I. Решение систем линейных уравнений

Определения и формулы.

Уравнение вида $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$ с неизвестными переменными $x_1, x_2, \dots, x_n$ называется линейным алгебраическим уравнением. Решением уравнения называется набор чисел $x_1, x_2, \dots, x_n$, которые при подстановке в уравнение вместо неизвестных превращают его в тождество.

Для тривиального линейного уравнения вида $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \dots + 0 \cdot x_n = 0$ решением является произвольный набор чисел длины n.

Система линейных алгебраических уравнений (сокращенно СЛАУ) состоит из m линейных уравнений с n неизвестными. Решением системы уравнений называется набор чисел $x_1, x_2, \dots, x_n$, которые при подстановке в каждое уравнение системы вместо неизвестных превращают его в тождество.

Алгебраическая запись СЛАУ:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad = \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}.$$

Алгебраическая запись решения СЛАУ: $X = (x_1; x_2; \dots; x_n)$.

Если система уравнений имеет решение, то она называется совместной. В противном случае она называется несовместной. Например, несовместной является система из одного уравнения $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \dots + 0 \cdot x_n = b \neq 0$.

Если все правые части линейных уравнений (свободные члены) равны нулю, то СЛАУ называется однородной. В противном случае она называется неоднородной.

Две системы уравнений, имеющие одно и то же множество решений, называются эквивалентными.

Преобразованием Гаусса системы линейных алгебраических уравнений называется преобразование одного из четырех типов:

(1) Умножить или разделить одно из уравнений на число, отличное от нуля.

(2) Переставить два уравнения.

(3) Одно из уравнений заменить суммой этого уравнения с другим уравнением.

(4) Исключить или добавить тривиальное уравнение.

При любом преобразовании Гаусса СЛАУ переходит в эквивалентную СЛАУ.

СЛАУ называется канонической, если она отвечает следующим требованиям:

(1) Все переменные разбиваются на два подмножества: базисные переменные и свободные переменные; одно из подмножеств может быть пустым.

(2) Количество базисных переменных совпадает с количеством нетривиальных уравнений.

(3) Каждой базисной переменной соответствует одно уравнение, в котором она содержится с коэффициентом единица, а коэффициенты при остальных базисных переменных равны нулю.

Если в каждом уравнении системы перенести свободные переменные в правую часть, то получится система, которая называется общим решением СЛАУ. Любое частное решение СЛАУ получится, если присвоить свободным переменным произвольные значения, а значения базисных переменных вычислить, используя уравнения общего решения.

Фундаментальный набор решений однородной СЛАУ (сокращенно ФНР) состоит из частных решений, вычисленных следующим образом: одна из свободных переменных равна единице, остальные свободные переменные равны нулю. Число решений в ФНР равно количеству свободных переменных.

Для записи СЛАУ можно использовать матричную запись $A \cdot X = B$, где A – матрица коэффициентов СЛАУ, X – столбец неизвестных, B – столбец свободных членов. В этой формуле используются понятия матрицы и матричного умножения, которые определяются в Разделе *VI* «Матричная алгебра».

Иногда полезна векторная запись СЛАУ: $x_1A^1 + x_2A^2 + \cdots + x_nA^n = B$, где A^k- k-ый столбец матрицы A, B – столбец свободных членов. В этой формуле используется понятие линейной комбинации вектор-столбцов, которое определяется в Разделе IV «Линейная зависимость и ранг».

Примеры решения задач.

Пример 1. Решите систему трех уравнений с тремя неизвестными: $\begin{cases} x - y + 2z = 3 \\ 3x - 2y + 4z = 5 \\ 2x - y + 5z = 3 \end{cases}$.

Решение. Используем метод Гаусса исключения неизвестных:

$$\begin{cases} x\boxed{-\ y} + 2z = 3 \\ 3x - 2y + 4z = 5 \\ 2x - y + 3z = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y + 2z = 3 \\ \boxed{x} \qquad\qquad = -1 \\ x \qquad + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -y + 2z = 4 \\ x \qquad\quad = -1 \\ \qquad\ \boxed{z} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -y = 2 \\ x = -1 \\ z = 1 \end{cases}.$$

Итерация 1. Выберем ведущим элемент $a_{12} = -y$, затем 1-е уравнение, умноженное на $\lambda_1 = -2$, прибавим ко 2-му уравнению, и умноженное на $\lambda_2 = -1$, прибавим к 3-му уравнению.

