VIII. Евклидовы пространства

Определения и формулы.

Скалярным произведением в линейном пространстве V называется числовая функция двух векторных аргументов a и b (обозначается (a,b)), обладающая следующими свойствами:

(1) $(\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2, b) = \lambda_1(a_1, b) + \lambda_2(x_2, b)$ (линейность по первому аргументу);

(2) $(a, \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2) = \lambda_1(a, b_1) + \lambda_2(a, b_2)$ (линейность по второму аргументу);

(3) $(a,b) = (b,a)$ для всех a и b (симметричность).

(4) $(a,a) > 0$ для всех $a \neq \bar{0}$ (положительная определенность).

Линейное пространство, в котором задано скалярное произведение, называется евклидовым пространством.

Длиной (или модулем) вектора a в евклидовом пространстве считается неотрицательное число $|a| = \sqrt{(a,a)}$.

Расстоянием между точками x и y в евклидовом пространстве называется длина разности $|x-y|$. Расстояние равно нулю, только если $x = y$, в остальных случаях оно положительно.

Неравенство Коши-Буняковского: для любых двух векторов a и b выполняется неравенство $|a,b| \leq |a| \cdot |b|$, причем равенство возможно только в случае, когда a и b пропорциональны.

Углом между векторами называется величина $\varphi = arccos\frac{(a,b)}{|a|\cdot|b|}$.

Для треугольника в евклидовом пространстве с вершинами A, B, C верна теорема косинусов:

$$|BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2 - 2 \cdot |AB| \cdot |AC| .$$

Для треугольника в евклидовом пространстве с вершинами A, B, C выполняется неравенство треугольника: $|BC| \leq |AB| + |AC|$.

Набор векторов $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ называется ортогональным, если векторы этого набора попарно ортогональны. Если вдобавок длина каждого вектора равна единице, то набор называется ортонормированным. Для ортонормированного набора $(a_j, a_k) = \delta_{jk}$, где δ_{jk} – символ Кронекера.

Любой ортогональный набор линейно независим.

Алгоритм ортогонализации Грама-Шмидта позволяет по произвольному линейно независимому набору $\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ построить ортогональный набор $\{f_1, f_2, \dots, f_m\}$, удовлетворяющий двум условиям:

(1) $L\{f_1, f_2, \dots, f_k\} = L\{a_1, a_2, \dots, a_j\}$ для всех $j = 1,2,\dots,m$;

(2) $f_k - a_k \in L\{f_1, f_2, \dots, f_{j-1}\}$ для всех $j = 1,2,\dots,m$.

Алгоритм Грама-Шмидта представляет собой рекурсивную процедуру. На первом шаге полагается $f_1 = a_1$. Предположим, что после k-го шага для поднабора $\{a_1, \dots, a_k\}$ построен набор $\{f_1, \dots, f_k\}$ с нужными свойствами для всех $j = 1,2,\dots,k$. Тогда на $(k+1)$-ом шаге положим

$$f_{k+1} = a_{k+1} - \sum_{j=1}^{k} \lambda_j f_j , \text{ где } \lambda_j = \frac{(a_{k+1}, f_j)}{(f_j, f_j)} \text{ для всех } j = 1,2,\dots,k .$$

Так определенный набор $\{f_1, \dots, f_k, f_{k+1}\}$ удовлетворяет обоим условиям для поднабора $\{a_1, \dots, a_k, a_{k+1}\}$. Процесс заканчивается, когда $k+1 = m$.

Вектор называется ортогональным подмножеству M евклидова пространства V, если он ортогонален всем векторам этого подмножества.

Вектор ортогонален линейной оболочке $L = L\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ тогда и только тогда, когда он ортогонален всем векторам набора $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$.

Ортогональным дополнением к линейному подпространству $L \subseteq V$ называется совокупность всех векторов, ортогональных L (обозначается $L^{\perp}$).

Ортогональное дополнение к линейному подпространству является линейным подпространством.

Соотношение двойственности перехода к ортогональному дополнению: $(L^{\perp})^{\perp} = L$.

Для подпространств L и $L^{\perp}$ верно $L \cap L^{\perp} = \{\bar{0}\}$, поэтому для любого подпространства L евклидова пространства V верно разложение в прямую сумму $V = L \oplus L^{\perp}$.

Любой вектор $x \in V$ единственным образом разлагается в сумму $x = g + h$, где $g \in L$, $h \in L^{\perp}$. В этой сумме вектор g называется ортогональной проекцией вектора x на подпространство L, а вектор h называется ортогональной составляющей при ортогональном проектировании на подпространство L.

При ортогональном проектировании на подпространство $L^{\perp}$ векторы g и h меняются местами.

Пусть $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ и $\{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$ – базисы в подпространствах L и $L^{\perp}$. Образуем две системы уравнений из равенств $(a_i, y) = 0$ для всех $i = 1,2,\ldots,k$ и $(b_j, x) = 0$ для всех $j = 1,2,\ldots,m$. Тогда множеством решений первой системы будет подпространство $L^{\perp}$, а множеством решений второй системы будет подпространство L.

Перпендикулярным отрезком h между многообразиями $H_1 = c_1 + L_1$ и $H_2 = c_2 + L_2$ будем называть отрезок, перпендикулярный направляющим подпространствам L_1 и L_2, концы которого M_1 и M_2 лежат соответственно на многообразиях H_1 и H_2. Общим перпендикуляром будем называть прямую, проходящую через точки M_1 и M_2, с направляющим вектором h.

Перпендикулярным отрезком между многообразиями $H_1 = c_1 + L_1$ и $H_2 = c_2 + L_2$ служит ортогональная составляющая h при ортогональном проектировании вектора $c_2 - c_1 = g + h$ на подпространство $L_1 + L_2$. Если проекция $g \in L_1 + L_2$ разложена в сумму $g = a_1 + a_2$, где $a_1 \in L_1$, $a_2 \in L_2$, то концы $M_1 \in H_1$ и $M_2 \in H_2$ перпендикулярного отрезка могут быть записаны в виде $M_1 = c_1 + a_1$, $M_2 = c_2 - a_2$.

Примеры решения задач.

