Espaces vectoriels réels

I) Définition d'un espace vectoriel réel

Définition 1

Un ensemble E non vide est appelé un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ si
E est muni d'une addition, notée +, et d'une multiplication par un réel, notée . , qui vérifient :

1. $\forall (x; y) \in E^2$, on a $x + y \in E$ (Stabilité de la loi +)
2. $\forall (x; y) \in E^2$, $x + y = y + x$ (Commutativité de la loi +)
3. $\forall (x; y; z) \in E^3$, $(x + y) + z = x + (y + z)$ (Associativité de la loi +)
4. Il existe un élément neutre 0_E dans E qui vérifie : $\forall x \in E$,
   $x + 0_E = 0_E + x = x$
5. $\forall x \in E$, $\exists y \in E$, $x + y = y + x = 0_E$. On note alors $y = -x$
6. $\forall x \in E$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, on a $\lambda . x \in E$ (Stabilité de la loi .)
7. $\forall x \in E$, $1 \cdot x = x$
8. $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall (x; y) \in E^2$, $\lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$
9. $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $\forall x \in E$, $(\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$
10. $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $\forall x \in E$, $\lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda \times \mu) \cdot x$

Les éléments d'un espace vectoriel sont appelés des vecteurs, et notés par $\vec{x}$ ou x.

Remarque 1

L'élément neutre peut être noté par 0_E ou 0, mais il ne faut pas confondre 0_E avec le nombre réel 0.

Exemple 1 :

Parmi les ensembles suivants, lesquels vous semblent être des espaces vectoriels réel ?

1. $\mathbb{N}$
2. les réels compris entre 0 et 1 ([0; 1]).
3. les fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.
4. $\mathbb{R}^2$.

Théorème 1 (admis)

Les ensembles suivants, munis des opérations + et . classiques, sont des espaces vectoriels réels :

- $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}^*$
- $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes (n $\in \mathbb{N}^*$, p $\in \mathbb{N}^*$).
- $\mathbb{R}$ [X], l'ensemble des polynômes à coefficients réels.
- l'ensemble des suites réelles.
- l'ensemble des fonctions d'un intervalle I dans $\mathbb{R}$.
- ....

II) Combinaison linéaire

Définition 2

Soit E un espace vectoriel. On appelle **combinaison linéaire** d'une famille $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ de vecteurs d'un espace vectoriel E tout vecteur x de E de la forme $x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_n e_n$, où $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$.

Méthode

Pour vérifier que x est combinaison linéaire de $(e_1, e_2, \dots, e_n)$:

1. on peut en trouver une, par chance, ou grâce à une astuce.
2. Sinon, on procède par identification pour trouver les λ_i et on résout le système correspondan
   (Attention, il est possible de ne pas en trouver !)

Exemple 2

1/ Ecrire $\binom{3}{-2}$ comme combinaison linéaire de $u_1 = \binom{1}{0}$ et $u_2 = \binom{0}{1}$

2/Ecrire $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ comme combinaison linéaire de $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

III) Sous espace vectoriel

Définition 3.

Soient E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et F une partie de E. On dit que F est un sous-espace vectoriel de E si

a) F est non vide;

b) F est stable par combinaison linéaire.

Méthode:

Soient E un espace vectoriel et $F \subset E$. Pour montrer que F est un sous-espace vectoriel de E :

1. On vérifie souvent que $0_E \in F$, ce qui justifie que F est non vide.
2. On écrit Soit $(x, y) \in F^2$, soit $\lambda \in \mathbb{R}$

Puis :

- soit on montre séparément que $x + y \in F$ et $\lambda \cdot x \in F$
- soit on montre directement que $\lambda \cdot x + y \in F$. (on peux faire pour cette dernière : Soit $(x, y) \in F^2$et soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ $\alpha . x + \beta . y \in F$).

Exemple 3

1. Montrer que les ensembles suivants sont des sous espaces vec d'un e.v à préciser

$$E = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;/\; x + y = 0\right\}; \quad F = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;/\; x - 2y + 3z = 0\right\}; \quad G = \left\{\begin{pmatrix} 2x \\ x \end{pmatrix} \;/\; x \in \mathbb{R}\right\}$$

2. Est-ce que l'ensemble $H = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},\ x \geq 0\right\}$ est un s.e.v de $\mathbb{R}^2$

Proposition 1.