Итерация 2. Выберем ведущим элемент $a_{21} = x$, затем 2-е уравнение, умноженное на $\lambda_1 = -1$, прибавим к 1-му уравнению, и умноженное на $\lambda_2 = -1$, прибавим к 3-му уравнению.

Итерация 3. Выберем ведущим элемент $a_{33} = z$, затем 3-е уравнение, умноженное на $\lambda = -2$, прибавим к 1-му уравнению.

Получим единственное решение $x = -1$, $y = -2$, $z = 1$. Чтобы проверить правильность решения, надо подставить найденные значения в исходную СЛАУ.

Пример 2. Решите систему с четырьмя неизвестными: $\begin{cases} 2x + y + 3z - 2t = 2 \\ x - 2y + 4z - 2t = 1 \\ 4x + 7y + z - 2t = 5 \end{cases}$.

Решение. Используем схему Гаусса-Жордана (ведущие элементы, выбираемые для обнуления элементов столбца, обведены рамкой):

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 3 & \boxed{-2} & 2 \\ 1 & -2 & 4 & -2 & 1 \\ 4 & 7 & 1 & -2 & 5 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 3 & -2 & 2 \\ \boxed{-1} & -3 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 6 & -2 & 0 & 3 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -7 & 5 & -2 & 0 \\ -1 & -3 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Итерация 1. Выберем ведущим элемент $a_{14} = -2$, затем 1-ую строку, умноженную на $\lambda_1 = -1$, прибавим ко 2-ой строке, и умноженную на $\lambda_2 = -1$, прибавим к 3-ей строке.

Итерация 2. Выберем ведущим элемент $a_{21} = -1$, затем 2-ую строку, умноженную на $\lambda_1 = 2$, прибавим ко 1-ой строке, и умноженную на $\lambda_2 = 2$, прибавим к 3-ей строке.

Система несовместна, так как третье уравнение не имеет решения.

Пример 3. Решите систему с четырьмя неизвестными: $\begin{cases} 2x + y + 3z - t = 2 \\ x - 2y + 4z - t = 1 \\ 4x + 7y + z - t = 4 \end{cases}$.

Решение. Используем схему Гаусса-Жордана:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 3 & \boxed{-1} & 2 \\ 1 & -2 & 4 & -1 & 1 \\ 4 & 7 & 1 & -1 & 4 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 3 & -1 & 2 \\ \boxed{-1} & -3 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 6 & -2 & 0 & 2 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -5 & 5 & -1 & 0 \\ -1 & -3 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Итерация 1. Выберем ведущим элемент $a_{14} = -1$, затем 1-ую строку, умноженную на $\lambda_1 = -1$, прибавим ко 2-ой строке, и умноженную на $\lambda_2 = -1$, прибавим к 3-ей строке.

Итерация 2. Выберем ведущим элемент $a_{21} = -1$, затем 2-ую строку, умноженную на $\lambda_1 = 2$, прибавим к 1-ой строке, и умноженную на $\lambda_2 = 2$, прибавим к 3-ей строке.

Итерация 3. Вычеркнем тривиальную третью строку, обе оставшиеся строки умножим на –1 и переставим местами. Получим каноническую систему $\begin{cases} x + 3y - z = 1 \\ t + 5y - 5z = 0 \end{cases}$. В этой системе $x, t-$ базисные переменные, y, z – свободные переменные.

Общее решение $\begin{cases} x = 1 - 3y + z \\ t = -5y + 5z \end{cases}$. Если положить $y = a,\ z = b,$ то можно записать общее решение вектором, зависящим от двух параметров: $X = (1 - 3a + b; a; b; -5a - 5b)$.

Пример 4. Решите систему с четырьмя неизвестными: $\begin{cases} 2x + 2y - z + u = 4 \\ 4x + 3y - z + 2u = 6 \\ 3x + 3y - 2z + 2u = 6 \end{cases}$.

Решение. Используем схему Гаусса-Жордана:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & \boxed{-1} & 1 & 4 \\ 4 & 3 & -1 & 2 & 6 \\ 3 & 3 & -2 & 2 & 6 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & \boxed{1} & 2 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ \boxed{-1} & -1 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right).$$

Переставив уравнения, получим каноническую систему $\begin{cases} x + y = 2 \\ z - y = -2 \\ u - y = -2 \end{cases}$. В этой системе x, z, u – базисные переменные, y – свободная переменная.

