УЧЕБНИК

Линейная алгебра

Часть 1

Е.И. Анно

Экономический
факультет
МГУ
имени
М.В. Ломоносова

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. М.В. ЛОМОНОСОВА
Экономический факультет

Е.И. Анно

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Часть 1

Учебник

Москва
2021

УДК 512.64
ББК 22.143
А68

Е.И. Анно

А68 Линейная алгебра: часть 1: учебник. – М.: Экономический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова, 2021. – 182 с.

ISBN 978-5-906932-70-9

Учебник создан на базе лекций по линейной алгебре, которые много лет читались на экономическом факультете МГУ им. М.В. Ломоносова. Первая часть учебника содержит изложение теории линейных пространств, матричную алгебру, теорию определителей, теорию комплексных чисел и теорию многочленов. Изложение теоретического материала сопровождается большим количеством примеров решения задач.

Для студентов высших учебных заведений, обучающихся по специальности «Экономика».

ISBN 978-5-906932-70-9

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Данное пособие представляет собой запись курса лекций по линейной алгебре, который много лет читается на первом курсе Экономического факультета Московского Государственного Университета им. М.В. Ломоносова. Отбор материала и структура его подачи сложились на протяжении нескольких десятилетий, в этом процессе участвовали многие преподаватели экономического факультета.

Первая часть курса лекций содержит материал, который проходится в течение первого семестра. В первой главе разбирается теория систем линейных уравнений. Этот материал вынесен в начало потому, что большинство задач, разбираемых в процессе обучения, основано на составлении и решении систем линейных уравнений.

Во второй главе кратко изложены основы аналитической геометрии на плоскости и в пространстве. Это сделано для того, чтобы при дальнейшем изложении линейной алгебры опираться на геометрические представления. Изложение материала в этой главе ограничено изучением прямых и плоскостей.

С третьей главы начинается изложение традиционной линейной алгебры. После этого следует изложение абстрактной теории линейных пространств и матричная алгебра, рассмотрение евклидовых пространств и теория определителей. В заключение первой части курса даются необходимые сведения о комплексных числах, многочленах и алгебраических уравнениях.

Как правило, новый материал вводится на основе пройденного. Однако в некоторых случаях эта естественная последовательность нарушается. Так понятие матрицы вводится почти сразу для того, чтобы можно было компактнее записывать системы линейных уравнений. Той же цели служит раннее объяснение векторной записи системы линейных уравнений. Позже определения матриц и векторов повторяются в соответствующих главах. Также в главе о линейных пространствах вводится понятие линейного оператора, хотя сама глава о линейных операторах помещена во вторую часть курса.

Подразумевается, что наряду с учебником будет выпущен согласованный сборник задач, которые используются в практической работе на семинарах и для домашних заданий. Примеры решения некоторых задач включены в данный курс.

ГЛАВА 1

СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

§ 1. Общие понятия

Прежде, чем перейти к изучению систем линейных алгебраических уравнений, следует обсудить общие понятия уравнения, системы уравнений и решения системы уравнений.

Определение 1.1. Числовым уравнением с n неизвестными переменными будем называть формальную запись вида $F(x_1, x_2, ..., x_n) = G(x_1, x_2, ..., x_n)$. Формальные символы $x_1, x_2, ..., x_n$ называются переменными уравнения. В выражениях F и G кроме арифметических операций допускается использование функций. В начальном курсе алгебры и анализа рассматриваются так называемые элементарные функции (степени, экспоненты, логарифмы, прямые и обратные тригонометрические функции).

Решением числового уравнения с n неизвестными называется упорядоченный набор чисел $(y_1, y_2, ..., y_n)$, которые после подстановки в уравнение вместо неизвестных переменных превращают формальную запись в верное числовое тождество. Решения $(y_1, y_2, ..., y_n)$ и $(z_1, z_2, ..., z_n)$ называются различными, если при некотором k окажется $y_k \neq z_k$. Решить уравнение — значит найти все решения этого уравнения или показать, что решений не существует.

Замечание. Часто формальные переменные и решения уравнения обозначаются одинаковыми символами x_j. Надо уметь в зависимости от контекста различать эти понятия.

Замечание. Уравнением в широком смысле (синоним: условие, ограничение) можно также называть утверждение, зависящее от констант и неизвестных переменных, которое может быть либо верным, либо неверным. Примером такого утверждения может служить числовое неравенство $|x| + |y| \leq 1$. Константы и переменные не обязательно являются числами, например «*X* учится в *Y*». Решением этого уравнения может служить пара (Иванов, МГУ), если утверждение «Иванов учится в МГУ» верно.

Определение 1.2. Системой уравнений называется совокупность нескольких числовых уравнений с с одним и тем же количеством одинаково обозначенных неизвестных переменных. Решением системы уравнений является набор чисел $(y_1, y_2, ..., y_n)$, который является решением каждого уравнения системы. Решить систему — значит найти все решения этой системы или показать, что решений не существует. Система уравнений, имеющая решения, называется совместной (соответственно система уравнений, не имеющая решений, называется несовместной).

Каждое конкретное решение системы называется ее частным решением.

Теорема 1.3. Пусть дана система из m уравнений с n неизвестными. Обозначим через M_j множество наборов, являющихся решениями j-го уравнения. Тогда множеством решений системы является их пересечение $M = \bigcap\limits_{j=1}^{m} M_j$.

Доказательство. Набор принадлежит множеству решений системы тогда и только тогда, когда он является решением каждого уравнения системы, то есть принадлежит каждому M_j, а это и есть определение пересечения множеств.

Решение каждого уравнения или системы уравнений можно записать в виде системы специального вида, где в левой части каждого уравнения стоит одна из переменных, а в правой части уравнения — ее значение. Стандартный способ решения заключается в преобразовании уравнения или системы уравнений до тех пор, пока мы не придем к этому специальному виду. Но при этом следует быть уверенным в том, что все полученные в итоге решения являются решениями исходного уравнения или системы, и других решений нет.

Для этого следует критически относиться к преобразованиям, которыми мы пользуемся в процессе решения. Например, при возведении уравнения в квадрат решения могут приобретаться. При возведении неравенства в квадрат решения могут и приобретаться, и теряться. Понятно, что потеря решений недопустима. В то же время образование лишних решений не так критично: например, если в итоге получено конечное множество решений, каждое из них может быть проверено подстановкой в исходное уравнение или систему.

Введем понятие эквивалентности систем уравнений.

Определение 1.4. Две системы уравнений называются **эквивалентными**, если они содержат одинаковое количество переменных (даже если переменные по-разному обозначены), и либо обе несовместны, либо обе имеют одно и то же множество решений.

Теорема 1.5 (Достаточное условие эквивалентности систем уравнений). Предположим, что для систем уравнений некоторого типа можно определить класс преобразований, переводящих одну систему в другую, которые удовлетворяют двум условиям:

(1) решения не теряются: каждое решение первой системы обязательно является решением второй системы;

(2) для каждого преобразования одной системы в другую найдется обратное преобразование того же класса, которое переводит вторую систему в первую.

Тогда любое преобразование данного класса переводит систему уравнений в систему, ей эквивалентную.

Доказательство. Если бы при некотором преобразовании появилось новое решение, которое не является решением исходной системы, то в силу первого свойства оно бы осталось решением и после обратного преобразования, которое существует в силу второго свойства. Полученное противоречие доказывает Теорему.

Определение 1.6. Линейным алгебраическим уравнением с n неизвестными называется уравнение, имеющее вид $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$ с переменными $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и константами $a_1, a_2, \ldots, a_n, b.$ Константа b называется свободным членом уравнения. Системой линейных алгебраических уравнений (сокращенно СЛАУ) с n неизвестными называется система, состоящая из m линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \ldots \qquad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Система называется однородной, если все её свободные члены нулевые: $b_j = 0$ при $1 \le j \le m.$ В противном случае система называется неоднородной.

Для записи систем удобно использовать условный знак суммирования:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{jk}x_k = b_j, \ \ j = 1, 2, \ldots, m.$$

Коэффициенты системы a_{jk} и свободные члены b_j предполагаются известными. Индексы коэффициентов a_{jk} обозначают соответственно номер уравнения j, где $1 \le j \le m,$ и номер переменной x_k, где $1 \le k \le n.$

Система называется совместной, если она имеет хотя бы одно решение, и несовместной, если у неё нет ни одного решения. Совместная система может иметь одно или более решений. Совместная система называется определённой, если она имеет единственное решение, и неопределенной, если у нее более одного решения.

Уравнение, в котором все коэффициенты и свободный член равны нулю, называется тривиальным. Его решениями являются произвольные наборы переменных. Такое уравнение без потери общности можно исключить из системы уравнений, при этом множество решений системы не изменится.

Решениями системы, состоящей из одного тривиального уравнения, являются произвольные наборы значений переменных. Также можно рассматривать формальную пустую систему, содержащее пустое множество уравнений. Ее решениями также являются произвольные наборы значений неизвестных.

Замечание. Решение уравнения $0=0$ зависит от того, сколько неизвестных предполагается в этом уравнении. Если из каких-то соображений ясно, что их n (например, это оговорено особо, или вытекает из контекста задачи, или n неизвестных встречается в других уравнениях системы), то решением тривиального уравнения является произвольный набор чисел длины n.

§ 2. Геометрическая интерпретация решений СЛАУ

Если уравнение содержит две переменных x и y, то каждое решение уравнения можно изобразить точкой на координатной плоскости с координатами (x, y). Множество решений одного линейного уравнения $ax+by=c$ представляет собой прямую на плоскости. Тогда множество решений системы линейных уравнений — это пересечение нескольких прямых. Две прямых могут либо совпадать (множество решений — прямая), либо быть параллельными (пустое множество решений), либо быть непараллельными и иметь одну точку пересечения (единственное решение). То же относится к большему числу прямых.

Для случая трех переменных каждое решение изображается точкой в трехмерном координатном пространстве. Множество решений линейного уравнения $ax+by+cz=d$ представляет собой плоскость в пространстве, а множество решений системы линейных уравнений — это пересечение нескольких плоскостей.

Возможных вариантов пересечения, например, трех плоскостей существенно больше, чем для случая двух переменных. Если две плоскости из трех параллельны, то система несовместна. Несовместна система также в случае, если прямая, являющаяся пересечением двух плоскостей, оказывается параллельной третьей плоскости. В остальных случаях система совместна. Если все три плоскости совпадают, то множеством решений системы является плоскость. Если из трех плоскостей совпадают две, а третья им не параллельна, то множеством решений является прямая — пересечение двух плоскостей. По прямой могут также пересекаться несколько плоскостей (как страницы в раскрытой книге). Наконец, самая стандартная ситуация, когда три плоскости пересекаются в одной точке (говорят, что такие три плоскости находятся в общем положении). Тогда решение системы единственное.

Итог: геометрическим образом множества решений СЛАУ в случае трех и двух переменных может служить плоскость, прямая, точка или пустое множество.

§ 3. Матричная запись СЛАУ

Для записи систем линейных уравнений мы будем использовать так называемую матричную запись, которая во многих случаях удобнее алгебраической. Более подробно матрицы будут разбираться позднее, сейчас мы дадим только самые необходимые сведения.

Определение 1.7. Матрицей A размером $m \times n$ называется отображение, которое каждой комбинации из номера строки j, где $1 \le j \le m,$ и номера столбца k, где $1 \le k \le n,$ ставит в соответствие число a_{jk}. Число a_{jk} называется элементом матрицы.

Набор элементов $a_{j1}, a_{j2}, \ldots, a_{jn}$ при фиксированном j называется j-й строкой матрицы. Набор элементов $a_{1k}, a_{2k}, \ldots, a_{mk}$ при фиксированном k называется k-м столбцом матрицы.

Обычно матрица записывается в форме таблицы из m строк и n столбцов, которая окаймляется круглыми скобками. Иногда матрица обозначается общим элементом, окаймленным двойными черточками, например $\|a_{jk}\|$.

Матрицу, состоящую из одной строки, будем называть вектор-строкой длины n. Матрицу, состоящую из одного столбца, будем называть вектор-столбцом высоты m. Индексы, обозначающие номер строки в вектор-строке и номер столбца в вектор-столбце, обычно опускаются.

Определение 1.8. Пусть даны матрицы $A = \|a_{jk}\|$ размером $m \times n$ и $B = \|b_{ks}\|$ размером $n \times p.$ Произведением матриц A и B называется матрица $C = \|c_{js}\|$ размером $m \times p$ (обозначение $C = A \cdot B$), элементы которой вычисляются по формулам $c_{js} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} b_{ks}$ для всех $1 \le j \le m,$ $1 \le s \le p.$

Другими словами, элемент произведения матриц с индексами j и k равен сумме n попарных произведений элементов j-й строки первой матрицы и k-го столбца второй матрицы.

Коэффициенты a_{jk} системы линейных уравнений составляют матрицу коэффициентов $A = \left\| a_{jk} \right\|$. Строкой матрицы служат коэффициенты при переменных в одном уравнении, столбцом матрицы — коэффициенты при одной и той же переменной в разных уравнениях. Набор $(x_1, x_2, ..., x_n)$ обозначений переменных СЛАУ и набор $(b_1, b_2, ..., b_m)$ свободных членов представляются вектор-столбцами X и B высоты соответственно n и m.

Наряду с матрицей A используется матрица $\tilde{A}$, полученная присоединением к матрице A столбца B. Эта матрица называется расширенной матрицей коэффициентов данной СЛАУ.

Теорема 1.9. Система линейных алгебраических уравнений с матрицей коэффициентов A, вектор-столбцом неизвестных переменных X и вектор-столбцом свободных членов B эквивалентна матричному равенству $A \cdot X = B$.

Доказательство. Для доказательства достаточно проверить, что левая часть j-го уравнения СЛАУ $\sum\limits_{k=1}^{n} a_{jk} x_k = b_j$, совпадает с формулой элемента j-й строки в матричном произведении AX матрицы коэффициентов A и вектор-столбца переменных X.

§ 4. Векторная запись СЛАУ

Определение 1.10. Назовем n-мерным координатным пространством R^n множество, состоящее из всех упорядоченных наборов $(x_1, ..., x_n)$ из n действительных чисел. Эти наборы будут называться координатными векторами.

Примером координатного вектора является частное решение СЛАУ.

Замечание. Координатный вектор можно изображать как вектор-строкой, так и вектор-столбцом. Обычно для экономии места его изображают вектор-строкой. Однако в большинстве математических формул координатный вектор изображается вектор-столбцом.

Координатные векторы можно складывать и умножать на число:

если $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$, то

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n);$$

если $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, то $\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n)$.

Легко показать, что сложение координатных векторов удовлетворяет стандартным свойствам операции сложения:

(1) для любых трех векторов $x+(y+z)=(x+y)+z$ (ассоциативность);

(2) для любых двух векторов $x+y=y+x$ (коммутативность);

(3) существует так называемый нуль-вектор $\Theta=(0, 0, \ldots, 0)$ такой, что для всех x выполнено тождество $x+\Theta=\Theta+x=x$ (существование нуля);

(4) для каждого вектора $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ существует противоположный вектор $z=(-x_1, -x_2, \ldots, -x_n)$ такой, что $x+z=\Theta$ (существование противоположного элемента).

Операция умножения координатного вектора на число также удовлетворяет определенным свойствам:

(5) $\mu(\lambda x)=(\mu\lambda)x$;

(6) $\mu(\lambda x)=\lambda(\mu x)$ (коммутативность умножения на число);

(7) $1\cdot x=x$ (умножение на единицу);

(8) $-1\cdot x=-x$ (умножение на минус единицу);

(9) $0\cdot x=\Theta$ (умножение на нуль).

Кроме того, умножение вектора на число и сложение векторов связаны дополнительными соотношениями дистрибутивности:

(10) $\lambda(x+y)=\lambda x+\lambda y$ (дистрибутивность умножения на число относительно сложения векторов).

(11) $(\lambda+\mu)x=\lambda x+\mu x$ (дистрибутивность умножения на число относительно сложения чисел).

Свойства ассоциативности сложения и ассоциативности умножения на число позволяют не расставлять скобки при выполнении нескольких операций сложения или умножения на число, так как результат операций не зависит от расстановки скобок.

Определение 1.11. Линейной комбинацией координатных векторов пространства R^n называется конечная сумма $\sum_{j=1}^{k}\lambda_j f_j$, где $\{f_1, f_2, \ldots, f_k\}$ — набор векторов, λ_j — действительные числа. По определению координатного пространства линейная комбинация векторов принадлежит пространству R^n.

Линейная комбинация называется нетривиальной, если хотя бы один из коэффициентов λ_j отличен от нуля. Если все коэффициенты нулевые, линейная комбинация называется тривиальной.

Определение 1.12. Конечный набор координатных векторов $\{f_1, f_2, \ldots, f_k\}$ линейного пространства R^n называется линейно зависимым, если существует нетривиальная линейная комбинация, равная нуль-вектору: $\sum_{j=1}^{k}\lambda_j f_j=\Theta.$ Если такой нетривиальной линейной комбинации не существует, то этот набор называется линейно независимым.

Замечание. Понятие линейной зависимости относится только к множеству векторов, и не может относиться к отдельному вектору. Фраза «Вектор x линейно зависим (независим)» некорректная.

В частности, набор из одного ненулевого вектора всегда линейно независим, а набор из одного нулевого вектора линейно зависим.

Определение 1.13. Будем говорить, что координатный вектор x выражается через координатные векторы набора $F=\{f_1, f_2, \ldots, f_k\}$ (или разлагается по векторам этого набора), если существует такая линейная комбинация векторов набора F, что $x=\sum\limits_{j=1}^{k}\lambda_j f_j$.

Теорема 1.14. Пусть A — матрица коэффициентов СЛАУ, имеющая размер $m\times n$, $A^k\in R^m$ — вектор-столбец матрицы A с номером k, $B\in R^m$ — вектор-столбец свободных членов. Тогда задача решения системы линейных уравнений эквивалентна задаче разложения вектор-столбца свободных членов B по столбцам A^k матрицы A. Все решения СЛАУ — это все такие наборы коэфициентов $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, для которых верно разложение $B=\sum\limits_{k=1}^{n}x_k A^k$.

Доказательство. Непосредственной проверкой можно убедиться, что система линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \qquad\ldots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$$

есть покоординатное представление векторного уравнения

$$x_1\cdot\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \ldots \\ a_{m1} \end{pmatrix}+x_2\cdot\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \ldots \\ a_{m2} \end{pmatrix}+\ldots+x_n\cdot\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \ldots \\ a_{mn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Таким образом, в терминологии координатных пространств задача решения СЛАУ сводится к отысканию коэффициентов разложения вектора B по столбцам матрицы A. Из существования разложения вытекает совместность СЛАУ, а отсутствие разложения означает несовместность СЛАУ.

§ 5. Метод Гаусса исключения неизвестных

Для решения систем линейных уравнений мы будем использовать метод исключения неизвестных, или метод Гаусса. Суть метода заключается в том, что с помощью специальных преобразований, называемых преобразованиями Гаусса, переменная исключается из всех уравнений, кроме одного. В итоге должны остаться уравнения, в каждом из которых будет всего одна переменная. Класс преобразований Гаусса удовлетворяет сформулированным в Теореме 1.5 достаточным условиям эквивалентности исходной и преобразованной систем. Поэтому решение конечной системы будет совпадать с решением исходной системы.

Определение 1.15. Назовем преобразованием Гаусса преобразование системы линейных алгебраических уравнений, относящееся к одному из четырех типов:

(1) умножить обе части одного из уравнений на число, не равное нулю;

(2) переставить два уравнения;

(3) заменить одно из уравнений его суммой с другим уравнением (при сложении уравнений отдельно складываются их левые и правые части);

(4) добавить или исключить тривиальное уравнение.

Скомбинировав преобразования первого и третьего типов, получим производное преобразование

(5) к одному уравнению прибавить другое уравнение, умноженное на любое число.

Теорема 1.16. Любое преобразование Гаусса переводит систему линейных алгебраических уравнений в эквивалентную систему.

Доказательство. Преобразования Гаусса удовлетворяют обоим условиям, сформулированным в Теореме 1.5. Во-первых, очевидно, что каждое решение исходного уравнения будет решением измененного уравнения. Во-вторых, все преобразования обратимы. Например, при прибавлении к одному уравнению другого уравнения, умноженного на число λ, обратное преобразование заключается в прибавлении к первому уравнению второго уравнения, умноженного на число $-\lambda$.

Последовательное применение преобразований Гаусса позволяет привести исходную систему к виду, который мы будем называть каноническим. Канонический вид позволяет эффективно задать все решения системы.

Определение 1.17. Назовем систему линейных алгебраических уравнений канонической при выполнении следующих требований:

(1) Все переменные системы разбиты на две непересекающиеся группы из r и k переменных, $r+k=n$;

(2) Переменные $\{x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_r}\}$ первой группы с номерами $j_1, j_2, \ldots, j_r$ называются базисными (главными) переменными;

(3) Переменные $\{x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}\}$ второй группы с номерами $i_1, i_2, \ldots, i_k$ называются свободными переменными;

(4) Количество уравнений равно количеству r базисных переменных;

(5) Каждой базисной переменной x_{j_p}, где $p=1, 2, \ldots, r$, соответствует ровно одно уравнение вида $x_{j_p} + \sum\limits_{q=1}^{k} d_{pq} x_{i_q} = b_p$; в этом уравнении все переменные под знаком суммы свободные.

Каноническую систему в общем случае можно представить в виде

$$\begin{cases} x_{j_1} + d_{11}x_{i_1} + d_{12}x_{i_2} + \ldots + d_{1k}x_{i_k} = b_1 \\ x_{j_2} + d_{21}x_{i_1} + d_{22}x_{i_2} + \ldots + d_{2k}x_{i_k} = b_2 \\ \quad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \quad \ldots \\ x_{j_r} + d_{r1}x_{i_1} + d_{r2}x_{i_2} + \ldots + d_{rk}x_{i_k} = b_r \end{cases}$$

Замечание. Термин «каноническая система» не является общеупотребительным.

Замечание. Введем вектор-столбец Y, включающий только базисные переменные $\{x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_r}\}$, и вектор-столбец Z, включающий свободные переменные $\{x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}\}$, причем $r+k=n$. Символом D обозначим матрицу коэффициентов $D = \left\| d_{pq} \right\|$ размером $r \times k$. Тогда каноническую систему можно записать в матричном виде: $Y + DZ = B$.

Можно рассматривать условную каноническую систему, в которой все переменные свободные, то есть множество уравнений пусто. Решением такой системы служат произвольные наборы из n чисел.

В уравнениях канонической системы удобно все свободные переменные перенести в правую часть. В итоге получим систему уравнений следующего вида.

Определение 1.18. Запись системы уравнений в виде

$$\begin{cases} x_{j_1} = b_1 + c_{11}x_{i_1} + c_{12}x_{i_2} + \ldots + c_{1k}x_{i_k} \\ x_{j_2} = b_2 + c_{21}x_{i_1} + c_{22}x_{i_2} + \ldots + c_{2k}x_{i_k} \\ \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ x_{j_r} = b_r + c_{r1}x_{i_1} + c_{r2}x_{i_2} + \ldots + c_{rk}x_{i_k} \end{cases}$$

назовем общим решением системы линейных уравнений (в матричном виде $Y = B + CZ$).

Легко видеть, что при переходе от канонической системы к общему решению $C = -D$.

Смысл общего решения заключается в том, что оно позволяет эффективно строить частные решения системы: значения свободных переменных можно выбирать произвольным образом, после чего все базисные переменные вычисляются по формулам общего решения.

В частности, если свободные переменные отсутствуют, то есть $r = n$, $k = 0$, то решение системы единственное. В этом случае каноническая система и система, задающая общее решение, совпадают и имеют единственное решение. Если упорядочить уравнения по номеру переменной (то есть $j_m = m$), то $X = B$, где $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ — набор свободных членов канонической системы.

Теперь сформулируем и докажем основную теорему данного раздела.

Теорема 1.19. Каждая система линейных алгебраических уравнений либо несовместна, либо эквивалентна некоторой канонической системе. Таким образом, система линейных уравнений либо не имеет решений, либо имеет единственное решение, либо имеет бесконечное множество решений.

Доказательство. Доказательство теоремы представляет собой алгоритм построения цепочки преобразований Гаусса, который должен привести исходную систему к некоторой эквивалентной ей канонической системе. Пусть в исходной СЛАУ есть коэффициент $a_{jk} \neq 0$. Назовем его ведущим элементом. Коэффициент a_{jk} можно сделать равным единице, если разделить j-е уравнение на a_{jk}. Если после этого к i-му уравнению прибавить j-е уравнение, умноженное на коэффициент $(-a_{ik})$, то в новом i-м уравнении коэффициент при x_k окажется равным $a'_{ik} = a_{ik} - a_{ik} = 0$. Если выполнить подобное преобразование для всех уравнений, кроме

j-го, то коэффициент при переменной x_k будет единицей в j-м уравнении и нулем во всех остальных уравнениях.

Совокупность описанных преобразований назовем итерацией. Она заключается в исключении переменной x_k из всех уравнений, кроме одного. В результате описанной итерации будем считать переменную x_k базисной переменной, а j-е уравнение базисным уравнением, соответствующими друг другу.

Теперь предположим, что после q итераций уже выделено q пар, состоящих из базисного уравнения и базисной переменной. Статус остальных переменных пока не определен. Проанализируем, какие возможны варианты после очередной итерации. Рассмотрим все не базисные уравнения. Если в каком-то из них все коэффициенты в левой части равны нулю, то возможны два варианта. Либо свободный член этого уравнения не равен нулю, и тогда уравнение не имеет решения. В таком случае текущая система, а вместе с ней и исходная система, несовместны. Процесс решения в этом случае надо остановить. Либо свободный член этого уравнения равен нулю, и тогда данное уравнение тривиальное. В этом случае его можно и нужно из системы исключить.

Если после исключения тривиальных уравнений остались только базисные уравнения, то текущая система является канонической и процесс решения закончен. Пусть теперь в системе есть нетривиальное не базисное j-е уравнение. Согласно построению, все коэффициенты при базисных переменных в не базисных уравнениях равны нулю. Значит, в данном уравнении имеется ненулевой коэффициент a_{jk} при какой-либо пока неопределенной переменной x_k. Тогда этот элемент можно выбрать ведущим, и после очередной итерации и переменная x_k, и выбранное j-е уравнение становятся базисными.

Поскольку уравнений конечное число, этот процесс закончится либо утверждением о несовместности системы, либо приведением к каноническому виду. Доказательство теоремы закончено.

Описанный алгоритм показывает, что существует эффективное решение произвольной системы линейных алгебраических уравнений. Заметим, что при каждой итерации выбор очередной базисной переменной и очередного базисного уравнения ограничен только требованием $a_{jk} \neq 0$. Следовательно, этот выбор неоднозначен. На практике желательно выбирать $a_{jk} = \pm 1$. Кроме того, существуют несколько приемов, которые позволяют минимизировать объем вычислений. Часть из них будет изложена ниже.

Рассмотрим несколько примеров решения систем линейных алгебраических уравнений методом Гаусса с разными типами ответов.

Пример 1. Решим систему трех уравнений с тремя неизвестными методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 3 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 5 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_1 = -1 \\ x_1 + \quad + x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x_2 + 2x_3 = 4 \\ x_1 = -1 \\ x_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_2 = 2 \\ x_1 = -1. \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

Итерация 1. Выберем ведущим элемент $a_{12} = -1$, прибавим ко 2-му уравнению 1-е, умноженное на $\lambda_1 = -2$, прибавим к 3-му уравнению 1-е, умноженное на $\lambda_2 = -1$.

Итерация 2. Выберем ведущим элемент $a_{21} = 1$, прибавим к 1-му уравнению 2-е, умноженное на $\lambda_1 = -1$, прибавим к 3-му уравнению 2-е, умноженное на $\lambda_2 = -1$.

