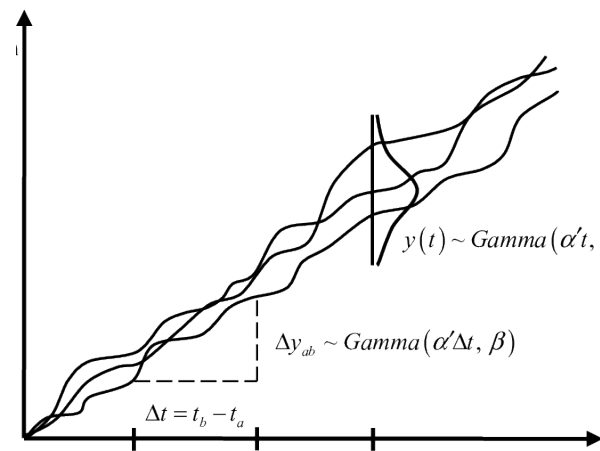


Rapport intermédiaire - Projet de spécialité

Modèles aléatoires et inférence statistique pour les données de dégradation



Corentin Alary-Ferrandiz | Aya Elarbaoui | Soufiane Lemrabet | Dillane Mahan | Abdoul Kader

Table des matières

I.Introduction	3
II.Organisation Générale	3
III.Etude du processus de Wiener	3
III.1 : Calcul des estimateurs du maximum de vraisemblance	3
Estimateur de maximum de vraisemblance de $\mu, \hat{\mu}$	4
Estimateur du maximum de vraisemblance de $\sigma^2, \hat{\sigma}^2$	5
III.2 : Biais des estimateurs du maximum de vraisemblance	5
Biais de $\hat{\mu}$	5
Biais de $\hat{\sigma}^2$	6
III.3 : Calcul des estimateurs des moments	7
Estimateur des moments de $\mu, \tilde{\mu}$	7
Estimateur des moments de $\sigma^2, \tilde{\sigma}^2$	7
III.4.Biais des estimateurs des moments	7
Biais de $\tilde{\mu}$	7
Biais de $\tilde{\sigma}^2$	7
III.5.Temps de dépassement du seuil	7
IV. Simulation et estimation des paramètres pour le processus de Wiener	8
V.Etude du processus de Gamma	9
V.1.Estimation des paramètres du processus Gamma par la méthode du maximum de vraisemblance	9
VI.Simulation et estimation du processus de Gamma	10
VII. Estimation des paramètres des différents processus sur des données réelles	10

I.Introduction

L'objet de ce projet était d'étudier différents processus de dégradation. Avant de présenter notre travail, nous allons donc expliquer brièvement ce qu'est un «processus de dégradation» ainsi qu'expliciter l'intérêt de leur étude.

Le terme «Processus de dégradation» fait référence à un ensemble de modèles probabilistes qui correspondent à différents types de processus stochastiques. De nombreux phénomènes de dégradations comme par exemple les processus d'usure de composants matériels, la corrosion ou encore la croissance de fissures peuvent se modéliser par des processus de dégradation. Les étudier permet de mieux les comprendre et de prédire leur évolution. Dans le cadre industriel cela permet notamment de prévoir la date à laquelle un composant atteindra son niveau d'usure critique afin de faire de la maintenance prédictive. Dans la suite, c'est dans cette perspective que nous avons étudié le processus de gamma et le processus de Wiener en les simulant ainsi qu'en estimant les paramètres les caractérisants à la fois sur des données simulées et réelles.

Le support qui a été choisi lors de ce projet afin de visualiser nos résultats est une application web Shiny.

II.Organisation Générale

Afin de bien identifier la source de nos éventuelles erreurs et de permettre de faire évoluer facilement notre application Shiny nous avons décidé de cloisonner au maximum notre travail. Nous avons ainsi travaillé en séparant trois grandes parties.

La première partie était celle de l'application web en elle-même composé des fichiers server.R, consacré aux calculs côté serveur de l'application, et ui.R, consacré à l'interface graphique de l'application.

La seconde partie concernait la simulation des processus de dégradation et l'estimation des paramètres les caractérisant sur des données simulées puis réelles. En dehors de server.R et ui.R, tous les fichiers .R de notre projet se situent dans cette partie. Dans celle-ci se trouve également des fichiers.csv contenant des données réelles de dégradation.

