Table des matières

chapitre 1 : Ensembles-Relations-Applications

1 Ensembles

Définition 1.1

Un ensemble E est une collection d'objets qui peut être écrit en extension ou en compréhension.

Exemple 1.1

- $E = \{1, 2, 3\}, \quad F = \{a, b, c, d\}, \quad G = \{a, b, 1, 2, 3, (\triangle)\}$

  ces ensembles sont donnés en extention.

- $A = \{n \in \mathbb{N}/ \quad 2 < n \leq 7\}, \quad B = \{x \in \mathbb{R}/ \quad x \geq 3\}, \quad C = \{x \in \mathbb{Z}/ \quad \mid x \mid \geq 3\}$

  ces ensembles sont donnés en compréhension.

Remarque 1.1

- *D'une facon générale un ensemble s'écrit en compréhension sous la forme suivante :*

$$A = \{x \in E/ \quad P(x)\}$$

$P(x)$ est une proposition ou propriéte que vérifie x.

- *Quand un objet x appartient à un ensemble E, on dit que x est un élément de E et on écrit : $x \in E$*

- *Un ensemble E n'est pas forcément un ensemble de nombres.*

▶ *Si par exemple E est un sous-ensemble du plan et si $x \in E$, alors la lettre x désigne un point du plan.*

▶ *Si $E = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}}/ \quad x_n \longrightarrow 3\}$ et si $x \in E$, alors la lettre x désigne une suite qui converge vers 2.*

▶ $\{1, 2, 3\} = \{3, 2, 1\} = \{1, 2, 2, 3, 1\}$ *: (On s'intéresse pas à l'ordre et aux répétitions).*

Vocabulaire :

$*$ Ensemble vide : c'est l'ensemble qui ne contient aucun élément. On le note $\emptyset$ et il est contenu dans n'importe quel autre ensemble.

$*$ Singleton : c'est un ensemble qui contient un et un seul élément : $\{1\}, \ \{a\}, ...$

$*$ Une paire : c'est un ensemble qui contient deux éléments : $\{1, 2\}, \ \{a, b\}, ...$

Exercice 1.1

1. *Ecrire en extention les ensembles suivants :* $E = \{x \in \mathbb{Z}/ \ \mid x \mid \leq 3\}$,
   $F = \{x \in \mathbb{Z}/ \ \mid x \mid \leq -3\}, \quad H = \{x \in \mathbb{R}/ \ x^2 \leq 40\}, \quad G = \{x \in \mathbb{R}/ \ x^2 - 3x + 2 = 0\}$.
2. *Ecrire en compréhension les ensembles suivants :* $A = \{2, 4, 6, 8\}, \quad B = \{5, 9, 13, 17, 21\}$,
   $C = \{1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}\}$.

2 Ensembles : inclusion et égalité

Définition 2.1

On dit qu'un ensemble E est inclus dans un autre ensemble F et on écrit $E \subset F$ si tous les éléments de E appartiennent à F.
Autrement dit :

$$E \subset F \quad \Longleftrightarrow \quad \forall x \in E : x \in F$$

Exemple 2.1

- $\{1, 5\} \subset \mathbb{N}$
- $]0, 3[\subset [0, 3]\ ; \quad \mathbb{N} \subset \mathbb{N}$
- $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$
- $2\mathbb{N} \subset \mathbb{N}; \quad 2\mathbb{N} + 1 \subset \mathbb{N}$

Définition 2.2

Deux ensembles E et F sont égaux s'ils sont constitués des même éléments et on écrit $E = F$.

Remarque 2.1

$$E = F \quad \Longleftrightarrow \quad E \subset F \quad et \quad F \subset E$$
$$E = F \quad \Longleftrightarrow \quad (\quad x \in E \Leftrightarrow x \in F\ )$$

Exercice 2.1

1. *On considère les deux ensembles suivants :*
$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} / \ \mid \frac{x}{2} - 3 \mid \leq 1 \right\} \quad et \quad B = [4, 8]$$
Montrer que : $\quad A = B$
2. *Soient E et F les deux ensembles :*
$$E = \left\{ \frac{\pi}{5} + k\frac{\pi}{2} / \quad k \in \mathbb{Z} \right\} \quad et \quad F = \left\{ \frac{-4\pi}{5} + k\frac{\pi}{2} / \quad k \in \mathbb{Z} \right\}$$
Montrer que : $\quad E = F$

Définition 2.3

Soit E un ensemble.