Итерация 3. Выберем ведущим элемент $a_{33} = 1$, прибавим к 1-му уравнению 3-е, умноженное на $\lambda_1 = -2$.

Ответ. Получим единственное решение $x_1 = -1$, $x_2 = -2$, $x_3 = 1$. Подставьте эти значения в исходную СЛАУ и убедитесь, что полученное решение верное.

Пример 2. Решим систему трех уравнений с четырьмя неизвестными:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 2 \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 1 \\ 4x_1 + 7x_2 + x_3 - 2x_4 = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 2 \\ -x_1 - 3x_2 + x_3 = -1 \\ 2x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -5x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 0 \\ -x_1 - 3x_2 + x_3 = -1 \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 = 1 \end{cases}$$

Итерация 1. Выберем ведущим элемент $a_{14} = -2$, прибавим ко 2-му уравнению 1-е, умноженное на $\lambda_1 = -1$, прибавим к 3-му уравнению 1-е, умноженное на $\lambda_2 = -1$.

Итерация 2. Выберем ведущим элемент $a_{21} = -1$, прибавим к 1-му уравнению 2-е, умноженное на $\lambda_1 = 2$, прибавим к 3-му уравнению 2-е, умноженное на $\lambda_2 = 2$.

Ответ. Система несовместна, так как третье уравнение не имеет решения.

Пример 3. Решим систему трех уравнений с четырьмя неизвестными:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 2 \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 - x_4 = 1 \\ 4x_1 + 7x_2 + x_3 - x_4 = 4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 2 \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 - x_4 = 1 \\ 4x_1 + 7x_2 + x_3 - x_4 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 2 \\ -x_1 - 3x_2 + x_3 \qquad = -1 \\ 2x_1 + 6x_2 - 2x_3 \qquad = 4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \qquad -5x_2 + \ 5x_3 - \ x_4 = 0 \\ -x_1 - \ 3x_2 + \ x_3 \qquad = -1 \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

Итерация 1. Выберем ведущим элемент $a_{14} = -1,$ прибавим ко 2-му уравнению 1-е, умноженное на $\lambda_1 = -1,$ прибавим к 3-му уравнению 1-е, умноженное на $\lambda_2 = -1.$

Итерация 2. Выберем ведущим элемент $a_{21} = -1,$ прибавим к 1-му уравнению 2-е, умноженное на $\lambda_1 = 2,$ прибавим к 3-му уравнению 2-е, умноженное на $\lambda_2 = 2.$

Итерация 3. После вычеркивания тривиального третьего уравнения получим систему в каноническом виде: $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \\ x_4 + 5x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases}.$ В этой системе x_1, x_4 — базисные переменные, x_2, x_3 — свободные переменные.

Ответ. Общее решение: $\begin{cases} x_1 = -3x_2 + x_3 + 1 \\ x_4 = -5x_2 + 5x_3 \end{cases}.$

§ 6. Схема Гаусса-Жордана

Можно оптимизировать запись процесса решения СЛАУ, выписывая после каждой итерации не всю систему целиком, а только матрицу ее коэффициентов. Такое оформление будем называть схемой

Гаусса-Жордана. В этой схеме записываются только коэффициенты уравнений и свободные члены. Последние отделены вертикальной чертой.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mn} & b_m \end{array}\right), \text{ или } (A|B) \text{ в матричном представлении.}$$

Матрица схемы Гаусса является расширенной матрицей СЛАУ. Очередная итерация метода Гаусса-Жордана определяется некоторым ведущим элементом матрицы $a_{jk} \neq 0.$ К каждой строке расширенной матрицы с номером $i \neq j$ мы прибавляем отмеченную j-ую строку, умноженную на число $-\dfrac{a_{ik}}{a_{jk}}.$ После этого во всех строках базисного k-го столбца, кроме j-й строки, будут стоять нули. Столбец с номером k будет соответствовать базисной переменной x_k.

Замечание. Чтобы не иметь дело с дробями, не следует делить базисное уравнение на ведущий элемент a_{jk}. Это можно сделать в конце, когда все итерации будут выполнены.

Если после очередной итерации получилась строка с нулями слева от черты и ненулевым свободным членом справа от черты, то соответствующее уравнение не имеет решения и вся система несовместна. Процесс решения на этом прекращается. Если после очередого суммирования получилась полностью нулевая строка, то она вычеркивается (при этом число уравнений уменьшается).

В конце концов процесс решения закончится матрицей, в которой все r строк базисные, и им соответствует r базисных столбцов. В каждом базисном столбце будет всего один ненулевой элемент, причем разным базисным столбцам будут соответствовать разные строки. Чтобы коэффициенты при базисных переменных были равны единице, поделим каждую строку на коэффициент при базисной переменной в соответствующем базисном столбце.

Конечное представление соответствует СЛАУ, приведенной к каноническому виду. От схемы нужно вернуться к традиционной записи системы уравнений с фигурной скобкой впереди, обозначениями переменных и знаками операций. Общее решение системы получится, если оставить базисные переменные в левой части уравнений, а свободные переменные перенести в правую часть. На этом решение заканчивается.

Пример 4. Проиллюстрируем решение системы с помощью схемы Гаусса-Жордана. Пусть задана система уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 4 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 6 \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 6 \end{cases}$$

Цепочка преобразований имеет вид (ведущие элементы, выбираемые для обнуления элементов столбца, будем обводить рамкой):

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & \boxed{-1} & 1 & 4 \\ 4 & 3 & -1 & 2 & 6 \\ 3 & 3 & -2 & 2 & 6 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & \boxed{-1} & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & \boxed{1} & 2 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & \boxed{-1} & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & \boxed{1} & 2 \\ \boxed{-1} & -1 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & \boxed{-1} & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & \boxed{1} & -2 \\ \boxed{-1} & -1 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & \boxed{-1} & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & \boxed{1} & -2 \\ \boxed{1} & 1 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & \boxed{1} & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & \boxed{1} & \end{array}\right)$$

Базисные переменные x_1, x_3, x_4, свободная переменная x_2. Запишем каноническую систему и общее решение:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_3 - x_2 = -2 \\ x_4 - x_2 = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 - x_2 \\ x_3 = -2 + x_2 \\ x_4 = -2 + x_2 \end{cases}$$

Можно использовать следующий прием: положить $x_2 = t$, тогда общее решение запишется в виде набора, зависящего от параметра: $X = (2 - t, t, -2, -2)$, где $t \in R$ — произвольное действительное число. Такая запись является альтернативной записью общего решения СЛАУ.

Замечание. Конечно, удобнее всего отмечать в матрице элементы, равные ± 1. Однако это не всегда возможно, и тогда даже в системе с целыми коэффициентами в классической схеме приходится оперировать с дробями. На практике этого часто можно избежать. Первый способ заключается в умножении двух строк на множители так, чтобы сокращаемые элементы были одинаковыми. Например:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 13 & -5 & 3 \\ -7 & 6 & 5 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 78 & -30 & 18 \\ -35 & \boxed{30} & 25 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 43 & 0 & 43 \\ -35 & 30 & 25 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & | & 1 \\ -35 & 30 & | & 25 \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix} 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 30 & | & 60 \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix} 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & | & 2 \end{pmatrix}.$$

Второй способ состоит в подборе такой вспомогательной комбинации уравнений, чтобы один из коэффициентов стал равным единице. В следующем примере сначала прибавим к первой строку вторую для того, чтобы сделать один из коэффициентов равным единице:

$$\begin{pmatrix} 13 & -5 & | & 3 \\ -7 & \boxed{6} & | & 5 \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix} 6 & \boxed{1} & | & 8 \\ -7 & 6 & | & 5 \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix} 6 & 1 & | & 8 \\ -43 & 0 & | & -43 \end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix} 6 & 1 & | & 8 \\ \boxed{1} & 0 & | & 1 \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix} 0 & 1 & | & 2 \\ 1 & 0 & | & 1 \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix} 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & | & 2 \end{pmatrix}.$$

§ 7. Однородные системы уравнений

Однородная СЛАУ не может быть несовместной, так как у нее всегда есть тривиальное (нулевое) решение. Приведем простое достаточное условие существования нетривиальных решений однородной СЛАУ.

Теорема 1.20. Однородная СЛАУ, число уравнений в которой меньше числа неизвестных, всегда имеет нетривиальное решение.

Доказательство. Так как несовместной однородная система быть не может, то при решении методом Гаусса алгоритмический процесс решения обязательно дойдет до канонической системы. Тривиальное решение будет единственным только в том случае, когда в канонической системе нет свободных переменных. Но по условию число уравнений в исходной системе меньше числа неизвестных, а при использовании метода Гаусса количество уравнений может только уменьшиться, поэтому в канонической системе число уравнений строго меньше числа неизвестных. Значит, в канонической системе окажется хотя бы одна свободная переменная, которая может иметь произвольное (в том числе ненулевое) значение, то есть исходная система будет иметь нетривиальное решение.

Лемма 1.21. Если $(x_1, x_2, ..., x_n)$ и $(y_1, y_2, ..., y_n)$ — два решения однородной СЛАУ, то сумма решений $(x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)$ и произведение решения на число $(\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n)$ являются решениями этой СЛАУ.

Доказательство. Это следует из двух соотношений

$$(1)\ \sum_{k=1}^{n} a_{jk}\left(x_k + y_k\right) = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} x_k\ \sum_{k=1}^{n} a_{jk} y_k = 0 + 0 = 0;$$

$$(2)\ \sum_{k=1}^{n} a_{jk} \lambda x_k = \lambda \sum_{k=1}^{n} a_{jk} x_k = \lambda \cdot 0 = 0.$$

Покажем, как из множества решений однородной СЛАУ выбрать некоторый специальный набор решений, который будет иметь важное значение в дальнейшем. Будем следовать указанному ниже алгоритму:

(1) одно решение набора соответствует одной свободной переменной;

(2) для построения такого решения надо положить значение данной свободной переменной равным единице, а значения остальных свободных переменных равными нулю;

(3) после этого следует вычислить значения всех базисных переменных;

(4) из выбранных значений свободных переменных и вычисленных значений базисных переменных следует составить координатный вектор.

Набор, построенный таким образом, назовем фундаментальным набором решений (ФНР) однородной СЛАУ. Согласно Лемме 1.21, любая линейная комбинация векторов этого набора является решением однородной СЛАУ. Позднее мы докажем, что такой набор линейно независим, а всевозможные линейные комбинации векторов этого набора являются решениями СЛАУ.

Верна также обратная теорема, которая также будет доказана в следующих разделах.

Теорема 1.22. Каждое решение однородной СЛАУ является некоторой линейной комбинацией координатных векторов из фундаментального набора решений.

Пример 5. Найдем фундаментальный набор решений однородной СЛАУ

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = 0. \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases} .$$

Цепочка преобразований имеет вид (ведущие элементы, выбираемые для обнуления элементов столбца, будем обводить рамкой):

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & \boxed{-1} & 1 \\ 4 & 3 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & \boxed{-1} & 1 \\ 1 & \boxed{1} & 0 & -2 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Вычеркнем тривиальную третью строку, запишем каноническую систему и общее решение:

$$\begin{cases} x_2 + x_1 - 2x_4 = 0 \\ x_3 - x_1 - 5x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = -x_1 + 2x_4 \\ x_3 = \ x_1 + 5x_4 \end{cases}.$$

Так как имеются две свободные переменные, ФНР будет состоять из двух векторов. Для получения первого положим $x_1 = 1,\ x_4 = 0,$ тогда $x_2 = -1,\ x_3 = 1,\ f_1 = (1, -1, 1, 0)$. Для получения второго вектора положим $x_1 = 0,\ x_4 = 1,$ тогда $x_2 = 2,\ x_3 = 5,\ f_2 = (0, 2, 5, 1)$.

Любое решение однородной системы может быть получено в виде $X = t \cdot f_1 + s \cdot f_2,$ где t и s — произвольные коэффициенты.

Решения произвольной неоднородной СЛАУ связаны с решениями той однородной СЛАУ, которая имеет такую же матрицу кэффициентов, но нулевой столбец однородных членов.

Теорема 1.23. Сопоставим неоднородной СЛАУ $AX = B$ однородную СЛАУ $AX = \Theta$ с той же матрицей коэффициентов, но с нулевыми свободными членами. Пусть неоднородная СЛАУ совместна. Выберем и зафиксируем некоторое ее частное решение C. Координатный вектор X является решением неоднородной СЛАУ тогда и только тогда, когда он представляется в виде суммы координатного вектора C и некоторого решения Y однородной СЛАУ $AX = \Theta$.

Это утверждение условно записывается в виде $H = C + L,$ где H — множество решений неоднородной СЛАУ, C — частное решение неоднородной СЛАУ, L — множество решений однородной СЛАУ.

Доказательство. Если $(x_1, x_2, ..., x_n)$ и $(y_1, y_2, ..., y_n)$ — два решения неоднородного линейного алгебраического уравнения, то их разность $(x_1 - y_1, x_2 - y_2, ..., x_n - y_n)$ будет решением соответствующего однородного алгебраического уравнения. Это следует из соотношения

$$\sum_{k=1}^{n} a_{jk}\left(x_k - y_k\right) = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} x_k - \sum_{k=1}^{n} a_{jk} y_k = b_j - b_j = 0.$$

Обратно, если $C=(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ — решение неоднородного уравнения, а $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ — произвольное решение однородного уравнения, то из соотношения

$$\sum_{k=1}^{n} a_{jk}\left(c_k + y_k\right) = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} c_k + \sum_{k=1}^{n} a_{jk} y_k = b_j + 0 = b_j$$

следует, что сумма $C+Y=(c_1+y_1,\ c_2+y_2,\ \ldots,\ c_n+y_n)$ будет решением исходного неоднородного алгебраического уравнения. Это верно для каждого уравнения системы, значит верно для всей системы.

То же самое легко выводится из матричного представления СЛАУ с использованием свойств умножения матриц: если $AC=B$ и $AX=B,$ а $Y=X-C,$ то

$$AY = A(X-C) = AX - AC = B - B = \Theta.$$

И наоборот, если $AC=B$ и $AY=\Theta,$ $X=CY$, то

$$AX = A(CY) = ACAY = B\Theta = B.$$

Замечание. Для записи общего решения неоднородной СЛАУ можно использовать любое частное решение неоднородной СЛАУ. Простейшее частное решение неоднородной СЛАУ может быть получено, если после решения методом Гаусса в канонической системе все свободные переменные считать нулями. Тогда базисные переменные будут равны свободным членам соответствующих уравнений канонической системы. В то же время множество L является множеством решений однородной СЛАУ, задается однозначно, и не зависит от свободных членов b_j.

Замечание. Ранее было доказано, что любое решение однородной СЛАУ с использованием ФНР $F=\{f_1, f_2, \ldots, f_r\}$ может быть записано в виде $Y=\sum_{k=1}^{r} t_k f_k,$ где t_k — произвольные числа Тогда общее решение неоднородной СЛАУ может быть записано в виде $X=C+\sum_{k=1}^{r} t_k f_k.$ Такое представление решения называется параметрическим. Надо только не забывать, что в этом представлении набор F — это ФНР однородной СЛАУ $AX=\Theta.$

ГЛАВА 2

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

§ 1. Векторная алгебра

Аналитической геометрией называется математическая дисциплина, которая занимается решением геометрических задач алгебраическими методами. Ее фундаментом является соответствие между геометрическими объектами и векторами на плоскости и в пространстве. Инструментом такого описания является декартова (прямоугольная) система координат. Она позволяет сопоставлять точкам и векторам наборы чисел.

Дисциплина, изучающая свойства векторов, называется векторной алгеброй. Основные понятия векторной алгебры должны быть известны из школьной программы.

Вектором на плоскости или в пространстве называется направленный отрезок $\overline{AB}$, в котором точка A считается началом вектора, а точка B — его концом. Длиной (или модулем) вектора считается длина отрезка. Нулевым вектором называется вектор, у которого начало и конец совпадают.

Два вектора $\overline{AD}$ и $\overline{BC}$ будем называть параллельными, если прямые AD и BC параллельны. Параллельные векторы $\overline{AD}$ и $\overline{BC}$ будем называть сонаправленными, если стороны AB и CD четырехугольника $ABCD$ не пересекаются, и противоположно направленными, если они пересекаются. Сонаправленные параллельные векторы, длины которых одинаковы, будем называть равными. В этом случае четырехугольник $ABCD$ является параллелограммом.

То же понятие можно определить другими словами. Два вектора AD и BC называются равными, если, во-первых, они лежат в одной плоскости, во-вторых, четырехугольник $ABCD$ является параллелограммом.

Под суммой двух векторов понимаются две разные операции. Суммой двух векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AD}$ с общим началом A считается диагональ $\overline{AC}$ параллелограмма $ABCD$, построенного на сторонах AB и AD. Это правило называется правилом параллелограмма.

Суммой двух векторов $\overline{AB}$ и $\overline{BC}$, у которых конец первого вектора совпадает с началом второго вектора, называется вектор $\overline{AC}$, ведущий из начала вектора $\overline{AB}$ в конец вектора $\overline{BC}$. Это правило называется правилом треугольника.

Правило треугольника можно обобщить на сумму цепочки векторов, в которой начало каждого следующего вектора совпадает с концом предыдущего. В этом случае сумма векторов ведет из начала первого вектора в конец последнего.

Если мы хотим к вектору $\overline{AB}$ прибавить произвольный вектор $\overline{MN}$, то последний надо параллельно перенести либо в точку A (построить вектор $\overline{AD} = \overline{MN}$), либо в точку B (построить вектор $\overline{BC} = \overline{MN}$). Сумма $\overline{AB} + \overline{AD}$, вычисленная по правилу параллелограмма, или сумма $\overline{AB} + \overline{BC}$, вычисленная по правилу треугольника, дадут одинаковый результат $\overline{AC}$.

Пусть даны два произвольных вектора (обозначим их u и v). Если мы хотим определить их разность, то это должен быть такой вектор w, для которого $u = v + w$. Для определения подходящей операции разности векторов удобнее использовать правило треугольника: надо совместить начало обоих векторов (то есть построить равные векторы $\overline{AC} = u$ и $\overline{AB} = v$), и тогда разностью векторов $\overline{AC}$ и $\overline{AB}$ является вектор $w = \overline{BC}$, который идет из конца вектора $\overline{AB}$ в конец вектора $\overline{AC}$.

Свойства суммы векторов (u, v, w — произвольные векторы).

(1) $(u + v) + w = u + (v + w)$ (ассоциативность суммы векторов).

(2) $u + v = v + u$ (коммутативность суммы векторов).

(3) Если v нулевой вектор, то $u + v = u$.

(4) Пусть в векторе v по сранению с вектором u переставлены начало и конец.

Тогда вектор $(u + v)$ нулевой.

Для доказательства свойства (1) следует воспользоваться правилом треугольника. Для доказательства свойства (2) удобнее воспользоваться правилом параллелограмма. Свойства (3) и (4) очевидны.

Результатом умножения вектора u на число $\lambda \in R$ будет сонаправленный (если $\lambda > 0$) или противоположно направленный (если $\lambda < 0$) вектор, длина которого равна длине исходного вектора, умноженной на $|\lambda|$. Векторы u и $\lambda \cdot u$ называются пропорциональными или коллинеарными.

Свойства произведения вектора на число.

(1) $\lambda(\mu \cdot u) = (\lambda\mu) \cdot u$ (ассоциативность произведения вектора на число).

(2) $\lambda \cdot (\mu \cdot u) = \mu \cdot (\lambda \cdot u)$ (коммутативность произведения вектора на число).

(3) $\lambda \cdot (u + v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v$ (дистрибутивность относительно суммы векторов).

(4) $(\lambda + \mu) \cdot u = \lambda \cdot u + \mu \cdot u$ (дистрибутивность относительно суммы чисел).

Свойство (3) следует из подобия треугольников, остальные свойства следуют из определения.

Углом φ между векторами считается обычный геометрический угол, определенный для векторов с общим началом. Угол знака не имеет. Знак углу на плоскости может быть приписан, только если на плоскости выбрана система координат. Тогда угол отсчитывается от первого вектора системы координат ко второму. Положительным считается направление от оси абсцисс к оси ординат. В пространстве присвоить углу знак невозможно.

Определим скалярное произведение двух векторов u и v, угол между которыми равен φ, (обозначение скалярного произведения (u, v)) формулой

$$(u, v) = |u| \cdot |v| \cdot \cos\varphi.$$

Из этого определения можно вывести свойства скалярного произведения:

(1) $(u, v) = (v, u)$;

(2) $(u, u) > 0$ при $u \neq \bar{0}$;

(3) $(\lambda \cdot u, v) = \lambda \cdot (u, v)$ при $\lambda \in R$;

(4) $(u + w, v) = (u, v) + (w, v)$;

(5) условие $u \perp v$ эквивалентно $(u, v) = 0$.

(6) модуль вектора u выражается через скалярное произведение формулой $|u| = \sqrt{(u, u)}$.

Проекция точки на прямую — это основание перпендикуляра, опущенного из точки на прямую.

Проекция точки пространства на плоскость — основание перпендикуляра, опущенного из точки на плоскость.

Теорема о трех перпендикулярах утверждает, что если спроектировать точку на плоскость, а затем на прямую в этой плоскости, то результат получится тот же, как если бы спроектировать исходную точку на прямую.

Проекция вектора на прямую (или плоскость) определяется следующим образом. Пусть M — проекция точки A на прямую L (соответственно плоскость π), N — проекция точки B на прямую L (соответственно плоскость π). Тогда вектор $\overline{MN}$ называется проекцией вектора $\overline{AB}$ на прямую L (соответственно на плоскость π).

Докажем, что если векторы $\overline{A_1B_1}$ и $\overline{A_2B_2}$ равны, то их проекции $\overline{M_1N_1}$ и $\overline{M_2N_2}$ на прямую L тоже равны. Из равенства векторов $\overline{A_1B_1}$ и $\overline{A_2B_2}$ следует, что прямая A_1B_1 параллельна A_2B_2. Проведем через точки M_1 и M_2 прямые L_1 и L_2, параллельные прямой A_1B_1. Пусть точки D_1 и D_2 — точки пересечения прямых L_1 и L_2 соответственно с перпендикулярами B_1N_1 и B_2N_2. Тогда $\overline{M_1D_1}=\overline{A_1B_1}=\overline{A_2B_2}=\overline{M_2D_2}$. Прямоугольные треугольники $M_1D_1N_1$ и $M_2D_2N_2$ со взаимно параллельными сторонами и равными гипотенузами равны, откуда $M_1N_1 = M_2N_2$. Нетрудно показать, что направления от M_1 к N_1 и от M_2 к N_2 также совпадают. Следовательно, $\overline{M_1N_1} = \overline{M_2N_2}$.

Аналогично равным векторам соответствуют равные проекции на плоскость. Для доказательства сначала надо отметить, что все перпендикуляры к плоскости параллельны. Из параллельности $A_1B_1 \parallel A_2B_2$ и $A_1M_1 \parallel A_2M_2$ следует, что плоскости $A_1B_1N_1$ и $A_2B_2N_2$ параллельны. После этого следует дословно повторить все рассуждения, сделанные для случая проекции на прямую.

Проекция суммы векторов равна сумме проекций. Проекция произведения вектора на число равна произведению проекции вектора на то же число.

Первое утверждение непосредственно вытекает из определения проекции и правила треугольника. Второе утверждение вытекает из Теоремы Фалеса: если $\overline{AC} = \lambda \cdot \overline{AB}$, точки K, M и N — проекции точек A, B и C на прямую L, то $AB : KM = AC : KN$, откуда $\overline{KN} = \lambda \cdot \overline{KM}$.

§ 2. Декартовы координаты на плоскости и в пространстве

Пусть на плоскости или в пространстве зафиксирована особая точка O (начало координат). Выделим подмножество V векторов с общим началом в точке O. Очевидно, что для каждого вектора u существует единственный равный ему вектор $x \in V$. Также очевидно, что между точками пространства M и векторами из V устанавливается взаимно-однозначное соответствие, заданное правилом: точка M является концом вектора $x = \overline{OM} \in V$.

Системой координат на прямой назовем соответствие между точками прямой и действительными числами. Системой координат на плоскости назовем соответствие между точками плоскости и парами действительных чисел. Системой координат в пространстве назовем соответствие между точками пространства и тройками действительных чисел.

Декартова система координат на прямой задается началом координат O и выбором положительного направления прямой. Каждой точке X на прямой ставится в соответствие длина отрезка $[OX]$, взятая с плюсом, если точка X находится от начала координат в положительном направлении, и с минусом в обратном случае.

Декартова система координат на плоскости задается двумя перпендикулярными числовыми прямыми (осью абсцисс и осью ординат). Точка O пересечения осей считается началом координат для каждой оси.

Каждой точке M на плоскости соответствуют две проекции на оси OX и OY. Проекция на каждую ось характеризуется длиной со знаком плюс или минус — числовой координатой x или y. Числа x и y называются координатами точки M в данной системе координат. Между точками плоскости M и парами чисел (x, y) существует взаимно-однозначное соответствие. Этот факт мы будем записывать $M = (x, y)$ или $M(x, y)$.

Декартова система координат в пространстве задается тремя попарно перпендикулярными осями координат, пересекающимися в одной точке O.

Каждой точке M в пространстве соответствуют проекции на три оси координат. Числовые координаты проекций x, y и z называются координатами точки M в данной системе координат. Между точками пространства M и тройками чисел (x, y, z) также существует взаимно-однозначное соответствие. Этот факт мы будем обозначать $M = (x, y, z)$ или $M(x, y, z)$.

Поскольку между точками пространства и векторами из V также существует взаимно-однозначное соответствие, координатами вектора с началом в начале координат считаются координаты точки, являющейся концом данного вектора.

Так как вектор проекции на ось координат отождествляется со своей координатой на этой оси, то операции с векторами и координатами векторов согласованы:

(1) каждая координата суммы векторов $(u + v)$ является суммой соответствующих координат векторов u и v.

(2) каждая координата произведения вектора u на число λ равна соответствующей координате вектора u, умноженной на число λ.

Данное утверждение является следствием соответствующих свойств проекций суммы векторов и произведения вектора на число. Результатом всех предыдущих рассуждений является тот факт, что мы можем один и тот же объект используемого пространства со сложением и умножением на число считать точкой пространства, вектором из V или набором координат.

Формула скалярного произведения. Из школьной программы известно, что скалярное произведение двух векторов $u(x_1, y_1)$ и $v(x_2, y_2)$ на плоскости задается формулой $(u,v) = x_1x_2 + y_1y_2$.

В пространстве скалярное произведение двух векторов $u(x_1, y_1, z_1)$ и $v(x_2, y_2, z_2)$ задается формулой $(u, v) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$.

Если эту формулу подставить в общую формулу длины (модуля) вектора, то мы получим теорему Пифагора.

Теорема Пифагора. Модуль вектора u выражается через его координаты формулами:

(1) На плоскости $|u| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

(2) В пространстве $|u| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Косинус угла φ между векторами u и v выражается через скалярное произведение этих векторов и длины векторов с помощь формулы

$$\cos\varphi = \frac{(u, v)}{|u| \cdot |v|}.$$

Пусть на плоскости заданы две точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$. Для вектора $\overline{M_1M_2}$ равный ему вектор u с началом в точке O имеет координаты $u(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$. Следовательно, квадрат модуля вектора

$$\left|\overline{M_1M_2}\right|^2 = |u|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

Те же рассуждения для вектора $\overline{M_1M_2}$ в пространстве приводят к формуле

$$\left|M_1M_2\right|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2.$$

Углом между произвольными векторами считается угол между равными им векторами, перенесенными в начало координат.

Пусть задана некоторая прямая L и отрезок $[M_1, M_2]$ на этой прямой. Будем говорить, что отрезок делится точкой $M \in L$ в отношении k, если $\overline{M_1M} = k \cdot \overline{MM_2}$. Если $k > 0$, то точка M находится между точками M_1 и M_2, если $k < 0$, то она лежит вне отрезка $[M_1M_2]$. Значению $k = 0$ соответствует равенство $M = M_1$. Заметим, что если изменить направление системы координат на прямой, то векторы меняют знак, а коэффициент k не меняется.

