# Flambement d'une poutre en Elasticité non-linéaire

Abdou Gadiri DIALLO

November 2018

## 1 Introduction

Dans ce Projet, nous étudierons la déformation d'une poutre dans le régime non-linéaire en utilisant des modèles de comportement hyperélastiques compressibles. On utilise une géométrie 2D de la forme d'une poutre de longueur L = 10 m à section carrée de dimensions 1m x 1m. On suppose que la poutre est constituée d'un matériau homogène et isotrope de module de Young E = 70 GPa et de coefficient de Poisson nu = 0.3. La poutre est encastrée l'extrémité de gauche (x1 = 0) et soumise à un déplacement axial imposé –u.$\underline{e1}$ à l'extrémité de droite (x1 = L):

## 2 Formulation du problème

Etablissons la formulation forte et faible du problème d'élasticité non linéaire:

$$\underline{div}\, S(x) + \underline{b_0} = \underline{0} \quad dans \quad \Omega$$

$$avec \quad \underline{b_0} = \underline{0} \quad d'ou \quad \underline{div}\, S(x) = \underline{0} \quad dans \quad \Omega$$

$$S(x) = A(e(x)) \quad avec \quad S \quad étant \quad le \quad tenseur \quad de \quad Piola - kirchhoff$$

$$e(x) = \frac{1}{2}(F^T(x).F(x) - I)$$

<u>Conditions aux limites:</u>

$$S\underline{n_0} = \underline{g_0} \quad sur \quad \partial\Omega \quad avec \quad \underline{g_0} = \underline{0} \quad d'ou \quad S\underline{n_0} = \underline{0} \quad sur \quad \partial\Omega$$

L'energie potentielle se definit par:

$$E(\underline{u}) = \int_\Omega W(I + \nabla\underline{u}).dx - \int_\Omega \underline{b_0}.\underline{u}.dx - \int_{\partial\Omega} \underline{g_0}.\underline{u}.dx$$

L'énergie potentielle de la poutre, encastrée à son extrémité gauche et soumise à un déplacement horizontale en compression à son autre extrémité, peut être réduite seulement à une énergie élastique : il n'y a pas de potentiel de charges mortes. Finalement on obtient:

$$E(\underline{u}) = \int_\Omega W(I + \nabla\underline{u}).dx$$

On definit l'ensemble des fonctions cinématiques admissibles ci-dessous:

$$\mathcal{U} = [\ \ \underline{u}\ \ régulier\ \ tel\ \ que\ \ \underline{u} = -\underline{u_d}\ \ sur\ \ \partial\Omega\ \ ]$$

$$\mathcal{U}\prime = [\ \ \underline{v}\ \ régulier\ \ tel\ \ que\ \ \underline{v} = \underline{0}\ \ sur\ \ \partial\Omega\ \ ]$$

Le problème de recherche des équilibres stables de la structure s'écrit :

$$minE(\underline{u})\ \ pour\ \ \underline{u}\ \ \in\ \ \mathcal{U}$$

La formulation variationnelle de la condition d'équilibre s'écrit :

$$Trouver\ \ \underline{u}\ \ \epsilon\ \ \mathcal{U} : E'(\underline{u})(\underline{v}) = \underline{0} \qquad \forall\underline{v}\ \ \in\ \ \mathcal{U}\prime$$

$$avec: \quad E'(\underline{u})(\underline{v}) = \int_\Omega \frac{\partial W}{\partial F}.\nabla\underline{v}.dx \qquad\qquad car\ il\ n'y\ a\ pas\ de\ charges\ mortes$$

$\underline{Energie\ \ de\ \ Déformation}$

Une densité d'énergie de déformation peut être définie par:

