VII. Определители

Определения и формулы.

Определителем (детерминантом) называется числовая функция $\Delta = \det(A)$, определенная на множестве квадратных матрицах порядка n, которая удовлетворяет следующим трем условиям:

(1) пусть все строки матриц A, B и C, кроме строки с номером j, одинаковые, а $C_j = \lambda \cdot A_j + \mu \cdot B_j$; тогда $\det(C) = \lambda \cdot \det(A) + \mu \cdot \det(B)$ (это свойство называется линейностью определителя по строкам);

(2) при перестановке строк матрицы определитель матрицы меняет знак (это свойство называется антисимметричностью определителя);

(3) $\det(E) = 1$ (это свойство называется нормировкой на единичную матрицу).

Другие свойства определителя вытекают из определения:

(4) если одна из строк матрицы нулевая, то определитель равен нулю;

(5) если среди строк матрицы есть одинаковые, то определитель равен нулю;

(6) если две строки матрицы пропорциональны, то определитель равен нулю;

(7) определитель матрицы не изменится, если к одной строке матрицы прибавить другую строку, умноженную на некоторое число;

(8) определитель матрицы не изменится, если к одной строке матрицы прибавить любую линейную комбинацию остальных его строк;

(9) определитель транспонированной матрицы равен определителю исходной матрицы;

(10) определитель диагональной матрицы равен произведению чисел на главной диагонали;

(11) определитель треугольной матрицы равен произведению чисел на главной диагонали.

Все свойства определителя, сформулированные для строк матрицы, верны также по отношению к столбцам матрицы.

Для записи определителя матрицу нужно окаймлять прямыми скобками вместо круглых скобок.

Определитель матрицы $A = (a_{11})$ первого порядка: $\det(A) = a_{11}$.

Определитель матрицы второго порядка: $\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Определитель матрицы третьего порядка: $\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$

$$= (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33}).$$

Определитель квадратной матрицы отличен от нуля тогда и только тогда, когда эта матрица невырожденная.

Определитель произведения двух матриц равен произведению их определителей.

Пусть в квадратной матрице A выбраны r произвольных строк и r произвольных столбцов. В их пересечении образуется квадратная матрица порядка r. Определитель этой матрицы называется минором r-го ранга (или r-го порядка). Если множество номеров строк совпадает с множеством номеров столбцов, то такой минор называется главным.

Ранг матрицы совпадает с наибольшим порядком ненулевого минора этой матрицы.

В квадратной матрице n-го порядка сопоставим каждому элементу a_{jk} минор M_{jk} $(n-1)$-го порядка, полученный вычеркиванием j-ой строки и k-го столбца. Выражение $A_{jk} = (-1)^{j+k} M_{jk}$ называется алгебраическим дополнением элемента a_{jk}.

Формула разложения определителя по j-ой строке: $\det(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} A_{jk}$.

Формула разложения определителя по k-му столбцу: $\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{jk} A_{jk}$.

Эти формулы позволяют свести вычисление определителя матрицы n-го порядка к вычислению определителей матриц $(n-1)$-го порядка.

Теорема о фальшивом разложении. Разложение определителя по строке (столбцу), в котором вместо алгебраических дополнений элементов данной строки (столбца) использованы алгебраические дополнения элементов другой строки (столбца), равно нулю: $\sum_{k=1}^{n} a_{jk} A_{ik} = 0$ при $j \neq i$.

Матрицей, присоединенной к матрице A, называется матрица B, элементы которой образуются по закону $b_{jk} = A_{kj}$, где A_{kj} – алгебраическое дополнение элемента a_{kj} (то есть составляется матрица из алгебраических дополнений и затем транспонируется). Обозначение присоединенной матрицы $\tilde{A}$.

Для присоединенной матрицы выполняется соотношение $A \cdot \tilde{A} = det(A) \cdot E$.

Если $det(A) \neq 0$, то матрица A^{-1} существует и равна $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \tilde{A}$.

Если у квадратной матрицы есть обратная, то произведение их определителей равно единице.

Правило Крамера. Пусть задана СЛАУ $AX = B$ с невырожденной квадратной матрицей A. Введем обозначения: Δ – определитель матрицы А, Δ_k – определитель матрицы, полученной из матрицы А заменой k-ого столбца на столбец B свободных членов. Тогда решение СЛАУ дается формулами $x_k = \frac{\Delta_k}{\Delta}$ для всех k от 1 до n.