Пример 1. Найдите базис и размерность подпространства $L^{\perp}$, ортогонального к подпространству L.

а) $L: \begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - 4x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$.   б) $L = L\{a_1(1;3;-2;1), a_2(-2;1;3;2)\}$.

Решение. а) Подпространство L является решением СЛАУ, а подпространство $L^{\perp}$ является линейной оболочкой строк коэффициентов матрицы СЛАУ. Значит, базисом в $L^{\perp}$ является набор

$$f = \{a_1(3;-1;1;1), a_2(1;-4;-1;-2)\}, \quad \dim(L^{\perp}) = 2.$$

б) Ортогональным дополнением к линейной оболочке $L = L\{a_1, a_2\}$ будет подпространство, являющееся решением СЛАУ

$$L: \begin{cases} (a_1, x) = 0 \\ (a_2, x) = 0 \end{cases} \text{ или } L: \begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}.$$

Базисом подпространства $L^{\perp}$ решений этой СЛАУ служит ФНР

$$f = \{b_1(11;1;7;0), b_2(7;0;4;1)\}, \ \dim(L^{\perp}) = 2.$$

Пример 2. Ортогонализуйте набор векторов

$$a = \{a_1(1;1;-1), a_2(1;4;-1), a_3(-3;2;5)\}.$$

Решение. На первом шаге согласно алгоритму Грама-Шмидта $f_1 = a_1$. На втором шаге положим

$$f_2 = a_2 - \lambda f_1, \text{ где } \lambda = \frac{(a_2, f_1)}{(f_1, f_1)} = \frac{6}{3} = 2.$$

Получим $f_2 = a_2 - 2f_1 = (-1;2;1)$.
На третьем шаге положим

$$f_3 = a_3 - \lambda_1 f_1 - \lambda_2 f_2, \text{ где } \lambda_1 = \frac{(a_3,f_1)}{(f_1,f_1)} = \frac{6}{3} = 2,\ \lambda_2 = \frac{(a_3,f_2)}{(f_2,f_2)} = \frac{12}{6} = 2.$$

Получим $f_3 = a_3 - 2f_1 - 2f_2 = (1;0;1)$.

Пример 3. Найдите ортогональный базис и размерность подпространства $L^\perp$, ортогонального к подпространству $L = L\{a_1(1;1;0;-1;2), a_2(1;0;2;1;0)\}$.

Решение. Ортогональным дополнением к линейной оболочке $L = L\{a_1, a_2\}$ в общем случае будет подпространство $L^\perp$, являющееся решением однородной СЛАУ

$$L^\perp : \begin{cases} (a_1,x)=0 \\ (a_2,x)=0 \end{cases} \text{ или } L^\perp : \begin{cases} x_1 + x_2 \quad - x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_1 \quad + 2x_3 + x_4 \quad = 0 \end{cases}.$$

Но в отличие от Примера 1б нам нужно построить ортогональный базис. Выбираем частное решение СЛАУ, например $b_1(2;0;-1;0;-1)$, и далее решаем систему

$$\begin{cases} (a_1,x)=0 \\ (a_2,x)=0 \\ (b_1,x)=0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x_1 + x_2 \quad - x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_1 \quad + 2x_3 + x_4 \quad = 0 \\ 2x_1 \quad - x_3 \quad - x_5 = 0 \end{cases}.$$

В качестве второго вектора базиса выберем ее частное решение, например, $b_2(0;0;1;-2;-1)$. Тогда $b_2 \in L^\perp$ и $(b_2,b_1)=0$. Поступая аналогичным образом, составим третью систему

$$\begin{cases} (a_1,x)=0 \\ (a_2,x)=0 \\ (b_1,x)=0 \\ (b_2,x)=0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x_1 + x_2 \quad - x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_1 \quad + 2x_3 + x_4 \quad = 0 \\ 2x_1 \quad - x_3 \quad - x_5 = 0 \\ x_3 - 2x_4 - x_5 = 0 \end{cases}.$$

Решив ее, получим $b_3(1;-6;0;-1;2)$. Итак, ортогональный базис

$$b = \{b_1(2;0;-1;0;-1), b_2(0;0;1;-2;-1), b_3(1;-6;0;-1;2)\},\ \dim(L^\perp) = 3.$$

Пример 4. Найдите ортогональный базис и размерность подпространства $L^\perp$, ортогонального к подпространству

$$L : \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 \quad - 2x_5 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 - x_5 = 0 \\ 2x_1 \quad + 6x_3 + 3x_4 - 3x_5 = 0 \end{cases}.$$

Решение. а) Подпространство L является решением СЛАУ, а подпространство $L^\perp$ является линейной оболочкой строк a_k коэффициентов матрицы СЛАУ. Значит, базисом в $L^\perp$ является набор

$$\{a_1(1;-1;2;0;-2), a_2(2;-2;2;-2;-1), a_2(2;0;6;3;-3)\}.$$

Этот набор не ортогонален и его следует ортогонализовать. Положим

$$f_1 = a_1(1;-1;2;0;-2),\ f_2 = a_2 - \lambda f_1, \text{ где } \lambda = \frac{(a_2,f_1)}{(f_1,f_1)} = \frac{10}{10} = 1.$$

Получим $f_2 = a_2 - f_1 = (1;-1;0;-2;1)$. На третьем шаге

$$f_3 = a_3 - \lambda_1 f_1 - \lambda_2 f_2, \text{ где } \lambda_1 = \frac{(a_3,f_1)}{(f_1,f_1)} = \frac{20}{10} = 2,\ \lambda_2 = \frac{(a_3,f_2)}{(f_2,f_2)} = \frac{-7}{7} = -7.$$

Третий вектор $f_3 = a_3 - 2f_1 + f_2 = (1;1;2;1;2)$.

Итак, ортогональным базисом в $L^\perp$ может служить набор

$$f = \{f_1(1;-1;2;0;-2), f_2(1;-1;0;-2;1), f_3(1;1;2;1;2)\},\ \dim(L^\perp) = 3.$$

Пример 5. Найдите ортогональную проекцию g и ортогональную составляющую h вектора $a(-3;6;1;1)$ при проекции на подпространство $L\{f_1(1;2;-1;1), f_2(1;1;-1,2)\}$.