Tous les sous-ensembles de E forment un ensemble appelé : ensemble des parties de E et le note $\mathcal{P}(E)$.

Exemple 2.2

Si $E = \{1, 2, 3\}$, alors $\mathcal{P}(E) = \Big\{ \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, E \Big\}$

Remarque 2.2

$$x \in E \quad \Longleftrightarrow \quad \{x\} \subset E \quad \Longleftrightarrow \quad \{x\} \in \mathcal{P}(E)$$

Exercice 2.2 *Soit E un ensemble à n éléments (on écrit $card(E) = n$).*
Montrer que : $\quad card(\mathcal{P}(E)) = 2^n$

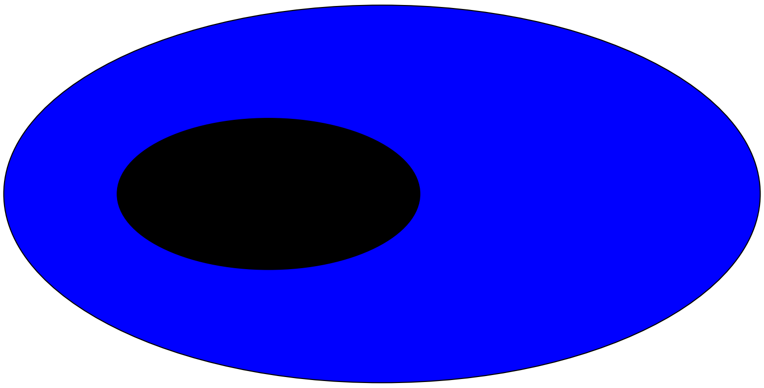
3 Complémentaire-Union-Intersection

Définition 3.1

Soient E un ensemble et A un sous-ensemble de E. Le complémentaire de A dans E est l'ensemble

$$\Big\{x \in E/ \ x \notin A\Big\}.$$

On le note C_E^A ou $E \setminus A$ ou encore par : A^C ou $\overline{A}$ lorsqu'il n'y a pas d'ambiguité sur E.



Propriété 3.1 *Soient A et B deux sous ensembles d'un ensemble E, alors*

- $\overline{\overline{A}} = A$
- *Si* $A \subset B$ *alors* $\overline{B} \subset \overline{A}$

Définition 3.2

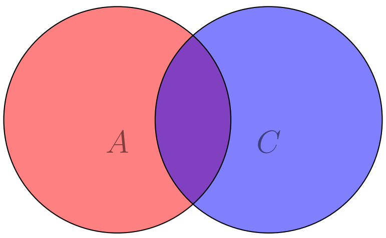
Soient A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E.

$*$ *On appelle intersection de A et B l'ensemble*

$$A \cap B = \Big\{x \in E/ \ x \in A \ \ et \ \ x \in B\Big\}$$

$*$ *On appelle union de A et B l'ensemble*

$$A \cup B = \Big\{x \in E/ \ x \in A \ \ ou \ \ x \in B\Big\}$$



Remarque 3.1 *A,B et C des sous-ensembles d'un ensemble E.*

$*$ $A \cap B \subset A$ *et* $A \cap B \subset B$.

$*$ $A \subset A \cup B$ *et* $B \subset A \cup B$ *aussi* $A \cap B \subset A \cup B$.

$*$ *si* $A \cap B = \emptyset$, *on dit que* A *et* B *sont disjoints.*

$*$ $A \cap B = B \cap A$ *et* $A \cup B = B \cup A$

$*$ $A \cap \emptyset = \emptyset$ *et* $A \cup \emptyset = A$

$*$ $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ *et* $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

Proposition 3.1 *A,B et C des sous-ensembles d'un ensemble E. Alors :*

1. $A \cap B = A \iff A \subset B$
2. $A \cup B = A \iff B \subset A$
3. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
4. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Preuve :

Proposition 3.2 *A,B deux sous-ensembles d'un ensemble E. Alors :*

1. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
2. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

Preuve :