Примеры решения задач.

Пример 1. Вычислите определитель матрицы A.

а) $A = \begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$. б) $A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}$. в) $A = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & -5 & 7 & 6 \end{vmatrix}$.

Решение. а) $\begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 7 \cdot 2 - 4 \cdot 3 = 2$.

б) Разложим определитель по первому столбцу:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{3+1} \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2(2 \cdot 2 - 4 \cdot 1) + 3(1 \cdot 1 - 3 \cdot 2) = -15 .$$

в) Вычисление определителя состоит из нескольких итераций.

Итерация 1. Вторую строку, умноженную на $-2, -1$ и -3, прибавить к первой, третьей и четвертой строкам соответственно.

Итерация 2. Разложить определитель по первому столбцу.

Итерация 3. Вторую строку, умноженную на -1, прибавить к третьей строке.

Итерация 4. Разложить определитель по третьей строке.

Итерация 5. Вычислить определитель второго порядка.

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & -5 & 7 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 3 \\ -5 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 5 \cdot \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -10.$$

Пример 2. Дана матрица A порядка 3×3 со строками $\{a_1, a_2, a_3\}$, причем $|A| = 4$. Строки $\{b_1, b_2, b_3\}$ матрицы B являются линейными комбинациями строк матрицы A: $b_1 = a_1 - a_2 + 2a_3$, $b_2 = a_1 + a_2 - a_3$, $b_3 = a_1 + 3a_3$. Найдите определитель матрицы B.

Решение. Надо убедиться, что $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot A$. Тогда $|B| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} \cdot |A| = 5 \cdot 4 = 20.$

Пример 3. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. Не вычисляя матрицы A^{-1}, найдите третий столбец A^{-1}. При вычислении определителя пользоваться только минорами одной строки или одного столбца матрицы A.

Решение. Третий столбец присоединенной матрицы $\tilde{A}$ состоит из алгебраических дополнений третьей строки матрицы A. Вычислим алгебраические дополнения:

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -7,\ A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 3,\ A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 5.$$

Определитель разложим по третьей строке: $\Delta = 3 \cdot (-7) + (-2) \cdot 3 + 1 \cdot 5 = -22$. Итак, третий столбец матрицы A^{-1} состоит из чисел

$$\frac{A_{31}}{\Delta} = \frac{7}{22},\ \frac{A_{32}}{\Delta} = -\frac{3}{22},\ \frac{A_{33}}{\Delta} = -\frac{5}{22}.$$

Пример 4. Вычислите для всех n определитель Δ матрицы A порядка n, элементы которой вычисляются по формулам $a_{jk} = 3jk^2 + 2k - 2^j$.

Решение. Строка с номером j матрицы A_j является линейной комбинацией трех строк B, C и D длины n, координаты которых заданы формулами $b_k = k^2$, $c_k = k$ и $d_k = 1$. В самом деле, $A_j = 3j \cdot B + 2 \cdot C - 2^j \cdot D$. Следовательно, множество строк матрицы A выражается через набор $\{B, C, D\}$. Из этого следует, что при всех n ранг матрицы A не больше 3, то есть при $n > 3$ матрица A вырожденная. Значит, при $n > 3$ ее определитель равен нулю.

Осталось вычислить $det(A)$ при $n = 1,2,3$. При $n = 1$ имеем $|A| = |3| = 3$, при $n = 2$ получим $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 14 \\ 4 & 24 \end{vmatrix} = 16$, при $n = 3$ будет $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 14 & 31 \\ 4 & 24 & 56 \\ 3 & 32 & 79 \end{vmatrix} = -24$.

Пример 5. Вычислите для всех n определитель Δ матрицы A порядка n, элементы которой вычисляются по формулам $a_{jj} = 2$, $a_{jk} = 1$ при $j \neq k$.

Решение. На главной диагонали матрицы стоят двойки, остальные элементы единицы.

Первый способ. Шаг 1. Из каждой строки, начиная с первой и кончая предпоследней, вычитаем следующую строку: $A'_j = A_j - A_{j+1}$ для $j = 1,2, \dots, n-1$. После этого во всех строках, кроме последней, будет $a_{jj} = 1$, $a_{j,j+1} = -1$, остальные элементы нули. Последняя строка не изменится.