Теорема Фалеса в координатах утверждает, что если $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ и $M(x, y)$ — три точки на прямой, причем $M \neq M_2$, то точка M делит отрезок M_1M_2 в отношении

$$k = \frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{y - y_1}{y_2 - y}.$$

Эту теорему можно обобщить на пространство: для точек $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ и $M(x, y, z)$ на прямой, причем $M \neq M_2$, отношение

$$k = \frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{y - y_1}{y_2 - y} = \frac{z - z_1}{z_2 - z}.$$

Докажем это утверждение для плоскости. Без ограничения общности можно считать, что точка M_2 совпадает с началом координат. Из Теоремы Фалеса следует, что

$$\frac{|x_1 - x|}{|x|} = \frac{|y_1 - y|}{|y|} = \frac{|M_1M|}{|MO|}.$$

Рассмотрим сначала случай $M \in [M_1M_2)$. Тогда в каждой паре чисел $(x - x_1)$ и $(-x)$, $(y - y_1)$ и $(-y)$ знаки одинаковые, и поэтому отношение чисел равно отношению модулей, то есть $\frac{x - x_1}{-x} = \frac{y - y_1}{-y} = k$, так как $k = \frac{|M_1M|}{|MO|}$.

Если $M \notin [M_1M_2)$, то в каждой паре чисел $(x - x_1)$ и $(-x)$, $(y - y_1)$ и $(-y)$ знаки противоположные, и снова $\frac{x - x_1}{-x} = \frac{y - y_1}{-y} = k$, так как $k = -\frac{|M_1M|}{|MO|}$.

Для произвольной точки M_2 получаем искомую формулу $k = \frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{y - y_1}{y_2 - y}$.

Заметим, что если $x_1 = x_2$, то всегда $\frac{x - x_1}{x_2 - x} = -1$. Если $x_1 = x_2$, но $\frac{x - x_1}{x_2 - x} = k \neq -1$, то подразумевается, что $x = x_1 = x_2$, и тогда условно $\frac{0}{0} = k$.

§ 3. Аналитическая геометрия на плоскости

Далее везде предполагаем, что декартова система координат на плоскости зафиксирована. Мы не будем делать особого различия между точками и их координатами, или между векторами и их координатами.

Определение глобальной полярной системы координат. Пусть $M(x, y)$ — точка плоскости, ρ — длина вектора $\overline{OM}$, φ — угол между тем лучом оси абсцисс, который соответствует положительному направлению, и вектором $\overline{OM}$. Тогда пара (ρ, φ) однозначно задает точку M и вектор $\overline{OM}$.

Угол φ называется аргументом вектора $\overline{OM}$.

Формула перехода к глобальной полярной системы координат:

$$\begin{cases} x = \rho \cdot \cos\varphi \\ y = \rho \cdot \sin\varphi \end{cases}.$$

Доказательство. Для тригонометрической окружности единичного радиуса точка окружности M с аргументом φ имеет координаты $M(\cos\varphi, \sin\varphi)$. Из подобия треугольников следует, что такая же точка на окружности радиуса ρ будет иметь координаты $M(\rho \cdot \cos\varphi, \rho \cdot \sin\varphi)$.

Определение локальной полярной системы координат. Положение точки M на плоскости однозначно задается выбором на плоскости некоторой фиксированной точки $M_0(x_0, y_0)$, длиной вектора $\rho = \left|\overline{M_0 M}\right|$ и углом φ между положительным направлением оси абсцисс и вектором $\overline{M_0 M}$ (аргументом вектора). Система координат (зависящая от точки M_0), которая произвольной точке M ставит в соответствие пару (ρ, φ), называется локальной полярной системой координат.

Формула перехода к локальной полярной системы координат:

$$\begin{cases} x = x_0 + \rho \cdot \cos\varphi \\ y = y_0 + \rho \cdot \sin\varphi \end{cases}.$$

Доказательство. Следует из тригонометрических формул для треугольника M_0MN, где N — проекция точки M на прямую, проходящую через точку M_0 и параллельную оси абсцисс.

Формула площади параллелограмма. Пусть задан параллелограмм $ABCD$, причем векторы $\overline{AB}$ и $\overline{AD}$ имеют координаты (x_1, y_1) и (x_2, y_2). Тогда площадь параллелограмма выражается формулой $S_{ABCD} = \left|x_1 y_2 - x_2 y_1\right|$.

Доказательство. Формула для площади параллелограмма $S = \left|\overline{AB}\right| \cdot \left|\overline{AD}\right| \cdot \sin\varphi$, где φ — угол между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{AD}$. Введем вектор $\overline{AE}$ с координатами $(y_2, -y_1)$, перпендикулярный вектору $\overline{AD}$. Очевидно, что $\left|\overline{AE}\right| = \left|\overline{AD}\right|$. Угол ψ между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{AE}$ равен $\psi = \frac{\pi}{2} \pm \varphi$, следовательно, имеем

$$\sin\varphi = \left|\cos\psi\right| = \frac{\left|(\overline{AB}, \overline{AE})\right|}{\left|\overline{AB}\right| \cdot \left|\overline{AE}\right|} = \frac{\left|(\overline{AB}, \overline{AE})\right|}{\left|\overline{AB}\right| \cdot \left|\overline{AD}\right|}.$$

Подставляя значение синуса в формулу для площади, получим

$$S_{ABCD} = \left|\overline{AB}\right| \cdot \left|\overline{AD}\right| \cdot \frac{\left|(\overline{AB}, \overline{AE})\right|}{\left|\overline{AB}\right| \cdot \left|\overline{AD}\right|} = \left|(\overline{AB}, \overline{AE})\right| = \left|x_1 y_2 - x_2 y_1\right|.$$

Формула площади треугольника. Площадь треугольника равна половине площади параллелограмма: $S_{ABD} = \frac{1}{2} \cdot \left|x_1 y_2 - x_2 y_1\right|$.

Каждый геометрический объект, являющийся подмножеством плоскости, задается уравнением, неравенством или системой уравнений и неравенств с переменными x и y, решением которого (которой) являются точки данного подмножества.

Важнейшим инструментом аналитической геометрии на плоскости и в пространстве является представление прямой. Для этого используется тот геометрический факт, что любые два вектора, начало и конец которых лежат на прямой, коллинеарны.

Параметрическое задание прямой. Векторная формула параметрического задания прямой имеет вид: $M = M_0 + t \cdot A$, где $t \in R$ (она одинакова на плоскости и в пространстве). Вектор A называется направляющим вектором прямой.

Замечание. Параметрическое представление прямой неоднозначное: в качестве M_0 годится любая точка прямой, а в качестве направляющего вектора можно взять любой ненулевой вектор, пропорциональный A.

Векторную формулу параметрического задания прямой можно переписать в координатах:

$$\begin{cases} x = x_0 + t \cdot a \\ y = y_0 + t \cdot b \end{cases},$$

где $M_0 = (x_0, y_0)$, $A = (a, b)$, $t \in R$.

Если из каждого уравнения в системе параметрического задания прямой в координатах выразить число t и все выражения для t приравнять, то мы получим каноническое уравнение прямой.

$$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}.$$

Замечание. Пусть, например, $a = 0$. Тогда из параметрического задания прямой следует, что координата $x = x_0$ постоянная, а координата $y = y_0 + t \cdot b$ принимает любое значений $y \in R$. Именно так и будем интерпретировать условное каноническое уравнение прямой вида $\dfrac{x-x_0}{0}=\dfrac{y-y_0}{b}$.

Общее уравнение прямой. Множество решений уравнения $ax+by=c$, где a, b, c — произвольные константы, причем a или b отличны от нуля, является некоторой прямой на плоскости, и каждая прямая на плоскости может быть представлена, как множество решений уравнения такого вида. Этот факт мы будем обозначать записью $L:\{ax+by=c$.

Доказательство. (1) Из канонического уравнения прямой $\dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}$ получаем общее уравнение прямой $L:\{bx-ay=bx_0-ay_0$.

(2) Пусть задано общее уравнение прямой $L:\{ax+by=c$. Возьмем точку $M_0(x_0, y_0)$ на прямой — частное решение этого уравнения. Тогда $a(x-x_0)+b(y-y_0)=0$, откуда $\dfrac{x-x_0}{-b}=\dfrac{y-y_0}{a}$. Получаем каноническое уравнение прямой с начальной точкой $M_0(x_0,y_0)$ и направляющим вектором $A=(-b, a)$.

Равенство $a(x-x_0)+b(y-y_0)=0$ можно интерпретировать как условие ортогональности вектора $\overline{M_0M}$ и вектора $n=(a, b)$. Последний называется нормалью к прямой. Любую прямую можно описывать как геометрическое место точек M таких, что вектор $\overline{M_0M}$ перпендикулярен нормали n.

Общее уравнение прямой в векторном виде. Пусть M_0 — фиксированная точка прямой, точка M лежит на прямой, $n(a, b)$ — любая нормаль к прямой. Тогда ортогональность вектора $\overline{M_0M}$ и нормали n можно записать с использованием скалярного произведения: $(n, \overline{M_0M})=0$. В координатах оно совпадает с общим уравнением прямой $a(x-x_0)+b(y-y_0)=0$.

Для прямой, заданной точкой M_0 и нормалью n, любой вектор $\lambda \cdot n$, где $\lambda \neq 0$, также может служить нормалью. Это отражает тот очевидный факт, что уравнение ортогональности $a(x-x_0)+b(y-y_0)=0$ эквивалентно уравнению $\lambda a(x-x_0)+\lambda b(y-y_0)=0$.

Очевидно, что если прямая на плоскости имеет направляющий вектор $A(a, b)$, то в качестве нормали к ней можно взять вектор $n(-b, a)$. И наоборот, нормали $n(a, b)$ соответствует направляющий вектор $A(-b, a)$.

Из геометрических соображений следует, что две прямые пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда их нормали не коллинеарны. Если нормали коллинеарны, то прямые параллельны или совпадают.

Угловой коэффициент прямой численно равен тангенсу угла наклона прямой (угла между прямой и осью OX), если угол наклона отличен от прямого угла.

Формула углового коэффициента прямой. Угловой коэффициент прямой, заданной уравнением $L:\{ax+by=c,$ равен $k=-\dfrac{a}{b}$ (если угол наклона прямой отличен от прямого).

Если в уравнении прямой $c=0,$ то прямая проходит через начало координат. Если в уравнении прямой $a=0,$ то $y=\dfrac{c}{b},$ x — любое действительное число. Такое уравнение описывает прямую, параллельную оси OX. При $b=0$ мы получим прямую, параллельную оси OY.

Уравнение прямой в отрезках. Предположим, что прямая задана уравнением $L:\{ax+by=c,$ причем $a, b, c \neq 0.$ Разделим обе части уравнения на c и положим $k=\dfrac{c}{a},$ $m=\dfrac{c}{b}.$ Полученное уравнение $L:\left\{\dfrac{x}{k}+\dfrac{y}{m}=1\right.$ называется уравнением прямой L в отрезках. Константы k и m численно равны абсциссе и ординате точек пересечения прямой с осями OX и OY соответственно.

Замечание. Если прямая, например, параллельна оси OY, то уравнение прямой в отрезках принимает вид $L:\left\{\dfrac{y}{m}=1,\right.$ или $L:\{y=m.$

Угол между прямыми однозначно не определен. Договоримся, что углом между прямыми всегда будем считать острый угол. Тогда угол φ между прямыми будет либо равен углу ψ между направляющими векторами прямых, либо $\varphi+\psi=\pi.$ Эти соотношения можно заменить одной формулой $\cos\varphi = |\cos\psi|$. Аналогичная формула связывает угол между прямыми с углом η между нормалями к прямым: $\cos\varphi = |\cos\eta|$.

Две прямые перпендикулярны, если их нормали перпендикулярны, или перпендикулярны их направляющие векторы. Соотношение перпендикулярности можно выразить через угловые коэффициенты прямых: $k_1 k_2 = -1$.

Формула длины проекции. Длина проекции вектора u на прямую L с направляющим вектором A вычисляется по формуле $r = \dfrac{|(u, A)|}{|A|}$.

Доказательство. Направляющий вектор прямой и проекция вектора на прямую не изменятся, если мы параллельно перенесем прямую L так, что она будет проходить через начало координат. Из формулы для катета прямоугольного треугольника получим $r = |u| \cdot \cos\varphi$, где φ — угол между прямыми с направляющими векторами A и u. Вместо $\cos\varphi$ используем $\cos\psi$, выраженный через скалярное произведение (ψ — угол между направляющими векторами). Получим

$$r = |u| \cdot \frac{|(u, A)|}{|A| \cdot |u|} = \frac{|(u, A)|}{|A|}.$$

Формула расстояния от точки до прямой. Расстояние от точки $B(x_1, y_1)$ до прямой, заданной уравнением $L : \{ax + by + c = 0,$ вычисляется по формуле

$$r = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Доказательство. Пусть $M_0(x_0, y_0)$ — любая точка прямой. Тогда $c = -(ax_0 + by_0)$. Расстояние от точки B до прямой L равно длине проекции вектора $\overline{M_0 B}$ на направление, перпендикулярное прямой. Согласно формуле длины проекции $r = \dfrac{|(\overline{M_0 B}, n)|}{|n|}$, где вектор $n(a, b)$ является нормалью к прямой L. Учитывая, что $c = -(ax_0 + by_0)$, в итоге получим

$$r = \frac{|a(x_1 - x_0) + b(y_1 - y_0)|}{|n|} = \frac{|(ax_1 + by_1) - (ax_0 + by_0)|}{|n|} = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Составьте общее уравнение прямой L на плоскости, проходящей через точку $M_0(2,-1)$ перпендикулярно вектору $n(2, 3)$.

Решение. Общее уравнение прямой на плоскости в векторной форме имеет вид $(n, M - M_0) = 0,$ или $(n, M) = (n, M_0).$ Тогда общее уравнение прямой в координатах $L:\{2x + 3y = 1.$

Пример 2. Составьте общее уравнение прямой L на плоскости, проходящей через точку $M_0(-2,-3)$ с направляющим вектором $A(3,-5).$

Решение. Параметрическое уравнение прямой в векторной форме $L = M_0 + t\cdot A,$ где $t \in R.$ В координатах получим соотношение $\begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = -3 - 5t \end{cases}.$ Исключая t, получим каноническое уравнение прямой $L:\left\{\dfrac{x+2}{3} = \dfrac{y+3}{-5}\right..$ В итоге общее уравнение прямой $L:\{5x + 3y = -19.$

Второй способ. Направляющий вектор прямой $A(3, -5)$ перпендикулярен вектору нормали, в качестве которого может служить вектор $n(5, 3)$. Тогда уравнение искомой прямой в векторной форме $(n, M) = (n, M_0),$ общее уравнение прямой $L:\{5x + 3y = -19.$

Пример 3. Определите, как взаимно расположены две прямые L_1 и L_2 на плоскости. Прямые заданы уравнениями $L_1:\{2x - 3y = 4$ и $L_2:\{6y - 4x = -6.$

Решение. Если прямые заданы уравнениями $L_1:\{a_1x + b_1y = c_1$ и $L_2:\{a_2x + b_2y = c_2,$ то при $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2}$ прямые совпадают (ситуация $a_1{=}a_2{=}0$ считается допустимой), при $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} \neq \dfrac{c_1}{c_2}$ прямые параллельны, при $\dfrac{a_1}{a_2} \neq \dfrac{b_1}{b_2}$ прямые пересекаются. В последнем случае прямые перпендикулярны, если $a_1a_2 + b_1b_2 = 0.$ В нашем случае прямые параллельны.

Пример 4. Определите, как взаимно расположены две прямые L_1 и L_2 на плоскости. Прямые заданы общим уравнением $L_2:\{2x + 3y = 5$ и каноническим уравнением $L_2:\left\{\dfrac{x-2}{-4} = \dfrac{y+1}{-6}\right..$

Решение. Нормаль $n(2, 3)$ к первой прямой коллинеарна направляющему вектору $A(-4, -6)$ второй прямой. Это означает, что прямые пересекаются под прямым углом.

Пример 5. Найдите точку M, симметричную точке $M_0(-1, 2)$ относительно прямой $L:\{3x - 2y = 6.$

Решение. Искомая точка должна удовлетворять двум условия:

а) вектор $M–M_0$ перпендикулярен прямой L, то есть коллинеарен нормали $n(3, -2)$ к прямой L;

б) середина отрезка M_0M лежит на прямой L.

В результате получим СЛАУ $\begin{cases} \dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y-2}{-2} \\ 3 \cdot \dfrac{x-1}{2} - 2 \cdot \dfrac{y+2}{2} = 6 \end{cases}$. Решив систему, получим точку $M(5, -2)$.

Пример 6. На прямой $L:\{2x + 3y = 6$ найдите точку $M(x, y)$, равноудаленную от точек $M_1(3, 4)$ и $M_2(0, -5)$.

Решение. Условие равноудаленности запишем в виде $\left|M_1M\right|^2 = \left|M_2M\right|^2$. В результате получим СЛАУ $\begin{cases} (x-3)^2 + (y-4)^2 = x^2 + (y+5)^2 \\ 2x + 3y = 6 \end{cases}$ или $\begin{cases} 6x + 18y = 0 \\ 2x + 3y = 6 \end{cases}$. Решив систему, получим точку $M(6, -2)$.

§ 4. Аналитическая геометрия в пространстве

Параметрическое задание прямой. Векторная формула параметрического задания прямой одинакова на плоскости и в пространстве и имеет вид: $M = M_0 + t \cdot A$, где $t \in R$. Вектор A называется направляющим вектором прямой.

Параметрическое уравнение прямой в пространстве в координатах записывается в виде

$$\begin{cases} x = x_0 + t \cdot a \\ y = y_0 + t \cdot b, \\ z = z_0 + t \cdot c \end{cases}$$

где $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$, $A = (a, b, c)$, $t \in R$.

Каноническое уравнение прямой. В пространстве в каноническом уравнении прямой приравниваются три выражения:

$$L : \left\{ \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} \right. .$$

Замечание. Пусть, например, $a = 0$. Тогда из параметрического задания прямой следует, что координата $x = x_0$ постоянная. Другое уравнение $\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$ остается. Именно так и будем интерпретировать условное каноническое уравнение прямой вида

$$L:\left\{\frac{x-x_0}{0}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}.\right.$$

Общее уравнение плоскости. Множество решений уравнения $ax+by+cz=d$, где a, b и c не все равны нулю, является плоскостью в пространстве, и каждая плоскость π в пространстве является множеством решений некоторого уравнения такого вида. Этот факт мы будем обозначать записью

$$\pi:\{ax+by+cz=d.$$

Доказательство. (1) Любая плоскость однозначно задается точкой $M_0=(x_0, y_0, z_0)$, лежащей в плоскости, и ортогональным направлением, задаваемым нормалью $n(a, b, c)$. В терминах скалярного произведения можно описывать плоскость как геометрическое место точек M таких, что вектор $\overline{M_0M}\perp n.$ Если обозначать координаты точки M переменными x, y и z, то векторное соотношение $(\overline{M_0M}, n)=0$ запишется в виде $a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0,$ или $ax+by+cz=ax_0+by_0+cz_0=d.$ Значит, любая точка M, лежащая в плоскости, удовлетворяет этому уравнению.

(2) Пусть теперь $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и $M(x, y, z)$ — два решения уравнения $ax+by+cz=d.$ Вычитая одно тождество из другого, получим $a(x–x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0.$ Следовательно, $\overline{M_0M}\perp n,$ и точка M лежит в плоскости.

Общее уравнение плоскости в векторной форме. Из предыдущего следует, что уравнение плоскости в векторной форме записывается как $\pi:\{(n,\overline{M_0M})=0$, где M_0 — фиксированная точка плоскости, M произвольная точка плоскости, n — нормаль к плоскости.

Для плоскости $\pi:\{ax+by+cz=d$ любой ненулевой вектор, коллинеарный вектору $n(a, b, c)$, также может служить нормалью.

Если в уравнении плоскости $d = 0$, то плоскость проходит через начало координат. Плоскость, для которой $a = 0$, параллельна оси OX или содержит ее. Если $a = b = 0$, то плоскость параллельна плоскости XOY или совпадает с ней.

Параметрическое задание плоскости. Для плоскости π можно указать векторы M_0, A и B так, что все суммы вида $M=M_0+t\cdot A+s\cdot B$

с произвольными $t, s \in R,$ лежат в плоскости $\pi,$ и каждая точка $M \in \pi$ может быть представлена в таком виде. Векторы A и B называются направляющими векторами плоскости.

В качестве M_0 можно взять любую точку плоскости $\pi.$ В качестве A и B можно взять любую пару неколлинеарных векторов $\overline{M_1M_2}$ и $\overline{M_3M_4},$ лежащих в плоскости $\pi.$

Если плоскость задана неоднородным уравнением $\pi:\{ax+by+cz=d,$ то M_0 — любое частное решение этого уравнения, а набор $\{A, B\}$ — это ФНР однородного уравнения $\{ax+by+cz=0.$

Взаимное расположение плоскостей. Две плоскости пересекаются по прямой тогда и только тогда, когда их нормали не коллинеарны. Если нормали коллинеарны, то плоскости параллельны или совпадают.

Уравнение плоскости в отрезках. Пусть плоскость $\pi:\{ax+by+cz=d$ задана уравнением, в котором все коэффициенты ненулевые. Разделим обе части уравнения на d и положим $k=\frac{d}{a},$ $m=\frac{d}{b},$ $n=\frac{d}{c}.$ Полученное уравнение $\pi:\left\{\frac{x}{k}+\frac{y}{m}+\frac{z}{n}=1\right.$ называется уравнением плоскости в отрезках. Константы k, m и n численно равны координатам точек пересечения плоскости с осями OX, OY и OZ.

Замечание. Если, например, $a = 0$, то $\pi:\left\{\frac{y}{m}+\frac{z}{n}=1.\right.$ Этому случаю можно сопоставить условное значение $k=\infty,$ из за которого слагаемое $\frac{x}{k}$ исключается из уравнения.

Как и угол между прямыми, угол между плоскостями однозначно не определен. Договоримся, что углом между плоскостями всегда будем считать острый угол. Тогда угол φ между плоскостями будет либо равен углу η между нормалями к плоскостям, либо $\varphi+\eta=\pi.$ Эти соотношения можно заменить одной формулой $\cos\varphi=|\cos\eta|.$

Две плоскости перпендикулярны, если их нормали перпендикулярны.

Перейдем к к заданию прямых в пространстве. В пространстве прямая задается пересечением двух плоскостей с неколлинеарными нормалями.

Общее уравнение прямой в пространстве. Множество решений системы двух уравнений

$$L:\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \end{cases},$$

где вектор (a_1, b_1, c_1) не коллинеарен вектору (a_2, b_2, c_2), является прямой. И наоборот, каждая прямая в пространстве является множеством решений некоторой системы такого вида.

Формула расстояния от точки до плоскости. Расстояние от точки $B(x_1, y_1, z_1)$ до плоскости $\pi:\{ax+by+cz+d=0$ вычисляется по формуле

$$r=\frac{|ax_1+by_1+cz_1+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

Доказательство. Пусть $M_0(x_0, y_0, z_0)$ — любая точка плоскости. Расстояние от точки B до плоскости π равно длине проекции вектора $\overline{M_0B}$ на направление, перпендикулярное плоскости. Вектор $n(a, b, c)$ является нормалью к плоскости π. Согласно формуле длины проекции

$$r=\frac{|(\overline{M_0B},n)|}{|n|}=\frac{|a(x_1-x_0)+b(y_1-y_0)+c(z_1-z_0)|}{|n|}=$$
$$=\frac{|(ax_1+by_1+cz_1)-(ax_0+by_0+cz_0)|}{|n|}.$$

Учитывая, что $d=-(ax_0+by_0+cz_0)$, в итоге получим

$$r=\frac{|ax_1+by_1+cz_1+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 7. Составьте общее уравнение плоскости π, проходящей через заданную точку $M_0(1,-2,-3)$ перпендикулярно заданному вектору $n(3,-1,-2)$.

Решение. Запишем уравнение плоскости π в векторной форме: $(M-M_0, n)=0$, или $(M, n)=(M_0, n)$. Общее уравнение плоскости π в координатах $\pi:\{3x-y-2z=11$.

Пример 8. Составьте общее уравнение плоскости π, проходящей через три точки $M_1(2,3,-1)$, $M_2(-2,1,2)$, $M_3(-1,1,1)$.

Решение. Для составления уравнения плоскости достаточно знать одну точку на плоскости и нормаль n к плоскости. В качестве точки плоскости годится любая из трех заданных точек, а координаты нормали должны удовлетворять системе уравнений

$$\begin{cases}(M_2-M_1, n)=-4x-2y+3z=0\\(M_3-M_1, n)=-3x-2y+2z=0\end{cases}.$$

Решением СЛАУ служит нормаль $n(2, -1, 2)$. Уравнение плоскости π в векторной форме $(M - M_1, n) = 0$ или $(M, n) = (M_1, n)$. Общее уравнение плоскости π в координатах $\pi : \{2x - y + 2z = -1$.

Пример 9. Укажите параметрическое и каноническое представления прямой L, заданной системой уравнений $L : \begin{cases} 2x - 5y + 3z = 3 \\ -3x + 5y - 2z = -2 \end{cases}$.

Решение. Направляющий вектор A прямой является нетривиальным решением однородной СЛАУ $\begin{cases} 2x - 5y + 3z = 0 \\ -3x + 5y - 2z = 0 \end{cases}$. Решив ее, получим $A = (1, 1, 1)$. Точку на прямой представляет любое частное решение исходной неоднородной системы. Например, положим $z_0 = 0$ и решим систему $\begin{cases} 2x - 5y = 3 \\ -3x + 5y = -2 \end{cases}$. В качестве частного решения можно взять точку $M_0 = (-1, -1, 0)$. Параметрическое задание прямой $M = M_0 + t \cdot A$, где $t \in R$. Каноническое уравнение прямой принимает вид $L : \left\{ \dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z-0}{1} \right.$.

Пример 10. Установите, как взаимно расположены плоскость $\pi : \{x + 2y - z = 1$ и параметрически заданная прямая $L : \{M_0(3, -1, -2) + t \cdot A(3, -1, 1)\}$, где $t \in R$.

Решение. Прямая параллельна плоскости или лежит в плоскости, если ее направляющий вектор перпендикулярен нормали $n(1, 2, -1)$ к плоскости, то есть $(A, n) = 0$. В нашем примере это выполнено. В таком случае прямая лежит в плоскости, если $M_0 \in \pi$. Если $M_0 \not\in \pi$, то прямая и плоскость параллельны. В нашем примере $M_0 \not\in \pi$, так как координаты точки M_0 не удовлетворяют уравнению плоскости π. Значит, прямая параллельна плоскости.

Пример 11. Установите взаимное расположение в пространстве двух прямых

$$L_1 : \left\{ \frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{1} \right. \text{ и } L_2 : \{M(x, y, z) = M_0(3, -1, -2) + t \cdot A(3, -1, 1)\},$$

где $t \in R$.

Решение. Две прямые в пространстве могут совпадать, быть параллельными, пересекаться или скрещиваться. Прямые совпадают или параллельны, если их направляющие векторы коллинеарные. В противном случае они пересекаются или скрещиваются. В нашем примере направляющие векторы $B(2, 3, 1)$ и $A(3, -1, 1)$ обеих прямых не коллинеарны.

Для проверки пересечения параметрическое координатное представление второй прямой следует подставить в каноническую систему уравнений первой прямой. Получим систему $\frac{(3+3t)+1}{2}=\frac{(-1-t)+1}{3}=\frac{(-2+t)-1}{1}$ для переменной t. Эта система несовместна, то есть прямые не пересекаются. Следовательно, они скрещиваются.

