

Compte-rendu du TP2

Résolution numérique de l'équation de la chaleur

Abdoulaye TRAORE & RADULEA Albert

07 Novembre - 23 Novembre 2024



Enseignante principale :
Mme Sonia Fliss
Enseignante chercheuse UMA

Chargé de TD :
Mme Nicole Spillane
CNRS researcher

Table des matières

Table des Figures	2
Introduction	4
1 Problème stationnaire avec coefficients variables et conditions de Dirichlet	5
1.1 Réparamétrisation de l'inconnue	5
1.2 Formule d'intégration par parties et formulation variationnelle	6
1.3 Caractère bien posé de la formulation variationnelle	7
1.4 Formulation variationnelle discrète	8
1.5 Ecriture sous forme de système linéaire	8
1.6 Technique de pseudo-élimination	9
1.7 Calcul des matrices élémentaires par passage à l'élément fini de référence	10
1.8 Expression des \hat{w}_i et calcul de la matrice de masse élémentaire	11
1.9 Calcul de la matrice de rigidité élémentaire par quadrature de Gauss-Legendre .	11
1.10 Validation du cas $\sigma = 1$ et comparaison au calcul de la matrice de rigidité (TP1)	13
1.11 Assemblage de la matrice A avant la pseudo-élimination	15
1.12 Technique de pseudo-élimination des noeuds du bord	16
1.13 Calcul de $f(x, y)$	18
1.14 Estimation de la norme L^2 de l'erreur	21
1.15 Estimation de la sémi-norme H^1 de l'erreur	21
1.16 Calcul de la solution approchée T_h avec T_Γ constante : cas 1	24
1.17 Calcul de la solution approchée T_h avec T_Γ constante : cas 2	27
1.18 Formulation variationnelle vérifiée par $u = T$ et formulation variationnelle discrète associée	29
1.19 Système linéaire équivalent par technique de pseudo-élimination	31
1.20 Implémentation des routines <code>T_Gamma.m</code> et <code>elimine.m</code>	31
1.21 Validation du code avec $T(x, y) = \sin(\pi x) \cos(\pi y)$	33
1.22 Solution du code avec $f(x, y) \equiv 0$, $T_\Gamma = 310$ sur le bord supérieur $\partial\Omega \cap \{y = 6\}$ et 260 sur le reste du bord.	35
2 Equation de la chaleur stationnaire avec conditions de Fourier	36
2.1 Formulation variationnelle vérifiée par $u = T$ et son caractère bien posé	36
2.2 Formulation variationnelle discrète et système linéaire associé	38
2.3 Construction du terme F par interpolation	39
2.4 Conditionnement pour le calcul de la solution discrète	40
2.5 Validation du code	43
2.6 Représentation des solutions obtenues dans des cas singuliers	46
3 Problème complet : Equation de la chaleur instationnaire avec des conditions aux limites mixtes	49
3.1 Modélisation avec discréétisation en temps et en espace	49
3.2 Solution obtenue dans la simulations numérique et interprétation	51

Table des figures

1.1	Le domaine $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$	10
1.2	Le domaine $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ du fichier <code>geomRectangle</code>	17
1.3	Affichage des maillages pour différentes valeurs de h	19
1.4	Affichage des solutions u_h pour différentes valeurs de h	20
1.5	Erreurs normalisées en norme L^2 et en semi-norme H^1 en échelle log-log	23
1.6	Le domaine $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$	24
1.7	Affichage des maillages pour différentes valeurs de h	25
1.8	Affichage des solutions T_h pour différentes valeurs de h	26
1.9	Affichage des solutions T_h pour différentes valeurs de h	27
1.10	Solutions T_h pour différentes valeurs de h avec conditions de Dirichlet non homogènes.	34
1.11	Solutions T_h pour différentes valeurs de h avec conditions de Dirichlet non homogènes.	35
2.1	Solutions T_h pour divers cas de configurations avec conditions de Fourier.	45
2.2	Solutions T_h pour différentes valeurs de h dans les 2 cas singuliers.	47

Listings

1.1	Construction des matrices de rigidité élémentaires	12
1.2	Boucle sur les triangles et assemblage des matrices EF	15
1.3	Pseudo-élimination des noeuds du bord	16
1.4	Routine de calcul du second membre	18
1.5	Convergence des erreurs en norme L^2 et semi-norme H^1	22
1.6	Calcul des erreurs en norme L^2 et semi-norme H^1	23
1.7	Définition de la fonction <code>T_Gamma</code>	31
1.8	Pseudo-élimination des noeuds du bord avec prise en compte de <code>T_Gamma.m</code>	32
2.1	Calcul des matrices de masse surfacique élémentaires	41
2.2	Calcul du vecteur second membre	41
2.3	Gestion des conditions via <code>Refneu</code>	42
2.4	Assemblage de la matrice globale	42

Introduction

Dans tout le TP, nous avons utilisé Octave.

Dans le cadre de ce TP, nous nous intéressons à l'évolution de la température dans une pièce supposée bidimensionnelle, contenant des bureaux, des objets, ou des personnes. Ce système est soumis à des phénomènes de conduction thermique, où la conductivité varie spatialement en fonction des matériaux présents. Une source de chaleur externe est appliquée, et les conditions aux bords incluent plusieurs types : Dirichlet (fixation de la température), Neumann (flux thermique spécifié), ou Fourier (modélisant par exemple un climatiseur).

L'objectif principal est de résoudre numériquement l'équation de la chaleur en exploitant la méthode des éléments finis. Ce problème présente des défis spécifiques que nous aborderons progressivement :

- **Prise en compte des coefficients variables** : L'utilisation de formules de quadrature permettra de traiter des conductivités spatiales non homogènes.
- **Conditions aux limites complexes** : La technique de pseudo-élimination sera utilisée pour gérer des conditions de Dirichlet homogènes et non homogènes.
- **Assemblage des matrices élémentaires** : Nous intègrerons les effets des conditions de Fourier via la construction de matrices de masse et de rigidité adaptées.
- **Évolution temporelle** : Une fois le problème stationnaire résolu, nous étendrons notre approche pour traiter le problème non stationnaire, où la température dépend explicitement du temps.

Au-delà des aspects purement théoriques, une implémentation pratique sera réalisée à l'aide d'outils numériques tels que Matlab ou Octave. Le domaine sera discréteisé en utilisant des maillages générés via GMSH, et l'ensemble des algorithmes seront validés à l'aide de solutions analytiques ou des études de convergence.

Ce travail nous permettra d'approfondir notre compréhension de la modélisation des transferts thermiques et de l'utilisation des éléments finis pour des problèmes de physique appliquée. Les résultats obtenus fourniront des insights sur la distribution de la température dans des environnements complexes, tout en mettant en évidence les phénomènes thermiques dans des scénarios réalistes.

1 Problème stationnaire avec coefficients variables et conditions de Dirichlet

Soit Ω un ouvert borné à frontière polygonale de \mathbb{R}^2 .

On s'intéresse au calcul de la température $T \equiv T(x, y)$, solution de l'équation de la chaleur en régime stationnaire, avec condition aux limites de Dirichlet :

Trouver $T \in H^1(\Omega)$ telle que

$$\begin{cases} \alpha T - \operatorname{div}(\sigma \nabla T) = S & \text{dans } \Omega, \\ T = T_\Gamma & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1)$$

Les paramètres α et σ sont tels que α est une constante strictement positive, et la conductivité $\sigma : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction régulière par morceaux, et

$$\exists \sigma_{\max}, \sigma_{\min} > 0, \quad \sigma_{\min} \leq \sigma(x, y) \leq \sigma_{\max}, \quad \text{presque partout dans } \Omega.$$

Les données sont la source de chaleur $S \in L^2(\Omega)$, et la température fixée au bord T_Γ .

Conditions de Dirichlet homogènes

On suppose dans un premier temps que T_Γ est constante.

On exprime la température T sous la forme $T(x, y) = T_\Gamma + u(x, y)$, (x, y) parcourant Ω avec u la nouvelle inconnue du problème.

1.1 Réparamétrisation de l'inconnue

On pose ici le changement de fonction $u = T - T_\Gamma$. La constante T_Γ est dans $H^1(\Omega)$ car sa dérivée est nulle et comme Ω est borné, les constantes sont de carré intégrable. $H^1(\Omega)$ étant un espace vectoriel, la différence $T - T_\Gamma$, c'est-à-dire u , est donc dans $H^1(\Omega)$. Comme T_Γ est une constante, on a $\nabla u = \nabla T$ dans Ω . Sur le bord $\partial\Omega$, on a $T - T_\Gamma = 0$, soit $u = 0$. Ainsi u est bien solution du problème suivant :

Trouver $u \in H^1(\Omega)$ telle que

$$\begin{cases} \alpha u - \operatorname{div}(\sigma \nabla u) = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.1)$$

avec pour second membre $f = S - \alpha T_\Gamma$, qui est bien dans $L^2(\Omega)$ par les mêmes arguments que pour u ($S \in L^2(\Omega)$ et αT_Γ est une constante dans Ω borné).

Ce changement de fonction permet d'avoir un problème avec condition de Dirichlet homogène.

1.2 Formule d'intégration par parties et formulation variationnelle

La formule d'intégration par parties avec la divergence s'écrit :

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{W}) v \, d\Omega = \int_{\partial\Omega} (\mathbf{W} \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega}) v|_{\partial\Omega} \, d\Gamma - \int_{\Omega} \mathbf{W} \cdot \nabla v \, d\Omega$$

où :

- \mathbf{W} est un champ de vecteurs tel que $\mathbf{W} \in L^2(\Omega)^2$ et $\operatorname{div}(\mathbf{W}) \in L^2(\Omega)$, une condition suffisante étant $\mathbf{W} \in H^1(\Omega)^2$,
- v est une fonction dans $H^1(\Omega)$,
- $\mathbf{n}|_{\partial\Omega}$ est le vecteur normal unitaire sortant de la frontière $\partial\Omega$.

Pour écrire

$$\int_{\Omega} (\operatorname{div}(\sigma \nabla u) v + \sigma \nabla u \cdot \nabla v) \, d\Omega = \int_{\partial\Omega} \sigma \nabla u \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} v|_{\partial\Omega} \, d\Gamma,$$

il suffit donc de prendre $v \in H^1(\Omega)$ et $u \in H^1(\Omega)$ tel que $\sigma \nabla u \in (L^2(\Omega))^2$ et $\operatorname{div}(\sigma \nabla u) \in L^2(\Omega)$.

Cherchons la formulation variationnelle du problème (2) :

Soit $u \in H^1(\Omega)$ solution du problème (2). Comme u est nulle sur le bord, on a en fait $u \in H_0^1(\Omega)$. Comme on prend les fonctions test dans le même espace que la solution, on prend $v \in H_0^1(\Omega)$. En multipliant par v dans la première équation et en intégrant sur Ω on obtient :

$$\int_{\Omega} [\alpha u v - \operatorname{div}(\sigma \nabla u) v] \, d\Omega = \int_{\Omega} f v \, d\Omega.$$

Comme $\operatorname{div}(\sigma \nabla u) = \alpha u - f$, on a $\operatorname{div}(\sigma \nabla u) \in L^2(\Omega)$.

De plus, comme $u \in H_0^1(\Omega) \subset H^1(\Omega)$, on a $\nabla u \in (L^2(\Omega))^2$. Etant donné que σ est bornée presque partout sur Ω et régulière par morceaux, le vecteur $\sigma \nabla u$ appartient également à $(L^2(\Omega))^2$. En effet, puisque σ est bornée, on a :

$$|\sigma(x, y) \nabla u(x, y)| \leq \sigma_{\max} |\nabla u(x, y)|, \quad \text{pour presque tout } (x, y) \in \Omega.$$

ce qui implique que $\sigma \nabla u \in (L^2(\Omega))^2$ puisque $|\nabla u| \in L^2(\Omega)$.

Ainsi, toutes les hypothèses sont réunies pour appliquer la formule d'intégration par parties avec la divergence :

$$\alpha \int_{\Omega} u v \, d\Omega + \int_{\Omega} \sigma \nabla u \cdot \nabla v \, d\Omega - \int_{\partial\Omega} (\sigma \nabla u \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega}) v|_{\partial\Omega} \, d\Gamma = \int_{\Omega} f v \, d\Omega.$$

Comme $v \in H_0^1(\Omega)$, on a $v|_{\partial\Omega} = 0$ et l'intégrale surfacique disparaît. On obtient bien la formulation variationnelle :

Trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ telle que

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \quad \alpha \int_{\Omega} u v \, d\Omega + \int_{\Omega} \sigma \nabla u \cdot \nabla v \, d\Omega = \int_{\Omega} f v \, d\Omega.$$

1.3 Caractère bien posé de la formulation variationnelle

Montrons que cette formulation variationnelle est bien posée au sens du théorème de Lax-Milgram.
Posons :

$$\begin{aligned} a : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) &\rightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) &\mapsto \alpha \int_{\Omega} uv \, d\Omega + \int_{\Omega} \sigma \nabla u \cdot \nabla v \, d\Omega \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \ell : H_0^1(\Omega) &\rightarrow \mathbb{R} \\ v &\mapsto \int_{\Omega} fv \, d\Omega \end{aligned}$$

Les formes a et ℓ sont respectivement bilinéaires et linéaires de manière immédiate par linéarité de l'intégrale et du gradient. Montrons que a est continue :

Soient $u, v \in H_0^1(\Omega)$:

$$\begin{aligned} |a(u, v)| &\leq \alpha \int_{\Omega} |uv| \, d\Omega + \sigma_{max} \int_{\Omega} |\nabla u| |\nabla v| \, d\Omega \quad (\text{Par inégalité triangulaire}) \\ &\leq \max(\alpha, \sigma_{max})(|u|, |v|)_{H^1(\Omega)} \quad (\text{Par définition du produit scalaire } H^1(\Omega)) \\ |a(u, v)| &\leq \max(\alpha, \sigma_{max}) \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} \quad (\text{Par inégalité de Cauchy-Schwarz dans } H^1(\Omega)) \end{aligned}$$

Ainsi a est bien continue.

ℓ est également continue car pour $v \in H_0^1(\Omega)$, on a :

$$\begin{aligned} \ell(v) &= (f, v)_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \quad (\text{Par inégalité de Cauchy-Schwarz dans } L^2(\Omega)) \\ \ell(v) &\leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} \quad (\text{Par domination de la norme } \|\cdot\|_{L^2(\Omega)} \text{ par la norme } \|\cdot\|_{H^1(\Omega)}) \end{aligned}$$

Montrons que a est coercive :

Soit $v \in H_0^1(\Omega)$:

$$\begin{aligned} a(v, v) &\geq \alpha \int_{\Omega} v^2 \, d\Omega + \sigma_{min} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 \, d\Omega \quad (\text{Par caractère minoré de } \sigma) \\ a(v, v) &\geq \min(\alpha, \sigma_{min}) \|v\|_{H^1(\Omega)}^2 \quad (\text{Par définition de la norme } \|\cdot\|_{H^1(\Omega)}) \end{aligned}$$

Donc a est coercive, car α et σ_{min} sont des constantes strictement positives.

Enfin, l'espace $H_0^1(\Omega)$ est bien un espace de Hilbert, en tant que sous-espace fermé de $H^1(\Omega)$, car défini comme l'adhérence de l'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$. Ainsi, toutes les hypothèses du théorème de Lax-Milgram sont réunies.

La formulation variationnelle admet donc une unique solution $u \in H_0^1(\Omega)$ qui dépend continûment des données. En effet, on a par coercivité de a et continuité de ℓ :

$$\min(\alpha, \sigma_{min}) \|u\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq a(u, u) = l(u) \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{H^1(\Omega)}$$

D'où :

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{\|f\|_{L^2(\Omega)}}{\min(\alpha, \sigma_{min})}$$

La formulation variationnelle est donc bien posée.

Discrétisation

Soit \mathcal{T}_h une triangulation du domaine Ω , et V_h l'approximation de $H^1(\Omega)$ par des éléments finis P^1 associés à la triangulation \mathcal{T}_h . On note $(T_\ell)_{\ell=1,L}$ les triangles de \mathcal{T}_h , $(M_I)_{I=1,N}$ les sommets des triangles et $(w_I)_{I=1,N}$ la base de V_h définie par $w_I(M_J) = \delta_{IJ}$, $1 \leq I, J \leq N$. Pour définir une approximation interne de $H_0^1(\Omega)$, on procède de la façon suivante : si on suppose que les noeuds de la frontière $\partial\Omega$ sont numérotés de $N_0 + 1$ à N (et que les noeuds à l'intérieur sont numérotés de 1 à N_0).

On introduit :

$$V_h^0 = \text{Vect}(w_1, \dots, w_{N_0}).$$

1.4 Formulation variationnelle discrète

La formulation variationnelle discrète vérifiée par u_h s'écrit :

Trouver $u \in V_h^0$ telle que :

$$\forall v_h \in V_h^0, \quad \alpha \int_{\Omega} u_h v_h \, d\Omega + \int_{\Omega} \sigma \nabla u_h \cdot \nabla v_h \, d\Omega = \int_{\Omega} f v_h \, d\Omega.$$

Il s'agit bien d'une formulation variationnelle bien posée au sens de Hadamard car :

- V_h^0 muni de la norme $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert car c'est un sous-espace vectoriel fermé (car de dimension finie) de $H^1(\Omega)$;
- Toutes les propriétés du théorème de Lax-Milgram sont trivialement vérifiées car $V_h^0 \subset H_0^1(\Omega)$.

La température approchée s'écrit alors $T_h = T_\Gamma + u_h$.

1.5 Ecriture sous forme de système linéaire

La formulation variationnelle discrète étant linéaire en $v_h \in V_h^0$, et l'espace V_h^0 étant engendré par la famille des $(w_I)_{I \in \{1, \dots, N_0\}}$, on a que la formulation variationnelle discrète est équivalente à :

$$\forall I \in \{1, \dots, N_0\}, \quad \alpha \int_{\Omega} u_h w_I \, d\Omega + \int_{\Omega} \sigma \nabla u_h \cdot \nabla w_I \, d\Omega = \int_{\Omega} f w_I \, d\Omega$$

On écrit ensuite $u_h = \sum_{J=1}^{N_0} u_h(M_J) w_J$ et on injecte dans la dernière formule :

$$\forall I \in \{1, \dots, N_0\}, \quad \alpha \sum_{J=1}^{N_0} u_h(M_J) \int_{\Omega} w_J w_I \, d\Omega + \sum_{J=1}^{N_0} u_h(M_J) \int_{\Omega} \sigma \nabla w_J \cdot \nabla w_I \, d\Omega = \int_{\Omega} f w_I \, d\Omega$$

On reconnaît alors dans le terme de gauche le terme général de la multiplication d'une matrice par un vecteur. On a donc :

$$\mathbb{A}^0 \vec{U}^0 = (\alpha \mathbb{M}^0 + \mathbb{K}^0) \vec{U}^0 = \vec{L}^0$$

avec \mathbb{M}^0 et \mathbb{K}^0 les matrices $N_0 \times N_0$ de termes généraux respectifs :

$$\mathbb{M}_{IJ}^0 = \int_{\Omega} w_I w_J \, d\Omega, \quad \mathbb{K}_{IJ}^0 = \int_{\Omega} \sigma \nabla w_I \cdot \nabla w_J \, d\Omega$$

Les vecteurs \vec{U}^0 et \vec{L}^0 sont les vecteurs donnés par :

$$\vec{U}^0 = (u_h(M_I))_{I \in \{1, \dots, N_0\}}, \quad \vec{L}^0 = \left(\int_{\Omega} f w_I \, d\Omega \right)_{I \in \{1, \dots, N_0\}}$$

Ces matrices sont symétriques de manière évidente de par leur expression et on a de plus que $\mathbb{M}^0 + \mathbb{K}^0$ et \mathbb{M}^0 sont symétriques définies positives, et \mathbb{K}^0 est positive.