Шаг 2. В первом столбце $a_{11} = a_{n1} = 1$, остальные элементы нули. К каждому столбцу, начиная со второго и кончая последним, прибавить предыдущий столбец: $(A')^k = A^k + A^{k-1}$ для $k = 2,3, \dots, n$. При каждом прибавлении элемент $a_{k-1,k}$ над главной диагональю уничтожается, и во всех столбцах, кроме последнего, в n-ой строке $a_{nk} = k$. В самом деле, если $a_{n,k-1} = k - 1$, то $a'_{nk} = a_{n,k-1} + a_{nk} = (k-1) + 1 = k$. Исключение составляет последний столбец: $a'_{nn} = a_{n,n-1} + a_{nn} = (n-1) + 2 = n + 1$. Элементы выше главной диагонали равны нулю.

После всех прибавлений получится нижняя треугольная матрица, у которой все элементы на главной диагонали, кроме последнего, равны единице, а последний элемент $a_{nn} = n + 1$. Значит, $\Delta = n + 1$.

Второй способ. Шаг 1. К первой строке прибавим все остальные. Все ее элементы будут равны $(n + 1)$.

Шаг 2. Вынесем из первой строки $(n + 1)$, получим строку из единиц.

Шаг 3. Вычтем первую строку из всех строк, начиная со второй. Во всех строках будут стоять единицы на главной диагонали и нули в остальных клетках.

В результате получится верхняя треугольная матрица, у которой все элементы на главной диагонали равны единице. Ее определитель равен единице. С учетом вынесенного множителя $\Delta = n + 1$.

Пример 6. Решите СЛАУ $\begin{cases} x+2y-3z=-1 \\ 2x-3y+\ \ z=\ \ 5 \\ -2x-\ \ y+2z=-5 \end{cases}$, используя правило Крамера.

Решение. Надо вычислить четыре определителя:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -3 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix}=7,\ \Delta_1=\begin{vmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 5 & -3 & 1 \\ -5 & -1 & 2 \end{vmatrix}=35,\ \ \Delta_2=\begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 2 & 5 & 1 \\ -2 & -5 & 2 \end{vmatrix}=21,\ \Delta_3=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 5 \\ -2 & -1 & -5 \end{vmatrix}=28.$$

Тогда $x=\frac{\Delta_1}{\Delta}=5,\ y=\frac{\Delta_2}{\Delta}=3,\ z=\frac{\Delta_3}{\Delta}=4.$

Типовые задачи

1. Вычислите определитель Δ матрицы A.

а) $A=\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$. б) $A=\begin{vmatrix} 3 & -27 \\ -2 & 18 \end{vmatrix}$. в) $A=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

г) $A=\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}$. д) $A=\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & -3 \end{vmatrix}$. е) $A=\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -2 \\ -2 & 0 & -1 & 3 \end{vmatrix}$.

ж) $A=\begin{vmatrix} 3 & -3 & -2 & -5 \\ 2 & 5 & 4 & 6 \\ 5 & 5 & 8 & 7 \\ 4 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$. з) $A=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 7 & 10 & 13 \\ 3 & 5 & 11 & 16 & 21 \\ 2 & -7 & 7 & 7 & 2 \\ 1 & 4 & 5 & 3 & 10 \end{vmatrix}$.

2. Дана матрица A порядка 3×3 со строками $\{a_1,a_2,a_3\}$, ее определитель $|A|=\Delta$. Строки $\{b_1,b_2,b_3\}$ матрицы B являются линейными комбинациями строк $\{a_1,a_2,a_3\}$ матрицы A. Найдите определитель матрицы B, используя матричную формулу.
   а) $b_1=3a_1+a_3$, $b_2=2a_2-3a_3$, $b_3=a_2+2a_3$.
   б) $b_1=a_1+2a_3$, $b_2=a_2-a_1$, $b_3=a_2+2a_3$.
   в) $b_1=a_2-a_3$, $b_2=a_1+a_2-2a_3$, $b_3=a_2+2a_3-a_1$.
   г) $b_1=a_1+3a_2$, $b_2=3a_1+2a_2-a_3$, $b_3=4a_1+a_2+2a_3$.