Modèle de Kirchhoff-Saint Venant:

$$W_E(E) = \frac{\lambda}{2}(trE)^2 + \mu E.E$$

Modèle de Néo-Hookéenne:

$$W_F(F) = \frac{\mu}{2}(F.F - 2) - 2\mu lnJ + \frac{\lambda}{2}(lnJ)^2$$

$\underline{Algorithme\ \ de\ \ Newton - Raphson}$

A partir d'un point de départ $\underline{u_0} \in \mathcal{U}\prime$, on peut utiliser l'algorithme de Newton pour résoudre le problème de minimisation. On peut alors résoudre itérativement le problème linéarisé suivant pour l'incrément $\Delta u$, jusqu'à obtenir la convergence :

$$Trouver\ \ \underline{\Delta u}\ \in\ \mathcal{U}\prime : E''(\underline{u_0})(\underline{\Delta u})(\underline{v}) = -E'(\underline{u_0})(\underline{v}) \qquad \forall \underline{v}\ \ \in\ \ \mathcal{U}\prime$$

$$avec: \quad E''(\underline{u})(\underline{v})(\underline{\hat{u}}) = \int_\Omega \frac{\partial^2 W}{\partial F^2}.\nabla \underline{v}.\nabla \underline{\hat{u}}.dx$$

L'algorithme de NR se présente sous la forme ci-dessous :

Entrées : $\overline{u},\ tol$

$Sorties : u$

$Initialisation u_0 = 0, iter = 0$

$Boucle\ \ incrémentale\ \ sur\ \ déplacement\ \ imposé$

$for\ \ u = 0, ....., 1\ \ do$

$\quad Boucle\ \ itérative\ \ sur\ \ le\ \ déplacement$

$\quad while\ \ erreur > tol,\ \ iter < maxiter\ \ do$

$\quad\quad Résoudre\ \ le\ \ problème\ \ variationnel$

$\quad\quad Trouver\ \ \Delta u\ \in\ \mathcal{U}\prime\ \ tel\ \ que :$

$\quad\quad a(\Delta u, v) = l(v) \qquad \forall \underline{v}\ \ \in\ \ \mathcal{U}\prime$

$\quad\quad Mise\ \ à\ \ jour$

$\quad\quad u_0 = u_0 + \Delta u,\ \ iter = iter + 1$

$\quad\quad Convergence$

$\quad\quad tol = ||l(v)||$

$\quad end$

$end$

# 3 Flambement d'une poutre

## 3.1 solution analytique

La charge critique de flamblement dans le cas de notre poutre s'écrit :

$$F_{crit} = \frac{\pi^2 EI}{4Lx^2}$$

La charge critique de flambement, $F_{crit}$ , peut être relier au déplacement critique, $\overline{u}_{crit}$ , par la rélation entre la force et la contrainte définit par:

$$F_{crit} = ES\epsilon \qquad avec \quad \epsilon = \frac{\overline{u}_{crit}}{Lx}$$

Analytiquement on obtient $\overline{u}_{crit} = 0.02m$ car S = 1m$^2$

On peut donc dire que si le déplacement imposé est plus faible que le déplacement critique, la poutre ne flambera pas : elle sera uniquement en compression. Une fois que le déplacement imposé est plus grand que le déplacement critique, la poutre flambe pour rester dans un état stable. La poutre peut flamber vers le haut où vers le bas.

## 3.2 Résolution Numérique

On se propose maintenant de résoudre le problème non-linéaire. On implémente le modèle de matériau hyperélastique de Kirchhoff Saint Venant, à l'aide de l'algorithme de Newton. Pour une perturbation telle que p ¿ 0, le flambement s'opère de la manière suivante :

## 3.3 Post-traitement

Dans ces deux flambages potentiellement possibles, nous traçons une courbe de bifurcation pour représenter le phénomène. En élasticité non linéaire, les équations sont exprimées dans la configuration de référence (non déformée), ainsi l'effort équivalent sur la face droite sera issu de premier tenseur de contraintes de Piola-Kirchoff, S.