Общее решение $\begin{cases} x = 2 - y \\ z = -2 + y \\ u = -2 + y \end{cases}$. Если положить $y = t,$ то можно записать общее решение как вектор $X = (2 - t; t; -2 + t; -2 + t) = c(2; 0; -2; -2) + t \cdot a(-1; 1; 1; 1)$, зависящий от параметра $t \in R$.

Пример 5. Найдите ФНР однородной СЛАУ $\begin{cases} 3x + 2y - z + t = 0 \\ 4x + 3y - z - t = 0 \\ 2x + y - z + 3t = 0 \end{cases}$.

Решение. Используем схему Гаусса-Жордана, опуская столбец свободных членов. Цепочка преобразований имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & \boxed{-1} & 1 \\ 4 & 3 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & \boxed{-1} & 1 \\ 1 & \boxed{1} & 0 & -2 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Вычеркнем тривиальную третью строку, изменим знак второй строки и переставим строки. Получим каноническую систему: $\begin{cases} y + x - 2t = 0 \\ z - x - 5t = 0 \end{cases}$, общее решение $\begin{cases} y = -x + 2t \\ z = x + 5t \end{cases}$. В этой системе y, z – базисные переменные, а x, t – свободные переменные.

Если положить $x = p,\ t = s,$ то можно записать общее решение системы как вектор $X = (p; -p + 2s; p + 5s; s) = p \cdot f_1(1; -1; 1; 0) + s \cdot f_2(0; 2; 5; 1)$, зависящий от параметров $p, s \in R$. Фундаментальный набор решений состоит из векторов f_1 и f_2.

Пример 6. Система $\begin{cases} x + ay = 2 \\ (a - 2)x + (a + 4)y = a \end{cases}$ зависит от параметра a. Найдите все значения параметра a, при которых СЛАУ: а) не имеет решений; б) имеет бесконечно много решений. В последнем случае выпишите общее решение.

Решение. Умножим первое уравнение на число $(2 - a)$ и прибавим ко второму уравнению. Получим СЛАУ $\begin{cases} x + ay = 2 \\ (a + 4 + a(2 - a))y = a + 2(2 - a) \end{cases}$. Эта система будет иметь единственное решение, если $(a + 4 + a(2 - a)) = -a^2 + 3a + 4 \neq 0$. Уравнение $-a^2 + 3a + 4 = 0$ имеет два корня $a = -1$ и $a = 4$. В случае $a = -1$ система $\begin{cases} x - y = 2 \\ 0 \cdot y = 5 \end{cases}$ решений не имеет. В случае $a = 4$ получим СЛАУ $\begin{cases} x + 4y = 2 \\ 0 \cdot y = 0 \end{cases}$, которая имеет общее решение $\{x = 2 - 4y$ со свободной переменной $y \in R$ (или $X = (2 - 4y; y)$).

Типовые задачи

1. Решите СЛАУ методом Гаусса-Жордана.

а) $\begin{cases} x + 3y = 5 \\ 2x - 5y = -1 \end{cases}$.

б) $\begin{cases} 2x - 4y = -1 \\ -3x + 6y = 2 \end{cases}$.

в) $\begin{cases} 5x + 3y = -7 \\ 2x - 5y = -9 \end{cases}$.

г) $\begin{cases} -x + 2y - 2z = 2 \\ 2x + 3y - z = 8 \\ 3x - 2y - z = 5 \end{cases}$.

д) $\begin{cases} 3x + y - 2z = -1 \\ 2x + 3y - z = 5 \\ 5x - 3y - 4z = -3 \end{cases}$. е) $\begin{cases} 5x + 3y + 4z = 9 \\ 2x - 5y + 3z = -4 \\ 7x + 4y + 3z = 15 \end{cases}$.

ж) $\begin{cases} -3x + 2y - 3z = 7 \\ 2x + 3y + 5z = -2 \\ 3x - 2y - 4z = 7 \\ -4x + 7y + 6z = -2 \end{cases}$. з) $\begin{cases} -2x + 2y + 3z = -4 \\ 4x + y - 3z = -1 \\ 3x - 2y - 5z = 2 \\ 4x + 5y + 2z = -3 \end{cases}$.