3. Дана матрица A порядка 3×3 со столбцами $\{a^1,a^2,a^3\}$, ее определитель $|A|=\Delta$. Столбцы $\{b^1,b^2,b^3\}$ матрицы B являются комбинациями столбцов $\{a^1,a^2,a^3\}$ матрицы A. Найдите определитель матрицы B, используя свойства определителя.
   а) $b^1=-3a^1-2a^2+2a^3$, $b^2=-a^1-a^2+2a^3$, $b^3=-2a^1+2a^2-a^3$.
   б) $b^1=-2a^1+2a^2+a^3$, $b^2=3a^1-3a^2-2a^3$, $b^3=3a^1+2a^2+a^3$.
   в) $b^1=a^1+3a^3$, $b^2=a^1+2a^2-3a^3$, $b^3=a^1-a^2+2a^3$.
   г) $b^1=3a^1-a^2+a^3$, $b^2=2a^1+3a^3$, $b^3=-a^1+2a^2+4a^3$.

4. Дана матрица A. Найдите определитель матрицы A, пользуясь только минорами одной ее строки или одного ее столбца. Также, не вычисляя целиком матрицу A^{-1}, найдите ее k-ый столбец, j-ую строку и элемент b_{jk}.

а) $A=\begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 9 & -3 & 2 \\ -5 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $k=3$, $j=2$, b_{31}. б) $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 3 \\ -1 & 4 & -3 \end{pmatrix}$, $k=3$, $j=2$, b_{31}.

в) $A=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $k=2$, $j=1$, b_{33}. г) $A=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $k=1$, $j=1$, b_{23}.

5. Найдите определитель матрицы A и матрицу $\tilde{A}$, присоединенную к матрице A.

а) $A=\begin{pmatrix}7 & -2\\ 5 & 3\end{pmatrix}$. б) $A=\begin{pmatrix}-2 & 3\\ -5 & 11\end{pmatrix}$. в) $A=\begin{pmatrix}0 & 3 & 3\\ 2 & -1 & 2\\ 1 & -2 & 1\end{pmatrix}$.

г) $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 5 & -2 & 2\\ -1 & -3 & 2\end{pmatrix}$. д) $A=\begin{pmatrix}-2 & -1 & 3\\ -2 & -1 & 2\\ 1 & 2 & -1\end{pmatrix}$. е) $A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ -3 & -1 & 4\\ 2 & 2 & -1\end{pmatrix}$.

6. Вычислите для всех n определитель Δ_n матрицы $A=\| a_{jk} \|$ порядка n, если:

а) $a_{jk}=(-1)^{j+k}$. б) $a_{jk}=jk$. в) $a_{jk}=(-1)^{jk}$

г) $a_{jk}=j^2k^2-j-k$. д) $a_{jk}=(j-k)^2+j+k$. е) $a_{jk}=jk(j+k+1)$.

ж) $a_{jk}=j\cdot 2^k-\dfrac{3^j}{k}$. з) $a_{jk}=\sin(j+k)$. и) $a_{jk}=e^{j^2-j+2^k}$.

7. Вычислите для всех n определитель Δ_n матрицы $A=\| a_{jk} \|$ порядка n, если:

а) $a_{jk}=min(j,k)$. б) $a_{jk}=min(j,k)+1$.

в) $a_{jk}=\max(j,k)$. г) $a_{jk}=\max(j,k)-1$.

д) $a_{jk}=\max(n+1-j,k)$. е) $a_{jk}=|j-k|$.

ж) $a_{jk}=|j-k|+1$. з) $a_{jk}=|j+k-1-n|$.

и) $a_{kk}=0$ при всех k, $a_{jk}=1$ при $j\neq k$.

к) $a_{kk}=2k-1$ при всех k, $a_{jk}=k$ при всех $j\neq k$.

л) $a_{11}=1$, $a_{kk}=0$ при всех $k>1$, $a_{jk}=k$ при $j<k$, $a_{jk}=-k$ при $j>k$.

м) $a_{kk}=3$ при всех k, $a_{j,j+1}=1$ при $j<n$, $a_{n1}=1$, $a_{jk}=0$ при прочих j и k.

8. У квадратных матриц A и B k-го порядка известны $det(A)=\Delta_1$, $det(B)=\Delta_2$. Вычислите определитель Δ выражения D, которое содержит A и B и присоединенные матрицы $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$.

а) $k=4$, $\Delta_1=4$, $D=\tilde{A}A^{-3}$.