Tout sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ est lui-même un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$

Proposition 2 :

1) L'intersection de deux ou plusieurs sous-espaces vectoriels de E est un sous espace vectoriel de E.

2) La somme de deux sous-espaces vectoriels de E est un sous espace vectoriel de E

$$F + G = \{x + y \text{ tel que } x \in F \text{ et } y \in G\}$$

Remarque 2 :

La réunion de deux sous espaces vectoriels n'est en général pas un sous espace vectoriel.

IV) Sous-espace vectoriel engendré par une partie

Définition 4

Soient $(u_1, \dots, u_n)$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E. On appelle $Vect(u_1, \dots, u_n)$ l'ensemble des combinaisons linéaires de $(u_1, \dots, u_n)$.

$Vect(u_1, \dots, u_n) = \{\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n, (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n\}$

Théorème 2

$Vect(u_1, \dots, u_n)$ est un sous-espace vectoriel de E, appelé sous espace vectoriel engendré par $u_1, \dots, u_n$.

Remarque 3

$Vect(u_1, \dots u_n)$ est le plus petit sev (au sens de l'inclusion) qui contient tous les vecteurs de la famille $(u_1, \dots u_n)$.

V) Familles génératrices :

Définition 5.

Soient E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel, n un entier naturel non nul et $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_n)$ une famille de vecteurs de E. On dit que la famille $\mathcal{F}$ est **génératrice** de E lorsque $E = Vect(\mathcal{F})$, c'est-à-dire que tout vecteur de E s'écrit comme une combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{F}$.

Méthode:

Montrer qu'une famille $\mathcal{F}$ est génératrice d'un espace vectoriel E

Par définition, il faut montrer que tout vecteur u de E s'écrit comme une combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{F}$. Concrètement, si $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_n)$, on se donne un vecteur quelconque u de E et il faut trouver (généralement de manière constructive) un n-uplet de scalaires $(\lambda_1, \dots \dots, \lambda_n)$ tels que $u = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n$.

Ceci aboutit en général à la résolution d'un système linéaire.

Exemple 4.

Montrer que la famille $\mathcal{F} = (u_1, u_2, u_3)$, avec $u_1 = (1,0,0)$; $u_2 = (1,1,0)$ et $u_3 = (1,1,1)$ est génératrice de $\mathbb{R}^3$.

Théorème 3.
Toute sur-famille d'une famille génératrice est encore génératrice.

VI) Familles libres, familles liées :

Définition 5.
Soient E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel, n un entier naturel non nul et $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_n)$ une famille de vecteurs de E. On dit que la famille $\mathcal{F}$ est **libre** ou que les vecteurs de $\mathcal{F}$ sont **linéairement indépendants** si pour tout n-uplet $(\lambda_1, \dots \dots, \lambda_n)$ de $\mathbb{R}^n$

$$\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n = 0_E \Rightarrow \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$$

Dans le cas contraire, on dit que la famille $\mathcal{F}$ est **liée** ou que les vecteurs de $\mathcal{F}$ sont **linéairement dépendants**.

Exemple 5.
Montrer que la famille $\mathcal{F} = (u_1, u_2, u_3)$, avec $u_1 = (1,0,0)$; $u_2 = (1,1,0)$ et $u_3 = (1,1,1)$ est libre.

Exemple 6.
On se place dans l'ensemble $\mathbb{R}[X]$ des polynômes à coefficients réels.
Montrer que la Famille $\mathcal{F} = (1, X - 1, X^2 - 2X)$ est libre.

Proposition 3.

Soient u et v deux vecteurs d'un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

1. La famille (u) est libre si et seulement si u est non nul.
2. La famille (u, v) est libre si et seulement si u et v ne sont pas colinéaires, c'est à dire qu'il n'existe pas de réel k tel que u = kv ou v = ku.

Proposition 4.

