

RÉSOLUTION DUNE ÉQUATION DE CONVECTION-DIFFUSION PAR LES MÉTHODES SPECTRALES

ABDOULAYE BARADJI ET GABRIEL DANELIAN

CONTENTS

1. Interprétation des résultats Méthode de collocation de Fourier	1
2. Interprétation des résultats Méthode de Galerkin-Fourier	3
2.1. Représentation graphique de l'erreur : Galerkin-Fourier	3

1. INTERPRÉTATION DES RÉSULTATS MÉTHODE DE COLLOCATION DE FOURIER

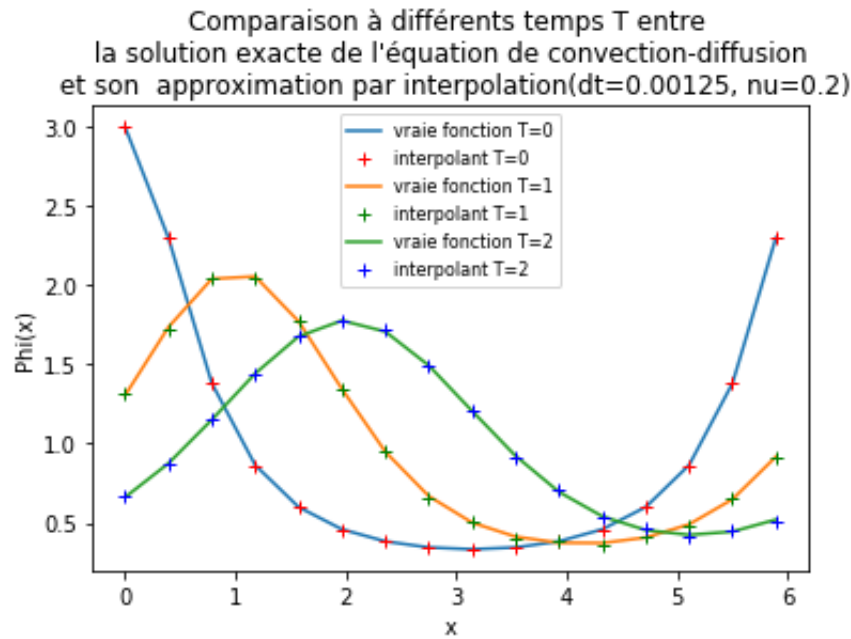


FIGURE 1

Pour la méthode de collocation de Fourier, nous allons étudier deux approximations différentes de la fonction initiale $\varphi_0(x) = \frac{3}{5-4\cos(x)}$.

La première par interpolation revient à prendre les valeurs de la fonction initiale $\varphi_0(x)$ discrétisée en N points :

$$x_j = 2\pi j/N, \quad j = 0, \dots, N-1.$$

La seconde consiste à prendre la troncature de la série infinie qui donne la condition initiale de projection :

$$\phi(x, 0) = P_{N-1}\varphi_0 = \sum_{k=-(N/2-1)}^{N/2-1} \hat{\varphi}_{0,k} = \sum_{k=-(N/2-1)}^{N/2-1} 2^{-|k|}.$$

1

Comparaison à différents temps T entre la solution exacte de l'équation de convection-diffusion et son approximation par projection ($dt=0.00125$, $nu=0.2$)