б) $k=5$, $\Delta_1=-5$, $D=\tilde{A}^{-1}A^2$.

в) $k=3$, $\Delta_1=2$, $\Delta_2=-3$, $D=2A^{-2}\cdot\tilde{B}$.

г) $k=4$, $\Delta_1=6$, $\Delta_2=-3$, $D=A^2\cdot 2\tilde{B}^{-1}$.

д) $k=3$, $\Delta_1=-2$, $\Delta_2=4$, $D=3A^3\cdot\tilde{B}^{-1}$.

е) $k=4$, $\Delta_1=-3$, $\Delta_2=-2$, $D=A^{-3}\cdot 3\tilde{B}$.

9. Решите СЛАУ, используя правило Крамера.

а) $\begin{pmatrix}-1 & 2 & -2\\ 2 & -3 & -1\\ 3 & -2 & -1\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}2\\2\\5\end{pmatrix}$. б) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ 2 & 2 & 1\\ 4 & 3 & -3\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}$.

в) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ 0 & 3 & 2\\ -2 & 1 & -6\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}3\\4\\2\end{pmatrix}$. г) $\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 3 & 1 & 2\\ 5 & 0 & 3\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}-8\\7\\1\end{pmatrix}$.

д) $\begin{pmatrix}1 & 3 & 4\\ -2 & 2 & -1\\ 1 & 2 & 2\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}8\\7\\4\end{pmatrix}$. е) $\begin{pmatrix}2 & -2 & 2\\ 4 & 1 & 1\\ 1 & 2 & -2\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}2\\1\\4\end{pmatrix}$.

10. Найдите фундаментальный набор решений, используя правило Крамера (последняя задача с параметром p).

а) $\begin{cases}-x+y-z=0\\ 2x-3y+z=0\end{cases}$. б) $\begin{cases}3x-y+2z+t=0\\ -6x+2y-4z=0\end{cases}$. в) $\begin{cases}-x+2y-2z=0\\ 2x-3y-pz=0\end{cases}$.

Дополнительные задачи

11. Как изменится определитель квадратной матрицы порядка n, если:
    - а) Умножить матрицу на число λ.
    - б) Последний столбец переписать на первое место, сохраняя порядок остальных столбцов.
    - в) Изменить порядок строк на обратный (от последней к первой).
    - г) Отразить матрицу относительно главной диагонали.
    - д) Отразить матрицу относительно побочной диагонали.
    - е) Выполнить центральную симметрию относительно центра матрицы.
    - ж) Повернуть матрицу на $90°$ против часовой стрелки.
12. Чему равен определитель матрицы, у которой элементы побочной диагонали равны единице, а остальные элементы равны нулю?
13. Дана матрица A порядка $(n \times n)$ с определителем $|A| = \Delta$, $\tilde{A} = \| b_{jk} \|$ – присоединенная матрица. Вычислить определитель:
    - а) Матрицы $\tilde{A}^T$.
    - б) Матрицы $A^T \cdot \tilde{A}$.
    - в) Матрицы $(A \cdot \tilde{A})^{-1}$.
    - г) Матрицы $A^{-2} \cdot (\tilde{A}^T)^3$.
    - д) Матрицы $A \cdot C$, где $c_{jk} = b_{n+1-j, n+1-k}$.
14. Докажите, что если у квадратной матрицы размером $(n \times n)$ ранг $r(A) = n$, то $r(\tilde{A}) = n$.
15. Докажите, что если у квадратной матрицы размером $(n \times n)$ ранг $r(A) < n - 1$, то $\tilde{A} = 0$.
16. Докажите, что если у квадратной матрицы размером $(n \times n)$ ранг $r(A) = n - 1$, то $r(\tilde{A}) = 1$.
17. Дана матрица A (3×3) такая, что $r(A) < 3$. Докажите, что при этих условиях присоединенная матрица к присоединенной матрице будет нулевой.
18. Пусть для некоторых функций $f(j)$, $g(j)$ и $h(j)$ общий член матрицы n-го порядка задается формулой $a_{jk} = f(j) \cdot k^2 + g(j) \cdot 2^k + h(j)$. Докажите, что при $n > 3$ определитель матрицы равен нулю.
19. Пусть общий член матрицы n-го порядка задается формулой $a_{jk} = P(j, k)$, где $P(x, y) = \sum_{m=0}^{p} \sum_{i=0}^{q} c_{mi} x^m y^i$ – многочлен от двух переменных, у которого максимальная степень по x равна p, а максимальная степень по y равна q. Докажите, что при $n > \min(p, q)$ ее определитель равен нулю.
20. Покажите, что в матрице ранга k любой минор порядка больше k равен нулю.
21. Докажите, что определитель кососимметрической матрицы 15-го порядка равен нулю.
22. Пусть A – матрица размером 4×4, $|A| = 7$. Найдите в стандартном базисе координаты вектора $b = A_{13}a_1 + A_{23}a_2 + A_{33}a_3 + A_{43}a_4$, где a_i – строки матрицы A.
23. Если в матрице A размером $n \times n$ все элементы первой строки равны единице, то
    $$|A| = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} A_{ij}.$$
24. Верно ли утверждение: если для СЛАУ $Ax = b$ с квадратной матрицей A размером (3×3) все определители, подсчитанные по Правилу Крамера, равны нулю, то система несовместна?