Пример 12. В пространстве две прямые заданы системами

$$L_1:\begin{cases}3x+5y-4z=3\\2x+7y+\ z=2\end{cases}\text{ и }L_2:\begin{cases}3x+5y-4z=5\\x+4y+\ z=-3\end{cases}.$$

Проверьте, что эти прямые являются параллельными, и составьте общее уравнение плоскости π, их содержащей.

Решение. Во-первых, если из уравнений обеих СЛАУ составить одну общую СЛАУ, то она очевидным образом будет несовместной. Значит, прямые не пересекаются. Во-вторых, у параллельных прямых должен быть один направляющий вектор, то есть общее нетривиальное решение однородных СЛАУ

$$L_1:\begin{cases}3x+5y-4z=0\\2x+7y+\ z=0\end{cases}\text{ и }L_2:\begin{cases}3x+5y-4z=0\\x+4y+\ \ z=0\end{cases}.$$

Решив обе СЛАУ, получим, что вектор $A(3,\ -1,\ 1)$ действительно является направляющим вектором обеих прямых. Выберем точки M_1 и M_2 на прямых, найдя какое-нибудь частное решение соответствующих неоднородных СЛАУ. Например, годятся точки $M_1(-2,\ 1,-1)$ и $M_2(2,\ -1,\ -1)$.

Нормаль $n(x,\ y,\ z)$ к плоскости π должна быть ортогональной векторам A и разности M_2–M_1. Эти два условия образуют систему

$$\begin{cases}(A,\ n)= \qquad\qquad 3x-\ y+z=0\\(M_2-M_1,\ n)=4x-2y \qquad\ =0\end{cases}.$$

В качестве частного решения выберем вектор $n(1,\ 2,\ -1)$. Тогда общее уравнение плоскости π имеет вид $(n,\ M)=(n,\ M_1)$ или $\pi:\{x+2y-z=1$.

Пример 13. Проверьте, что заданные в пространстве прямые

$$L_1:\begin{cases}2x-y+3z=-7\\-2x+y-2z=3\end{cases}\text{ и }L_2:\{M(x,\ y,\ z)=M_0(2,\ -1,\ -1)+t\cdot A(-1,\ -2,\ -3)\}$$

пересекаются, и составьте общее уравнение плоскости π, их содержащей.

Решение. Для проверки пересечения прямых параметрическое координатное представление второй прямой следует подставить в систему уравнений для первой прямой. Для переменной t получим систему

$$\begin{cases} 2(2-t)-(-1-2t)+3(-1-3t)=-9t+2=-7 \\ -2(2-t)+(-1-2t)-2(-1-3t)= \ \ 6t-3=3 \end{cases}.$$

Эта система имеет решение $t = 1$, поэтому существует точка пересечения прямых $M_1 = M_0 + 1 \cdot A = (1, -3, -4)$. Направляющий вектор первой прямой является решением однородной СЛАУ $L_1 : \begin{cases} 2x - y + 3z = 0 \\ -2x + y - 2z = 0 \end{cases}$ и равен $B(1, 2, 0)$. Нормаль к плоскости должна быть ортогональна к векторам A и B. Вычисления показывают, что $n = (2, -1, 0)$. Тогда уравнение плоскости π, $(n, M) = (n, M_1)$, или $\pi : \{2x - y = 5$.

Пример 14. Найти расстояние от точки $M_1(2, -3, -1)$ до плоскости, заданной уравнением $\pi : \{6x + 2y - 3z + 5 = 0$.

Решение. Согласно общей формуле

$$r = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|2 \cdot 6 + (-3) \cdot 2 + (-1) \cdot (-3) + 5|}{\sqrt{6^2 + 2^2 + 3^2}} = 2.$$

ГЛАВА 3

ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

§ 1. Понятие линейного пространства

Понятие линейного пространства является обобщением координатного пространства, а также пространств функций, используемых в различных приложениях. Основная идея использования этого понятия — выделить то общее, что проявляется при работе с объектами разной природы во многих задачах, игнорируя несущественные (в контексте этих задач) различия между ними. Таким объединяющим моментом в теории линейных пространств служат линейные комбинации объектов.

Определение 3.1. Линейным действительным пространством называется множество V, для элементов которого, называемых векторами, определены две операции: сложение векторов и умножение вектора на действительное число. Операция сложения векторов удовлетворяет аксиомам сложения:

(1) для любых трех векторов $x+(y+z)=(x+y)+z$ (ассоциативность сложения);

(2) для любых двух векторов $x+y=y+x$ (коммутативность сложения);

(3) существует нулевой вектор $\Theta \in V$ такой, что для всех $x \in V$ выполнено $x+\Theta=\Theta+x=x$ (существование нуля);

(4) для каждого вектора $x \in V$ существует вектор $-x$ такой, что $x+(-x)=(-x)+x=\Theta$ (существование противоположного элемента).

Операция умножения на действительное число удовлетворяет аксиомам умножения на число:

(5) для любых $\lambda, \mu \in R$ и $x \in V$ выполняется $\mu(\lambda x)=(\mu\lambda)x$ (ассоциативность умножения на число);

(6) для произвольного $x \in V$ верно $1 \cdot x = x$ (умножение на единицу);

Операции умножения вектора на число и сложения векторов связаны дополнительными соотношениями дистрибутивности:

(7) для любого $\lambda \in R$ и любых двух векторов $x, y \in V$ выполнено $\lambda(x+y)=\lambda x+\lambda y$ (дистрибутивность умножения на число относительно сложения векторов).

(8) для любых $\lambda, \mu \in R$ и $x \in V$ выполняется $(\lambda+\mu)x = \lambda x + \mu x$ (дистрибутивность умножения на вектор относительно сложения чисел).

Элемент, который выполняет роль нуля при сложении векторов, называется нуль-вектором. Мы обозначили его специальным символом Θ, чтобы отличать от числа нуль.

Теорема 3.2. Дополнительные свойства операций в линейном пространстве выводятся из аксиом линейного пространства:

(9) $\mu(\lambda x) = \lambda(\mu x)$;

(10) нуль-вектор в линейном пространстве единственный.

(11) для любого $x \in V$ противоположный элемент $-x$ единственный.

(12) $0 \cdot x = \Theta$ (умножение на нуль).

(13) $\lambda \cdot \Theta = \Theta$ (умножение на нуль-вектор).

(14) $(-1) \cdot x = -x$ (умножение на -1).

(15) если $\lambda \cdot x = \Theta$, то либо $\lambda = 0$, либо $x = \Theta$.

Доказательство. (9) Вытекает из свойства (5) и коммутативности умножения для действительных чисел: $\mu(\lambda x) = (\mu\lambda)x = (\lambda\mu)x = \lambda(\mu x)$.

(10) Если Θ_1 и Θ_2 — два нуль-вектора, то из свойств нулевого вектора следует, что $\Theta_1 = \Theta_1 + \Theta_2 = \Theta_2$.

(11) Если $-x_1$ и $-x_2$ — два противоположных элемента, то

$$-x_1 = -x_1 + \Theta = -x_1 + (x + (-x_2)) = ((-x_1) + x) + (-x_2) = \Theta + (-x_2) = -x_2.$$

(12) Для произвольного $x \in V$ имеем

$$x = 1 \cdot x = (1+0) \cdot x = 1 \cdot x + 0 \cdot x = x + 0 \cdot x,$$

то есть $x + 0 \cdot x = x$. Прибавив к обеим частям равенства противоположный элемент $-x$, получим $0 \cdot x = \Theta$.

(13) Для произвольного $x \in V$ имеем $\lambda \cdot x = \lambda \cdot (x + \Theta) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot \Theta$. Прибавив к обеим частям равенства элемент, противоположный к $\lambda \cdot x$, получим $\lambda \cdot \Theta = \Theta$.

(14) Для произвольного x имеем

$$x + (-1) \cdot x = 1 \cdot x + (-1) \cdot x = (1 + (-1)) \cdot x = 0 \cdot x = \Theta.$$

Из единственности противоположного элемента следует, что

$$-x = (-1) \cdot x.$$

(15) Если $\lambda \cdot x = \Theta$ и $\lambda \neq 0$, то, умножая обе части равенства на λ^{-1}, получим тождество $1 \cdot x = x = \lambda \cdot \Theta = \Theta$.

Вместо выражения $x + (-y)$ будем писать $x - y$ и называть это вычитанием векторов. Легко показать, что если $z = x - y$, то $x = y + z$. Свойства ассоциативности сложения и ассоциативности умножения на число позволяют не расставлять скобки при выполнении нескольких операций сложения, вычитания или умножения на число, так как результат операций не зависит от расстановки скобок.

Замечание. Кроме действительных линейных пространств с умножением на действительные числа можно рассматривать также пространства с умножением на другие классы чисел (например, рациональные или комплексные). В дальнейшем курсе будут рассмотрены некоторые свойства комплексных линейных пространств.

Напомним, что n-мерным действительным координатным вектором ранее мы назвали упорядоченный набор $(x_1, \ldots, x_n)$ из n действительных чисел. Для координатных векторов определены операции сложения векторов и умножения вектора на действительное число:

(1) если $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, то

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n);$$

(2) если $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, то $\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n)$.

Совокупность всех n-мерных координатных векторов составляет n-мерное координатное линейное пространство R^n.

Теорема 3.3. Координатное пространство R^n является действительным линейным пространством.

Доказательство. Надо проверить выполнение аксиом линейного пространства. Сделаем выборочную проверку нескольких аксиом, оставив проверку остальных аксиом в качестве упражнения.

(1) Если $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$, то

$$x + (y + z) = (x_1 + (y_1 + z_1), x_2 + (y_2 + z_2), \ldots, x_n + (y_n + z_n)) =$$
$$= ((x_1 + y_1) + z_1, (x_2 + y_2) + z_2, \ldots, (x_n + y_n) + z_n)) = (x + y) + z.$$

(4) Если $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, то $-x = (-x_1, -x_2, \ldots, -x_n)$, и тогда

$$x + (-x) = (x_1 + (-x_1), x_2 + (-x_2), \ldots, x_n + (-x_n)) = (0, 0, \ldots, 0) = \Theta.$$

(5) Если $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, то

$$\mu(\lambda x) = (\mu(\lambda x_1), \mu(\lambda x_2), \ldots, \mu(\lambda x_n)) = (\lambda(\mu x_1), \lambda(\mu x_2), \ldots, \lambda(\mu x_n)) = \lambda(\mu x).$$

(7) Если $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, то

$$\lambda(x + y) = (\lambda(x_1 + y_1), \lambda(x_2 + y_2), \ldots, \lambda(x_n + y_n)) =$$
$$= (\lambda x_1 + \lambda y_1, \lambda x_2 + \lambda y_2, \ldots, \lambda x_n + \lambda y_n) = \lambda x + \lambda y.$$

Следующие множества с очевидными операциями сложения и умножения на число являются действительными линейными пространствами (доказательство выполнения аксиом оставляем в качестве упражнения):

(1) Множество, состоящее только из нуль-вектора.
(2) Множество всех действительных чисел.
(3) Множество векторов на плоскости или в пространстве с началом в точке O.
(4) Множество линейных алгебраических уравнений с n одинаково обозначенными переменными (уравнения с разными коэффициентами считаются разными).
(5) Множество многочленов степени не выше n.
(6) Множество всех многочленов любой степени.
(7) Множество числовых функций, определенных на всей числовой оси.

С выражениями, включающими векторы, можно обращаться так же, как с числовыми выражениями. Например, к обеим частям векторного уравнения можно прибавлять одно и то же выражение, или вычитать из обеих частей векторного уравнения одно и то же выражение. Можно переносить слагаемое из одной части уравнения в другую с противоположным знаком. Разрешается умножать обе части векторного уравнения на одно и то же ненулевое число.

§ 2. Линейная зависимость

Приведем еще раз определения, которые уже давались ранее, но теперь сформулируем их для абстрактных линейных пространств.

Определение 3.4. Линейной комбинацией векторов $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ линейного пространства V называется конечная сумма $\sum\limits_{k=1}^{n}\lambda_k f_k$, где λ_k — действительные числа. По определению линейного пространства линейная комбинация векторов принадлежит пространству V. Линейная комбинация называется нетривиальной, если хотя бы один из коэффициентов λ_k отличен от нуля. Если все коэффициенты нулевые, линейная комбинация называется тривиальной.

Определение 3.5. Конечный набор векторов $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ линейного пространства V называется линейно зависимым, если существует нетривиальная линейная комбинация векторов набора, равная Θ. Если такой нетривиальной линейной комбинации не существует, то этот набор называется линейно независимым.

Определение линейной независимости можно переформулировать так, чтобы в нем не было отрицания: набор векторов является линейно независимым, если любая линейная комбинация векторов набора, равная нуль-вектору, оказывается тривиальной.

Замечание. Два вектора x и y линейно зависимы тогда и только тогда, когда они коллинеарны (существует коэффициент пропорциональности λ такой, что $x = \lambda y$ или $y = \lambda x$).

Замечание. Наряду с линейной зависимостью конечного набора векторов можно также рассматривать линейную зависимость бесконечного набора векторов. Бесконечное подмножество векторов из V называется линейно зависимым, если линейно зависимо некоторое конечное подмножество этого множества. Бесконечное подмножество называется линейно независимым, если любое его конечное подмножество линейно независимо.

Замечание. Понятие линейной зависимости относится только к множеству векторов, и не может относиться к отдельному вектору. Фраза «Вектор x линейно зависим (независим)» не имеет смысла.

Правильно говорить, что набор из одного ненулевого вектора всегда линейно независим, а набор из одного нулевого вектора Θ линейно зависим (так как $1 \cdot \Theta = \Theta$).

Лемма 3.6. Если подмножество векторов G конечного набора F линейно зависимо, то и набор F линейно зависим (из $G \subseteq F$ и линейной зависимости G следует линейная зависимость F).

Доказательство. Нетривиальная линейная комбинация векторов набора G, равная нуль-вектору, одновременно является нетривиальной линейной комбинацией векторов набора F, если положить равными нулю коэффициенты при тех векторах набора F, которые не входят в G.

В частности, любой набор, содержащий нуль-вектор, линейно зависим.

Теорема 3.7. (Критерий линейной зависимости). Набор векторов $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ линейно зависим тогда и только тогда, когда один из векторов набора можно представить в виде линейной комбинации остальных векторов набора: $\exists j : f_j = \sum\limits_{k \neq j} \lambda_k f_k$.

Доказательство необходимости. Если набор $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ линейно зависим, то по определению $\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k f_k = \Theta$ и $\lambda_j \neq 0$ для некоторого j. Тогда $f_j = \sum\limits_{k \neq j} \left(-\frac{\lambda_k}{\lambda_j} \right) \cdot f_k$.

Доказательство достаточности. Из $f_j = \sum\limits_{k \neq j} \lambda_k f_k$ вытекает $\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k f_k = \Theta$, где $\lambda_j = -1$.

Замечание. «Некоторый» не значит «любой». Если в некоторой линейной комбинации, равной нуль-вектору, коэффициент при каком-то векторе равен нулю, то этот вектор нельзя выразить через остальные с использованием данной линейной комбинации (это утверждение не исключает того, что этот вектор можно выразить через остальные с использованием другой нетривиальной линейной комбинации, равной нуль-вектору).

Линейная независимость набора тесно связана с единственностью разложения по векторам этого набора.

Лемма 3.8. (Необходимое условие линейной независимости). Если набор векторов $F=\{f_1, f_2, ..., f_n\}$ линейно независим, то для любого вектора x, для которого существует представление $x=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k f_k$, это представление единственно.

Доказательство. Пусть набор F линейно независим, а для некоторого вектора x существуют два представления $x=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k f_k$ и $x=\sum_{k=1}^{n}\mu_k f_k$ с разными коэффициентами. Вычитая одно из другого, получим $\sum_{k=1}^{n}(\lambda_k-\mu_k)f_k=\Theta$, причем не все коэффициенты $(\lambda_k-\mu_k)$ равны нулю, что противоречит линейной независимости F.

Лемма 3.9. (Достаточное условие линейной независимости). Если для некоторого вектора x представление $x=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k f_k$ существует и единственное, то набор векторов $F=\{f_1, f_2, ..., f_n\}$ линейно независим.

Доказательство. Если $x=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k f_k$, и существует некоторая линейная зависимость $\sum_{k=1}^{n}\mu_k f_k=\Theta$ векторов набора F, то $x=\sum_{k=1}^{n}(\lambda_k+\mu_k)f_k$, что противоречит единственности разложения x.

Пример 1. Определить, является ли набор $\{a_1(2,1,1), a_2(1,-1,2), a_3(-1,2,-3)\}$ линейно зависимым или линейно независимым. Если набор линейно зависим, то найти коэффициенты линейной зависимости.

Решение. Запишем соотношение линейной зависимости: $x_1\cdot a_1+x_2\cdot a_2+x_3\cdot a_3=\Theta$. Это соотношение является векторной записью однородной системы линейных уравнений

$$x_1\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}+x_2\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}+x_3\cdot\begin{pmatrix}-1\\2\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Leftarrow\begin{cases}2x_1+\ \ x_2-\ \ x_3=0\\ \ x_1-\ \ x_2+2x_3=0.\\ \ x_1+2x_2-3x_3=0\end{cases}$$

Векторы линейно независимы, если эта система имеет только тривиальное решение. Решив систему методом Гаусса, получим, что у нее есть нетривиальные решения. ФНР однородной СЛАУ состоит из одного координатного вектора, в качестве которого можно выбрать вектор $f_1(-1, 5, 3)$. Следовательно, набор векторов $\{a_1, a_2, a_3\}$ линейно зависим. Зависимость задается единственной (с точностью до умножения на множитель) линейной комбинацией $-a_1 + 5a_2 + 3a_3 = \Theta$.

Определение 3.10. (Отношение выражения одного набора через другой). Будем говорить, что вектор x линейно выражается через векторы набора $F = \{f_1, f_2, ..., f_n\}$ (или разлагается по векторам этого набора), если существует набор коэффициентов $\{\lambda_k\}$ таких, что $x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f_k$.

Если каждый вектор набора G разлагается по векторам набора F, то будем говорить, что набор G выражается через набор F.

Для записи отношения «вектор x выражается набор F» или «набор G выражается через набор F» будем использовать специальное обозначение $F \succ x$ или $F \succ G$. Заметим, что использование значка $\succ$ для отношения выражения наборов не является общеупотребительным.

Лемма 3.11. Если набор G содержится в наборе F (обозначение $G \subseteq F$), то $F \succ G$.

Доказательство. Если $G \subseteq F$, то для любого $x \in G$ также $x \in F$, и тогда тождество $x = x$ показывает, что $F \succ G$.

Лемма 3.12. (Изменение порядка суммирования в двойной сумме). Пусть задана матрица $A = \left\| a_{jk} \right\|$ размером $m \times n$. Тогда сумма всех элементов матрицы

$$S = \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{jk} \right) = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m} a_{jk} \right).$$

Доказательство. Просуммировать элементы матрицы можно двумя способами: сначала просуммировать элементы в каждой строке, а затем сложить суммы по строкам, или просуммировать элементы в каждом столбце, а затем сложить суммы по столбцам. Очевидно, что результат обеих операций должен быть одним и тем же.

Согласно лемме в двойной сумме скобки можно опустить:

$$S = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{jk} = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} a_{jk}.$$

Этой леммой мы будем неоднократно пользоваться. Сначала воспользуемся ею для доказательства следующего важного утверждения.

Теорема 3.13. (Транзитивность отношения выражения наборов). Пусть заданы три набора векторов *F*, *G* и *H*. Если $F \succ G$ и $G \succ H$, то $F \succ H$.

Доказательство. Обозначим символами *k*, *m* и *n* количество векторов в наборах *F*, *G* и *H*. По условию, для каждого вектора $z_i \in H$ есть разложение $z_i = \sum_{p=1}^{m} a_{pi} y_p$, где $y_p \in G$, а для каждого вектора $y_p \in G$ есть разложение $y_p = \sum_{j=1}^{k} b_{jp} x_j$, где $x_j \in F$. Подставим в сумму для z_i выражения для y_p, и поменяем порядок суммирования в двойной сумме. Получим для всех *i* от 1 до *n* разложение

$$z_i = \sum_{p=1}^{m} a_{pi} \left(\sum_{j=1}^{k} b_{jp} x_j \right) = \sum_{j=1}^{k} \left(\sum_{p=1}^{m} b_{jp} a_{pi} x_j \right) = \sum_{j=1}^{k} \left(\sum_{p=1}^{m} b_{jp} a_{pi} \right) x_j = \sum_{j=1}^{k} c_{ji} x_j,$$

где $c_{ji} = \sum_{p=1}^{m} b_{jp} a_{pi}$. Теорема доказана.

Замечание. Коэффициенты a_{pi} составляют матрицу *A* размером $m \times n$, коэффициенты b_{jp} составляют матрицу *B* размером $k \times m$, а коэффициенты c_{ji} составляют матрицу *C* размером $k \times n$. Если сравнить соотношение $c_{ji} = \sum_{p=1}^{m} b_{jp} a_{pi}$ с формулой матричного умножения, то мы увидим, что $C = B \cdot A$.

Пример 2. Определить, выражается ли вектор $b = (-1, -3, 6, 0)$ через набор векторов $\{a_1, a_2, a_3\}$, где $a_1 = (3, 2, -1, 4)$, $a_2 = (1, -1, 2, 1)$, $a_3 = (2, 1, -1, 2)\}$. Если выражается, то найти коэффициенты разложения.

Решение. Если $b = x_1 a_1 + x_2 a_2 + x_3 a_3$, то тройка чисел $\{x_1, x_2, x_3\}$ является решением неоднородной системы линейных уравнений

$$x_1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftarrow \begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = -3 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = 6 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}.$$

Единственным решением этой системы является вектор $f_1 = (1, 2, -3)$. Следовательно, соответствующее разложение $b = a_1 + 2a_2 - 3a_3$.

§ 3. Ранг и база множества векторов

Основной прием работы с линейными пространствами — выделить такой конечный набор векторов этого пространства, что любой вектор пространства единственным образом разлагается по векторам данного набора. Такой набор будет называться базисом. Если конечный базис найден, то коэффициенты разложения вектора по базису будут называться координатами вектора в данном базисе.

Вместо операций с векторами мы сможем рассматривать операции с наборами координат векторов. Фактически после выбора базиса задачи решаются не в абстрактном линейном пространстве, а в координатном пространстве R^n.

Реализации данной идеи посвящены этот и следующий параграфы. Будем обозначать через $N(F)$ количество векторов в конечном множестве F (заметим, что это обозначение не общеупотребительное).

Определение 3.14. Пусть L — линейное пространство, M — его подмножество. Конечный неупорядоченный набор $F=\{f_1, f_2, ..., f_m\} \subseteq M$ называется конечной базой множества M, если, во-первых, F линейно независим, во-вторых, $F \succ M$.

Условие $F \succ M$ означает, что любой вектор из M разлагается по векторам набора F. Назовем это свойство полнотой набора F относительно множества M.

Замечание. Из определения не следует, что у любого множества существует конечная база.

Замечание. Определение базы не исключает гипотетической возможности того, что две разные базы могут иметь различное количество векторов. Далее будет показано, что это невозможно.

Кроме линейной независимости и полноты база F множества M обладает рядом важных свойств.

Лемма 3.15. (Свойства базы). Для любой базы F множества M выполняются следующие свойства:

(1) При добавлении любого вектора из M набор F становится линейно зависимым (максимальность набора F в M относительно линейной независимости).

(2) Для любого вектора $x \in M$ разложение $x=\sum_{k=1}^{m}\lambda_k f_k$, существующее в силу полноты, единственное (единственность разложения).

(3) При удалении из набора F любого вектора утверждение $F \succ M$ перестает быть верным (минимальность набора F относительно полноты в M).

Доказательство. (1) Вследствие полноты набора F любой вектор $x \in M$ выражается через векторы набора F. Следовательно, согласно критерию линейной зависимости, при добавлении к набору F вектора x новый набор станет линейно зависимым.

(2) Согласно необходимому условию линейной независимости для любого вектора $x \in M$ разложение $x = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k f_k$, если оно существует, единственное.

(3) Если из набора F исключить вектор f_j, то вследствие линейной независимости набора F вектор f_j не будет выражаться через оставшиеся векторы, то есть условие $F \succ M$ выполняться не будет. Итак, набор F минимален относительно полноты.

Докажем, что в качестве определения базы можно выбрать другие пары указанных свойств.

Теорема 3.16. (Эквивалентные определения базы).

(1) **С использованием линейной независимости и максимальности**. Линейно независимый набор $F \subseteq M$, который нельзя пополнить вектором $x \in M$ с сохранением линейной независимости, является базой множества M.

(2) **С использованием полноты и единственности разложения**. Набор $F \subseteq M$, если он полон в M, и если для любого $x \in M$ разложение $x = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k f_k$ единственное, является базой множества M.

(3) **С использованием полноты и минимальности**. Набор $F \subseteq M$, если $F \succ M$, но при исключении из F любого вектора условие $F \succ M$ перестает выполняться, является базой множества M.

Доказательство. (1) Выберем любой вектор $x \in M$. Согласно определению максимальности набора F, при добавлении вектора x набор $F' = \{f_1, f_2, \ldots, f_m, x\}$ становится линейно зависимым. Значит, существует нетривиальная линейная комбинация $\lambda x + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k f_k = \Theta$. Если бы было $\lambda = 0$, то $\sum_{k=1}^{m} \lambda_k f_k = \Theta$. Однако это противоречит линейной независимости набора $F = \{f_1, f_2, \ldots, f_m\}$. Поэтому должно быть $\lambda \neq 0$. Тогда верно разложение $x = \sum_{k=1}^{m} \left(-\frac{\lambda_k}{\lambda} \right) \cdot f_k$. Следовательно, любой вектор x выражается через набор F, то есть набор F полный.

(2) Единственность разложения хотя бы одного вектора по набору F есть достаточное условие его линейной независимости

(3) Пусть набор F линейно зависим. Тогда согласно критерию линейной зависимости один из векторов f_j выражается через набор F', полученный после исключения вектора f_j из набора F. Тогда $F' \succ F$, откуда $F' \succ M$. Это противоречит минимальности набора F относительно свойства полноты. Значит, набор F линейно независим.

Докажем существование базы конечного множества. Оно основывается на следующей лемме.

Лемма 3.17. Если в конечном множестве векторов M выбран набор, который является линейно независимым, но не максимальным, то он может быть дополнен до максимального линейно независимого набора.

Доказательство. Если набор не максимален в M, то это означает, что к нему можно добавить некоторый вектор множества M так, что новый набор останется линейно независимым. Если и этот набор не будет максимальным, то к нему можно добавить еще вектор так, что он останется линейно независимым, и т.д. Так как исходное количество векторов в множестве M конечно, то процесс должен остановиться, то есть очередной набор окажется максимальным в M, что и требуется.

Замечание. Это рассуждение не проходит для бесконечного множества M.

Теорема 3.18. (О существовании базы). В любом конечном множестве векторов, содержащем ненулевой вектор, можно выбрать некоторую базу.

Доказательство. В множестве, в котором есть вектор, отличный от нуля, существует линейно независимый набор из одного вектора. Согласно лемме о пополнении, его можно дополнить до максимального в M набора F. Согласно Теореме 3.16 об эквивалентности разных определений базы, набор F будет базой множества M. Следовательно, в каждом конечном множестве база существует.

Лемма 3.19. (О сохранении базы при расширении). Если набор F является базой множества M, и мы расширим M до M_1, добавив к M некоторые линейные комбинации векторов из M (то есть $M \subset M_1$ и $M \succ M_1$), то F останется базой в M_1.

Доказательство. По определению базы в M набор F линейно независим. Также он полон в M_1, так как из условий $F \succ M \succ M_1$ и транзитивности отношения $\succ$ следует, что $F \succ M_1$. Значит, набор F является базой в M_1.

