

DM3 Méthodes de l'ingénieur

Gabriel Danelian et Abdoulaye Baradji

Novembre 2020

1 Introduction

L'apport de plus des développements en séries de tchebyshev pour les méthodes spectrales est dû à sa convergence rapide sur des problèmes non périodiques.

En effet nous avons vu dans le projet 2 que les méthodes spectrales pour le développement de fourier auront tendance à avoir une convergence très faible lorsque le problème est non périodique et que l'on périodise.

Ainsi on procède alors à approximer la solution d'un problème non périodique par un développement en série de polynômes orthogonaux d'où l'intérêt d'utiliser les polynômes de tchébyshev qui vérifient cette propriété. Puis à travers des techniques d'intégrations numériques on utilisera la série tronquée pour représenter une approximation de la fonction ou de sa dérivée :

$$U_N(x, t_j) = \sum_{n=0}^N a_n(t_j) T_n(x)$$

pour $x \in [-1, 1]$, avec a_n les coefficients de la série qui sont très importants pour l'étude de l'erreur de nos approximations.

2 Exercice 1

2.1 Détermination des coefficients de la dérivée par la formule de récurrence

En utilisant une méthode spectrale de tchebyshev on veut trouver une approximation de la dérivée d'une fonction donnée par ses valeurs dans les points de tchebyshev.

C'est à dire on veut approximer :

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{f}^{(1)} T_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{f}' T_k'(x)$$

par :

$$(P_N f)'(x) = \sum_{k=0}^N \hat{f}^{(1)} T_k(x) = \sum_{k=0}^N \hat{f}' T_k'(x)$$

Ainsi une autre façon de calculer cette approximation est d'utiliser la formule de récurrence pour le calcul des coefficients de la dérivée.

Nous aurons que :

$$c_k \hat{f}_k^{(1)} = \hat{f}_{k+2}^{(1)} + 2(k+1) \hat{f}_{k+1}, \quad k \geq 0$$

avec $c_k = 2$ si $k = 0$ $c_k = 1$ sinon.

On démarre la récurrence avec $\hat{f}_N^{(1)} = \hat{f}_{N+1}^{(1)} = 0$ ce qui implique que : $c_{N-1} \hat{f}_{N-1}^{(1)} = 2 \hat{f}_N$

et $c_{N-2} \hat{f}_{N-2}^{(1)} = 2(N-1) \hat{f}_{N-1}$. D'où nous obtenons en fonction des coefficients \hat{f} du développement en série de Chebyshev que pour les entrées impaires c'est à dire $\hat{f}_{N-i}^{(1)}$ avec i impairs et $2i+2 < N$ nous avons que :

$$\hat{f}_{N-(2i+1)}^{(1)} = 2(N-(2i)) \hat{f}_{N-(2i)} + \hat{f}_{N-(2i-1)}^{(1)}$$

et pour les entrées paires nous aurons que :

$$\hat{f}_{N-(2i+2)}^{(1)} = 2(N - (2i + 1))\hat{f}_{N-(2i+1)} + \hat{f}_{N-(2i)}^{(1)}$$

Cependant le dernier coefficient de la dérivée est obtenu néanmoins avec un facteur de moins à cause de la valeur de c_k pour $k = 0$ d'où nous aurons que :

$$\hat{f}_0^{(1)} = \hat{f}_1 + \hat{f}_2^{(1)}$$

Dans le code la fonction qui nous permet d'obtenir les résultats est la fonction *CoefDérivéeCheby*. Néanmoins le calcul des coefficients du développement en série de Chebyshev sont données par les formules suivantes :

Si les points d'interpolation sont les points des quadratures de Gauss :

$$\hat{f}_k = \frac{2}{c_k \pi} \sum_{j=0}^N f(x_j) T_n(x_j) w_j, k = 0, \dots, N$$

ou Gauss-Lobatto :

$$\hat{f}_k = \frac{2}{c_k} \frac{1}{N} \sum_{j=0}^N \frac{1}{c_j} f(x_j) T_n(x_j), k = 0, \dots, N$$

avec $c_0 = c_N = 2, c_j = 1$ pour $j = 1, \dots, N - 1$

Nous nous intéresserons à des problèmes où nous voudrions fixer les valeurs aux limites et nous utiliserons donc les points de Gauss-Lobatto qui sont donnés par :

$$x_j = \cos(\pi j / N) \quad j = 0, \dots, N.$$

Ainsi en utilisant les points de Gauss-Lobatto pour la fonction f définie par :

$$f(x) = 0.5 \cos(x)$$

de dérivée :

$$f(x) = -0.5 \sin(x)$$

Nous obtenons l'approximation suivante sur la figure 1 :