La troisième partie quant à elle était la partie purement mathématique avec tous les calculs permettant d'estimer les paramètres des différents processus de dégradation.

III.Etude du processus de Wiener

Le premier processus que nous avons étudié est le processus de Wiener qui modélise une dégradation continue avec une tendance croissante mais avec une trajectoire non monotone.

Voici sa définition : Le processus stochastique $W = (W_t)_{t \geq 0}$ est un processus de Wiener si $\forall t \geq 0$, $W_t = \mu t + \sigma B_t$ où $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ et $(B_t)_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien. Dans ce cas μ est un paramètre de "drift" et σ^2 un paramètre de variance (ou de volatilité).

III.1 : Calcul des estimateurs du maximum de vraisemblance

Nous nous plaçons dans le cas où nous observons d trajectoires de dégradations que nous modélisons par des processus de Wiener. Pour chacun de ces phénomènes nous relevons n instants de la dégradation.

Notons $W_{t_i}^{(k)}$ la variable pour modélisant le niveau de dégradation à l'instant t_i du phénomène k.

Soit $\Delta W_i^{(k)} = W_{t_i}^{(k)} - W_{t_{i-1}}^{(k)}$ alors $\Delta W_i^{(k)} \sim \mathcal{N}(\mu \Delta t_i, \sigma^2 \Delta t_i)$ avec $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$

Calculons ainsi la fonction de vraisemblance pour les d échantillons $\Delta w_1, \dots, \Delta w_n$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(\Delta w_1^{(1)}, \dots, \Delta w_n^{(1)}, \dots, \Delta w_1^{(d)}, \dots, \Delta w_n^{(d)}, \mu, \sigma) &= f_{\Delta W_1^{(1)}, \dots, \Delta W_n^{(1)}, \dots, \Delta W_1^{(d)}, \dots, \Delta W_n^{(d)}}(\Delta w_1^{(1)}, \dots, \Delta w_n^{(1)}, \dots, \Delta w_1^{(d)}, \dots, \Delta w_n^{(d)}, \mu, \sigma) \\
&= \prod_{k=1}^d f_{\Delta W_1^{(k)}, \dots, \Delta W_n^{(k)}}(\Delta w_1^{(k)}, \dots, \Delta w_n^{(k)}, \mu, \sigma) \\
&= \prod_{k=1}^d \prod_{i=1}^n f_{\Delta W_i^{(k)}}(\Delta w_i^{(k)}, \mu, \sigma) \\
&= \prod_{k=1}^d \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sigma \sqrt{\Delta t_i} \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{(\Delta w_i^{(k)} - \mu \Delta t_i)^2}{\sigma^2 \Delta t_i} \right)} \\
&= \left(\frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \right)^{nd} \left(\prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{\Delta t_i}} \right)^d \prod_{k=1}^d e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{(\Delta w_i^{(k)} - \mu \Delta t_i)^2}{\sigma^2 \Delta t_i} \right)} \\
&= \left(\frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \right)^{nd} \left(\prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{\Delta t_i}} \right)^d e^{-\frac{1}{2} \sum_{k=1}^d \sum_{i=1}^n \left(\frac{(\Delta w_i^{(k)} - \mu \Delta t_i)^2}{\sigma^2 \Delta t_i} \right)}
\end{aligned}$$

D'où :

$$\ln(\mathcal{L}(\Delta w_1^{(1)}, \dots, \Delta w_n^{(1)}, \dots, \Delta w_1^{(d)}, \dots, \Delta w_n^{(d)}, \mu, \sigma)) = nd \times \ln\left(\frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}}\right) - d \times \ln\left(\prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{\Delta t_i}}\right) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^d \sum_{i=1}^n \left(\frac{(\Delta w_i^{(k)} - \mu \Delta t_i)^2}{\sigma^2 \Delta t_i} \right)$$