Elles sont également creuses, c'est-à-dire qu'elles possèdent un grand nombre de coefficients nuls. En effet, le support des fonctions chapeau w_I est égal à l'ensemble des triangles intérieurs qui ont I pour sommet, ainsi les produits $w_I w_J$ et $\nabla w_I \cdot \nabla w_J$ seront nuls pour tous les couples (I, J) , sauf ceux pour lesquels I et J sont sommets d'un même triangle intérieur.

1.6 Technique de pseudo-élimination

On définit $\mathbb{A} = \alpha \mathbb{M} + \mathbb{K} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ avec \mathbb{M} et \mathbb{K} les matrices $N \times N$ de termes généraux respectifs :

$$\mathbb{M}_{IJ} = \int_{\Omega} w_I w_J \, d\Omega, \quad \mathbb{K}_{IJ} = \int_{\Omega} \sigma \nabla w_I \cdot \nabla w_J \, d\Omega$$

On cherche $\tilde{\mathbb{A}} \in \mathbb{R}^{N \times N}$, $\vec{U} \in \mathbb{R}^N$ et $\tilde{\vec{L}} \in \mathbb{R}^N$ tels que résoudre $\tilde{\mathbb{A}} \vec{U} = \tilde{\vec{L}}$ soit équivalent à résoudre $\mathbb{A}^0 \vec{U}^0 = \vec{L}^0$.

On pose alors :

$$\begin{aligned} \vec{U} &= \begin{pmatrix} \vec{U}^0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{avec } N - N_0 \text{ zéros concaténés au vecteur } \vec{U}^0, \\ \tilde{\mathbb{A}} &= \begin{pmatrix} \mathbb{A}^0 & 0 \\ 0 & \mathbb{I}_{N-N_0} \end{pmatrix}, \quad \tilde{\vec{L}} = \begin{pmatrix} \vec{L}^0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Géométrie et maillages

On veut résoudre le problème dans un ouvert Ω composé de deux zones Ω_1 et Ω_2 .

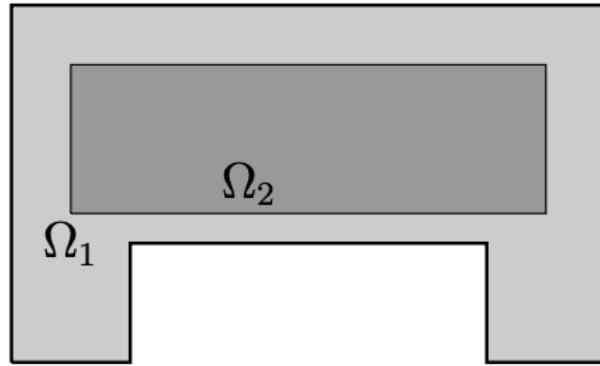


FIGURE 1.1 – Le domaine $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$

On appelle $\sigma_1 = \sigma|_{\Omega_1}$ et $\sigma_2 = \sigma|_{\Omega_2}$ les restrictions de σ à chacun des sous-domaines. C'est lors du calcul des matrices élémentaires qu'il faudra distinguer si un triangle est dans le domaine Ω_1 (dans ce cas, on prendra $\sigma = \sigma_1$) ou dans le domaine Ω_2 (dans ce cas, on prendra $\sigma = \sigma_2$). Pour générer le maillage avec gmsh, on utilisera le fichier `domaine.geo`. Pour les validations, on utilisera le fichier `geomRectangle.geo` qui correspond au cas où $\Omega_1 = (0, 2)^2$ et $\Omega_2 = (0.2, 1.8) \times (0.2, 1.2)$

1.7 Calcul des matrices élémentaires par passage à l'élément fini de référence

Nous considérons la transformation linéaire $F_\ell : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ qui permet de passer du triangle de référence \widehat{T} au triangle T_ℓ :

$$F_\ell(\widehat{M}) = B_\ell \widehat{M} + S_\ell \quad \text{avec} \quad B_\ell \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \quad S_\ell \in \mathbb{R}^2$$

où $\widehat{M} \in \mathbb{R}^2$ est un point du triangle de référence. Nous devons satisfaire les conditions :

$$\forall i, \quad F_\ell(\widehat{M}_i) = M_i,$$

avec $\widehat{M}_1 = (0, 0)$, $\widehat{M}_2 = (1, 0)$, $\widehat{M}_3 = (0, 1)$ et les points $M_1 = (x_1, y_1)$, $M_2 = (x_2, y_2)$, $M_3 = (x_3, y_3)$ qui définissent le triangle T_ℓ . Nous écrivons B_ℓ sous la forme :

$$B_\ell = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

En utilisant les conditions de correspondance :

$$F_\ell(\widehat{M}_1) = M_1 \implies S_\ell = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

puis de même :

$$F_\ell(\widehat{M}_2) = M_2 \implies \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

ce qui donne :

$$a = x_2 - x_1 \quad \text{et} \quad c = y_2 - y_1.$$

puis :

$$F_\ell(\widehat{M}_3) = M_3 \implies \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

ce qui donne :

$$b = x_3 - x_1 \quad \text{et} \quad d = y_3 - y_1.$$

Ainsi, nous obtenons :

$$B_\ell = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad S_\ell = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}.$$

1.8 Expression des \widehat{w}_i et calcul de la matrice de masse élémentaire

On connaît l'expression des fonctions de base sur le triangle de référence \widehat{w}_i , pour $i \in \{1, 2, 3\}$:

$$\widehat{w}_1(\widehat{x}, \widehat{y}) = 1 - \widehat{x} - \widehat{y}, \quad \widehat{w}_2(\widehat{x}, \widehat{y}) = \widehat{x}, \quad \widehat{w}_3(\widehat{x}, \widehat{y}) = \widehat{y}$$

On peut donc calculer les coefficients de la matrice de masse élémentaire : pour un triangle T_ℓ de sommets $M_1 = (x_1, y_1), M_2 = (x_2, y_2), M_3 = (x_3, y_3)$, on a pour $i, j \in \{1, 2, 3\}$:

$$\begin{aligned} \int_{T_\ell} w_i(M) w_j(M) d\Omega &= \int_{\widehat{T}} \widehat{w}_i(\widehat{M}) \widehat{w}_j(\widehat{M}) |\det B_\ell| d\widehat{\Omega} \\ &= |(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)| \times \int_{\widehat{T}} \widehat{w}_i(\widehat{M}) \widehat{w}_j(\widehat{M}) d\widehat{\Omega} \end{aligned}$$

Il suffit de remplacer les \widehat{w}_i par leurs expressions selon la valeur de i pour obtenir la matrice de masse élémentaire \mathbb{M}_ℓ^{elem} associée au triangle T_ℓ :

$$\begin{aligned} \mathbb{M}_\ell^{elem} &= |\det(B_\ell)| \times \begin{pmatrix} \int_{\widehat{T}} \widehat{w}_1 \widehat{w}_1 d\widehat{\Omega} & \int_{\widehat{T}} \widehat{w}_1 \widehat{w}_2 d\widehat{\Omega} & \int_{\widehat{T}} \widehat{w}_1 \widehat{w}_3 d\widehat{\Omega} \\ \int_{\widehat{T}} \widehat{w}_2 \widehat{w}_1 d\widehat{\Omega} & \int_{\widehat{T}} \widehat{w}_2 \widehat{w}_2 d\widehat{\Omega} & \int_{\widehat{T}} \widehat{w}_2 \widehat{w}_3 d\widehat{\Omega} \\ \int_{\widehat{T}} \widehat{w}_3 \widehat{w}_1 d\widehat{\Omega} & \int_{\widehat{T}} \widehat{w}_3 \widehat{w}_2 d\widehat{\Omega} & \int_{\widehat{T}} \widehat{w}_3 \widehat{w}_3 d\widehat{\Omega} \end{pmatrix} \\ \mathbb{M}_\ell^{elem} &= |(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)| \times \frac{1}{24} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

1.9 Calcul de la matrice de rigidité élémentaire par quadrature de Gauss-Legendre

Les coefficients étant variables, il n'est pas toujours possible de calculer exactement les intégrales associées à la matrice de rigidité. On utilise ainsi une approximation via des formules de quadrature.

L'intégrale de rigidité pour un triangle T_ℓ s'écrit sous la forme :

$$\int_{T_\ell} \sigma(M) \nabla w_I(M) \cdot \nabla w_J(M) d\Omega \approx \sum_{q=1}^{N_q} \hat{\omega}_q \sigma(\hat{S}^q) \left(\nabla w_I(\hat{S}^q) \cdot \nabla w_J(\hat{S}^q) \right),$$

où \hat{S}^q sont les points de quadrature dans le triangle T_ℓ et $\hat{\omega}_q$ sont leurs poids positifs associés.

Dans notre cas, nous utilisons une quadrature de Gauss à 3 points d'ordre 2 définie sur le triangle de référence \hat{T} :

$$\hat{S}^q = \begin{cases} (s_0, s_0) & \text{si } q = 1, \\ (s_1, s_0) & \text{si } q = 2, \quad \text{et} \quad \hat{\omega}_q = \omega_0 = \frac{1}{6}, \\ (s_0, s_1) & \text{si } q = 3, \end{cases}$$

avec :

$$s_0 = \frac{1}{6}, \quad s_1 = \frac{2}{3}.$$

Ainsi, pour la quadrature de Gauss, la matrice élémentaire de rigidité pour un triangle T_ℓ est donnée par :

$$K_{I,J} = \int_{T_\ell} \sigma(M) \nabla w_I(M) \cdot \nabla w_J(M) \, d\Omega \approx |\det B_\ell| \omega_0 \left(G_{I,J}(s_0, s_0) + G_{I,J}(s_1, s_0) + G_{I,J}(s_0, s_1) \right)$$

où B_ℓ est la matrice de transformation entre le triangle \hat{T} et le triangle T_ℓ , et \hat{w}_i sont les fonctions de forme définies sur le triangle de référence, avec

$$G_{I,J}(\hat{M}) = \sigma(F_\ell(\hat{M})) \left[(B_\ell^\top)^{-1} \nabla \hat{w}_I(\hat{M}) \right] \cdot \left[(B_\ell^\top)^{-1} \nabla \hat{w}_J(\hat{M}) \right].$$

De même :

$$\hat{\nabla} \hat{\omega}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \hat{\nabla} \hat{\omega}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\nabla} \hat{\omega}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Enfin, le calcul de la matrice de rigidité élémentaire est réalisé en distinguant les zones Ω_1 et Ω_2 à l'aide du tableau `Reftri`, qui indique si un triangle appartient à Ω_1 (avec $\sigma = \sigma_1$) ou Ω_2 (avec $\sigma = \sigma_2$). On utilise les fichiers `sigma_1.m` et `sigma_2.m` pour implémenter ces valeurs.

```

1 function [Kel] = matK_elem(S1, S2, S3, ref)
2
3 % préliminaires, pour faciliter la lecture:
4 x1 = S1(1); y1 = S1(2);
5 x2 = S2(1); y2 = S2(2);
6 x3 = S3(1); y3 = S3(2);
7
8 % D est, au signe près, deux fois l'aire du triangle
9 D = ((x2-x1)*(y3-y1) - (y2-y1)*(x3-x1));
10 if (abs(D) <= eps)
11     error('l aire d un triangle est nulle!!!!');
12 end;
13
14 %definition des matrice Bl et Sl
15 Bl= zeros(2,2); Sl=zeros(2,1) ;
16 Bl(1,1)= (x2-x1) ; Bl (1,2) = x3-x1; Bl (2,1) = y2-y1 ; Bl (2,2) = y3-y1;
17 Sl(1,1)=x1 ; Sl(2,1) =y1 ;
18
19 %definition de wo, points de quadrature et gradients des w_i,
20 %avec grad w_i en colonne i ;
21 wo=1/6 ; so=1/6 ; s1= 2/3 ;
22 grad_w=zeros(2,3) ;
23 grad_w1(1,1)= -1; grad_w1(2,1) = -1 ;
24 grad_w2(1,2) = 1; grad_w2(2,2) = 0 ;
25 grad_w3(1,3) = 0; grad_w3(2,3) = 1 ;
26
```

```

27 %definition de la fonction G_i,j
28 function G = G(i,j,x,y)
29   M=zeros(2,1) ; M(1,1) =x ; M(2,1)=y ;
30   F1= B1*M + S1 ;
31   if ref==1
32     sigma_Fl=sigma_1 (F1(1,1),F1(2,1));
33   else
34     sigma_Fl=sigma_2 (F1(1,1),F1(2,1));
35   endif
36   G = sigma_Fl*dot((inv(B1')*grad_w(:,i)),(inv(B1')*grad_w(:,j)))
37
38
39 % calcul de la matrice de raideur
40 % -----
41 Kel = zeros(3,3);
42 for i=1:3
43   for j=1:3
44     Kel(i,j) = abs(D)*wo*( G(i,j,s0,s0) + G(i,j,s1,s0) + G(i,j,s0,s1) )
45   end; % j
46 end; % i

```

Listing 1.1 – Construction des matrices de rigidité élémentaires.

1.10 Validation du cas $\sigma = 1$ et comparaison au calcul de la matrice de rigidité (TP1)

Dans le cas où $\sigma = 1$, les coefficients de la matrice de raideur élémentaire sont donnés par :

$$K_{I,J} \approx |\det B_\ell| \omega_0 \left(G_{I,J}(s_0, s_0) + G_{I,J}(s_1, s_0) + G_{I,J}(s_0, s_1) \right)$$

avec :

$$G_{I,J}(\hat{M}) = \left[(B_\ell^\top)^{-1} \nabla \hat{w}_I(\hat{M}) \right] \cdot \left[(B_\ell^\top)^{-1} \nabla \hat{w}_J(\hat{M}) \right].$$

Pour $G_{I,J}(x, y)$, les gradients ∇w_i sont donnés explicitement par :

$$\nabla w_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \nabla w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \nabla w_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice B_ℓ est définie par :

$$B_\ell = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{pmatrix},$$

et son inverse transposée est :

$$(B_\ell^\top)^{-1} = \frac{1}{D} \begin{pmatrix} y_3 - y_1 & -(y_2 - y_1) \\ -(x_3 - x_1) & x_2 - x_1 \end{pmatrix}.$$

En substituant les gradients dans l'expression de $G_{I,J}(x, y)$, on obtient en calculant les termes pour chaque i, j :

$$G(1, 1) = \frac{1}{D^2} [(y_2 - y_3)^2 + (x_3 - x_2)^2],$$

$$G(1, 2) = \frac{1}{D^2} [(y_2 - y_3)(y_3 - y_1) + (x_3 - x_2)(x_1 - x_3)],$$

$$G(1, 3) = \frac{1}{D^2} [(y_2 - y_3)(y_1 - y_2) + (x_3 - x_2)(x_2 - x_1)],$$

$$G(2, 2) = \frac{1}{D^2} [(y_3 - y_1)^2 + (x_1 - x_3)^2],$$

$$G(2, 3) = \frac{1}{D^2} [(y_3 - y_1)(y_1 - y_2) + (x_1 - x_3)(x_2 - x_1)],$$

$$G(3, 3) = \frac{1}{D^2} [(y_1 - y_2)^2 + (x_2 - x_1)^2].$$

En remplaçant $G_{I,J}(x, y)$ dans l'expression de $K_{i,j}$, on obtient finalement :

$$K_{1,1} = \frac{1}{2|D|} [(y_2 - y_3)^2 + (x_3 - x_2)^2].$$

$$K_{2,2} = \frac{1}{2|D|} [(y_3 - y_1)^2 + (x_1 - x_3)^2].$$

$$K_{3,3} = \frac{1}{2|D|} [(y_1 - y_2)^2 + (x_2 - x_1)^2].$$

$$K_{1,2} = \frac{1}{2|D|} [(y_2 - y_3)(y_3 - y_1) + (x_3 - x_2)(x_1 - x_3)].$$

$$K_{1,3} = \frac{1}{2|D|} [(y_2 - y_3)(y_1 - y_2) + (x_3 - x_2)(x_2 - x_1)].$$

$$K_{2,3} = \frac{1}{2|D|} [(y_3 - y_1)(y_1 - y_2) + (x_1 - x_3)(x_2 - x_1)].$$

Commentaires sur les expressions finales des $K_{i,j}$

Le calcul précédent dans le cas $\sigma = 1$ fournit des résultats identiques à ceux obtenus lors du TP1, ce qui est cohérent étant donné le problème traité.

En effet, la matrice de rigidité est identique dans le cas $\sigma = 1$ et celle de masse également à un coefficient multiplicatif α près.

Ainsi, le cas $\sigma = 1$ permet de valider la routine effectuée pour le calcul des matrices de rigidité élémentaires.

1.11 Assemblage de la matrice A avant la pseudo-élimination

Assemblage de la matrice A

L'assemblage de la matrice A étant identique à celui du TP précédent, nous jugeons opportun de juste le rappeler brièvement.

```

1 % Declarations
2 % -----
3 KK = sparse(Nbpt, Nbpt); % matrice de rigidité
4 MM = sparse(Nbpt, Nbpt); % matrice de rigidité
5 LL = zeros(Nbpt, 1); % vecteur second membre
6
7 % Boucle sur les triangles
8 % -----
9 for l = 1:Nbtri
10
11    % Calcul des matrices élémentaires du triangle l
12    [Kel] = matK_elem(Coorneu(Numtri(l,1),:), Coorneu(Numtri(l,2),:), ...
13                  Coorneu(Numtri(l,3),:), Reftri(l));
14    % LA ROUTINE matK_elem.m DOIT TRE MODIFIÉE
15
16    [Mel] = matM_elem(Coorneu(Numtri(l,1),:), Coorneu(Numtri(l,2),:), ...
17                  Coorneu(Numtri(l,3),:));
18
19    % Assemblage de la matrice globale
20    for i = 1:3
21        I = Numtri(l, i);
22        for j = 1:3
23            J = Numtri(l, j);
24            MM(I, J) = MM(I, J) + Mel(i, j);
25            KK(I, J) = KK(I, J) + Kel(i, j);
26        end
27    end % for i
28
29 end % for l
30
31 % Matrice EF
32 % -----
33 AA = alpha * MM + KK;

```

Listing 1.2 – Boucle sur les triangles et assemblage des matrices EF

Calcul du second membre

Pour une donnée générale $f \in C^0(\bar{\Omega})$, on a $L = (\int_{\Omega} f w_I d\Omega)_{I \in \{1, \dots, N\}}$.

