

Rapport de projet

Projets d'Ingénierie Financière : Options à Barrière dans le modèle de Black & Scholes et discrétisation

Abdoulaye TRAORE & Franck Wilson KOUASSI

27 Mars - 21 Mai 2025

ENSTA



IP PARIS

Professeur encadrant:
M. Guillaume ASTRUC
Fixed Income markets - quantitative
analyst, Societe Generale

Table of Contents

| | |
|---|-----------|
| Introduction | 2 |
| 1 Option Européenne Vanille | 3 |
| 1.1 Calcul de $S(t)$ | 3 |
| 1.2 Prix théorique de l'option Put européenne et calcul analytique | 3 |
| 1.3 Simulation de $W(T)$ et estimation de P^{euro} par Monte Carlo | 3 |
| 1.4 Intervalle de confiance et estimation de P^{euro} par Monte Carlo | 5 |
| 2 Option à Barrière Down & Out | 6 |
| 2.1 Cas particulier : $B \geq K$ | 6 |
| 2.2 Approximation par discrétisation | 6 |
| 2.3 Simulation de $W(T^i)$ et estimation $P^{DO,\Delta}$ par Monte Carlo | 6 |
| 2.3.1 Méthode de simulation des trajectoires de $W(T^i)$ | 6 |
| 2.3.2 Implémentation de l'estimateur $P^{DO,\Delta}$ | 8 |
| 2.4 Réduction de variance par variables antithétiques | 9 |
| 2.5 Influence de B sur $P^{DO,\Delta}$ | 10 |
| 2.6 Influence de σ sur $P^{DO,\Delta}$ | 10 |
| 2.7 Approximation à partir de la loi jointe de W_{t_1}, W_{t_2} | 11 |
| 2.8 Influence de Δ sur $P^{DO,\Delta}$ et P^{DO} | 12 |
| 2.9 Probabilité de non-sortie $\zeta^{DO,\Delta}$ et ζ^{DO} en fonction de Δ | 13 |
| 3 Option à Barrière Down & In | 16 |
| 3.1 Formule de P^{DI} | 16 |
| 3.2 Lien entre P^{DO} et P^{DI} | 16 |
| 3.3 Réduction de variance par variable de contrôle | 16 |
| Conclusion | |
| Annexe : Démonstrations des résultats théoriques | |
| 3.4 Codes utilisés pour générer les figures | |
| 3.5 Approximation de la loi normale | |
| 3.6 Calcul analytique de P^{euro} | |
| 3.7 Méthode d'approximation de P^{DO} | |
| 3.7.1 Méthode 1 | |
| 3.7.2 Méthode 2 (un peu moins rigoureuse) | |
| 3.8 Questions facultatives | |
| 3.8.1 Preuve du résultat de la question 10 | |
| 3.8.2 Nouvelle écriture de P^{DO} | |

Introduction

Ce projet s'inscrit dans le cadre des projets d'ingénierie financière APM_4PRB9-TA dispensé en 2^{ème} à ENSTA Paris.

Ce sujet propose le calcul du prix d'une option sur un actif dont l'exercice peut avoir lieu à une date prédéfinie uniquement si le prix de l'actif n'est pas descendu en dessous d'un niveau prédéfini (barrière).

Nous nous plaçons dans le cadre du modèle de Black-Scholes.

Modèle

On considère un modèle de Black-Scholes en dimension 1. On pose $S(t)$ le cours de l'actif risqué au temps t . Soit W un mouvement Brownien sous probabilité Risque Neutre. Soit r le taux d'intérêt (supposé constant), σ la volatilité (supposée constante) et S_0 la valeur initiale de l'actif (supposée déterministe). Nous supposons la dynamique du cours de l'actif suivante :

$$\begin{aligned}dS(t) &= S(t) (r dt + \sigma dW(t)) \\ S(0) &= S_0 > 0\end{aligned}$$

Les objectifs du projet sont les suivants :

- Étudier dans un premier temps le cas sans barrière, pour lequel une formule analytique du prix de l'option est disponible.
- Comparer cette solution analytique avec une estimation par la méthode de Monte Carlo.
- Introduire ensuite une barrière de type “knock-out” qui désactive l'option si le prix de l'actif passe en dessous d'un seuil donné.
- Évaluer le prix de cette option à barrière par simulation de trajectoires du sous-jacent.
- Impact de la volatilité, du niveau de la barrière ainsi que du nombre de trajectoires simulées.
- Analyser l'influence de la discrétisation du processus (fréquence des observations) sur la détection du franchissement de la barrière.

Ce projet mobilise plusieurs outils de la finance quantitative et de l'analyse numérique : estimations par simulation de Monte Carlo, techniques de réduction de variance à savoir par variables antithétiques et variable de contrôle.

Les réponses aux questions théoriques sont indiquées dans le rapport sans démonstration, le lecteur curieux trouvera des tentatives de démonstration de ces résultats en annexe 3.3.

Remarques :

- Les simulations utiliseront uniquement un générateur de nombres aléatoires suivant une loi uniforme sur $[0, 1]$ et on suppose $t \geq 0$ dans tout le reste si non indiqué.
- Pour les calculs analytiques, on utilisera la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite. Une approximation numérique de cette fonction est fournie en annexe.

1 Option Européenne Vanille

1.1 Calcul de $S(t)$

En appliquant la formule d'Itô au logarithme de $S(t)$ via l'équation stochastique de Black-Scholes, on obtient l'expression explicite de $S(t)$:

$$S(t) = S_0 \exp \left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W(t) \right).$$

1.2 Prix théorique de l'option Put européenne et calcul analytique

Un Put européen donne le droit de vendre un actif à une date fixe T pour un prix K . Son prix sous la mesure risque-neutre est donné par :

$$P^{\text{euro}} = e^{-rT} \mathbb{E}[(K - S(T))_+] = e^{-rT} K \mathcal{N}(d_1) - S_0 \mathcal{N}(d_1 - \sigma\sqrt{T})$$

$$\text{où } d_1 = \frac{\log\left(\frac{K}{S_0}\right) - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) T}{\sigma\sqrt{T}}$$

et $\mathcal{N}(\cdot)$ est la fonction de répartition d'une gaussienne centrée réduite.

1.3 Simulation de $W(T)$ et estimation de P^{euro} par Monte Carlo

Simulation de $W(T)$ par la méthode de Box-Muller

La méthode de Box-Muller permet de générer des variables aléatoires suivant une loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$ à partir de deux variables aléatoires indépendantes $U_1, U_2 \sim \mathcal{U}(0, 1)$. Elle repose sur la transformation suivante :

$$Z_1 = \sqrt{-2 \ln U_1} \cdot \cos(2\pi U_2), \quad Z_2 = \sqrt{-2 \ln U_1} \cdot \sin(2\pi U_2),$$

où $Z_1, Z_2 \sim \mathcal{N}(0, 1)$ et sont indépendantes.

Cette méthode permet d'obtenir une simulation simple et rapide tout en respectant la contrainte du sujet qui impose d'utiliser uniquement des générateurs de lois uniformes en remarquant que $W(T)$ peut s'écrire $W(T) = \sqrt{T}Z$ en loi où $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$

Implémentation d'une méthode de Monte Carlo classique pour estimer P_{euro}

Le code ci-dessous calcule le prix d'une option par la méthode de Monte Carlo, ainsi qu'un intervalle de confiance asymptotique au niveau $1 - \alpha$. Le prix est estimé par la moyenne empirique, la variance par la formule classique corrigée des biais.

La méthode de Monte Carlo repose sur l'approximation de l'espérance mathématique d'une variable aléatoire par la moyenne empirique de simulations indépendantes. Soit X une variable aléatoire représentant le payoff d'une option, on estime $\mathbb{E}[X]$ par :

$$\hat{\mu}_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j,$$

où $(X_j)_{1 \leq j \leq n}$ sont des réalisations indépendantes de X .

D'après la loi des grands nombres,

$$\hat{\mu}_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} \mu = \mathbb{E}[X].$$

et le théorème central limite permet de construire un intervalle de confiance autour de $\hat{\mu}_n$ si la variance de X est finie :

$$\sqrt{n} \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j - \mu \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma^2).$$

```

1 def compute_MC(payload, nb_simul, alph, calcul_proba=False):
2     # Prix estim de l'option via MC
3     MC_price = np.mean(payload)
4
5     # Calcul de la variance de Monte Carlo
6     sigma_payload = (1 / (nb_simul - 1)) * sum((Y_j - MC_price)**2
7     for Y_j in payload)
8
9     # Utilisation de la loi de Student
10    ddl = nb_simul - 1 # degr s de libert
11    t_value = stats.t.ppf(1 - alph/2, ddl)
12
13    # Erreur standard
14    std_error = np.sqrt(sigma_payload / nb_simul)
15
16    # Intervalle de confiance
17    IC_bas = MC_price - t_value * std_error
18    IC_haut = MC_price + t_value * std_error
19
20    return MC_price, (IC_bas, IC_haut)

```

Listing 1.1 – Calcul du prix par Monte Carlo d'un payoff avec intervalle de confiance

Sauf indication contraire, les paramètres utilisés dans l'ensemble des simulations sont fixés comme suit : $\sigma = 0,15$, $S_0 = 1$, $r = 0,015$, $T = 2$ ans, $K = 1$, $B = 0,7$ et $\Delta = \frac{1}{52}$. La volatilité et le taux d'intérêt sont exprimés en base annuelle. Des exceptions sont précisées dans les questions concernées (notamment Q8 à Q12).

1.4 Intervalle de confiance et estimation de P^{euro} par Monte Carlo

L'intervalle de confiance asymptotique à $(1 - \alpha)\%$ de l'estimateur de Monte Carlo est construit à l'aide de la loi de Student avec $n - 1$ degrés de liberté :

$$\left[\hat{\mu} - t_{1-\alpha/2}^{(n-1)} \cdot \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}, \hat{\mu} + t_{1-\alpha/2}^{(n-1)} \cdot \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} \right]$$

où $\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n Y_j$ est la moyenne des payoffs simulés, et $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (Y_j - \hat{\mu})^2$ la variance empirique.

