Limite de Fonctions

$T^{\text{ale}}S$

Auteur : Abdoulaye DABO

Diplômé de la licence de Mathématiques (Université Cheikh Anta Diop de Dakar - F.S.T)

Sommaire

1 Définitions

Définition 1.1

La limite d'une fonction représente la valeur vers laquelle cette fonction tend lorsque son argument (généralement noté "x") se rapproche d'une certaine valeur (généralement notée "a"). On dit souvent que la limite d'une fonction f(x) lorsque x tend vers a est L. Ainsi on dit qu'une fonction f admet une limite L en a lorsque f s'approche de l quand x s'approche de a. On note $\lim_{x \to a} f(x) = L$.

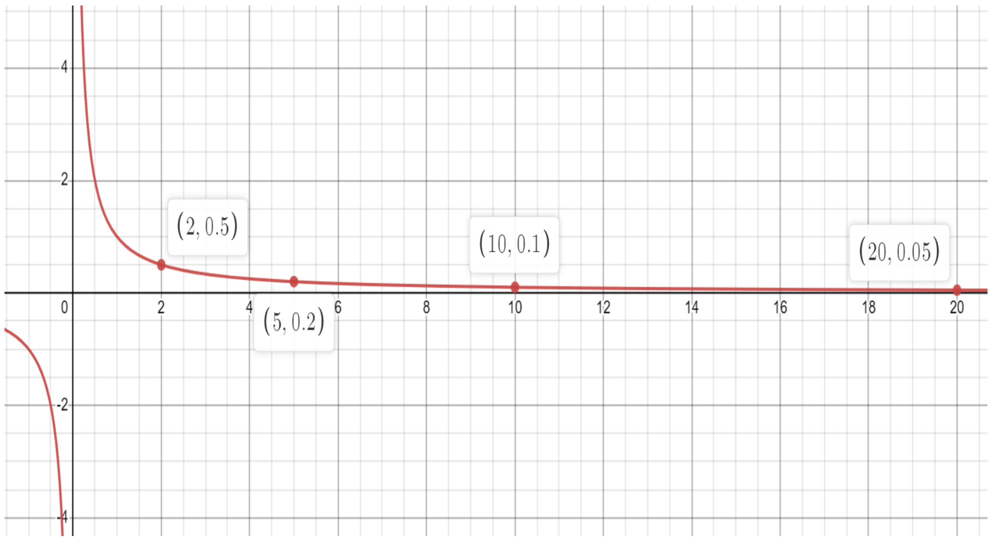

FIGURE 1 – Graphe de la fonction $\frac{1}{x}$

On voit que quand x devient plus grand, f(x) s'approche de 0.

Ainsi $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$.

2 Propriétés

Soient $f(x)$ et $g(x)$ deux fonctions et a une constante. Supposons que les limites suivantes existent :

1. Limite de la somme :

   $\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$

2. Limite du produit :

   $\lim_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x)$

3. Limite du quotient :

   $\lim_{x \to a} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)} \quad (\text{si } \lim_{x \to a} g(x) \neq 0)$

4. Limite d'une constante multipliée par une fonction :

   $\lim_{x \to a} [c \cdot f(x)] = c \cdot \lim_{x \to a} f(x) \quad (\text{où } c \text{ est une constante})$

5. **Limite et composée de fonctions**

   Pour calculer $\lim_{x\to a} g \circ f(X)$, on procède ainsi :

   Si $\lim_{x\to a} f(x) =$ b et si $\lim_{x\to b} g(x)=$ c alors $\lim_{x\to a} g[f(x)] = c$.

3 Techniques de Calcul de Limites

1. Simplification : Simplifiez l'expression si possible en utilisant les propriétés algébriques.
2. Substitution directe : Remplacez la variable par la valeur vers laquelle elle tend dans l'expression et calculez la limite.
3. Factorisation : Facteur commun, factorisation par groupement, factorisation de différences de carrés, etc.
4. Conjugaison : Utilisez la conjugaison pour simplifier l'expression.
5. Rationalisation : Rationalisez l'expression en éliminant les racines carrées ou les dénominateurs irrationnels.
6. Utilisation de formes indéterminées : Identifiez les formes indéterminées et appliquez une technique appropriée (Réécriture, factorisation, etc.).
7. Changement de variable : Effectuez un changement de variable approprié pour simplifier l'expression et calculer la limite.
8. Soit $P(x)$ un polynôme de la forme $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, où n est le degré du polynôme et les a_i sont les coefficients.

   Si $n > 0$, alors la limite du polynôme lorsque x tend vers l'infini ($x \to \infty$) ou moins l'infini ($x \to -\infty$) est déterminée par le terme de plus haut degré. Plus précisément :

   $$\lim_{x\to\infty} P(x) = \lim_{x\to-\infty} P(x) = \pm\infty$$

   La limite est positive ou négative en fonction du signe du coefficient du terme de plus haut degré a_n.

   Si $n = 0$, c'est-à-dire si $P(x)$ est un polynôme constant, alors la limite lorsque x tend vers l'infini ou moins l'infini est simplement la valeur constante du polynôme :

   $$\lim_{x\to\infty} P(x) = \lim_{x\to-\infty} P(x) = a_0$$

Théorème 3.1 (Théorème des Gendarmes)

Ici $a \in \mathbb{R}$ ou $a = \pm\infty$

Soient f,g et h 3 fonctions définies sur un intervalle I.

Si pour tout x $\in I$, on a : $g(x) \leq$ f (x) $\leq$ h(x) et si : $\lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} h(x) = l$ alors $\lim_{x\to a} f(x) = l$.

• Dans un calcul de limite, si on obtient : « $+\infty - \infty$ » **ou** « $0 \times \infty$ » **ou** « $\frac{\infty}{\infty}$ »**, ou** « 0^0 »**, ou** « ∞^0 »**, ou** « $\frac{0}{0}$ », alors on a une forme indéterminée.
Pour lever l'indétermination, on fait une transformation d'écriture.
• Dans un calcul de limite d'un quotient, si on obtient « $\frac{a}{0}$ », avec a différent de 0, alors on a une forme indéfinie.
Dans ce cas la limite est égale à l'infini ; pour déterminer dans quel cas on a $-\infty$ **ou** $+\infty$, on étudie le signe du dénominateur et on calcule les limites à gauche et à droite.

4 limites usuelles

- $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$
- $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$
- $\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty$
- $\lim_{x\to-\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & si\, n\, pair \\ -\infty & si\, n\, impair \end{cases}$
- $\lim\limits_{x\to a} c = c$ (où c est une constante)
- $\lim\limits_{x\to a} x = a$
- $\lim\limits_{x\to a} x^n = a^n$ (pour $n \in \mathbb{N}$)
- $\lim\limits_{x\to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$ (pour $n \in \mathbb{N}$ et $a > 0$)
- $\lim\limits_{x\to a} \frac{1}{x} = \frac{1}{a}$ (pour $a \neq 0$)
- $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1$

Merci de signaler toutes erreurs via WhatsApp : **+221777426690**