Si l'on fait l'approximation $f \approx \pi_h f = \sum_{J=1}^N f(S_J) w_J$, alors par les mêmes calculs qu'au TP1 on peut réécrire L :

$$L = \left(\int_{\Omega} f w_I d\Omega \right)_{I \in \{1, \dots, N\}} = \left(\sum_{J=1}^N f(S_J) \int_{\Omega} w_I w_J d\Omega \right)_{I \in \{1, \dots, N\}}$$

On reconnaît en fait le produit matriciel entre la matrice M et le vecteur F de coordonnées $F_I = f(S_I)$, ce qui donne une expression très simple à calculer pour L :

$$\forall f \in C^0(\bar{\Omega}), \quad L \approx MF.$$

avec M la matrice de masse et F de coordonnées $F_I = f(S_I)$.

Cette expression est beaucoup plus simple à calculer que l'intégrale initiale pour une fonction $f \in C^0(\overline{\Omega})$, qui est un problème difficile en général.

1.12 Technique de pseudo-élimination des nœuds du bord

La routine mise en place pour la pseudo élimination des nœuds du bord se fait comme suit :

```

1 function [tilde_AA, tilde_LL] = elimine(AA, LL, Refneu)
2 %%%%%%
3 % elimine :
4 % Realise la pseudo-elimination des noeuds du bord
5 %
6 % SYNOPSIS [tilde_AA, tilde_LL] = elimine(AA, LL, Refneu)
7 %
8 % INPUT
9 % * AA : Matrice globale assemblee avant elimination.
10 % * LL : Vecteur second membre.
11 % * Refneu : Vecteur de reference des sommets (1 pour les noeuds du bord).
12 %
13 % OUTPUT
14 % - tilde_AA : Matrice globale apres elimination des noeuds du bord.
15 % - tilde_LL : Vecteur modifie apres elimination des noeuds du bord.
16 %%%%%%
17
18 for i = 1:length(LL)
19     if Refneu(i) == 1
20         AA(i, :) = 0;    % Annule la ligne i
21         AA(:, i) = 0;    % Annule la colonne i
22         LL(i) = 0;       % Met a zero l'element i de LL
23     end
24 end
25
26 tilde_AA = AA;
27 tilde_LL = LL;
28
29 end

```

Listing 1.3 – Pseudo-élimination des nœuds du bord

Validation du code

On veut vérifier que le code calcule une solution approchée u_h correcte. Pour cela, on résout le problème (2) avec les paramètres :

$$\Omega_1 = (0, 2)^2, \quad \Omega_2 = (0.2, 1.8) \times (0.2, 1.2), \quad \alpha = 1, \quad \sigma_1 = \sigma_2 = 1, \quad T_\Gamma = 0.$$

et une solution u égale à $u(x, y) = 2 \sin(2\pi x) \sin(3\pi y)$, pour $(x, y) \in \bar{\Omega}$ (le maillage sera généré à l'aide de `geomRectangle.geo`).

Le choix arbitraire $T_\Gamma = 0$ s'explique par le fait qu'à T_Γ constant, la nature des solutions finales $T = 0$ obtenues ne diffère que de cette constante et est donc superfétatoire pour notre étude dans ce contexte.

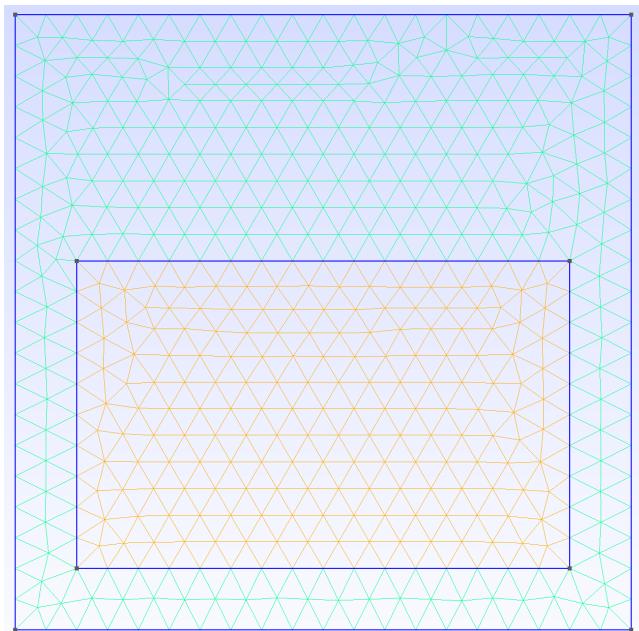


FIGURE 1.2 – Le domaine $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ du fichier `geomRectangle`.

Significations des structures de données utilisées :

- **Nbpt** : Nombre de sommets (entier)
- **Nbtri** : Nombre de triangles (entier)
- **Coorneu** : Coordonnées (x, y) des sommets (matrice réelle $Nbpt \times 2$)
- **Refneu** : Référence des sommets (vecteur entier $Nbpt \times 1$)
- **Numtri** : Liste de triangles (3 numéros de sommets - matrice entière $Nbtri \times 3$)
- **Reftri** : Référence des triangles (matrice entière $Nbtri \times 1$)
- **Nbaretes** : Nombre d'arêtes sur la frontière
- **Numaretes** : Numéro des 2 nœuds de chaque arête de la frontière
- **Refaretes** : Référence de chaque arête de la frontière

1.13 Calcul de $f(x, y)$

Nous avons l'équation :

$$f(x, y) = \alpha u(x, y) - \operatorname{div}(\sigma \nabla u(x, y)),$$

où $u(x, y) = 2 \sin(2\pi x) \sin(3\pi y)$, $\alpha = 1$, et $\sigma = 1$.

Le gradient de $u(x, y)$ est donnée par :

$$\nabla u(x, y) = \begin{bmatrix} 4\pi \cos(2\pi x) \sin(3\pi y) \\ 6\pi \sin(2\pi x) \cos(3\pi y) \end{bmatrix}.$$

Puisque $\sigma = 1$, nous avons simplement :

$$\operatorname{div}(\sigma \nabla u) = \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Ainsi :

$$\operatorname{div}(\sigma \nabla u) = -8\pi^2 \sin(2\pi x) \sin(3\pi y) - 18\pi^2 \sin(2\pi x) \sin(3\pi y),$$

$$\operatorname{div}(\sigma \nabla u) = -26\pi^2 \sin(2\pi x) \sin(3\pi y).$$

En substituant $u(x, y)$ et $\operatorname{div}(\nabla u)$ dans l'équation :

$$f(x, y) = \alpha u(x, y) - \operatorname{div}(\nabla u).$$

Avec $\alpha = 1$, cela donne :

$$f(x, y) = 2 \sin(2\pi x) \sin(3\pi y) - (-26\pi^2 \sin(2\pi x) \sin(3\pi y)),$$

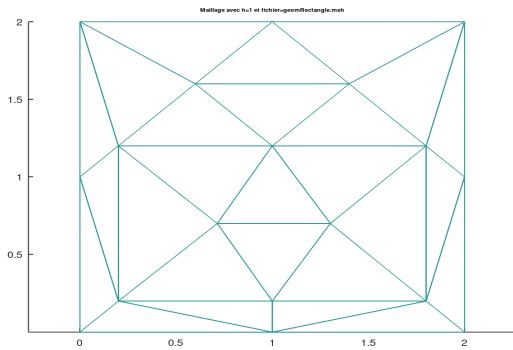
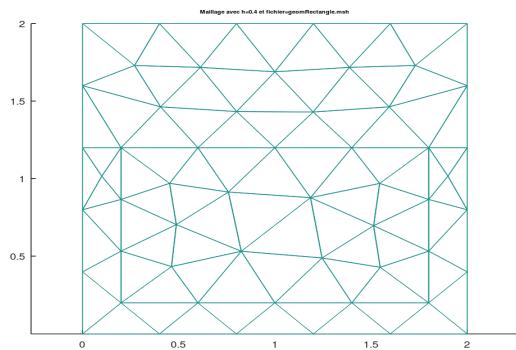
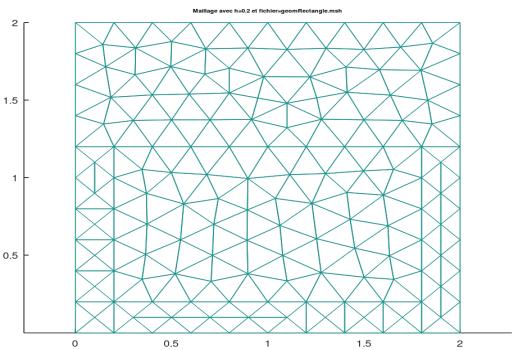
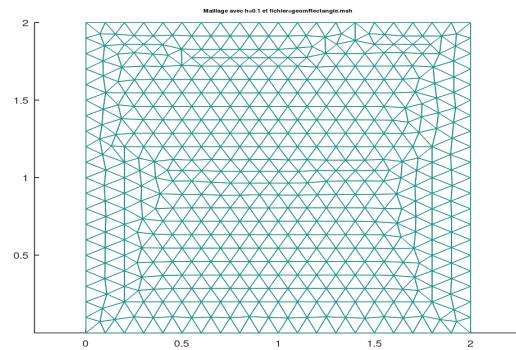
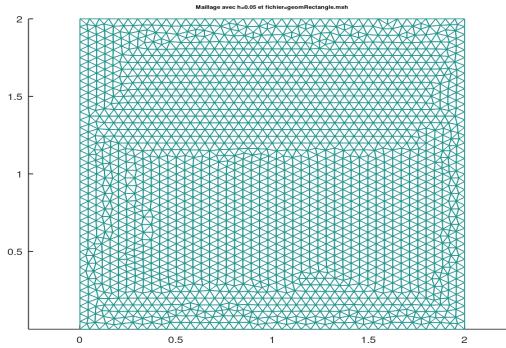
$$f(x, y) = (2 + 26\pi^2) \sin(2\pi x) \sin(3\pi y).$$

On modifie la routine `f.m` en conséquence :

```
1 function val = f(x,y)
2 val = (2 + 26 * pi^2) * sin(2 * pi * x) * sin(3 * pi * y);
```

Listing 1.4 – Routine de calcul du second membre

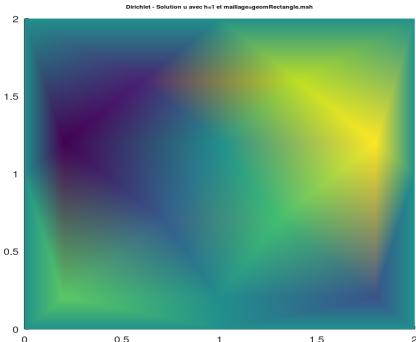
Maillages

Maillage pour $h = 1$ Maillage pour $h = 0.4$ Maillage pour $h = 0.2$ Maillage pour $h = 0.1$ Maillage pour $h = 0.05$ FIGURE 1.3 – Affichage des maillages pour différentes valeurs de h .

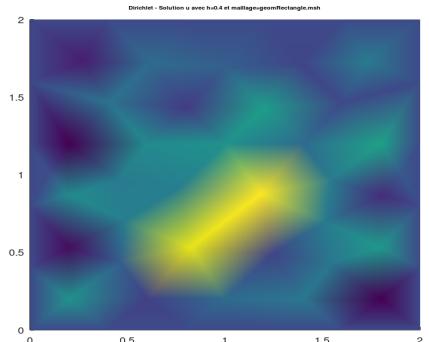
Comme attendu, le maillage est de plus en plus fin à mesure que h est proche de 0. Ce résultat confirme l'hypothèse stipulant la convergence de V_h vers V lorsque $h \rightarrow 0$.

On observe bien : $\lim_{h \rightarrow 0} \dim(V_h) = +\infty$.

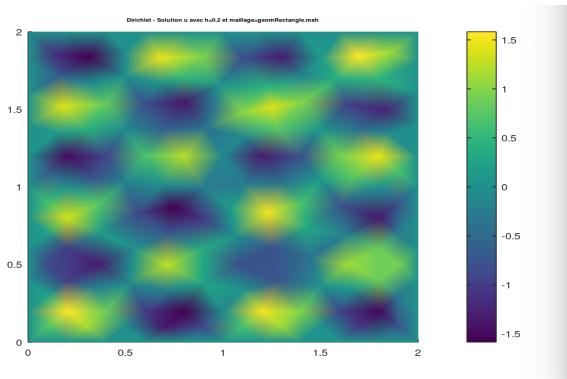
Solutions u_h trouvées pour différentes valeurs de h



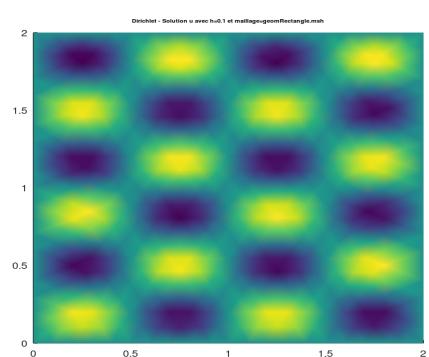
Solution u_h avec maillage de pas $h = 1$



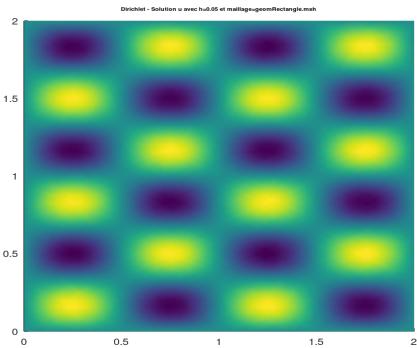
Solution u_h avec maillage de pas $h = 0.4$



Solution u_h avec maillage de pas $h = 0.2$



Solution u_h avec maillage de pas $h = 0.1$



Solution u_h avec maillage de pas $h = 0.05$

FIGURE 1.4 – Affichage des solutions u_h pour différentes valeurs de h .

La convergence de la solution approchée u_h vers la solution exacte u est directement influencée par la valeur de h , le pas du maillage. À mesure que h diminue, le maillage devient plus fin, permettant une meilleure représentation des variations locales de la solution.

Cette amélioration progressive illustre la propriété de convergence des méthodes par éléments finis : la solution u_h se rapproche de u en termes de précision, tant en norme L^2 qu'en semi-norme H^1 , à mesure que h tend vers zéro.

1.14 Estimation de la norme L^2 de l'erreur

On calcule la norme L^2 de l'erreur :

$$\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} (u - u_h)^2 d\Omega \right)^{1/2}$$

On écrit ensuite l'approximation $u \approx \pi_h u = \sum_{J=1}^N u(S_J)w_J$ et on utilise la décomposition $u_h = \sum_{J=1}^N u_h(S_J)w_J$:

$$\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} \left(\sum_{J=1}^N (u(S_J) - u_h(S_J))w_J \right)^2 d\Omega \right)^{1/2}$$

On utilise ensuite la formule :

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i \right)^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j$$

Pour obtenir :

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} &= \left(\sum_{I=1}^n \sum_{J=1}^n (u_h(S_I) - u(S_I))(u_h(S_J) - u(S_J)) \int_{\Omega} w_I w_J d\Omega \right)^{1/2} \\ &= \left(\sum_{I=1}^n \sum_{J=1}^n (u_h(S_I) - u(S_I))(u_h(S_J) - u(S_J)) \mathbb{M}_{IJ} \right)^{1/2} \end{aligned}$$

On reconnaît un produit matriciel du type :

$$\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)}^2 = \vec{B}^T \mathbb{M} \vec{B}$$

Avec \vec{B} le vecteur de coordonnées $B_I = u_h(S_I) - u(S_I)$.

1.15 Estimation de la sémi-norme H^1 de l'erreur

On fait des calculs similaires à la question précédente :

$$\|\nabla u - \nabla u_h\|_{L^2(\Omega)^2} = \left(\int_{\Omega} (\nabla u - \nabla u_h)^2 d\Omega \right)^{1/2}$$

On écrit ensuite l'approximation $\nabla u \approx \nabla_h u = \sum_{J=1}^N u_h(S_J) \nabla w_J$, et on utilise la décomposition $\nabla u_h = \sum_{J=1}^N u_h(S_J) \nabla w_J$:

$$\|\nabla u - \nabla u_h\|_{L^2(\Omega)^2} = \left(\int_{\Omega} \left(\sum_{J=1}^N (u(S_J) - u_h(S_J)) \nabla w_J \right)^2 d\Omega \right)^{1/2}$$

On utilise encore la formule :

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i \right)^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n a_i a_j$$

Pour obtenir :

$$\begin{aligned}\|\nabla u - \nabla u_h\|_{L^2(\Omega)^2} &= \left(\sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^n (u_h(S_l) - u(S_l))(u_h(S_j) - u(S_j)) \int_{\Omega} \nabla w_J \nabla w_l \, d\Omega \right)^{1/2} \\ &= \left(\sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^n (u_h(S_l) - u(S_l))(u_h(S_j) - u(S_j)) \mathbb{K}_{l,j} \frac{1}{\sigma} \right)^{1/2}\end{aligned}$$

On reconnaît un produit matriciel similaire à la question précédente :

$$\|\nabla u - \nabla u_h\|_{L^2(\Omega)^2}^2 = \frac{1}{\sigma} \vec{B}^T \mathbb{K} \vec{B}$$

Avec \vec{B} le même vecteur qu'en question 1.14 et ici $\sigma = 1$ (donc licite de le sortir de l'intégrale)

Convergence des erreurs

On récupère ces erreurs pour différentes valeurs de h , et on les normalise :

```

1 % Valeurs de h
2 h = [1, 0.4, 0.2, 0.1, 0.05, 0.001];
3
4 % Erreurs en norme L2 et en semi-norme H1 correspondantes
5 L2_errors = [14.599, 1.0262, 0.1021, 0.026076, 6.4822e-3, ];
6 H1_errors = [8.6532, 1.5495, 0.6088, 0.1784, 0.056985, ];
7
8 % On calcule les erreurs relatives
9 L2_rel_errors = L2_errors / norm(L2_errors);
10 H1_rel_errors = H1_errors / norm(H1_errors);
11
12 % On trace ensuite les graphes d'erreur en chelle log-log :
13 figure;
14 loglog(1./h, L2_rel_errors, 'o-', 'LineWidth', 1.5);
15 hold on;
16
17 p_L2 = polyfit(log(1./h), log(L2_rel_errors), 1);
18 loglog(1./h, exp(polyval(p_L2, log(1./h))), 'b--', 'LineWidth', 1.5);
19
20 loglog(1./h, H1_rel_errors, 's-', 'LineWidth', 1.5);
21 p_H1 = polyfit(log(1./h), log(H1_rel_errors), 1);
22 loglog(1./h, exp(polyval(p_H1, log(1./h))), 'r--', 'LineWidth', 1.5);
23
24 legend('Erreur L^2', sprintf('L2 polyfit, pente = %.2f', p_L2(1)), 'Erreur H^1', sprintf('H1 polyfit, pente = %.2f', p_H1(1)));
25 xlabel('log(1/h)');
26 ylabel('log(erreur relative)');
27 title('Convergence des erreurs L^2 et H^1');
28 grid on;
29 hold off;
```

Listing 1.5 – Convergence des erreurs en norme L^2 et semi-norme H^1

Calcul des erreurs en MATLAB

```

1 if strcmp(validation, 'oui')
2     UU_exact = 2*sin(2*pi*Coorneu(:,1)) .* 2*sin(3*pi*Coorneu(:,2));
3     % Calcul de l'erreur L2
4     BB = UU_exact - UU;
5     err_L2 = sqrt(transpose(BB)*MM*BB);
6     % Calcul de l'erreur H1
7     err_H1 = sqrt(transpose(BB)*KK*BB);
8 end

```

Listing 1.6 – Calcul des erreurs en norme L^2 et semi-norme H^1

Analyse du graphe d'erreurs normalisées en norme L^2 et en semi-norme H^1

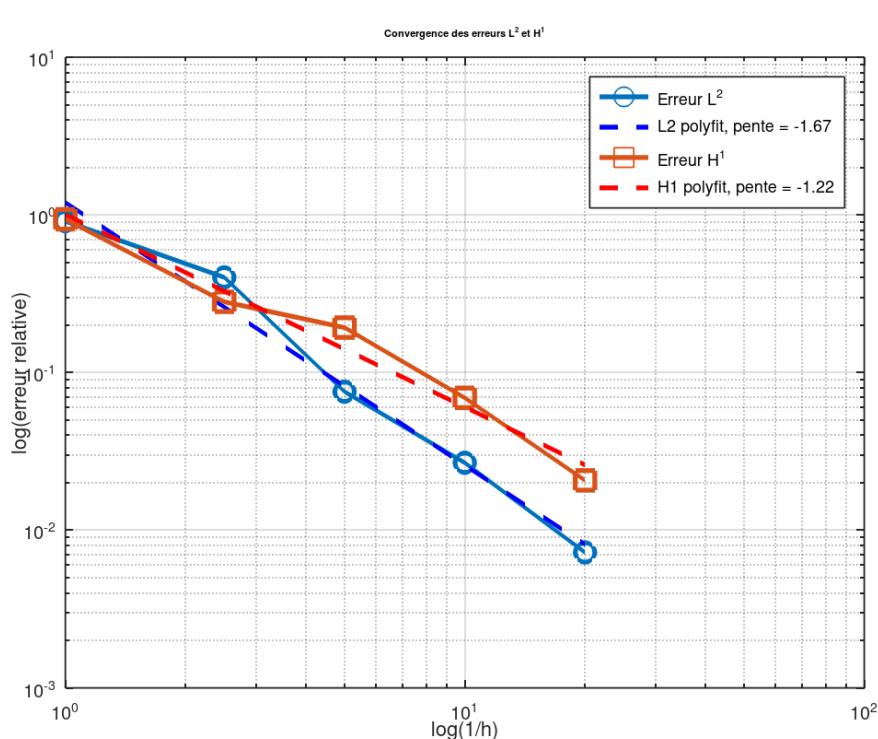


FIGURE 1.5 – Erreurs normalisées en norme L^2 et en semi-norme H^1 en échelle log-log

On obtient finalement le graphe d'erreurs ci-dessus.