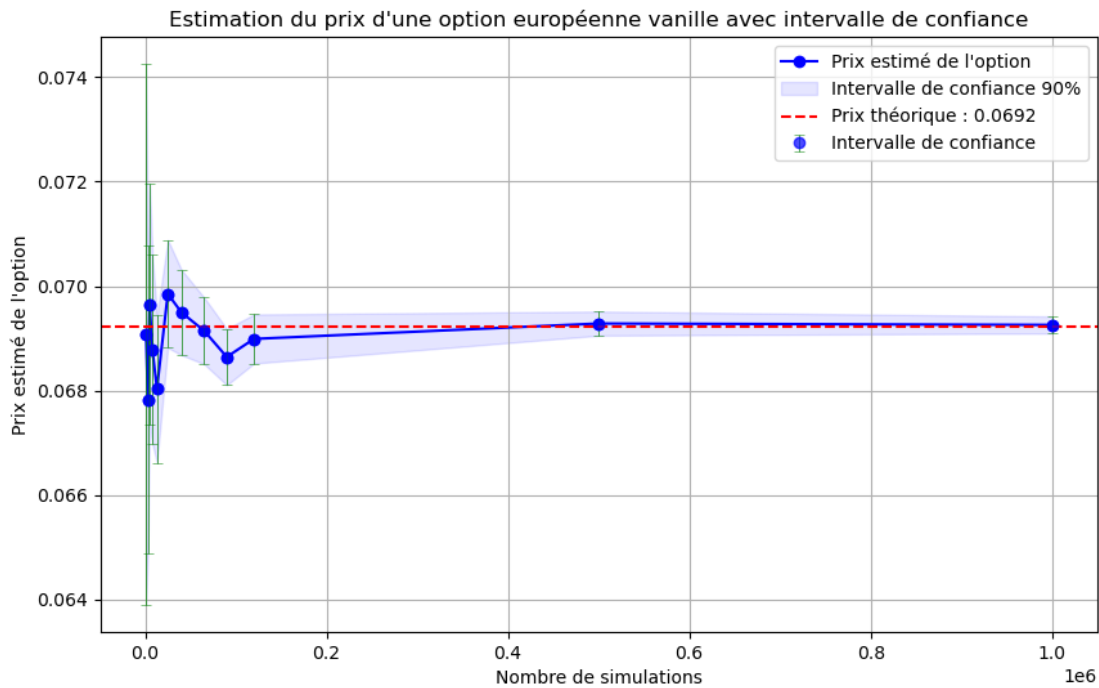


Figure 1.1 – Estimation Monte-Carlo de P^{euro} et intervalle de confiance en fonction du nombre de trajectoires.

Le graphique 1.1 présente la convergence de l'estimation Monte Carlo du prix d'une option européenne vanille en fonction du nombre de simulations.

On observe que l'estimateur (courbe bleue) fluctue initialement autour de la valeur théorique de 0,0692 (ligne rouge pointillée) avec une volatilité significative lorsque le nombre de simulations est faible.

L'intervalle de confiance à 90% (zone bleu clair) se rétrécit progressivement à mesure que le nombre de simulations augmente, illustrant la diminution de la variance d'estimation. À partir d'environ 4×10^5 simulations, l'estimation se stabilise et converge vers la valeur théorique, avec un intervalle de confiance considérablement réduit.

Cette convergence illustre la loi des grands nombres et démontre l'efficacité de la méthode de Monte Carlo pour l'évaluation d'options financières lorsqu'un nombre suffisant de simulations est employé.

2 Option à Barrière Down & Out

Un Put à Barrière de type Down & Out confère à son possesseur le droit de vendre à une date fixée T un actif à un prix K fixé à l'avance si le prix de l'actif n'est pas descendu en dessous d'une barrière B avant T . Le prix de cette option est donc dans notre modèle :

$$P^{DO} = e^{-rT} \mathbb{E} \left[(K - S(T))_+ \cdot 1_{\left\{ \min_{u \leq T} S(u) \geq B \right\}} \right] \quad (2.1)$$

2.1 Cas particulier : $B \geq K$

$P^{DO} = 0$ dans le cas où la barrière est au-dessus du strike. En effet,

Si $\min_{u \leq T} S(u) \geq B \geq K$ alors $K - S(T) \leq 0$, d'où $(K - S(T))_+ = 0$

Sinon $(K - S(T))_+ \cdot 1_{\left\{ \min_{u \leq T} S(u) \geq B \right\}} = 0$

2.2 Approximation par discrétisation

La simulation continue de $\min_{u \leq T} S(u)$ n'étant pas possible en pratique, on se propose d'approximer P^{DO} par :

$$P^{DO,\Delta} = e^{-rT} \mathbb{E} \left[(K - S(T))_+ \cdot 1_{\left\{ \min_{u \in \{T^i\}_{i=1..N\Delta}} S(u) \geq B \right\}} \right] \quad (3)$$

avec

$$\begin{cases} N\Delta = \left\lfloor \frac{T}{\Delta} \right\rfloor \\ \{T^i\}_{i=1..N\Delta} = \{i\Delta\}_{i=1..N\Delta} \end{cases}$$

2.3 Simulation de $W(T^i)$ et estimation $P^{DO,\Delta}$ par Monte Carlo

2.3.1 Méthode de simulation des trajectoires de $W(T^i)$

Pour simuler les trajectoires discrétisées du mouvement brownien $(W(T^i))_{i=1..N\Delta}$, on utilise une méthode basée sur la décomposition de Cholesky de la matrice de covariance. Voici les étapes principales :

— On construit la matrice de covariance $\Gamma \in \mathbb{R}^{N\Delta \times N\Delta}$ telle que :

$$\Gamma_{i,j} = \mathbb{E}[W(T^i)W(T^j)] = \min(T^i, T^j)$$

- On effectue ensuite la décomposition de Cholesky de Γ :

$$\Gamma = AA^\top$$

où A est une matrice triangulaire inférieure.

- On génère un vecteur gaussien $G \in \mathbb{R}^{N^\Delta \times M}$ composé de M trajectoires indépendantes de variables normales centrées réduites.
- Enfin, on obtient les trajectoires simulées du mouvement brownien par :

$$W = AG$$

où chaque ligne de W représente une trajectoire discrétisée du mouvement brownien sur les instants $\{T^i\}_{i=1..N^\Delta}$.

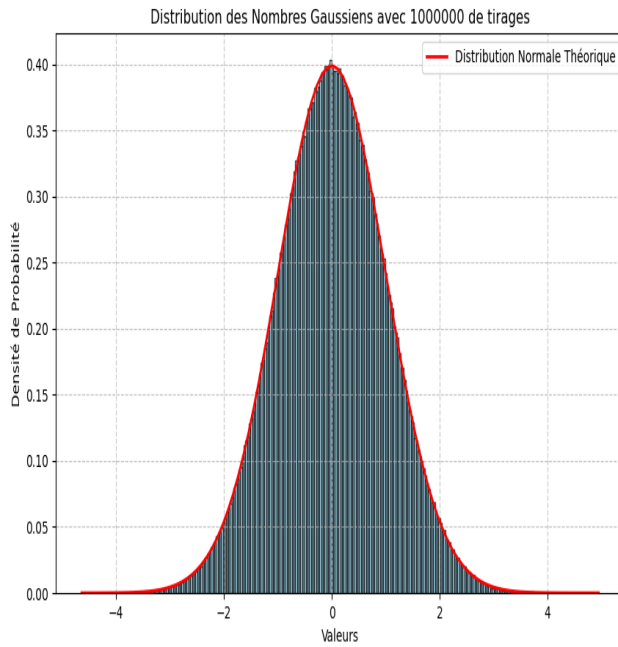


Figure 2.1 – Distribution des Nombres Gaussiens avec 1000000 de tirages.

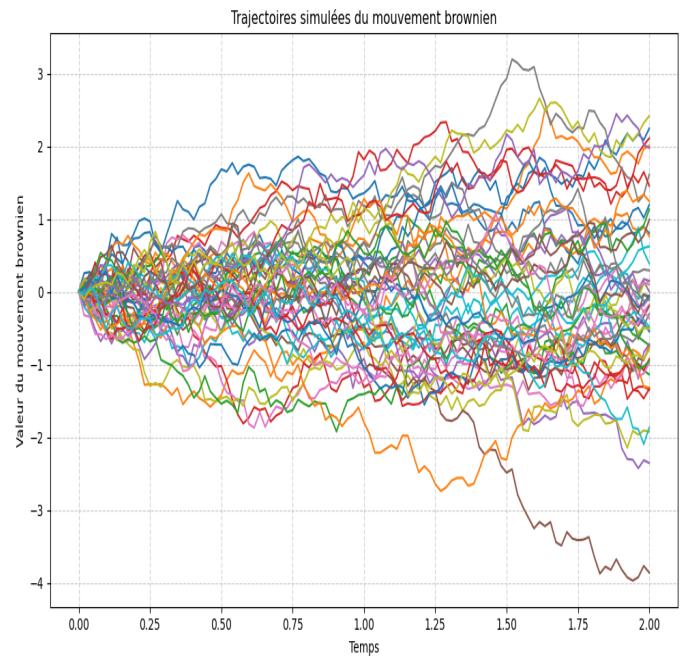


Figure 2.2 – Trajectoires simulées du mouvement brownien.

La Figure 2.1 montre la distribution obtenue de variables gaussiennes simulées par la méthode de Box-Muller, tandis que la Figure 2.2 illustre plusieurs trajectoires simulées de mouvement brownien standard à partir de ces tirages.