Выбор базы в множестве векторов, как правило, неоднозначен. Нашей следующей целью является доказательство того, что все базы фиксированного множества содержат одно и то же количество векторов (пока это ниоткуда не следует).

Теорема 3.20. В координатном пространстве R^m любой набор, в котором количество векторов $n > m$, линейно зависим.

Доказательство. Запишем элементы набора в виде вектор-столбцов высоты m, и составим из этих столбцов матрицу A порядка $m \times n$. Рассмотрим однородную СЛАУ с матрицей коэффициентов A. Согласно векторной записи однородной СЛАУ в форме $\sum_{k=1}^{n} x_k A^k = \Theta$, столбцы A^k матрицы A линейно зависимы, если существует нетривиальное решение этой СЛАУ. Такое решение существует согласно доказанному ранее достаточному условию существования нетривиального решения у однородной СЛАУ, у которой число неизвестных превышает число уравнений.

Теорема 3.21. (Теорема о двух наборах). Пусть даны два набора $F = \{f_1, ..., f_k\}$ и $G = \{g_1, ..., g_m\}$, причем $F \succ G$, и при этом $m > k$. Тогда набор G линейно зависим.

Доказательство. По условию, для каждого вектора g_p есть разложение $g_p = \sum_{j=1}^{k} a_{jp} f_j$. Запишем предполагаемое условие линейной зависимости векторов G в виде векторного уравнения $\Theta = \sum_{p=1}^{m} x_p g_p$ с неизвестными $x_1, x_2, ..., x_m$. Нам нужно показать существование нетривиального решения этого уравнения. Для каждого g_p подставим его разложение в данное уравнение и поменяем порядок суммирования в двойной сумме:

$$\Theta = \sum_{p=1}^{m} x_p g_p = \sum_{p=1}^{m} x_p \sum_{j=1}^{k} a_{jp} f_j = \sum_{j=1}^{k} \left(\sum_{p=1}^{m} a_{jp} x_p \right) f_j .$$

Для линейной зависимости набора G достаточно так подобрать коэффициенты x_p, не все равные нулю, чтобы выполнялось равенство $\sum_{p=1}^{m} a_{jp} x_p = 0$ для всех $j = 1, 2, ..., k$. Эти условия представляют собой однородную СЛАУ, в которой число уравнений равно k, а число переменных равно m. Согласно достаточному условию у однородной СЛАУ при $m > k$ нетривиальное решение имеется, и поэтому набор $\{g_1, ..., g_m\}$ оказывается линейно зависим. Теорема доказана.

Следствие 3.22. Если набор G линейно независим, $F \succ G$, то $N(F) \geq N(G)$.

Следствие 3.23. Если A — база множества F, B — база множества G, и $F \succ G$, то $N(A) \geq N(B)$.

Доказательство. $B \subseteq G$, и поэтому $G \succ B$. Значит, $A \succ F \succ G \succ B$, и вследствие транзитивности отношения выражения наборов верно $A \succ B$. Так как набор B линейно независим, $N(A) \geq N(B)$.

Теперь мы сможем сформулировать и доказать основную теорему этого параграфа.

Теорема 3.24. (О количестве векторов в базе). Количество векторов в любых двух базах A и B одного и того же множества векторов одинаковое.

Доказательство. Надо применить следствие к ситуации, когда множества G и F одинаковые, а базы A и B разные. Тогда верно как $N(A) \geq N(B)$, так и $N(B) \geq N(A)$. Следовательно, $N(A) = N(B)$.

Пример 3. Найти все базы набора векторов F, где

$$F = \{a_1(2, -1, 3, 2),\ a_2(3, 2, 1, 1),\ a_3(-3, 5, -8, -5),\ a_4(-1, 4, -5, -3),\ a_5(1, 2, -1, 1)\}.$$

Решение. Запишем соотношение линейной зависимости векторов:

$$x_1 a_1 + x_2 a_2 + x_3 a_3 + x_4 a +_4 x_5 a_5 = \Theta.$$

Если расписать это выражение в координатах

$$x_1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ -8 \\ -5 \end{pmatrix} + x_4 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix} + x_5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

то оно окажется векторной записью однородной системы линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 + 2x_5 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - 8x_3 - 5x_4 - x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 - 3x_4 + x_5 = 0 \end{cases}.$$

Решим систему методом Гаусса. В одном из вариантов решения получим ФНР из двух векторов $\{b_1(3, -1, 1, 0, 0), b_2(0, 1, 2, -3, 0)\}$. Значит, у нас есть две основные линейные комбинации $3a_1 - a_2 + a_3 = \Theta$ и $a_2 + 2a_3 - 3a_4 = \Theta$. Это означает, что каждый из векторов $\{a_1, a_2, a_3\}$ выражается через два других, и каждый из векторов $\{a_2,a_3,a_4\}$ выражается через два других. Следовательно, в четверке $\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$ любые два вектора выражаются через два остальных вектора. В то же время не существует линейной комбинации, в которую вектор a_5 входил бы с ненулевым коэффициентом. Это означает, что вектор a_5 не выражается через векторы $\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$.

Итак, любая база состоит из трех векторов: вектора a_5 и любой пары из четверки $\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$. Такие векторы линейно независимы, и любой вектор из набора F через них выражается.

Определение 3.25. Рангом множества M векторов линейного пространства V называется максимальное количество линейно независимых векторов в M (обозначение $r = rank(M)$). Другими словами, рангом является $max(N(F))$ по всем конечным линейно независимым наборам $F \subseteq M$, если этот максимум существует.

Из определения следует, что для линейно независимого набора $rank(F){=}N(F)$.

Теорема 3.26. Ранг множества векторов совпадает с количеством векторов в любой базе этого множества.

Доказательство. По определению ранга существует линейно независимый набор $F \subseteq M$, для которого $rank(M) = N(F)$. Если набор F не максимален, то к нему можно добавить вектор из M так, что набор останется линейно независимым. Тогда число векторов в нем будет больше ранга, что противоречит определению ранга множества M. Следовательно, набор F максимален, то есть является базой. Так как мы доказали, что количество векторов в каждой базе множества одно и то же, то в каждой базе $N(F){=}rank(M)$.

Соединив Следствие 3.23 из Теоремы о двух наборах, и Теорему 3.26 о ранге множества, получим теорему о сравнении рангов.

Теорема 3.27. Пусть заданы два подмножества векторов F и G с конечной базой, для которых $F \succ G$. Тогда $rank(F){\geq}rank(G)$.

Доказательство. Пусть A — база множества F, B — база множества G. Согласно Следствию 3.23, из $F \succ G$ следует $N(A) \geq N(B)$, то есть $rank(F) \geq rank(G)$.

Следствие 3.28. Если $F \succ G$ и $G \succ F$, то $rank(F) = rank(G)$.

Пусть задан набор F. Если в этом наборе положить $f'_j = f_j + \lambda f_i$ для некоторых j и i, $f'_k = f_k$ для $k \neq j$, то $F \succ F'$. Но и $F' \succ F$, поскольку $f_j = f'_j{-}\lambda f'_i$, $f_k{=}f'_k$ для $k \neq j$. Следовательно, $rank(F) = rank(F')$. Если мы несколько раз проделаем эту процедуру и в конце концов придем к набору G, в котором r векторов линейно независимы, а остальные нули, то $rank(F) = rank(G) = r$.

Используем эту идею для решения конкретной задачи.

Пример 4. Найти ранг набора F векторов координатного линейного пространства R^4:

$$F = \{a_1(1,-1,1,2), a_2(2,3,2,-1), a_3(1,1,3,2), a_4(5,8,3,-5), a_5(3,5,1,-4)\}.$$

Решение. Составим матрицу размером 5 × 4, в которой строками являются координаты векторов набора. Используя ведущие элементы, будем прибавлять к одним строкам другие, умноженные на специально подобранные числа. Подобно тому, как это делалось в схеме Гаусса-Жордана при решении однородного уравнения, в результате нескольких итераций последовательно образуются базисные столбцы.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & \boxed{1} & 2 \\ 2 & 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 5 & 8 & 3 & -5 \\ 3 & 5 & 1 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & \boxed{5} & 0 & -5 \\ -2 & 4 & 0 & -4 \\ 2 & 11 & 0 & -11 \\ 2 & 6 & 0 & -6 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ \boxed{-2} & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Набор векторов, изображаемый конечной матрицей, состоит из трех линейно независимых векторов в первых трех строках и двух нулевых векторов. Его ранг равен трем. Следовательно, ранг исходного набора равен трем.

§ 4. Базис линейного пространства

В случае, когда множество является линейным пространством, базу множества принято называть базисом. Однако между базисом и базой есть еще одно различие. Предполагается, что векторы базиса линейного пространства упорядочены. В частности, базисы, состоящие из одних и тех же векторов, взятых в разном порядке, различаются. Этому есть разумное объяснение. Важнейшим инструментом работы с линейными пространствами является сопоставление вектору его координат в фиксированном базисе, которыми служат коэффициенты разложения вектора по векторам базиса. Однако при изменении порядка векторов в базисе набор коэффициентов меняется.

Дадим независимое определение базиса линейного пространства.

Определение 3.29. Базисом линейного пространства V называется конечный упорядоченный линейно независимый набор векторов F, к которому нельзя присоединить вектор $x \in V$ так, чтобы он остался линейно независимым. Из определения следует, что неупорядоченный набор векторов, составляющих базис, совпадает с базой множества V. Векторы базиса называются базисными векторами. Размерностью линейного пространства (обозначение $dim(V)$) называется ранг множества V, по доказанному ранее равный количеству векторов в любом его базисе.

Пространство, в котором существует конечный базис, называется конечномерным.

Замечание. Вообще говоря, в линейном пространстве конечного базиса может не быть. Такое пространство называют бесконечномерным. Мы будем рассматривать только конечномерные пространства и конечные базисы.

Пространство нулевой размерности по определению состоит только из нулевого вектора Θ.

Определим вектор $e_k \in R^n$ следующим образом: его k-ая координата равна единице, а остальные координаты равны нулю. В математике есть удобное обозначение δ_j^k, которое называется **символом Кронекера**: $\delta_j^k = 1$, если $j = k$, и $\delta_j^k = 0$, если $j \neq k$. С использованием символа Кронекера координаты вектора e_k — это числа $x_j = \delta_j^k$.

Теорема 3.30. Набор векторов $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ является базисом координатного пространства R^n. Этот базис называется стандартным базисом в R^n.

Доказательство. Согласно определению, надо проверить линейную независимость и полноту набора $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$.

(1) Пусть $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k = \Theta$. Это означает, что для каждой координаты с номером j верно $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \delta_j^k = \lambda_j = 0$. Итак, линейная комбинация тривиальная и набор $\{e_k\}$ линейно независим.

(2) Любой вектор $x = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ разлагается по векторам набора $\{e_k\}$: $x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$. Это следует из тождества $x_j = \sum_{k=1}^{n} x_k \delta_j^k$.

Следствие 3.31. $dim(R^n) = n$.

Определение 3.32. Пусть набор $F = \{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ является базисом линейного пространства V. Из свойств базы следует, что для любого вектора $x \in V$ существует единственное разложение $x = \sum_{k=1}^{n} x_k f_k$. Коэффициенты x_k этого разложения называются координатами вектора x в базисе F.

Мы знаем, что для того, чтобы набор векторов был базой множества, достаточно, чтобы векторы набора были линейно независимы и любой вектор пространства V разлагался по векторам набора. Однако, если размерность пространства известна, и число векторов в наборе совпадает с размерностью пространства, то достаточно одного из этих условий.

Теорема 3.33. Достаточным условием того, что n векторов из n-мерного линейного пространства V образуют базис G этого пространства, является любое из двух условий:

(1) векторы набора G линейно независимы;

(2) любой вектор $x \in V$ разлагается по векторам набора G.

Доказательство. (1) Так как $dim(V) = n$, в нем есть базис F из n векторов. Если в исходный набор G добавить любой вектор, то в наборе G' окажется $(n+1)$ векторов, при этом $F \succ G'$. По Теореме о двух наборах набор G' векторов будет линейно зависимым. Следовательно, исходный набор G максимален, и поэтому является базисом.

(2). Если набор G линейно зависим, то в его базе A меньше, чем n векторов. Тогда $N(A) < n$, а из $A \succ G \succ V$ следует $A \succ V$. Значит, набор A линейно независим и полон в V, то есть является базисом. Это противоречит n-мерности пространства V.

Если зафиксировать базис F линейного пространства V, то тем самым будет установлено взаимно однозначное соответствие между векторами $x \in V$ и наборами коэффициентов $\{x_k\} \in R^n$. Это соответствие сохраняет структуру линейного пространства: сумме векторов соответствует сумма координатных векторов, произведению вектора на число соответствует произведение координатного вектора на число. Такое соответствие в линейной алгебре называется изоморфизмом линейных пространств.

Забежим немного вперед.

Определение 3.34. Векторной функцией векторного аргумента (синоним: оператор) называется отображение $A: V_1 \to V_2$ одного линейного пространства в другое. Пространство V_1 является областью определения оператора, а пространство V_2 содержит значения оператора. Линейным оператором называется такой оператор $A(x)$, который удовлетворяет условиям линейности:

(1) Для любых $x, y \in V_1$ значение $A(x+y) = A(x) + A(y)$.

(2) Для любых $x \in V_1$ и $\lambda \in R$ значение $A(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot A(x)$.

Вместо $A(x)$ часто пишут Ax.

Теорема 3.35. Если оператор A линейный, то $A(\Theta) = \Theta$.

Доказательство. По определению линейного оператора, $A(2 \cdot \Theta) = A(\Theta) = 2 \cdot A(\Theta)$, откуда $A(\Theta) = \Theta$.

Пусть задан линейный оператор $A:V_1 \to V_2$, причем соответствие между линейными пространствами V_1 и V_2 взаимно-однозначное. Тогда для каждого вектора $y \in V_2$ должен существовать вектор $x \in V_1$ такой, что $Ax = y$, во-вторых, из $x \neq y$ следует $Ax \neq Ay$. В частности, из $Ax = \Theta$ следует $x = \Theta$.

Определение 3.36. Образом $Im(A)$ линейного оператора $A:V_1 \to V_2$ называется множество всех векторов $y \in V_2$, представимых в виде $y = Ax$, где $x \in L_1$.

Определение 3.37. Ядром $Ker(A)$ линейного оператора $A:V_1 \to V_2$ называется множество всех векторов $x \in V_1$, для которых $Ax = \Theta$.

Итак, для взаимной однозначности необходимо, чтобы образ оператора совпадал со всем пространством, а ядро оператора состояло только из нуль-вектора. Позднее будет показано, что эти два условия являются достаточными.

Определение 3.38. Линейный оператор $A:V_1 \to V_2$ называется изоморфизмом линейных пространств, если его ядро состоит только из нуль-вектора, а образ совпадает с пространством V_2.

Теперь можно точно сформулировать утверждение о соответствии линейных подпространств с помощью базиса.

Теорема 3.39. Каждое n-мерное линейное пространство V изоморфно координатному пространству R^n. Конкретный линейный оператор, осуществляющий изоморфизм, однозначно задается выбором базиса в пространстве V.

ГЛАВА 4

ЛИНЕЙНЫЕ ПОДПРОСТРАНСТВА

§ 1. Понятие линейного подпространства

Определение 4.1. Линейным подпространством L линейного пространства V называется непустое подмножество векторов пространства V, для которого:

(1) определены операции сложения и умножения на число, позаимствованные из пространства V;

(1) любая линейная комбинация векторов из L принадлежит L.

Теорема 4.2. Линейное подпространство L линейного пространства V является линейным пространством.

Доказательство. По определению подпространства сумма векторов и произведение вектора на число принадлежат подпространству. В частности, взяв произвольный вектор $x \in L$, получим, что вектор $0 \cdot x = \Theta \in L$. Так как по условию сложение и умножение на число для элементов L такие же, как в V, то все аксиомы для этих операций выполняются. Значит, L является линейным пространством.

Как итог, для линейных подпространств определены понятия базиса и размерности.

Замечание. В любом пространстве подмножество, состоящее только из нуль-вектора, является линейным подпространством. Также все пространство V является подпространством самого себя. Линейные подпространства, не совпадающие с этими двумя, называются собственными.

Пример 1. Проверить, являются ли линейными подпространствами в R^2 следующие подмножества:

(1) $M_1 = \{(x_1, x_2) : 3x_1 - 2x_2 = 0\}$.

(2) $M_2 = \{(x_1, x_2) : x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$.

(3) $M_3 = \{(x_1, x_2) : x_2 = 2x_1$ или $x_2 = 3x_1\}$.

(4) $M_4 = \{(x_1, x_2) : 3x_1^2 - x_1x_2 + 2x_2^2 \geq 0\}$.

(5) $M_5 = \{(x_1, x_2) : 3x_1^2 - x_1x_2 + 2x_2^2 \leq 0\}$.

Решение. Нуль-вектор содержится во всех множествах, значит, необходимое условие того, чтобы множество было подпространством, для всех множеств выполняется.

(1) Множество M_1 является линейным подпространством:

a. Если $x=(x_1, x_2)$, $y=(y_1, y_2)$, $z=x+y=(x_1+y_1, x_2+y_2)$, то $3z_1-2z_2=3(x_1+y_1)-2(x_2+y_2)=(3x_1-2x_2)(3y_1-2y_2)=0+0=0.$

Следовательно $z\in M_1$.

b. Если $x=(x_1, x_2)$, то $\lambda x=(\lambda x_1, \lambda x_2)$, и выражение $3\lambda x_1-2\lambda x_2=\lambda(3x_1-2x_2)=0.$

Следовательно $\lambda x\in M_1$.

(2) Множество M_2 не является линейным подпространством:

a. Если $x_1\ge 0,\ x_2\ge 0,\ y_1\ge 0,\ y_2\ge 0,$ то $x_1+y_1\ge 0,\ x_2+y_2\ge 0.$ Условие для суммы выполняется.

b. Если $x=(1,1)$, то $-x=(-1,-1)\not\in M_2$. Условие для умножения на число может не выполняться.

(3) Множество M_3 не является линейным подпространством:

a. Если для вектора $x=(x_1, x_2)$ выполняется равенство $x_2=2x_1$, то для вектора $\lambda x=(\lambda x_1, \lambda x_2)$ выполняется равенство $\lambda x_2=2(\lambda x_1)$. То же самое верно для вектора x, если $x_2=3x_1$. Условие для умножения на число выполняется.

b. Имеем $x=(1,2)\in M_3$, $y=(1,3)\in M_3$, но $x+y=(2,5)\not\in M_3$. Условие для суммы выполняется не всегда.

(4) Выражение $3x_1^2-x_1x_2+2x_2^2\ge 0$ для всех x_1, x_2, поэтому $M_4=R^2$ и является линейным подпространством.

(5) Выражение $3x_1^2-x_1x_2+2x_2^2\le 0$ только при $x_1=x_2=0$, поэтому $M_5=\{\Theta\}$ и является линейным подпространством.

Понятие размерности линейного подпространства имеет некоторые аналогии с количеством элементов конечного множества. Например, если одно конечное множество содержится в другом, то количество элементов в нем не превосходит количества элементов в большем множестве. Причем если при этом количество элементов в обоих множествах одинаковое, то множества совпадают, а если множества отличаются, то в меньшем множестве элементов меньше.

Похожее утверждение верно для размерностей подпространств.

Теорема 4.3. Для линейных подпространств L_1 и L_2 из неравенства $L_1\subseteq L_2$ вытекает неравенство $dim(L_1)\le dim(L_2)$. При этом, если $L_1\ne L_2$, то $dim(L_1)<dim(L_2)$, а если $dim(L_1)=\dim(L_2)$, то $L_1=L_2$.

Доказательство. Мы знаем, что размерность подпространства совпадает с количеством векторов в любом базисе подпространства. Выберем произвольный базис в L_1. Если выбранный набор является также базисом в L_2, то любой вектор $x\in L_2$ разлагается по этому базису, и поэтому также $x \in L_1$, то есть $L_1 = L_2$, и тогда $dim(L_1) = dim(L_2)$. Если выбранный набор не является базисом в L_2, то по лемме о пополнении базиса его можно дополнить до базиса в L_2. В этом случае $L_1 \neq L_2$, а $dim(L_1) < dim(L_2)$. Теорема доказана.

§ 2. Операции с подпространствами

Определение 4.4. Пересечением любого (в том числе бесконечного) семейства подпространств линейного пространства V называется их теоретико-множественное пересечение, состоящее из всех общих элементов всех подпространств (обозначение $\bigcap\limits_k L_k$ или $L_1 \cap L_2$ для двух подпространств).

Замечание. Пересечение подпространств непусто, так как все подпространства содержат нулевой элемент Θ.

Теорема 4.5. Пересечение любого семейства подпространств является подпространством.

Доказательство. Достаточно показать, что любая линейная комбинация двух элементов из пересечения множеств содержится в пересечении. В самом деле, оба элемента принадлежат всем подпространствам, следовательно, данная линейная комбинация принадлежит всем подпространствам, и поэтому принадлежит пересечению подпространств.

Определение 4.6. Линейной оболочкой подмножества M векторов линейного пространства V (обозначение $L\{M\}$) называется совокупность всех конечных линейных комбинаций векторов, принадлежащих M (в линейную комбинацию могут входить одинаковые векторы). Другими словами, $x \in L\{M\} \Leftrightarrow x = \sum\limits_{k=1}^{m} \lambda_k a_k$, где $a_1, a_2, \ldots, a_m \in M$.

В частном случае, когда M представляет собой конечный набор векторов, линейная оболочка будет записываться в виде $L\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$.

Определение линейной оболочки можно записать короче: $L\{M\} = \{x : M \succ x\}$.

Еще одна формулировка линейной оболочки: $L\{M\}$ – наибольшее множество векторов, для которого $M \succ L\{M\}$.

Теорема 4.7. Линейная оболочка любого подмножества в пространстве V является линейным подпространством в V.

Доказательство. Проверим оба условия из определения линейного подпространства. Если $x = \sum\limits_{k=1}^{m} \lambda_k a_k \in L\{M\}$ и $y = \sum\limits_{i=1}^{n} \mu_i b_i \in L\{M\}$, то

$x+y=\sum_{k=1}^{m}\lambda_k a_k+\sum_{i=1}^{n}\mu_i b_i$ также является линейной комбинацией элементов из M, и по определению линейной оболочки принадлежит $L\{M\}$.

Аналогично этому произведение линейной комбинации $x=\sum_{k=1}^{m}\lambda_k a_k$ на число μ, равное $\mu x = \mu\sum_{k=1}^{m}\lambda_k a_k=\sum_{k=1}^{m}(\mu\lambda_k)a_k$, является линейной комбинацией элементов из M, и по определению линейной оболочки принадлежит $L\{M\}$.

Теорема 4.8. (Эквивалентное определение линейной оболочки). Линейная оболочка множества векторов M совпадает с наименьшим линейным подпространством $L\subseteq V$, содержащим M. Под словом «наименьшее» подразумевается, что L содержится в каждом подпространстве, содержащем M, то есть является пересечением всех таких подпространств.

Доказательство. По теореме 4.7 множество $L=\bigcap_{\alpha} L_\alpha$, где $M\subseteq L_\alpha$, является линейным подпространством пространства V. Поэтому оно содержит все линейные комбинации векторов из M, то есть $L\{M\}\subseteq L$. С другой стороны, $L\{M\}$ само является линейным подпространством, и совпадает с одним из L_α. Следовательно, $L\subseteq L\{M\}$. Из этого следует, что $L=L\{M\}$.

Теорема 4.9. Размерность $dim(L\{M\})=rank(M)$, причем за базис в пространстве $L\{M\}$ можно выбрать базу множества M.

Доказательство. Пусть набор $F=\{f_1,f_2,\ldots,f_k\}$ составляет базу в множестве M. Тогда $rank(M)=k$. Так как $F\succ M\succ L\{M\}$, то по свойству транзитивности получим $F\succ L\{M\}$. Итак, набор F линейно независим и полон в $L\{M\}$. Из этого следует, что набор F является базисом подпространства $L\{M\}$, и $dim(L\{M\})=k=rank(M)$.

По аналогии с линейной оболочкой множества векторов определяется сумма нескольких линейных подпространств.

Определение 4.10. Суммой $L=L_1+L_2+\ldots+L_m$ (другое обозначение $\sum_{k=1}^{m}L_k$) конечного числа линейных подпространств называется совокупность всех векторов вида $x=a_1+a_2+\ldots+a_m$, где $a_k\in L_k$.

Замечание. Представление вектора в виде суммы $x=a_1+a_2+\ldots+a_m$ не обязано быть единственным.

Замечание. Сумма подпространств ассоциативна и коммутативна:

$$(L_1 + L_2) + L_3 = L_1 + (L_2 + L_3) = L_1 + L_2 + L_3, \quad L_1 + L_2 = L_2 + L_1.$$

Тем не менее операция суммы подпространств не соответствует каноническому понятию операции сложения, так как не предполагает противоположного элемента и тем самым не предполагает вычитания.

Замечание. Сумма подпространств не совпадает с теоретико-множественным объединением. Например, суммой двух одномерных подпространств в R^2 (двух прямых в плоскости) является вся плоскость, которая не совпадает с объединением двух прямых. На самом деле $L_1 + L_2 = L\{L_1 \cup L_2\}$.

Теорема 4.11. Сумма подпространств $L = \sum_{k=1}^{m} L_k = L\{M\}$, где $M = \bigcup_{k=1}^{m} L_k$. Следовательно, сумма линейных подпространств как линейная оболочка некоторого множества является линейным подпространством.

Доказательство. Подпространство $L\{M\}$ согласно определению обязано содержать любую линейную комбинацию вида $\sum_{k=1}^{m} a_k$. Следовательно, $L \subseteq L\{M\}$. С другой стороны, в любой конечной линейной комбинации элементов из $M = \bigcup_{k=1}^{m} L_k$ можно объединить слагаемые, относящиеся к подпространству L_k, и получится сумма вида $a_1 + a_2 + \ldots + a_m$, где $a_k \in L_k$, откуда $L\{M\} \subseteq L$.

Следствие 4.12. Сумма конечного числа подпространств $L = L_1 + L_2 + \ldots + L_m$ – это наименьшее линейное подпространство, содержащее каждое из подпространств, составляющих сумму.

Теорема 4.13. Пусть в каждом подпространстве L_k $(1 \le k \le m)$ выбран конечный набор векторов F_k такой, что $L_k = L\{F_k\}$. Рассмотрим набор $F = \bigcup_{k=1}^{m} F_k$. Тогда сумма подпространств $L = \sum_{k=1}^{m} L_k = L\{F\}$. Базисом суммы подпространств в условиях леммы будет служить любая база набора F. Размерность суммы подпространств равна рангу набора F.

Доказательство. Поскольку $F_k \succ L_k$, то $F = \bigcup_{k=1}^{m} F_k \succ \bigcup_{k=1}^{m} L_k$. Из Теоремы 4.13 следует, что $\bigcup_{k=1}^{m} L_k \succ \sum_{k=1}^{m} L_k$. Тогда по свойству транзитивности

$F \succ \sum_{k=1}^{m} L_k = L.$ Так как F содержится в L, то $L = L\{F\}.$ Остальное следует из теоремы о линейной оболочке конечного набора векторов.