Qualitativement, on remarque que l'erreur décroît avec $\log(1/h)$, donc avec h , ce qui est rassurant : plus le pas h est petit, plus il y a de triangles pour modéliser le domaine Ω , et plus la dimension du problème (nombre de triangles) grandit, et donc plus on est précis.

De façon plus précise, l'erreur en norme L^2 décroît en $O(h^2)$ tandis que l'erreur en semi-norme H^1 décroît en $O(h)$ comme vu en cours.

En revanche, l'erreur H^1 majore toujours l'erreur L^2 sur le graphique, et donc elle donne une plus grande "plage de rejet", si l'on devait juger de la fiabilité d'une solution approchée.

Résolution numérique

1.16 Calcul de la solution approchée T_h avec T_Γ constante : cas 1

Dans cette question, nous avons résolu numériquement le problème discréteisé pour différentes valeurs du pas de maillage h . Les paramètres pris en compte sont les suivants :

- $\sigma_1 = 5$ et $\sigma_2 = \sqrt{3}/2$, avec $\sigma = \sigma_1$ dans Ω_1 et $\sigma = \sigma_2$ dans Ω_2 ;
- La source de chaleur est définie par $S(x, y) = 600 \exp\left(-\left(\frac{x-5}{0.8}\right)^2 - \left(\frac{y-4}{0.8}\right)^2\right)$;
- La condition de Dirichlet $T_\Gamma = 285$ sur le bord du domaine Ω , avec $\alpha = 1$.
- L'ouvert Ω est composé de deux zones Ω_1 et Ω_2 .

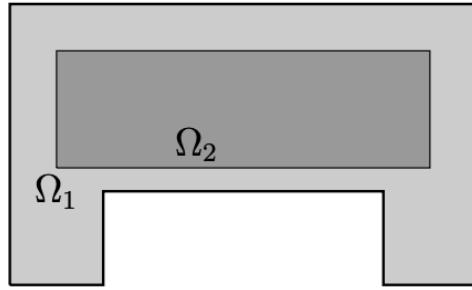


FIGURE 1.6 – Le domaine $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$

Calcul de f

f est définie par :

$$f(x, y) = S(x, y) - \alpha T_\Gamma.$$

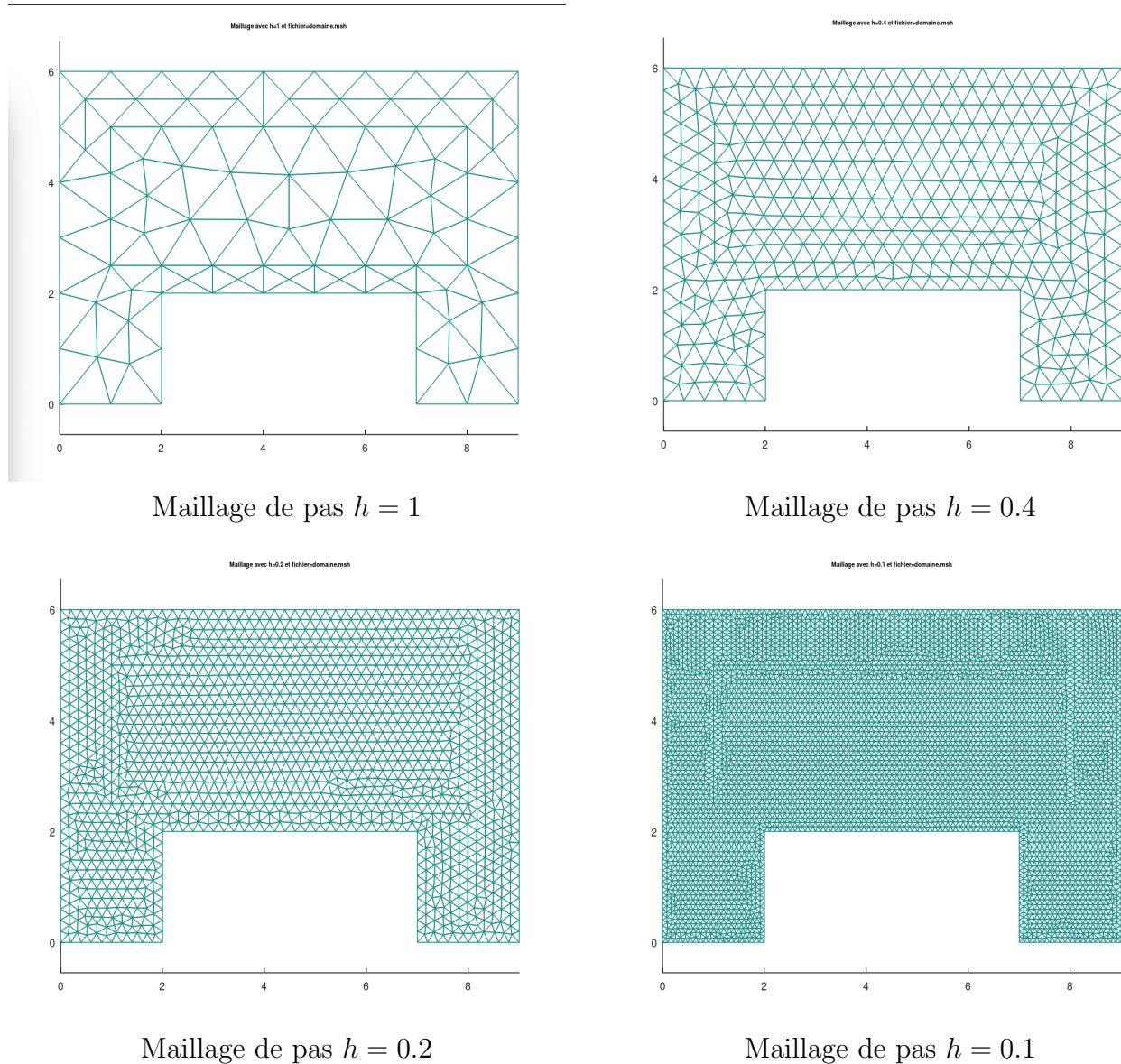
En substituant les paramètres avec les valeurs données, on obtient :

$$f(x, y) = 600 \exp\left(-\frac{(x-5)^2}{0.8^2} - \frac{(y-4)^2}{0.8^2}\right) - 285.$$

Les résolutions du problème discret ont été effectuées pour différentes valeurs de pas et la solution approchée T_h a été représentée graphiquement, ainsi que la valeur maximale de T_h pour chacun de ces pas de maillages.

Les graphes suivants permettent d'analyser la convergence de la solution approchée vers la solution exacte à mesure que h diminue et mettent en évidence notamment des phénomènes que nous commenterons par la suite.

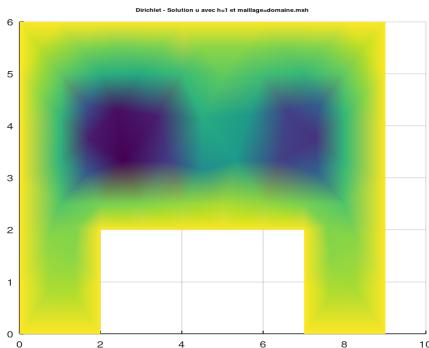
Maillages pour différentes valeurs de h

Maillage de pas $h = 1$ Maillage de pas $h = 0.4$ Maillage de pas $h = 0.2$ Maillage de pas $h = 0.1$ FIGURE 1.7 – Affichage des maillages pour différentes valeurs de h .

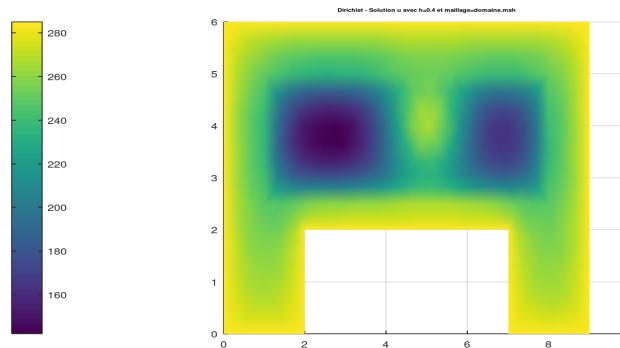
Commentaires

On constate déjà que les coins ou les angles aigus dans la géométrie (Ω_2) peuvent entraîner des éléments de maillage aplatis ou mal conditionnés. Cela dégrade la régularité du maillage et, par conséquent, la convergence et la précision des solutions numériques. Sur un maillage plus fin ($h = 0.1$), les perturbations sont moins marquées car les éléments respectent mieux la condition de régularité.

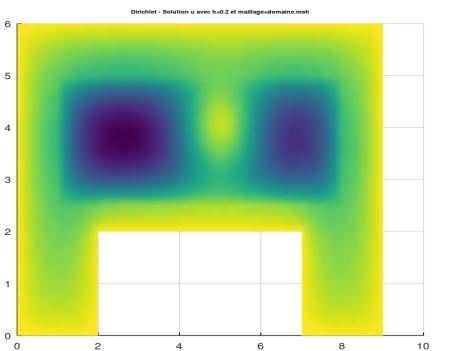
Solutions T_h trouvées pour différentes valeurs de h dans le cas 1



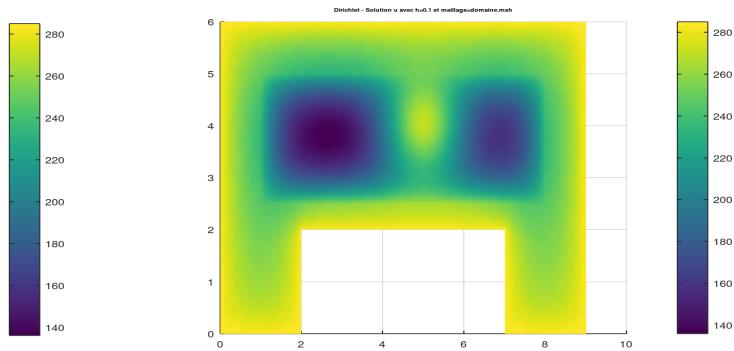
Solution T_h avec maillage de pas $h = 1$



Solution T_h avec maillage de pas $h = 0.4$



Solution T_h avec maillage de pas $h = 0.2$



Solution T_h avec maillage de pas $h = 0.1$

FIGURE 1.8 – Affichage des solutions T_h pour différentes valeurs de h .

Interprétation du phénomène observé dans Ω_2

Comme évoqué précédemment, on constate que les maillages dans les zones angulaires (comme les coins de Ω_2) dégradent la régularité, et cela est visible dans les résultats.

Les solutions numériques montrent une perturbation dans les gradients de température autour des coins de Ω_2 . Cela est dû à une approximation moins précise du champ de gradient dans ces zones à cause de la géométrie angulaire.

Impact sur les résultats

- Pour un maillage plus fin ($h = 0.1$), les solutions sont plus lisses et les perturbations sont moins visibles.
- Avec des maillages plus grossiers ($h = 0.4$ ou $h = 1$), les effets d'approximation sont amplifiés. La solution montre des gradients moins réguliers et des erreurs autour des discontinuités dans la géométrie de Ω_2 .

Valeur maximale de la température

La valeur maximale de température reste égale à 285 indépendamment du pas de maillage h , ce qui est cohérent avec la distribution de la source $S(x, y)$. Cependant, les maillages plus grossiers pourraient très bien sous-estimer ou sur-estimer les valeurs exactes de la température à cause de la perte de précision.

Recommandations

- Pour des simulations futures, un maillage plus fin peut être envisagé pour améliorer la régularité et la précision des solutions dans les zones critiques (Ω_2) quoique l'on doit trouver un compromis entre mémoire, temps d'exécution et qualité de la simulation, comme abordé lors du dernier amphi de vulgarisation.
- Utiliser des mailles adaptatifs autour des coins angulaires peut réduire les erreurs localisées sans augmenter significativement le nombre total d'éléments.

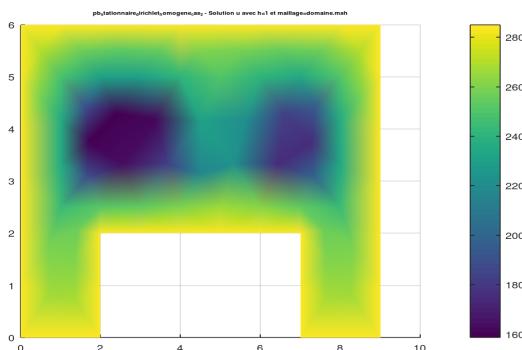
En résumé, les phénomènes observés (irrégularités dans Ω_2) confirment les limitations des mailles non adaptées dans des zones angulaires complexes, comme vu en cours.

1.17 Calcul de la solution approchée T_h avec T_Γ constante : cas 2

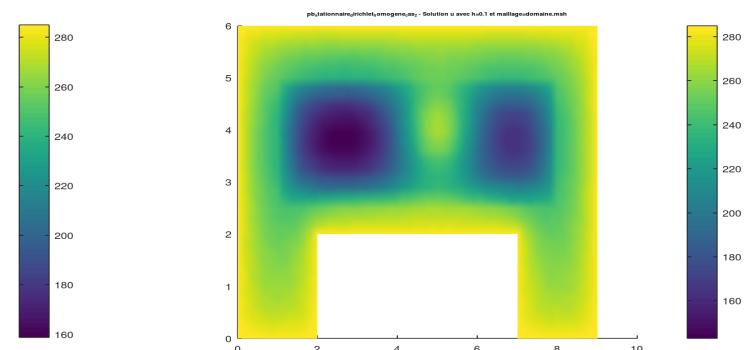
Dans cette question, $\sigma_2 = \frac{1}{4 \cdot (2 + \sin(16\pi x)) \cdot (2 + \sin(16\pi y))}$ tandis que les autres paramètres restent identiques au cas 1 précédent.

Les graphes suivants permettent d'analyser la convergence de la solution approchée vers la solution exacte à mesure que h diminue et mettent en évidence notamment des phénomènes que nous commenterons par la suite.

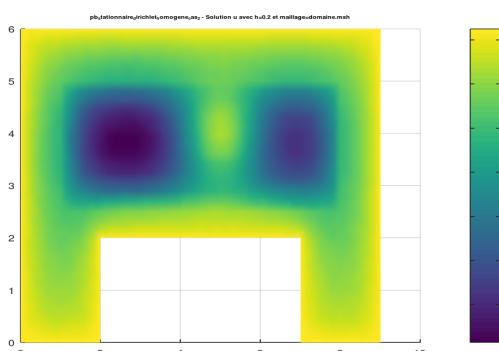
Solutions T_h trouvées pour différentes valeurs de h dans le cas 2



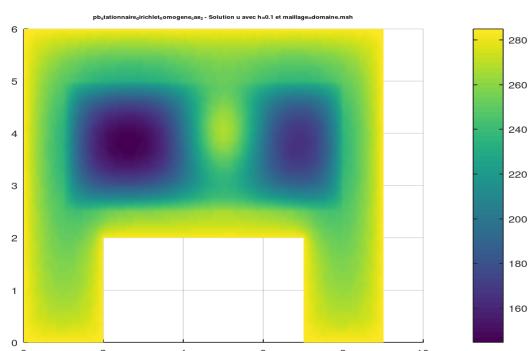
Solution T_h avec maillage de pas $h = 1$



Solution T_h avec maillage de pas $h = 0.4$



Solution T_h avec maillage de pas $h = 0.2$



Solution T_h avec maillage de pas $h = 0.1$

FIGURE 1.9 – Affichage des solutions T_h pour différentes valeurs de h .

Interprétation du phénomène observé dans Ω_2

Les graphiques ci-dessus illustrent la solution numérique T_h obtenue pour différents pas de maillage ($h = 1$, $h = 0.4$, $h = 0.2$, et $h = 0.1$).

On obtient un résultat très similaire à la situation où σ_2 était constante. Notre piste pour expliquer cette ressemblance est que la fonction σ_2 varie vite en raison des termes $\sin(16\pi x)$ et $\sin(16\pi y)$, et que la solution varie à une échelle plus grande, masquant ces variations de σ_2 .

Conditions de Dirichlet non homogènes

On considère dans cette partie le problème (1) avec **une donnée sur le bord T_Γ qui n'est plus une fonction constante**.

On suppose de plus que $T_\Gamma \in C^1(\partial\Omega)$.