и) $\begin{cases} 3x + y - 2z + u = 5 \\ 2x + 3y - z + 2u = 4 \\ x - 2y + 2z - u = 4 \\ x + 3y - z + u = 0 \end{cases}$. к) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -3 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ -x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -1 \end{cases}$. .

2. Решите СЛАУ методом Гаусса-Жордана, укажите базисные и свободные переменные.

а) $\begin{cases} -x + 2y = 3 \\ 3x - 6y = -9 \end{cases}$. б) $\begin{cases} -2x + 4y = 6 \\ 3x - 6y = -8 \end{cases}$. в) $\begin{cases} 3x + 4y - 5z = 1 \\ 2x + 3y + 2z = 5 \end{cases}$.

г) $\begin{cases} 2x + 3y + 5z = 1 \\ 5x + 4y + 7z = 2 \end{cases}$. д) $\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 4x + y - 3z = 7 \\ -3x + 2y + 5z = -8 \end{cases}$. е) $\begin{cases} 3x + y - 2z = -1 \\ 2x + 3y - z = 5 \\ 5x - 3y - 4z = -13 \end{cases}$.

ж) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 = -3 \\ -3x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 6 \\ 3x_1 - 4x_2 + 3x_3 - x_4 = -3 \end{cases}$. з) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -2 \\ -2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 3 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 - 4x_4 = 7 \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_4 = 7 \end{cases}$.

и) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 - x_4 = 3 \\ -2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 = -1 \\ 7x_1 + 3x_2 - 4x_3 - x_4 = 8 \\ -x_1 - 4x_2 + 7x_3 + 3x_4 = 1 \end{cases}$. к) $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 - x_4 = -5 \\ 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 3x_4 = -3 \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 - x_4 = 5 \\ 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 - x_4 = 8 \end{cases}$.

3. Решите однородную СЛАУ методом Гаусса-Жордана и постройте ФНР.

а) $\begin{cases} 3x + 3y - z = 0 \\ 5x + y - 3z = 0 \end{cases}$. б) $\begin{cases} x + 2y - 2z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$.

в) $\begin{cases} 3x + y - 4z = 0 \\ x + 5y + z = 0 \\ 3x + 5y - 2z = 0 \end{cases}$. г) $\begin{cases} x + 2y - 2z + 3u = 0 \\ x - y + z - u = 0 \end{cases}$.

д) $\begin{cases} 3x + 2y - z - 3u = 0 \\ -2x + 3y + 5z + 2u = 0 \\ x + 2y - 2z + 2u = 0 \end{cases}$. е) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - 3x_2 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$.

ж) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 4x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 11x_3 + x_4 = 0 \\ 7x_1 + x_2 - 10x_3 - 2x_4 = 0 \\ 8x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$. з) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + 8x_4 = 0 \\ 4x_1 + x_2 - 2x_3 - 7x_4 = 0 \\ -x_1 - x_2 + x_3 + 5x_4 = 0 \\ 5x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$.

и) $\begin{cases} x_1 - x_2 + \quad + x_4 + x_5 = 0 \\ x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$. к) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_5 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 + 3x_5 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$.

4. Найдите все значения параметра a, при которых система:

I) не имеет решений; II) имеет бесконечно много решений.

Во втором случае укажите ответ в общем виде.

а) $\begin{cases} 2x + ay = 1 \\ ax + 2y = -1 \end{cases}$. б) $\begin{cases} ax + (a-3)y = 3 \\ (2-a)x - 2y = -2 \end{cases}$.

в) $\begin{cases} ax + (a-2)y = a+1 \\ 2x + (a+3)y = 2 \end{cases}$. г) $\begin{cases} -8x - (a+1)y = a-7 \\ (a-1)x + (a-2)y = 1 \end{cases}$.

д) $\begin{cases}(a+1)x+(a-1)y=2\\(a+1)x-\qquad y=a\end{cases}$. е) $\begin{cases}ax+ay=a+4\\4x+ay=8\end{cases}$.

ж) $\begin{cases}(a-3)x+(a-6)y=\ \ 3\\(5-a)x-\qquad 2y=-2\end{cases}$. з) $\begin{cases}(a-2)x+ay=2\\(a-2)x+\ \ y=a-1\end{cases}$.

