Dérivabilité

$T^{\text{ale}}S$

Auteur : Abdoulaye DABO

Diplômé de la licence de Mathématiques (Université Cheikh Anta Diop de Dakar - F.S.T)

Sommaire

1 Definitions

Soit une fonction f éfinie sur un intervalle I et a un point de I .

Définition 1.1

On dit que la fonction f est dérivable en a si et seulement si le taux d'accroissement de la fonction f en a admet une limite finie l en a, c'est à dire :$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = l$

l est appele nombre d'erivée de f en a. On le note : $f'(a)$.

l est le coéfficient directeur de la tangente à la courbe de f au point $(a, f(a))$.

Cette tangente est d'équation $(D) : f'(a)(x-a)+f(a)$.

Toute fonction polynôme est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Toute fonction rationnelle est dérivable sur tout intervalle sur lequel elle est éfinie.

Définition 1.2

On dit que :

f est dérivable à droite en a s'il existe un réel d tel que : $\lim x \to a^+ \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = d$. Le nombre d est appelée le nombre dérivée à droite de la fonction f en a. Il est noté $f'_d(a)$.

f est dérivable a gauche en a s'il existe un réel g tel que : $\lim x \to a^- \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = g$. Le nombre g est appelée le nombre dérivée à gauche de la fonction f en a. Il est noté $f'_g(a)$

Théoréme 1.1

$$f \text{ est dérivable en } a \Longleftrightarrow \begin{cases} f \text{ est dérivable à droite et à gauche en } a \\ f'_d(a) = f'_g(a) \end{cases}$$

Théoréme 1.2 (de Rolles)

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction.

On suppose que :

f est continue sur un intervalle $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et $f(a) = f(b)$.

Alors il existe un réel c dans $]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$

Théoréme 1.3 (des accroissement finies)

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction.

On suppose que :

f est continue sur un intervalle $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$.

Alors il existe un réel c dans $]a, b[$ vérifiant $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$

Théoréme 1.4 (de l'inégalite des accroissement finies)

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction.

On suppose que f est continue sur un intervalle $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$. et qu'il esixte un réel k positif tel que $|f'(x)| \leq k \ \forall \ x \in [a, b]$.

Alors $|f(b) - f(a)| \leq k|b - a|$

2 Dérivation et monotonie

Théoréme 2.1

Soit une fonction f éfinie sur un intervalle I et a un point de I .

1. Si f est dérivable en a alors la fonction f est continue en a.
2. Si $\forall \ x \in I$, $f'(x) = 0$, alors la fonction f est constante sur I.
3. Si $\forall \ x \in$ I, $f'(x) > 0$, alors la fonction f est croissante sur I.
4. Si $\forall \ x \in$ I, $f'(x) < 0$, alors la fonction f est décroissante sur I.

3 Dérivation et fonction composée

Théoréme 3.1

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I telle que pour tout x de I, $u(x)$ appartient à un intervalle J. Soit f une fonction dérivable sur l'intervalle J. Soit g la fonction définie sur I par : $g(x) = f \circ u(x) = f(u(x))$ pour tout réel x de I :

La fonction g est dérivable sur I et pour tout réel x de I, $g'(x) = (f \circ u)(x) = u'(x) \times f' \, [u(x)]$.

4 Dérivation et bijection réciproque

Théoréme 4.1 (de dérivation de la bijection réciproque)

Soit f une fonction bijective d'un intervalle I vers $f(I)$.

Si f est dérivable et que f' ne s'annule pas sur I c'est-à-dire $f'(x) \neq 0 \ \forall \ x \in I$, alors f^{-1} est dérivable sur $f(I)$ et on a :

$[f^{-1}(y)]' = \frac{1}{f'[f^{-1}(y)]} = \frac{1}{f'(x)} \ \forall \ y \in f(I)$.

5 Dérivation de fonctions usuelles

Foncions	Dérivées
f (x) = k	$f'(x) = 0$
f (x) = x	$f'(x) = 1$
f(x) = x^n n $\in \mathbb{N}$	$f'(x) =$ nx^{n-1}
f (x) = $\frac{1}{x}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
f(x) = $\frac{1}{x^n}$	$f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$
f (x) = $\sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

6 Operation sur les derivées

Foncions	Dérivées
f + g	$f' + g'$
f × g	$f'g + g'f$
αf	$\alpha f'$
$\frac{f}{g}$	$\frac{f'g-fg'}{g^2}$
u^n	$nu'u^{n-1}$
$\frac{1}{u^n}$	$-\frac{nu'}{u^{n+1}}$
$u \circ v = u(v)$	$v'u'(v)$
$(f \circ u)'$	$u' \times (f' \circ u)$
e^u	$u'e^u$
$\ln u$	$\frac{u'}{u}$
$f(ax+b)'$	$af'(ax+b)$

Merci de signaler toutes erreurs via WhatsApp : **+221777426690**