25. Верно ли утверждение: если для СЛАУ $Ax = b$ с квадратной матрицей A размером (3×3) все определители, подсчитанные по Правилу Крамера, равны нулю, то система имеет бесконечное множество решений?

Ответы на типовые задачи

1. а) $\Delta = 1$. б) $\Delta = 0$. в) $\Delta = -2$. г) $\Delta = -6$.
   д) $\Delta = 0$. е) $\Delta = 8$. ж) $\Delta = 90$. з) $\Delta = 52$.
2. а) $det(B) = 21\cdot\Delta$. б) $det(B) = 0$.
   в) $det(B) = -2\cdot\Delta$. г) $det(B) = -25\cdot\Delta$.
3. а) $det(B) = 11\cdot\Delta$. б) $det(B) = -5\cdot\Delta$.
   в) $det(B) = -8\cdot\Delta$. г) $det(B) = -3\cdot\Delta$.
4. а) $b^3 = -\frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix} 9 \\ -1 \\ -42 \end{pmatrix}$, $b_2 = -\frac{1}{5}\cdot(-1;0;-1)$, $b_{31} = -\frac{3}{5}$, $\Delta = -5$.

   б) $b^3 = \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} 9 \\ -7 \\ -13 \end{pmatrix}$, $b_2 = \frac{1}{2}\cdot(3;-8;-7)$, $b_{31} = \frac{5}{2}$, $\Delta = 2$.

   в) $b^2 = \begin{pmatrix} 10 \\ -7 \\ 8 \end{pmatrix}$, $b_1 = (-1;10;-3)$, $b_{33} = -2$, $\Delta = -1$.

   г) $b^1 = \frac{1}{9}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$, $b_1 = \frac{1}{9}\cdot(1;3;-2)$, $b_{23} = -\frac{1}{3}$, $\Delta = 9$.
5. а) $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & 7 \end{pmatrix}$, $\Delta = 31$. б) $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 11 & -3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$, $\Delta = -7$.
   в) $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 9 \\ 4 & -3 & 6 \\ -3 & 3 & -6 \end{pmatrix}$, $\Delta = 3$. г) $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -12 & 3 & 3 \\ -17 & 5 & 8 \end{pmatrix}$, $\Delta = 9$.
   д) $\tilde{A} = \begin{pmatrix} -3 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, $\Delta = -3$. е) $\tilde{A} = \begin{pmatrix} -7 & 5 & 13 \\ 5 & -4 & -11 \\ -4 & 2 & 7 \end{pmatrix}$, $\Delta = -3$.
6. а) $\Delta_n = 0$ при $n > 1$, $\Delta_1 = 1$.
   б) $\Delta_n = 0$ при $n > 1$, $\Delta_1 = 1$.
   в) $\Delta_n = 0$ при $n > 2$, $\Delta_1 = -1$, $\Delta_2 = -2$.
   г) $\Delta_n = 0$ при $n > 3$, $\Delta_1 = -1$, $\Delta_2 = -13$, $\Delta_3 = -4$.
   д) $\Delta_n = 0$ при $n > 3$, $\Delta_1 = 2$, $\Delta_2 = -8$, $\Delta_3 = 8$.
   е) $\Delta_n = 0$ при $n > 2$, $\Delta_1 = 3$, $\Delta_2 = -4$.
   ж) $\Delta_n = 0$ при $n > 2$, $\Delta_1 = -1$, $\Delta_2 = 9$.
   з) $\Delta_n = 0$ при $n > 2$, $\Delta_1 = \sin 2$, $\Delta_2 = \sin 2 \sin 4 - \sin^2 3$.
   и) $\Delta_n = 0$ при $n > 1$, $\Delta_1 = e^2$.
7. а) $\Delta_n = 1$. б) $\Delta_n = 2$.
   в) $\Delta_n = (-1)^{n-1}\cdot n$. г) $\Delta_n = (-1)^{n-1}\cdot(n-1)$.
   д) $\Delta_n = (-1)^{\frac{(n+2)(n-1)}{2}}\cdot n$. е) $\Delta_n = (-1)^{n-1}\cdot 2^{n-2}\cdot(n-1)$.
   ж) $\Delta_n = (-1)^{n-1}\cdot 2^{n-2}\cdot(n+1)$. з) $\Delta_n = (-1)^{\frac{(n-2)(n-1)}{2}}\cdot(n-1)\cdot 2^{n-2}$.
   и) $\Delta_n = (-1)^{n-1}\cdot(n-1)$. к) $\Delta_n = (n-1)!$.