Estimateur de maximum de vraisemblance de μ , $\hat{\mu}$

Notons le résultat suivant :

$$\frac{\partial(\mu \rightarrow \frac{(\Delta w_i^{(k)} - \mu \Delta t_i)^2}{\sigma^2 \Delta t_i})}{\partial \mu} = \frac{-2(\Delta w_i^{(k)} - \mu \Delta t_i)}{\sigma^2}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \ln(\mathcal{L}(\Delta w_1^{(1)}, \dots, \Delta w_n^{(1)}, \dots, \Delta w_1^{(d)}, \dots, \Delta w_n^{(d)}, \mu, \sigma))}{\partial \mu} &= -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^d \sum_{i=1}^n \frac{-2(\Delta w_i^{(k)} - \mu \Delta t_i)}{\sigma^2} \\
&= \sum_{k=1}^d \left[\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n \Delta w_i^{(k)} - \frac{\mu}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n \Delta t_i \right] \\
&= \frac{1}{\sigma^2} \sum_{k=1}^d \sum_{i=1}^n \Delta w_i^{(k)} - \frac{\mu}{\sigma^2} \sum_{k=1}^d \sum_{i=1}^n \Delta t_i \\
\frac{\partial \ln(\mathcal{L}(\Delta w_1^{(1)}, \dots, \Delta w_n^{(1)}, \dots, \Delta w_1^{(d)}, \dots, \Delta w_n^{(d)}, \mu, \sigma))}{\partial \mu} &= \frac{1}{\sigma^2} \sum_{k=1}^d \sum_{i=1}^n \Delta w_i^{(k)} - \frac{\mu \times d}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n \Delta t_i
\end{aligned}$$

Ainsi on obtient que :

$$\frac{\partial \ln(\mathcal{L}(\Delta w_1^{(1)}, \dots, \Delta w_n^{(1)}, \dots, \Delta w_1^{(d)}, \dots, \Delta w_n^{(d)}, \mu, \sigma))}{\partial \mu} = 0$$

\Leftrightarrow

$$\frac{\mu \times d}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n \Delta t_i = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{k=1}^d \sum_{i=1}^n \Delta w_i^{(k)}$$

\Leftrightarrow

$$\mu = \frac{1}{d \sum_{i=1}^n \Delta t_i} \times \sum_{k=1}^d \sum_{i=1}^n \Delta w_i^{(k)}$$

Ainsi :
$$\hat{\mu} = \frac{1}{d \sum_{i=1}^n \Delta t_i} \times \sum_{k=1}^d \sum_{i=1}^n \Delta W_i^{(k)} = \frac{\sum_{k=1}^d W_n^{(k)}}{d \times t_n}$$

Estimateur du maximum de vraisemblance de $\sigma^2, \hat{\sigma}^2$

$$\ln(\mathcal{L}(\Delta w_1^{(1)}, \dots, \Delta w_n^{(1)}, \dots, \Delta w_1^{(d)}, \dots, \Delta w_n^{(d)}, \mu, \sigma)) = nd \times \ln\left(\frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}}\right) - d \times \ln\left(\prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{\Delta t_i}}\right) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^d \sum_{i=1}^n \left(\frac{(\Delta w_i^{(k)} - \mu \Delta t_i)^2}{\sigma^2 \Delta t_i}\right)$$

Notons le résultat suivant :

$$\frac{\partial(\sigma \rightarrow \frac{(\Delta w_i^{(k)} - \mu \Delta t_i)^2}{\sigma^2 \Delta t_i})}{\partial \sigma^2} = -\frac{(\Delta w_i^{(k)} - \mu \Delta t_i)^2}{(\sigma^2)^2 \Delta t_i}$$

Notons également le second résultat suivant :

$$\frac{\partial(\sigma \rightarrow nd \times \ln(\frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}}))}{\partial \sigma^2} = \frac{-nd}{2\sigma^2}$$

Ainsi on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln(\mathcal{L}(\Delta w_1^{(1)}, \dots, \Delta w_n^{(1)}, \dots, \Delta w_1^{(d)}, \dots, \Delta w_n^{(d)}, \mu, \sigma))}{\partial \sigma^2} &= \frac{-nd}{2\sigma^2} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^d \sum_{i=1}^n \frac{(\Delta w_i^{(k)} - \mu \Delta t_i)^2}{(\sigma^2)^2 \Delta t_i} \\ &= \frac{1}{(\sigma^2)^2} (-nd \times \sigma^2 + \sum_{k=1}^d \sum_{i=1}^n \frac{(\Delta w_i^{(k)} - \mu \Delta t_i)^2}{\Delta t_i}) \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\frac{\partial \ln(\mathcal{L}(\Delta w_1^{(1)}, \dots, \Delta w_n^{(1)}, \dots, \Delta w_1^{(d)}, \dots, \Delta w_n^{(d)}, \mu, \sigma))}{\partial \sigma^2} = 0$$