Пример 2. Найдите размерность и базис суммы и размерность и базис пересечения двух линейных подпространств, заданных своими линейными оболочками:

$$L_1 = L\left\{a_1(3,1,-1,2), a_2(-1,-2,1,-1)\right\},\ \ L_2 = L\left\{b_1(1,2,-1,3), b_2(1,-3,1,-2)\right\}.$$

Решение. Имеем $L_1 + L_2 = L\{a_1, a_2, b_1, b_2\}$. Запишем соотношение для линейной зависимости всех четырех векторов: $x_1a_1 + x_2a_2 + x_3b_1 + x_4b_2 = \Theta.$ Если записать это соотношение в координатном представлении

$$x_1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + x_4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

то оно будет являться векторной записью однородной системы линейных уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0 \\ -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}.$$

Решая ее, попутно получим, что ранг СЛАУ равен $rank\{a_1, a_2, b_1, b_2\} = 3.$ ФНР СЛАУ состоит из одного вектора, например, $f = \{f_1(2,3,-1,-2)\}.$ Это означает, что существует линейная комбинация $2a_1 + 3a_2 - b_1 - 2b_2 = \Theta.$ Следовательно, базой набора могут служить любые три вектора, например $\{a_1, a_2, b_1\}.$ Они же являются базисом в трехмерном пространстве $L_1 + L_2 = L\{a_1, a_2, b_1, b_2\}.$

Ранее мы получили, что $dim(L_1 + L_2) = rank\{a_1, a_2, b_1, b_2\} = 3.$ Вектор a_2 не пропорционален a_1, а вектор b_2 не пропорционален b_1, поэтому $dim(L_1) = dim(L_2) = 2.$ Значит, $L_1 \neq L_2$ и $dim(L_1 \cap L_2) < 2.$ Перепишем зависимость $2a_1 + 3a_2 - b_1 - 2b_2 = \Theta.$ в виде равенства $2a_1 + 3a_2 = b_1 + 2b_2 = d \in L_1 \cap L_2.$ Следовательно вектор $d = b_1 + 2b_2 = (3,-4,1,-1)$ служит базисом одномерного пространства $L_1 \cap L_2.$

§ 3. Прямая сумма подпространств

Определение 4.14. Сумма подпространств называется прямой суммой, если она удовлетворяет следующему дополнительному условию: если сумма векторов, взятых по одному из каждого подпространства, равна нуль-вектору, то все векторы равны нулю. Прямая сумма подпространств записывается с использованием специального обозначения $L = L_1 \oplus L_2 \oplus \ldots \oplus L_m$ или $\bigoplus\limits_{k=1}^{m} L_k$.

Теорема 4.15. (Критерий прямой суммы). Сумма подпространств является прямой тогда и только тогда, когда для любого вектора $x \in L$ разложение $x = \sum\limits_{k=1}^{m} a_k$, где $a_k \in L_k$, единственное.

Доказательство необходимости. Пусть сумма прямая. Неединственность для вектора x означает, что $x = \sum\limits_{k=1}^{m} a_k = \sum\limits_{k=1}^{m} b_k$, где $a_k, b_k \in L_k$, откуда вытекает $\sum\limits_{k=1}^{m} (a_k - b_k) = \Theta$, что противоречит определению прямой суммы.

Доказательство достаточности. Пусть для суммы подпространств выполняется свойство единственности, но сумма не прямая, то есть существует $\sum\limits_{k=1}^{m} b_k = \Theta$. Тогда $x = \sum\limits_{k=1}^{m} a_k = \sum\limits_{k=1}^{m} (a_k + b_k)$, что противоречит единственности.

Теорема 4.16. (Критерий прямой суммы двух подпространств). Сумма двух подпространств $L = L_1 + L_2$ является прямой суммой $L = L_1 \oplus L_2$ тогда и только тогда, когда пересечение этих подпространств состоит из нуль-вектора: $L_1 \cap L_2 = \{\Theta\}$.

Доказательство необходимости. Если $L = L_1 \oplus L_2$, и существует ненулевой вектор $a \in L_1 \cap L_2$ (то есть $a \in L_1$, $a \in L_2$ и $-a \in L_2$), то линейная комбинация $a + (-a) = \Theta$, что противоречит определению прямой суммы.

Доказательство достаточности. Пусть $L_1 \cap L_2 = \{\Theta\}$, а сумма подпространств не прямая. Следовательно, существует сумма ненулевых векторов $a_1 + a_2 = \Theta$, где $a_1 \in L_1$, $a_2 \in L_2$. Тогда ненулевой вектор $a_1 = -a_2 \in L_1 \cap L_2$, что противоречит предположению.

Теорема 4.17. Пусть $L = \sum\limits_{k=1}^{m} L_k$ – сумма подпространств, и в каждом подпространстве L_k выбран базис F_k. Возьмем объединенный набор

$F=\bigcup\limits_{k=1}^{m}F_k$. Тогда L – прямая сумма подпространств (то есть $L=\bigoplus\limits_{k=1}^{m}L_k$) тогда и только тогда, когда набор F будет базисом в подпространстве L.

Доказательство необходимости. Пусть $L=\bigoplus\limits_{k=1}^{m}L_k$. Согласно Теореме 4.13 о базисе суммы подпространств, база набора F является базисом в L. Предположим, что существует некоторая нетривиальная линейная комбинация $\sum\limits_{j}\lambda_j f_j=\Theta$ векторов из F, где каждый вектор f_j принадлежит какому-то набору F_k. Объединим в этой линейной комбинации слагаемые $\lambda_j f_j$, для которых вектор $f_j\in F_k$, и обозначим соответствующие частичные суммы через a_k. Тогда $\sum\limits_{k=1}^{m}a_k=\Theta$, где не все слагаемые нулевые. Это противоречит тому, что сумма подпространств прямая. Значит предположение о линейной зависимости набора F неверное, он линейно независим и является базисом в линейном пространстве L.

Доказательство достаточности. Пусть набор F линейно независим, но сумма подпространств L_k не прямая, то есть существует сумма векторов $\sum\limits_{k=1}^{m}a_k=\Theta$, в которой не все $a_k\in L_k$ нулевые. Заменим каждый вектор $a_k\in L_k$ на его разложение по базису F_k подпространства L_k. В итоге получим равную нулю линейную комбинацию $\sum\limits_{j}\lambda_j f_j=\Theta$, в которой не все $\lambda_j=0$. Значит, набор F линейно зависим, что противоречит предположению.

Следствие 4.18. Сумма подпространств $L=\sum\limits_{k=1}^{m}L_k$ является прямой тогда и только тогда, когда выполняется условие $dim(L)=\sum\limits_{k=1}^{m}dim(L_k)$. То же условие можно сформулировать в терминах рангов наборов: $rank(F)=\sum\limits_{k=1}^{m}N(F_k)=N(F)$.

Доказательство. Условие $rank(F)=N(F)$ эквивалентно линейной независимости набора F. В свою очередь линейная независимость F согласно Теореме 4.17 эквивалентна тому, что сумма подпространств L_k является прямой.

Замечание. Прямая сумма асоциативна и коммутативна:

$$(L_1\oplus L_2)\oplus L_3=L_1\oplus(L_2\oplus L_3)=L_1\oplus L_2\oplus L_3,\quad L_1\oplus L_2=L_2\oplus L_1.$$

Лемма 4.19. Предположим, что линейные подпространства L_1 и L_2 таковы, что $L_2 \subset L_1$. Тогда существует подпространство L_3 такое, что $L_1 = L_2 \oplus L_3$. Подпространство L_3 мы будем называть дополнением L_2 в L_1 до прямой суммы.

Доказательство. Пусть f – базис в L_2. Тогда этот базис можно пополнить набором g до базиса в L_1. Если положить $L_3 = L\{g\}$, то получим $dim(L_1) = dim(L_2) + dim(L_3)$, откуда $L_1 = L_2 \oplus L_3$.

§ 4. Формула Грассмана

Этот параграф целиком посвящен доказательству формулы Грассмана.

Теорема 4.20. (Формула Грассмана). Для любых двух линейных подпространств L_1 и L_2 линейного пространства V верно соотношение

$$dim(L_1) + dim(L_2) = dim(L_1 \cap L_2) + dim(L_1 + L_2).$$

Доказательство. Доказательство формулы Грассмана представим в виде последовательности шагов. Наиболее существенная часть доказательства выделена отдельной леммой.

Шаг 1. Пусть $L_0 = L_1 \cap L_2$. Выберем в L_0 базис $H = \{h_1, h_2, \ldots, h_k\}$. Имеем $dim(L_0) = k$.

Шаг 2. Линейно независимый набор H согласно Лемме 4.19 можно дополнить до некоторого базиса $H \cup F = \{h_1, h_2, \ldots, h_k, f_1, f_2, \ldots, f_m\}$ в подпространстве L_1. Тогда получим $dim(L_1) = k + m$.

Шаг 3. Аналогично этому дополним набор H до базиса $H \cup G = \{h_1, \ldots, h_k, g_1, \ldots, g_p\}$ в подпространстве L_2. Тогда $dim(L_2) = k + p$.

Лемма 4.21 (Шаг 4). Набор $K = H \cup F \cup G$ линейно независим и поэтому является базисом в $L_1 + L_2$.

Доказательство. То, что $L_1 + L_2 = L\{K\}$, следует из Теоремы 4.13. Предположим, что набор K линейно зависим, то есть существует некоторая линейная комбинация $\sum_{j=1}^{k} \lambda_j h_j + \sum_{i=1}^{m} \mu_i f_i + \sum_{q=1}^{p} \gamma_q g_q = \Theta$. Рассмотрим вектор $a = -\sum_{i=1}^{m} \mu_i f_i = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j h_j + \sum_{q=1}^{p} \gamma_q g_q$. Мы видим, что $a \in L_1$ и $a \in L_2$, то есть $a \in L_1 \cap L_2 = L_0$. Поскольку H – базис в L_0, то $a = -\sum_{j=1}^{k} \delta_j h_j$. Но разложение по базису в пространстве L_2 должно быть единственным.

Сравнивая разложения $a = -\sum_{j=1}^{k} \delta_j h_j + \sum_{q=1}^{p} 0 \cdot g_q$ и $a = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j h_j + \sum_{q=1}^{p} \gamma_q g_q$, получаем, что $\gamma_q = 0$ для всех q.

Равная нуль-вектору линейная комбинация привелась к виду $\sum_{j=1}^{k} \lambda_j h_j + \sum_{i=1}^{m} \mu_i f_i = \Theta.$ Но это линейная комбинация базисных векторов пространства L_1. Значит, все $\lambda_j = 0$ и $\mu_i = 0.$ Это означает, что исходная линейная комбинация тривиальная. Следовательно, набор $K = H \cup F \cup G$ линейно независим и $dim(L_1 + L_2) = k + m + p.$ Лемма 4.21 доказана.

Шаг 5. В итоге мы получили:

(1) $dim(L_1 + L_2) = k + m + p;$

(2) $dim(L_1 \cap L_2) = k;$

(3) $dim(L_1) + dim(L_2) = (k + m) + (k + p).$

Из этого следует Формула Грассмана:

$dim(L_1 \cap L_2) + dim(L_1 + L_2) = k + (k + m + p) = dim(L_1) + dim(L_2).$

§ 5. Связь между подпространствами в R^n и однородными СЛАУ

Теперь мы используем установленные факты для того, чтобы упорядочить наши сведения о решениях однородных СЛАУ. Мы знаем, что решения однородной СЛАУ можно складывать и умножать на число.

Теорема 4.22. Множество решений однородной СЛАУ с n неизвестными является линейным подпространством линейного пространства R^n.

Доказательство. Для доказательства теоремы по определению подпространства требуется показать, что сумма двух решений и решение, умноженное на число, снова являются решением однородной СЛАУ. Это следует из очевидных тождеств:

(1) если $\sum_{k=1}^{n} a_{jk} x_k = \Theta$ и $\sum_{k=1}^{n} a_{jk} y_k = \Theta$ для всех j,

то $\sum_{k=1}^{n} a_{jk}(x_k + y_k) = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} x_k + \sum_{k=1}^{n} a_{jk} y_k = \Theta$ для всех j;

(2) если $\sum_{k=1}^{n} a_{jk} x_k = \Theta$ для всех j, то $\sum_{k=1}^{n} a_{jk}(\lambda x_k) = \lambda \cdot \sum_{k=1}^{n} a_{jk} x_k = \Theta$ для всех j.

Замечание. То же самое проще записать, используя матричную форму СЛАУ: если для двух вектор-столбцов $AX = \Theta$ и $AY = \Theta$, то для линейной комбинации $Z = \lambda X + \mu Y$ имеем

$$AZ = A(\lambda X + \mu Y) = \lambda \cdot AX + \mu \cdot AY = \lambda \cdot \Theta + \mu \cdot \Theta = \Theta.$$

Замечание. Утверждение неверно для неоднородного линейного уравнения. Например, для уравнения $x_1 + x_2 = 2$ вектор (1, 1), который является решением этого уравнения, при умножении на два перестает быть решением (он будет решением уравнения $x_1 + x_2 = 4$, в котором свободный член тоже умножается на два).

На тот факт, что множество решений однородной СЛАУ является подпространством, можно взглянуть с другой стороны. Напомним, что линейным оператором называется отображение одного линейного пространства в другое, удовлетворяющее условию линейности: $A(\lambda x + \mu y) = \lambda \cdot Ax + \mu \cdot Ay$. В частности, любой матрице *A* порядка $m \times n$ соответствует линейный оператор $\varphi\colon R^n \to R^m$, действующий по формуле $Y = \varphi(X) = AX$. В этом случае множество решений однородной системы $AX = \Theta$ является ядром $Ker(\varphi)$ оператора φ.

Теорема 4.23. Ядро линейного оператора $A\colon V_1 \to V_2$ является линейным подпространством линейного пространства V_1.

Доказательство. Если $Ax_1 = \Theta$, $Ax_2 = \Theta$, то $A(\lambda x_1 + \mu x_2) = \lambda(Ax_1) + \mu(Ax_2) = \Theta$.

Следовательно, множество решений системы $AX = \Theta$ является линейным подпространством пространства R^n (на самом деле это то же самое доказательство, что и в Теореме 4.22).

Теорема 4.24. Образ *Im*(*A*) линейного оператора $A\colon L_1 \to L_2$ является линейным подпространством линейного пространства L_2.

Доказательство. Если $y_1 = Ax_1 \in Im(A)$, $y_2 = Ax_2 \in Im(A)$, то

$$\lambda y_1 + \mu y_2 = \lambda \cdot Ax_1 + \mu \cdot Ax_2 = A(\lambda x_1 + \mu x_2) \in Im(A).$$

Из этого и из векторной записи СЛАУ следует, что множество столбцов *B*, для которых система $AX = B$ совместна, составляет линейное подпространство линейного пространства R^m.

Определение 4.25.Фундаментальным набором решений однородной СЛАУ (сокращенно ФНР) называется любой базис в подпространстве решений этой СЛАУ.

Замечание. Тот ФНР, который мы строили в Главе 1, посвященной системам линейных уравнений, данному определению удовлетворяет.

Назовем рангом однородной СЛАУ ранг набора координатных векторов, составленного из строк матрицы коэффициентов этой СЛАУ.

Лемма 4.26. При преобразованиях Гаусса ранг однородной СЛАУ не меняется.

Доказательство. При преобразованиях Гаусса строки матрицы преобразованной СЛАУ выражаются через строки матрицы исходной СЛАУ. Значит, ранг матрицы СЛАУ не увеличивается. Но он и не уменьшается, так как для каждого преобразования Гаусса есть обратное.

Теорема 4.27. Пусть число переменных однородной СЛАУ равно n, а ранг СЛАУ равен r $(r \le n)$. Тогда система имеет нетривиальное решение, только если $r < n$. Для подпространства L решений однородной СЛАУ $dim(L) = k = n - r$.

Доказательство. (1) Будем считать, что система приведена к каноническому виду, в котором каждое уравнение соответствует базисной переменной. Ее ранг совпадает с рангом исходной СЛАУ. Строки матрицы коэффициентов канонической системы линейно независимы (доказательство этого факта аналогично доказательству линейной независимости стандартного базиса в R^n). Поэтому ранг r матрицы коэффициентов совпадает с числом уравнений, которое, в свою очередь, равно количеству базисных переменных.

(2) Если $r = n$, то свободные переменные отсутствуют, и система имеет только тривиальное нулевое решение. При этом ФНР пуст.

(3) При $r < n$ система содержит $k = n - r$ свободных переменных. Будем рассматривать координатное пространство R^k всех наборов z длины k, состоящих из значений свободных переменных. Для дальнейшего нам потребуется лемма.

Лемма 4.28. Пространство R^k наборов значений свободных переменных изоморфно подпространству $L \subseteq R^n$ решений однородной СЛАУ (то есть существует взаимно-однозначное соответствие между R^k и L, сохраняющее линейные комбинации векторов).

Доказательство. Будем изображать набор $x \in R^n$ в виде объединения двух наборов $x = (z, y)$, где набор $z \in R^k$ содержит координаты, соответствующие свободным переменным, а набор $y \in R^r$ содержит координаты, соответствующие базисным переменным $(k + r = n)$. Пусть набор $x = (z, y)$ является решением однородной СЛАУ. Согласно записи общего решения однородной СЛАУ базисные переменные записываются в виде линейных комбинаций свободных переменных:

$$\begin{cases} y_1 = d_{11}z_1 + d_{12}z_2 + \ldots + d_{1k}z_k \\ y_2 = d_{21}z_1 + d_{22}z_2 + \ldots + d_{2k}z_k \\ \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ y_r = d_{r1}z_1 + d_{r2}z_2 + \ldots + d_{rk}z_k \end{cases}.$$

Указанную зависимость базисных переменных от свободных можно представить в матричном виде: $y = Dz$, где D – числовая матрица размером $r \times k$. Сопоставим каждому вектору $z \in R^k$ решение СЛАУ $x = \varphi(z) = (z, Dz)$. Тогда:

(1) Отображение φ: $R^k \to R^n$ сохраняет сумму векторов:

$$\varphi(z_1 + z_2) = (z_1 + z_2, D(z_1 + z_2)) = (z_1 + z_2, Dz_1 + Dz_2) =$$

$$= (z_1, D(z_1)) + (z_2, D(z_2)) = \varphi(z_1) + \varphi(z_2).$$

(2) Отображение φ: $R^k \to R^n$ сохраняет произведение вектора на число:

$$\varphi(\lambda z) = (\lambda z, D(\lambda z)) = (\lambda z, \lambda Dz)) = \lambda(z, Dz) = \lambda\varphi(z).$$

(3) Разным векторам $z_1 \neq z_2$ соответствуют разные значения $\varphi(z_1) \neq \varphi(z_2)$: если $z_1 \neq z_2$, то тем более $(z_1, D(z_1)) \neq (z_2, D(z_2))$.

(4) Пусть $x = (z, y)$ – решение СЛАУ. Тогда, так как базисные переменные однозначно вычисляются по свободным переменным, $y = Dz$. Следовательно, для каждого решения $x = (z, y)$ однородной СЛАУ существует вектор $z \in R^k$ такой, что $x = (z, Dz) = \varphi(z)$.

Таким образом, соответствие φ взаимно-однозначное и является изоморфизмом линейных пространств. Лемма доказана.

Из леммы следует формула $dim(L) = dim(R^k) = k = n - r$. ФНР – базис в пространстве решений СЛАУ можно получить, если выбрать базис $F = \{f_1, f_2, \ldots, f_k\}$ в R^k и сопоставить каждому $f_m \in R^k$ вектор $x_m = \varphi(f_m) \in L$.

Проще всего выбирать в R^k стандартный базис $\{e_1, e_2, \ldots, e_k\}$. Тогда получается тот вариант ФНР, который строился в Главе 1.

Теорема 4.27 о размерности подпространства решений однородной СЛАУ доказана.

Теперь мы можем доказать теорему, обратную к теореме 4.22, в которой утверждалось, что множество решений однородной СЛАУ с n неизвестными является подпространством координатного пространства R^n.

Теорема 4.29. Для любого подпространства L координатного пространства R^n существует однородная СЛАУ, для которой L будет множеством решений.

Доказательство. Пусть в k-мерном подпространстве L координатного пространства R^n выбран базис $a=\{a_1,a_2,\ldots,a_k\}$. Будем записывать в виде $a_i=(a_{i1},a_{i2},\ldots,a_{in})$ координатное представление вектора a_i. Составим из элементов a_{ij} матрицу A размером $k\times n$, и рассмотрим однородную СЛАУ $AY=\Theta$. Для этой СЛАУ выберем какой-нибудь фундаментальный набор $b=\{b_1,b_2,\ldots,b_r\}$ решений этой СЛАУ, где согласно Теореме 4.27 $r=n-k$. С набором b поступим так же, как с набором a: из координатных представлений векторов $b_j=(b_{j1},b_{j2},\ldots,b_{jn})$ составим матрицу B размером $r\times n$. Обозначим через L' подпространство решений однородной СЛАУ $BX=\Theta$.

Тот факт, что для каждого j от 1 до r вектор b_j является решением уравнений $\sum_{p=1}^{n}a_{ip}y_p=0$, где $1\le i\le k$, означает, что всех i и j выполняется тождество $\sum_{p=1}^{n}a_{ip}b_{jp}=0$. Но это же тождество означает, что для каждого i от 1 до k вектор a_i является решением уравнения $\sum_{p=1}^{n}b_{jp}x_p=0$, где $1\le j\le r$. Следовательно, все векторы a_i являются решениями СЛАУ $BX=\Theta$, то есть подпространство $L\subseteq L'$.

Докажем, что $L=L'$. Ранг СЛАУ $AY=\Theta$ совпадает с рангом набора a и равен $dim(L)=k$. Ранг СЛАУ $BX=\Theta$ равен r, откуда по Теореме 4.27 размерность $dim(L')=n-r=k=dim(L)$. Сопоставив это с условием $L\subseteq L'$, получим, что $L=L'$. Теорема 4.29 доказана.

Доказательство теоремы содержит алгоритм, с помощью которого в координатном пространстве по каждому подпространству можно построить однородную СЛАУ, для которой данное подпространство составляет множество решений. Для этого надо:

(1) Выбрать базис $\{a_1,a_2,\ldots,a_k\}$ исходного подпространства L.

(2) Используя координаты базиса в качестве строк матрицы коэффициентов A, составить вспомогательную однородную СЛАУ $AY=\Theta$.

(3) Решив СЛАУ $AY=\Theta$, найти ее ФНР $\{b_1,b_2,\ldots,b_r\}$.

(4) Используя координаты векторов b_j в качестве строк матрицы коэффициентов B, составить искомую однородную СЛАУ $BX=\Theta$.

Пример 3. Составить СЛАУ, для которой линейное подпространство $L = L\{a_1(1,-2,-1,3), a_2(2,1,3,1)\}$ будет множеством решений.

Решение. Составим вспомогательную СЛАУ из двух уравнений, коэффициентами которой служат координаты векторов a_1 и a_2:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - \ x_3 + \ 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + \ \ x_2 + 3x_3 + \ \ x_4 = 0 \end{cases}.$$

Решив ее, найдем ФНР (один из вариантов): $b_1 = (1,1,-1,0), b_2(-2,0,1,1)$. Используя координаты этих векторов в качестве коэффициентов, составим искомую СЛАУ:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ -2x_1 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}.$$

Решениями этой СЛАУ являются базисные векторы a_1 и a_2 линейного подпространства L. Это легко проверить, подставив координаты векторов в оба уравнения.

Существует другой способ составления искомой однородной СЛАУ для линейного подпространства.

Теорема 4.30. Пусть задано линейное подпространство $L \subseteq R^n$, в котором выбран базис $a = \{a_1, a_2, ..., a_k\}$. Рассмотрим неоднородную СЛАУ $A\Lambda = X$ с переменными $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$, где в матрице A столбцы составлены из координат векторов a_j, а столбец свободных членов составлен из координат x_i произвольного вектора X. Будем решать эту систему с помощью схемы Гаусса-Жордана, не вычеркивая получающиеся в процессе решения уравнения с нулевой левой частью. В итоге мы придем к конечной СЛАУ, состоящей из канонической системы, к которой добавлены уравнения с нулевой левой частью.

СЛАУ $BX = \Theta$, решением которой является подпространство L, получится, если мы приравняем к нулю все линейные комбинации координат x_i в правой части тех уравнений, в которых левая часть нулевая. Ранг этой системы будет равен $r = n - k$.

Доказательство. Запишем формальную векторную запись того, что некоторый вектор $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ принадлежит линейной оболочке $L\{a_1, a_2, ..., a_k\}$: $x = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j a_j$. Затем преобразуем векторную запись в СЛАУ $A \cdot \Lambda = X$ с переменными $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$.

Согласно общей теории решения СЛАУ методом Гаусса-Жордана, в канонической системе количество оставшихся уравнений с ненулевой левой частью равно рангу СЛАУ, то есть числу k. Если оставить только уравнения с ненулевой левой частью, то каноническая СЛАУ будет совместна при любых значениях параметров $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Из этого следует, что необходимым и достаточным условием того, что совместна исходная СЛАУ, является тот факт, что во всех уравнениях с нулевой левой частью правые части также равны нулю.

Количество уравнений с нулевой левой частью равно $r = n - k$. Соответственно, тому же равно количество комбинаций координат вектора X в правой части, которые мы должны приравнять к нулю. Сопоставляя ранг СЛАУ $BX = \Theta$ и размерность подпространства ее решений, получим, что ранг СЛАУ равен r.

Теорема 4.30 доказана.

Опишем алгоритм действий, подкрепленный Теоремой 4.30.

(1) Составить схему Гаусса-Жордана с матрицей коэффициентов A размером $n \times m$, в которой векторы a_j записаны в виде столбцов, и столбцом свободных членов X, состоящим из параметров, совпадающих с обозначениями координат x_i.

(2) Привести схему к каноническому виду, не вычеркивая строки с нулями слева от черты. В столбце свободных членов при этом будут содержаться линейные комбинации координат x_i.

(3) В канонической схеме Гаусса-Жордана в матрице коэффициентов согласно теории будет $k = dim(L)$ линейно независимых строк, и к ней будет добавлено $n - k = r$ нулевых строк.

(4) Составить СЛАУ $BX = \Theta$ из тех линейных комбинаций переменных в столбце свободных членов, которым соответствуют нулевые строки слева от черты.

Пример 4. Задачу Примера 3 решим описанным выше способом.

Решение. Запишем формальную векторную запись того, что вектор $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ принадлежит линейной оболочке векторов a_1 и a_2. Затем преобразуем векторную запись в СЛАУ для неизвестных λ_1 и λ_2, рассматривая свободные члены как параметры.

$$\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \Leftarrow \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 = x_1 \\ -2\lambda_1 + \lambda_2 = x_2 \\ -\lambda_1 + 3\lambda_2 = x_3 \\ 3\lambda_1 + \lambda_2 = x_4 \end{cases}.$$

Используем для преобразования СЛАУ обычную схему Гаусса-Жордана.

$$\left(\begin{array}{cc|c} \boxed{1} & 2 & x_1 \\ -2 & 1 & x_2 \\ -1 & 3 & x_3 \\ 3 & 1 & x_4 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x_1 \\ 0 & 5 & 2x_1+x_2 \\ 0 & \boxed{5} & x_1+x_3 \\ 0 & -5 & -3x_1+x_4 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x_1 \\ 0 & 0 & x_1+x_2-x_3 \\ 0 & 5 & x_1+x_3 \\ 0 & 0 & -2x_1+x_3+x_4 \end{array}\right).$$

Необходимым и достаточным условием того, что вектор $x \in L\{a_1, a_2\}$, является совместность СЛАУ. В свою очередь, конечная СЛАУ совместна тогда и только тогда, когда координаты вектора x удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 \quad = 0 \\ -2x_1 \quad + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}.$$

Это та же система, что была получена в Примере 3 (это не обязательно; могла получиться другая СЛАУ, эквивалентная данной).

Замечание. Пересечение подпространств, заданных двумя СЛАУ, является подпространством решений объединенной однородной СЛАУ. Следовательно, если мы хотим получить СЛАУ, решением которой будет пересечение двух подпространств, заданных линейной оболочкой, надо сначала построить СЛАУ для каждого подпространства в отдельности.

ГЛАВА 5

МАТРИЧНАЯ АЛГЕБРА

§ 1. Матрицы и операции с матрицами

Понятие матрицы мы ввели как вспомогательное средство при записи и решении систем линейных алгебраических уравнений. Однако матричная алгебра представляет собой самостоятельный раздел линейной алгебры с разнообразными приложениями. В данной главе мы систематизируем необходимый материал о матрицах.