Il convient alors en premier lieu de poser la formulation variationnelle vérifiée par $u = T$ puis la formulation variationnelle discrète où on remplace la condition $u|_{\partial\Omega} = T_\Gamma$ par $u_h|_{\partial\Omega} = T_{\Gamma,h}$, où $T_{\Gamma,h}$ est l'interpolée de T_Γ :

$$T_{\Gamma,h} = \sum_{j, S_j \in \partial\Omega} T_\Gamma(S_j) w_j.$$

Et enfin, en déduire le système linéaire équivalent.

1.18 Formulation variationnelle vérifiée par $u = T$ et formulation variationnelle discrète associée

En considérant $u = T$, le problème stationnaire initial (1) se résume à :

Trouver $u \in H^1(\Omega)$ telle que

$$\begin{cases} \alpha u - \operatorname{div}(\sigma \nabla u) = f & \text{dans } \Omega, \\ u = T_\Gamma & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (4)$$

avec $f = S \in L^2(\Omega)$ et $u|_{\partial\Omega} = T_\Gamma \in C^1(\partial\Omega)$

Formulation variationnelle continue

Soit $u \in H^1(\Omega)$ et $v \in H^1(\Omega)$, on a :

$$\int_{\Omega} [\alpha u - \operatorname{div}(\sigma \nabla u)] v \, d\Omega = \int_{\Omega} f v \, d\Omega.$$

Décomposons ce terme :

$$\int_{\Omega} \alpha u v \, d\Omega - \int_{\Omega} \operatorname{div}(\sigma \nabla u) v \, d\Omega = \int_{\Omega} f v \, d\Omega.$$

En utilisant la formule d'intégration par parties (IPP) de la divergence comme en question 1.2 avec $u \in H^1(\Omega)$, $v \in H^1(\Omega)$ et $u|_{\partial\Omega} = T_\Gamma \in C^1(\partial\Omega)$ (les conditions de régularité étant similaire à la démonstration en question 1.2), on obtient :

$$\int_{\Omega} \alpha u v \, d\Omega + \int_{\Omega} \sigma \nabla u \cdot \nabla v \, d\Omega - \int_{\partial\Omega} (\sigma \nabla u \cdot \mathbf{n}) v \, d\Gamma = \int_{\Omega} f v \, d\Omega,$$

où \mathbf{n} désigne la normale sortante sur $\partial\Omega$.

Compte tenu des manques d'informations sur $\nabla u \cdot \mathbf{n}$ sur $\partial\Omega$, on choisit finalement $v \in H_0^1(\Omega)$.

Ainsi, la formulation variationnelle devient :

Trouver $u \in H^1(\Omega)$ telle que $u = T_\Gamma$ sur $\partial\Omega$ et

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \quad \int_{\Omega} \alpha u v \, d\Omega + \int_{\Omega} \sigma \nabla u \cdot \nabla v \, d\Omega = \int_{\Omega} f v \, d\Omega. \quad (5)$$

Caractère bien posé de la formulation variationnelle continue

Le caractère bien posé de la formulation variationnelle (5) est immédiat car identique au cas de la formulation variationnelle associée au problème (2) en question 1.3, avec continuité de la solution par rapport aux données.

En effet, le changement d'espace pour u et l'introduction de la condition au bord $u|_{\partial\Omega} = T_\Gamma \in C^1(\partial\Omega)$ n'interviennent pas explicitement dans la démonstration du théorème de Lax-Milgram dans ce contexte.

Formulation variationnelle discrète

La formulation variationnelle discrète vérifiée par u_h s'écrit :

Trouver $u_h \in V_h$ telle que $u_h = \pi_h T_\Gamma = T_{\Gamma,h}$ sur $\partial\Omega$ et

$$\forall v_h \in V_h^0, \quad \alpha \int_{\Omega} u_h v_h \, d\Omega + \int_{\Omega} \sigma \nabla u_h \cdot \nabla v_h \, d\Omega = \int_{\Omega} f v_h \, d\Omega.$$

avec

$$T_{\Gamma,h} = \sum_{j, S_j \in \partial\Omega} T_\Gamma(S_j) w_j.$$

Il s'agit trivialement d'une formulation variationnelle bien posée au sens de Hadamard relativement à la question 1.4.

Système linéaire équivalent

La formulation variationnelle discrète étant linéaire en $v_h \in V_h^0$, la formulation variationnelle discrète est équivalente à :

$$\forall I \in \{1, \dots, N_0\}, \quad \alpha \int_{\Omega} u_h w_I \, d\Omega + \int_{\Omega} \sigma \nabla u_h \cdot \nabla w_I \, d\Omega = \int_{\Omega} f w_I \, d\Omega$$

On écrit ensuite $u_h = \sum_{J=1}^N u_h(S_J) w_J$ et on injecte dans la dernière formule :

$$\forall I \in \{1, \dots, N_0\}, \quad \alpha \sum_{J=1}^N u_h(S_J) \int_{\Omega} w_J w_I \, d\Omega + \sum_{J=1}^N u_h(S_J) \int_{\Omega} \sigma \nabla w_J \cdot \nabla w_I \, d\Omega = \int_{\Omega} f w_I \, d\Omega$$

On reconnaît alors dans le terme de gauche le terme général de la multiplication d'une matrice par un vecteur. On a donc :

$$\tilde{\mathbb{A}} \vec{U} = (\alpha \tilde{\mathbb{M}} + \tilde{\mathbb{K}}) \vec{U} = \vec{L}$$

avec $\tilde{\mathbb{M}}$ et $\tilde{\mathbb{K}}$ les matrices $N_0 \times N$ de termes généraux respectifs :

$$\tilde{\mathbb{M}}_{IJ} = \int_{\Omega} w_I w_J \, d\Omega, \quad \tilde{\mathbb{K}}_{IJ} = \int_{\Omega} \sigma \nabla w_I \cdot \nabla w_J \, d\Omega$$

Les vecteurs $\tilde{\vec{U}}$ et $\tilde{\vec{L}}$ sont les vecteurs donnés par :

$$\tilde{\vec{U}} = (u_h(S_J))_{J \in \{1, \dots, N\}}, \quad \tilde{\vec{L}} = \left(\int_{\Omega} f w_I d\Omega \right)_{I \in \{1, \dots, N_0\}}$$

Le système linéaire équivalent se résume à :

Trouver $u_h = \sum_j u_h(S_j) w_j$ telle que $u_h(S_j) = T_{\Gamma}(S_j)$, $S_j \in \partial\Omega$.

et résoudre le système matriciel :

$$\tilde{A}\tilde{\vec{U}} = \tilde{\vec{L}},$$

1.19 Système linéaire équivalent par technique de pseudo-élimination

On écrit A , une matrice $N \times N$ sous la forme :

$$\begin{pmatrix} A_{II} & A_{IB} \\ A_{BI} & A_{BB} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U}_I \\ \mathbf{U}_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{L}_I \\ \mathbf{L}_B \end{pmatrix}.$$

En tenant compte des conditions au bord $\mathbf{U}_B = \mathbf{T}_{\Gamma,h}$, où on a identifié la fonction $T_{\Gamma,h}$ et le vecteur colonne composé des valeurs prises par $T_{\Gamma,h}$, il suffit de choisir :

$$A_{BI} = 0, \quad A_{BB} = I, \quad \text{et} \quad \mathbf{L}_B = T_{\Gamma,h}.$$

On résout finalement dans ce cas :

$$A_{II}\mathbf{U}_I + A_{IB}\mathbf{U}_B = \mathbf{L}_I \quad \text{et} \quad \mathbf{U}_B = \mathbf{T}_{\Gamma,h}$$

Le système peut s'écrire sous forme :

$$\begin{pmatrix} A_{II} & A_{IB} \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U}_I \\ \mathbf{U}_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{L}_I \\ \mathbf{T}_{\Gamma,h} \end{pmatrix}.$$

De cette façon, le calcul des matrices **MetK** reste identique au cas précédent avec cette fois, la prise en compte des conditions au bord et du domaine d'appartenance de u_h .

On modifiera la routine **elimine.m** en conséquence.

1.20 Implémentation des routines **T_Gamma.m** et **elimine.m**

L'implémentation de la fonction **T_Gamma.m** est élémentaire, avec ci-dessous les modifications apportées à la routine **elimine.m**.

```

1 function val = T_Gamma(x, y)
2 %%%%%%
3 % T_Gamma : renvoie la valeur de T_Gamma, h un sommet dans la routine elimine
4 % SYNOPSIS val = T_Gamma(S)
5 % INPUT * S : numero d'un sommet
6 % OUTPUT - val : valeur de T_Gamma, h au sommet numero S.
7 %%%%%%
8
9 val = ...;
```

```

10 %%%%%%
11 % Fin de la routine
12 %%%%%%
13 %%%%%%

```

Listing 1.7 – Définition de la fonction T_Gamma

```

1 function [tilde_AA, tilde_LL]=elimine(AA,LL,Refneu,Coorneu,probleme_aborde)
2 %%%%%%
3 % elimine :
4 % R alise la pseudo - limination des n uds du bord en utilisant le vecteur
5 % Refneu.
6 %
7 % SYNOPSIS [tilde_AA, tilde_LL] = elimine(AA, LL, Refneu)
8 %
9 % INPUT * AA, LL, Refneu : la matrice AA assembl e avant limination ,
10 % La matrice LL second membre et le tableau Refneu
11 % r f rence des sommets (vecteur entier Nbpt x 1)
12 %
13 % OUTPUT - t ilde_AA, t ilde_LL : matrice assembl e et second membre
14 % ap rs limination des n uds du bord
15 %%%%%%
16
17 if strcmp(probleme_aborde, 'validation') %%%%%% Cas Validation
18     for i=1:length(LL)
19         if Refneu(i) == 1
20             AA(i,:) = 0; AA(:,i) = 0;
21             LL(i) = 0;
22         end
23     end
24 elseif strcmp(probleme_aborde, 'pb_stationnaire') %%%%Cas pb_stationnaire
25     for i=1:length(LL)
26         if Refneu(i) == 1
27             AA(i,:) = 0;
28             x = Coorneu(i,1); y = Coorneu(i,2);
29             LL(i) = T_Gamma(x,y);
30         end
31     end
32 else
33     for i=1:length(LL)
34         if Refneu(i) == 1
35             AA(i,:) = 0;
36             x = Coorneu(i,1); y = Coorneu(i,2);
37             LL(i) = T_Gamma(x,y);
38         end
39     end
40 end
41
42 t ilde_AA = AA; t ilde_LL = LL;

```

Listing 1.8 – Pseudo-élimination des nœuds du bord avec prise en compte de T_Gamma.m

Validation du code

1.21 Validation du code avec $T(x, y) = \sin(\pi x) \cos(\pi y)$

On procède à la validation du code avec $T(x, y) = \sin(\pi x) \cos(\pi y)$ et un maillage généré à l'aide du domaine Ω de la figure 1.6.

Calcul de f et T_Γ

Soit $T(x, y) = \sin(\pi x) \cos(\pi y)$, avec :

$$\alpha = 1, \quad \sigma = \sigma_1 = 1 \quad \text{dans } \Omega_1, \quad \text{et} \quad \sigma = \sigma_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{dans } \Omega_2.$$

On cherche f et T_Γ tels que :

$$\alpha u - \nabla \cdot (\sigma \nabla u) = f \quad \text{dans } \Omega, \quad u = T_\Gamma \quad \text{sur } \partial\Omega.$$

La condition au bord impose :

$$T_\Gamma(x, y) = T(x, y) = \sin(\pi x) \cos(\pi y) \quad \text{sur } \partial\Omega.$$

L'équation devient :

$$f(x, y) = \alpha T(x, y) - \nabla \cdot (\sigma \nabla T(x, y)).$$

Gradient ∇T :

$$\nabla T = \begin{bmatrix} \frac{\partial T}{\partial x} \\ \frac{\partial T}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi \cos(\pi x) \cos(\pi y) \\ -\pi \sin(\pi x) \sin(\pi y) \end{bmatrix}.$$

Laplacien ΔT :

$$\Delta T = -2\pi^2 \sin(\pi x) \cos(\pi y).$$

Puisque σ est constant par morceaux, on a :

$$\nabla \cdot (\sigma \nabla T) = \sigma \Delta T,$$

Finalement :

- Dans Ω_1 :

$$f(x, y) = (1 + 2\pi^2) \sin(\pi x) \cos(\pi y).$$

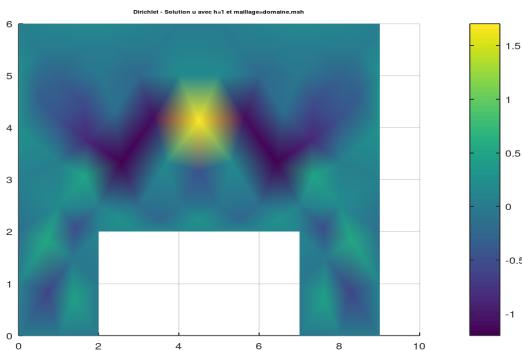
- Dans Ω_2 :

$$f(x, y) = (1 + \sqrt{3}\pi^2) \sin(\pi x) \cos(\pi y).$$

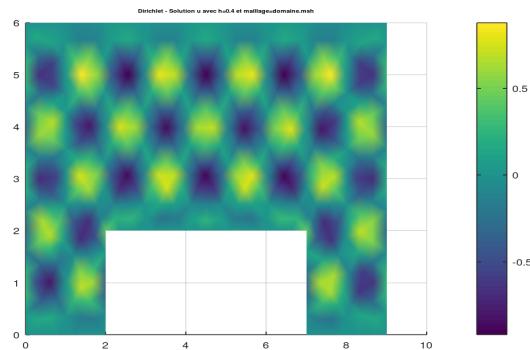
- Condition au bord :

$$T_\Gamma(x, y) = \sin(\pi x) \cos(\pi y).$$

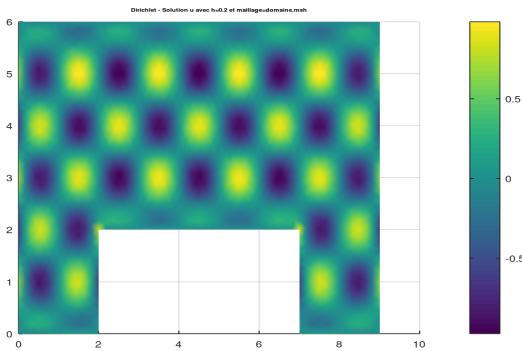
Solutions T_h trouvées pour différentes valeurs de h avec $T(x, y) = \sin(\pi x) \cos(\pi y)$



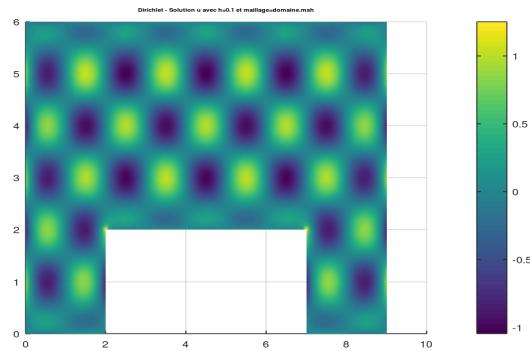
Solution T_h avec maillage de pas $h = 1$



Solution T_h avec maillage de pas $h = 0.4$



Solution T_h avec maillage de pas $h = 0.2$



Solution T_h avec maillage de pas $h = 0.1$

FIGURE 1.10 – Solutions T_h pour différentes valeurs de h avec conditions de Dirichlet non homogènes.

Interprétation des résultats obtenus

Les graphiques ci-dessus illustrent la solution numérique T_h obtenue pour différents pas de maillage.

On observe la convergence de la solution numérique vers la solution exacte au fur et à mesure du raffinement du maillage.

De plus, on constate bien que relativement au cas où T_Γ était constante, on a ici une variation de la valeur de T au bord, ce qui semble rassurant.

La solution approchée T_h varie entre -0.92041 et 0.87856, ce qui est acceptable sachant que la solution exacte varie entre -1 et 1.

Cependant, on observe bien également que la finesse du maillage, bien qu'elle permettre de converger vers la solution exacte du problème, génère d'éventuelles erreurs de calculs numériques car constraint la capacité de précision de la machine, le stockage et nécessite un temps de calcul plus élevé.

D'où, la nécessité de pouvoir choisir un maillage adéquat.

On conclut donc quant à la validation du code et l'obtention de solutions satisfaisantes pour la solution exacte $T(x, y) = \sin(\pi x) \cos(\pi y)$.

1.22 Solution du code avec $f(x, y) \equiv 0$, $T_\Gamma = 310$ sur le bord supérieur $\partial\Omega \cap \{y = 6\}$ et 260 sur le reste du bord.

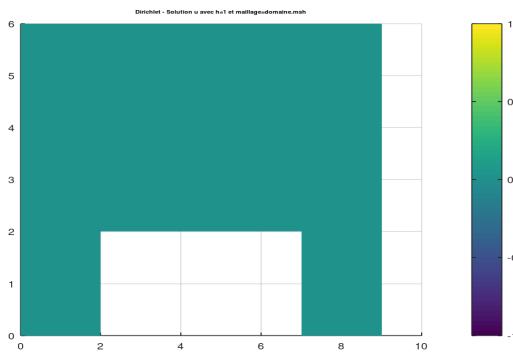
On constate déjà que pour $f(x, y) \equiv 0$, la formule variationnelle (5) n'est plus bien posée car on perd la coercivité de la forme bilinéaire a .

Matriciellement, cela revient à resoudre le système

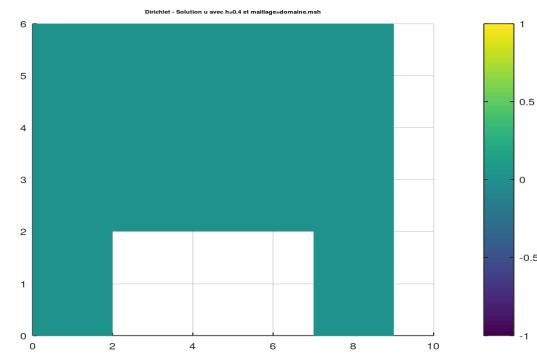
$$\tilde{A}\vec{U} \equiv \vec{0},$$

avec une solution $\vec{U} = \vec{0}$ si \tilde{A} est inversible (ce qui est le cas dans les simulations numériques).

Solutions T_h trouvées pour différentes valeurs de h



Solution T_h avec maillage de pas $h = 1$



Solution T_h avec maillage de pas $h = 0.4$

FIGURE 1.11 – Solutions T_h pour différentes valeurs de h avec conditions de Dirichlet non homogènes.

Interprétation des résultats obtenus

Les graphiques ci-dessus illustrent la solution numérique T_h obtenue pour différents pas de maillage.

On observe bien la nullité de la solution numérique indépendamment du raffinement du maillage, as expected.