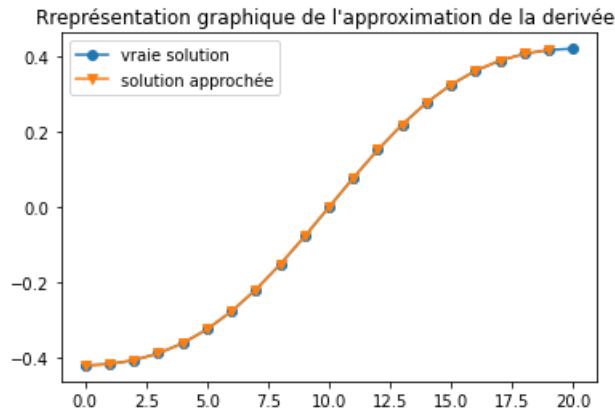


FIGURE 1

Nous observons que l'approximation de la dérivée de la fonction f qui est une fonction de régularité infinie s'accorde bien avec la vraie dérivée.

2.2 Exercice 1

Nous avons deux méthodes pour calculer la dérivée d'une fonction à l'aide des polynômes de Tchebychev. La première consiste à calculer les coefficients de la fonction en $N + 1$ points de Gauss-Lobatto avec les fonctions *GaussLobattoTcheb* et *CoefCheby*. On calcule ensuite les coefficients dérivés avec *CoefDérivéeCheby* puis on utilise la fonction *Cheby* pour calculer les valeurs de la fonction dérivée.

La seconde consiste à utiliser une matrice de dérivation que nous multiplions par le vecteur des valeurs de la fonction en les points de Gauss-Lobatto, ce qui nous donnera la valeur de la dérivée en ces points.

La première méthode possède l'avantage de décomposer le calcul de la dérivée en le calcul et la dérivation des coefficients et leur combinaison pour donner les valeurs de la fonction dérivée. Cela signifie que nous pouvons obtenir la valeur de la dérivée en tout point de $[-1;1]$ ce qui n'est pas possible avec la matrice de dérivation qui ne peut les calculer qu'en les points de Gauss-Lobatto. La méthode de la matrice possède cependant une plus grande rapidité de calcul et est plus facile à implémenter.

Nous nous intéresserons d'abord à la première méthode qui utilise la décomposition en coefficients. Ci-dessous nous calculons la dérivée de la fonction sinus en 11 points (figure 2). En traçant son graphique et en superposant les valeurs de la vraie dérivée on voit que le calcul de la dérivée est bon dans les points de Gauss-Lobatto.

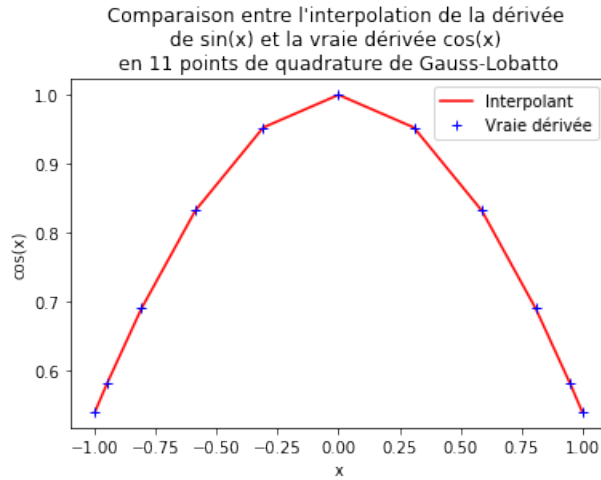


FIGURE 2

Il est également possible de calculer la dérivée dans n'importe quel nombre de points de $[-1;1]$ en utilisant la fonction *Cheby*. On l'illustre ci-dessous pour 101 points (figure 3).

Cependant, notre calcul de la dérivée n'est qu'une approximation et la précision de l'approximation dépendra de la valeur de N . Nous allons donc étudier le comportement de l'erreur en fonction de N , que nous calculons par la formule suivante :

$$\frac{\sum_{j=0}^M |\tilde{u}(x_j, T) - u(x_j, T)|}{M}, \quad (1)$$

avec \tilde{u} l'approximation de la solution par Tchebychev et u la solution exacte. On voit ici que pour les fonctions sinus (figure 4) et exponentielles (figure 5) qui sont infiniment dérivables et sans singularités dans $[-1;1]$, l'erreur décroît de façon superexponentielle.