4 Produit cartésien

Définition 4.1 *E et F deux ensembles.*
L'ensemble suivant : $\Big\{(x, y)/\ x \in E \text{ et } y \in F\Big\}$ *est appelé produit cartésien de E et F, on le note $E \times F$.*
On a donc

$$E \times F = \Big\{(x, y)/\ x \in E \text{ et } y \in F\Big\}$$

Remarque 4.1

- *Le produit cartésien $E \times E$ est noté E^2.*
- $\Big[1, 2\Big] \times \Big]0, 1\Big[= \Big\{(x, y)/\ 1 \leq x \leq 2 \ \text{ et } \ 0 < y < 1\Big\}$
- *Déterminer graphiquement le produit cartésien :* $[1, 2] \times [3, 4]$
- *Déterminer graphiquement le produit cartésien :* $[1, 2] \times \mathbb{R}$

Exercice 4.1

Détrminer et construire l'ensemble suivant :

$$E = \Big\{\Big(\frac{2t + 4}{t^2 + 2t + 5}, \frac{-t^2 + 4t + 7}{t^2 + 2t + 5}\Big)\ /\quad t \in \mathbb{R}\Big\}$$

5 Applications

5.1 Définitions

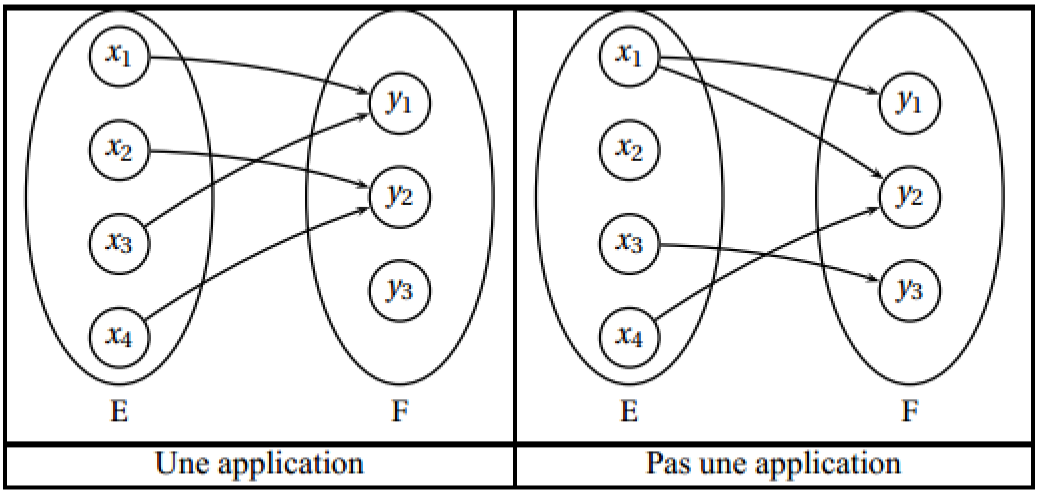
Définition 5.1

Soient E et F deux ensembles non vides. $f : E \longrightarrow F$ est dite application si tout élément de l'ensemble de E a une et une seule image dans l'ensemble F par f.

c.à.d :

$$\boxed{f \ \ est \ \ une \ \ application \Longleftrightarrow \quad \forall x \in E, \quad \exists! y \in F : \quad f(x) = y}$$

1.PNG



Remarque 5.1

- ***Représentation de Venn :***
- ***Les fonctions :***
- *L'ensemble des applications de E vers F se note $\mathcal{A}(E, F)$ ou plus fréquemment F^E*

Exemple 5.1

Vérifier si les relations suivantes sont des applications

$$f_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad\qquad f_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \frac{1}{x-1} \qquad\qquad x \longmapsto \frac{1}{x-1}$$

$$f_3 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad\qquad f_4 : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$x \longmapsto x^2 \qquad\qquad x \longmapsto x^2$$

Définition 5.2

La partie G de $E \times F$ définit par $G = \Big\{(x, f(x)) \in E \times F \ / \quad x \in E\Big\}$, est appelée graphe de l'application f.

5.2 Image directe-Image réciproque

Soient E et F deux ensembles, A une partie de E et $f : E \longrightarrow F$. L'image directe de A par f est le sous-ensembe de f défini par

$$f(A) = \Big\{ f(x) \ / \quad x \in A \Big\}.$$