Suites numériques

$T^{\text{ale}}S$

Auteur : Abdoulaye DABO

Diplômé de la licence de Mathématiques (Université Cheikh Anta Diop de Dakar - F.S.T)

Sommaire

1 Définitions

Définition 1.1

Une suite est une application u : $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

$\forall\ n \in \mathbb{N}$, on note $u(n)$ par u_n et on l'appèlle $n-$ième ou terme générale de la suite.

Les suites numériques peuvent être définies de diverses manières.

— **Définition explicite**

Chaque terme est exprimé directement en fonction de son indice.

Exemple : $u_n = \frac{n}{n+1}$

— **Définition par récurrence**

Une suite est définie en spécifiant les premiers termes (conditions initiales) et une relation qui permet de calculer les termes suivants en fonction de ceux déjà déterminés.

Exemple : La suite définie par

$$u_1 = 1$$

$$u_{n+1} = u_n + 2 \quad \text{pour } n \geq 1$$

2 Variations

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite.

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante si $\forall n \in \mathbb{N} u_{n+1} \geq u_n$

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante $si \forall n \in \mathbb{N} u_{n+1} > u_n$

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est decroissante si $\forall n \in \mathbb{N} u_{n+1} \leq u_n$

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stictement décroissante si $\forall n \in \mathbb{N} u_{n+1} < u_n$

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone si elle est si elle est strictement croissante ou strictement décroissante.

• Pour connaître les variations d'une suite (u_n) on étudie le signe de : $u_{n+1} - u_n$.

— La suite (u_n) est **croissante** si pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n \geq 0$.

— La suite (u_n) est **décroissante** si pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n \leq 0$.

— La suite (u_n) est **constante** si pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = 0$.

• Si les termes de la suite sont strictements positifs, on peut comparer le rapport : $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1.

• Si la suite est définie de façon explicite, on peut aussi étudier le signe de la dérivée de la fonction associée (restreindre le domaine d'étude sur $\mathbb{N}$).

3 Suite minorée, suite majorée, suite bornée

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique.

• (u_n) est minorée s'il existe un nombre reel m tel que pout tout entier n $\in \mathbb{N}$, on a : $u_n \geq m$,

• (u_n) est majorée s'il existe un nombre reel M tel que pout tout entier n $\in \mathbb{N}$, on a : $u_n \leq M$.

• (u_n) est bornée si elle est a la fois minorée et majoré.

4 Suites arithmétiques

Une suite (u_n) est dite suite arithmétique si $u_{n+1} = u_n + r$ $\forall$ $n \in \mathbb{N}$. r est appelé raison de la suite.

Pour montrer que une suite est arithmétique on montre que : $u_{n+1} - u_n = Cte$ $\forall$ n $\in \mathbb{N}$. Le terme générale d'une suite arithmétique s'ecrit : $u_n = u_p + (n-p)r$

Somme des termes d une suite arithmétique

$S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$ = (n + 1)$\times$ $\frac{u_0+u_n}{2}$.

Formule générale :

$S_n = u_p + u_{p+1} + ... + u_n = (n-p+1) \times \frac{u_p-u_n}{2}$

5 Suites géométriques

Une suite (u_n) est dite suite géométriques si $u_{n+1} = q \times u_n$ $\forall$ $n \in \mathbb{N}$. q est appelé raison de la suite.

Pour montrer que une suite est géométrique on montre que $\frac{u_{n+1}}{u_n} = Cte$ $\forall$ n $\in \mathbb{N}$.

Le terme generale d'une suite geometrique s'ecrit : $n = u_p \times q^{(n-p)}$

Somme des termes d une suite géométrique :

$S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n = q^n = u_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

Formule générale :

$S_n = u_p + u_{p+1} + ... + u_n =^p \times q^{p+1} \times .... \times q^n = u_p \times \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$

6 Raisonnement par récurrence

Pour montrer qu'une propriété P_n est vraie pour tout entier naturel n $\geq n_0$, on procède par étapes :

- Initialisation : On vérifie que la propriété est vraie au premier rang n_0.
- Hérédite : On suppose que la propriété est vraie à un rang $p \geq n_0$, c'est l'hypothese de recurrence.
- On montre que la propriété est vraie au rang p+1 (en utilisant le plus souvent l'hypothèse de récurrence).

7 Limite

7.1 Définition

On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a pour limite l si, et seulement si, tout intervalle ouvert contenant l contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. On note alors : $\lim_{x\to+\infty} u_n = l$ et l'on dit que la suite converge vers l.
On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a pour limite $+\infty$ (respectivement $-\infty$) si, et seulement si, tout intervalle $]A;+\infty[$ (respectivement $]-\infty;B[$) contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.
On note alors : $\lim_{x\to+\infty} u_n = +\infty$ respectivement $\lim_{x\to+\infty} u_n = -\infty$ dans ce cas on dit que la suite diverge vers $+\infty$ (respectivement $-\infty$)

7.2 Monotonie et convergence

- Toute suite croissante majorée est convergente
- Toute suite décroissante minorée est convergente.
- Toute suite croissante non majorée diverge et tend vers $+\infty$
- Toute suite décroissante non minorée diverge et tend vers $-\infty$

7.3 Convergence des suites géométriques

soit (u_n) une suite géométrique de raison q. On a les limites suivantes :

- si q $>$ 1 alors $\lim_{x\to+\infty} u_n = +\infty$
- si q $=$ 1 alors $\lim_{x\to+\infty} u_n = 1$
- si $-1 < q < 1$ alors $\lim_{x\to+\infty} u_n = 0$
- si q $<$ -1 alors la limite n'existe pas.

Merci de signaler toutes erreurs via WhatsApp : **+221777426690**