On représente en figure 6 l'approximation de la dérivée de la fonction $f(x) = \exp(-1/|x|)$, qui est infiniment dérivable mais singulière en $x = 0$. On voit que l'erreur décroît de manière beaucoup plus lente et discontinue que les fonctions sinus et exponentielles.

Nous présentons également la dérivée de la fonction sinus approchée par la matrice de dérivation (figure 7). Elle présente bien la même croissance superexponentielle que la première méthode mais est moins gourmande en temps de calcul. Nous aurons donc tendance à la privilégier par la suite.

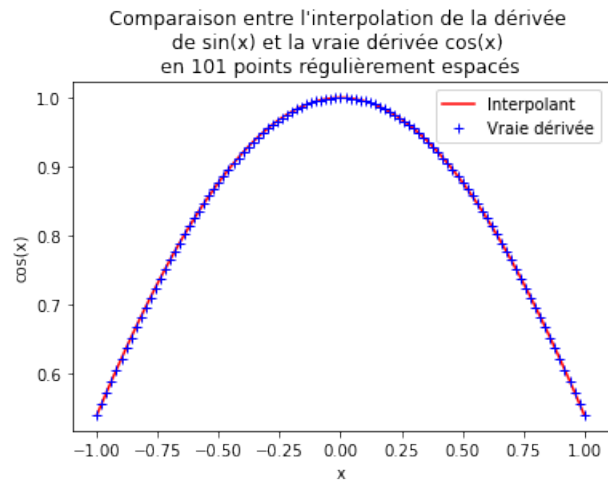


FIGURE 3

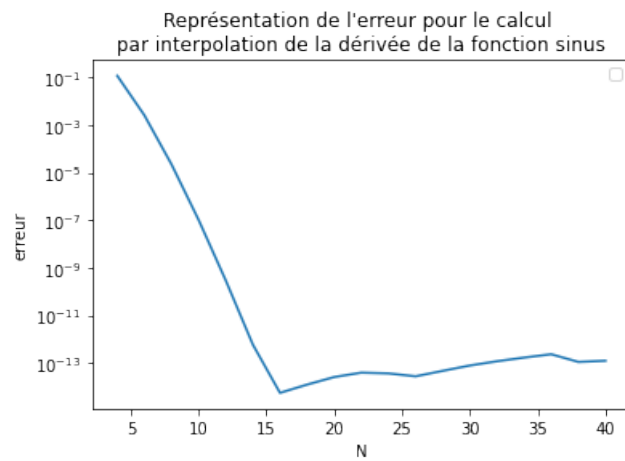


FIGURE 4

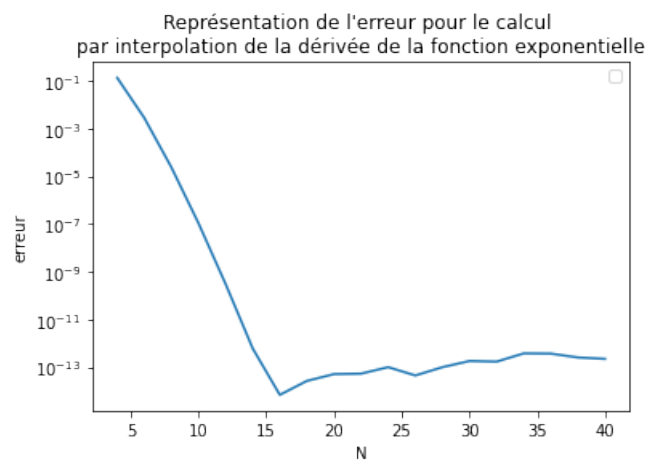


FIGURE 5

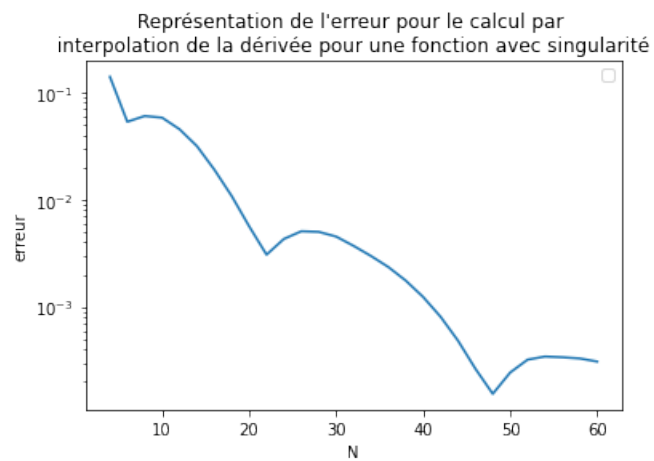


FIGURE 6

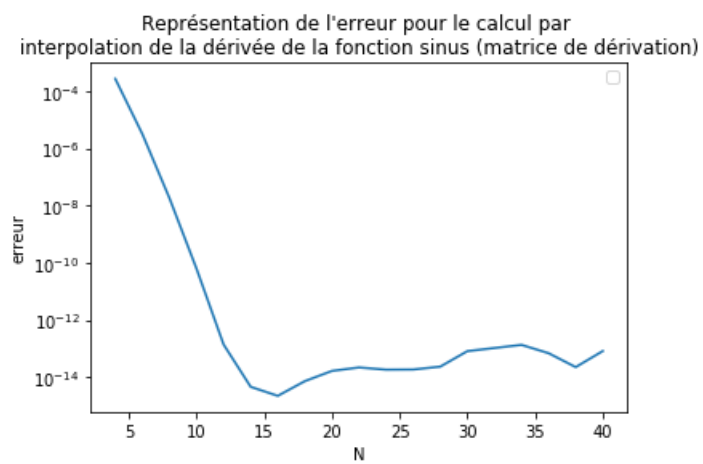


FIGURE 7

3 Exercice 2

Les trois premières étapes de l'algorithme, qui permettent d'obtenir la dérivée de u par rapport à x sont équivalentes à l'utilisation de notre fonction *DerivéeCheby* pour la fonction initiale u_0 en les points de quadrature, ou à la multiplication de la matrice de dérivation par la fonction initiale en les points de quadrature. Une fois la dérivée de u en x calculée, nous devons mettre l'équation sous la forme d'un problème de Cauchy. Pour notre équation cela donnera :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = -e^{u(x, t)+x} \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) + f(x, t) = F(x, t). \quad (2)$$

On a donc une expression explicite de la fonction F après avoir calculé la dérivée $\frac{\partial u}{\partial x}(x, t)$.