л) $\Delta_n = n!$.   м) $\Delta_1 = 3$, $\Delta_n = 3^n + (-1)^{n+1}$ при $n > 1$.

8. а) $det(D) = 1$.   б) $det(D) = \frac{1}{25}$. .   в) $det(D) = 18$.

г) $det(D) = -\frac{64}{3}$.   д) $det(D) = -\frac{27}{2}$.   е) $det(D) = 24$.

9. а) $\Delta = -13$, $X = (2;\ 1; -1)$.   б) $\Delta = 3$, $X = (3; -2; 1)$.   в) $\Delta = -4$, $X = (3; 2; -1)$.

г) $\Delta = -3$, $X = (2; 7; -3)$.   д) $\Delta = -9$, $X = (-2; 2; 1)$.   е) $\Delta = -12$, $X = (2;-3;-4)$.

ж) $\Delta = -11$, $X = (3;-2;-1)$.   з) $\Delta = -7$, $X = (2; 3; 2)$.   и) $\Delta = 9$, $X = (1; 3;-4)$.

к) $\Delta = -6$, $X = (2;-3;-1)$.   л) $\Delta = 8$, $X = (-1; 3; 4)$.   м) $\Delta = 8$, $X = (-1;-2; 3)$.

н) $\Delta = -9$, $X = (-1; 3;-2)$.   о) $\Delta = 6$, $X = (3;-2;-3)$.

10. а) $f = \{ f_1(2; 1; -1)\}$.   б) $f = \{ f_1(1; 3; 0; 0),\ f_2(0; 2; 1; 0) \}$.   в) $f = \{ f_1(2p+6;\ p+4; 1)\}$.

Ответы на дополнительные задачи

11. а) Умножится на λ^n.   б) Умножится на $(-1)^{n-1}$.

в) Умножится на $(-1)^k$, где $k = \frac{n}{2}$, если n – четное, $k = \frac{n-1}{2}$, если n – нечетное.

г) Не изменится.   д) Не изменится.   е) Не изменится.

ж) Умножится на $(-1)^k$, где $k = \frac{n}{2}$, если n – четное, $k = \frac{n-1}{2}$, если n – нечетное.

12. $\Delta = (-1)^k$, где $k = \frac{n}{2}$, если n – четное, $k = \frac{n-1}{2}$, если n – нечетное.

13. а) Δ^{n-1}.   б) Δ^n.   в) Δ^{-n}.   г) Δ^{3n-1}.   д) Δ^n.

14. Указание: используйте теорему о ранге произведения матриц.

15. Указание: используйте теорему о связи ранга матрицы с минорами.

16. Указание: используйте теорему о связи ранга матрицы с минорами.

17. Указание: следует из заданий 15 и 16.

20. Указание: если число строк в наборе больше k, то строки матрицы линейно зависимы.

21. Указание: рассмотрите определитель транспонированной матрицы.

22. Указание: используйте теорему о разложении определителя и теорему о фальшивом разложении.

23. Указание. Используйте теорему о разложении определителя и теорему о фальшивом разложении.

24. Неверно.

25. Неверно.