Fonctions Exponentielle, logarithme et Puissance $T^{\textbf{ale}}S$

Auteur : Abdoulaye DABO

Diplômé de la licence de Mathématiques (Université Cheikh Anta Diop de Dakar - F.S.T)

Sommaire

1 Fonctions Exponentielle

Définition 1.1

La fonction exponentielle exp est l'unique fonction f définie sur $\mathbb{R}$ telle que : $f' = f$ et $f(0) = 1$.

On note alors $exp(x) = e^x$

La fonction exponentielle est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $(e^x)' = e^x$

• **Variations :**

La fonction exponenttielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

• **Signes**

Pour tout reel x : $e^x > 0$

• **Proprietés**

1. $e^0 = 1$ et $e^1 = e$
2. $e^{a+b} = e^a \times e^b$
3. $e^{-a} = \frac{1}{e^a}$
4. $e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$
5. $(e^a)^n = e^{na}$

• **Limites**

$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$; $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$

2 Fonction Logarithmique

Définition 2.1

La fonction logarithme noté ln est l'unique fonction f verifiant : $f(1) = 0$ et pour tout réel $x > 0$, $f'(x) = \frac{1}{x}$.

La fonction logarithme népérien est aussi la fonction réciproque de la fonction exponentielle.

Elle est continue et dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour tout réel $x > 0$, $(\ln)'(x) = \frac{1}{x}$.

• **Variations**

La fonction logarithme népérien est strictement croissante sur son ensemble de définition.

• **Signes**

Si $x < 1$ alors $\ln x < 0$

Si $x > 1$ alors $\ln x > 0$

• **Proprietés**

Pour tout reels $a > 0$, $b > 0$ on a :

1. $\ln(1) = 0$

2. $\ln(e) = 1$
3. $\ln(a) + \ln(b) = \ln(a\,b)$
4. $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$
5. $\ln(a) - \ln(b) = \ln\left(\frac{a}{b}\right)$
6. $\ln\left(a^n\right) = n\ln(a)$

• **Limites**

1. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln(x) = -\infty$
2. $\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$

• **Relations entre Exponentielle et Logarithme**

1. Pour tous réel x et y, $x > 0$, $e^{\ln(x)} = x$, $\ln\left(e^y\right) = y$
2. $\ln(x) = \ln(y) \Leftrightarrow x = y$
3. $\ln(x) = a \Leftrightarrow x = e^a$
4. $\ln(x) < \ln(y) \Leftrightarrow x < y$
5. $\ln(x) < a \Leftrightarrow x < e^a$

3 Fonction Puissance

Définition 3.1

Soit α un nombre réel différent de 0

On appelle fonction puissance d'exposant α, l'application $f_a : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ definie par $f_a(x) = x^\alpha = e^{\alpha\ln x}$

Elle est continue et dérivable sur $\mathbb{R}^*$ car composition de fonctions continues et dérivables sur $\mathbb{R}^*$.

On a : $\forall x \in \mathbb{R}$ $f'_\alpha(x) = (e^{\alpha\ln x})' = \frac{\alpha}{x}e^{\alpha\ln x}$.

• **Variation**

Le signe de la dérivée dépend donc du signe de α. On a alors :

$$\begin{cases} f'_\alpha > 0 & \text{si}\, \alpha > 0 \\ f'_\alpha < 0 & \text{si}\, \alpha < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f_\alpha \,\text{est srtictement croissante si} & \alpha > 0 \\ f_\alpha \,\text{est strictement décroissante si} & \alpha < 0 \end{cases}$$

• **Proprietés**

Soit α et β deux réels.

1. $x^{(\alpha+\beta)} = e^{(\alpha+\beta)\ln x} = e^{\alpha\ln x} \times e^{\beta\ln x} = x^\alpha x^\beta$
2. $x^{(\alpha)\beta} = x^{\alpha\times\beta}$

3. $(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha$

• **Limites**

$$\lim_{x\to+\infty} x^\alpha = \begin{cases} +\infty & \text{si}\, \alpha > 0 \\ 0 & \text{si}\, \alpha < 0 \end{cases} \; et \; \lim_{x\to 0^+} x^\alpha = \begin{cases} 0 & \text{si}\, \alpha > 0 \\ +\infty & \text{si}\, \alpha < 0 \end{cases}$$

4 Limites et croissance comparée

Soit n un nombre entier strictement positif

1. $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x^n}{e^x} = 0$
2. $\lim_{x\to+\infty} x^n e^{-x} = 0$
3. $\lim_{x\to-\infty} x^n e^x = 0$
4. $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^n} = 0$
5. $\lim_{x\to 0} x^n \ln(x) = 0$

5 Limites et Taux d'accroissement

1. $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1.$
2. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$
3. $\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$

Merci de signaler toutes erreurs via WhatsApp : **+221777426690**