Toute famille de vecteurs d'un espace vectoriel E est liée si, et seulement si, l'un des vecteurs de cette famille est combinaison linéaire des autres (par exemple, toute famille contenant deux fois le même vecteur est liée).

Théorème 4.

Toute sous-famille d'une famille libre est encore libre. Toute sur-famille d'une famille liée est encore liée.

Proposition 5.

Toute famille contenant le vecteur nul est liée.

VII) Bases :

Définition 5.

Soient E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel, n un entier naturel non nul et $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_n)$ une famille de vecteurs de E. On dit que la famille $\mathcal{B}$ est une **base** si elle est à la fois libre et génératrice de E.

Théorème 5 :

Un système de vecteurs $(u_1, \dots, u_n)$ est une base de E ssi tout vecteur de E s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs $u_1, \dots, u_n$ c'est à dire: $\forall u \in E\ \exists! (\lambda_1, \dots \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $u = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_n u_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i$

Exemple 7.

1) Montrer que la famille $\mathcal{F} = (u_1, u_2, u_3)$, avec $u_1 = (1,0,0)$; $u_2 = (1,1,0)$ et $u_3 = (1,1,1)$ est une base.

2) Soit le vecteur $u = (0,0,1)$ de $\mathbb{R}^3$. Calculer ses coordonnées dans la base $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ précédente.

IIX) Dimension d'un espace vectoriel

Définition 6.

Un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ est dit de **dimension finie** s'il possède une famille génératrice constituée d'un nombre fini de vecteurs.

Théorème 6.

Soit $E \neq \{0\}$ un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie n. Alors toutes les bases de E possèdent le même nombre d'éléments. Ce nombre est appelé **dimension** de E, et on écrit $\dim(E) = n$

Remarque 4.

Quand un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel E est réduit au vecteur nul, c'est-à-dire $E = \{0\}$, on dit que dim(E) = 0.

Théorème 7.

Soit $E \neq \{0\}$ un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie. Alors E possède une base.

Théorème 8.

Soit $E \neq \{0\}$ un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie n >1. Alors

- toutes famille **libre** de E possède **au plus** n vecteurs ;
- toute famille **libre** de E composé de n vecteurs est une base;
- toute famille **génératrice** de E possède **au moins** n vecteurs.
- toute famille **génératrice** de E composé de n vecteurs est une base.

Théorème 9.

Soit n un entier naturel non nul. $\mathbb{R}^n$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension n et la famille $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ avec

$$\mathbf{e_1} = (1,0,0, \dots \dots 0)$$
$$\mathbf{e_2} = (0,1,0, \dots \dots 0)$$
$$\vdots$$
$$\mathbf{e_n} = (0,0, \dots \dots 0,1)$$

Est une base de $\mathbb{R}^n$, appelée **base canonique** de $\mathbb{R}^n$. En particulier, nous avons $\dim(\mathbb{R}^n) = n$.

Exemple 8 :

La base canonique de $\mathbb{R}^3$ est $e_1 = (1,0,0)$; $e_2 = (0,1,0)$ et $e_3 = (0,0,1)$

Théorème 10. — *Soit n un entier. Alors la famille $(1, X, \ldots, X^n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.*
En particulier, nous avons $\dim(\mathbb{R}_n[X]) = n+1$.

Théorème 11. — *Soit n et p deux entiers non nuls. Définissons pour tout entier k dans $\{1, \ldots, n\}$ et tout entier ℓ dans $\{1, \ldots, p\}$ la matrice $E_{k,\ell}$ de $\mathbb{R}^n$ dont tous les coefficients valent 0 sauf le coefficient situé à la k-ligne et ℓ-ième colonne qui vaut 1 :*

$$E_{k,\ell} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ k-1 \\ k \\ k+1 \\ \vdots \\ n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & \cdots & \ell-1 & \ell & \ell+1 & \cdots & p \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Alors la famille $(E_{k,\ell})_{1 \leqslant k \leqslant n, 1 \leqslant \ell \leqslant p}$ est la base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.
En particulier, nous avons $\dim(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})) = n \times p$.

