# Primitives et Intégrales

$T^{\text{ale}}S$

**Auteur** : Abdoulaye DABO

Diplômé de la licence de Mathématiques (Université Cheikh Anta Diop de Dakar - F.S.T)

## Sommaire

# 1 Primitive

## 1.1 Définitions et Proprietés

**Définition 1.1**

Une fonction $F$ est une primitive d'une fonction $f$ sur un intervalle $I$ si F est dérivable sur I et $F'(x) = f(x), \forall x \in I$ .

**Théorème 1.1**

Toute fonction continue sur un intervalle I, y admet une infinité de primitives.

**Exemple :**

La fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x$ a pour primitive $F$ definie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = x^2$.

En effet F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $F' = f$

$F(x) = x^2 + 1$, $F(x) = x^2 - \frac{1}{2}$ sont aussi des primitives de $f$.

Toutes fonctions $F$ qui s'ecrit $F(x) = x^2 + C$ avec $C$ un contante est une primitive de $f$.

**Proprietés**

- Si $f$ est une fonction qui admet $F$ comme primitive sur un intervalle $I$, alors
  - toutes les primitives de f sont de la forme F + k où k est une constate réelle.
  - pour tout couple $(x_0; y_0)$ où $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$, $f$ admet une et une seule primitive $F_0$ qui prend la valeur $y_0$ en $x_0$.
- Si $u$ est une fonction dérivable sur un intervalle $I$ et si $v$ est une fonction dérivable sur un intervalle contenant $u(I)$, alors la fonction $u'(v'ou)$ admet sur $I$ la fonction $vou$ comme primitive.

### 1.2 Primitives de fonctions usuelles

Ici $k$ est une constante réelle.

| Foncion | Primitives |
|---|---|
| $f(x) = 0$ | $F(x) = k$ |
| $f(x) = 1$ | $F(x) = x + k$ |
| $f(x) = a$ avec a $\in \mathbb{R}$ | $F(x) = ax + k$ |
| $f(x) = x$ | $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + k$ |
| $f(x) = x^n$ avec n $\in \mathbb{Z} - \{-1\}$ | $F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + k$ |
| $f(x) = \frac{1}{x^2}$ | $F(x) = -\frac{1}{x} + k$ |
| $f(x) = \frac{1}{x^n}$ avec n $\in \mathbb{Z} - \{1\}$ | $F(x) = -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} + k$ |
| $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ | $F(x) = 2\sqrt{x} + k$ |
| $f(x) = \frac{1}{x}$ | $F(x) = \ln\|x\| + k$ |
| $f(x) = e^x$ | $F(x) = e^x + k$ |
| $f(x) = \sin x$ | $F(x) = -\cos x + k$ |
| $f(x) = \cos x$ | $F(x) = \sin x + k$ |
| $f(x) = 1 + \tan^2(x)$ | $F(x) = \tan x + k$ |

### 1.3 Primitives et Opérations

Soient $u$, $v$ des fonctions continue sur leurs domaines de définitions de primitives respectives $U$, $V$ et $a$, $b$ des réels.

| Foncions | Primitives |
|---|---|
| $u + v$ | $U + V$ |
| $au$ avec a $\in \mathbb{R}$ | $aU$ |
| $u'u^n$ avec n $\in \mathbb{Z} - \{-1\}$ | $\frac{u^{n+1}}{n+1}$ |
| $f(x) = \frac{u'}{u^n}$ avec n $\in \mathbb{Z} - \{1\}$ | $-\frac{1}{(n-1)u^{n-1}}$ |
| $\frac{u'}{\sqrt{u}}$ | $2\sqrt{u}$ |
| $\frac{u'}{u}$ | $\ln(\|u\|)$ |
| $u(ax + b)$ | $\frac{1}{a}U(ax + b)$ |

