Übung 1

Shehata

1 Entfaltung + Beweisen

1.1 Lösen Sie folgende Rekurrenz mittels Entfaltung:

$$T(1) = 2$$
$$T(n) = T(\frac{n}{3}) + 3 \quad \text{for n} \geq 2$$

Resultat:

$$T(n) = T(\frac{n}{3}) + 3 \qquad i = 1$$
$$T(n) = (T((\frac{\frac{n}{3}}{3}) + 3) + 3 = T(\frac{n}{9}) + 6 \qquad i = 2$$
$$T(n) = (T(\frac{\frac{n}{3}}{9}) + 6) + 3 = T(\frac{n}{27}) + 9 \qquad i = 3$$
$$T(n) = (T(\frac{\frac{n}{3}}{27}) + 9) + 3 = T(\frac{n}{81}) + 12 \qquad i = 4$$
$$T(\frac{n}{3^i}) + 3i$$

$$3^i = n \qquad / \log$$
$$i \log(3) = \log(n) \qquad / : \log(3)$$
$$i = \frac{\log(n)}{\log(3)}$$
$$i = \log_3(n)$$

$$
\begin{aligned}
&3\log_3(n) + T(\frac{n}{3^{\log_3(n)}}) && \\
&3\log_3(n) + T(\frac{n}{3^{\log_3(n)}}) && 3^{\log_3(n)} \Rightarrow n \\
&3\log_3(n) + T(\frac{n}{n}) && T(1) \Rightarrow 2 \\
&3\log_3(n) + 2 &&
\end{aligned}
$$

1.2 Um welche Art von Algorithmus handelt es sich hier? Interpretieren Sie die Rekurrenz

1.3 Beweisen Sie (mittels Raten und Beweisen), dass Ihr Ergebnis aus 1.a) richtig ist

$$T(1) = 3\log_3(1) + 2 = 3 \times 0 + 2 = 2$$

2 Master Theorem

Lösen Sie folgende Rekurrenzen mit Hilfe des Master-Theorems:

(a) $T(n) = 4T(\frac{n}{2}) + 2n^2 + 4n$

(b) $T(n) = 27T(\frac{n}{3}) + n\log(n)$

(c) $T(n) = 8T(\frac{n}{2}) + \frac{n^8}{2} - 2n$

Geben Sie immer den Lösungsweg an und überprüfen Sie für den Fall, dass $f(n) = \Omega(n^{log_b(a+\varepsilon)})$ für $\varepsilon > 0$ (Fall 3), auch die Zusatzbedingung.

a)

$a = 4; \quad b = 2$
$f(n) = 2n^2 + 4n$
$\log_b(a) = \log_2(4) = 2$

1.

$$\begin{aligned} f(n) &= O(n^{\log_b(a)-\varepsilon}) \\ 2n^2 + 4n &= O(n^{2-\varepsilon}) \qquad \rightarrow \text{Sum-Rule} \\ 2n^2 &\leq O(n^{2-\varepsilon}) \end{aligned}$$

Ist für $\varepsilon > 0$ immer kleiner, also falsch

2.

$$\begin{aligned} k &= 0 \\ f(n) &= \Theta(n^{2 \log^k(n)}) \\ 2n^2 + 4n &= \Theta(n^2) \qquad \rightarrow \text{Sum-Rule} \\ 2n^2 &= \Theta(n^2) \end{aligned}$$

Es wächst gleich schnell, also korrekt

Ergebnis: $\Theta(n \log_b(a) \log^{k+1}(n)) = \Theta(n^2 \log^1(n)) = \Theta(n^2 \log(n))$

b)

$a = 27; \quad b = 3$
$f(n) = n \log(n)$ $\log_b(a) = \log_3(27) = 9$

1.

$$\begin{aligned} f(n) &= O(n^{\log_3(27)-\varepsilon}) \\ n \log(n) &= O(n^{9-\varepsilon}) \qquad \rightarrow \text{Sum-Rule} \\ n \log(n) &\leq O(n^{9-\varepsilon}) \end{aligned}$$

$\rightarrow$ Es wächst schneller für $\varepsilon = 1$

Ergebnis: $\Theta(n^9)$

c)

$a = 8; \quad b = 2$
$f(n) = \frac{n^8}{2} - 2n$
$\log_b(a) = \log_2(8) = 3$

1.

$$f(n) = O(n^{\log_2(8)-\varepsilon})$$
$$\frac{n^8}{2} - 2n = O(n^{3-\varepsilon}) \qquad \rightarrow \text{Sum-Rule}$$
$$\frac{n^8}{2} \leq O(n^{3-\varepsilon})$$

Ist für $\varepsilon > 0$ immer kleiner, also falsch

2.

$$k = 0$$
$$f(n) = \Theta(n^{3\log^k(n)})$$
$$\frac{n^8}{2} - 2n = \Theta(n^3) \qquad \rightarrow \text{Sum-Rule}$$
$$\frac{n^8}{2} = \Theta(n^3)$$

Es wächst immer noch langsamer

3.

$$f(n) = \Omega(n^{\log_2(8)+\varepsilon})$$
$$\frac{n^8}{2} - 2n = \Omega(n^{3+\varepsilon}) \qquad \rightarrow \text{Sum-Rule}$$
$$\frac{n^8}{2} \geq \Omega(n^{3+\varepsilon})$$

Die Aussage stimmt von $0 < \varepsilon < 8$

Zusatzbedingung

$$af(\frac{n}{b}) \leq cf(n) \tag{1}$$
$$8(\frac{\frac{n}{2}}{2})^8 \leq c\frac{n^8}{2} \tag{2}$$
$$8(\frac{n}{4})^8 \leq c\frac{n^8}{2} \tag{3}$$
$$8\frac{n^8}{4^8} \leq c\frac{n^8}{2} \tag{4}$$
$$8\frac{1}{4^8} \leq c\frac{1}{2} \tag{5}$$
$$\frac{8}{4^8} \leq \frac{c}{2} \tag{6}$$
$$\tag{7}$$

Ergebnis: $\Theta(n^9)$