Еще раз сформулируем, что такое матрица.

Определение 5.1. Матрицей A размером $m \times n$ называется отображение, которое каждой комбинации из номера строки j, где $1 \leqslant j \leqslant m$, и номера столбца k, где $1 \le k \le n$, ставит в соответствие число a_{jk}. Число a_{jk} называется элементом матрицы.

Набор элементов $a_{j1}, a_{j2}, \ldots, a_{jn}$ при фиксированном j называется j-й строкой матрицы. Мы будем обозначать его символом A_j. Набор элементов $a_{1k}, a_{2k}, \ldots, a_{mk}$ при фиксированном k называется k-м столбцом матрицы и обозначается символом A^k.

Обычно матрица записывается в форме таблицы из m строк и n столбцов, которая окаймляется круглыми скобками. Иногда матрица обозначается общим элементом, окаймленным двойными черточками, например $\| a_{jk} \|$.

Матрицу, состоящую из одной строки, будем называть вектор-строкой длины n. Матрицу, состоящую из одного столбца, будем называть вектор-столбцом высоты m. Индексы, обозначающие номер строки в вектор-строке и номер столбца в вектор-столбце, обычно опускаются.

Матрицы A и B считаются равными, если они имеют одинаковые размеры, и все их соответствующие матричные элементы (с одинаковыми номерами строк и столбцов) попарно равны.

Определение 5.2. В множестве всех матриц порядка $m \times n$ (обозначение $M[m, n]$) определены операции суммы и умножения на число:

(1) элементы матрицы $C = A + B$ вычисляются по формулам $c_{jk} = a_{jk} + b_{jk}$;

(2) элементы матрицы $D = \lambda \cdot A$ вычисляются по формулам $d_{jk} = \lambda \cdot a_{jk}$.

Теорема 5.3. Множество матриц $M[m, n]$ с введенными операциями сложения и умножения на число является линейным пространством. Нулем в пространстве $M[m, n]$ является матрица, все элементы которой равны нулю. Каноническим базисом пространства $M[m, n]$ является набор матриц e_{jk}, у которых элемент на пересечении j-й строки и k-го столбца равен единице, а остальные элементы равны нулю. Размерность $dim(\mathrm{M[m,n]}) = mn$. Пространство $M[m, n]$ изоморфно координатному пространству R^k, где $k = mn$.

Доказательство теоремы аналогично доказательству соответствующей теоремы для координатных пространств и оставляется в качестве упражнения.

Надо отметить, что нулевые матрицы разного порядка отождествлять нельзя (как нельзя отождествлять нуль-векторы в разных координатных пространствах).

Замечание. Можно считать матрицу числовой функцией $a(j, k)$ двух целочисленных аргументов, ограниченных условиями $1 \le j \le m$, $1 \le k \le n.$ Тогда линейные комбинации матриц – это обычные линейные комбинации функций. Легко показать, что линейное пространство числовых функций, определенных на конечном множестве, содержащем k элементов, имеет размерность k.

Определение 5.4. Введем некоторые термины, которые будут часто использоваться в дальнейшем.

(1) Квадратная матрица. Матрица, у которой число строк совпадает с числом столбцов. Для квадратной матрицы ее порядком считается их общая величина.

(2) Главная диагональ. Совокупность матричных элементов a_{kk} квадратной матрицы, у которых номер строки совпадает с номером столбца. Элементы главной диагонали называются диагональными. Главная диагональ проходит из левого верхнего угла матрицы в ее правый нижний угол.

(3) Побочная диагональ. Совокупность матричных элементов $a_{k,n+1-k}$ квадратной матрицы, расположенных на диагонали, проходящей из правого верхнего угла в левый нижний угол.

(4) Диагональная матрица. Квадратная матрица, в которой все элементы, не лежащие на главной диагонали, равны нулю. Элементы диагональной матрицы удовлетворяют условиям $a_{jk} = \delta_j^k \lambda_k$, где δ_j^k – символ Кронекера.

(5) Единичная матрица. Диагональная матрица, все диагональные элементы которой равны единице (обозначение E_n или просто E).

(6) Скалярная матрица. Диагональная матрица, все диагональные элементы которой равны. Скалярная матрица пропорциональна единичной.

Важнейшую роль в приложениях играет матричное умножение.

Определение 5.5. Пусть даны матрицы $A = \| a_{jk} \|$ порядка $m \times n$ и $B = \| b_{ks} \|$ порядка $n \times p$. Произведением матриц A и B (обозначение $C = A \cdot B$) называется матрица $C = \| c_{js} \|$ порядка $m \times p$, элементы которой вычисляются по формулам $c_{js} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} b_{ks}$ для всех $1 \le j \le m$, $1 \le s \le p$.

Следует обратить особое внимание на то, что число столбцов матрицы A должно совпадать с числом строк матрицы B, в противном случае умножение матриц не определено. Смысл формулы умножения заключается в том, что слагаемые в сумме образуются последовательным умножением элементов j-й строки матрицы A на элементы k-го столбца матрицы B. Элементов в строке левой матрицы и столбце правой матрицы должно быть одинаковое количество (по n).

Теорема 5.6. Для матричного умножения выполняются следующие свойства:

(1) $(AB)C = A(BC)$ (ассоциативность матричного умножения);

(2) $A(B+C) = AB + AC$ (дистрибутивность матричного умножения слева);

(3) $(A+B)C = AC + BC$ (дистрибутивность матричного умножения справа);

(4) $\lambda \cdot (A \cdot B) = \lambda A \cdot B = A \cdot \lambda B$ (ассоциативность и перестановочность умножения на число для произведения матриц).

Доказательство ассоциативности. Пусть имеются три матрицы: A порядка $m \times n$, B порядка $n \times p$, и C порядка $p \times q$. Положим $F = (AB)C$, $G = A(BC)$. Тогда, меняя порядок суммирования в двойной сумме, получим

$$f_{il} = \sum_{k=1}^{p} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} \right) c_{kl} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{p} a_{ij} b_{jk} c_{kl} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \left(\sum_{k=1}^{p} b_{jk} c_{kl} \right) = g_{il}.$$

Доказательство дистрибутивности. Дистрибутивность при умножении слева следует из тождества

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \left(b_{jk} + c_{jk} \right) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}.$$

Аналогично дистрибутивность при умножении справа.

Доказательство ассоциативности умножения на число. Следует из тождества
$$\lambda\cdot\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{jk}=\sum_{j=1}^{n}\left(\lambda a_{ij}\right)b_{jk}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\left(\lambda b_{jk}\right).$$

Ассоциативность матричного умножения позволяет записывать произведение нескольких матриц, например ABC, без расстановки скобок. В частности, стандартная запись A^k означает произведение k одинаковых квадратных матриц. Свойство дистрибутивности позволяет раскрывать скобки в матричных выражениях.

Определение 5.7. Пусть дана матрица A порядка $m\times n$. Матрица A^T порядка $n\times m$ называется **транспонированной** к матрице A, если ее элементы заданы формулой $a_{jk}^T=a_{kj}$ для всех j и k. Это означает, что k-я строка матрицы A^T тождественна k-му столбцу матрицы A, а j-й столбец матрицы A^T тождественен j-й строке матрицы A.

Лемма 5.8. Если $B=A^T$, то $A=B^T$ (это свойство называется двойственностью операции транспонирования).

Доказательство. Следует из определения.

Теорема 5.9. Если $C=AB$, то $C^T=B^TA^T$.

Доказательство. Следует из тождества $c_{ik}^T=c_{ki}=\sum_{j=1}^{n}a_{kj}b_{ji}=\sum_{j=1}^{n}b_{ij}^Ta_{jk}^T$.

Операция матричного умножения позволяет кратко записать СЛАУ в матричной форме. Для этого необходимо набор неизвестных X считать вектор-столбцом высоты n (хотя в тексте для экономии места мы будем избегать записи решения в виде вектор-столбца, используя запись в виде вектор-строки $X^T=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$. Аналогично, вектор-столбец свободных членов высоты m в тексте будем записывать как набор $B^T=(b_1,b_2,\ldots,b_m)$. Коэффициенты СЛАУ естественным образом составляют матрицу коэффициентов СЛАУ $A=\|a_{jk}\|$ порядка $m\times n$. Расширенной матрицей коэффициентов называется матрица $\widetilde{A}$, полученная присоединением к матрице A справа столбца B.

Теорема 5.10. Систему линейных уравнений можно записать в виде $A\cdot X=B$, где A – матрица коэффициентов СЛАУ порядка $m\times n$, X – вектор-столбец неизвестных величин высоты n, B – вектор-столбец свободных членов высоты m:
$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+\ldots+a_{1n}x_n&=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3+\ldots+a_{2n}x_n&=b_2\\\ldots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+a_{m3}x_3+\ldots+a_{mn}x_n&=b_m\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Доказательство. Для того, чтобы убедиться в этом, достаточно выписать формулу умножения матриц (в данном случае $\sum_{k=1}^{n} a_{jk} x_{k1} = b_{j1}$) и заметить, что она совпадает с записью j-го уравнения системы $\sum_{k=1}^{n} a_{jk} x_k = b_j$ (при отбрасывании индекса 1 для единственного столбца матриц X и B).

Назовем матричным уравнением запись $AX = B$ с известными матрицами A и B и неизвестной матрицей X.

Теорема 5.11. Задача решения уравнения $AX = B$, где X и B – вектор-столбцы, эквивалентна задаче нахождения разложения вектор-столбца B по столбцам A^k матрицы A: $B = \sum_{k=1}^{n} x_k A^k$, где коэффициенты разложения x_k – элементы вектор-столбца X.

Доказательство. Надо сопоставить матричную и векторную записи СЛАУ:

$$AX = B \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_1 \cdot \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \ldots + x_n \cdot \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

§ 2. Свойства матриц

Пусть задана матрица A порядка $m \times n$. Тогда j-я строка матрицы $A_j \in R^n$, а k-й столбец матрицы $A^k \in R^m$. Следующая лемма утверждает, что строки и столбцы произведения матриц могут быть вычислены независимо друг от друга.

Лемма 5.12. Пусть $AB = C$. Тогда $AB^q = C^q$ для всех $q = 1, 2, \dots, p$ (число столбцов p в матрицах B и C одинаковое). Аналогично $A_j B = C_j$ для всех $j = 1, 2, \dots, m$ (число строк m в матрицах A и C также одинаковое).

Доказательство. Для доказательства достаточно заметить, что при вычислении элементов q-го столбца матрицы C используются только элементы q-го столбца матрицы B: $\sum_{k=1}^{n} a_{jk} b_{kq} = c_{jq}$. Если игнорировать индекс q в элементах b_{kq} и c_{jq}, то в точности получается формула умножения матрицы A на вектор-столбец B^q. Если в формуле $\sum_{k=1}^{n} a_{jk} b_{kq} = c_{jq}$ зафиксировать номер строки j, то мы получим аналогичное утверждение для строк.

Следующая лемма связывает линейные комбинации строк или столбцов произведения двух матриц с линейными комбинациями строк или столбцов одного из сомножителей.

Лемма 5.13. Если для столбцов матрицы B есть линейная зависимость $\sum_{q=1}^{p} \lambda_q B^q = \Theta$, то для столбцов матрицы $C = AB$ имеется линейная зависимость с теми же коэффициентами: $\sum_{q=1}^{p} \lambda_q C^q = \Theta$. Аналогично, если для строк матрицы A есть линейная зависимость $\sum_{j=1}^{m} \lambda_j A_j = \Theta$, то для строк матрицы C имеется линейная зависимость $\sum_{j=1}^{m} \lambda_j C_j = \Theta$.

Доказательство. Согласно Лемме 5.12 о независимости вычисления столбцов для произведения матриц $C^q = AB^q$ для всех $q = 1, 2, \dots, p$. Тогда из $\sum_{q=1}^{p} \lambda_q B^q = \Theta$ следует

$$\sum_{q=1}^{p} \lambda_q C^q = A \cdot \left(\sum_{q=1}^{p} \lambda_q B^q \right) = A \cdot \Theta = \Theta.$$

Аналогично для строк $C_j = A_j B$ для всех $j = 1, 2, \dots, m$, и из $\sum_{j=1}^{m} \lambda_j A_j = \Theta$ следует $\sum_{j=1}^{m} \lambda_j C_j = \left(\sum_{j=1}^{m} \lambda_j A_j \right) \cdot B = \Theta$.

Умножение на единичную, скалярную и диагональную матрицу имеет свои особенности.

Лемма 5.14. При умножении матрицы A размером $m \times n$ справа на диагональную матрицу порядка n с элементами λ_q на диагонали q-й столбец матрицы A умножается на число λ_q. При умножении на диагональную матрицу порядка m слева с элементами λ_i на диагонали на число λ_i умножается i-я строка. В частности, при умножении слева или справа на единичную матрицу соответствующего порядка исходная матрица не меняется.

Доказательство. В диагональной матрице $b_{jk} = \delta_j^k \lambda_j = \delta_j^k \lambda_k$. При умножении на диагональную матрицу справа для фиксированного номера столбца q имеем

$$c_{iq} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kq} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \left(\delta_k^q \lambda_q \right) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_q \left(\delta_k^q a_{ik} \right) = \lambda_q a_{iq}.$$

При умножении слева для фиксированного номера строки i имеем

$$c_{iq} = \sum_{j=1}^{m} b_{ij} a_{jq} = \sum_{j=1}^{m} \left(\delta_i^j \lambda_i \right) a_{jq} = \lambda_i a_{iq}.$$

Важной особенностью матричного умножения яляется его некоммутативность: результат умножения зависит от порядка сомножителей. Например, произведение вектор-столбца высоты m на вектор-строку длины n дает матрицу размера $m \times n$. В то же время произведение вектор-строки длины n на вектор-столбец высоты m возможно, только если $m = n$, и результатом этого произведения будет матрица размера 1×1. Однако в частных случаях равенство $AB = BA$ возможно. В этом случае говорят, что матрицы A и B коммутируют.

Если матрицы A и B являются квадратными матрицами, то их произведения AB и BA всегда определены и являются матрицами такого же размера. Однако и для квадратных матриц произведение в разном порядке могут отличаться, как показывает пример

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Замечание. В множестве чисел отсутствуют делители нуля (ненулевые числа, в произведении дающие нуль). Но для матричного умножения это неверно, то есть существуют ненулевые матрицы, в произведении дающие нуль. Один пример указан выше. Вот другой пример:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Следующая лемма позволяет указать разложения строк и столбцов произведения матриц по строкам и столбцам сомножителей. Она обобщает связь между матричной и векторной записью СЛАУ.

Лемма 5.15. Если $C = AB$, то $C^q = \sum_{k=1}^{n} b_{kq} A^k$ для всех q, $C_j = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} B_k$ для всех j.

Словесная формулировка: q-й столбец матрицы C является линейной комбинацией столбцов матрицы A, коэффициентами которой служат элементы q-го столбца матрицы B. Аналогично j-я строка матрицы C является линейной комбинацией строк матрицы B, коэффициентами которой служат элементы j-й строки матрицы A.

Доказательство. Надо сравнить Теорему 1.14 Главы 1 о векторной записи матричного уравнения с формулой $AB^q = C^q$. В результате получим искомое равенство $C^q = \sum_{k=1}^{n} b_{kq} A^k$, где A^k – столбцы матрицы A, а коэффициенты b_{kq} – элементы q-го столбца матрицы B.

Аналогично доказывается утверждение для строк. Формулу матричного умножения $c_{jq} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} b_{kq}$, если зафиксировать номер строки j, можно интерпретировать как соотношение для координаты c_{jq} с номером q в разложении вектор-строки C_j по вектор-строкам B_k.

§ 3. Ранг матрицы

Матрицу порядка $m \times n$ можно рассматривать как набор из m строк или набор из n столбцов. Поэтому к матрице можно применить все результаты о наборах векторов и говорить о ранге матрицы по строкам и ранге матрицы по столбцам, а также о базах строк и столбцов.

Определение 5.16. Пусть дана матрица A размером $m \times n$. Рангом матрицы по строкам (строчный ранг) называется ранг набора строк данной матрицы, рассматриваемых как векторы пространства R^n. Аналогично рангом матрицы по столбцам (столбцовый ранг) называется ранг набора столбцов данной матрицы, рассматриваемых как векторы пространства R^m.

Целью данного параграфа является доказательство утверждения, что ранг матрицы по столбцам равен рангу матрицы по строкам. Следовательно, можно говорить просто о ранге матрицы.

Метод доказательства основан на той же идее, что и метод Гаусса решения систем линейных уравнений. Мы определим класс преобразований Гаусса матриц, при которых не меняется ни ранг матрицы по строкам, ни ранг матрицы по столбцам:

(1) умножить строку матрицы на число, отличное от нуля;

(2) переставить строки матрицы;

(3) прибавить к j-й строке матрицы i-ю строку, умноженную на произвольное число.

Каждую матрицу преобразованиями Гаусса можно привести к матрице специального вида, для которой легко показать, что у нее ранг по строкам равен рангу по столбцам. Следовательно, в исходной матрице ранг по строкам равен рангу по столбцам.

Лемма 5.17. При преобразовании Гаусса любого типа ранг по строкам не меняется.

Доказательство. Строки матрицы после любого преобразования Гаусса выражаются через строки исходной матрицы. Следовательно, преобразование Гаусса не увеличивает ранга набора строк. С учетом обратимости преобразований Гаусса ранг преобразованной матрицы по строкам равен рангу исходной матрицы.

Лемма 5.18. При преобразовании Гаусса любого типа ранг по столбцам не меняется.

Доказательство. Докажем, что при преобразованиях Гаусса ранг по столбцам не увеличивается. Пусть ранг по столбцам исходной матрицы равен r. Возьмем в преобразованной матрице A' набор из $r+1$ столбца. В матрице A эти столбцы линейно зависимы: $\sum_{k=1}^{r+1}\lambda_k A^{p_k}=\Theta,$ то есть $\sum_{k=1}^{r+1}\lambda_k a_{jp_k}=0$ для всех j от 1 до m. Тогда та же линейная комбинация тех же столбцов в матрице A' будет равна нуль-вектору:

(1) при умножении j-й строки на число μ для элементов этой строки

$$\sum_{k=1}^{r+1}\lambda_k\left(\mu a_{jp_k}\right)=\mu\cdot\sum_{k=1}^{r+1}\lambda_k a_{jp_k}=0;$$

(2) при перестановке строк равенство $\sum_{k=1}^{r+1}\lambda_k a_{jp_k}=0$ не зависит от номера строки j;

(3) при замене A_j на $A_j+\mu A_i$ для j-й строки имеем

$$\sum_{k=1}^{r+1}\lambda_k\left(a_{jp_k}+\mu a_{ip_k}\right)=\sum_{k=1}^{r+1}\lambda_k a_{jp_k}+\mu\sum_{k=1}^{r+1}\lambda_k a_{ip_k}=0.$$

Следовательно, ранг по столбцам при преобразованиях Гаусса увеличиться не может. С учетом обратимости он не может и уменьшиться.

Замечание. Если некоторая линейная комбинация координатных векторов равна нуль-вектору, то после вычеркивания из всех векторов координаты с одним и тем же номером та же линейная комбинация останется равной нуль-вектору. Значит, после вычеркивания в матрице одного столбца или нескольких столбцов линейно зависимые строки останутся линейно зависимыми. То же утверждение можно сформулировать по-другому: если после вычеркивания части столбцов строки оказались линейно независимыми, то они были линейно независимыми.

Теорема 5.19. Ранг любой матрицы A по строкам равен рангу матрицы по столбцам. Их общее значение называется рангом матрицы и обозначается $rank(A)$.

Доказательство. Будем изменять матрицу A преобразованиями Гаусса по тому же алгоритму, по которому преобразуется матрица при решении однородной СЛАУ (исключая удаление нулевых строк). В итоге матрицу A можно привести к матрице B, в которой верхние строки будут соответствовать канонической СЛАУ с базисными и свободными переменными, а нижняя часть будет состоять из нулевых строк.

В такой матрице будет r базисных строк и r базисных столбцов. Переставляя строки и столбцы, можно сделать так, чтобы верхний левый угол матрицы занимала квадратная единичная матрица порядка r. Полученную матрицу обозначим через B. Заметим, что строчный и столбцовый ранги матрицы B в силу Лемм 5.17 и 5.18 такие же, как у матрицы A.

В матрице B первые r строк и r столбцов линейно независимы. Из этого мы делаем вывод, что ранг матрицы B по строкам и столбцам не может быть меньше r. Так как в матрице B $(m-r)$ последних строк нулевые, ранг по строкам равен r. Ранг по столбцам тоже равен r, так как столбцы матрицы B выражаются через первые r столбцов: $B^k = \sum_{j=1}^{r} a_{jk} B^j$ для всех k от 1 до n.

Итак, в матрице B строчный и столбцовый ранги матрицы равны. Следовательно, они равны и в матрице A. Теорема 5.19 доказана.

Замечание. Каждое преобразование Гаусса можно задать умножением слева на некоторую матрицу. Например, можно непосредственно убедиться, что для матриц с двумя строками:

(1) умножение слева на матрицу $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ умножает первую строку на число λ;

(2) умножение слева на матрицу $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ меняет первую строку со второй;

(3) умножение слева на $\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ прибавляет к первой строке вторую, умноженную на число λ.

Последовательно перемножая все подобные матрицы, можно показать, что каноническая матрица B (правда, без перестановки столбцов) может быть получена из матрицы A умножением слева на некоторую квадратную матрицу. Более того, из дальнейших рассуждений можно вывести, что ранг этой матрицы максимальный (равен ее порядку m).

Ранг матрицы по строкам не может быть больше количества строк. Аналогично ранг матрицы по столбцам не может быть больше количества столбцов. Следовательно

Следствие 5.20. Ранг матрицы не может быть больше, чем минимум из количества строк и количества столбцов.

Определение 5.21. Квадратная матрица, ранг которой равен количеству строк (столбцов), называется невырожденной. Соответственно, если ранг меньше количества строк (столбцов), то квадратная матрица называется вырожденной.

Теорема 5.22. Для произведения матриц

$$rank(AB) \le \min(rank(A), rank(B)).$$

Доказательство. Столбец C^q произведения $C = AB$ равен линейной комбинации столбцов матрицы A, коэффициентами которой служат элементы q-го столбца матрицы B: $C^q = \sum_{k=1}^{n} b_{kq} A^k$. Следовательно, набор столбцов матрицы C выражается через набор столбцов матрицы A. Из этого факта по теореме о сравнении рангов следует $rank\{C^q\} \le rank\{A^k\}$, то есть $rank(AB) \le rank(A)$.

Аналогично $C_j = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} B_k$, откуда ранг набора строк матрицы C не превышает ранга набора строк матрицы B, то есть $rank\{C_j\} \le rank\{B_k\}$, или $rank(AB) \le rank(B)$. Из доказанных двух неравенств следует, что $rank(AB) \le min(rank(A), rank(B))$.

Следствие5.23. Если произведение двух квадратных матриц есть невырожденная матрица, то оба сомножителя невырожденные.

Теорема 5.24. (Теорема Кронекера-Капелли). Неоднородная СЛАУ совместна тогда и только тогда, когда ранг ее матрицы коэффициентов равен рангу расширенной матрицы коэффициентов.

Доказательство необходимости. Пусть F – набор столбцов матрицы коэффициентов A, G – набор столбцов расширенной матрицы коэффициентов. Так как $F \subseteq G$, то $rank(F) \le rank(G)$. Воспользуемся записью СЛАУ в векторной форме $\sum_{k=1}^{n} x_k A^k = B$. Если СЛАУ совместна, то это означает, что вектор B содержится в линейной оболочке набора F столбцов A. Тогда G выражается через F, и по теореме о сравнении рангов $rank(G) \le rank(F)$. Значит, $rank(G) = rank(F)$.

Доказательство достаточности. Пусть теперь $rank(G) = rank(F)$. Тогда любая база F' в F является набором, число столбцов в котором равно $rank(G)$ – максимальному в G количеству линейно независимых столбцов. Это означает, что F' является также базой в G. В частности, вектор $B \in G$ выражается через столбцы набора $F' \subseteq F$, то есть выражается через столбцы матрицы A. Это означает, что СЛАУ $AX = B$ совместна.

Следствие 5.25. Если ранг матрицы коэффициентов СЛАУ равен количеству уравнений m, то ранг расширенной матрицы также равен m, так как он не может быть больше, чем число строк расширенной матрицы. Следовательно, в этом случае СЛАУ обязательно совместна.

§ 4. Решение матричных уравнений

Матричным мы называем уравнение, в котором приравниваются два матричных выражения с известными и неизвестными матрицами. Простейшими являются матричные уравнения вида $AX = B$ или $XA = B$ с неизвестной матрицей X и известными матрицами A и B.

Замечание. Рассмотрим матричное уравнение $AX = B$. Если в матрице B p столбцов, то оно распадается на p независимых СЛАУ $AX^q = B^q$. В каждой такой СЛАУ матрица коэффициентов одна и та же, а столбцы свободных членов разные. Матричное уравнение совместно тогда и только тогда, когда совместны все составляющие его СЛАУ.

Теорема 5.26. (Обобщенная теорема Кронекера-Капелли). Супер-расширенной матрицей $(A \mid B)$ системы $AX = B$ назовем матрицу, объединяющую столбцы матриц A и B. Решение матричного уравнения $AX = B$ существует тогда и только тогда, когда ранг супер-расширенной матрицы $(A \mid B)$ равен рангу матрицы A.

Доказательство. Из Теоремы Кронекера-Капелли для обычных СЛАУ следует, что решение матричного уравнения существует тогда и только тогда, когда каждый столбец матрицы B выражается через столбцы матрицы A. Тогда ранг супер-расширенной матрицы не может превышать ранга матрицы A. Но меньше он тоже быть не может, поскольку множество столбцов супер-расширенной матрицы содержит множество столбцов матрицы A.

Схема Гаусса-Жордана для матричного уравнения. Схема Гаусса-Жордана для решения матричного уравнения $AX = B$ включает элементы супер-расширенной матрицы, в которой матрицы A и B разделены чертой. Применяя итерации метода Гаусса к строкам матриц A и B, мы либо придем к ситуации, когда очередная строка в матрице A нулевая, а соответствующая ей строка в матрице B не нулевая, либо после очередной итерации все оставшиеся не базисные строки нулевые и слева, и справа от черты. В первом случае матричное уравнение несовместно. Во втором случае нулевые строки надо вычеркнуть и продолжить процесс.

Процесс закончится тогда, когда матрица слева от черты приведется к конечному виду с $r = rank(A)$ строками и r базисными столбцами.

Если $r = n$, то перестановкой строк можно добиться того, что слева будет стоять единичная матрица. При этом матрица справа даст единственное решение X матричного уравнения. Если $r < n$, то система содержит свободные переменные и решение матричного уравнения будет не единственным.

После этого задачу для каждого столбца надо решать отдельно. Поскольку матрица коэффициентов СЛАУ для каждого столбца одна и та же, номера базисных и свободных переменных во всех столбцах одни и те же. Это означает, что в матрице X есть r базисных строк и $(n-r)$ свободных строк. Для каждого отдельно взятого столбца элементы свободных строк могут независимо друг от друга принимать произвольные значения, а элементы базисных строк этого столбца вычисляются по формулам, заданным СЛАУ для этого столбца. Количество свободных переменных равно $(n-r)\times p$, количество базисных переменных равно $r \times p$.

Следует помнить, что ответом к этой задаче должна быть матрица, а не координатный вектор.

Замечание. Для того чтобы решить матричное уравнение $XA = B$ с другим порядком сомножителей, следует транспонировать все матрицы, входящие в уравнение. Получим $A^T X^T = B^T$. Нужно решить это уравнение относительно матрицы X^T, используя схему Гаусса, а затем для получения ответа транспонировать обратно найденное решение.

