y = x$ et $y = 1 - x$. La classe de x est donc égale à $\{x, 1 - x\}$. Elle est constituée de deux éléments, sauf si $x = 1 - x \iff x = 1/2$. Dans ce cas, elle est égale à $\{1/2\}$.

Exercice 35 ★★ - Parties égales ou égales au complémentaire [Signaler une erreur] [Ajouter à ma feuille d'exos]

Enoncé ▼

Soit E un ensemble. On définit sur $\mathcal{P}(E)$, l'ensemble des parties de E , la relation suivante :

$$A\mathcal{R}B \text{ si } A = B \text{ ou } A = \bar{B},$$

où \bar{B} est le complémentaire de B (dans E). Démontrer que \mathcal{R} est une relation d'équivalence.

Indication ▼

Il suffit d'appliquer la définition. Pour la transitivité, on pourra distinguer plusieurs cas.

Corrigé ▼

Il suffit de vérifier que la définition d'une relation d'équivalence est satisfaite. Considérons trois parties A , B et C de E . Tout d'abord, on a bien $A\mathcal{R}A$: en effet, on a $A = A$. D'autre part, si $A\mathcal{R}B$, alors on distingue deux cas. Ou bien $A = B$, et dans ce cas $B = A$ et $B\mathcal{R}A$. Ou bien $A = \bar{B}$, mais dans ce cas, $B = \bar{A}$, et on a encore $B\mathcal{R}A$. Enfin, si $A\mathcal{R}B$ et $B\mathcal{R}C$, on peut distinguer quatre cas :

1. Si $A = B$ et $B = C$, alors $A = C$.
2. Si $A = B$ et $B = \bar{C}$, alors $A = \bar{C}$.
3. Si $A = \bar{B}$ et $B = C$, alors $A = \bar{C}$.
4. Si $A = \bar{B}$ et $B = \bar{C}$, alors $A = C$.

Dans tous les cas, on a bien $A\mathcal{R}C$. La relation \mathcal{R} est symétrique, réflexive et transitive. Il s'agit bien d'une relation d'équivalence.

Exercice 36 ★★★ - Une relation d'équivalence [Signaler une erreur] [Ajouter à ma feuille d'exos]

Enoncé ▼

On définit sur \mathbb{Z} la relation $x\mathcal{R}y$ si et seulement si $x + y$ est pair. Montrer qu'on définit ainsi une relation d'équivalence. Quelles sont les classes d'équivalence de cette relation?

Indication ▼

Pour montrer que la relation est transitive, faire la somme de $x + y = \dots$ et $y + z = \dots$. Pour déterminer les classes d'équivalence de la relation, étudier la classe de 0 et la classe de 1.

Corrigé ▼

La relation est

- réflexive, car $x + x = 2x$ est pair;
- symétrique, car $x + y = y + x$ et donc si $x + y$ est pair, $y + x$ est pair;
- transitive, car si $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$, alors $x + y = 2k$ et $y + z = 2l$ pour des entiers k et l . Mais alors, on effectue la somme des ces deux égalités et on trouve

$$x + 2y + z = 2k + 2l \implies x + z = 2(k + l - y)$$

et donc $x + z$ est pair.

Pour déterminer les classes d'équivalence de \mathcal{R} , il suffit de trouver une famille (E_i) d'ensembles tels que :

- la réunion des E_i est \mathbb{Z} ;
- les E_i sont deux à deux disjoints;
- si x, y sont dans le même E_i , alors $x\mathcal{R}y$;
- si x est dans E_i et y est dans E_j avec $i \neq j$, alors x n'est pas en relation avec y .

Ici, on peut constater que tous les éléments en relation avec 0 sont les entiers pairs, tandis que tous les entiers en relation avec 1 sont les entiers impairs. Puisque l'ensemble des entiers pairs et des entiers impairs forme une partition de \mathbb{Z} , on en déduit que ces deux ensembles sont exactement les deux classes d'équivalence de la relation.

Exercice 37 ★★★★★ - Une relation d'ordre sur les entiers [Signaler une erreur] [Ajouter à ma feuille d'exos]

Enoncé ▼

On définit la relation \mathcal{R} sur \mathbb{N}^* par $p\mathcal{R}q \iff \exists k \in \mathbb{N}^*, q = p^k$. Montrer que \mathcal{R} définit un ordre partiel sur \mathbb{N}^* . Déterminer les majorants de $\{2, 3\}$ pour cet ordre.

Indication ▼

Démontrer que $\{2, 3\}$ n'admet pas de majorants!