## 2 Intégrales

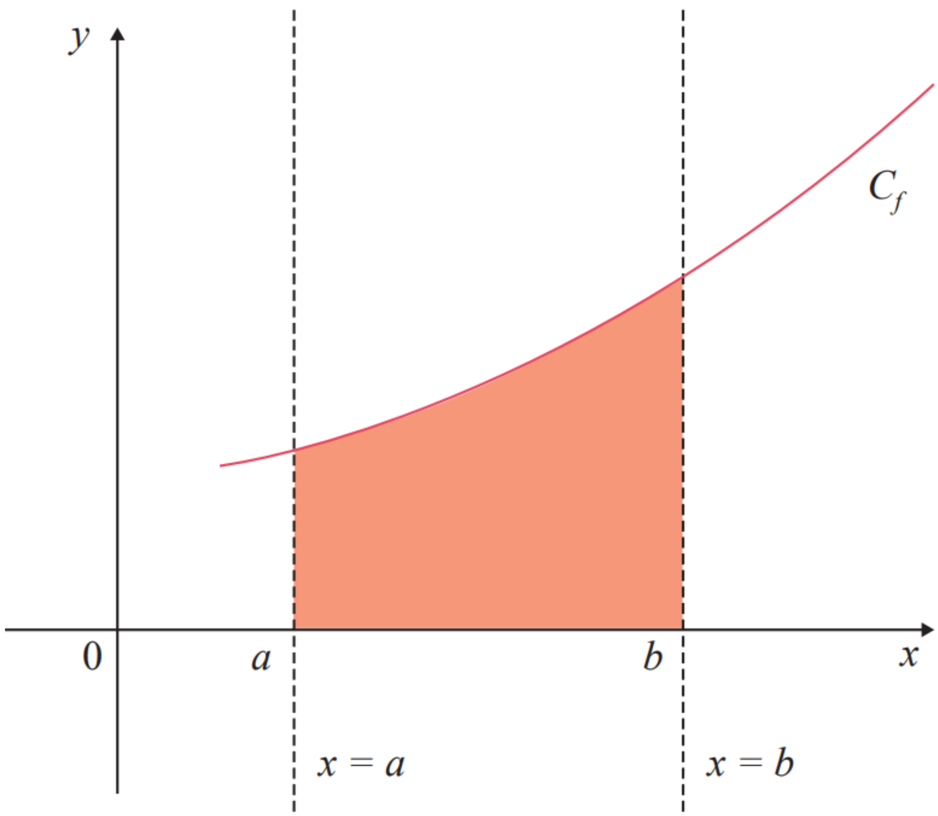
### 2.1 Définitions et Proprietés

**Définition 2.1**

Soit $f$ une fonction continue et positive sur un intervalle $I = [a, b]$ . L'intégrale de $f$ sur $I$ est l'aire comprise entre la courbe C de f, l'axe des abscisses et les deux droites d'équations respectives x = a et x = b.

Ce nombre est noté $\int_a^b f(x)dx$ .

Si $F$ est une primitive de $f$ sur $I$, alors $\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$




**Proprietés**

Soientt $f$ et $g$ deux fonctions continues sur un intervalle $I$ ; $a$, $b$ et $c$ des éléments de $I$ et $\alpha$ une constante.

- $\int_a^a f(x)\,dx = 0$
- $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$
- $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$
- $\int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$
- $\int_a^b \alpha f(x)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx$

## 2.2 Techniques de calcule :

- **Calcul direct**

  Si $F$ est une primitive de $f$ sur $I=[a,b]$, alors $\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b)-F(a)$

- **Intégration par partie :**

  Soientt $u$ et $v$ des fonctions dérivables sur un intervalle $I$ et $a$, $b$ des éléments de $I$.

  $\int_a^b u'(x)\,v(x)\,dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)\,v'(x)\,dx$

  **Exemple** Calculons l'intégrale suivante : $\int_0^1 xe^x\,dx$.

  on pose : $\begin{cases} u(x)=x \\ v'(x)=e^x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u'(x)=1 \\ v(x)=e^x \end{cases}$

  La formule d'intégration par parties donne :

$$\begin{aligned}\int_0^1 xe^x\,dx &= \int_0^1 u(x)v'(x)\,dx \\ &= [u(x)v(x)]_0^1 - \int_0^1 u'(x)v(x)\,dx \\ &= [xe^x]_0^1 - \int_0^1 1.e^x\,dx \\ &= (1.e^1 - 0.e^0) - [e^x]_0^1 \\ &= e-(e^1-e^0) \\ &= 1\end{aligned}$$

- **Décomposition en éléments simples**

  Cette technique ne s'applique que pour les fractons rationnelles.

  **Fraction rationnelles du type :** $f(x)=\frac{P(x)}{\prod_{i=1}^{n}(x-x_i)}$

  ò $P$ est un polynome de degré strictement inférieure à $n$ et $x_1,....,x_n$ sont des réels deux a deux distincts.On dit alors qu'il y a seulement des poles simples et la fraction se décompose en éléments simples de la facon suivante : $f(x)=\frac{a_1}{x-x_1}+\frac{a_2}{x-x_2}+......+\frac{a_n}{x-x_n}$ puis on cherches les $a_i$.

  **Exemple :**

  Nous voulons calculer l'intégrale suivante : $\int_1^2 \frac{1}{x(x+1)}\,dx$.

  Pour cela allons faire la décomposition en elements simples de la fraction rationelle $f(x)=\frac{1}{x(x+1)}$

  La formule (1) donne $f(x)=\frac{a}{x}+\frac{b}{x+1}$ ò $a$ et $b$ sont deux nombres réels à déterminer.