Méthode:
Montrer qu'une famille $\mathcal{F}$ est une base dans un espace vectoriel E de dimension finie, Nous pouvons soit :

- montrer que la famille est libre et que son cardinal est égal à la dimension de E;
- montrer que la famille est génératrice et que son cardinal est égal à la dimension de E.

Exemple 9.
Montrer que la famille $\mathcal{F} = (1, 1+X, X^2 - 2X)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

Proposition 6.
Soient E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E.
Alors F est de dimension finie et dim(F) < dim(E). Par ailleurs, si dim(F)= dim(E), alors F= E.

IX) Ordre et rang d'un système de vecteurs :

Définition 7:

- L'ordre d'un système est le nombre de vecteurs du système.
- Le rang d'un système est égal au plus grand nombre de vecteurs linéairement indépendants que l'on peut extraire de ce système.

Exemple 10:

Soit le système S1={(2,1), (1,1), (0, 1)} alors l'ordre de S1 est égal à 3. Le rang de S1 est égal à 2 car :

- Les vecteurs (2,1), (1,1) et (0,1) sont linéairement dépendants

((2,1)= 2.(1,1) - (0,1)) , ce qui implique que rang S1<3 .

- Les vecteurs (2,1) et (1,1) sont linéairement indépendants, ce qui implique que rang S1=2 .

Propriétés:

1) Un système de vecteurs est libre ssi son rang est égal à son ordre.
2) Dans un système lié de rang r , les vecteurs libres extraits en nombre r sont dits vecteurs principaux, les autres sont dits non principaux et sont combinaison linéaire des premiers.
3) Le rang d'un système de vecteurs est égal à la dimension de l'espace engendré par ces vecteurs.

Exemple 11 :

Dans $\mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus égal à 2, On considère le système $S = (x^2, x^2 - 1, x^2 + 1)$. Déterminer le rang de S.

Remarque 5 :

- Le rang d'un système de vecteurs ne change pas si on permute les vecteurs du système.
- Le rang ne change pas si on multiplie un vecteur du système par un scalaire non nul.
- Le rang d'un système ne change pas si on ajoute à un vecteur un autre vecteur du système.
- Le rang d'un système ne change pas si on ajoute à un vecteur une combinaison linéaire des autres vecteurs du système.

Exercice 1 :

Dans $E = \mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs $u = (1,1,1), \mathrm{v} = (2,3,-1)$ et $\mathrm{w} = (4,5,1)$
Déterminer le rang du système $S = \{\mathrm{u}, \mathrm{v}, \mathrm{w}\}$

X) Rang d'une matrice :

Une matrice peut être vue comme une juxtaposition de vecteurs colonnes.

Définition 8.

On définit le rang d'une matrice comme étant le rang de ses vecteurs colonnes.

Exemple 12 :

Le rang de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \frac{-1}{2} & 0 \\ 2 & 4 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,4}(\mathbb{R})$ est 1 car tous ces vecteurs colonnes sont colinéaire à $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Proposition 7 :

- Une matrice et sa transposée ont même rang.
- Le rang de la matrice nulle est égal à 0.
- Si une matrice A de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est non nulle, alors $1 \leq rag(A) \leq Min(n,p)$.
- Le rang d'une matrice A de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est égal au rang du système formé des p colonnes ou bien il est égal au rang du système formé des n lignes de la matrice A .

Exemple 13 :

Déterminons le rang de la matrice C suivante :

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -3 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix} \in M(4,3)$$

- On note par $S = \{u_1, u_2, u_3\}$ le système de vecteurs colonnes de la matrice C.
- $u_1 = \{2,1,0,3\}$, $u_2 = \{3,-1,5,2\}$ et $u_3 = \{-1,1,-3,0\}$ $\Rightarrow$ $rg(C) = rg(S)$
    - $S = \{u_1, u_2, u_3\}$ est le seul système d'ordre 3 extrait de S ;
    - S n'est pas un système libre (car $u_1 = \frac{3}{2}u_2 + \frac{5}{2}u_3$) $\Rightarrow$ $1 \leq rg(C) < 3$
- $\{u_1, u_2\}$ est un système libre d'ordre 2 extrait du système S $\Rightarrow rg(C) = 2$

TD : Espace vectoriel

Exercice 1

Parmi les ensembles suivants, lesquels sont, ou ne sont pas, des sous-espaces vectoriels ?