Решение. По определению $a = g + h = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + h$. Умножив скалярно обе части на векторы f_1 и f_2, и учитывая, что $(f_1,h) = (f_2,h) = 0$, получим СЛАУ вида

$$\begin{cases} (a,f_1) = \lambda_1(f_1,f_1) + \lambda_2(f_2,f_1) \\ (a,f_2) = \lambda_1(f_1,f_2) + \lambda_2(f_2,f_2) \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 7\lambda_1 + 6\lambda_2 = 9 \\ 6\lambda_1 + 7\lambda_2 = 4 \end{cases},$$

откуда $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -2$. Следовательно, проекция $g = 3f_1 - 2f_2 = (1; 4; -1; -1)$, ортогональная составляющая $h = a - g = (-4; 2; 2; 2)$.

Пример 6. В трехмерном евклидовом пространстве E^3 даны две прямые

$$H_1 = c_1(1; 2; 3) + L\{a_1(1; 0; 1)\} \quad \text{и} \quad H_2 = c_2(4; -1; 2) + L\{a_2(0; 1; 0)\}.$$

(1) Укажите направление общего перпендикуляра к двум прямым.

(2) Найдите расстояние между прямыми.

(3) Составьте уравнение общего перпендикуляра.

Решение. (1) Для ответа только на пункт (1) достаточно решить однородную СЛАУ

$$\begin{cases}(a_1, x) = 0\\(a_2, x) = 0\end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases}x_1 + x_3 = 0\\x_2 = 0\end{cases}.$$

ФНР этой СЛАУ состоит из одного вектора $h_1(1; 0; -1)$. Этот вектор задает направление общего перпендикуляра.

(2) Для вычисления концов и длины перпендикулярного отрезка надо спроектировать вектор $c = c_2 - c_1 = (3; -3; -1)$ на подпространство $L = L_1 + L_2 = L\{a_1, a_2\}$. Согласно общему методу построения ортогональной проекции, следует составить и решить СЛАУ вида

$$\begin{cases}(a_1, a_1)t_1 + (a_2, a_1)t_2 = (c, a_1)\\(a_1, a_2)t_1 + (a_2, a_2)t_2 = (c, a_2)\end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases}2t_1 = 2\\t_2 = -3\end{cases}.$$

Получим проекцию и ортогональную составляющую

$$g = t_1 a_1 + t_2 a_2 = a_1 - 3a_2 = (1; -3; 1), \quad h = c - g = (2; 0; -2).$$

Отрезок h равен удвоенному вектору h_1, построенному в пункте (1). Расстояние между прямыми равно $r = |h| = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2}$.

(3) Запишем разложение $c = c_2 - c_1 = g + h = a_1 - 3a_2 + h$. Из него следует, что $c_2 + 3a_2 = c_1 + a_1 + h$. Тогда

$$M_1 = c_1 + a_1 = (2; 2; 4), \quad M_2 = c_2 + 3a_2 = (4; 2; 2).$$

Уравнение общего перпендикуляра $H_3 = M_1(2; 2; 4) + L\{h(2; 0; -2)\}$. Полезно сделать проверку: $M_2(4; 2; 2) = M_1(2; 2; 4) + h(2; 0; -2)$.

Пример 7. В четырехмерном пространстве E^4 заданы два многообразия:

$$H_1 = L\{a_1(1; 0; 1; 0)\} + c_1(1; 2; 3; 1), \quad H_2 = L\{a_2(0; 1; 0; 1)\} + c_2(4; -1; 2; 0).$$

Найдите расстояние между ними и составьте уравнение общего перпендикуляра.

Решение. Надо спроектировать вектор $c = c_2 - c_1 = (3; -3; -1; -1)$ на подпространство $L = L_1 + L_2 = L\{a_1, a_2\}$. Для этого следует решить СЛАУ

$$\begin{cases}(a_1, a_1)t_1 + (a_2, a_1)t_2 = (c, a_1)\\(a_1, a_2)t_1 + (a_2, a_2)t_2 = (c, a_2)\end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases}2t_1 = 2\\-2t_2 = -4\end{cases}.$$

Получим проекцию и ортогональную составляющую

$$g = t_1 a_1 - t_2 a_2 = a_1 - 2a_2 = (1; -2; 1; -2), \quad h = c - g = (2; -1; -2; 1).$$

Расстояние между прямыми $r = |h| = \sqrt{10}$.

Запишем разложение $c = c_2 - c_1 = g + h = a_1 - 2a_2 + h$. Из него следует, что $c_2 + 2a_2 = c_1 + a_1 + h$. Тогда

$$M_1 = c_1 + a_1 = (2; 2; 4; 1), \quad M_2 = c_2 + 3a_2 = (4; 1; 2; 2).$$

Уравнение общего перпендикуляра $H_3 = M_1(2; 2; 4; 1) + L\{h(2; -1; -2; 1)\}$.

Пример 8. В пространстве E^4 заданы линейные многообразия

$$H_1 = c_1(0; 2; 1; 1) + L\{a_1(1; 2; 2; 0), a_2(1; 0; 0; 1)\}, \quad H_2 = c_2(0; 2; -1; 0) + L\{b_1(1; 1 1; 1), b_2(0; 1; 1; 0)\}.$$

Описать множество H_4, являющееся объединением всех общих перпендикуляров к двум данным многообразиям.