2.3.2 Implémentation de l'estimateur $P^{DO,\Delta}$

```

1 def calcul_P_euro_et_D0_delta(nb_simul, barriere=True, S0=1, r=0.015, ...):
2
3
4     # Simulation des trajectoires complètes
5     S_path, S_path_neg = get_S_path(nb_simul, S0=S0, r=r, ...)
6
7     S_path_min = np.min(S_path, axis=1)
8     S_path_neg_min = np.min(S_path_neg, axis=1)
9     payoff = 0.5 * np.exp(-r * T) * (
10         np.maximum(0, K - S_path[:, -1]) * (S_path_min >= B) +
11         np.maximum(0, K - S_path_neg[:, -1]) * (S_path_neg_min >= B)
12     )
13
14     # Estimation Monte Carlo du prix et intervalle de confiance
15     MC_price, (IC_bas, IC_haut) = compute_MC(payoff, nb_simul, alph)
16
17     return MC_price, (IC_bas, IC_haut)

```

Listing 2.1 – Calcul du prix d'une option barrière $P^{DO,Delta}$ barrière avec intervalle de confiance

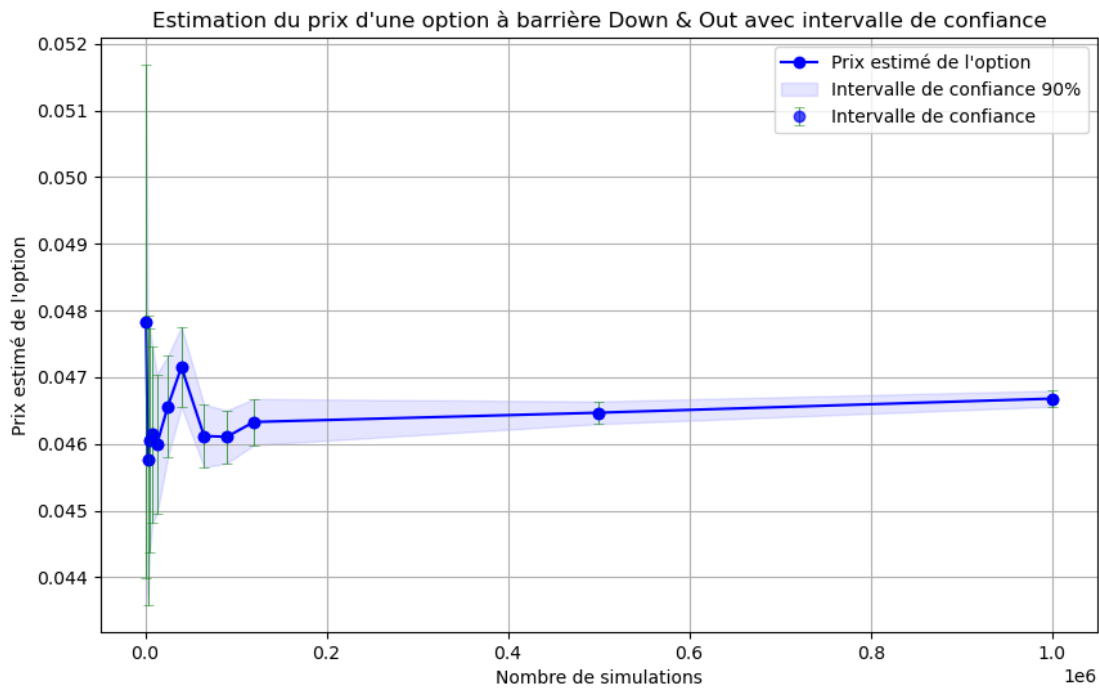


Figure 2.3 – Estimation de $P^{DO,\Delta}$ avec intervalle de confiance en fonction du nombre de trajectoires.

La Figure 2.3 montre l'évolution de l'estimation du prix d'une option à barrière Down Out en fonction du nombre de simulations. On observe que l'intervalle de confiance se resserre lorsque le nombre de trajectoires augmente, traduisant une meilleure précision de l'estimateur.

Comparée à la Figure 1.1, le prix est naturellement plus faible en raison du risque de franchissement de la barrière, ce qui annule le payoff. La convergence est plus lente, avec une variance plus élevée initialement, traduisant une instabilité accrue due à la condition de barrière.

2.4 Réduction de variance par variables antithétiques

La réduction de variance par variables antithétiques consiste à générer les variables aléatoires deux par deux de manière opposée. Si U est une variable uniforme, on simule les trajectoires à partir de U et $1 - U$, ou, dans le cas gaussien, à partir de Z et $-Z$. L'estimateur devient :

$$\hat{X}_{\text{anti}} = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n (f(Z_i) + f(-Z_i)),$$

où $Z_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$ et $f(Z)$ est le payoff. Cela permet de réduire la variance grâce à la symétrie et la corrélation négative entre les termes.

Comparaison des estimateurs de $P^{DO,\Delta}$

On trace sur le même graphique les deux estimateurs : estimateur sans réduction de variance, estimateur avec réduction par variables antithétiques ainsi que leurs intervalles de confiance à 90% en fonction du nombre de trajectoires.

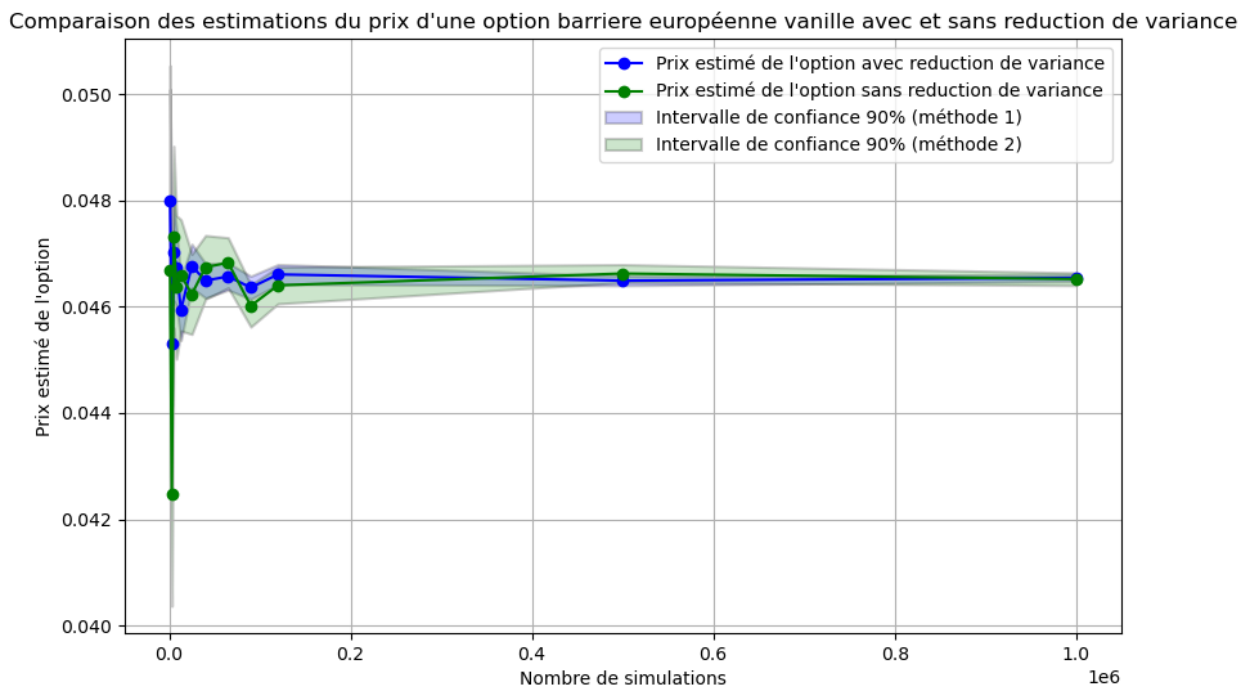


Figure 2.4 – Comparaison des estimations de $P^{DO,\Delta}$ avec intervalle de confiance avec et sans réduction de variance.

On constate sur la figure 2.4 que les deux convergent vers une valeur proche, mais la réduction de variance améliore la stabilité des estimations et réduit visiblement les intervalles de confiance dès les petits échantillons. C'est une amélioration efficace de la méthode de Monte Carlo.

Dans la suite, on choisit un nombre de trajectoires égal à 120000 car cette valeur permet d'obtenir une erreur standard satisfaisante de l'ordre de 10^{-6} en moyenne d'après nos simulations et un intervalle de confiance réduit de l'estimateur asymptotique.

2.5 Influence de B sur $P^{DO,\Delta}$

Cette courbe 2.5 illustre la décroissance du prix de l'option à barrière en fonction de la valeur de $B \in [0.5, 1]$. Plus la barrière est proche de K , plus la probabilité de knock-out est élevée, ce qui diminue fortement la valeur de l'option. La chute est non linéaire et rapide à partir de $B \approx 0.7$.

Aussi, pour B assez proche de $K = 1$, on observe que la courbe tend vers 0, ce qui est en concordance avec le calcul de la section 2.1

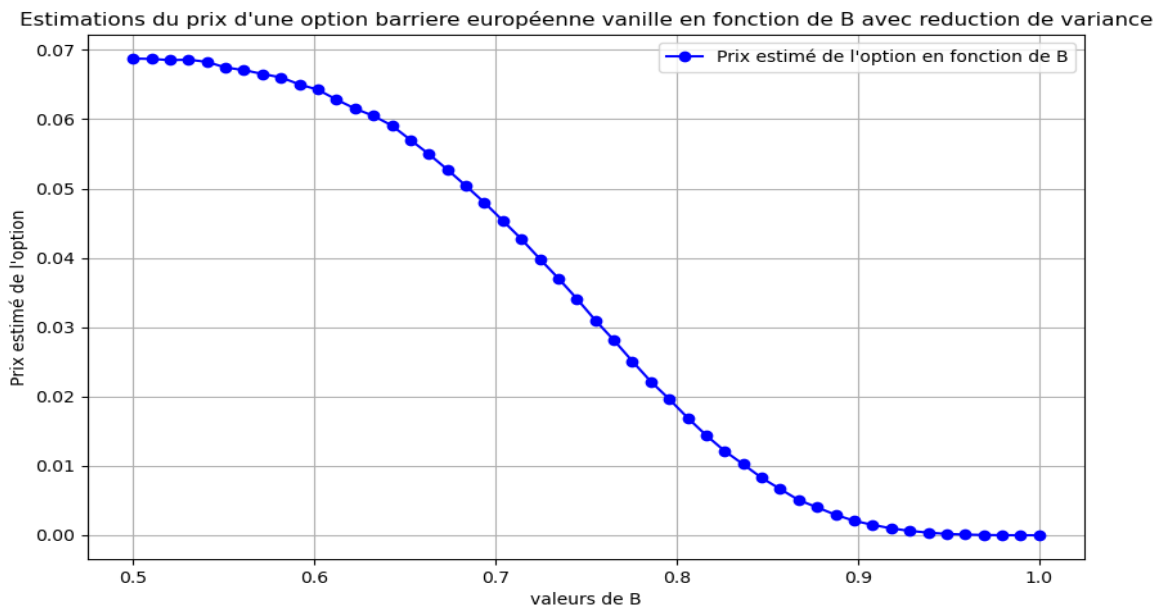
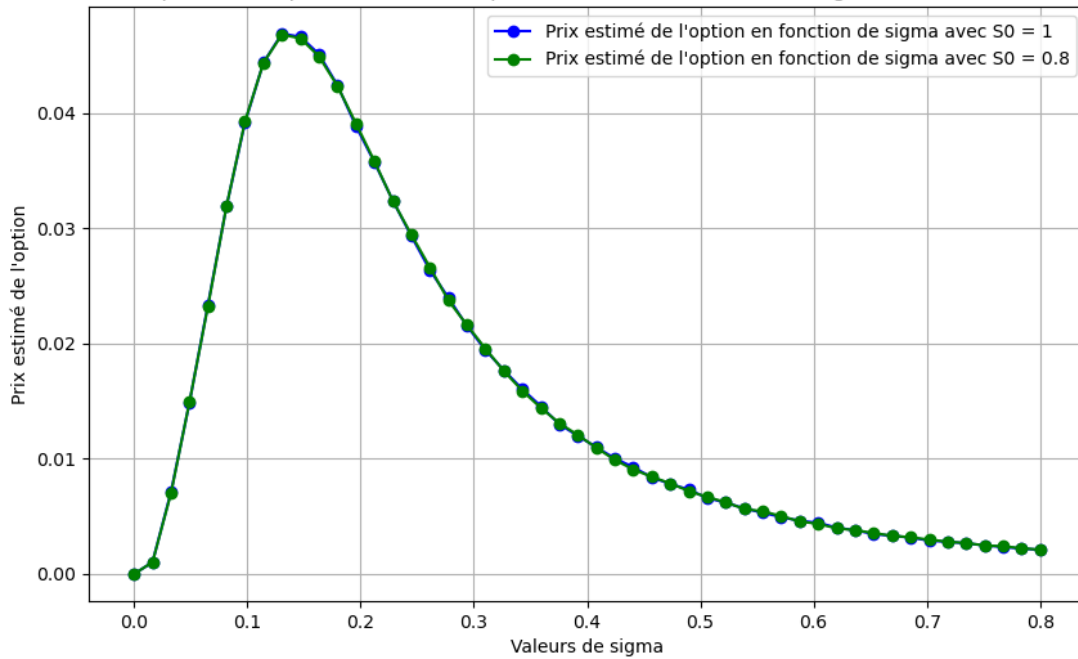


Figure 2.5 – Estimation de $P^{DO,\Delta}$ avec réduction de variance en fonction de B .