Corrigé ▼

La relation est

- réflexive : $p\mathcal{R}p$ puisque $p = p^1$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$;
- antisymétrique : si $p\mathcal{R}q$ et $q\mathcal{R}p$, alors $p = q^k$ et $q = p^j$ avec $k, j \geq 1$ et donc $p = p^{jk}$. Ceci n'est possible que si $p = 1$, mais alors $q = 1 = p$ ou si $jk = 1$, ce qui implique $j = k = 1$ et donc $p = q$.
- transitive : si $p\mathcal{R}q$ et $q\mathcal{R}r$, alors $q = p^k$ et $r = q^j = p^{jk}$, donc $p\mathcal{R}r$.

On définit donc ainsi un ordre sur \mathbb{N}^* qui n'est pas total (par exemple, on ne peut pas comparer 2 et 3). Soit maintenant p un majorant de $\{2, 3\}$. Alors $2\mathcal{R}p$ et donc $p = 2^k$, avec $k \geq 1$. De même, $p = 3^j$ avec $j \geq 1$. Par unicité de la décomposition en produits de facteurs premiers, ceci est impossible. L'ensemble $\{2, 3\}$ n'a pas de majorant.

Exercice 38 ★★★★★ - Ordre lexicographique [Signaler une erreur] [Ajouter à ma feuille d'exos]

Enoncé ▼

On définit sur \mathbb{R}^2 la relation \prec par

$$(x, y) \prec (x', y') \iff ((x < x') \text{ ou } (x = x' \text{ et } y \leq y')).$$

Démontrer que ceci définit une relation d'ordre sur \mathbb{R}^2 .

Indication ▼

Pour la transitivité, on pourra distinguer plusieurs cas.

Corrigé ▼

La relation est

- réflexive : $x = x$ et $y \leq y$ impliquent $(x, y) \prec (x, y)$;
- antisymétrique : si $(x, y) \prec (x', y')$ et $(x', y') \prec (x, y)$, alors on a nécessairement que $x = x'$ (si $x < x'$ par exemple, on ne peut avoir $(x', y') \prec (x, y)$). Mais alors, on a à la fois $y \leq y'$ d'après la première relation, et aussi $y' \leq y$ d'après la seconde. On en déduit que $x = x'$ et $y = y'$;
- transitive : si $(x, y) \prec (x', y')$ et $(x', y') \prec (x'', y'')$, alors :
 - ou bien $x = x'$ et $x' = x''$: dans ce cas, on a $y \leq y'$ et $y' \leq y''$ donc $y \leq y''$ et donc $(x, y) \prec (x'', y'')$;
 - ou bien $x = x'$ et $x' < x''$: dans ce cas, on a $x < x''$ et donc $(x, y) \prec (x'', y'')$;
 - ou bien $x < x'$ et $x' = x''$: dans ce cas, on a $x < x''$ et donc $(x, y) \prec (x'', y'')$;

Remarquons que ceci définit un ordre total sur \mathbb{R}^2 , car deux éléments sont toujours comparables.

Exercice 39 ★★★ - Ordre sur \mathbb{R}^2 [Signaler une erreur] [Ajouter à ma feuille d'exos]

Enoncé ▼

On munit \mathbb{R}^2 de la relation notée \prec définie par

$$(x, y) \prec (x', y') \iff x \leq x' \text{ et } y \leq y'.$$

1. Démontrer que \prec est une relation d'ordre sur \mathbb{R}^2 . L'ordre est-il total?
2. Le disque fermé de centre O et de rayon 1 a-t-il des majorants? un plus grand élément? une borne supérieure?

Indication ▼

- 1.
2. Montrer que l'ensemble des majorants de D est

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \geq 1 \text{ et } y \geq 1\}.$$

Corrigé ▼

1. La relation \prec est

- réflexive : pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a $x \leq x$ et $y \leq y$.
- transitive : si $(x_1, y_1) \prec (x_2, y_2)$ et $(x_2, y_2) \prec (x_3, y_3)$, alors

$$x_1 \leq x_2 \leq x_3 \text{ et } y_1 \leq y_2 \leq y_3$$

donc $(x_1, y_1) \prec (x_3, y_3)$.

- antisymétrique : si $(x, y) \prec (x', y')$ et $(x', y') \prec (x, y)$, alors on a à la fois $x \leq x'$ et $x' \leq x$ et donc $x = x'$ et de même $y = y'$.

Elle définit donc bien une relation d'ordre sur \mathbb{R}^2 . L'ordre n'est pas total, car on ne peut pas comparer $(0, 1)$ et $(1, 0)$.