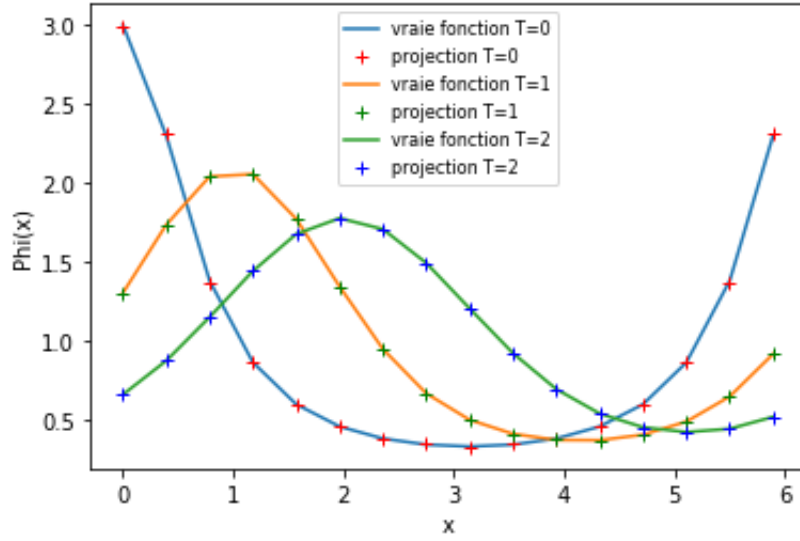


FIGURE 2

Représentation graphique de l'erreur en norme discrète pour une approximation par interpolation et par projection ($M=100$, $T=2$, $dt=0.00125$, $nu=0.2$)

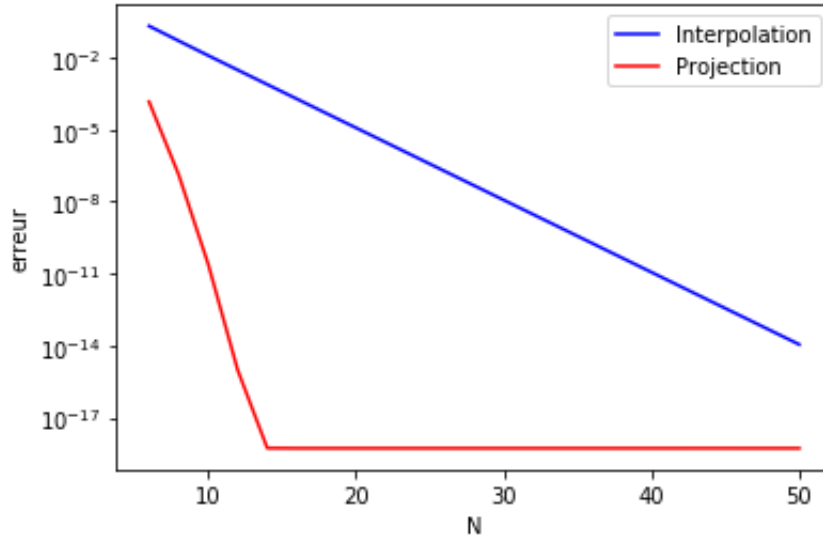


FIGURE 3

Nous voyons sur les figures 1 et 2 que les deux méthodes sont visuellement de très bonnes approximations de la vraie solution. Elles ne sont cependant pas similaires dans la décroissance de leur erreur.

Nous allons mesurer l'erreur dans une norme discrète définie par :

$$\frac{2\pi}{M} \sum_{j=0}^{M-1} (\phi(Z_j, T) - \varphi(Z_j, T))^2$$

avec $Z_j = \frac{2\pi j}{M}$, $j = 0, \dots, M-1$ et les fonctions ϕ et φ les solutions exacte et approchée respectivement .

L'approximation par interpolation contient une source d'erreur supplémentaire appelée erreur d'aliasing qui n'est pas présente lorsque l'on utilise la projection comme condition initiale. Cette

erreur apparaît clairement sur la figure 3 où l'on voit que l'erreur de l'approximation par projection décroît à une vitesse supergéométrique jusqu'à atteindre l'erreur numérique tandis que l'erreur de l'approximation par interpolation décroît à une vitesse géométrique seulement.