и) $\begin{cases}2x+(1-a)y=3-a\\\ \ x+(4-a)y=-2\end{cases}$. к) $\begin{cases}\qquad -24x-(a+3)y=3a-15\\(3a+3)x+\qquad ay=3\end{cases}$.

Дополнительные задачи

5. Приведите пример СЛАУ, у которой вектор $x=(2;3;4)$ является единственным решением.
6. Приведите пример однородной СЛАУ, решением которой являются только векторы, пропорциональные вектору $a=(2;3;4)$.
7. Может ли быть нетривиальное решение у однородной СЛАУ из трех уравнений с двумя неизвестными?
8. Пусть A – матрица размером $(n\times n)$ и система линейных уравнений $Ax=b$ не имеет решений при некотором $b\in R^n$, $b\neq 0$. Верны ли следующие утверждения:
   а) Система $Ax=\overline{0}$ обязательно имеет ненулевое решение.
   б) Система $Ax=\overline{0}$ не имеет ненулевых решений.
   в) Система $Ax=\overline{0}$ может не иметь ненулевых решений.
9. Пусть A – матрица размером $(n\times n)$ и система линейных уравнений $Ax=\overline{0}$ имеет ненулевое решение. Верны ли следующие утверждения:
   а) СЛАУ $Ax=b$ обязательно имеет решение при любом $b\in R^n$.
   б) СЛАУ $Ax=b$ может иметь решение при любом $b\in R^n$.
   в) Существует $b\in R^n$, для которого СЛАУ $Ax=b$ не имеет решений.
   г) При некотором $b\in R^n$ СЛАУ $Ax=b$ имеет единственное решение.
10. Пусть A – матрица размером $(n\times n)$. Как соотносятся следующие утверждения:
   а) (1) СЛАУ $Ax=b$ имеет решение при любом $b\in R^n$;
      (2) СЛАУ $Ax=\overline{0}$ не имеет ненулевых решений.
   б) (1) СЛАУ $Ax=\overline{0}$ имеет только нулевое решение;
      (2) Существует $b\in R^n$, для которого СЛАУ $Ax=b$ не имеет решения.
   в) (1) СЛАУ $Ax=b$ имеет решения при некотором $b\in R^n$;
      (2) СЛАУ $Ax=\overline{0}$ имеет ненулевое решение.
   г) (1) СЛАУ $Ax=b$ имеет решения не для любых $b\in R^n$;
      (2) СЛАУ $Ax=\overline{0}$ имеет ненулевое решение.

Ответы на типовые задачи

1. а) $(2;1)$. б) Решений нет. в) $(-2;1)$. г) $(2;1;-1)$.
   д) Решений нет. е) $(2;1;-1)$. ж) $(1;2;-2)$. з) $(2;-3;2)$.
   и) $(2;-1;1;2)$. к) Решений нет.

2. а) y – свободная, x – базисная, $x=2y-3$;
   или x – свободная, y – базисная, $y=\frac{1}{2}y+\frac{3}{2}$;
   б) Решений нет.
   в) Например, z – свободная, x,y – базисные, $\begin{cases}x=-17+23z\\y=\ \ 13-16z\end{cases}$.
   г) Например, x – свободная, y,z – базисные, $\begin{cases}y=-3+11x\\z=\ \ 2-\ \ 7x\end{cases}$.

д) Например, x – свободная, y, z – базисные, $\begin{cases} z = -2 + x \\ y = 1 - x \end{cases}$;

или y – свободная, x, z – базисные, $\begin{cases} x = 1 - y \\ z = -1 - y \end{cases}$;

или z – свободная, x, y – базисные, $\begin{cases} x = 2 + z \\ y = -1 - z \end{cases}$.

е) Например, y – свободная, x, z – базисные, $\begin{cases} x = 11 - 5y \\ z = 17 - 7y \end{cases}$;

или x – свободная, y, z – базисные, $\begin{cases} y = \frac{11}{5} - \frac{1}{5}x \\ z = \frac{8}{5} + \frac{7}{5}x \end{cases}$.