2.6 Influence de σ sur $P^{DO,\Delta}$

Etudier $P^{DO,\Delta}$ pour $\sigma \in [0.1, 0.8]$ avec $S_0 = 1$ et $S_0 = 0.8$.

Estimations du prix d'une option barrière européenne vanille en fonction de sigma avec reduction de variance

Figure 2.6 – Estimation de $P^{DO,\Delta}$ avec réduction de variance en fonction de σ .

Cette figure 2.6 montre que le prix de l'option barrière augmente avec la volatilité jusqu'à un maximum, puis diminue progressivement vers 0. Ce comportement s'explique par un compromis : la volatilité augmente le payoff potentiel, mais aussi le risque de franchir la barrière.

La comparaison entre $S_0 = 1$ et $S_0 = 0,8$ met en lumière que partir plus bas réduit sensiblement le prix de l'option car la probabilité d'être au dessus de la barrière diminue logiquement.

La valeur choisie à $\sigma = 0.15$ pour les simulations pourraient s'expliquer par le fait que la banque choisit la valeur de σ qui réalise le maximum du prix de l'option afin de garantir de pouvoir valoriser l'option dans la majorité des scénarios.

Aussi, l'allure de la courbe pourrait s'expliquer par le caractère quadratique de S_t en σ (voir 1.1) sous la probabilité risque neutre.

2.7 Approximation à partir de la loi jointe de W_{t_1}, W_{t_2}

La méthode de discrétisation précédente bien qu'apparemment efficace présente un biais: on ne tient pas compte de l'évolution du cours de l'actif entre les instants $[T_i, T_{i+1}]$ pour $i \in [1, N^\Delta - 1]$, ce qui conduit à une surestimation du prix de l'option et introduit ainsi des opportunités d'arbitrages.

On pourrait faire tendre $\Delta \rightarrow 0$, ce qui réduirait considérablement ce biais; Mais cela nécessite des ressources temporelles et matérielles assez conséquentes, ce qui n'est pas envisageable en pratique.

Une autre méthode consiste à approximer la probabilité de franchissement de la barrière

entre deux instants discrets à l'aide d'une formule fermée par la technique du pont brownien. Cela permet de corriger l'erreur due à l'observation discrète du minimum. On obtient ainsi :

$$P^{DO} = e^{-rT} \mathbb{E} \left[(K - S(T))_+ \cdot \prod_{i=1}^{N-1} p_i \right]$$

où, pour chaque intervalle $[T_i, T_{i+1}]$, on définit :

$$p_i = \left[1 - \exp \left(-\frac{2}{\sigma^2 \Delta} \log \left(\frac{S_{T_i}}{B} \right) \log \left(\frac{S_{T_{i+1}}}{B} \right) \right) \right] \cdot 1_{S_i \wedge S_{i+1} > B}$$

Cette méthode permet une meilleure précision pour les options barrière en simulant les trajectoires à pas discrets tout en tenant compte du risque de franchissement entre les points simulés pour Δ suffisamment petit et est moins gourmande en ressources.

2.8 Influence de Δ sur $P^{DO,\Delta}$ et P^{DO}

On trace $P^{DO,\Delta}$ pour différents $\Delta \in \{3, 1, 1/4, 1/12, 1/52, 1/100, 1/250, 1/275, 1/300\}$ et observer l'évolution du prix de l'option ainsi que P^{DO} pour $\Delta = \frac{1}{100}$

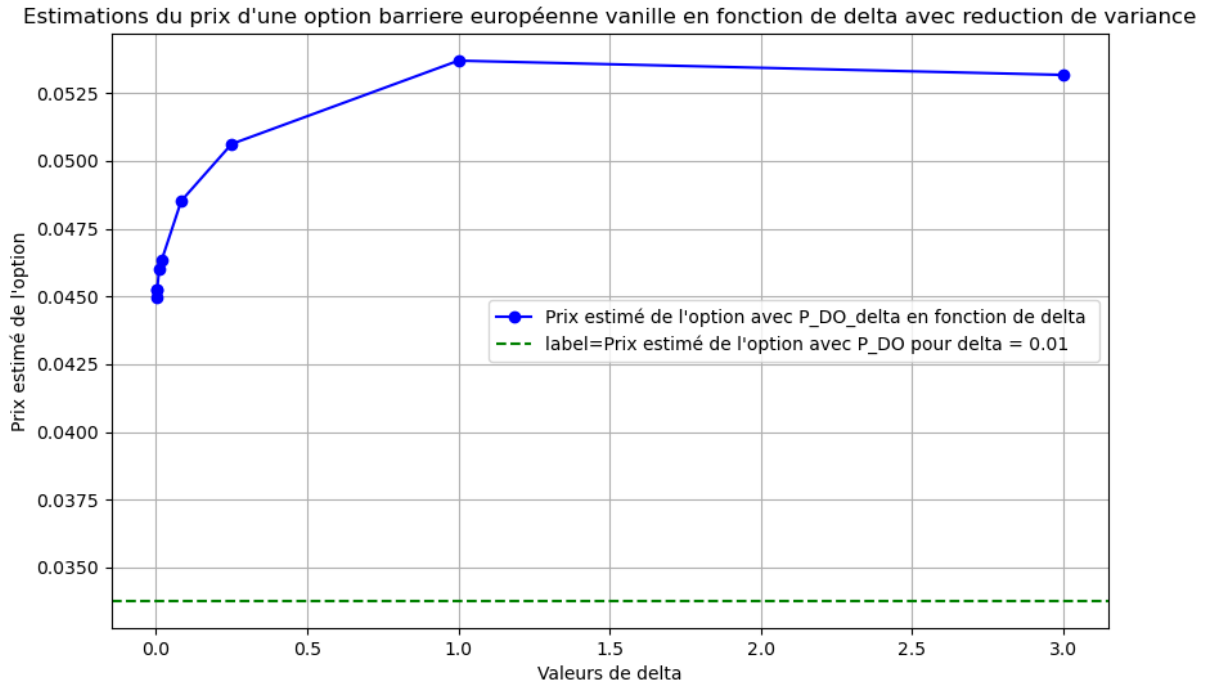


Figure 2.7 – Estimation de $P^{DO,\Delta}$ avec réduction de variance en fonction de Δ et P^{DO} pour $\Delta = \frac{1}{100}$.

Méthode 1 On observe sur la figure 2.7 une convergence progressive du prix de l'option calculé via $P^{DO,\Delta}$ vers celui obtenu par P^{DO} .

Le prix estimé de l'option barrière augmente avec Δ , traduisant une sous-estimation du

franchissement de la barrière pour des pas trop grands. Cela illustre bien l'intérêt de choisir des pas suffisamment petits pour que l'approximation reste fidèle au processus continu. Aussi, le temps de calcul augmente considérablement lorsque $\Delta \rightarrow 0$.

Cependant, le prix estimé semble stagner à 0.450 pour Δ proche de $\frac{1}{52}$ et reste supérieure de 0.012 au prix de 0.438 obtenu par P^{DO} pour $\Delta = \frac{1}{100}$, conduisant ainsi à une surestimation du prix de l'option malgré la petitesse de Δ ;

Ce qui confirme les observations faites en section 2.7 et souligne l'importance de la méthode d'approximation de la probabilité de franchissement de la barrière entre deux instants discrets.

2.9 Probabilité de non-sortie $\zeta^{DO,\Delta}$ et ζ^{DO} en fonction de Δ

On trace les probabilités de non sortie $\zeta^{DO,\Delta}$ pour différents $\Delta \in \{3, 1, 1/4, 1/12, 1/52, 1/100, 1/250, 1/275, 1/300\}$ et ζ^{DO} pour $\Delta = \frac{1}{100}$ avec

$$\zeta^{DO,\Delta} = \mathbb{E} \left[1_{\left\{ \min_{u \in \{T^i\}_{i=1..N}} S(u) \geq B \right\}} \right], \quad \zeta^{DO} = \mathbb{E} \left[1_{\left\{ \min_{u \leq T} S(u) \geq B \right\}} \right]$$

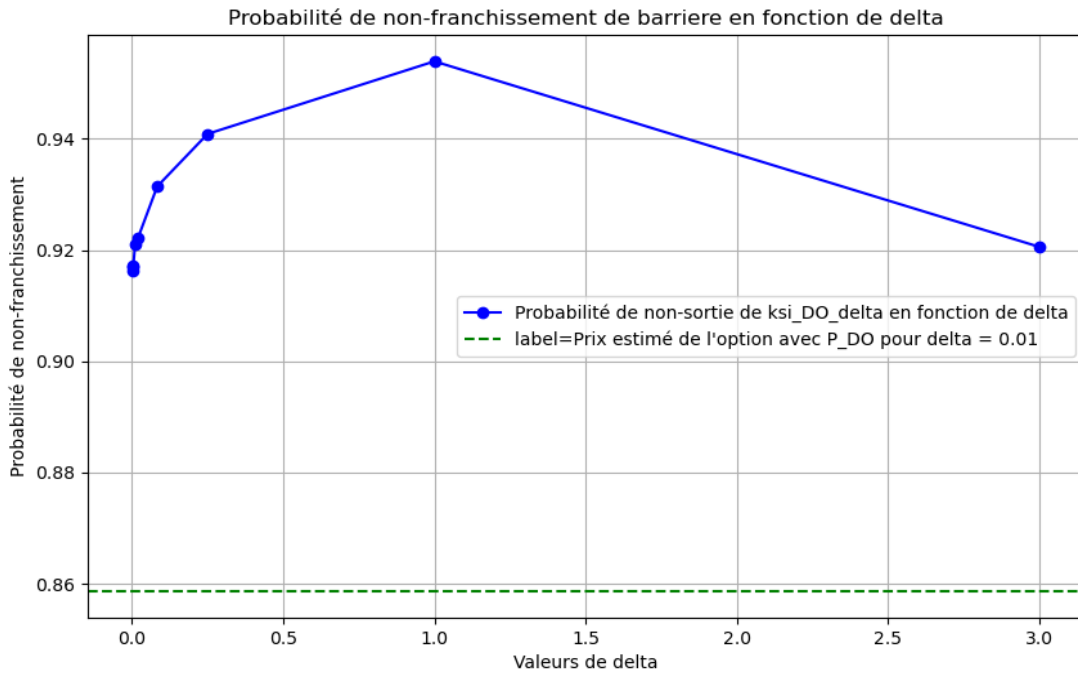


Figure 2.8 – Probabilité de non-sortie $\zeta^{DO,\Delta}$ en fonction de Δ et ζ^{DO} pour $\Delta = \frac{1}{100}$.