2. INTERPRÉTATION DES RÉSULTATS MÉTHODE DE GALERKIN-FOURIER

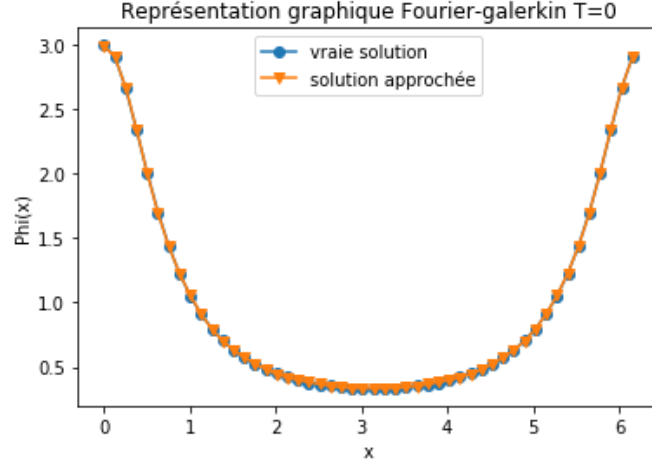


FIGURE 4

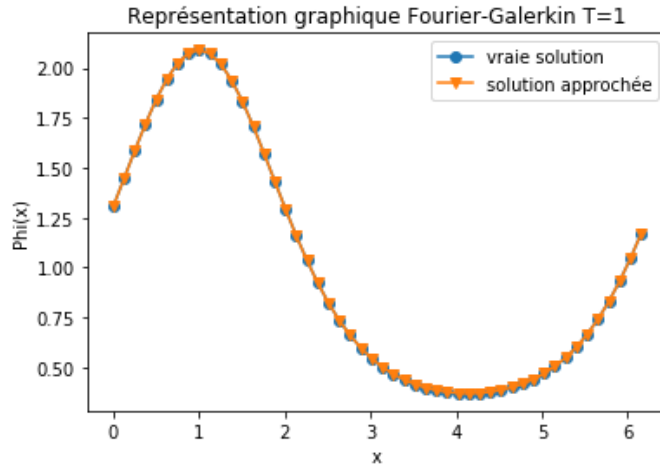


FIGURE 5

Nous remarquons sur les figures 4, 5, 6 que les solutions approchées de l'équation de convection-diffusion dans l'intervalle de temps $[0, T]$ pour la méthode de galerkin fourier rapproche parfaitement bien la solution exacte. De plus nous pouvons remarquer que les courbes sont lisses et collent bien à la vraie solution. La précision de cette lissage est dû à la valeur de N_{out} qui n'est rien d'autre que le nombre de points où on calcule l'approximation c'est à dire l'approximation calculée aux points $x_j = \frac{2\pi j}{N_{out}}$ pour les valeurs de j comprises entre $0 \dots N_{out}$.

2.1. Représentation graphique de l'erreur : Galerkin-Fourier. Nous avons tracés pour différentes valeurs de Δt et pour $T = 2$ les erreurs dans une norme discrète définie précédemment.

Ainsi en regardant les graphes de la figure 7, 8 ou 9 nous pouvons observer que la norme M de l'erreur décroît dans les trois cas jusqu'à l'erreur numérique. On remarque également que le pas de temps ne semble pas affecter la vitesse à laquelle décroît l'erreur.

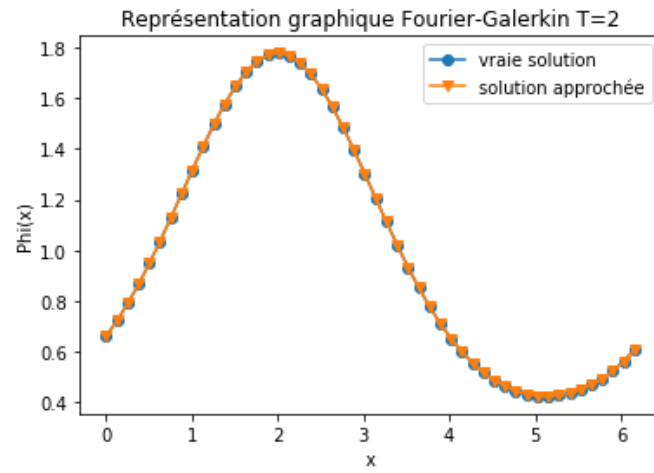


FIGURE 6

Représentation graphique de l'évolution de l'erreur en fonction du pas en espace N pour la méthode de Galerkin-Fourier (dt=0.005, T=2, nu=0.2)

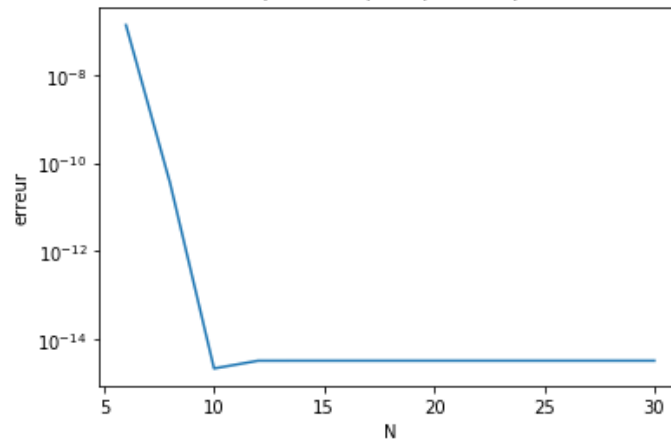


FIGURE 7

Représentation graphique de l'évolution de l'erreur en fonction du pas en espace N pour la méthode de Galerkin-Fourier (dt=0.0025, T=2, nu=0.2)