Nous allons tester cette méthode pour $u(x, t) = (x + 1)(x + t)$, fonction simple qui vérifie la condition au bord $u(-1, t) = 0$. Nous avons donc :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) &= 2x + t + 1 & \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) &= x + 1 \\ f(x, t) &= \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + \frac{\partial u}{\partial x}(x, t)e^{u(x, t)+x} = x + 1 + (2x + t + 1)e^{(x+1)(x+t)+x} \end{aligned}$$

Nous utilisons la méthode d'intégration RK3 décrite au projet 2 avec F la fonction donnée à l'équation 2. Nous avons comme solution initiale $u_0(x, t) = x^2 + x$ et nous calculons la solution au temps final $T = 1$ avec un pas de temps de $dt = 0.0001$. La vraie solution à $T = 1$ est donc $u(x, 1) = (x + 1)^2$.

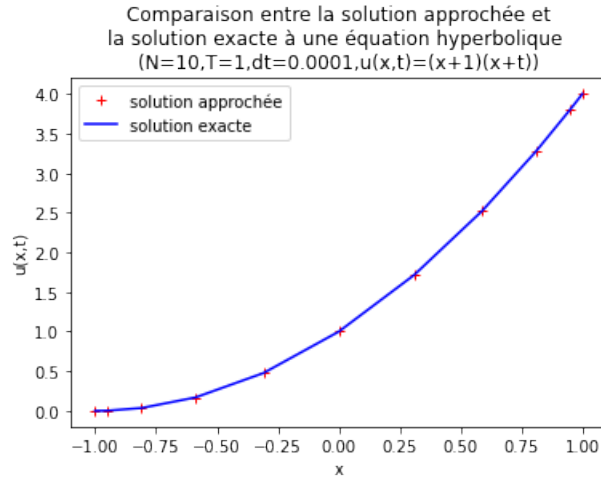


FIGURE 8

On voit que pour des valeurs de $N = 10$ (figure 8) et $N = 30$ (figure 9) la solution à l'équation différentielle en passant par les polynômes de Chebychev correspond à la solution exacte que nous devrions obtenir. Cependant, en traçant l'erreur en valeur absolue, nous obtenons une erreur qui est égale à l'erreur numérique pour toutes les valeurs de N (que nous calculons comme dans (1) avec $N = M$). Ceci est inattendu car nous nous attendrions à avoir une erreur plus élevée pour des petites valeurs de N , du moins pour des valeurs inférieures à 10. Cela signifie que notre méthode numérique n'est pas très adaptée pour ce type d'équation ou que notre fonction n'est pas adaptée à une approximation par un polynôme de Tchebychev.

