Nombres complexes

$T^{\text{ale}}S$

Auteur : Abdoulaye DABO

Diplômé de la licence de Mathématiques (Université Cheikh Anta Diop de Dakar - F.S.T)

Sommaire

1 Définition

Définition 1.1

Les nombres complexes sont les nombres qui s'écrivent sous la forme $z = a + ib$ où a et b sont des réels.

Le nombre i verifie $i^2 = -1$.

On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.

L'addition et la multiplication dans $\mathbb{C}$ suivent les mêmes règles que dans $\mathbb{R}$.

Définition 1.2

Le module d'un nombre complexe $z = a + ib$ est le réel noté $\|z\| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Proprieté 1

Pour tout nombres complexes z et z' :

- si $z = x + iy$, $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$, $z\overline{z} = |z|^2 = x^2 + y^2$
- $|-z| = |z|$ • $|\overline{z}| = |z|$
- $|z + z'| \leq |z| + |z'|$ (inégalité triangulaire)
- $|zz'| = |z|\,|z'|$ • $|z^n| = |z|^n$ • $\frac{|z|}{|z'|} = \left|\frac{z}{z'}\right|$

2 Forme algébrique

Définition 2.1

L'écriture $z = a + ib$ est la forme algébrique du nombre complexe z. Le nombre x est la partie réelle de z et le nombre y est la partie imaginaire de z. On les notes respectivement par $\mathbf{Re(z)}$ et $\mathbf{Im(z)}$.

z est un réel $\Leftrightarrow \mathbf{Im(z)} = 0$

z est un imaginaire pure $\Leftrightarrow \mathbf{Re(z)} = 0$.

Proprieté 2

Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont la même partie réelle et la même partie imaginaire : soit $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$, avec x, y, x' et y' quatre nombres réels, alors,

$$z = z' \Longleftrightarrow \Big(x = x' \quad \text{et} \quad y = y'\Big)$$

Définition 2.2

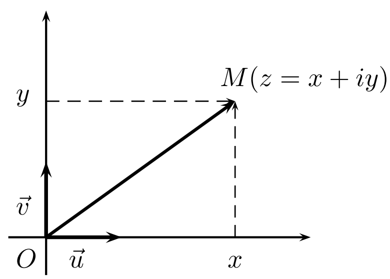
Le conjugué dun nombre complexe $z = a + ib$ est le nombre complexe noté : $\overline{z} = a - ib$

Proprieté 3

- $\overline{\overline{z}} = z$ • $z\overline{z} = x^2 + y^2$ • $\overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'}$ • $\overline{z^n} = \overline{z}^n$
- $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$
- si $z \neq 0$, $\overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)} = \dfrac{1}{\overline{z}}$ • si $z' \neq 0$, $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}}$
- $z + \overline{z} = 2\mathbf{Re(z)}$ et donc, z imaginaire pur $\Longleftrightarrow \mathbf{Re(z)} = 0 \Longleftrightarrow z = -\overline{z}$
- $z - \overline{z} = 2i\mathbf{Im(z)}$, et donc, $z \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow \mathbf{Im(z)} = 0 \Longleftrightarrow z = \overline{z}$

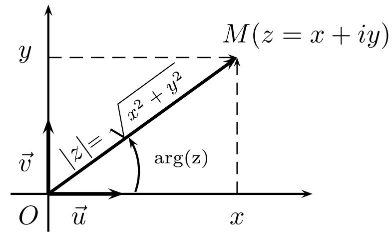
3 Nombres Complexes et Géométrie

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$ direct. A tout nombre complexe $z = x + iy$, $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$, on associe le point M de coordonnées $M(x; y)$. On dit que z est l'affixe du point M, ou du vecteur $\overrightarrow{OM}$; et que le point M, ou le vecteur $\overrightarrow{OM}$ est l'image de z.
La distance $OM = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\overline{z}}$ est égale au **le module** du nombre complexe z.