Cette figure 2.9 corrobore l'observation et l'intuition de la précédente à un facteur aléatoire $e^{-rT}(K - S(T))_+$ près : la probabilité estimée de non-franchissement croît avec Δ , ce qui biaise l'estimation du prix. L'erreur introduite par des grands pas de simulation fausse la détection des trajectoires qui devraient être knock-out.

Méthode 2 Après, une recherche dans la littérature, il ressort une nouvelle méthode d'exploitation des probabilités de non-sortie entre les points de discrétisation qui se déroule comme suit :

```

1 def correction_discretisation(S_path, B=0.7, sigma=0.15, delta=1/52):
2     nb_simul, N_delta = S_path.shape
3
4     # Initialiser les trajectoires n'ayant pas franchi la barrière
5     barriere_atteinte = tableau de booléens de taille nb_simul initialisés
6
7     pour i allant de 0 à nb_simul - 1 :
8         pour j allant de 0 à N_delta - 2 :
9
10            si barriere_atteinte[i] est VRAI
11                ou S_path[i, j] <= B
12                ou S_path[i, j+1] <= B :
13
14                barriere_atteinte[i] = VRAI
15                quitter la boucle intérieure
16
17            sinon :
18                h = log(S_path[i, j]/B) * log(S_path[i, j+1]/B)
19                p_barriere = exp(-2 * h / (sigma^2 * delta))
20
21                si nombre aléatoire U [0, 1] < p_barriere :
22                    barriere_atteinte[i] = VRAI
23                    quitter la boucle intérieure
24
25     barriere_non_atteinte = NON(barriere_atteinte)
26     retourner barriere_non_atteinte

```

FAUX

Listing 2.2 – Pseudocode de correction_discretisation

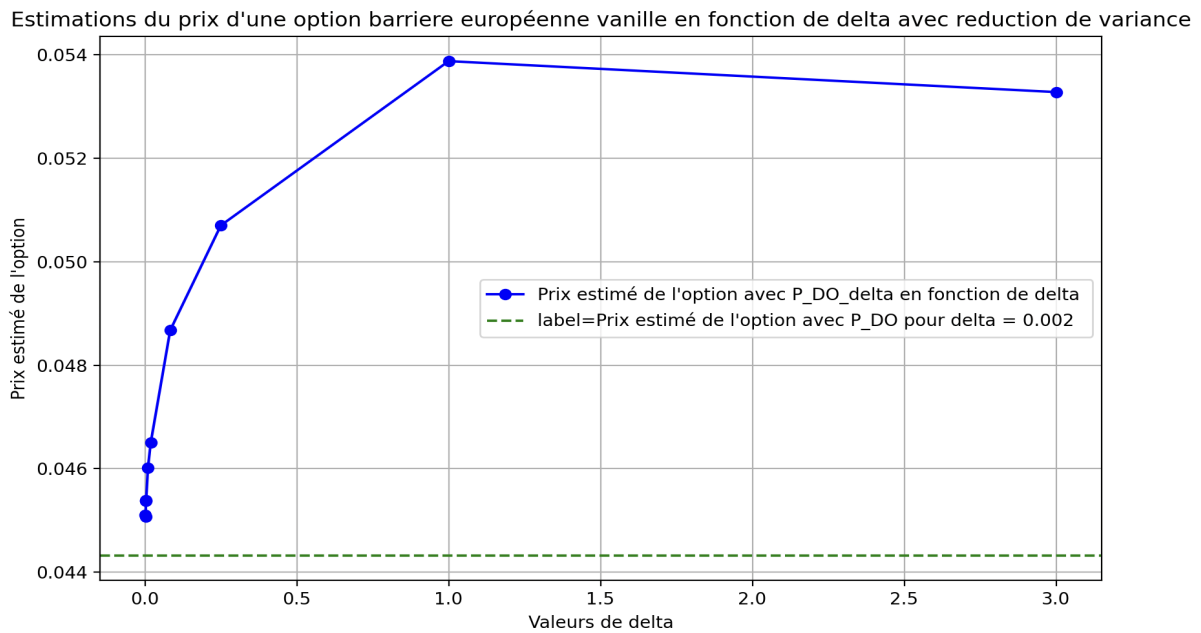


Figure 2.9 – Probabilité de non-sortie $\zeta^{DO,\Delta}$ en fonction de Δ et ζ^{DO} pour $\Delta = \frac{1}{100}$ avec la méthode 2.

Cette version permet une augmentation du prix estimé de l'option, offrant ainsi un meilleur aperçu de la convergence. Cependant, cela correspond-il à une surestimation du prix réel ou non ?

Dans le doute, nous préférons à ce stade adopter la première méthode, que nous jugeons plus rigoureuse.

3 Option à Barrière Down & In

3.1 Formule de P^{DI}

Un Put à Barrière de type Down In confère à son possesseur le droit de vendre à une date fixée T un actif à un prix K fixé à l'avance uniquement si le prix de l'actif est descendu en dessous d'une barrière B avant T . Le prix de cette option est donc dans notre modèle :

$$P^{DI} = e^{-rT} \mathbb{E}[(K - S(T))_+ 1_{\{\min_{u \leq T} S(u) \leq B\}}].$$

3.2 Lien entre P^{DO} et P^{DI}

On utilise la relation évidente : $P^{euro} = P^{DO} + P^{DI}$.

3.3 Réduction de variance par variable de contrôle

La réduction de variance par variable de contrôle repose sur l'utilisation d'une variable aléatoire Y telle que $\mathbb{E}[Y]$ est connue et Y est corrélée avec la variable d'intérêt X . On construit un nouvel estimateur :

$$\hat{X}_{VC} = \mathbb{E}[Y] + \mathbb{E}[X - Y],$$

qui vérifie toujours $\mathbb{E}[\hat{X}_{VC}] = \mathbb{E}[X]$ mais dont la variance peut être significativement réduite.

Le *facteur discriminant* β est choisi pour minimiser la variance : ce coefficient permet d'exploiter la corrélation entre X et Y afin d'annuler partiellement les fluctuations communes, et ainsi améliorer la précision de l'estimation de $\mathbb{E}[X]$ avec en général :

$$\beta^* = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\text{Var}(Y)}.$$

Dans notre cas, on utilise P^{DI} comme variable de contrôle pour améliorer la variance de l'estimateur de P^{DO} avec P^{euro} admettant une formule analytique explicite connue.

Commentaires sur le graphe obtenu

La Figure 3.1 présente une comparaison entre les estimations de P^{DO} avec (en vert) et sans (en bleu) utilisation d'une variable de contrôle.

Contrairement à l'effet attendu, on constate que l'estimateur avec variable de contrôle ne présente pas systématiquement une variance plus faible. Cela souligne que la réduction de variance dépend fortement du *facteur discriminant* β , dont l'efficacité repose sur la qualité de la corrélation entre X et Y . Si cette corrélation est faible ou mal exploitée, l'ajout d'une variable de contrôle peut être inefficace, voire détériorer la variance.

Cette observation rappelle que la méthode, bien que théoriquement optimale, doit être utilisée avec précaution et que le choix de la variable de contrôle est crucial.

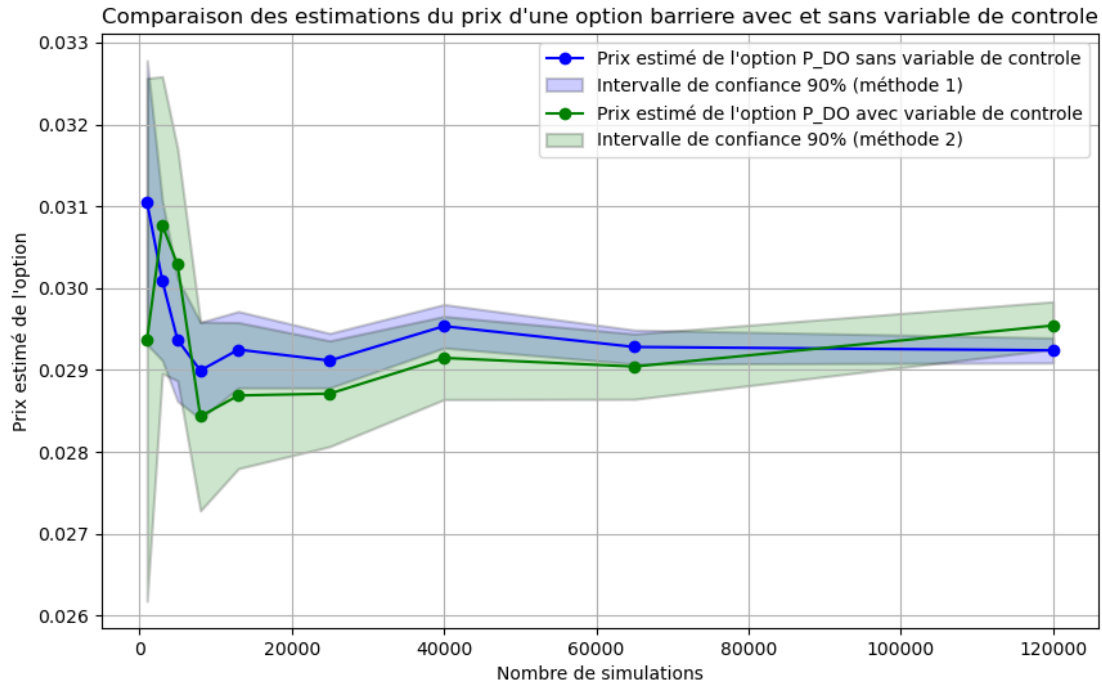


Figure 3.1 – Comparaison des estimations de P^{DO} avec et sans variable de contrôle.