  On a : $f(x)=\frac{1}{x(x+1)}=\frac{a}{x}+\frac{b}{x+1}$

  En réduisant au même dénominateur le dernier terme, on obtient : $\frac{a}{x}+\frac{b}{x+1}=\frac{a(x+1)+bx}{x(x+1)}=\frac{x(a+b)+a}{x(x+1)}$.

  Cette fraction rationelle est égale à $f(x)$ si et seulement si : $a+b=0$ et $a=1$.

  En effet deux polynômes sont égaux si et seulement si leur coéfficients de même degré sont égaux deux à deux. On obtient donc ici $a=1$ et $b=-1$.

Ainsi $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$.
$\int_1^2 \frac{1}{x(x+1)}\, dx = \int_1^2 (\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1})\, dx = \int_1^2 \frac{1}{x} dx - \int_1^2 \frac{1}{x+1} dx$
$\int_1^2 \frac{1}{x} dx = [\ln x]_1^2 = \ln(1) - \ln(2) = -\ln(2)$
$\int_1^2 \frac{1}{x+1} = [\ln(x+1)]_1^2 = \ln(2) - \ln(3)$
Ainsi : $\int_1^2 \frac{1}{x(x+1)}\, dx = -\ln(2) - [\ln(2) - \ln(3)] = -2\ln 2 + \ln 3$

## 2.3 Intégration et fontions trigonométrique

### La linéarisation

La linéarisation permet de remplacer des produits de fonctions par des sommes de fonctions plus faciles à intégrer.

**Exemples**

1. $\int \sin(x) \cdot \cos(x)\, dx$

   $\sin(x) \cdot \cos(x) = \frac{1}{2} \sin(2x)$

   $\int \sin(x) \cdot \cos(x)\, dx = \frac{1}{2} \int \sin(2x)\, dx = -\frac{1}{4} \cos(2x) + C$

2. $\int \cos^2(x)\, dx$

   $\cos^2(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$

   $\int \cos^2(x)\, dx = \frac{1}{2} \int (1 + \cos(2x))\, dx = \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{2} \sin(2x)\right) + C$

3. $\int \sin^2(x)\, dx$

   $\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$

   $\int \sin^2(x)\, dx = \frac{1}{2} \int (1 - \cos(2x))\, dx = \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{2} \sin(2x)\right) + C$

De manière générale on uitlise la formule de **Moivre** et d'**Euler** pour linéariser.
$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2i}$
$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$
$\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}\ \forall\ \theta \in \mathbb{R}$ et $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$
Cette formule permet par exemple d'exprimer $\cos(nx)$ et $\sin(nx)$ en fonction de puissances de $\cos(x)$ et/ou $\sin(x)$.

**Exemples**

1. $\int \sin^3(x)\, dx$

$\sin^3(x) = (\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i})^3$

$$\begin{aligned}
(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i})^3 &= -\frac{1}{8i}\cdot\left[(e^{ix}-e^{-ix})^2\cdot(e^{ix}-e^{-ix})\right]\\
&= -\frac{1}{8i}\cdot\left[((e^{ix})^2-2e^{ix}e^{-ix}+(e^{-ix})^2)\cdot(e^{ix}-e^{-ix})\right]\\
&= -\frac{1}{8i}\cdot\left[(e^{i2x}-2+e^{-i2x})\cdot(e^{ix}-e^{-ix})\right]\\
&= -\frac{1}{8i}\cdot\left[(e^{i2x}\cdot e^{ix}-2e^{ix}+e^{-i2x}\cdot e^{ix}-e^{i2x}\cdot e^{-ix}+2e^{-ix}-e^{-i2x}\cdot e^{-ix})\right]\\
&= -\frac{1}{8i}\cdot\left[e^{i3x}-2e^{ix}+e^{-ix}-e^{ix}+2e^{-ix}-e^{-i3x}\right]\\
&= -\frac{1}{8i}\cdot\left[e^{i3x}-e^{-i3x}-3e^{ix}+3e^{-ix}\right]\\
&= -\frac{1}{4}\cdot\left[\frac{e^{i3x}-e^{-i3x}}{2i}\right]+\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right]\\
&= -\frac{1}{4}\cdot[\sin(3x)]+\frac{1}{4}\cdot[3\sin(x)]
\end{aligned}$$

$\int \sin^3(x)\,dx = -\frac{1}{4}\int\sin(3x)\,dx + \frac{3}{4}\int\sin(x)\,dx$

Merci de signaler toutes erreurs via WhatsApp : **+221777426690**