Définition 3.1

Soit dans le plan complexe un point M d'affixe $z = x + iy$, $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$.
On appelle **argument** du nombre complexe non nul z, noté $\arg(z)$, toute mesure en radians de l'angle orienté : $\left(\vec{u}, \overrightarrow{OM}\right)$.



Remarque :

• Un nombre complexe non nul z a une infinité d'arguments : si θ est un de ces arguments, alors tous les autres sont de la forme $\theta + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

On note $\arg(z) = \theta$ (modulo 2π), ou $\arg(z) = \theta$ $[2\pi]$, ou encore, pour simplifier (mais alors par abus de langage), $\arg(z) = \theta$.

• Si z est un réel ($z = x + i \times 0$), alors $|z| = |x|$: le module coïncide avec la valeur absolue pour les nombres réels.

4 Forme trigonométrique

Définition 4.1

La forme trigonométrique dun nombre complexe z ($z \neq 0$) est de la forme : $z = r(cos(\theta) + isin(\theta))$ **avec :** avec $r = \|z\|$, le module de z et θ un argument de z.

5 Forme exponentielle dun nombre complexe

Pour tout réel θ, on pose : $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$

Ainsi $z = re^{i\theta}$ avec $r = \|z\|$ et θ un argument de z.

Si z est un réel, $z = re^{i\theta}$ avec $\theta = 0$ mondulo 2π.

Si z est un imaginaire pure, $z = re^{i\theta}$ avec $\theta = \frac{\pi}{2}$ mondulo 2π.

• **Formule d'Euler**

$\forall\ x \in \mathbb{R}$ $\cos(x) = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$ et $\sin(x) = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$

• **Formule de Moivre**

$\forall\ \theta \in \mathbb{R}$ et $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$

6 Racine n-ième d'un nombre complexe

Définition 6.1

Soit Z un nombre complexe, on appelle racine **n-ième** de Z tout nombre complexe z tel que $z^n = Z$.

L'équation complexe $z^n = Z$ admet n racines distinctes.

Son ensemble solution est donné par $\mathbb{S}_n = \{r^{\frac{1}{n}} e^{i(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n})}, k \in \{0, ..., n-1\}\}$ avec $r = \|z\|$ et θ un argument de z

Exemple

Résoudre dans $\mathbb{C}$ léquation $z^3 = \sqrt{3} + i$.

Posons $Z = \sqrt{3} + i$ On a : $|Z| = |\sqrt{3} + i| = \sqrt{3+1} = 2$

L'écriture trigonométrique de $Z = 2(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2})$. On voit que $Arg(Z) = \frac{\pi}{6}$

Les solutions sont : $z_k = 2^{\frac{1}{n}} e^{i(\frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3})}$, $k \in \{0, 1, 2\}$.

7 Racine n-ième de l'unité

Définition 7.1

On appelle racine $n - ime$ de l'unité tous les nombres complexes z vérifiant : $z^n = 1$.

L'ensemble des racines $n - imes$ de lunité est donne par $\mathbb{S}_n = \{e^{i\frac{2k\pi}{n}}, k \in \{0, ..., n-1\}\}$

Théorème 7.1

Les racines $n - imes$ dun nombre complexe Z sont exactement les produits de lune dentre elles avec les racines $n - imes$ de lunité. Autrement dit, si z est tel que $z^n = Z$, alors $\mathbb{S}_n = \{ze^{i\frac{2k\pi}{n}}$, $k \in \{0, ..., n-1\}\}$

8 Equation du second degré à coéfficients complexes

L'équation $az^2 + bz + c = 0$, où $a \neq 0$, b et c sont trois réels, de discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ admet :

- si $\Delta = 0$, une solution réelle double $z = -\dfrac{b}{2a}$
- si $\Delta > 0$, deux solutions réelles distinctes $z_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.
- si $\Delta < 0$, deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{et , } z_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

Dans tous les cas, le trinôme du second degré se factorise selon (avec éventuellement $z_1 = z_2$) :

$az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$.

Merci de signaler toutes erreurs via WhatsApp : **+221777426690**