Решение. Для поиска отрезка, перпендикулярного к двум многообразиям, надо спроектировать вектор $c = c_2 - c_1 = (0;0;-2;-1)$ на подпространство $L = L\{a_1, a_2, b_1, b_2\}$. Для этого надо решить вспомогательную СЛАУ с неизвестными t_1, t_2, s_1, s_2 вида

$$\begin{cases} (a_1,a_1)t_1 + (a_2,a_1)t_2 + (b_1,a_1)s_1 + (b_2,a_1)s_2 = (c,a_1) \\ (a_1,a_2)t_1 + (a_2,a_2)t_2 + (b_1,a_2)s_1 + (b_2,a_2)s_2 = (c,a_2) \\ (a_1,b_1)t_1 + (a_2,b_1)t_2 + (b_1,b_1)s_1 + (b_2,b_1)s_2 = (c,b_1) \\ (a_1,b_2)t_1 + (a_2,b_2)t_2 + (b_1,b_2)s_1 + (b_2,b_2)s_2 = (c,b_2) \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 9t_1 + t_2 + 5s_1 + 4s_2 = -4 \\ t_1 + 2t_2 + 2s_1 = -1 \\ 5t_1 + 2t_2 + 4s_1 + 2s_2 = -3 \\ 4t_1 + 2s_1 + 2s_2 = -2 \end{cases}.$$

Ее ранг равен трем, решение зависит от параметра t:

$$t_1 = 1,\ t_2 = -1 + t,\ s_1 = -t,\ s_2 = -3 + t.$$

Концы M_{01} и M_{02} перпендикулярного к многообразиям отрезка можно найти стандартным образом, используя частное решение $(1;-1;0;-3)$ при $t = 0$:

$$g = t_1 a_1 + t_2 a_2 + s_1 b_1 + s_2 b_2 = a_1 - a_2 - 3b_2 = (0;-1;-1;-1),\quad h = c - g = (0;1;-1;0).$$

Из разложения $c = c_2 - c_1 = g + h = a_1 - a_2 - 3b_2 + h$ следует, что

$$M_{01} = c_1 + a_1 - a_2 = (0;4;3;0),\ M_{02} = c_2 + 3b_2 = (0;5;2;0).$$

Таким образом, параметрическое представление одного из общих перпендикуляров

$$H_3 = M_{01}(0;4;3;0) + L\{h(0;1;-1;0)\}.$$

Расстояние между прямыми $r = |h| = \sqrt{2}$.

Тот факт, что ранг расположенной выше СЛАУ оказался равен трем, означает, что $\dim(L_1 + L_2) = 3$, то есть $\dim(L_1 \cap L_2) = 1$. Можно убедиться, что вектор $(1;0;0;1) = a_2 = b_1 - b_2 \in L_1 \cap L_2$. Согласно теории, многообразие $H_4 = M_{01} + L\{h, a_2\}$ является объединением всех общих перпендикуляров.

Второй способ. Будем искать концы перпендикулярных отрезков M_1 и M_2 в общем виде, не исключая параметра t. Имеем

$$g = t_1 a_1 + t_2 a_2 + s_1 b_1 + s_2 b_2 = (a_1 - a_2 - 3b_2) + t\cdot(a_2 - b_1 + b_2) = (0;-1;-1;-1).$$

Из единственности проекции g следует, что $a_2 - b_1 + b_2 = 0$, то есть $a_2 = b_1 - b_2 \in L_1 \cap L_2$.

Точки M_1 и M_2 зависят от параметра t:

$$M_1 = M_{01}(0;4;3;0) - t\cdot(1;0;0;1),\quad M_2 = M_{02}(0;5;2;0) - t\cdot(1;0;0;1).$$

В итоге $H_4 = M_{01} + L\{h, a_2\}$.

Типовые задачи

1. Найдите базис и размерность подпространства $L^{\perp} \in E^n$, ортогонального к подпространству L.

   а) $n = 3$, $L: \{2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 0$.

   б) $n = 3$, $L: \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$.

   в) $n = 3$, $L = L\{a_1(2;-1;3)\}$.

   г) $n = 3$, $L = L\{a_1(1;-1;1), a_2(3;-1;-1)\}$.

   д) $n = 4$, $L: \begin{cases} 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$.

   е) $n = 4$, $L = L\{a_1(0;1;2;0), a_2(1;-1;1;0)\}$.

2. В пространстве E^n дополните вектор a_1 до ортогонального базиса.

   а) $a_1 = (3;6;-2)$.

   б) $a_1 = (-2;1;-5)$.

   в) $a_1 = (-2;1;3;2)$.

   г) $a_1 = (1;-1;2;1)$.

3. Найдите ортогональный базис и размерность подпространства $L \in E^n$.

   а) $n = 3$, $L: \{2x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0$.

   б) $n = 3$, $L: \{x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0$.

   в) $n = 4$, $L = \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 6x_1 + 5x_2 - 4x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases}$.

   г) $n = 4$, $L: \{-x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 0$.

д) $n = 5$, $L:\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$.

е) $n = 5$, $L:\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 - 3x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}$.

4. Найдите ортогональный базис и размерность ортогонального дополнения $L^{\perp}$ к подпространству $L \in E^n$.

   а) $n = 3$, $L = L\{a_1(1; -2; -1)\}$.

   б) $n = 4$, $L = L\{a_1(2; -1; 1; 1), a_2(1; -2; -1; 2)\}$.

   в) $n = 4$, $L = L\{a_1(1; -2; -1; 2), a_2(-5; -2; 2; -1)\}$.

   г) $n = 5$, $L = L\{a_1(2; 1; -6; -5; 0), a_2(3; 2; -5; -6; 0)\}$.

   д) $n = 5$, $L = L\{a_1(-1; 2; 1; 0; -2),\ a_2(1; 1; 2; 1; -1),\ a_3(2; -1; 1; 1; 1)\}$.

   е) $n = 5$, $L = L\{a_1(1; 1; -2; 1; 0), a_2(2; 1; -1; 0; -1), a_3(0; 1; -3; 2; 1)\}$.

5. Постройте ортогональный базис в линейном подпространстве L пространства E^n, и определите его размерность.

   а) $L = L\{a_1(1; -2; 3; 2), a_2(1; 6; -5; -5)\}$.

   б) $L = L_1^{\perp}$, где $L_1 = L\{a_1(1; -2; 3; 2), a_2(-4; 1; 2; -1)\}$.

   в) $L:\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$.

   г) $L = L_1^{\perp}$, где $L_1:\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ -3x_1 + 3x_2 - 3x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$.

6. Используя процесс ортогонализации базиса, постройте **ортогональный** базис $\{f_1, f_2, \ldots\}$ подпространства L, и укажите $\dim(L)$.

   а) $L = L\{a_1(1; -2; -1), a_2(-1; 3; 5)\}$.

   б) $L = L\{a_1(1; 2; 3; 2), a_2(3; 2; 5; 7)\}$.