\Leftrightarrow

$$nd \times \sigma^2 = \sum_{k=1}^d \sum_{i=1}^n \frac{(\Delta w_i^{(k)} - \mu \Delta t_i)^2}{\Delta t_i}$$

Ainsi :

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{nd} \times \sum_{k=1}^d \sum_{i=1}^n \frac{(\Delta W_i^{(k)} - \hat{\mu} \Delta t_i)^2}{\Delta t_i} = \frac{1}{nd} \sum_{k=1}^d \sum_{i=1}^n \frac{(\Delta W_i^{(k)})^2}{\Delta t_i} - \hat{\mu}^2 \frac{t_n}{n}$$

III.2 : Biais des estimateurs du maximum de vraisemblance

Biais de $\hat{\mu}$

$$\hat{\mu} = \frac{\sum_{k=1}^d W_n^{(k)}}{d \times t_n}$$

Or $W_n^{(k)} \sim \mathcal{N}(\mu t_n, \sigma^2 t_n)$

Donc :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\hat{\mu}] &= \mathbb{E}\left[\frac{\sum_{k=1}^d W_n^{(k)}}{d \times t_n}\right] \\
&= \frac{\sum_{k=1}^d \mathbb{E}[W_n^{(k)}]}{d \times t_n} \\
&= \frac{d \times \mu t_n}{d \times t_n} \\
\mathbb{E}[\hat{\mu}] &= \mu
\end{aligned}$$

Par conséquent $\hat{\mu}$ est sans biais

Biais de $\hat{\sigma}^2$

• On sait que $\Delta W_i^{(k)} \sim \mathcal{N}(\mu \Delta t_i, \sigma^2 \Delta t_i)$

Donc :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[(\Delta W_i^{(k)})^2] &= \text{Var}[\Delta W_i^{(k)}] + \mathbb{E}[\Delta W_i^{(k)}]^2 \\
&= \sigma^2 \Delta t_i + \mu^2 \Delta t_i \\
\mathbb{E}[(\Delta W_i^{(k)})^2] &= \Delta t_i (\sigma^2 + \mu^2 \Delta t_i)
\end{aligned}$$

• On sait que $W_n^{(k)} \sim \mathcal{N}(\mu t_n, \sigma^2 t_n)$:

Donc $\sum_{k=1}^d W_n^{(k)} \sim \mathcal{N}(\mu d \times t_n, \sigma^2 d \times t_n)$

$$\hat{\mu} = \frac{\sum_{k=1}^d W_n^{(k)}}{d \times t_n} \sim \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{d \times t_n}\right)$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\hat{\mu}^2 \times \frac{t_n}{n}] &= \frac{t_n}{n} \mathbb{E}[\hat{\mu}^2] \\
&= \frac{t_n}{n} [\text{Var}[\hat{\mu}] + \mathbb{E}[\hat{\mu}]^2] \\
&= \frac{t_n}{n} \left[\frac{\sigma^2}{d \times t_n} + \mu^2 \right] \\
\mathbb{E}[\hat{\mu}^2 \times \frac{t_n}{n}] &= \frac{\sigma^2}{nd} + \mu^2 \frac{t_n}{n}
\end{aligned}$$

• Finalement à partir de ces résultats intermediaires on calcule le biais de $\hat{\sigma}^2$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\hat{\sigma}^2] &= \mathbb{E}\left[\frac{1}{nd} \sum_{k=1}^d \sum_{i=1}^n \frac{(\Delta W_i^{(k)})^2}{\Delta t_i} - \hat{\mu}^2 \frac{t_n}{n}\right] \\
&= \frac{1}{nd} \sum_{k=1}^d \sum_{i=1}^n \frac{\mathbb{E}[(\Delta W_i^{(k)})^2]}{\Delta t_i} - \mathbb{E}[\hat{\mu}^2 \frac{t_n}{n}] \\
&= \frac{1}{nd} \sum_{k=1}^d \sum_{i=1}^n (\sigma^2 + \mu^2 \Delta t_i) - \left(\frac{\sigma^2}{nd} + \mu^2 \frac{t_n}{n}\right) \\
&= \sigma^2 + \frac{\mu^2 t_n}{n} - \frac{\sigma^2}{nd} - \mu^2 \frac{t_n}{n} \\
\mathbb{E}[\hat{\sigma}^2] &= \sigma^2 \left(\frac{nd-1}{nd}\right)
\end{aligned}$$