2 Equation de la chaleur stationnaire avec conditions de Fourier

On s'intéresse au calcul de la température $T \equiv T(x, y)$, solution de l'équation de la chaleur en régime stationnaire, avec condition aux limites de Fourier (qui modélise un climatiseur : le flux de chaleur est positif si $T < T_c$ et négatif si $T > T_c$, où T_c est la température de référence du climatiseur) :

Trouver $T \in H^1(\Omega)$ telle que

$$\begin{aligned} \alpha T - \operatorname{div}(\sigma \nabla T) &= S && \text{dans } \Omega, \\ \sigma \nabla T \cdot \mathbf{n} + \lambda(T - T_c) &= 0 && \text{sur } \partial\Omega, \end{aligned} \quad (6)$$

avec α , σ et S vérifiant les mêmes hypothèses que précédemment, $\lambda > 0$ et $T_c \in L^2(\partial\Omega)$.

2.1 Formulation variationnelle vérifiée par $u = T$ et son caractère bien posé

Formulation variationnelle vérifiée par $u = T$

En considérant $u = T$ dans Ω et $u_c = T_c$ sur $\partial\Omega$, le problème initial (6) se ramène à :

Trouver $u \in H^1(\Omega)$ telle que :

$$\begin{aligned} \alpha u - \operatorname{div}(\sigma \nabla u) &= S && \text{dans } \Omega, \\ \sigma \nabla u \cdot \mathbf{n} + \lambda(u - u_c) &= 0 && \text{sur } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Soient $u, v \in H^1(\Omega)$, on a, en multipliant par v puis en intégrant sur Ω :

$$\int_{\Omega} \alpha u v \, d\Omega - \int_{\Omega} \operatorname{div}(\sigma \nabla u) v \, d\Omega = \int_{\Omega} S v \, d\Omega.$$

En utilisant la formule d'intégration par parties de la divergence avec $u \in H^1(\Omega)$, $v \in H^1(\Omega)$, $\sigma \nabla u \in (L^2(\Omega))^2$, et $\operatorname{div}(\sigma \nabla u) \in L^2(\Omega)$ (similaire à la démonstration en question 1.2), on a :

$$\int_{\Omega} \alpha u v \, d\Omega + \int_{\Omega} \sigma \nabla u \cdot \nabla v \, d\Omega - \int_{\partial\Omega} (\sigma \nabla u \cdot \mathbf{n}) v \, d\Gamma = \int_{\Omega} S v \, d\Omega,$$

avec $\sigma \nabla u \cdot \mathbf{n} = \lambda(u_c - u)$ sur $\partial\Omega$.

D'où :

$$\int_{\Omega} \alpha u v \, d\Omega + \int_{\Omega} \sigma \nabla u \cdot \nabla v \, d\Omega + \lambda \int_{\partial\Omega} u v \, d\Gamma = \int_{\Omega} S v \, d\Omega + \lambda \int_{\partial\Omega} u_c v \, d\Gamma.$$

Finalement, la formulation variationnelle s'écrit :

Trouver $u \in H^1(\Omega)$ telle que :

$$\forall v \in H^1(\Omega), \quad \int_{\Omega} \alpha u v \, d\Omega + \int_{\Omega} \sigma \nabla u \cdot \nabla v \, d\Omega + \lambda \int_{\partial\Omega} u v \, d\Gamma = \int_{\Omega} S v \, d\Omega + \lambda \int_{\partial\Omega} u_c v \, d\Gamma. \quad (7)$$

Caractère bien posé de la formulation variationnelle (7)

Montrons que cette formulation variationnelle est bien posée au sens Hadamard.

Bilinéarité de $a(u, v)$ et linéarité de $\ell(v)$

Les formes a et ℓ sont respectivement bilinéaires et linéaires de manière immédiate par linéarité de l'intégrale et du gradient.

Continuité de $a(u, v)$

La forme bilinéaire $a(u, v)$ est donnée par :

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \alpha u v \, d\Omega + \int_{\Omega} \sigma \nabla u \cdot \nabla v \, d\Omega + \lambda \int_{\partial\Omega} u v \, d\Gamma.$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $L^2(\Omega)$ et $L^2(\partial\Omega)$, on a :

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} \alpha u v \, d\Omega \right| &\leq \alpha \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)}, \\ \left| \int_{\Omega} \sigma \nabla u \cdot \nabla v \, d\Omega \right| &\leq \sigma_{\max} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}, \\ \left| \lambda \int_{\partial\Omega} u v \, d\Gamma \right| &\leq \lambda \|u\|_{L^2(\partial\Omega)} \|v\|_{L^2(\partial\Omega)}. \end{aligned}$$

De plus, par la continuité de la trace $\gamma_0 : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\partial\Omega)$, il existe une constante $C_0 > 0$ telle que :

$$\|u\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C_0 \|u\|_{H^1(\Omega)}.$$

Ainsi, en utilisant le fait que la norme $\|u\|_{H^1(\Omega)}$ domine les normes $\|u\|_{L^2(\Omega)}$, $\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$, on a :

$$|a(u, v)| \leq C_a \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}.$$

Par conséquent, a est continue avec :

$$C_a = \max(\alpha, \sigma_{\max}, \lambda C_0^2).$$

Coercivité de $a(u, v)$

Pour $v = u \in H^1(\Omega)$, on peut écrire :

$$a(u, u) = \int_{\Omega} \alpha u^2 \, d\Omega + \int_{\Omega} \sigma |\nabla u|^2 \, d\Omega + \lambda \int_{\partial\Omega} u^2 \, d\Gamma.$$

Par les hypothèses sur α , σ , et λ , on a :

$$a(u, u) \geq \alpha \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sigma_{\min} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \lambda \|u\|_{L^2(\partial\Omega)}^2.$$

Par l'inégalité de Poincaré généralisée, on a :

$$\exists C_P > 0, \quad \|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C_P (\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\partial\Omega)}).$$

Ainsi :

$$\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq 2C_P^2 (\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u\|_{L^2(\partial\Omega)}^2), \quad \text{avec } (a+b)^2 \leq 2(a^2 + b^2).$$

Alors, on a :

$$a(u, u) \geq \alpha \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\min(\sigma_{\min}, \lambda)}{2C_P^2} \|u\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Par ailleurs, on a également :

$$a(u, u) \geq \sigma_{\min} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

En combinant, on obtient finalement :

$$a(u, u) \geq \frac{1}{2} \min \left(\sigma_{\min}, \alpha + \frac{\min(\sigma_{\min}, \lambda)}{2C_P^2} \right) \|u\|_{H^1(\Omega)}^2.$$

D'où a est coercive.

Continuité de $\ell(v)$

La forme linéaire $\ell(v)$ est donnée par :

$$\ell(v) = \int_{\Omega} Sv \, d\Omega + \lambda \int_{\partial\Omega} u_c v \, d\Gamma.$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $L^2(\Omega)$ et $L^2(\partial\Omega)$, on a :

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} Sv \, d\Omega \right| &\leq \|S\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)}, \\ \left| \lambda \int_{\partial\Omega} u_c v \, d\Gamma \right| &\leq \lambda \|u_c\|_{L^2(\partial\Omega)} \|v\|_{L^2(\partial\Omega)}. \end{aligned}$$

En utilisant la continuité de la trace $\gamma_0 : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\partial\Omega)$, on obtient :

$$|\ell(v)| \leq \left(\|S\|_{L^2(\Omega)} + \lambda C_0 \|u_c\|_{L^2(\partial\Omega)} \right) \|v\|_{H^1(\Omega)}.$$

Par conséquent, ℓ est continue.

Enfin, l'espace $H^1(\Omega)$ muni de la norme H^1 est bien un espace de Hilbert.

Les conditions du théorème de Lax-Milgram étant vérifiées, la formulation variationnelle (7) admet une unique solution $u \in H^1(\Omega)$ qui dépend continûment des données.

En effet, on a par coercivité de a et continuité de ℓ :

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{1}{\frac{1}{2} \min \left(\sigma_{\min}, \alpha + \frac{\min(\sigma_{\min}, \lambda)}{2C_P^2} \right)} \left(\|S\|_{L^2(\Omega)} + \lambda C_0 \|u_c\|_{L^2(\partial\Omega)} \right).$$

La formulation variationnelle (7) est donc bien posée.

2.2 Formulation variationnelle discrète et système linéaire associé

Soit \mathcal{T}_h une triangulation du domaine Ω , on introduit :

$$V_h = \{v_h \in C^0(\bar{\Omega}), \forall l \in \{1, \dots, N_{\text{tri}}\}, v_h|_{T_l} \in \mathbb{P}_1\}$$

où \mathbb{P}_1 est l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus 1, V_h l'approximation de $H^1(\Omega)$ par des éléments finis P^1 associés à la triangulation \mathcal{T}_h .

On note $(T_\ell)_{\ell=1,L}$ les triangles de \mathcal{T}_h , $(S_I)_{I=1,N}$ les sommets des triangles et $(w_I)_{I=1,N}$ la base de V_h définie par $w_I(S_J) = \delta_{IJ}$, $1 \leq I, J \leq N$.

$$V_h = \text{Vect}(w_1, \dots, w_N).$$

Formulation variationnelle discrète

La formulation variationnelle discrète s'écrit :

Trouver $u_h \in V_h$ telle que

$$\forall v_h \in V_h, \quad \int_{\Omega} \alpha u_h v_h \, d\Omega + \int_{\Omega} \sigma \nabla u_h \cdot \nabla v_h \, d\Omega + \lambda \int_{\partial\Omega} u_h v_h \, d\Gamma = \int_{\Omega} S v_h \, d\Omega + \lambda \int_{\partial\Omega} u_c v_h \, d\Gamma.$$

Elle est également bien posée car $V_h \subset H^1(\Omega)$ est un fermé (car de dimension finie) et les propriétés du théorème de Lax-Milgram sont indépendantes de h .

Système linéaire associé

On écrit

$$u_h = \sum_{J=1}^N u_h(S_J) w_J \quad \text{et} \quad v_h = w_I$$

En injectant cette décomposition dans la formulation discrète, on obtient par linéarité, le système linéaire suivant :

$$\sum_{J=1}^N \left(\int_{\Omega} \alpha w_J w_I \, d\Omega + \int_{\Omega} \sigma \nabla w_J \cdot \nabla w_I \, d\Omega + \lambda \int_{\partial\Omega} w_J w_I \, d\Gamma \right) U_J = \int_{\Omega} S w_I \, d\Omega + \lambda \int_{\partial\Omega} u_c w_I \, d\Gamma.$$

En notant :

$$\begin{aligned} \mathbb{M}_{IJ} &= \int_{\Omega} w_J w_I \, d\Omega, & \mathbb{K}_{IJ} &= \int_{\Omega} \sigma \nabla w_J \cdot \nabla w_I \, d\Omega, & \mathbb{S}_{IJ} &= \int_{\partial\Omega} w_J w_I \, d\Gamma, \\ F_I &= \int_{\Omega} S w_I \, d\Omega + \lambda \int_{\partial\Omega} u_c w_I \, d\Gamma, \end{aligned}$$

Le système linéaire s'écrit sous forme matricielle :

$$(\mathbb{K} + \alpha \mathbb{M} + \lambda \mathbb{S}) \vec{\mathbf{U}} = \vec{\mathbf{F}},$$

où :

- \mathbb{M} et \mathbb{K} sont les matrices de masse et de raideur définies précédemment.
- \mathbb{S} est la matrice de surface liée au terme frontière,
- $\vec{\mathbf{F}}$ est le vecteur des seconds membres.

La formulation discrète du problème variationnel (6) revient à résoudre le système linéaire :

$$(\mathbb{K} + \alpha \mathbb{M} + \lambda \mathbb{S}) \mathbf{U} = \vec{\mathbf{F}},$$

où $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^N$ est le vecteur des inconnues associées aux valeurs de la solution u_h .

2.3 Construction du terme \mathbf{F} par interpolation

Pour une donnée $S \in C^0(\bar{\Omega})$ et $T_c = u_c \in C^0(\partial\Omega)$, le terme $\vec{\mathbf{F}}$ est défini par :

$$F_I = \int_{\Omega} S w_I \, d\Omega + \lambda \int_{\partial\Omega} u_c w_I \, d\Gamma,$$

où $\{w_I\}_{I=1}^N$ est l'ensemble des fonctions de base associées à l'espace discret V_h .

On procède par interpolation des fonctions S et u_c sur les noeuds du maillage par :

$$S \approx \pi_h S = \sum_{J=1}^N S(S_J) w_J, \quad u_c \approx \pi_h u_c = \sum_{J=1}^N u_c(S_J) w_J,$$

où S_J sont les noeuds du maillage, avec

$$\pi_h u_c(S_j) = \begin{cases} u_c(S_j) & \text{si } S_j \in \partial\Omega, \\ 0 & \text{si } S_j \notin \partial\Omega. \end{cases}$$

En les injectant dans l'expression de F_I , on obtient :

$$F_I = \int_{\Omega} \left(\sum_{J=1}^N S(S_J) w_J \right) w_I \, d\Omega + \lambda \int_{\partial\Omega} \left(\sum_{J=1}^N u_c(S_J) w_J \right) w_I \, d\Gamma.$$

Ainsi,

$$F_I = \sum_{J=1}^N S(S_J) \int_{\Omega} w_J w_I \, d\Omega + \lambda \sum_{J=1}^N u_c(S_J) \int_{\partial\Omega} w_J w_I \, d\Gamma.$$

On reconnaît ainsi les termes de masse et de masse surfacique.

L'écriture du vecteur $\vec{\mathbf{F}}$ sous forme discrète devient :

$$F_I = \sum_{J=1}^N (\mathbb{M}_{IJ} S(S_J) + \lambda \mathbb{S}_{IJ} u_c(S_J)).$$

En notant $\vec{\mathbf{S}} = [S(S_J)]_{J=1}^N$ et $\vec{\mathbf{U}}_c = [u_c(S_J)]_{J=1}^N$, on peut réécrire $\vec{\mathbf{F}}$ sous forme matricielle :

$$\vec{\mathbf{F}} = \mathbb{M} \vec{\mathbf{S}} + \lambda \mathbb{S} \vec{\mathbf{U}}_c,$$

où $\vec{\mathbf{S}}$ et $\vec{\mathbf{U}}_c$ sont les vecteurs contenant les valeurs aux noeuds de S et les valeurs aux noeuds de bord de u_c (valant 0 sinon), respectivement.

2.4 Conditionnement pour le calcul de la solution discrète

Pour la mise en place du code permettant de calculer la solution discrète, on procède à l'implémentation de la routine `mat_elem_surface.m` qui à partir des coordonnées de 2 sommets du bord donne la matrice élémentaire de masse surfacique.

On assemble ensuite la matrice \mathbf{S} en effectuant une boucle sur les arêtes.

Routine pour la matrice de masse surfacique élémentaire

Le calcul des matrices de masse surfacique élémentaire reste identique à celui de la matrice de masse élémentaire \mathbb{M}_{ij}^{elem} avec ici la surface des triangles qui est réduit à la longueur de l'arête correspondante.

Ainsi, on remplace simplement $|\det(B_\ell)|$ par la longueur de l'arête $[S_i, S_j]$ avec S_{ij}^{elem} , une matrice 2×2 .

Dans cette partie, on a la possibilité d'appliquer les conditions aux bords de Fourier sur $\partial\Omega_1$ ou $\partial\Omega_2$ à l'aide du tableau Refaretes (Référence de chaque arête de la frontière).

Ci-dessous, les modifications apportées aux différentes routines.

```

1 function [Sel] = mat_elem_surface(S1, S2, ref)
2 % mat_elem :
3 % calcul les matrices de masse surfaciques pour les frontieres
4 % Gamma1, Gamma2, Gamma3 et Gamma4
5 %
6 % SYNOPSIS [Sel] = mat_elem_surface(S1, S2, ref)
7 %
8 % INPUT * S1, S2 : les 2 coordonnees des 2 sommets de l'arete
9 % (vecteurs reels 1x2)
10 % ref : Reference de l'arete.
11 %
12 % OUTPUT - Sel matrice de masse surfacique elementaire pour le bord de
13 % reference ref
14 %
15 % preliminaires, pour faciliter la lecture:
16 x1 = S1(1); y1 = S1(2);
17 x2 = S2(1); y2 = S2(2);
18 %
19 % On calcul la longueur de l'arete.
20 Long = sqrt((x2-x1)^2+(y2-y1)^2);
21 %
22 % Declaration et remplissage des matrice elementaires.
23 Sel = zeros(2,2);
24 if ref==1
25     for i=1:2
26         for j=1:2
27             if i==j
28                 Sel(i,j) = (1/12)*abs(Long) ;
29             else
30                 Sel(i,j) = (1/24)*abs(Long) ;
31             end
32         end; % j
33     end; % i
34 endif

```

Listing 2.1 – Calcul des matrices de masse surfacique élémentaires

Calcul du second membre \vec{F}

Pour le calcul du second membre \vec{F} , on calcule simplement les valeurs aux nœuds de \vec{S} et \vec{U}_c en distinguant selon les nœuds de bord ou intérieurs pour \vec{U}_c .

```

1 % Calcul du second membre F
2 % -----
3 for i=1:Nbpt
4     [val_S,val_U_c] = f(Coorneu(i, 1), Coorneu(i, 2),probleme_aborde,Refneu(i));
5     S(i)=val_S ; U_c(i)=val_U_c;
6 end
7
8 FF = MM*S + lambda*SS*U_c;

```

Listing 2.2 – Calcul du vecteur second membre

```

1 elseif strcmp(probleme_aborde, 'pb_stationnaire_fourier')
2     S(x,y) = ...;
3     U_c(x,y) = ...;
4     if Refneu==1
5         val = [S(x,y),U_c(x,y)];
6     else
7         val=[S(x,y),0];
8     end
9 else
10    val=...;
11 end

```

Listing 2.3 – Gestion des conditions via Refneu

Assemblage de la matrice surfacique S

```

1 % SS est declaree plus haut
2 % boucle sur les aretes
3 % -----
4 for l=1:Nbarestes
5     ref=Refarestes(l)
6     % calcul des matrices de masse surfacique elementaires de l'arete l
7     S1= Coorneu(Numarestes(l,1),:);
8     S2= Coorneu(Numarestes(l,2),:);
9     [Sel] = mat_elem_surface(S1, S2, ref)
10
11    % On fait l'assemblage de la matrice globale
12    for i=1:2
13        I = Numarestes(l, i);
14        for j=1:2
15            J = Numarestes(l, j);
16            SS(I, J) = SS(I, J) + Sel(i, j);
17        end % for j
18    end % for i
19 end; % for l
20
21 % Matrice EF
22 % -----
23 %AA = alpha*MM+KK;
24 AA = alpha*MM+KK+lambda*SS;

```

Listing 2.4 – Assemblage de la matrice globale

2.5 Validation du code

Cas tests pour valider le modèle

Nous présentons trois cas physiques réalistes permettant de valider les résultats obtenus numériquement tout en étant interprétables physiquement. Ces cas incluent les valeurs des paramètres α , λ , $S(x, y)$, et $u_c(x, y)$.

Cas 1 : Climatiseur sur le bord gauche

Ce cas modélise un domaine où le bord gauche est soumis à un climatiseur fixant la température à $T_c = 20$, tandis que les autres bords permettent la dissipation thermique selon les propriétés du matériau.