   в) $L = L\{a_1(1; -1; 1; 2), a_2(4; 1; 0; 2), a_3(0; -3; 8; -2)\}$.

   г) $L = L\{a_1(1; -2; 3; 1), a_2(4; -3; 6; 2), a_3(3; -1; 4; -2)\}$.

   д) $L = L\{a_1(-1; 2; 1; 1), a_2(1; 3; 2; 0), a_3(-4; 3; 1; 3), a_1(1; 0; 3; 5)\}$.

   е) $L = L\{a_1(1; 2; 0; -1; 0), a_2(4; 0; 4; -2; 0), a_3(-1; -3; 8; 5; 1)\}$.

   ж) $L = L_1^{\perp}$, $L_1:\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + 7x_3 + 5x_4 = 0 \end{cases}$.

7. Используя процесс ортогонализации набора, постройте в подпространстве L **ортонормированный** базис $\{f_1, f_2, \ldots\}$.

   а) $L = L\{g_1, g_2, \ldots\}$, $g_1 = (1; -2; 5)$, $g_2 = (3; -1; 5)$, $g_3 = (5; -5; 3)$;

   б) $L = L\{g_1, g_2, \ldots\}$, $g_1 = (1; -2; 3; 1)$, $g_2 = (4; -3; 6; 2)$, $g_3 = (3; -1; 4; -2)$.

   в) $L = L\{g_1, g_2, \ldots\}$, $g_1 = (-1; 2; 1; 1)$, $g_2 = (1; 3; 2; 0)$, $g_3 = (-4; 3; 1; 3)$, $g_4 = (1; 0; 3; 5)$.

   г) $L:\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + x_5 = 0. \end{cases}$.

8. Постройте ортогональный базис в пересечении L двух линейных подпространств пространства E^n, и определите размерность пересечения.

   а) $L = L_1 \cap L_2$, $L_1 = L\{a_1(1; 2; -1; 1; 2), a_2(0; 1; 1; -2; 1), a_3(1; 3; 0; 1; 1)\}$,

   $L_2 = L\{b_1(2; 2; 1; 0; 1), b_2(2; -1; 3; -4; -1), b_3(-1; 1; -1; 1; 0)\}$.

б) $L = L_1^{\perp} \bigcap L_2^{\perp}$, $L_1: \begin{cases} x_1 \qquad - \ x_3 + 2x_4 - x_5 = 0 \\ \qquad x_2 + \ x_3 + 3x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 + \ x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$, $L_2: \begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 + \ x_5 = 0 \\ \qquad x_2 + \ x_3 - x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_1 \qquad - \ x_3 + x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}$.

в) $L = L_1 \bigcap L_2$, $L_1 = L\{a_1(1;1;1;2;0), a_2(-1;0;3;1;-3), a_3(2;1;-2;1;2)\}$,

$L_2 = L\{b_1(4;3;2;5;1), b_2(3;2;0;3;2), b_3(2;1;-1;1;3)\}$.

г) $L = L_1^{\perp} \bigcap L_2^{\perp}$, $L_1: \begin{cases} -x_1 + x_2 \qquad - \ x_4 + 2x_5 = 0 \\ \ x_1 \qquad + x_3 + \ x_4 + 3x_5 = 0 \\ \ x_1 + 2x_2 - x_3 - 3x_4 + \ x_5 = 0 \end{cases}$, $L_2: \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 \qquad + x_3 + \ x_4 - x_5 = 0 \\ 3x_1 + x_2 \qquad - \ x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$.

9. Найдите ортогональную проекцию g и ортогональную составляющую h при проекции вектора a на линейное подпространство L.

а) $a = (4;-3;1)$, $L = L\{(2;1;1)\}$.

б) $a = (-1;5;1)$, $L: \{x - 2y + 2z = 0$.

в) $a = (4;1;-1)$, $L: \begin{cases} -x + \ y + 2z = 0 \\ 3x + 2y + \ z = 0 \end{cases}$.

г) $a = (2;6;4)$, $L = L\{b_1(1;1;3), b_2(1;0;-1)\}$.

д) $a = (3;-4;-3;-1)$, $L = L\{b(4;-2;-1;-2)\}$.

е) $a = (5;4;3;6)$, д $L = L\{b(2;-1;0;2)\}$.

ж) $a = (-3;5;4;-5)$, $L: \{2x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 = 0$.

з) $a = (3;4;0;0)$, $L = L\{b_1(3;-5;7;6), b_2(2;-1;3;4)\}$.

и) $a = (0;-2;8;1)$, $L = L\{b_1(3;-2;1;1), b_2(2;1;-2;-1)\}$.

к) $a = (7;-5;3;-1)$, $L: \begin{cases} 3x_1 + \ x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0 \\ 3x_1 - 5x_2 - \ x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$.

л) $a = (1;1;-4;4;-1)$, $L = L\{b_1(2;4;1;2;-3), b_2(3;2;2;1;-1)\}$.

м) $a = (3;0;3;1;6)$, $L: \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 - 3x_5 = 0 \end{cases}$.

10. Найдите вектор нормали к плоскости в E^n, проходящей через точки M_1, M_2, M_3.

а) $M_1 = (4;-1;3)$, $M_2 = (6;0;3)$, $M_3 = (3;1;-2)$.

б) $M_1 = (1;1;2)$, $M_2 = (2;-1;1)$, $M_3 = (1;2;-4)$.

в) $M_1 = (1;1;-2)$, $M_2 = (3;1;2)$, $M_3 = (2;3;-3)$.

11. Найдите расстояние между двумя линейными многообразиями H_1 и H_2, и задайте общий перпендикуляр к ним в параметрическом виде: $H_3 = c_3 + L\{h\}$.

а) $H_1 = c_1(-4;3;1) + L\{a_1(1;-1;-1)\}$, $H_2 = c_2(3;2;2) + L\{a_2(-1;3;1)\}$.

б) $H_1 = c_1(3;3;-1) + L\{a_1(1;2;2)\}$, $H_2 = c_2(-5;4;-2) + L\{a_2(1;1;-2)\}$.