Par conséquent $\hat{\sigma}^2$ est biaisé mais il est simple de le débiaisé pour obtenir $\hat{\sigma}^{2'}$:

$\hat{\sigma}^{2'} = \frac{nd}{nd-1} \hat{\sigma}^2$ Ainsi :

$$\hat{\sigma}^{2'} = \frac{1}{nd-1} \times \sum_{k=1}^d \sum_{i=1}^n \frac{(\Delta W_i^{(k)} - \hat{\mu} \Delta t_i)^2}{\Delta t_i}$$

III.3 : Calcul des estimateurs des moments

Estimateur des moments de $\mu, \tilde{\mu}$

On sait que $W_n^{(k)} \sim \mathcal{N}(\mu t_n, \sigma^2 t_n)$ et donc $\frac{W_n^{(k)}}{t_n} \sim \mathcal{N}(\mu, \frac{\sigma^2}{t_n})$

Ainsi $\mathbb{E}[\frac{W_n^{(k)}}{t_n}] = \mu$

Donc $\tilde{\mu} = \frac{1}{d} \sum_{k=1}^d \frac{W_n^{(k)}}{t_n}$

Finalement :

$$\tilde{\mu} = \frac{1}{dt_n} \sum_{k=1}^d W_n^{(k)} = \hat{\mu}$$

Estimateur des moments de $\sigma^2, \tilde{\sigma}^2$

On sait que $\Delta W_i^{(k)} \sim \mathcal{N}(\mu \Delta t_i, \sigma^2 \Delta t_i)$

Donc $\frac{\Delta W_i^{(k)} - \mu \Delta t_i}{\sqrt{\Delta t_i}} \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$

Finalement : $\tilde{\sigma}^2 = \frac{1}{nd} \sum_{k=1}^d \sum_{i=1}^n \frac{(\Delta W_i^{(k)} - \tilde{\mu} \Delta t_i)^2}{\Delta t_i}$

III.4. Biais des estimateurs des moments

Biais de $\tilde{\mu}$

Comme $\tilde{\mu} = \hat{\mu}$ et que $\hat{\mu}$ est sans biais, alors $\tilde{\mu}$ est sans biais.

Biais de $\tilde{\sigma}^2$

Comme $\tilde{\mu} = \hat{\mu}$, $\tilde{\sigma}^2 = \frac{1}{nd} \sum_{k=1}^d \sum_{i=1}^n \frac{(\Delta W_i^{(k)} - \tilde{\mu} \Delta t_i)^2}{\Delta t_i} = \frac{1}{nd} \sum_{k=1}^d \sum_{i=1}^n \frac{(\Delta W_i^{(k)} - \hat{\mu} \Delta t_i)^2}{\Delta t_i} = \hat{\sigma}^2$

Or, on sait d'après la partie II que $\hat{\sigma}^2$ est biaisé, pour le débiaisé on procède comme précédemment en multipliant par $\frac{nd}{nd-1}$, cela nous donne $\hat{\sigma}^{2'}$.

Ainsi : $\hat{\sigma}^{2'} = \frac{1}{nd-1} \times \sum_{k=1}^d \sum_{i=1}^n \frac{(\Delta W_i^{(k)} - \hat{\mu} \Delta t_i)^2}{\Delta t_i}$

Suite à ces calculs nous avons donc choisit d'estimer les paramètres μ et σ^2 grâce aux estimateurs $\hat{\mu}$ et $\hat{\sigma}^{2'}$

III.5. Temps de dépassement du seuil

La variable aléatoire du dépassement T_s suit, dans le cadre d'un processus de Wiener, la loi inverse-gaussienne de paramètres $\frac{s}{\mu}$ et $\frac{h^2}{\sigma^2}$:

