Equations différentielles

$T^{\text{ale}}S$

Auteur : Abdoulaye DABO

Diplômé de la licence de Mathématiques (Université Cheikh Anta Diop de Dakar - F.S.T)

Sommaire

1 Définitions

Définition 1.1

Une équation différentielle est une équation faisant intervenir comme inconnue une fonction f et ses dérivées. L'inconnue f est en général notée y.

Définition 1.2

• On appelle **ordre** de l'équation différentielle, le plus grand ordre de dérivation apparaissant dans l'équation.

• On dit que l'equation différentielle est homogène si son second membre est égale à 0.

2 Résolution des équations différentielles homogènes

2.1 Equations différentielles du premier ordre

Forme

Soit a, b des nombres réels tels que a $\neq$ 0. une équation différentielle du premier ordre est de la forme $ay' + by = 0$

Solutions

Les solutions de l'équation différentielle $ay' + by = 0$ sont les fonctions f_k définies sur $\mathbb{R}$ par $f_k(x) = ke^{\frac{-b}{a}x}$ où k est une constante.

2.2 Equations différentielles du second ordre

Forme

Soit a, b, c des nombres réels, a $\neq$ 0 .

une equation différentielle du premier ordre est de la forme : $ay'' + by' + cy = f(x)$ **(1)**

L'équation $r^2 + ar + b = 0$ est appelé **équation caractéristique** de l'équation différentielles.

Solutions

Si son équation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$ admet :

• deux racines réelles distinctes r_1 et r_2, alors alors les solutions de **(1)** sont les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \alpha e^{r_1 x} + \beta e^{r_1 x}$ où α et β sont des nombres réels.

• une racine double r_0 alors les solutions de **(1)** sont les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (\alpha x + \beta x)e^{r_0 x}$ où α et β sont des nombres réels.

• deux racines complexes conjugués $u+iv$ et $u-iv$, alors les solutions de **(1)** sont les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=e^{ux}(\alpha\cos vx+\beta\sin vx)$ où α et β sont des nombres réels.

3 Résolution des équations différentielles non homogènes

Technique de résolution

Pour résoudre un equation differentielle non homogene, on résout d'abord l'équation homogène. Notons S_1 sa solution.

Puis on cherche une soultion S_2 particulière de l'équation non homogène.

La solution générale de l'équation différentielle est $S=S_1+S_2$

4 Exercices

Exercice 1

Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes.

1. $y=y'$
2. $y'=-\frac{y}{2}$
3. $2y'-3y=0$
4. $2y''-8y'+16y=0$
5. $y''+y'-6y=0$
6. $y''-3y'+13y=0$
7. $y''-2y=0$
8. $y''+2y=0$

Solution

1. $y=y'$
   $y=y' \Longleftrightarrow y-y'=0$
   Les solutions de cette équations sont les fonctions f telles que $f(x)=ke^{x}$ avec k une constante.
2. $y'=-\frac{y}{2}$
   $y'=-\frac{y}{2} \Longleftrightarrow 2y'+y=0$
   Les solutions de cette équations sont les fonctions f telles que $f(x)=ke^{\frac{-1}{2}x}$ avec k une constante.
3. $2y'-3y=0$
   Les solutions de cette équations sont les fonctions f telles que $f(x)=ke^{\frac{3}{2}x}$ avec k une constante.

4. $2y'' - 8y' + 16y = 0$

   $2y'' - 8y' + 16y = 0 \Longleftrightarrow y'' - 4y' + 8y = 0$

   Soit $r^2 - 4r + 4$ l'équation caractéristique.

   $\triangle = 16 - 4(1 \times 4) = 0$, l''equation admet une solutions double $x_0 = \frac{1}{2}$.

   Les solutions de cette équations sont les fonctions f telles que $f(x) = (\alpha x + \beta)e^{\frac{1}{2}x}$ avec α et β des constantes.

5. $y'' + y' - 6y = 0$

   Soit $r^2 + r - 6$ son équations caractéristiques.

   $\triangle = 1 - 4(1 \times -6) = 25 > 0$, on a deux racines distinctes $x_1 = -3$ et $x_2 = 2$.

   Les solutions de cette équations sont les fonctions f telles que $f(x) = \alpha e^{-3x} + \beta e^{2x}$ avec α et β des constantes.

6. $y'' - 4y' + 13y = 0$

   Soit $r^2 - 4 + 13$ sont équations caractéristiques.

   $\triangle = 16 - 4(1 \times 13) = -36$,

   On a deux racines complexes consiguées $x_1 = \frac{4-i\sqrt{36}}{2} = 2 - 3i$ et $x_2 = \frac{4+i\sqrt{36}}{2} = 2 + 3i$

   Les solutions de cette equations sont les fonctions f telles que $f(x) = e^{2x}(\alpha\cos(3x) + \beta\sin(3x))$ avec α et β des constantes.