Malheureusement, le schéma d'Euler modifié (figure 11) donne le même dysfonctionnement.

Remarquons cependant que la seconde dérivée de la fonction que nous avons prise est nulle. Il se pourrait donc que le problème se trouve au niveau de la continuité de la solution.

On va donc prendre $u(x, t) = t * \sin(x + 1)$, fonction infiniment dérivable qui vérifie la condition au bord, pour voir si cela permet d'améliorer les résultats. On a donc (avec la solution au temps $T = 1$ qui vaut $\sin(x + 1)$) :

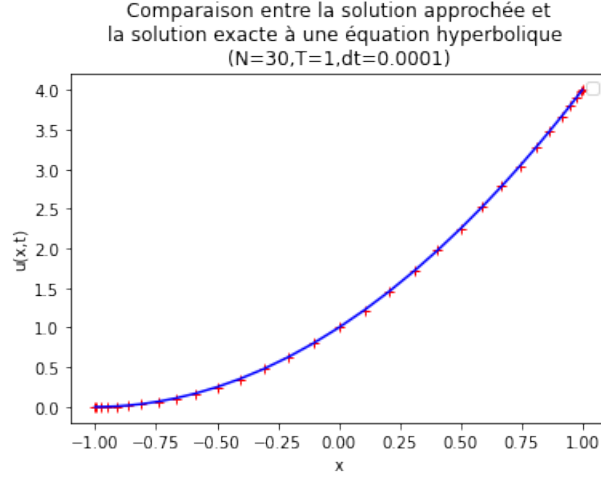


FIGURE 9

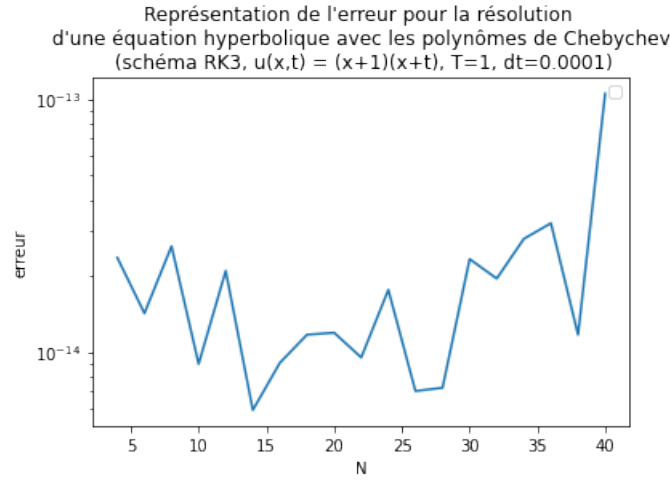


FIGURE 10

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(x,t) &= t * \cos(x+1) & \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) &= \sin(x+1) \\ f(x,t) &= \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)e^{u(x,t)+x} = \sin(x+1) + t * \cos(x+1)e^{t*\sin(x+1)+x} \end{aligned}$$

On voit désormais que l'erreur de manière superexponentielle (figure 12) comme attendu pour une méthode qui fonctionne correctement.

Une fonction qui est continue pour un nombre fini de dérivées peut donc donner les mêmes résultats qu'une fonction idéale comme le sinus pour le calcul des valeurs de la solution, mais ne donnera pas un bon comportement de l'approximation. Cela n'a donc pas d'impact sur le calcul des valeurs dans notre cas car nous avons pris des paramètres favorables (un faible temps final et un très petit pas de temps), mais les mauvaises propriétés de l'approximation d'une fonction à continuité finie vont dégrader le résultat en changeant la discrétisation en temps.

Par exemple, l'erreur et les solutions pour $u(x,t) = (x+1)(x+t)$ explosent pour $dt = 0.001$ ou pour $T = 2$, tandis que le schéma de l'erreur reste identique pour $u(x,t) = t * \sin(x+1)$ pour $dt = 0.001$ ou $T = 5$.