$T_s \sim \mathcal{IG}(\frac{s}{\mu}, \frac{h^2}{\sigma^2})$ Ainsi l'estimation de μ et de σ^2 , nous permet de déterminer entièrement la loi de dépassement

IV. Simulation et estimation des paramètres pour le processus de Wiener

Voici comment se présente dans notre application la simulation du processus de Wiener :

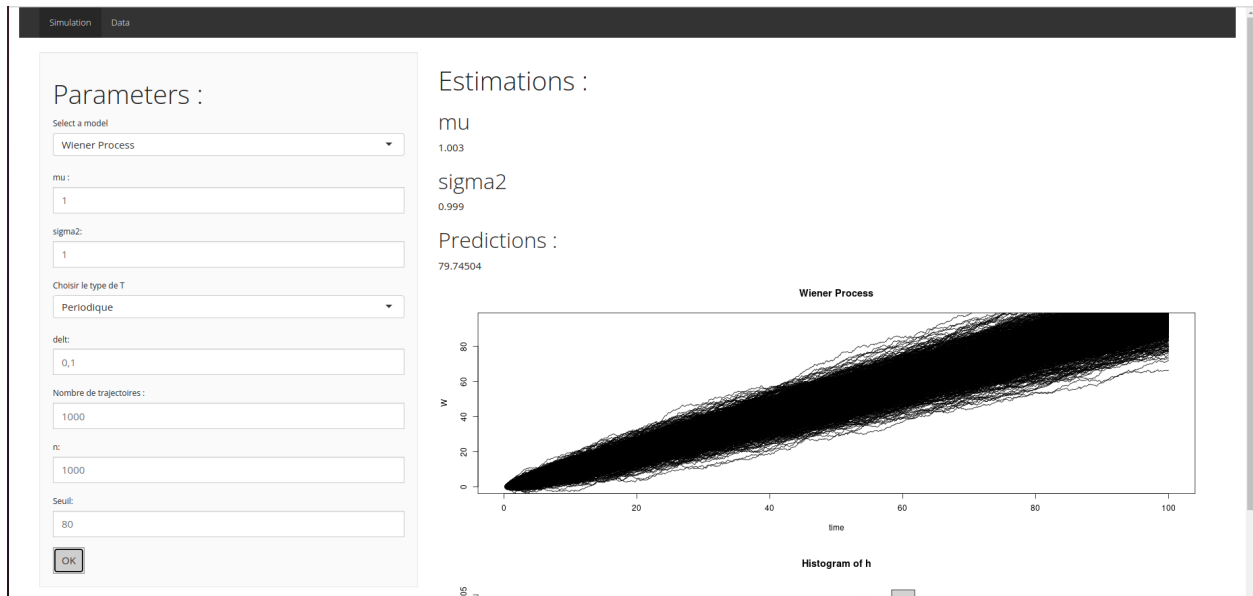


FIGURE 1 – Haut de la page de simulation

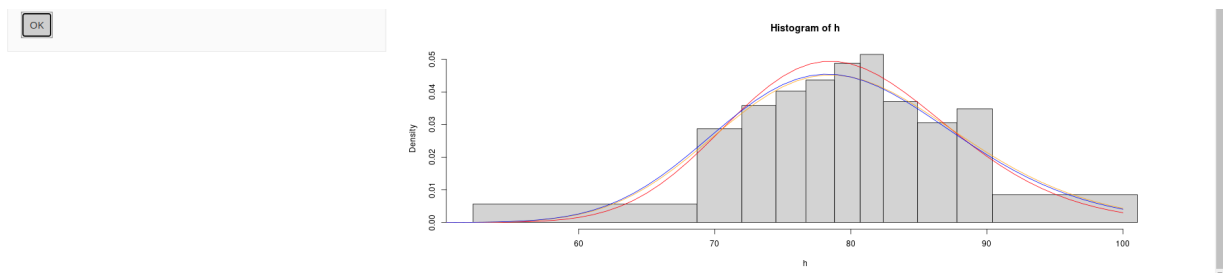


FIGURE 2 – Bas de la page de Simulation

A gauche se trouve les paramètres de la simulation que l'utilisateur peut saisir. Deux paramètres nécessitent des explications : “Choisir le type de T” et “seuil”.