Influence du paramètre discriminant B

Dans notre cas, nous identifions le principal paramètre discriminant qui n'est autre que la barrière B d'après les sections précédentes.

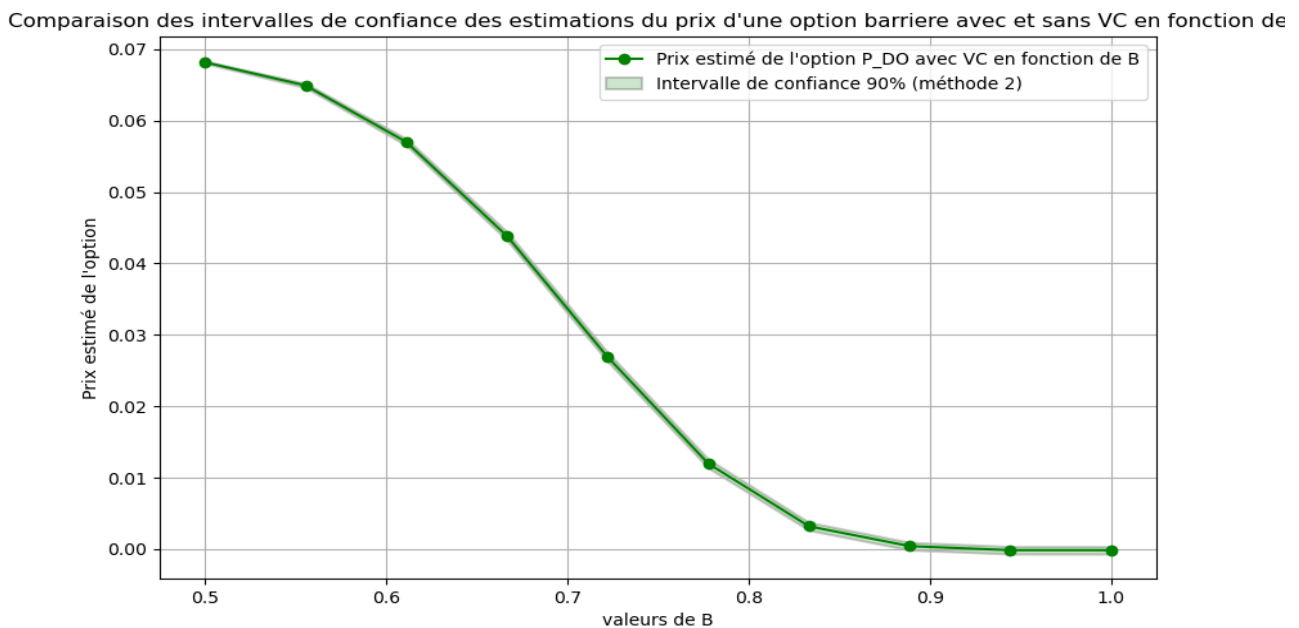


Figure 3.2 – Évolution de l'intervalle de confiance de P^{DO} avec variable de contrôle en fonction de la barrière B .

La Figure 3.2 montre l'évolution de l'intervalle de confiance de l'estimation de P^{DO} avec variable de contrôle, en fonction de la barrière B . Ici, on observe que l'intervalle de confiance se réduit progressivement lorsque $B \rightarrow 0.5$.

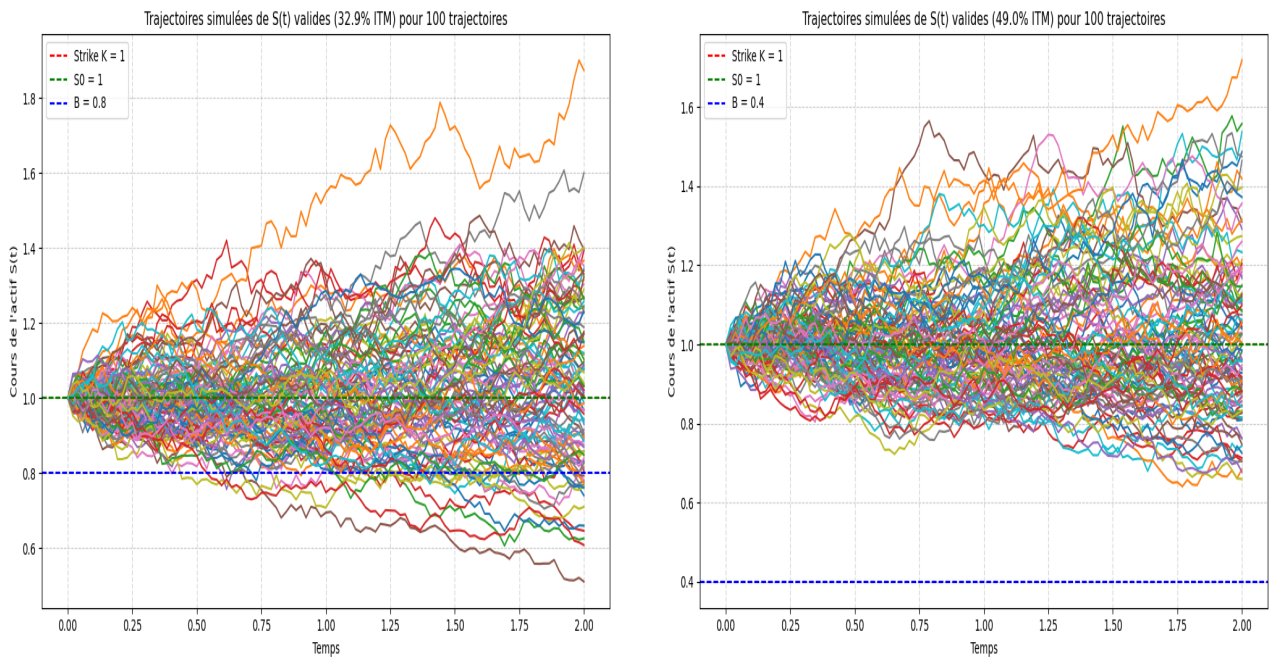
Ceci s'explique à la lumière de la variable de contrôle utilisée, à savoir P^{DI} et par le fait que pour B assez petit, la barrière est franchie assez souvent ce qui conduit à un payoff nul dans ces cas et donc une plus grande certitude sur le prix de l'option. A contrario, pour $B \rightarrow 1$, les scénarios sont plus variés et l'incertitude devient ainsi plus grande.

Ces observations soulignent l'importance du facteur discriminant B dans l'efficacité de cette méthode.

Quelques simulations du cours de l'actif $S(t)$ et pourcentage des scénarios valides

Les scénarios valides désignent ceux permettant d'exercer l'option à l'échéance T .

Pour 100 trajectoires simulées, seulement 32.9% d'entre elles sont valides avec $S = 1$, $B = 0.8$ et $K = 1$ tandis que pour $S = 1$, $B = 0.4$ et $K = 1$, 49% sont valides, ce qui semble cohérent avec les observations faites.



Trajectoires simulées de $S(t)$ valides pour 100 trajectoires avec $B = 0.8$.

Trajectoires simulées de $S(t)$ valides pour 100 trajectoires avec $B = 0.4$.

Figure 3.3 – Comparaison des trajectoires de $S(t)$ pour deux valeurs différentes de la barrière B .

Pour rappel, toutes les réponses aux questions théoriques sont disponibles en annexe 3.3. Les correspondances entre les figures et les codes utilisés dans le code source pour les générer y sont aussi indiquées.

Conclusion

Ce projet a permis de mettre en œuvre une approche complète de modélisation et de simulation pour le calcul du prix d'options à barrière dans le cadre du modèle de Black & Scholes. À travers une méthodologie rigoureuse, nous avons d'abord validé la méthode de Monte Carlo sur le cas standard de l'option européenne vanilla, avant d'étendre l'analyse au cas plus complexe des options à barrière de type Down & Out.

Les simulations ont mis en évidence les effets de la discrétisation sur la détection du franchissement de barrière, et l'impact significatif des paramètres comme la barrière B ou la volatilité σ sur le prix estimé. L'approche par pont brownien s'est révélée plus précise pour compenser les biais liés à la discrétisation.

Des techniques de réduction de variance ont également été mises en œuvre, notamment via les variables antithétiques et les variables de contrôle. Ces méthodes ont montré des résultats contrastés selon les paramètres choisis, illustrant le rôle crucial du facteur discriminant (en particulier la barrière B) dans l'efficacité de la correction statistique.

Les principaux enseignements de cette étude sont les suivants :

- La **méthode de Monte Carlo** permet d'estimer efficacement le prix d'options même en l'absence de formule explicite.
- La **discrétisation du minimum** peut induire un biais significatif, corrigible par l'approche du pont brownien.
- Les **techniques de réduction de variance** sont puissantes mais sensibles au choix des paramètres et de la variable de contrôle.
- La **barrière B joue un rôle discriminant** déterminant, à la fois sur la structure du payoff et sur l'efficacité des méthodes numériques.

Malgré les résultats obtenus, certaines limites demeurent, notamment liées au temps de calcul pour des pas très fins ou à la dépendance des méthodes à certains choix techniques. Des perspectives futures pourraient consister à implémenter des schémas adaptatifs de discrétisation, ou à explorer des méthodes d'apprentissage automatique pour modéliser directement la probabilité de franchissement.

En somme, cette étude a permis de mieux comprendre les subtilités liées au pricing d'options à barrière, tant sur le plan analytique que numérique, et ouvre la voie à des améliorations algorithmiques et théoriques utiles en ingénierie financière.

Nous tenons à remercier notre encadrant, M. Guillaume ASTRUC pour ce merveilleux suivi, les conseils précieux et explications détaillés apportés durant ce projet et en général sur le monde de la finance de marché.