в) $H_1 = c_1(-5;0;2) + L\{a_1(0;1;-1)\}$, $H_2: \begin{cases} 2x \qquad - z = 3 \\ \ x + y - \ z = 1 \end{cases}$.

г) $H_1 = c_1(2;-6;1;-1) + L\{a_1(2;-1;0;1)\}$, $H_2 = c_2(1;1;-1;-1) + L\{a_2(-2;0;1;1)\}$.

д) $H_1 = c_1(1;0;3;-2) + L\{a_1(1;1;-2;0)\}$, $H_2 = c_2(2;-5;3;-5) + L\{a_2(0;1;1;2)\}$.

е) $H_1 = c_1(1;2;-1;-4) + L\{a_1(2;1;-1;-2), a_2(1;1;0;-1)\}$,

$H_2 = c_2(-4;2;-2;3) + L\{b_1(3;1;1;-1)\}$.

ж) $H_1 = c_1(-1;-1;5;-2) + L\{a_1(2;1;-3;1), a_2(3;1;-1;-1)\}$,

$H_2 = c_2(6;3;3;-2) + L\{b_1(4;2;0;-1)\}$.

з) $H_1 = c_1(7;1;-3;-2) + L\{a_1(3;1;-2;1)\}$, $H_2: \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 12 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 16 \end{cases}$.

и) $H_1 = c_1(7;0;2;1) + L\{a_1(2;2;1;-3)\}$, $H_2 : \begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 13 \end{cases}$.

12. Найдите расстояние между двумя линейными многообразиями H_1 и H_2 , и задайте в параметрическом виде $H_3 = c_3 + L\{h\}$ какой-нибудь общий перпендикуляр к ним. Если их много, укажите многообразие $H_4 = c_4 + L_4$ концов всех общих перпендикуляров, принадлежащих H_1 , и многообразие $H_5 = c_5 + L_5$, являющееся объединением всех общих перпендикуляров.

а) $H_1 = c_1(1;2;3) + L\{a_1(1;0;1), a_2(0;1;0)\}$, $H_2 = \begin{cases} x - y = 1 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases}$.

б) $H_1 = c_1(0;0;2) + L\{a_1(1;-1;1)\}$, $H_2 = \{2x + y - z = 1$.

в) $H_1 = L\{a_1(1;0;1;0), a_2(0;1;0;1)\} + c_1(0;1;2;3)$,
$H_2 = L\{b_1(1;1;0;0), b_2(0;0;1;1)\} + c_2(0;-3;1;6)$.

г) $H_1 = L\{a_1(1;2;0;1), a_2(1;0;2;1)\} + c_1(2;1;0;0)$,
$H_2 = L\{b_1(1;1;0;2), b_2(1;0;1;2)\} + c_2(-1;2;3;-1)$.

Дополнительные задачи

15. Докажите формулу $(L_1 + L_2^\perp)^\perp = L_1^\perp \cap L_2$.

16. Пусть L_1 и L_2 – линейные подпространства в E^n . Верно ли утверждение:

а) $L_1 + L_2 = E^n \Rightarrow L_1 = L_2^\perp \oplus (L_1 \cap L_2)$.

б) $L_1 \subseteq L_2 \Rightarrow L_2 = L_1 \oplus (L_1^\perp \cap L_2)$.

в) $L_1 \cap L_2 = \{\bar{0}\} \Rightarrow L_1^\perp = L_2 \oplus (L_1^\perp \cap L_2^\perp)$.

г) $L_1 + L_2 = E^n \Rightarrow L_1^\perp \cap L_2^\perp = \{\bar{0}\}$.

д) $L_1 \cap L_2^\perp = \{\bar{0}\} \Rightarrow L_1^\perp \cap L_2 = \{\bar{0}\}$.

17. Пусть L_1, L_2 и L_3 – линейные подпространства в E^n . Верно ли утверждение:

а) $(L_1 + L_2)^\perp = (L_1 + L_3)^\perp \Rightarrow L_2^\perp = L_3^\perp$.

б) $(L_1 + L_2)^\perp = (L_1 + L_3)^\perp \Rightarrow (L_1 \cap L_2)^\perp = (L_1 \cap L_3)^\perp$.

в) $(L_1 + L_2)^\perp = (L_1 + L_3)^\perp \Rightarrow L_1^\perp \cap L_2^\perp = L_1^\perp \cap L_3^\perp$.

г) $(L_1 + L_2)^\perp \subseteq (L_1 + L_3)^\perp \Rightarrow L_2^\perp \subseteq L_3^\perp$.

18. Пусть $H_1 = c_1 + L_1$ и $H_2 = c_2 + L_2$ – два линейных многообразия в E^n , причем $L_1^\perp \cap L_2^\perp = \{\bar{0}\}$. Докажите, что в этом случае $H_1 \cap H_2 \neq \varnothing$.

19. Пусть $H_1 = L_1 + c_1$ и $H_2 = L_2 + c_2$ – два линейных многообразия в E^n . Известно, что многообразия H_1 и H_2 скрещиваются. Докажите, что в этом случае $L_1^\perp \cap L_2^\perp \neq \{\bar{0}\}$.

20. Пусть $H_1 = L_1 + c_1$ и $H_2 = L_2 + c_2$ – два линейных многообразия в E^n . Докажите, что общий перпендикуляр у них существует тогда и только тогда, когда $\dim(L_1 + L_2) < n$.

21. Пусть $H_1 = L_1 + c_1$ и $H_2 = L_2 + c_2$ – два линейных многообразия в E^n . Докажите, что если общий перпендикуляр у них существует и $L_1 \cap L_2 = \{\bar{0}\}$, то этот перпендикуляр определен однозначно.

22. Два различных трехмерных линейных многообразия в E^5 имеют общие точки, и существует ненулевой вектор, ортогональный их направляющим подпространствам. Чему может равняться размерность пересечения этих многообразий?

23. Докажите, что если $a \in L\{f_1, f_2, ..., f_k\} \subseteq E^n$ и $(a, f_j) = 0$ для всех j , то $a = \bar{0}$.

24. Докажите, что если набор $f = \{f_1, f_2, ..., f_k)$ линейно независим, а набор $f' = \{f_1, f_2, ..., f_k, f_{k+1})$ линейно зависим, то при ортогонализации набора f' окажется, что вектор $g_{k+1} = \overline{0}$.