“Choisir le type de T” permet à l'utilisateur de choisir comment le temps doit être simulé dans ce processus. Ici le choix est périodique et demande donc à l'utilisateur de spécifier la période “delt”, par exemple, pour un T compris entre 0 et 1 et un delt de 0.1, les temps choisis pour la simulation seraient 0 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.8 0.9 et 1. Il est également possible de simuler le temps selon une loi exponentielle, normale ou gamma.

“Seuil” correspond au seuil de dégradation limite pour lequel on souhaite prédire le premier instant de dépassement. Ce temps de dépassement de ce seuil est inscrit sous “Prediction” dans notre application.

V. Etude du processus de Gamma

Le second processus que nous étudie est le processus Gamma. Ce processus modélise des détériorations qui ne diminuent pas en s'accumulant au cours du temps au travers de nombreux petits incréments.

Sa définition est la suivante :

Une famille de variables aléatoires $(G(t))_{t \geq 0}$ suit un processus Gamma de paramètres $\alpha \geq 0$ et $\lambda \geq 0$ si :

- $G(0)=0$
- Les incréments de $(G(t))_{t \geq 0}$ sont indépendants
- Pour tout $0 \leq s \leq t$: la variable aléatoire $G_t - G_s$ suit une loi Gamma de paramètres $\alpha(t-s)$ et λ

Notations :

- n : nombre de mesures (nombre d'observations)
- d : nombre de phénomènes observés (nombre de trajectoires)
- $G_{t_i}^{(k)}$: Variable aléatoire représentant le niveau de dégradation à l'instant t_i pour le phénomène k
- $X_{t_i}^{(k)}$: famille de variables aléatoires d'accroissement tq :
- Pour $i = 1$: $X_1 = G_{t_1}$
- Pour $2 \leq i \leq n$: $X_i = G_{t_i}^{(k)} - G_{t_{i-1}}^{(k)}$
 - t_i : la date de la i ème mesure du niveau dégradation.
 - $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$: la durée entre deux mesures consécutifs
 - $\hat{\alpha}$: l'estimateur de α
 - $\hat{\lambda}$: l'estimateur de λ
 - s : le seuil critique du niveau de dégradation
 - T_s : Variable aléatoire modélisant l'instant de dépassement du seuil s

V.1. Estimation des paramètres du processus Gamma par la méthode du maximum de vraisemblance

Partons du fait que : $X_i^{(k)} \sim \Gamma(\alpha \Delta t_i, \lambda)$, $\forall 1 \leq i \leq n$ La fonction de vraisemblance est alors :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x_1, \dots, x_n, \alpha, \lambda) &= \prod_{i=1}^n f_{X_i}(\Delta x_i, \alpha, \lambda) \\ &= \prod_{i=1}^n x_i^{\Delta t_i \alpha - 1} e^{-\lambda x_i} \frac{\lambda^{\Delta t_i \alpha}}{\Gamma(\Delta t_i \alpha)} \\ &= e^{-\lambda \sum_{i=1}^n x_i} \prod_{i=1}^n x_i^{\Delta t_i \alpha - 1} \frac{\lambda^{\Delta t_i \alpha}}{\Gamma(\Delta t_i \alpha)} \end{aligned}$$

$$\ln(\mathcal{L}(x_1, \dots, x_n, \alpha, \lambda)) = -\lambda \sum_{i=1}^n x_i + \sum_{i=1}^n \ln(x_i)(\Delta t_i \alpha - 1) - \sum_{i=1}^n \ln(\Gamma(\alpha \Delta t_i)) + \alpha \sum_{i=1}^n \ln(\lambda) \Delta t_i$$

$$\frac{\partial \ln(\mathcal{L}(x_1, \dots, x_n, \alpha, \lambda))}{\partial \lambda} = -\sum_{i=1}^n x_i - \frac{\alpha}{\lambda} \sum_{i=1}^n \Delta t_i$$

Donc : $\boxed{\hat{\lambda} = \frac{\alpha \sum_{i=1}^n \Delta t_i}{\sum_{i=1}^n X_i}}$

VI. Simulation et estimation du processus de Gamma

Voici comment se présente dans notre application la simulation du processus Gamma :