Paramètres :

- $\alpha = 1$: coefficient de dissipation homogène dans tout le domaine.
- $\lambda = 10$: forte influence des conditions aux limites.
- $S(x, y) = 0$: absence de source de chaleur interne.
- $T_c(x, y) = \begin{cases} 20, & \text{si } x = 0 \text{ et } 0 \leq y \leq 6, \\ 0, & \text{ailleurs.} \end{cases}$
- $\sigma_1 = 1$, $\sigma_2 = 0.5$: conductivités thermiques des sous-domaines Ω_1 et Ω_2 , respectivement.

Interprétation physique : Ce cas illustre un refroidissement contrôlé du bord gauche par un climatiseur. La dissipation thermique dans le domaine est influencée par les propriétés des sous-domaines, avec une température plus faible près du bord gauche.

Cas 2 : Chauffage non uniforme et climatisation aux bords droit et gauche

Ce cas représente un domaine avec un chauffage interne non uniforme et des climatiseurs fixant la température aux bords droit et gauche.

Paramètres :

- $\alpha = 2$: coefficient de dissipation modéré.
- $\lambda = 5$: influence moyenne des conditions aux limites.
- $S(x, y) = \sin(\pi x) \sin(\pi y)$: source de chaleur non uniforme.
- $T_c(x, y) = \begin{cases} 20, & \text{si } x = 0 \text{ et } 0 \leq y \leq 6, \\ 20, & \text{si } x = 9 \text{ et } 0 \leq y \leq 6, \\ 0, & \text{ailleurs.} \end{cases}$
- $\sigma_1 = 1$, $\sigma_2 = 1$: conductivités thermiques identiques dans Ω_1 et Ω_2 .

Interprétation physique : Ce cas modélise une plaque homogène soumise à un chauffage interne non uniforme, avec des bords dissipant la chaleur. La température sera plus élevée au centre du domaine en raison de la source interne.

Cas 3 : Refroidissement du bord inférieur

Ce cas modélise un refroidissement partiel du bord inférieur par un climatiseur, avec une source de chaleur variable dans le domaine.

Paramètres :

- $\alpha = 3$: coefficient de dissipation élevé.
- $\lambda = 2$: faible influence des conditions aux limites.
- $S(x, y) = \exp\left(-\frac{(x-5)^2+(y-3)^2}{2}\right)$: source variable dans tout le domaine.

$$— T_c(x, y) = \begin{cases} 15, & \text{si } y = 0 \text{ et } 0 \leq x \leq 2, \\ 15, & \text{si } y = 2 \text{ et } 2 \leq x \leq 7, \\ 15, & \text{si } y = 0 \text{ et } 7 \leq x \leq 9, \\ 0, & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

- $\sigma_1 = 0.8, \sigma_2 = 5$: conductivités thermiques dans les sous-domaines Ω_1 et Ω_2 .

Interprétation physique : Ce cas représente un refroidissement localisé au bord inférieur, entraînant un flux thermique dirigé vers cette zone. La température sera plus élevée loin du bord inférieur refroidi et diminuera progressivement vers ce dernier.

Ces cas permettent d'analyser les performances du modèle numérique dans des scénarios réalistes et d'interpréter les résultats obtenus de manière physique.¹

1. Ces cas ont été mis en place après des recherches dans la littérature ...

Solutions obtenues dans les différents cas

Les simulations numériques ont été effectuées avec un maillage généré par le domaine de la figure 1.6 et un pas de maillage constant pris à $h = 0.1$.

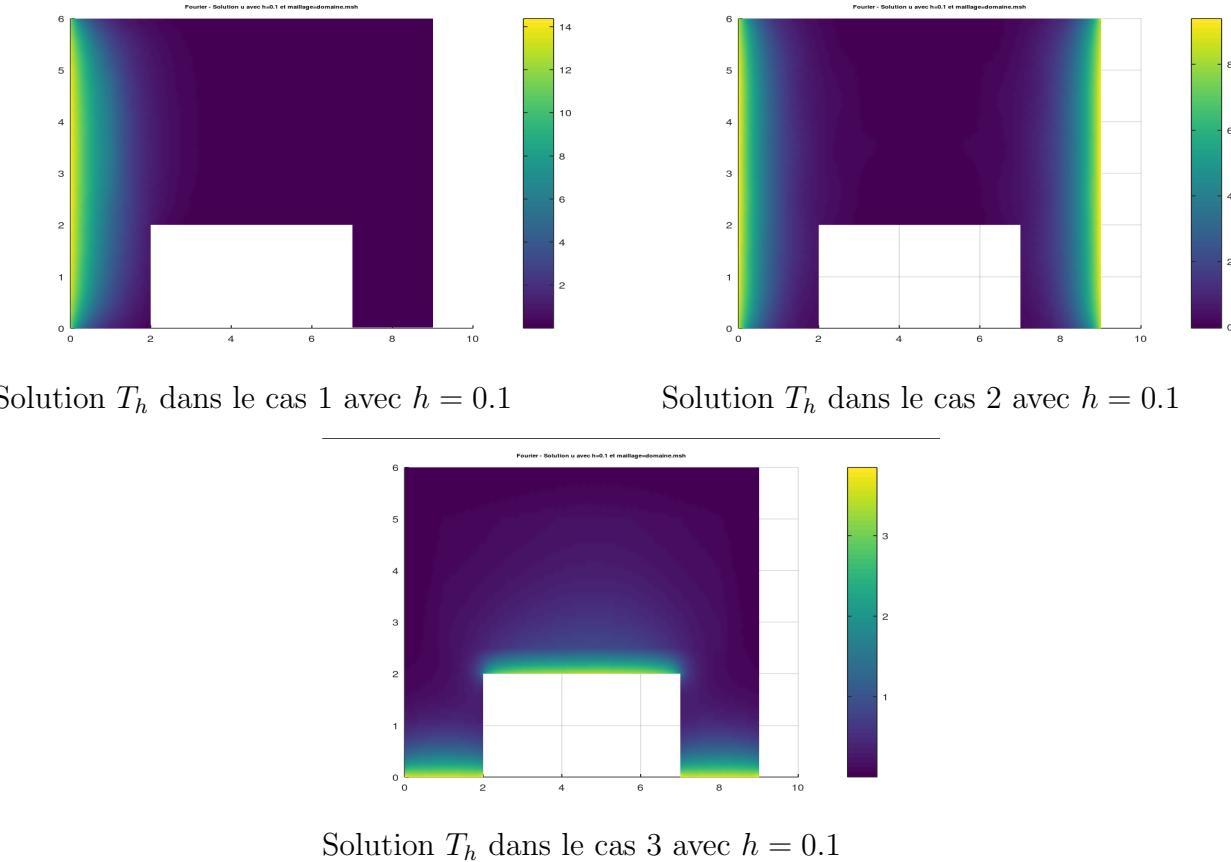


FIGURE 2.1 – Solutions T_h pour divers cas de configurations avec conditions de Fourier.

Interprétations des solutions obtenues dans les différents cas

Dans nos configurations, le flux de chaleur est positif d'où on fait une interprétation inverse à ce qu'on observe sur les figures pour se ramener à la fonction usuelle d'un climatiseur bien qu'il puisse aussi débiter de la chaleur. (choix arbitraire)

Cas 1 : Refroidissement contrôlé par le bord gauche

La solution montre que la température est plus faible à proximité du bord gauche soumis à une condition de température constante imposée. Dans le reste du domaine, la dissipation thermique se propage selon les conductivités des sous-domaines, avec une transition plus marquée dans le sous-domaine ayant une conductivité thermique plus faible. L'absence de source interne entraîne des gradients thermiques faibles, surtout dans le sous-domaine avec une conductivité plus élevée.

Cas 2 : Chauffage non uniforme et climatisation aux bords droit et gauche

La solution met en évidence une répartition de la température influencée à la fois par une source interne non uniforme et par les conditions imposées sur les bords. La température est globalement plus élevée au centre du domaine en raison de l'effet de la source interne, tandis que les bords dissipent la chaleur de manière symétrique.

Cas 3 : Refroidissement du bord inférieur

La solution illustre un refroidissement localisé sur le bord inférieur, où les conditions imposées abaissent significativement la température. La source de chaleur variable crée une distribution thermique centrée dans le domaine, avec des gradients marqués dirigés vers le bord refroidi. Les conductivités thermiques différentes influencent également la dissipation, avec une décroissance rapide de la température dans le sous-domaine à conductivité élevée.

Les solutions obtenues nous permettent de conclure quant à la validation du code.

2.6 Représentation des solutions obtenues dans des cas singuliers

Conditions et solutions obtenues dans les 2 cas de configurations.

Le cas 1 et 2 correspondent respectivement aux conditions suivantes :

- (i) $S(x, y) = \sin(\pi x/2) \sin(\pi y/2)$ et

$$\Omega_1 = (0, 2)^2, \quad \Omega_2 = (0.2, 1.8) \times (0.2, 1.2), \quad \alpha = 1, \quad \sigma_1 = \sigma_2 = 1, \quad \lambda = 0;$$

Le domaine Ω correspond à celui de la figure 1.2

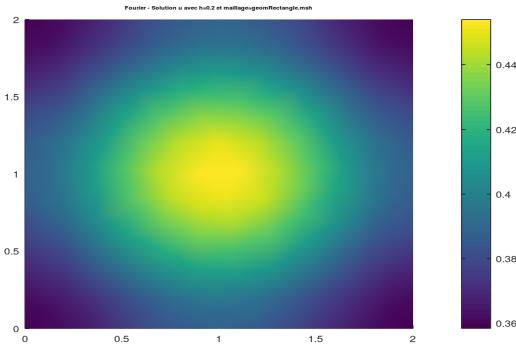
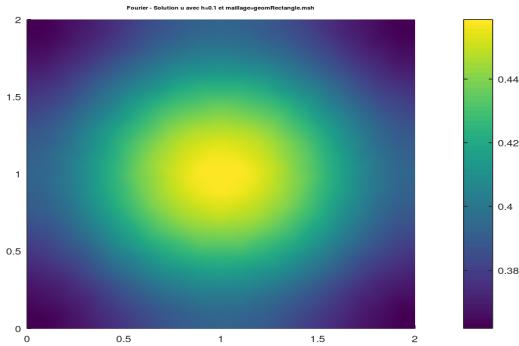
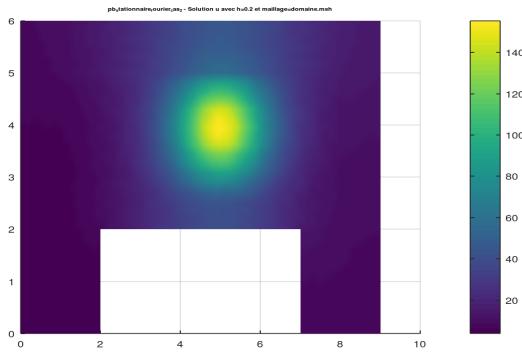
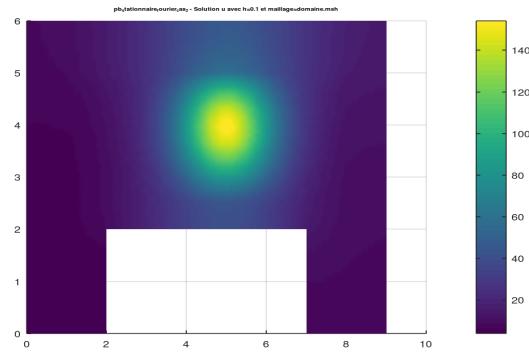
- (ii) Le domaine de la figure 1.6 avec

$$\lambda = 1 \quad \text{et} \quad T_c = 285, \quad \sigma_1 = 5, \quad \sigma_2 = \frac{1}{4 \cdot (2 + \sin(16\pi x)) \cdot (2 + \sin(16\pi y))}, \quad \text{et enfin}$$

$$S(x, y) = 600 \exp\left(-\left(\frac{x-5}{0.8}\right)^2 - \left(\frac{y-4}{0.8}\right)^2\right) \quad \text{et on choisit également} \quad \alpha = 1$$

Solutions obtenues dans les 2 cas singuliers

Les simulations numériques ont été effectuées un pas de maillage pris à $h = 0.2$ et $h = 0.1$.

Solution T_h cas 1 avec maillage de pas $h = 0.2$ Solution T_h cas 1 avec maillage de pas $h = 0.1$ Solution T_h cas 2 avec maillage de pas $h = 0.2$ Solution T_h cas 2 avec maillage de pas $h = 0.1$ FIGURE 2.2 – Solutions T_h pour différentes valeurs de h dans les 2 cas singuliers.

Interprétations des solutions obtenues dans les 2 cas singuliers

Cas 1 : Chauffage avec source périodique

Dans ce cas, les conditions imposées génèrent une solution où la température est maximale au centre de Ω_2 , comme attendu, en raison de l'absence de dissipation thermique ($\lambda = 0$).

La distribution régulière de la température reflète la nature homogène de la conductivité σ . Cependant, dans Ω_2 , bien que les valeurs de σ soient égales, un léger phénomène de diffusion est observé. Ce comportement est cohérent avec les conditions sur S , mais reste limité par les dimensions plus petites de ce sous-domaine.

Ainsi, la solution est physiquement valide et numériquement stable.

Cas 2 : Source gaussienne avec conductivité variable

Pour ce cas, la source est $S(x, y) = 600 \exp\left(-\left(\frac{x-5}{0.8}\right)^2 - \left(\frac{y-4}{0.8}\right)^2\right)$.

La fonction source est donc une gaussienne centrée sur $(x, y) = (5, 4)$, c'est donc à ce point qu'elle présente son maximum. Cela se répercute logiquement sur notre solution, puisque l'on voit que la température est plus élevée au voisinage de ce point.

Les conductivités σ_1 et σ_2 diffèrent, avec σ_2 présentant une variabilité spatiale importante.

La solution obtenue montre une concentration thermique près du centre du domaine Ω_2 tandis que la chaleur se propage plus difficilement dans Ω_1 .

Nous expliquons cela par le fait que la concentration de la source de chaleur en (5, 4), donc dans Ω_2 , l'emporte (au sens où c'est le phénomène physique qui compte le plus dans la valeur de la température) sur le fait que la conductivité y est plus faible que dans Ω_1 .

Dans Ω_2 , on observe une diffusion irrégulière sous forme de gradients irréguliers sur le bord supérieur due à la variation discontinue de la conductivité.

Ce phénomène est attendu, car la variation de σ entraîne des vitesses de diffusion non homogènes.

Ce comportement nous semble physiquement plausible et illustre les effets d'une conductivité non homogène.

Conclusion Les deux solutions sont cohérentes avec les conditions physiques imposées.

Dans le cas 1, la régularité de la température confirme la nature homogène des paramètres avec un motif symétrique.

Pour le cas 2, l'anisotropie thermique dans Ω_2 démontre l'impact de la variabilité de σ .

Ces simulations nous paraissent ainsi pertinentes pour étudier l'évolution de la température dans des domaines plus complexes qu'un polygone régulier comme vu en cours et confirment la validité des modèles numériques utilisés.

3 Problème complet : Equation de la chaleur instationnaire avec des conditions aux limites mixtes

3.1 Modélisation avec discrétisation en temps et en espace

On veut maintenant modéliser l'équation de la chaleur, avec une température $T \equiv T(x, y, t)$ dépendant du temps t . On résout dans ce cas :

Trouver $T(t) \in H^1(\Omega)$ telle que

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial t} - \operatorname{div}(\sigma \nabla T) = S & \text{dans } \Omega \times]0, t_{max}[\\ T = T_\Gamma & \text{sur } \partial\Omega \times]0, t_{max}[\\ T|_{t=0} = T_0 & \text{dans } \Omega \end{cases} \quad (3.1)$$

$S \equiv S(x, y, t)$ est la source de chaleur, et $T_0 \equiv T_0(x, y)$ est la valeur initiale de la température. On (semi-)discrétise en espace, en cherchant $T_h(t) \in V_h$, puis on discrétise en temps à l'aide d'un schéma implicite. Si on note Δt le pas de temps et $t^k = k \Delta t$ les instants discrets, k variant de 0 à $K = t_{max}/(\Delta t)$, on approche $T(t^k)$ par $T_h^k \in V_h$:

$$T_h^k(x, y) = \sum_{I=1}^N T_I^k w_I(x, y), \quad \forall (x, y) \in \overline{\Omega}.$$

On introduit le vecteur $\vec{T}^k \in \mathbb{R}^N$ dont la I ème composante vaut $T_I^k = T^k(S_I)$, et le vecteur \vec{U}_Γ dont la I ème composante vaut $T_\Gamma(S_I)$ si $S_I \in \partial\Omega$ et 0 sinon.

On discrétise en temps par un schéma implicite, pour k entre 0 et $K - 1$: $\frac{\partial T_h}{\partial t} \approx \frac{T_h^{k+1} - T_h^k}{\Delta t}$:

$$\frac{T_h^{k+1} - T_h^k}{\Delta t} - \operatorname{div}(\sigma \nabla T_h^{k+1}) = S^{k+1}.$$

En multipliant cette équation par $w_J \in V_h^0$, en intégrant sur Ω , et en utilisant une formule de Green (toutes les hypothèses de régularité sont réunies, très similaire à précédemment, et le terme de bord est nul car $w_J \in V_h^0$) on obtient la formulation variationnelle :

$$\forall J \in \{1, \dots, N_0\}, \int_{\Omega} \frac{T_h^{k+1} - T_h^k}{\Delta t} w_J \, d\Omega + \int_{\Omega} \sigma \nabla T_h^{k+1} \cdot \nabla w_J \, d\Omega = \int_{\Omega} S^{k+1} w_J \, d\Omega.$$

$S^{k+1} = S^{k+1}(x, y)$ étant une fonction analytique dont l'intégrale est compliquée à calculer en général, on l'interpole :

$$S^{k+1} \approx \pi_h S^{k+1} = \sum_{I=1}^N S_I^{k+1} (S_I) w_I = \sum_{I=1}^N S_I^{k+1} w_I(x, y)$$

On écrit ensuite les décompositions $T_h^k(x, y) = \sum_{I=1}^N T_I^k w_I(x, y)$ et $S_h^{k+1}(x, y) = \sum_{I=1}^N S_I^{k+1} w_I(x, y)$, pour obtenir :

$$\sum_{I=1}^N \frac{T_I^{k+1} - T_I^k}{\Delta t} \int_{\Omega} w_I w_J \, d\Omega + \sum_{I=1}^N T_I^{k+1} \int_{\Omega} \sigma \nabla w_I \cdot \nabla w_J \, d\Omega = \sum_{I=1}^N S_I^{k+1} \int_{\Omega} w_I w_J \, d\Omega.$$

On obtient donc finalement :

$$\sum_{I=1}^N \frac{T_I^{k+1} - T_I^k}{\Delta t} \int_{\Omega} w_I w_J d\Omega + \sum_{I=1}^N T_I^{k+1} \int_{\Omega} \sigma \nabla w_I \cdot \nabla w_J d\Omega = \sum_{I=1}^N S_I^{k+1} \int_{\Omega} w_I w_J d\Omega$$

En introduisant les matrices de masse et de raideur (de dimensions $N_0 \times N$), identiques à celles de la question 1.18, ainsi que le vecteur source :

— Matrice de masse $\tilde{\mathbb{M}}$:

$$\tilde{\mathbb{M}}_{IJ} = \int_{\Omega} w_I w_J d\Omega,$$

— Matrice de raideur $\tilde{\mathbb{K}}$:

$$\tilde{\mathbb{K}}_{IJ} = \int_{\Omega} \sigma \nabla w_I \cdot \nabla w_J d\Omega,$$

— Vecteur source \vec{L}^{k+1} de taille N_0 :

$$\vec{L}_J^{k+1} = \sum_{I=1}^N S_I^{k+1} \int_{\Omega} w_I w_J d\Omega,$$

on peut écrire l'équation sous forme matricielle :

$$\tilde{\mathbb{M}} \frac{\vec{T}^{k+1} - \vec{T}^k}{\Delta t} + \tilde{\mathbb{K}} \vec{T}^{k+1} = \vec{L}^{k+1}.$$

La condition initiale $T|_{t=0} = T_0$ évaluée aux sommets du maillage impose :

$$\vec{T}^0 = \vec{T}_0.$$

où \vec{T}_0 est le vecteur de \mathbb{R}^N dont la I ème composante vaut $T_{0,I} = T_0(S_I)$. T_Γ doit être interpolée pour réduire la complexité de la résolution :

$$T_\Gamma \approx \pi_h T_\Gamma = T_{\Gamma,h} = \sum_{j, S_j \in \partial\Omega} T_\Gamma(S_j) w_j.$$

On suppose que T_Γ n'est pas une fonction qui dépend du temps pour simplifier la résolution, mais on pourrait tout à fait l'envisager. L'exemple pris par le TP dans la suite est un $T_\Gamma = 285$ constant en espace et en temps donc ce ne sera pas un problème.