2. Soit (x, y) un majorant de ce disque noté D . Alors $(1, 0) \prec (x, y)$ et donc $x \geq 1$. De même, $(0, 1) \prec (x, y)$ et donc $y \geq 1$. Ainsi, on a $x \geq 1$ et $y \geq 1$. Réciproquement, soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x \geq 1$ et $y \geq 1$. Alors (x, y) est clairement un majorant de D , puisque tout élément (x_0, y_0) de D vérifie $x_0^2 + y_0^2 \leq 1$, et donc $x_0 \leq 1$ et $y_0 \leq 1$. On en déduit que l'ensemble des majorants de D est

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \geq 1 \text{ et } y \geq 1\}.$$

D n'admet donc pas de plus grand élément, puisque les majorants de D ne sont pas dans D . En revanche, D admet une borne supérieure qui est $(1, 1)$, le plus petit des majorants de D .

Exercice 40 ★★★★★ - Relation d'équivalence et théorie des ensembles [Signaler une erreur]

[Ajouter à ma feuille d'exos]

Enoncé ▼

Soit E un ensemble non-vide et $\alpha \subset \mathcal{P}(E)$ non-vide vérifiant la propriété suivante :

$$\forall X, Y \in \alpha, \exists Z \in \alpha, Z \subset (X \cap Y).$$

On définit sur $\mathcal{P}(E)$ la relation \sim par $A \sim B \iff \exists X \in \alpha, X \cap A = X \cap B$. Prouver que ceci définit une relation d'équivalence sur $\mathcal{P}(E)$. Quelles sont les classes d'équivalence de \emptyset et de E ?

Indication ▼

Le point difficile est de démontrer que la relation est transitive. Partir de

$$A \sim B \iff \exists X \in \alpha, X \cap A = X \cap B$$

$$B \sim C \iff \exists Y \in \alpha, Y \cap B = Y \cap C$$

et calculer $Z \cap A, Z \cap C$ où Z est donné par la propriété vérifiée par α .

Corrigé ▼

Vérifions les 3 propriétés d'une relation d'équivalence :

- La relation est symétrique :

$$A \sim B \iff \exists X \in \alpha, X \cap A = X \cap B \iff B \sim A.$$

- La relation est réflexive : soit $A \in \mathcal{P}(E)$ quelconque, et prenons $X \in \alpha$ (peu importe lequel). Alors on a bien $X \cap A = X \cap A$ et donc $A \sim A$.
- La relation est transitive : prenons $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$ tels que $A \sim B$ et $B \sim C$. Alors on a

$$A \sim B \iff \exists X \in \alpha, X \cap A = X \cap B$$

$$B \sim C \iff \exists Y \in \alpha, Y \cap B = Y \cap C.$$

Soit $Z \in \alpha$ tel que $Z \subset X \cap Y$. Alors on a $Z \cap X = Z$ et $Z \cap Y = Z$. De cela, on tire

$$\begin{aligned} Z \cap A &= Z \cap X \cap A \\ &= Z \cap X \cap B \\ &= Z \cap B \\ &= Z \cap Y \cap B \\ &= Z \cap Y \cap C \\ &= Z \cap C. \end{aligned}$$

Ceci prouve bien que $A \sim C$ et que \sim est une relation d'équivalence.

Cherchons ensuite la classe d'équivalence de \emptyset . On a

$$A \sim \emptyset \iff \exists X \in \alpha, A \cap X = \emptyset \cap X = \emptyset.$$

La classe d'équivalence de \emptyset est donc constituée des parties A de E disjointes d'au moins un élément de α . Cherchons enfin la classe d'équivalence de E . On a

$$A \sim E \iff \exists X \in \alpha, A \cap X = E \cap X = X.$$

La classe d'équivalence de E est donc constituée des parties A de E qui contiennent au moins un élément de α .

Discussions des forums

- *Des équations et des cubes*
- *Equation découverte par hasard*
- *exercice sur les congruences*
- *Cybercrypt : la cryptogra ...*
- *Montre que $(a/b)+(b/c)+(c/a) \geq 3$*
- *projeté orthogonal*
- *Equation différentielle*
- *étude de la continuité*
- *Polynôme annulateur et tr ...*
- *Produit vectoriel*
- *Analyse*
- *Math...*
- *Devoir physique oxydoréduction*
- *Intégrale*
- *Quelques petites question ...*

Accéder aux forums



Mathématicien du mois



Charles-Jean de La Vallée Poussin (1866 - 1962)

Toutes les biographies



Signaler une erreur/Nous contacterMentions LégalesCookies



Nous contacterMentions Légales