1. $E_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x - 4y = 0\}$
2. $E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + 3z = 0\}$
3. $E_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + 3z = 1\}$
4. $E_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = 0\}$
5. $E_5 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / xy = 0\}$

Exercice 2

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, on considère le sous ensemble $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + z = 0 \ \ et \ \ y - z = 0\}$

1. montrer que V est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. Donner une base de V et en déduire sa dimension.
3. Comparer V et $\mathbb{R}^3$.

Exercice 3

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$, on considère le sous ensemble $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x - t = y - z = 0\}$.

1. Montrer que F est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.
2. Donner une base de F.

Exercice 4

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère le sous espace $V = vect\Big((1, 1, -1); (1, 1, 1); (-1, 1, 1)\Big) = \Big\langle(1, 1, -1); (1, 1, 1); (-1, 1, 1)\Big\rangle$

1. Déterminer la dimension du sous espace vectoriel V.
2. Comparer V et $\mathbb{R}^3$.
3. Exprimer le vecteur $u = (2, 0, 0)$ dans la base $\Big\{(1, 1, -1); (1, 1, 1); (-1, 1, 1)\Big\}$.

Exercice 5

Dans $\mathbb{R}^4$, on considère le sous espace $H = vect\Big((2, 1, 1, 2); (1, 0, 1, 1); (0, 1, -1, 0)\Big)$

Donner une base de H et en déduire sa dimension.

Exercice 6

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs $v_1 = (1, 1, 1)$ $v_2 = (1, 1, a)$ et $v_3 = (1, a, a)$ où $a \in \mathbb{R}$.

Discuter suivant le paramètre a :

1. La dépendance des vecteurs v_1 , v_2 et v_3.

2. Le rang du système $\{v_1, v_2, v_3\}$.

Exercice 7

Soit E l'ensemble des matrices M d'ordre 3 qui ont la forme suivante :

$$M = \begin{pmatrix} a+b & c & b \\ c & a+c & c \\ b & c & a-b \end{pmatrix} \text{ où } (a,b,c) \in \mathbb{R}^3.$$

1. Montrer que toute matrice M de E peut s'écrire sous la forme $M = aI + bJ + cK$ où I, J et K sont des matrices d'ordre 3 à déterminer.
2. En déduire que E est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}(3)$ dont on donnera une base.

Exercice 8

On considère les vecteurs $v_1 = (1,0,0,1)$, $v_2 = (0,1,1,0)$, $v_3 = (1,1,0,0)$ et $v_4 = (0,0,1,0)$.
Montrer que $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 9

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $B = \{e_1, e_2, e_3\}$, on considère les vecteurs : $e_1' = e_1 + e_2 + e_3$, $e_2' = e_2$ et $e_3' = e_3$

1. vérifier que $B' = \{e_1', e_2', e_3'\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer les matrices de passage $P_{BB'}$ et $P_{B'B}$.

Exercice 10

1. L'ensemble $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}(2) / a + d = b + c \right\}$ est-il un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}(2)$?
2. Si oui, on donnera une base et la dimension de G.

Exercice 11

Dans $\mathcal{M}(3)$, on considère la matrice $C = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

Déterminer le rang de la matrice C.

Exercice 12

Dans $\mathcal{M}(3)$ l'ensemble des matrices d'ordre 3 , on considère la matrice $A_m = \begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & m & 1 \\ m & 1 & m \end{pmatrix}$ où $m \in \mathbb{R}$

Discuter, suivant les valeurs du paramètre m, le rang de la matrice A_m.

Exercice 13

Dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $B_c = \{e_1, e_2, e_3\}$, on considère les vecteurs : $u_1 = (1,1,0)$; $u_2 = (1,-1,1)$ et $u_3 = (0,1,1)$

1. Vérifier que $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$
2. Déterminer la matrice de passage P_{B/B_c}