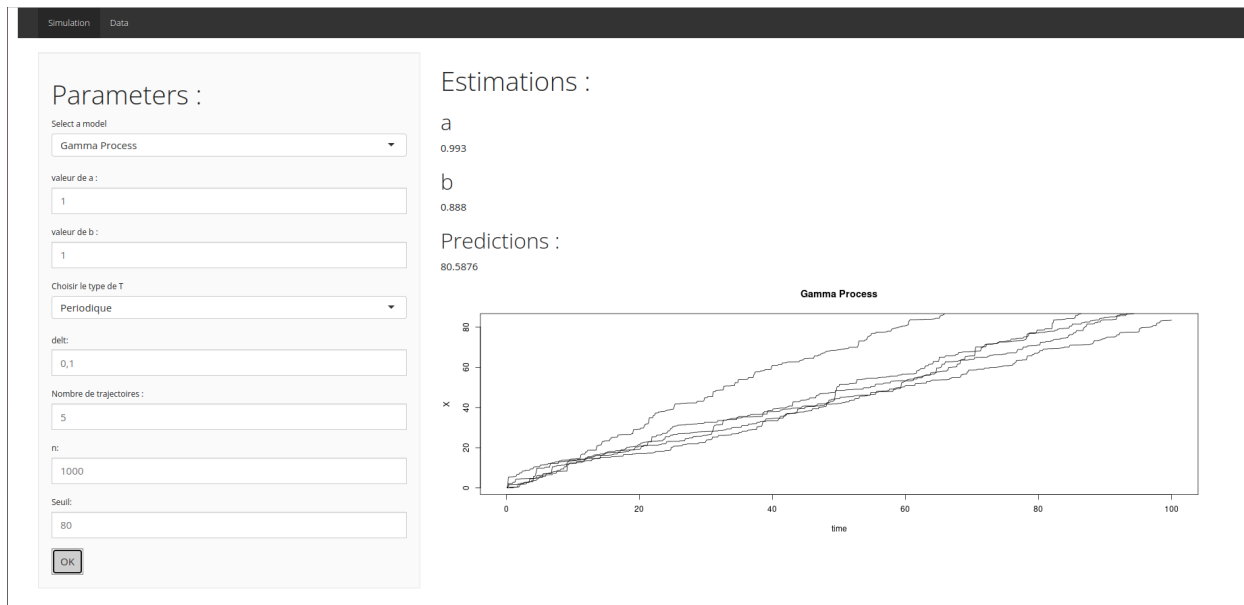


FIGURE 3 – Simulation du processus de Gamma

On retrouve ici les mêmes paramètres que lors de la simulation du processus de Wiener à l'exception près des paramètres μ et σ^2 qui sont ici remplacés par les paramètres a et b .

VII. Estimation des paramètres des différents processus sur des données réelles

Dans notre application nous modélisons les données issues de "laser.csv" par un processus de Wiener dont nous estimons les paramètres μ et σ^2 , cela donne :

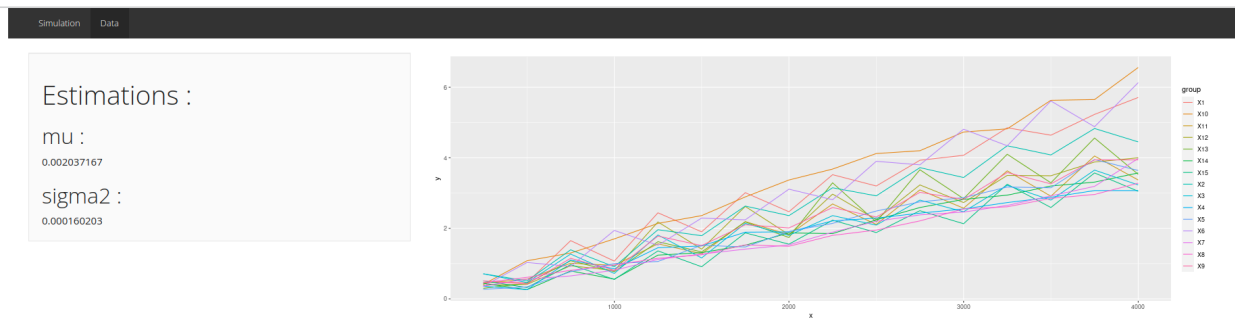


FIGURE 4 – Estimation des paramètres du processus de Wiener pour des données réelles