Continuité

$T^{\text{ale}}S$

Auteur : Abdoulaye DABO

Diplômé de la licence de Mathématiques (Université Cheikh Anta Diop de Dakar - F.S.T)

Sommaire

1 Continuité en un point **2**

2 Continuité sur un intervalle **2**

3 Continuité et Composée de fonctions **2**

4 Fonctions continues et opérations **2**

5 Exemples de fonctions continues **3**

6 Théorème des valeurs intermédiaires **3**

1 Continuité en un point

Définition 1.1

Soit une fonction f définie sur un intervalle ouvert I. Soit a un élément de I. On dit que la fonction f est continue en a si et seulement si : $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Définition 1.2

• f est continue à droite en a si et seulment si $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$.

• f est continue à gauche en a si et seulment si $\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$.

Théorème 1.1

f est continue en $a \Longleftrightarrow \lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$.

2 Continuité sur un intervalle

Définition 2.1

La fonction f est continue sur I si et seulement si elle est continue en tout point de I.

3 Continuité et Composée de fonctions

Théorème 3.1

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ des fonctionc telles que $f(I) \subset J$ et $x_0 \in I$.

• Si f est continue en x_0 et g continue en $f(x_0)$ alors gof est continue x_0.

• Si f est continue sur I et g continue sur $f(I)$ alors gof est continue sur I.

4 Fonctions continues et opérations

Théorème 4.1

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I. Soit a un réel de I.

1. Si f et g sont continues en a, alors $f + g$ est continue en a.
2. Si f et g sont continues sur I, alors $f + g$ est continue sur I.
3. Si k est un réel et f est continue en a, alors kf est continue en a.
4. Si k est un réel et f est continue sur I, alors kf est continue sur I.
5. Si f et g sont continues en a, alors $f \times g$ est continue en a.

6. Si f et g sont continues sur I, alors $f \times g$ est continue sur I.
7. Si f est continue en a et $f(a) \neq 0$, alors $\frac{1}{f}$ est continue en a.
8. Si f et g sont continues en a et si $g(a) \neq 0$, alors $\frac{f}{g}$ est continue en a.
9. Si f et g sont continues sur I et si g ne s'annule pas sur I alors $\frac{f}{g}$ est continue sur I.

5 Exemples de fonctions continues

Théorème 5.1

1. les fonctions polynômes sont continues sur $\mathbb{R}$;
2. les fonctions rationnelles sont continues sur tout intervalle contenu dans leur domaine de définition ;
3. la fonction valeur absolue est continue sur $\mathbb{R}$;
4. toutes les fonctions obtenues par opérations (somme, produit, quotient quand le dénominateur ne s'annule pas) ou composition à partir de ces fonctions de référence sont aussi continues sur leur domaine de définition.

6 Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 6.1 (Théorème des valeurs intermédiaires)
Soit une fonction f définie et continue sur un intervalle $I = [a, b]$. Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un réel $k \in I$ tel que $f(c) = k$. (k n'est pas nécessairement unique.)
Si f est strictement monotone sur I alors k est unique.

Corollaire 6.1
Soit f une fonction continue sur $[a, b]$.
• Si $f(a) \cdot f(b) < 0$, l'équation $f(x) = 0$ au moins une solution dans $[a, b]$.
• Si de plus f est srtictement monotone sur $[a, b]$, alors la solution est unique.

Merci de signaler toutes erreurs via WhatsApp : **+221777426690**