7. $y'' - y = 0$

   Soit $r^2 + 0 - 1$ sont équations caractéristiques.

   $\triangle = 0 - 4(1 \times -1) = 4$, on a deux solutions $x_1 = 1$ et $x_2 = -1$

   Les solutions de cette équations sont les fonctions f telles que $f(x) = \alpha e^{x} + \beta e^{-x}$ avec α et β des constantes.

8. $y'' + 2y = 0$

   Soit $r^2 + 0 - 1$ sont équations caractéristiques.

   $\triangle = 0 - 4(1 \times 2) = -8$, on a deux solutions complexes conjuguées $x_1 = i\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $x_2 = -i\frac{\sqrt{2}}{2}$

   Les solutions de cette équations sont les fonctions f telles que $f(x) = e^{0\times x}(\alpha\cos(\frac{\sqrt{2}}{2}x) + \beta\sin(\frac{\sqrt{2}}{2}x)) = \alpha\cos(\frac{\sqrt{2}}{2}x) + \beta\sin(\frac{\sqrt{2}}{2}x)$ avec α et β des constantes.

Exercice 2

Dans chacun des cas suivants résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équations différentielle et déterminer la solution vérifiant la condition initiale donnée.

1. $3y' + y = 0$ et $y(0) = e$
2. $y'' - 2y' + 2y = 0$, $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$
3. $y'' + 16y = 0$, $y(0) = 0$ et $y'(0) = -1$

Solution

1. $3y' + y = 0$ et $y(1) = e$

   Les solutions de cette équations sont les fonctions y telles que $y(x) = ke^{\frac{-1}{3}x}$, $k \in \mathbb{R}$

   $y(0) = e \Rightarrow ke^{\frac{-1}{3}\times 0} = e \Rightarrow k = e$

   La solution vérifiant la condition initiale est $y(x) = e \times e^{\frac{-1}{3}x} = e^{\frac{-x}{3}+1}$

2. $y'' - 2y' + 2y = 0$, $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$

   Soit $r^2 - 2r-$ sont équations caractéristiques.

   $\triangle = 4 - 4(1 \times 2) = -4$, on a deux solutions complexes $x_1 = \frac{2-i2}{2} = 1 - i$ et $x_2 = 1 + i$

   Les solutions de cette équations sont les fonctions y telles que $y(x) = e^x(\alpha\cos(x) + \beta\sin(x))$ avec α et β des constantes.

   $y(0) = 1 \Rightarrow \alpha = 1$

   $y'(x) = e^x(\alpha\cos(x) + \beta\sin(x)) + e^x(-\alpha\sin(x) + \beta\cos(x))$

   $y'(0) = 0 \Rightarrow \alpha + \beta = 0 \Rightarrow \beta = -\alpha = -1$

   La solution vérifiant la condition initiale est $y(x) = e^x(\cos(x) - \sin(x))$

Exercice 3

On considère l'équation différentielle $(\mathbf{E}) : y' - 2y = \mathrm{e}^{2x}$,

1) Démontrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\mathrm{e}^{2x}$ est une solution de $\mathbf{E}$.

2) Résoudre l'équation différentielle $(\mathbf{E}) : y' - 2y = \mathrm{e}^{2x}$.

Solution

On considère l'équation différentielle $(\mathbf{E}) : y' - 2y = \mathrm{e}^{2x}$,

1. Montrons que $f(x) = x\mathrm{e}^{2x}$ est une solution de $\mathbf{E}$.

   On a : $f'(x) = (x\mathrm{e}^{2x})' = e^{2x} + x \times 2e^{2x} = e^{2x}(1 + 2x)$

   $f'(x) - 2f(x) = e^{2x}(1 + 2x) - 2xe^{2x} = e^{2x}(1 + 2x - 2x) = e^{2x}$.

   Donc $f(x) = x\mathrm{e}^{2x}$ est bien une solution de $\mathbf{E}$.

2. Résolvons l'équation différentielle $(\mathbf{E}) : y' - 2y = \mathrm{e}^{2x}$.

   C'est une équation différentielle non homogène dont la solution particulière est donnée par la question (1).

   Trouvons la solution de l'équation homogène $y' - 2y = 0$.

   C'est une équation différentielle de premier ordre.

   L'ensemble des solutions sont les fonstions f telles que $f(x) = ke^{2x}$ avec k une constante réelle.

   Ainsi la solution de l'équation $(\mathbf{E}') : y' - 2y = \mathrm{e}^{2x}$ est $f(x) = ke^{2x} + x\mathrm{e}^{2x} = e^{2x}(k + x)$ avec avec k une constante réelle.

Merci de signaler toutes erreurs via WhatsApp : **+221777426690**