25. Докажите теорему о трех перпендикулярах в пространстве E^n: если $L_1 \subseteq L_2$, b – ортогональная проекция вектора a на подпространство L_2, c – ортогональная проекция вектора b на подпространство L_1, d – ортогональная проекция вектора a на подпространство L_1, то $d = c$.

Ответы на типовые задачи

1. а) $L^{\perp} = L\{f_1(2;4;-3)\}$, $\dim(L^{\perp}) = 1$.
   б) Например, $L^{\perp} = L\{f_1(2;4;-5), f_2(3;-2;4)\}$, $\dim(L^{\perp}) = 2$.
   в) Например, $L^{\perp} = L\{f_1(1;2;0), f_2(0;3;1)\}$, $\dim(L^{\perp}) = 2$.
   г) $L^{\perp} = L\{f_1(1;2;1)\}$, $\dim(L^{\perp}) = 1$.
   д) Например, $L^{\perp} = L\{f_1(4;3;-2;-1), f_2(1;-2;-4;3)\}$, $\dim(L^{\perp}) = 2$.
   е) Например, $L^{\perp} = L\{f_1(3;2;-1;0), f_2(0;0;0;1)\}$, $\dim(L^{\perp}) = 2$.
2. а) Например, $a_1 = (3;6;-2)$, $a_2 = (2;-1;0)$, $a_3 = (2;4;15)$.
   б) Например, $a_1 = (-2;1;-5)$, $a_2 = (1;2;0)$, $a_3 = (2;-1;-1)$.
   в) Например, $a_1 = (-2;1;3;2)$, $a_2 = (1;2;0;0)$, $a_3 = (0;0;2;-3)$, $a_4 = (26;-13;15;10)$.
   Или $a_1 = (-2;1;3;2)$, $a_2 = (1;0;0;1)$, $a_3 = (0;3;-1;0)$, $a_4 = (5;2;6;-5)$.
   г) Например, $a_1 = (1;-1;2;1)$, $a_2 = (1;1;1;-2)$, $a_3 = (2;1;-1;1)$, $a_4 = (-1;2;1;1)$.
3. а) Например, $L = L\{f_1(1;1;0), f_2(3;-3;-4)\}$, $\dim(L) = 2$.
   б) Например, $L = L\{f_1(1;1;1), f_2(-5;4;1)\}$, $\dim(L) = 2$.
   в) Например, $L = L\{f_1(1;2;1;-3), f_2(-1;2;3;2)\}$, $\dim(L) = 2$.
   г) Например, $L = L\{f_1(2;1;0;0), f_2(0;0;1;-1), f_3(2;-4;5;5)\}$, $\dim(L) = 3$.
   д) Например, $L = L\{f_1(0;1;1;3;0), f_2(1;-1;1;0;0), f_3(-2;-1;1;0;3)\}$, $\dim(L) = 3$.
   е) Например, $L = L\{f_1(0;1;0;0;-1), f_2(3;0;2;-1;0), f_3(9;-7;-8;11;-7)\}$, $\dim(L) = 3$.
4. а) Например, $L^{\perp} = L\{f_1(1;0;1), f_2(1;1;-1)\}$, $\dim(L^{\perp}) = 2$.
   б) Например, $L^{\perp} = L\{f_1(0;1;0;1), f_2(-2;-1;2;1)\}$, $\dim(L^{\perp}) = 2$.
   в) Например, $L^{\perp} = L\{f_1(0;1;2;2), f_2(-9;8;-11;7)\}$, $\dim(L^{\perp}) = 2$.
   г) Например, $L^{\perp} = L\{f_1(4;-3;0;1;0), f_2(1;2;-1;2;0), f_3(0;0;0;0;1)\}$, $\dim(L^{\perp}) = 3$.
   д) Например, $L^{\perp} = L\{f_1(1;0;1;-3;0), f_2(1;1;-1;0;0), f_3(1;-2;-1;0;-3)\}$, $\dim(L^{\perp}) = 3$.
   е) Например, $L^{\perp} = L\{f_1(-1;1;0;0;-1), f_2(0;-1;0;1;-1), f_3(1;2;3;3;1)\}$.
   Или $L = L\{f_1(0;1;1;1;0), f_2(3;-1;1;0;4), f_3(3;-10;1;9;-5)\}$, $\dim(L) = 3$.
5. а) Например, $L = L\{f_1(1;-2;3;2), f_2(3;2;1;-1)\}$, $\dim(L) = 2$.
   б) Например, $L = L\{f_1(0;1;0;1), f_2(1;1;1;-1)\}$, $\dim(L) = 2$.
   в) Например, $L = L\{f_1(0;1;0;1), f_2(-2;-1;2;1)\}$, $\dim(L) = 2.2$
   г) Например, $L = L\{f_1(2;-1;1;1), f_2(5;8;-8;6)\}$, $\dim(L) = 2$.
6. а) Например, $L = L\{f_1(1;-2;-1), f_2(1;-1;3)\}$, $\dim(L) = 2$.
   б) Например, $L = L\{f_1(1;2;3;2), f_2(1;-2;-1;3)\}$, $\dim(L) = 2$.
   в) Например, $L = L\{f_1(1;-1;1;2), f_2(3;2;-1;0), f_3(1;0;3;-2)\}$, $\dim(L) = 3$.
   г) Например, $L = L\{f_1(1;-2;3;1), f_2(2;1;0;0), f_3(0;0;1;-3)\}$, $\dim(L) = 3$.
   д) Например, $L = L\{f_1(-1;2;1;1), f_2(2;1;1;-1), f_4(1;-1;1;2)\}$ $(f_3 = 0)$, $\dim(L) = 3$.
   е) Например, $L = L\{f_1(1;2;0;-1;0), f_2(3;-2;4;-1;0), f_3(-2;3;4;4;1)\}$, $\dim(L) = 3$.

ж) Например, $L = L\{f_1(2;-2;3;1), f_2(-1;2;1;3)\}$, $\dim(L) = 2$.