ж) Например, x_1, x_2 – свободные, x_3, x_4 – базисные, $\begin{cases} x_3 = - x_1 + x_2 \\ x_4 = 3 - x_2 \end{cases}$;

или x_1, x_4 – свободные, x_2, x_3 – базисные, $\begin{cases} x_2 = 3 - x_4 \\ x_3 = 3 - x_1 - x_4 \end{cases}$;

или x_2, x_3 – свободные, x_1, x_4 – базисные, $\begin{cases} x_1 = x_2 - x_3 \\ x_4 = 3 - x_2 \end{cases}$;

или x_3, x_4 – свободные, x_1, x_2 – базисные, $\begin{cases} x_1 = 3 - x_3 - x_4 \\ x_2 = 3 - x_4 \end{cases}$.

з) Например, x_1 – свободная, x_2, x_3, x_4 – базисные, $\begin{cases} x_2 = 3 - 2x_1 \\ x_3 = -2 + 3x_1 \\ x_4 = 1 - 2x_1 \end{cases}$;

или x_4 – свободная, x_1, x_2, x_3 – базисные, $\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x_4 \\ x_2 = 2 + x_4 \\ x_3 = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2}x_4 \end{cases}$.

и) Например, x_1, x_2 – свободные, x_3, x_4 – базисные, $\begin{cases} x_3 = -5 + 4x_1 + x_2 \\ x_4 = 12 - 9x_1 - x_2 \end{cases}$;

или x_1, x_3 – свободные, x_2, x_4 – базисные, $\begin{cases} x_2 = 5 - 4x_1 + x_3 \\ x_4 = 7 - 5x_1 - x_3 \end{cases}$;

или x_1, x_4 – свободные, x_2, x_3 – базисные, $\begin{cases} x_2 = 12 - 9x_1 - x_4 \\ x_3 = 7 - 5x_1 - x_4 \end{cases}$;

или x_2, x_3 – свободные, x_1, x_4 – базисные, $\begin{cases} x_1 = \frac{5}{4} - \frac{1}{4}x_2 + \frac{1}{4}x_3 \\ x_4 = \frac{3}{4} + \frac{5}{4}x_2 - \frac{9}{4}x_3 \end{cases}$;

или x_3, x_4 – свободные, x_1, x_2 – базисные, $\begin{cases} x_1 = \frac{7}{5} - \frac{1}{5}x_3 - \frac{1}{5}x_4 \\ x_2 = -\frac{3}{5} + \frac{9}{5}x_3 + \frac{4}{5}x_4 \end{cases}$.

к) Например, x_2 – свободная, x_1, x_3, x_4 – базисные, $\begin{cases} x_1 = -1 - 2x_2 \\ x_3 = -2 - x_2 \\ x_4 = -2 - 3x_2 \end{cases}$;

или x_3 – свободная, x_1, x_2, x_4 – базисные, $\begin{cases} x_1 = 3 + 2x_3 \\ x_2 = -2 - x_3 \\ x_4 = 4 + 3x_3 \end{cases}$.

или x_4 – свободная, x_1, x_2, x_3 – базисные, $\begin{cases} x_1 = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}x_4 \\ x_2 = -\frac{2}{3} - \frac{1}{3}x_4 \\ x_3 = -\frac{4}{3} + \frac{1}{3}x_4 \end{cases}$.

3. а) Например, $\begin{cases} x = -2y \\ z = -3y \end{cases}$; ФНР $\{a_1(-2;1;-3)\}$.

б) Например, $\begin{cases} x = 0 \\ z = y \end{cases}$; ФНР $\{a_1(0;1;1)\}$.

в) Например, $\begin{cases} x = -3y \\ z = -2y \end{cases}$; ФНР $\{a_1(3;-1;2)\}$.

г) Например, $\begin{cases} z = -4x + y \\ u = -3x \end{cases}$; ФНР $\{a_1(1;0;-4;-3), a_2(0;1;1;0)\}$.

или $\begin{cases} y = 4x + z \\ u = -3x \end{cases}$; ФНР $\{a_1(1;4;0;-3),\ a_2(0;1;1;0)\}$.

д) Например, $\begin{cases} x = 2u \\ y = -u \\ z = u \end{cases}$; ФНР $\{a_1(2;-1;1;1)\}$.

е) Например, $\begin{cases} x_1 = 3x_2 \\ x_3 = -\frac{5}{2}x_2 \\ x_4 = 0 \end{cases}$; ФНР $\{a_1(6;2;-5;0)\}$.