Annexe : Démonstrations des résultats théoriques

3.4 Codes utilisés pour générer les figures

| Figure | Choix associé |
|--------------------|---------------|
| Figure 1.1 | 0 |
| Figures 2.1 et 2.2 | 15 |
| Figure 2.3 | 1 |
| Figure 2.4 | 4 |
| Figure 2.5 | 5 |
| Figure 2.6 | 8 |
| Figure 2.7 | 10 |
| Figure 2.8 | 11 |
| Figure 3.1 | 13 |
| Figure 3.2 | 14 |
| Figure 3.3 | 16 |

Table 3.1 – Correspondance entre les figures et les choix dans le code source

3.5 Approximation de la loi normale

Approximation d'Abramowitz & Stegun

Approximation de la fonction de répartition d'une Gaussienne centrée réduite :

$$\forall x > 0, \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}u^2} du = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} (b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3 + b_4 t^4 + b_5 t^5) + \epsilon(x)$$

$$\text{avec } t = \frac{1}{1 + b_0 x} \quad \text{et}$$

$$b_0 = 0.2316419$$

$$b_1 = 0.319381530$$

$$b_2 = -0.356563782$$

$$b_3 = 1.781477937$$

$$b_4 = -1.821255978$$

$$b_5 = 1.330274429$$

et où $|\epsilon(x)| < 7.5 \times 10^{-8}$

3.6 Calcul analytique de P_{euro}

Il existe deux méthodes de calculs de cette valeurs, soit par calcul direct avec les intégrales, soit par changement de variable élégante.

Nous choisissons de présenter la seconde option, la première étant classique.

$$\begin{aligned} P_{euro} &= e^{-rT} \mathbb{E}((K - S(T))_+) \quad (\text{sous probabilité risque neutre}) \\ &= e^{-rT} \mathbb{E}((K - S(T)) \mathbb{1}_{\{S(T) \leq K\}}) \\ &= e^{-rT} [K \mathbb{P}(S(T) \leq K) - \mathbb{E}(S(T) \mathbb{1}_{\{S(T) \leq K\}})] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S(T) \leq K &\iff S_0 \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma W_T\right) \leq K \\ S(T) \leq K &\iff W_T \leq \frac{\log\left(\frac{K}{S_0}\right) - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma} = d_1 \end{aligned}$$

et $W_T \sim \mathcal{N}(0, T)$, donc $\mathbb{P}(W_T \leq d_1) = N(d_1)$
où N désigne la fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

En effectuant le changement de probabilité associé à

$$L_T = e^{\frac{\sigma^2}{2}T + \sigma W_T} \quad (\text{la probabilité est notée } \mathbb{P}^*),$$

on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(S(T) \mathbb{1}_{\{S(T) \leq K\}}) &= \mathbb{E}(S_0 e^{rT} L_T \mathbb{1}_{\{S(T) \leq K\}}) \\ &= S_0 e^{rT} \mathbb{E}^*[\mathbb{1}_{\{S(T) \leq K\}}] \\ &= S_0 e^{rT} \mathbb{P}^*(S(T) \leq K) \\ &= S_0 e^{rT} \mathbb{P}^*(W_T - \sigma T \leq d_1 - \sigma T) \end{aligned}$$

Or sous \mathbb{P}^* , $(W_t - \sigma t)_t$ est un mouvement brownien standard, donc

$$W_T - \sigma T \sim \mathcal{N}(0, T)$$

d'où

$$\mathbb{E}(S(T) \mathbb{1}_{\{S(T) \leq K\}}) = S_0 e^{rT} N(d_1 - \sigma T)$$

$$\begin{aligned} P_{euro} &= S_0 e^{rT} N(d_1 - \sigma T) \\ P_{euro} &= e^{-rT} [K N(d_1) - S_0 e^{rT} N(d_1 - \sigma T)] \\ P_{euro} &= e^{-rT} [K N(d_1) - S_0 N(d_1 - \sigma T)] \end{aligned}$$

où

$$d_1 = \frac{\log\left(\frac{K}{S_0}\right) - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma}$$

$$P_{\text{euro}} = e^{-rT} \left[K \Psi\left(\frac{d_1}{\sqrt{T}}\right) - S_0 \Psi\left(\frac{d_1}{\sqrt{T}} - \sigma\sqrt{T}\right) \right]$$

où Ψ est la fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

3.7 Méthode d'approximation de P^{DO}

3.7.1 Méthode 1

$$\begin{aligned} p^{DO} &= e^{-rT} \mathbb{E} \left[(K - S(T))_+ \mathbf{1}_{\{\min_{u \leq T} S(u) \geq B\}} \right] \\ &= e^{-rT} \mathbb{E} \left[L_T^{-1}(K - S(T))_+ \mathbf{1}_{\{\min_{u \leq T} S(u) \geq B\}} \right] \\ &= e^{-rT} \mathbb{E}^* \left[\mathbb{E}^* \left[L_T^{-1}(K - S(T))_+ \prod_{i=1}^{N-1} \mathbf{1}_{\{\min_{u \in [T_i, T_{i+1}]} S(u) \geq B\}} \right] \right] \end{aligned}$$

Comme $(S(u))_{u \in [T_i, T_{i+1}]}$ ne dépend que de W_{T_i} et $W_{T_{i+1}}$, et que les processus $(S(u))_{u \in [T_i, T_{i+1}]}$ sont indépendants pour $i = 1, \dots, N-1$, alors :

$$p^{DO} = e^{-rT} \mathbb{E}^* \left[L_T^{-1}(K - S(T))_+ \cdot \prod_{i=1}^{N-1} p_i \right]$$

avec

$$p_i = \mathbb{P}^* \left(\min_{u \in [T_i, T_{i+1}]} S(u) \geq B \mid W_{T_i}, W_{T_{i+1}} \right)$$

Sous \mathbb{P}^* , le processus $B_t = W_t + \frac{(r - \sigma^2/2)}{\sigma}t$ est un mouvement brownien standard, donc :

$$\begin{aligned} p_i &= \mathbb{P}^* \left(\min_{u \in [T_i, T_{i+1}]} B_u \geq x^* \mid B_{T_i}, B_{T_{i+1}} \right) \\ &= \left[1 - \exp \left(-\frac{2(B_{T_i} - x^*)(B_{T_{i+1}} - x^*)}{T_{i+1} - T_i} \right) \right] \mathbf{1}_{\{B_{T_i} \wedge B_{T_{i+1}} > x^*\}} \end{aligned}$$

Avec :

$$\begin{aligned} B_t - x^* &= W_t + \frac{(r - \sigma^2/2)}{\sigma}t - \frac{\log(B/S_0)}{\sigma} \\ &= \frac{1}{\sigma} \left(\log \left(\frac{S_t}{B} \right) \right) \end{aligned}$$

D'où finalement :

$$p_i = \left[1 - \exp \left(-\frac{2}{\sigma^2 \Delta} \log \left(\frac{S_{T_i}}{B} \right) \log \left(\frac{S_{T_{i+1}}}{B} \right) \right) \right] \mathbb{1}_{\{S_{T_i} \wedge S_{T_{i+1}} > B\}}$$

Et donc :

$$\begin{aligned} P^{DO} &= e^{-rT} \mathbb{E}^{\mathbb{P}^*} [L_T^{-1}(K - S(T))_+ \cdot p_1 \cdots p_{N-1}] \\ &= e^{-rT} \mathbb{E} [(K - S(T))_+ \cdot p_1 \cdots p_{N-1}] \end{aligned}$$

3.7.2 Méthode 2 (un peu moins rigoureuse)

$$\begin{aligned} P^{DO} &= e^{-rT} \mathbb{E} [(K - S(T))_+ \mathbb{1}_{\{\min_{u \leq T} S(u) \geq B\}}] \\ &= e^{-rT} \mathbb{E} [\mathbb{E} [(K - S(T))_+ \mathbb{1}_{\{\min_{u \leq T} S(u) \geq B\}} \mid W_{T_1}, \dots, W_{T_N}]] \\ &= e^{-rT} \mathbb{E} \left[(K - S(T))_+ \mathbb{E} \left[\prod_{i=1}^{N-1} \mathbb{1}_{\{\min_{u \in [T_i, T_{i+1}]} S(u) \geq B\}} \mid W_{T_1}, \dots, W_{T_N} \right] \right] \end{aligned}$$

Comme $(S(u))_{u \in [T_i, T_{i+1}]}$ ne dépend que de W_{T_i} et $W_{T_{i+1}}$, et que les processus $(S(u))_{u \in [T_i, T_{i+1}]}$ sont indépendants pour $i = 1, \dots, N-1$, alors :

$$P^{DO} = e^{-rT} \mathbb{E} \left[(K - S(T))_+ \cdot \prod_{i=1}^{N-1} p_i \right]$$

où

$$p_i = \mathbb{P} \left(\min_{u \in [T_i, T_{i+1}]} S(u) \geq B \mid W_{T_i}, W_{T_{i+1}} \right)$$

On a :

$$S(u) \geq B \quad \Leftrightarrow \quad W_u \geq \frac{\log \left(\frac{B}{S_0} \right) - \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) u}{\sigma}$$

Vu que $\Delta = T_{i+1} - T_i$ est très petit, on pose :

$$x^* = \frac{\log \left(\frac{B}{S_0} \right) - \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) T_i}{\sigma}$$

Et on considère :

$$\min_{u \in [T_i, T_{i+1}]} S(u) \geq B \quad \Leftrightarrow \quad \min_{u \in [T_i, T_{i+1}]} W_u \geq x^*$$

Alors :

$$\begin{aligned} p_i &= \mathbb{P} \left(\min_{u \in [T_i, T_{i+1}]} W_u \geq x^* \mid W_{T_i}, W_{T_{i+1}} \right) \\ &= \left[1 - \exp \left(-\frac{2(W_{T_i} - x^*)(W_{T_{i+1}} - x^*)}{T_{i+1} - T_i} \right) \right] \mathbb{1}_{\{\min(W_{T_i}, W_{T_{i+1}}) > x^*\}} \end{aligned}$$

Avec :

$$W_{T_i} - x^* = \frac{\log\left(\frac{S_{T_i}}{B}\right)}{\sigma}$$

$$W_{T_{i+1}} - x^* = \frac{\log\left(\frac{S_{T_{i+1}}}{S_0}\right) - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) T_{i+1}}{\sigma} - \frac{\log\left(\frac{B}{S_0}\right) - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) T_i}{\sigma}$$

$$W_{T_{i+1}} - x^* = \frac{\log\left(\frac{S_{T_{i+1}}}{B}\right) - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) \Delta}{\sigma}$$

Finalement :

$$p_i = \left[1 - \exp\left(-\frac{2}{\sigma^2 \Delta} \left(\log\left(\frac{S_{T_i}}{B}\right) \left(\log\left(\frac{S_{T_{i+1}}}{B}\right) - \Delta \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) \right) \right) \right) \right] \cdot \mathbb{1}_{\{\min(W_{T_i}, W_{T_{i+1}}) > x^*\}}$$