7. а) $f_1 = \frac{1}{\sqrt{30}} \cdot (1;-2;5)$, $f_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot (2;1;0)$, $f_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot (1;-2;-1)$.

б) $f_1 = \frac{1}{\sqrt{15}}(1;-2;3;1)$, $f_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2;1;0;0)$, $f_3 = \frac{1}{\sqrt{10}}(0;0;1;-3)$.

в) $f_1 = \frac{1}{\sqrt{7}}(-1;2;1;1)$, $f_2 = \frac{1}{\sqrt{7}}(2;1;1;-1)$, $f_4 = \frac{1}{\sqrt{7}}(1;-1;1;2)$ (вектор $f_3 = 0$).

г) Например, $L = L\{f_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(0;1;0;1;-1), f_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1;-1;0;1;0), f_3 = \frac{1}{\sqrt{111}}(2;5;-3;3;8)\}$, $\dim(L) = 3$.

8. а) Например, $L = L\{f_1(1;3;0;1;1), f_2(0;1;1;-2;-1)\}$, $\dim(L) = 2$.

б) Например, $L = L\{f_1(1;0;-1;2;3), f_2(-11;15;26;23;-3)\}$, $\dim(L) = 2$.

в) Например, $L = L\{f_1(2;1;-2;1;3), f_2(1;1;1;2;-1)\}$, $\dim(L) = 2$.

д) Например, $L = L\{f_1(3;1;0;-1;2), f_2(-3;-11;15;26;23)\}$, $\dim(L) = 2$.

9. а) $g = (2;1;1)$, $h = (2;-4;0)$. б) $g = (0;3;3)$, $h = (-1;2;-2)$.

в) $g = (0;0;0)$, $h = a = (4;1;-1)$. г) $g = (3;2;5)$, $h = (-1;4;-1)$.

д) $g = (4;-2;-1;-2)$, $h = (-1;-2;-2;1)$. е) $g = (4;-2;0;4)$, $h = (1;6;3;2)$.

ж) $g = (1;3;2;1)$, $h = (-4;2;2;-6)$. з) $g = (1;3;-1;2)$, $h = (2;1;1;-2)$.

и) $g = (-1;-4;5;3)$, $h = (1;2;3;-2)$. к) $g = (1;-1;2;3)$, $h = (6;-4;1;-4)$.

л) $g = (-1;2;-1;1;-2)$, $h = (2;-1;-3;3;1)$. м) $g = (3;-2;-1;1;2)$, $h = (0;2;4;0;4)$.

10. а) $n = (1;-2;-1)$. б) $n = (3;2;-1)$. в) $n = (4;-3;-2)$.

11. а) $H_3 = c_3(0;-1;-3) + L\{h(4;0;4)\}$, $\rho = 4\sqrt{2}$.

б) $H_3 = c_3(2;1;-3) + L\{h(-6;4;-1)\}$, $\rho = \sqrt{53}$.

в) $H_3 = c_3(-5;1;1) + L\{(6;2;2)\}$, $\rho = 2\sqrt{11}$.

г) $H_3 = c_3(-2;-4;1;-3)) + L\{h(1;5;-1;3)\}$, $\rho = 6$.

д) $H_3 = c_3(0;-1;5;-2) + L\{h(2;-2;0;1)\}$, $\rho = 3$.

е) $H_3 = c_3(-2;1;1;-1) + L\{h(1;2;-2;3)\}$, $\rho = 3\sqrt{2}$.

ж) $H_3 = c_3(-2;-1;3;0) + L\{h(-2;3;-1;-2)\}$, $\rho = 0$.

з) $H_3 = c_3(1;-1;1;-4) + L\{h(-2;4;2;6)\}$, $\rho = 2\sqrt{15}$.

и) $H_3 = c_3(5;-2;1;4) + L\{h(-1;1;-3;-1)\}$, $\rho = 2\sqrt{3}$.

12. а) $H_3 = L\{h(-1;0;1)\}$, $\rho = 2\sqrt{2}$, $H_4 = M_1(-1;0;1) + L\{b(1;1;1)\}$, $H_5 = L\{h(-1;0;1), b(1;1;1)\}$.

б) $H_3 = c_3(0;0;2) + L\{h(2;1;-1)\}$, $\rho = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{6}$, $H_4 = c_3(0;0;2) + L\{b(1;-1;1)\}$, $H_5 = c_3(0;0;2) + L\{h(2;1;-1), b(1;-1;1)\}$.

в) $H_3 = c_3(1;2;3;4) + L\{h(-1;1;1;-1)\}$, $\rho = 4$, $H_4 = c_3(1;2;3;4) + L\{b(1;1;1;1)\}$, $H_5 = c_3(1;2;3;4) + L\{h(-1;1;1;-1), b(1;1;1;1)\}$.

г) $H_3 = c_3(4;3;2;2) + L\{h(3;-1;-1;-1)\}$, $\rho = 2\sqrt{3}$, $H_4 = c_3(4;3;2;2) + L\{b(0;1;-1;0)\}$, $H_5 = c_3(4;3;2;2) + L\{h(3;-1;-1;-1), b(0;1;-1;0)\}$.

Ответы на дополнительные задачи

15. Указание: используйте формулу $(L_1 + L_2)^{\perp} = L_1^{\perp} \cap L_2^{\perp}$.

16. а) Неверно: $L_2^{\perp}$ не обязано лежать в L_1. б) Верно.

в) Неверно: L_2 не обязано лежать в $L_1^{\perp}$. г) Неверно. д) Неверно.

17. а) Неверно. б) Неверно. в) Верно. г) Неверно.

18. Указание: вычислите $\dim(L_1 + L_2)$.

19. Указание: покажите, что $\dim(L_1 + L_2) < n$.
21. Указание: выпишите условие неоднозначности общего перпендикуляра.
22. Указание: используйте тот факт, что $\dim(L_1 + L_2) < n$.
23. Указание: выразите вектор через набор $\{f_1, f_2, ..., f_k)$ и подсчитайте (a, a).
24. Указание: используйте утверждение о единственности проекции и ортогональной составляющей при ортогональной проекции на подпространство.
25. Указание: используйте теорему о существовании и единственности проекции и ортогональной составляющей при ортогональной проекции на подпространство.