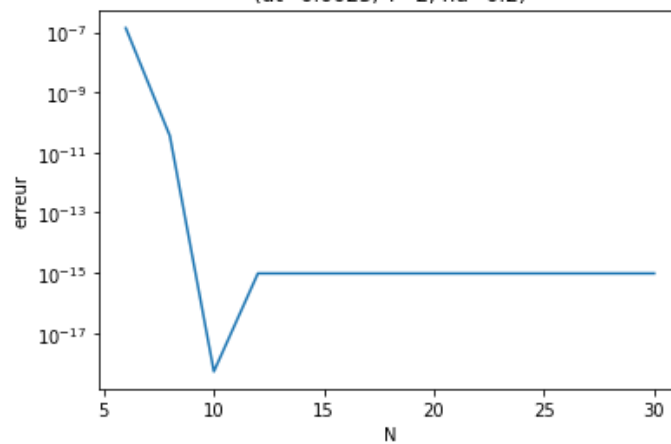


FIGURE 8

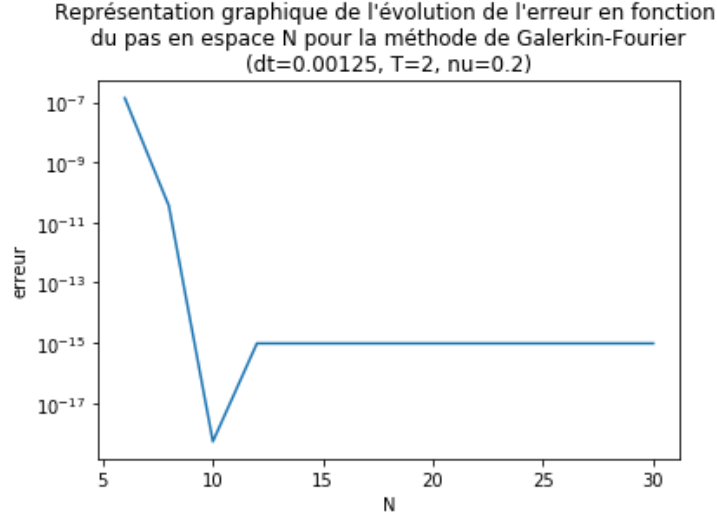


FIGURE 9

À noter aussi que nous avons une décroissance supergéométrique de l'erreur ce qui est dû à la régularité de la fonction et le fait que sa dérivée m ième est à variation bornée.

5. Rappelons la définition de ϕ :

$$\phi(x, t) = \sum_{k=-N/2}^{N/2} \hat{\phi}_k(t) e^{ikx} = \sum_{|k|=0}^{N/2} \hat{\phi}_k(t) e^{ikx}.$$

Nous avons donc que (avec φ la vraie valeur de la fonction):

$$\varphi(x, t) - \phi(x, t) = \sum_{|k|=N/2+1}^{\infty} \hat{\phi}_k(t) e^{ikx} = \sum_{|k|=N/2+1}^{\infty} \hat{\varphi}_{0,k} e^{-(ik+\nu k^2)t} e^{ikx} = \sum_{|k|=N/2+1}^{\infty} \hat{\varphi}_{0,k} e^{-\nu k^2 t}.$$

On a donc que :

$$\|\varphi(x, t) - \phi(x, t)\|^2 = \sum_{|k|=N/2+1}^{\infty} |\hat{\varphi}_{0,k}|^2 e^{-2\nu k^2 t} \leq \|\varphi_0 - P_N \varphi_0\|^2.$$

On voit donc que l'erreur numérique décroît de manière exponentielle avec k^2 et donc avec N^2 . On comprends donc la décroissance supergéométrique de l'erreur pour la méthode de Galerkin-Fourier.