3.8 Questions facultatives

3.8.1 Preuve du résultat de la question 10

$$\mathbb{P}\left(\inf_{u \in [t_1, t_2]} W_u < x \mid W_{t_1}, W_{t_2}\right) = \mathbb{P}\left(\sup_{u \in [t_1, t_2]} (-W_u) > -x \mid W_{t_1}, W_{t_2}\right)$$

Soit $r = t_2 - t_1$, $v \in [t_1, t_2]$, $u = v - t_1$ et donc $u \in [0, r]$

on introduit alors :

$$u \in [0, r], \quad \widetilde{W}_u = W_{t_1} - W_{t_1+u}, \quad \widetilde{W}_0 = 0, \quad \widetilde{W}_r = W_{t_1} - W_{t_2}$$

On obtient :

$$\mathbb{P}\left(\sup_{u \in [t_1, t_2]} (-W_u) > -x \mid W_{t_1}, W_{t_2}\right) = \mathbb{P}\left(\sup_{u \in [0, r]} (\widetilde{W}_u) > a \mid \widetilde{W}_r = y\right)$$

avec :

$$a = -x + W_{t_1}, \quad y = W_{t_1} - W_{t_2}$$

On a donc :

$$\mathbb{P}\left(\sup_{u \in [0, r]} (\widetilde{W}_u) > a \mid \widetilde{W}_r = y\right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbb{P}\left(\sup_{u \in [0, r]} (\widetilde{W}_u) > a \mid \widetilde{W}_r \in [y, y + \varepsilon]\right)$$

Deux cas :

Cas 1 : $a \leq y$ Dans ce cas, on a $\{\widetilde{W}_r = y\} \subset \{\sup(\widetilde{W}_u) > a\}$, donc :

$$\mathbb{P}\left(\sup_{u \in [0, r]} (\widetilde{W}_u) > a \mid \widetilde{W}_r = y\right) = 1$$

Cas 2 : $a > y$, $a > 0$

$$\mathbb{P} \left(\sup_{u \in [0, r]} (\widetilde{W}_u) > a \mid \widetilde{W}_r \in [y, y + \varepsilon] \right) = \frac{\mathbb{P} \left(\sup(\widetilde{W}_u) > a, \widetilde{W}_r \in [y, y + \varepsilon] \right)}{\mathbb{P} \left(\widetilde{W}_r \in [y, y + \varepsilon] \right)}$$

On note $S_r = \sup_{u \in [0, r]} \widetilde{W}_u$

Loi jointe, soit $\tau_a = \inf\{u > 0 \mid W_u = a\}$ un temps d'arrêt

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left(S_r > a, \widetilde{W}_r \in [y, y + \varepsilon] \right) &= \mathbb{P} \left(\tau_a < r, \widetilde{W}_r \in [y, y + \varepsilon] \right) \\ &= \mathbb{P} \left(\tau_a < r, y - a \leq \widetilde{W}_r - a \leq y - a + \varepsilon \right) \\ &= \mathbb{P} \left(\tau_a < r, y - a \leq B_r \leq y - a + \varepsilon \right) \end{aligned}$$

avec $\widetilde{W}_r - a = B_r$ indépendant de F_{τ_a} donc de τ_a aussi, alors :

$$\mathbb{P}(S_r > a, \widetilde{W}_r \in [y, y + \varepsilon]) = \mathbb{P}(\tau_a < r, y - a \leq B_r \leq y - a + \varepsilon)$$

Comme B_r^a a la même loi que $-B_r^a$, alors $(\tau_a, B_r^a) \stackrel{\mathcal{L}}{=} (\tau_a, -B_r^a)$

Donc,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S_r > a, \widetilde{W}_r \in [y, y + \varepsilon]) &= \mathbb{P}(\tau_a \leq r, y - a \leq -B_r^a \leq y - a + \varepsilon) \\ &= \mathbb{P} \left(\tau_a \leq r, y - a \leq \widetilde{W}_{\tau_a} - \widetilde{W}_r \leq y - a + \varepsilon \right) \\ &= \mathbb{P} \left(\tau_a \leq r, 2a - y - \varepsilon \leq \widetilde{W}_r \leq 2a - y \right) \\ &= \mathbb{P} \left(2a - y - \varepsilon \leq \widetilde{W}_r \leq 2a - y \right) \end{aligned}$$

D'où, pour $a > y, a > 0$, on a :

$$\mathbb{P} \left(\sup_{u \in [0, r]} (\widetilde{W}_u) > a \mid \widetilde{W}_r = y \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\varepsilon} \mathbb{P} \left(\sup(\widetilde{W}_u) > a, \widetilde{W}_r \in [y, y + \varepsilon] \right)}{\frac{1}{\varepsilon} \mathbb{P} \left(\widetilde{W}_r \in [y, y + \varepsilon] \right)}$$

avec

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \mathbb{P} \left(\sup(\widetilde{W}_u) > a, \widetilde{W}_r \in [y, y + \varepsilon] \right) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{2a-y-\varepsilon}^{2a-y} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2r}} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(2a-y)^2}{2r}} \end{aligned}$$

De même,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \mathbb{P} \left(\widetilde{W}_r \in [y, y + \varepsilon] \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2r} y^2}$$

D'où

$$\mathbb{P} \left(\sup_{u \in [0, r]} \widetilde{W}_u > a \mid \widetilde{W}_r = y \right) = e^{\frac{-1}{2r}((2a)^2 - 4ay)} = e^{\frac{-2}{r}a(a-y)}$$

En remplaçant, on a aussi :

$$\mathbb{P} \left(\sup_{u \in [0, r]} \widetilde{W}_u > a \mid \widetilde{W}_r = y \right) = e^{\frac{-2}{r}(W_{t_1} - x)(W_{t_2} - x)}$$

Finalement il est évident à ce stade qu'en raisonnant avec les indicatrices, on a :

$$\mathbb{P} \left(\inf_{u \in [t_1, t_2]} W_u < x \mid W_{t_1}, W_{t_2} \right) = 1 + \left(e^{\frac{-2(W_{t_1}-x)(W_{t_2}-x)}{t_2-t_1}} - 1 \right) \mathbf{1}_{\{\min(W_{t_1}, W_{t_2}) > x\}}$$

3.8.2 Nouvelle écriture de P^{DO}

$$p^{DO} = e^{-rT} \mathbb{E} \left[(K - S(T))_+ \mathbf{1}_{\{\min_{u \leq T} S(u) \geq B\}} \right]$$

On effectue le changement de probabilité associé à L_T

$$L_T = \exp \left[-\frac{1}{2} \left(-\frac{r - \frac{\sigma^2}{2}}{\sigma} \right)^2 T + \left(-\frac{r - \frac{\sigma^2}{2}}{\sigma} \right) W_T \right]$$

On note \mathbb{P}^* la probabilité. Alors

$$p^{DO} = e^{-rT} \mathbb{E}^{\mathbb{P}^*} \left[L_T^{-1} (K - S(T))_+ \mathbf{1}_{\{\min_{u \leq T} S(u) \geq B\}} \right]$$

Sous \mathbb{P}^* , (B_t) définie par $B_t = W_t + \left(\frac{r - \frac{\sigma^2}{2}}{\sigma} \right) t$ est un mouvement brownien standard.

$$\begin{aligned} p^{DO} &= e^{-rT} \mathbb{E}^{\mathbb{P}^*} \left[\mathbb{E}^{\mathbb{P}^*} \left[L_T^{-1} (K - S(T))_+ \mathbf{1}_{\{\min_{u \leq T} S(u) \geq B\}} \mid B_T \right] \right] \\ &= e^{-rT} \mathbb{E}^{\mathbb{P}^*} \left[L_T^{-1} (K - S(T))_+ \cdot \mathbb{E}^{\mathbb{P}^*} \left[\mathbf{1}_{\{\min_{u \leq T} S(u) \geq B\}} \mid B_T \right] \right] \\ &= e^{-rT} \mathbb{E}^{\mathbb{P}^*} \left[L_T^{-1} (K - S(T))_+ \cdot \mathbb{P}^{\mathbb{P}^*} \left(\min_{u \leq T} S(u) \geq B \mid B_T \right) \right] \end{aligned}$$

Pour $u \leq T$,

$$\begin{aligned} S(u) \geq B &\Leftrightarrow S_0 \exp(\sigma B_u) \geq B \\ &\Leftrightarrow B_u \geq \frac{\log \left(\frac{B}{S_0} \right)}{\sigma} = x^* \end{aligned}$$

Alors $\min_{u \leq T} S(u) \geq B \Leftrightarrow \min_{u \leq T} B_u \geq x^*$, d'où :

$$\begin{aligned} p^{DO} &= e^{-rT} \mathbb{E}^{\mathbb{P}^*} \left[L_T^{-1} (K - S(T))_+ \cdot \mathbb{P}^* \left(\min_{u \leq T} B_u \geq x^* \mid B_T \right) \right] \\ &= e^{-rT} \mathbb{E}^{\mathbb{P}^*} \left[L_T^{-1} (K - S(T))_+ \left(1 - \exp \left(\frac{2x^*(B_T - x^*)}{T} \right) \right) \mathbf{1}_{\{x^* < 0\}} \mathbf{1}_{\{B_T > x^*\}} \right] \end{aligned}$$

$$B_T > x^* \iff S(T) > B$$

$$p^{DO} = e^{-rT} \mathbb{E}^{\mathbb{P}^*} \left[L_T^{-1} (K - S(T))_+ \left(1 - \exp \left(\frac{2x^*(B_T - x^*)}{T} \right) \right) \mathbf{1}_{\{x^* < 0\}} \mathbf{1}_{\{S_T > B\}} \right]$$

On pose

$$A(T, W_T) = \left[1 - \exp \left(\frac{2x^*(B_T - x^*)}{T} \right) \right] \mathbf{1}_{\{x^* < 0\}}$$

$$= \left[1 - \exp \left(\frac{2x^*}{T} \left(W_T + \left(\frac{r - \frac{\sigma^2}{2}}{\sigma} \right) T - x^* \right) \right) \right] \mathbb{1}_{\{x^* < 0\}}$$

où $x^* = \frac{\log\left(\frac{B}{S_0}\right)}{\sigma}$, alors sous la probabilité \mathbb{P} :

$$p^{DO} = e^{-rT} \mathbb{E} \left[(K - S(T))_+ \cdot A(T, W_T) \cdot \mathbb{1}_{\{S(T) > B\}} \right]$$