Ensuite, on écrit le calcul par blocs suivant :

On se ramène au calcul par blocs mis en place précédemment, à savoir :

$$\begin{pmatrix} \mathbb{A}_{II} & \mathbb{A}_{IB} \\ 0 & \mathbb{I}_{N-N_0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_I \\ U_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_I \\ T_{h,\Gamma} \end{pmatrix}.$$

Dans notre cas, on identifie :

$$\mathbb{A}_{II} = \frac{\tilde{\mathbb{M}}}{\Delta t} + \tilde{\mathbb{K}}, \quad \mathbb{A}_{IB} = -\frac{1}{\Delta t} \tilde{\mathbb{M}}, \quad L_I = \vec{L}^{k+1}, \quad U_I = T_h^{k+1}, \quad U_B = T_h^k,$$

et

$$T_{\Gamma,h} = U_\Gamma.$$

On obtient donc le calcul par blocs :

$$\begin{pmatrix} \frac{\tilde{\mathbb{M}}}{\Delta t} + \tilde{\mathbb{K}} & -\frac{1}{\Delta t} \tilde{\mathbb{M}} \\ 0 & \mathbb{I}_{N-N_0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_h^{k+1} \\ T_h^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L^{k+1} \\ T_{h,\Gamma} \end{pmatrix}.$$

Ainsi, le second membre se décompose en :

$$\tilde{\vec{L}}^{k+1} = \begin{pmatrix} L^{k+1} \\ T_{h,\Gamma} \end{pmatrix}.$$

Ensuite, on a :

$$T_h^{k+1} \left(\frac{\tilde{\mathbb{M}}}{\Delta t} + \tilde{\mathbb{K}} \right) = L^{k+1} + \frac{\tilde{\mathbb{M}}}{\Delta t} T_h^k.$$

On pose :

$$\mathbb{A}_t = \frac{\tilde{\mathbb{M}}}{\Delta t} + \tilde{\mathbb{K}}.$$

Ainsi, la solution T_h^{k+1} s'exprime comme :

$$T_h^{k+1} = \mathbb{A}_t^{-1} \left(L^{k+1} + \frac{\tilde{\mathbb{M}}}{\Delta t} T_h^k \right).$$

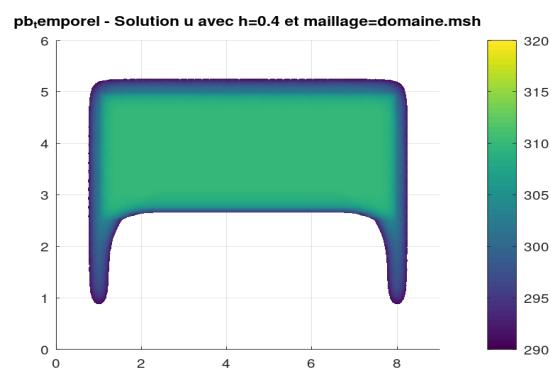
Il suffit de résoudre itérativement ce système en faisant une boucle sur chaque instant k . Nous avons écrit le code correspondant dans le fichier `principal_chaleur.m`.

3.2 Solution obtenue dans la simulations numérique et interprétation

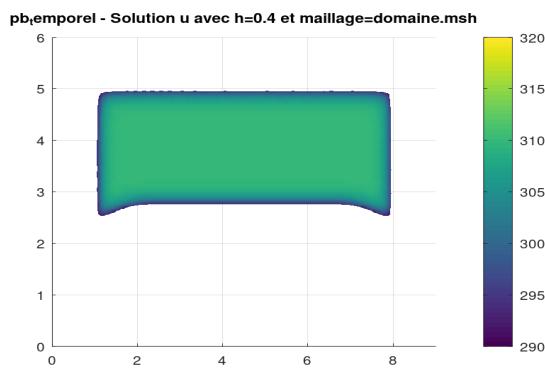
Le film suivant retrace l'évolution de la température au sein du domaine `domaine.geo` pour un pas $h = 0.1$:



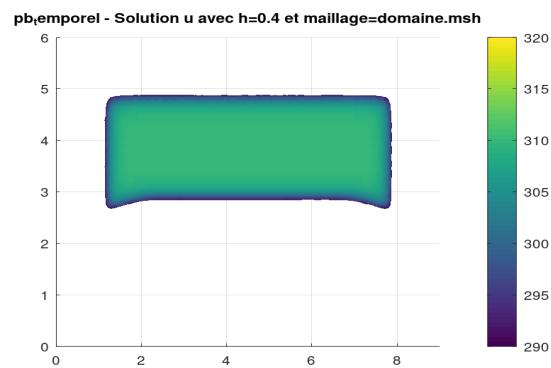
Solution T_h au temps 1.



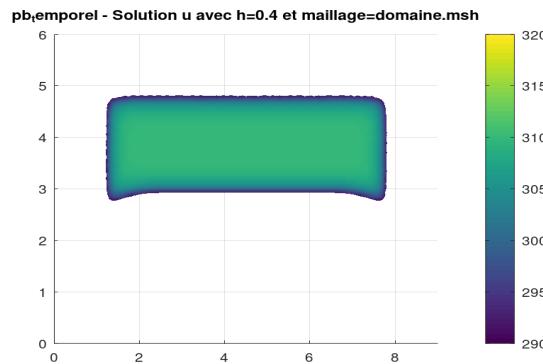
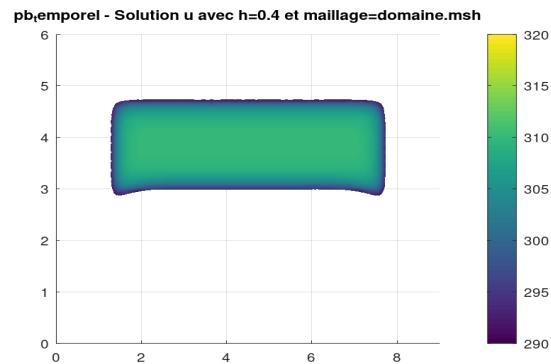
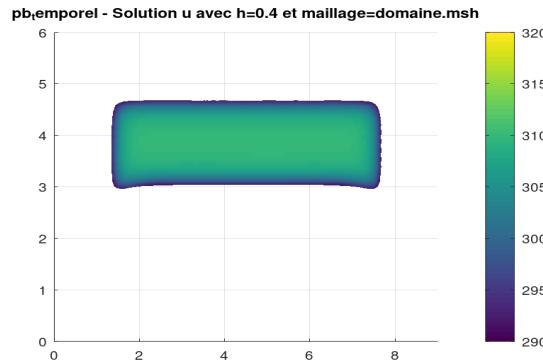
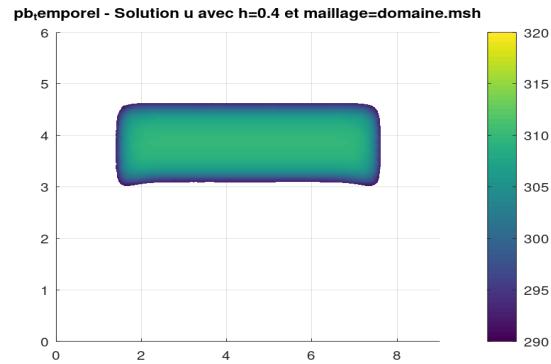
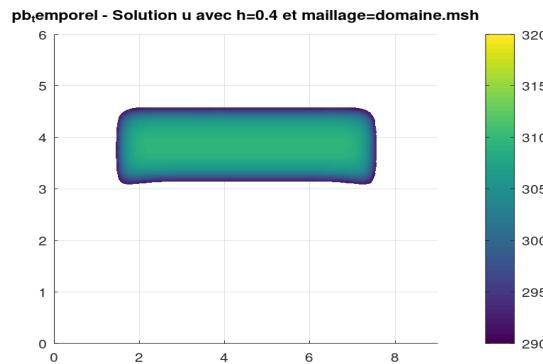
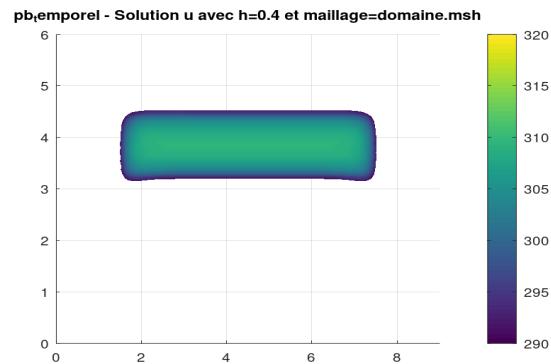
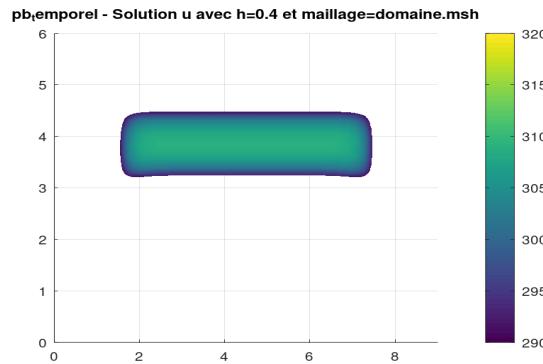
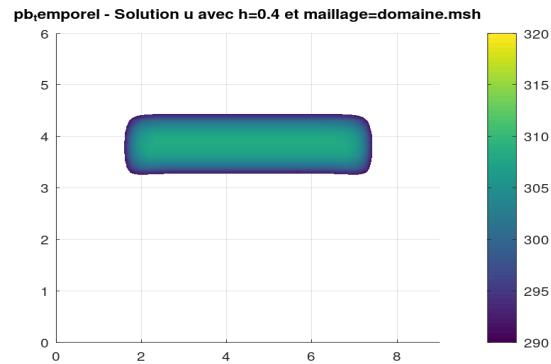
Solution T_h au temps 2.

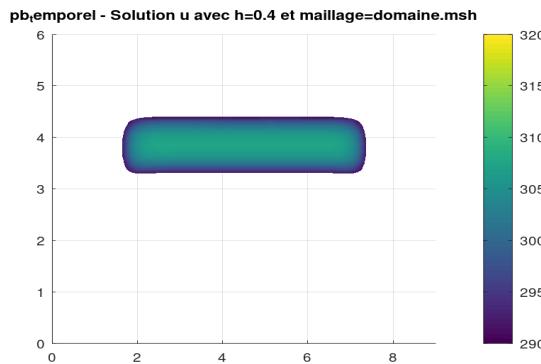
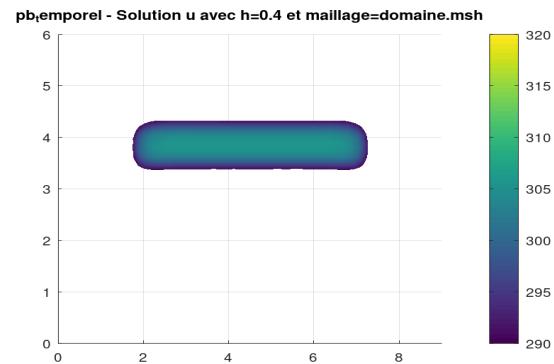
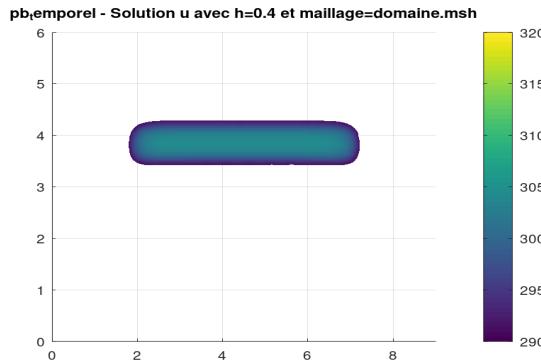
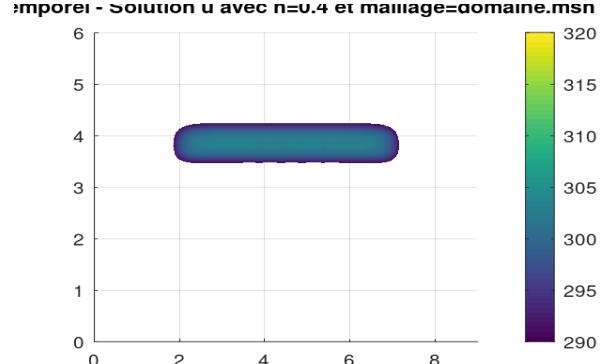
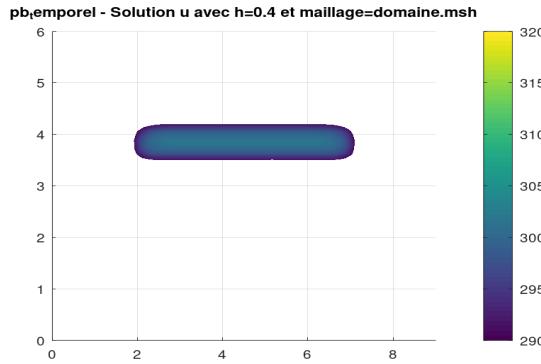
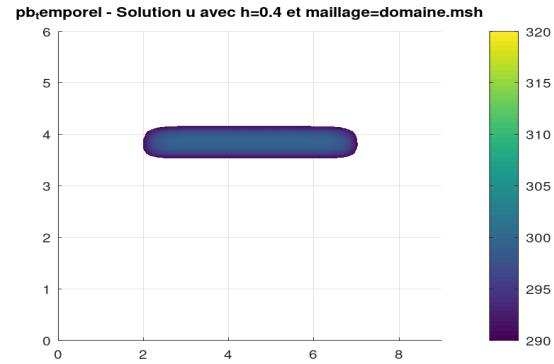
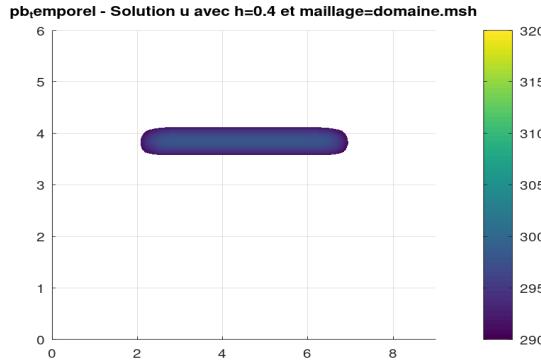
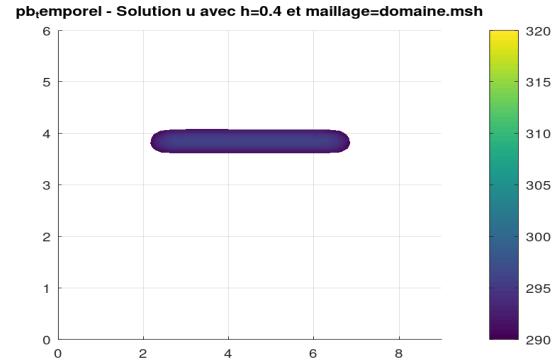


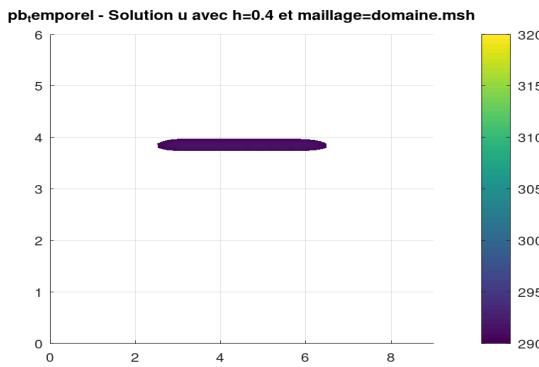
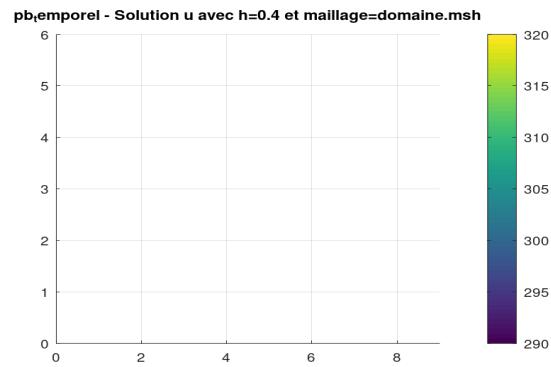
Solution T_h au temps 3.



Solution T_h au temps 4.


 Solution T_h au temps 5.

 Solution T_h au temps 6.

 Solution T_h au temps 7.

 Solution T_h au temps 8.

 Solution T_h au temps 9.

 Solution T_h au temps 10.

 Solution T_h au temps 11.

 Solution T_h au temps 12.


 Solution T_h au temps 13.

 Solution T_h au temps 14.

 Solution T_h au temps 15.

 Solution T_h au temps 16.

 Solution T_h au temps 17.

 Solution T_h au temps 18.

 Solution T_h au temps 19.

 Solution T_h au temps 20.

Solution T_h temps 21.Solution T_h temps 22.

Solutions T_h à différents pas de temps.

N'est-ce pas merveilleux ?

A noter qu'il y a marqué $h = 0.4$ au dessus de chaque figure mais il s'agit d'un oubli, le pas h valait bien 0.1 ici.

Au début de la simulation, la température est uniforme dans tout le domaine Ω . Cela est attendu car la condition initiale définit une température constante dans l'ensemble du domaine.

L'évolution montre une concentration de la température vers le centre de Ω_2 . Cela est dû au fait que la source est gaussienne en espace et maximale vers le centre de Ω_2 , et comme elle est pondérée par un facteur exponentiellement décroissant en temps, c'est vers le centre que les températures mettent le plus de temps à décroître car elles sont tout simplement plus élevées.

Merci pour votre lecture !