Représentation de l'erreur pour la résolution
d'une équation hyperbolique avec les polynômes de Chebychev
(schéma d'Euler modifié, $u(x,t) = (x+1)(x+t)$, $T=1$, $dt=0.0001$)

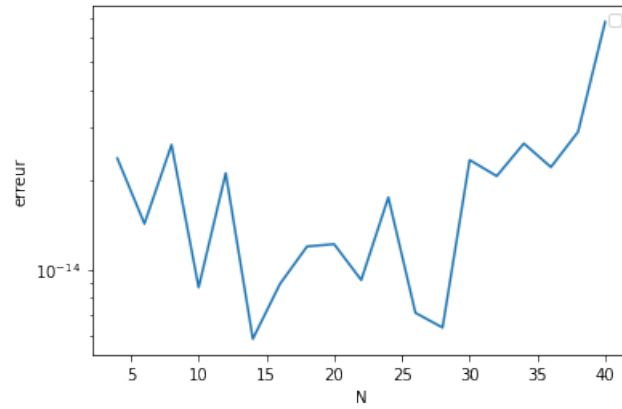


FIGURE 11

Représentation de l'erreur pour la résolution
d'une équation hyperbolique avec les polynômes de Chebychev
(schéma d'Euler modifié, $u(x,t) = t \sin(x+1)$, $T=1$, $dt=0.0001$)

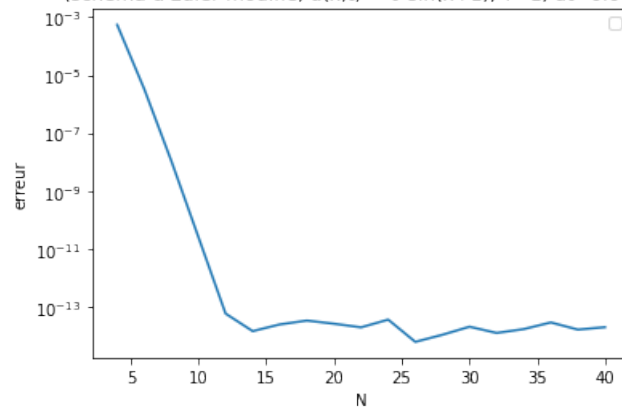


FIGURE 12

4 Exercice 3

La méthode de collocation est très similaire à l'exercice 2. Nous calculons la valeur de $\frac{\partial u}{\partial x}(x, t)$ puis nous obtenons un problème de Cauchy comme suit :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = -\frac{\partial u}{\partial x}(x, t).$$

On utilise ensuite une méthode d'intégration numérique pour calculer la solution à chaque pas de temps.

La figure 13 représente l'évolution de l'erreur pour cette équation. La courbe est visiblement de moins bonne qualité que pour l'exercice précédent ; elle décroît plus lentement et n'atteint pas l'erreur numérique mais plafonne autour de 10^{-8} . Une explication potentielle est la dépendance en temps de la condition au bord, qui n'était pas présente pour la question précédente. Il se pourrait également que l'équation de transport étudiée ici se traite moins bien à une approximation par Tchebychev. La méthode fonctionne tout de même bien pour des valeurs de N supérieures à 30, pour laquelle la lente décroissance de l'erreur n'aura pas d'effet.

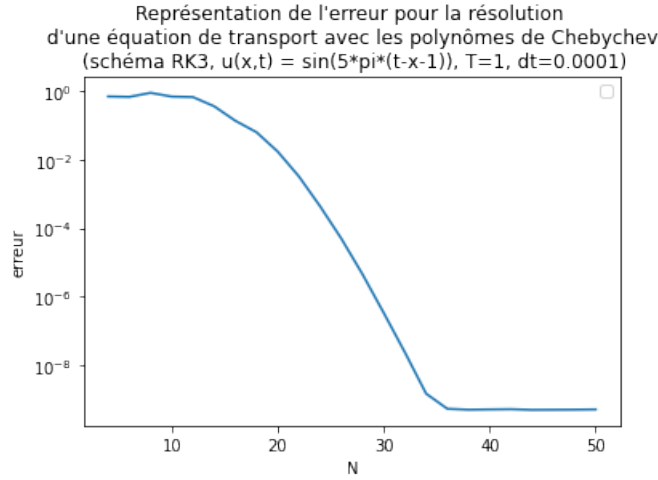


FIGURE 13

Pour effectuer la méthode de Galerkin, il faudrait trouver une fonction ϕ_n combinaison linéaire de T_n qui permette de satisfaire la condition au bord $u(-1, t) = -\sin(5\pi t)$. Nous n'avons cependant pas réussi à trouver une fonction ϕ convenable et nous n'avons donc pas pu traiter la méthode de Galerkin.