ж) Например, $\begin{cases} x_2 = 3x_1 + 4x_3 \\ x_4 = 5x_1 - 3x_3 \end{cases}$; ФНР $\{a_1(1;3;0;5), a_2(0;4;1;-3)\}$;

или $\begin{cases} x_1 = \frac{3}{5}x_3 + \frac{1}{5}x_4 \\ x_2 = \frac{29}{5}x_3 + \frac{3}{5}x_4 \end{cases}$; ФНР $\{a_1(3;29;5;0), a_2(1;3;0;5)\}$.

з) Например, $\begin{cases} x_2 = 2x_1 + 3x_4 \\ x_3 = 3x_1 - 2x_4 \end{cases}$; ФНР $\{a_1(1;2;3;0), a_2(0;3;-2;1)\}$;

или $\begin{cases} x_1 = \frac{1}{3}x_3 + \frac{2}{3}x_4 \\ x_2 = \frac{2}{3}x_3 + \frac{13}{3}x_4 \end{cases}$; ФНР $\{a_1(1;2;3;0), a_2(2;13;0;3)\}$;

или $\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}x_2 - \frac{3}{2}x_4 \\ x_3 = \frac{3}{2}x_2 - \frac{13}{2}x_4 \end{cases}$; ФНР $\{a_1(1;2;3;0), a_2(3;0;13;-2)\}$.

и) Например, $\begin{cases} x_1 = -x_3 - 3x_5 \\ x_2 = -x_3 - 2x_5 \\ x_4 = 0 \end{cases}$; ФНР $\{a_1(-1;-1;1;0;0),\ a_2(-3;-2;0;0;1)\}$;

или $\begin{cases} x_5 = -x_1 + x_2 \\ x_3 = 2x_1 - 3x_2 \\ x_4 = 0 \end{cases}$; ФНР $\{a_1(1;0;2;0;-1),\ a_2(0;1;-3;0;1)\}$;

или $\begin{cases} x_2 = x_1 + x_5 \\ x_3 = -x_1 - 3x_5 \\ x_4 = 0 \end{cases}$; ФНР $\{a_1(1;1;-1;0;0),\ a_2(0;1;-3;0;1)\}$;

или $\begin{cases} x_1 = x_2 - x_5 \\ x_3 = -x_2 - 2x_5 \\ x_4 = 0 \end{cases}$; ФНР $\{a_1(1;1;-1;0;0),\ a_2(-1;0;-2;0;1)\}$.

к) Например, $\begin{cases} x_1 = x_4 + 2x_5 \\ x_2 = -x_4 - x_5 \\ x_3 = x_4 - 2x_5 \end{cases}$; ФНР – любые два вектора из пяти: $a_1(0;-3;-4;-2;1)$, $a_2(1;0;-3;-1;1)$, $a_3(4;-3;0;2;1)$, $a_4(2;-1;-2;0;1)$, $a_5(1;-1;1;1;0)$.

4. а) I) $a = 2$; II) $a = -2$, $\{x = y + \frac{1}{2}$.

б) I) $a = 1$; II) $a = 6$, $\{y = 1 - 2x$.

в) I) Не существует; II) Не существует.

г) I) Не существует; II) $a = 3$, $\{y = 1 - 2x$; $a = 5$, $\left\{y = \frac{1-4x}{3}\right.$.

д) I) $a = 0$, $a = -1$; II) Не существует.

е) I) $a = 0$; II) $a = 4$, $\{y = 2 - x$.

ж) I) $a = 4$; II) $a = 9$, $\{y = 1 - 2x$.

з) I) $a = 1$; II) $a = 2$, $\begin{cases} x \in R \\ y = 1 \end{cases}$.

и) I) Не существует; II) $a = 7$, $\{x = 3y - 2$.

к) I) Не существует; II) $a = 1$, $\{y = 3 - 6x$; $a = 3$, $\{y = 1 - 4x$.

Ответы на дополнительные задачи

5. Например, $\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 3 \\ x_3 = 4 \end{cases}$.

6. Например, $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 0 \\ 2x_1 - \ \ x_3 = 0 \end{cases}$.

7. Например, $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 = 0 \\ 4x_1 + 4x_2 = 0 \end{cases}$.

8. а) Верно. б) Неверно. в) Неверно.

9. а) Неверно. б) Неверно. в) Верно. г) Неверно.

10. а) Эквивалентны. б) Противоречат друг другу.
в) Не зависят друг от друга. г) Эквивалентны.