Après avoir calculé l'effort équivalent sur la face droite pour chaque , nous pouvons tracer la courbe force/déplacement obtenue :

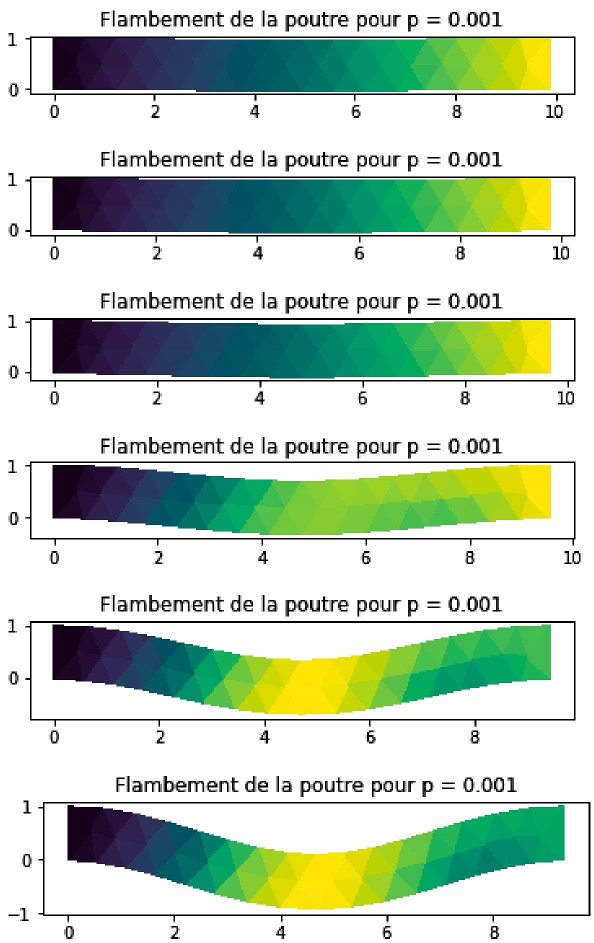


Figure 1: flambement de la poutre

Avant d'atteindre le déplacement critique, , la force diminue linéairement par rapport au déplacement imposé. Après avoir atteint le déplacement critique, la surface droite ne subira pas d'efforts supplémentaires et ainsi la poutre flambera en compensant ces efforts supplémentaires

on extrait le déplacement transversal au point indiqué et nous traçcons ce déplacement en fonction du déplacement imposé:

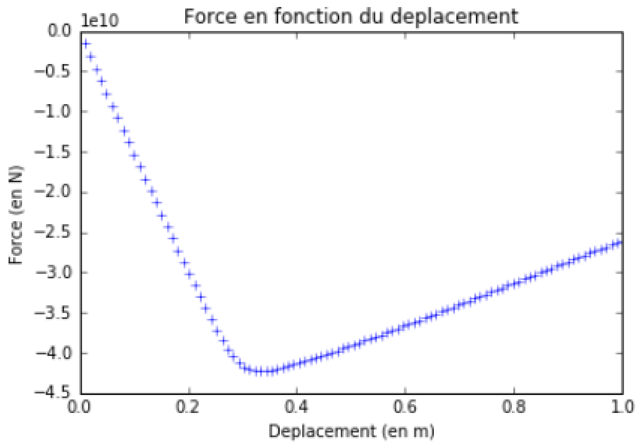


Figure 2: courbe de bifurcation

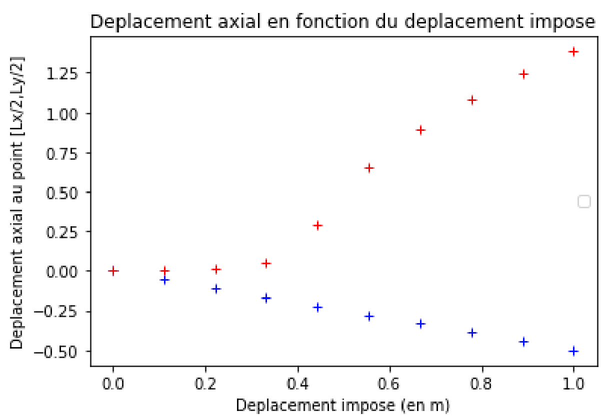


Figure 3: deplacement transversal/deplacement imposé

# 4 Conclusion

Au cours de ce projet, je me suis intéressé au problème d'élasticité non linéaire du flambement d'une poutre. Après une prémière étape de formulation du problème, je resouds celui-ci à l'aide de l'algorithme de Newton Raphson.

Pour l'étude de la stabilité,on regarde le signe de la valeur propreminimale de la matrice de rigidité tangente. Si celle-ci est positive, la solution est stable sinon elle est instable.