Пример 1. Решить матричное уравнение $AX = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Решение. В схему Гаусса слева от черты поместим матрицу A, справа от черты матрицу B. Затем преобразованиями Гаусса приведем левую часть к единичной матрице.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 3 & 3 & -3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & \boxed{-1} & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & -1 & 2 & 3 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 6 & 0 & 0 & 8 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & \boxed{1} & 0 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 12 & 8 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & \boxed{1} & 0 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 12 & 8 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 15 & 10 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 10 & 8 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -12 & -8 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 10 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -15 & -10 & 0 \end{array}\right)$$

В последней расширенной матрице слева от черты стоит единичная матрица, а справа стоит искомое решение X.

Пример 2. Решить матричное уравнение $XA = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 8 & -5 & 3 \\ -9 & 10 & -4 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Сначала транспонируем все матрицы в уравнении: $A^T X^T = B^T$. Положим $Y = X^T$. В схему Гаусса слева от черты поместим матрицу A^T, справа от черты матрицу B^T. Затем преобразованиями Гаусса приведем левую часть к каноническому виду.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 8 & -9 & 3 \\ 2 & -3 & 5 & -5 & 10 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 3 & -4 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \boxed{1} & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 4 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & -4 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & -4 & 1 \end{array}\right)$$

Матричное уравнение распадается на три СЛАУ для трех столбцов Y^1, Y^2, Y^3 матрицы Y.

$$\begin{cases} y_{11} \quad + y_{31} = 2 \\ \quad y_{21} - y_{31} = 3 \end{cases}, \begin{cases} y_{12} \quad + y_{32} = -1 \\ \quad y_{62} - y_{32} = -4 \end{cases}, \begin{cases} y_{13} \quad + y_{33} = 1 \\ \quad y_{23} - y_{33} = 1 \end{cases}, \text{ или}$$

$$\begin{cases} y_{11} = 2 - y_{31} \\ y_{21} = 3 + y_{31} \end{cases}, \begin{cases} y_{12} = -1 - y_{32} \\ y_{22} = -4 + y_{32} \end{cases}, \begin{cases} y_{13} = 1 - y_{33} \\ y_{23} = 1 + y_{33} \end{cases}$$

В результате мы получим решение

$$Y = \begin{pmatrix} 2 - y_{31} & -1 - y_{32} & 1 - y_{33} \\ 3 + y_{31} & -4 + y_{32} & 1 + y_{33} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} \end{pmatrix},$$

зависящее от трех свободных переменных y_{31}, y_{32}, y_{33}. Окончательный ответ

$$X = Y^T = \begin{pmatrix} 2 - x_{13} & 3 + x_{13} & x_{13} \\ -1 - x_{23} & -4 + x_{23} & x_{23} \\ 1 - x_{33} & 1 + x_{33} & x_{33} \end{pmatrix}.$$

§ 5. Обратная матрица

В этом параграфе будут рассматриваться только квадратные матрицы порядка n.

Операция умножения матриц имеет много общего с умножением чисел (кроме свойства коммутативности). Она ассоциативна, удовлетворяет свойству дистрибутивности по отношению к операции сложения. Единичная матрица для умножения матриц играет роль единицы: $AE = EA = A$. Хотелось бы по аналогии ввести и деление матриц. Однако здесь все не так просто. Во-первых, деление не всегда возможно. Во вторых, из-за некоммутативности умножения «деление слева» и «деление справа» по идее должны различаться.

Тем не менее, деление матриц – операция вполне разумная. Для чисел деление можно заменить умножением на обратное число. Для матриц поступим таким же образом.

Определение 5.27. Пусть A – квадратная матрица. Матрица B называется левой обратной матрицей к матрице A, если $BA = E$. Матрица C называется правой обратной матрицей к матрице A, если $AC = E$.

Лемма 5.28. Если у матрицы A существуют и левая обратная матрица B, и правая обратная матрица C, то $B = C$. В частности, при этом предположении все левые и все правые обратные матрицы одинаковые.

Доказательство. Если $BA = E$ и $AC = E$, то $B = BE = B(AC) = (BA)C = EC = C$.

В этом случае левая и правая обратная матрица называется просто обратной матрицей и обозначается A^{-1}. Заметим, что пока мы не можем утверждать, что из существования левой обратной вытекает существование правой обратной (хотя это верно).

Теорема 5.29. Если $B = A^{-1}$, то $A = B^{-1}$ (это свойство называется двойственностью при переходе к обратной матрице).

Доказательство. Следует из определения обратной матрицы.

Теорема 5.30. Если квадратные матрицы A и B имеют обратные, то существуют $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ и $(BA)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$.

Доказательство. Имеем $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AEA^{-1} = AA^{-1} = E$. Аналогично доказываются соотношения для произведений в другом порядке.

Теорема 5.31. (Критерий существования обратной матрицы). Квадратная матрица имеет обратную тогда и только тогда, когда она невырождена (то есть $rank(A) = n$). Обратная матрица единственная.

Доказательство необходимости. Ранг A не может быть меньше n, так как иначе по теореме о ранге произведения матриц ранг $A^{-1}A = E$ меньше n, что невозможно.

Доказательство достаточности. При решении матричных уравнений $AX = E$ и $XA = E$ левая часть схемы Гаусса-Жордана, составленной для каждого отдельного столбца правой части и соответствующего столбца матрицы X, вследствие невырожденности матрицы коэффициентов, совпадающей с A (или с A^T), приведется к единичной матрице. Следовательно, решение системы для каждого столбца матрицы X существует и единственно. Значит, обратная матрица существует.

Пример 3. Найти обратную матрицу к матрице $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 2 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение. Надо решить матричное уравнение $AX = E$. В схему Гаусса слева от черты поместим матрицу A, справа от черты единичную матрицу. Затем преобразованиями Гаусса приведем левую часть к единичной матрице.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & \boxed{1} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 9 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 0 & 0 & 1 & -9 & 15 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & -3 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -9 & 15 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 11 & -18 \end{array}\right)$$

Справа от черты в последнем выражении стоит искомая матрица A^{-1}.

Теорема 5.32. Рассмотрим матричное уравнение $AX = B$ с неизвестной матрицей X, где A, B и X – квадратные матрицы порядка n. Пусть для матрицы A существует обратная матрица A^{-1}. Тогда уравнение $AX = B$ имеет единственное решение $X = A^{-1}B$. Аналогично решением уравнения $XA = B$ будет матрица $X = BA^{-1}$.

Доказательство. Решение проверяется подстановкой: $A(A^{-1}B) = (AA^{-1})B = B$. Оно единственно, так как из $AX = B$ следует $X = (A^{-1}A)X = A^{-1}(AX) = A^{-1}B$.

§ 6. Блочные матрицы

Определение 5.33. Пусть в матрице размером $m \times n$ все строки и все столбцы разбиты на группы, причем каждая группа содержит несколько последовательных строк или несколько последовательных столбцов. Введем обозначения: M – общее число групп строк, N – число групп столбцов, M_J – число строк в J-й группе строк, N_K – число столбцов в K-й группе столбцов. Очевидно, $\sum_{J=1}^{M} M_J = m$, $\sum_{K=1}^{N} N_K = n$.

На пересечении J-й группы строк и K-й группы столбцов образуется матрица размером $M_J \times N_K$. Назовем ее клеткой A_{JK}. Совокупность всех матриц A_{JK} назовем блочной матрицей.

Все матрицы A_{JK} с первым индексом J назовем J-й строкой блочной матрицы, все матрицы A_{JK} со вторым индексом K назовем K-м столбцом блочной матрицы.

Блочная запись матрицы A имеет вид

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1N} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{M1} & A_{M2} & \dots & A_{MN} \end{pmatrix}.$$

Если в квадратной матрице $n \times n$ разбиение строк и столбцов таково, что $M = N$ и $M_J = N_J$ при всех J, то такую блочную матрицу назовем квадратной.

Квадратная блочная матрица называется диагональной, если все клетки вне главной диагонали нулевые. Квадратная блочная матрица называется верхней треугольной (или просто треугольной), если равны нулю все клетки под главной диагональю.

Пусть теперь, кроме матрицы $A = \| a_{jk} \|$, имеется также матрица $B = \| b_{kq} \|$ размером $n \times p$, и пусть ее строки и столбцы также разбиты на группы, причем число и размеры групп строк матрицы B совпадают с числом и размерами групп столбцов матрицы A. Число групп в столбцах матрицы B обозначим через P, количество столбцов в группе с номером Q через P_Q. Блочная запись матрицы B имеет вид

$$\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \dots & B_{1P} \\ B_{21} & B_{22} & \dots & B_{2P} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_{N1} & B_{N2} & \dots & B_{NP} \end{pmatrix}.$$

Для матриц A и B существует матричное произведение $AB = C$. В матрице C также можно ввести блочную структуру: группы строк там такие же, что в матрице A, группы столбцов такие же, как в матрице B.

Теорема 5.34. Блок C_{JQ} блочной матрицы $C = AB$ вычисляется по формуле, идентичной формуле для обычных матриц: $C_{JQ} = \sum\limits_{K=1}^{N} A_{JK} \cdot B_{KQ}$.

Другими словами, блочные матрицы перемножаются так, как если бы элементы блочных матриц были не матрицами, а числами:

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1N} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{M1} & A_{M2} & \dots & A_{MN} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \dots & B_{1P} \\ B_{21} & B_{22} & \dots & B_{2P} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_{N1} & B_{N2} & \dots & B_{NP} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1P} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2P} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{M1} & C_{M2} & \dots & C_{MP} \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Зафиксируем в блочной матрице C блок C_{JQ}. В матрице C_{JQ} зафиксируем элемент c_{jq}. Пусть i и s – номера строки и столбца этого элемента в матрице C, рассматриваемой как обычная матрица. Согласно обычной формуле матричного умножения $c_{is} = \sum\limits_{t=1}^{n} a_{it} \cdot b_{ts}$.

В этой сумме элементы a_{it} и b_{ts} можно также рассматривать как элементы блоков A_{JK} и B_{KQ} блочных матриц A и B. Пусть j-я строка в блоке A_{JK} состоит из фрагмента $(a_{i,u+1}, a_{i,u+2}, \dots, a_{i,u+w})$ всей i-й строки матрицы A. Вследствие согласованности структуры блочных матриц A и B одновременно q-й столбец в блоке B_{KQ} состоит из фрагмента

$(b_{u+1,q}, b_{u+2,q}, \ldots, b_{u+w,q})$, взятого из s-го столбца матрицы B. Здесь w – ширина блока A_{JK} и высота блока B_{KQ}. Тогда частичная сумма $\sum_{v=1}^{w} a_{i,u+v} \cdot b_{u+v,s}$ является элементом $d_{jq}^{K} = \sum_{k=1}^{w} a_{jk} \cdot b_{kq}$ матричного произведения $D_K = A_{JK} \cdot B_{KQ}$.

В результате элемент c_{jq} блока C_{JQ} оказался равен сумме элементов d_{jq}^{K} всех матриц вида $D_K = A_{JK} \cdot B_{KQ}$, где индекс K пробегает все номера блочных столбцов матрицы A (и блочных строк матрицы B). Поскольку это верно для всех j и k, в итоге получаем $C_{JQ} = \sum_{K=1}^{N} A_{JK} \cdot B_{KQ}$. Теорема 5.34 доказана.

Рассмотрев несколько примеров разбиения матриц на блоки, можно из этой формулы получить несколько полезных следствий.

Пример 4. Матрица A представлена в виде одного блока, а матрица B является вектор-строкой $(B^1, B^2, \ldots, B^p)$, состоящей из столбцов матрицы B. Матрица $C = AB$ также будет представлена в виде строки столбцов $(C^1, C^2, \ldots, C^p)$. Согласно формуле умножения, $C^s = AB^s$. Следовательно, столбцы произведения двух матриц вычисляются по формуле $C^s = AB^s$.

Пример 5. Теперь A является вектор-столбцом, состоящим из строк $(A_1, A_2, \ldots, A_m)$ матрицы A, а матрица B представлена в виде одного блока. Матрица $C = AB$ будет представлена в виде столбца строк $(C_1, C_2, \ldots, C_m)$. Согласно блочной формуле умножения, строки произведения двух матриц вычисляются по формуле $C_j = A_j B$.

Утверждения, полученные при рассмотрении Примеров 4 и 5, ранее были доказаны непосредственно в Лемме 5.12 и Лемме 5.13.

Пример 6. Наиболее важный случай получается, если матрицу A представить в виде вектор-строки $(A^1, A^2, \ldots, A^n)$, состоящей из столбцов матрицы. Матрица B состоит из блоков по одному элементу, то есть в своем исходном виде. Тогда матрица $C = AB$ также будет представлена в виде строки столбцов $(C^1, C^2, \ldots, C^p)$.

$$\begin{pmatrix} A^1 & A^2 & \ldots & A^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C^1 & C^2 & \ldots & C^p \end{pmatrix}.$$

Согласно блочной формуле умножения, $C^s = \sum_{k=1}^{n} A^k \cdot b_{ks} = \sum_{k=1}^{n} b_{ks} A^k$. У нас получилось, что столбец с номером s матрицы $C = AB$ равен линейной комбинации столбцов матрицы A. Коэффициентами линейной комбинации служат элементы s-го столбца матрицы B.

Пример 7. Аналогичный результат получится, если матрица A представлена блоками по одному элементу, а матрица B изображена вектор-столбцом, состоящим из строк $(B_1, B_2, \ldots, B_n)$. Матрица $C = AB$ будет представлена в виде столбца из строк $(C_1, C_2, \ldots, C_m)$. По аналогии с предыдущим примером имеем, что строка матрицы $C = AB$ с номером j равна линейной комбинации строк матрицы B: $C_j = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} B_k$. Коэффициентами линейной комбинации служат элементы j-й строки матрицы A.

Утверждения, полученные при рассмотрении Примеров 6 и 7, ранее были доказаны непосредственно в Лемме 5.15.

Пример 8. Первая матрица является блочным вектор-столбцом, состоящим из строк $(A_1, A_2, \ldots, A_m)$ матрицы A. Вторая матрица является блочной вектор-строкой, состоящей из столбцов $(B^1, B^2, \ldots, B^p)$ матрицы B. Произведение вектор-столбца высоты m на вектор-строку длины p является блочной матрицей размером $m \times p$, блоки которой состоят из единственного элемента $c_{js} = A_j B^s$. Матричное произведение произвольной строки $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ на произвольный столбец $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ является тем, что мы позднее будем называть стандартным скалярным произведением $(x, y) = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$ векторов x и y в координатном евклидовом пространстве E^n. Следовательно, $c_{js} = (A_j, B^s)$.

Рассмотрим ситуацию, когда основная матрица квадратная, а разбиения на блоки по строкам и столбцам одинаковые. Тогда все блоки на главной диагонали будут квадратными матрицами. В этом случае имеет смысл говорить о единичной блочной матрице, у которой на главной диагонали стоят единичные матрицы, а остальные блоки – нули. При умножении произвольной блочной матрицы на единичную блочную матрицу справа или слева исходная матрица не меняется.

Следует отметить, что одну и ту же матрицу можно по-разному разбить на блоки. В частности, единичные матрицы в клетках главной диагонали единичной блочной матрицы могут иметь разную размерность.

ГЛАВА 6

ЛИНЕЙНЫЕ МНОГООБРАЗИЯ

§ 1. Понятие линейного многообразия

Линейное многообразие является обобщением понятия прямой и плоскости в трехмерном пространстве.

Определение 6.1. Суммой Минковского двух произвольных подмножеств векторов M_1 и M_2 называется подмножество M, состоящее из всех попарных сумм элементов обоих подмножеств, то есть $a \in M \Leftrightarrow a = a_1 + a_2$, где $a_1 \in M_1$, $a_2 \in M_2$. Сумма Минковского обозначается $M = M_1 + M_2$.

Замечание. Согласно этому определению, сумма линейных подпространств является суммой Минковского.

Определение 6.2. Линейным многообразием H в линейном пространстве V называется сумма Минковского $H = c + L$, где $c \in V$ – фиксированный вектор, $L \subseteq V$ – линейное подпространство.

Пустое множество также считается линейным многообразием.

Замечание. Запись линейного многообразия в форме $H = c + L$ называется параметрическим заданием многообразия. Говорят, что многообразие H образуется из линейного подпространства L с помощью сдвига c.

Замечание. Так как $c = c + \Theta$, вектор $c \in H$ по определению.

Замечание. Если $L = \{\Theta\}$, то многообразие состоит из одной точки c.

Замечание. Если $b \in L$, то $c + a = (c + b) + (a - b)$, поэтому $c + L = (c + b) + L$. Это означает, что в качестве сдвига можно выбрать любой вектор, принадлежащий H. Многообразия $H_1 = c_1 + L$ и $H_2 = c_2 + L$ совпадают, если $c_2 - c_1 \in L$.

Замечание. Линейное многообразие в общем случае не содержит нуль-вектор. Многообразие, которое содержит нуль-вектор, можно записать в виде $H = \Theta + L$, оно совпадает с L и является линейным подпространством.

Лемма 6.3. Подпространство L определяется по многообразию H однозначно и состоит из всевозможных попарных разностей $a = x_1 - x_2$, где $x_1, x_2 \in H$.

Доказательство. Для любых $x_1 = c + a_1$ и $x_2 = c + a_2$ разность $x_1 - x_2 = a_1 - a_2 \in L.$ С другой стороны, для любого $a \in L$ имеем $a = x_1 - x_2,$ где $x_1 = c + a,$ $x_2 = c + \Theta.$

Определение 6.4. Размерностью многообразия, заданного в виде $H = c + L,$ называется размерность подпространства L.

Замечание. Размерность многообразия, состоящего из одной точки, равна нулю. Размерность пустого множества не определена.

Договоримся о терминологии.

(1) Одномерное линейное многообразие называется прямой. Это согласуется с параметрическим заданием прямой в аналитической геометрии: если $L = L\{a\},$ то $x \in H \Leftrightarrow x = c + t \cdot a,$ где $t \in R.$

(2) Двумерное линейное многообразие называется двумерной плоскостью, или просто плоскостью.

(3) k-мерное линейное многообразие называется k-мерной плоскостью.

(4) Многообразие размерности $(n-1)$ в линейном пространстве размерности n называется гиперплоскостью.

Через две точки a и b в линейном пространстве проходит единственная прямая. Ее параметрическое представление $H = a + L\{b - a\}.$ В некоторых ситуациях удобнее пользоваться другим уравнением прямой.

Лемма 6.5. Пусть на прямой выбраны две разные фиксированные точки a и b. Тогда точка x лежит на этой прямой тогда и только тогда, когда $x = s \cdot a + t \cdot b$ с ограничением $s + t = 1.$ Если точка $x \in [a, b],$ то дополнительно $s \geq 0,$ $t \geq 0.$

Доказательство. В качестве направляющего вектора прямой можно выбрать вектор $(b - a).$ Тогда точка x лежит на данной прямой тогда и только тогда, когда $x = a + t \cdot (b - a) = (1 - t) \cdot a + t \cdot b.$ Положим $s = 1 - t$ и получим $x = s \cdot a + t \cdot b$ с ограничением $s + t = 1.$ Кроме того, точка x лежит между точками a и b тогда, когда коэффициент пропорциональности t в равенстве $x - a = t(b - a)$ принадлежит $[0, 1]$. Это условие эквивалентно условиям $s \geq 0,$ $t \geq 0.$ При $t = 0,$ $s = 1$ получаем точку $x = a$, при $t = 1$, $s = 0$ получаем точку $x = b$.

Такое представление прямой можно обобщить на произвольное линейное многообразие.

Лемма 6.6. Пусть в линейном многообразии H размерности k выбраны такие точки $\{a_0, a_1, a_2, \ldots, a_k\},$ для которых набор векторов $\{b_j = a_j - a_0\},$ где $j = 1, 2, \ldots, k,$ линейно независим. Тогда вектор $x \in H$

тогда и только тогда, когда существует разложение $x = \sum_{j=0}^{k} t_j a_j,$ где $\sum_{j=0}^{k} t_j = 1.$

Доказательство необходимости. Представим многообразие в виде $H = a_0 + L,$ и пусть $x \in H.$ Все векторы $b_j = a_j - a_0 \in L.$ Так как они линейно независимы и их число равно k, они составляют базис в подпространстве L. Значит,

$$x = a_0 + \sum_{j=1}^{k} t_j \left(a_j - a_0\right) = \left(1 - \sum_{j=1}^{k} t_j\right) a_0 + \sum_{j=1}^{k} t_j a_j.$$

Положим $t_0 = 1 - \sum_{j=1}^{k} t_j$ и получим разложение $x = \sum_{j=0}^{k} t_j a_j$ с ограничением $\sum_{j=0}^{k} t_j = 1.$

Доказательство достаточности. Если $\sum_{j=0}^{k} t_j = 1,$ то разложение $x = \sum_{j=0}^{k} t_j a_j$ приводится к виду

$$x = \left(\sum_{j=0}^{k} t_j\right) \cdot a_0 + \sum_{j=0}^{k} t_j \left(a_j - a_0\right) = a_0 + \sum_{j=1}^{k} t_j b_j \in H.$$

Линейные многообразия в R^n тесно связаны с решениями неоднородных СЛАУ. Следующая теорема является основной.

Теорема 6.7. Подмножество H координатного пространства R^n является линейным многообразием тогда и только тогда, когда оно является множеством решений некоторой (в общем случае неоднородной) СЛАУ.

Доказательство достаточности. (1) Пусть задана неоднородная СЛАУ $Ax = b,$ $M \subseteq R^n$ – множество ее решений. Если M непусто, зафиксируем частное решение $c \in M.$ Множество L решений однородной СЛАУ $Ax = \Theta$ является линейным подпространством (согласно теореме о решениях однородной СЛАУ).

Докажем, что линейное многообразие $H = c + L$ совпадает с M. Если вектор $x \in M,$ то есть $Ax = b,$ то $A(x - c) = Ax - Ac = b - b = \Theta,$ следовательно, вектор $a = x - c \in L$ является решением однородной СЛАУ $Ax = \Theta,$ и тогда $x = c + a \in H.$ С другой стороны, если $a \in L$ и $x = c + a \in H,$ то $Ax = A(c + a) = Ac + Aa = b + \Theta = b,$ и тогда $x \in M.$ Итак, $M = H.$

Доказательство необходимости. (2) Пусть задано многообразие $H = c + L.$ Согласно соответствующей теореме о линейных подпространствах, существует однородная СЛАУ $AX = 0,$ решением которой является подпространство L. Вектор сдвига c является решением СЛАУ $Ax = Ac = b.$ Согласно пункту (1), решением неоднородной СЛАУ $Ax = b$ является линейное многообразие $c + L = H.$ Теорема доказана.

Пример 1. Задать параметрически линейное многообразие, являющееся решением СЛАУ

$$H:\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 6x_4 = 1 \end{cases}.$$

Решение. Надо найти частное решение заданной СЛАУ и общее решение соответствующей однородной СЛАУ. Запишем процесс решения СЛАУ с использованием схемы Гаусса-Жордана.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 2 & -3 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & -5 & 6 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & \boxed{-1} & 1 & -2 & -3 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & -4 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & -3 \end{array}\right).$$

Общее решение $\begin{cases} x_1 = -4 + x_3 \\ x_2 = 3 + x_3 - 2x_4 \end{cases}$. Для получения частного решения можно положить $x_3 = x_4 = 0$, тогда $x_1 = -4$, $x_2 = 3$, $c = (-4, 3, 0, 0)$.

Ассоциированная однородная СЛАУ имеет вид $\begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = x_3 - 2x_4 \end{cases}$.

Для построения ФНР этой СЛАУ выберем две комбинации свободных переменных $x_3 = 1$, $x_4 = 0$ и $x_3 = 0$, $x_4 = 1$. Тогда $a_1 = (1, 1, 1, 0)$, $a_2 = (0, -2, 0, 1).$ Окончательно, $H = c(-4, 3, 0, 0) + L\{a_1(1, 1, 1, 0),\ a_2(0, -2, 0, 1)\}.$

Пример 2. Построить СЛАУ, задающую линейное многообразие

$$H = c(2, 2, -1, 3) + L\{a_1(2, 1, -1, 3),\ a_2(3, -1, 2, 2)\}.$$

Решение. Сначала построим однородную СЛАУ, задающую линейное подпространство L:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & x_1 \\ \boxed{1} & -1 & x_2 \\ -1 & 2 & x_3 \\ 3 & 2 & x_4 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 5 & x_1 - 2x_2 \\ 1 & -1 & x_2 \\ 0 & \boxed{1} & x_2 + x_3 \\ 0 & 5 & -3x_2 + x_4 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & x_1 - 7x_2 - 5x_3 \\ 1 & 0 & 2x_2 + x_3 \\ 0 & 1 & x_2 + x_3 \\ 0 & 0 & -8x_2 - 5x_3 + x_4 \end{array}\right).$$

Соответствующая СЛАУ принимает вид $\begin{cases} x_1 - 7x_2 - 5x_3 \quad = 0 \\ -8x_2 - 5x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$. Правые части уравнений неоднородной СЛАУ получаются из условия, что вектор $c(2, 2, -1, 3)$ является решением системы. Для этого его координаты надо подставить в левые части вместо переменных. В итоге получим $H: \begin{cases} x_1 - 7x_2 - 5x_3 \quad = -7 \\ -8x_2 - 5x_3 + x_4 = -8 \end{cases}$.

§ 2. Пересечение и сумма линейных многообразий

По аналогии с подпространствами вводятся операции пересечения и суммы линейных многообразий.

Определение 6.8. Пересечением $H = H_1 \cap H_2$ линейных многообразий является их теоретико-множественное пересечение, то есть $x \in H \Leftrightarrow x \in H_1$ и $x \in H_2$.

Замечание. В отличие от пересечения подпространств пересечение двух линейных многообразий может быть пустым. Например, две прямые в трехмерном пространстве могут быть параллельными или скрещиваться.

Теорема 6.9. Пересечение $H = H_1 \cap H_2$ линейных многообразий является линейным многообразием.

Доказательство. Теорема верна, если пересечение двух многообразий пусто. Если оно непусто, выберем в H какой-то вектор c. По определению пересечения многообразий $c \in H \Leftrightarrow c \in H_1, c \in H_2$. Положим $L = L_1 \cap L_2$. Для любого $a \in L$ и вектора $x = c + a$ будет $x \in H_1$ и $x \in H_2$, поэтому $x \in H$. Значит, многообразие $c + L \subseteq H$.

Докажем, что $H \subseteq c + L$. Если $x \in H$, то $x \in H_1$ и $x \in H_2$. Тогда $x = c + a_1 = c + a_2$, где $a = a_1 = a_2 \in L_1 \cap L_2$. Следовательно, $x = c + a \in c + L$, откуда следует, что $H \subseteq c + L$. Окончательно $H = c + L$.

Замечание. Теоретико-множественное пересечение двух множеств решений двух любых систем уравнений (не обязательно линейных) является решением объединенной системы, включающей уравнения обеих систем. Следовательно, СЛАУ для пересечения двух линейных многообразий в R^n может быть получена объединенением двух СЛАУ для этих многообразий.

Пример 3. Найти параметрический вид и размерность пересечения многообразий $H = H_1 \cap H_2$, где линейные многообразия H_1 и H_2 заданы в виде СЛАУ:

$$H_1=\begin{cases}x_1+2x_2+x_3-x_4=1\\x_1-3x_2-x_3+x_4=2\end{cases},\quad H_2=\begin{cases}3x_1-5x_2-x_3+2x_4=1\\3x_1+\ \ x_2+x_3-\ \ x_4=4\end{cases}.$$

Решение. Для нахождения пересечения надо объединить две системы в одну. Решим объединенную систему с использованием схемы Гаусса-Жордана:

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&\boxed{1}&-1&1\\1&-3&-1&1&2\\3&-5&-1&2&1\\3&1&1&-1&4\end{array}\right)\Rightarrow\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&1&-1&1\\2&\boxed{-1}&0&0&3\\4&-3&0&1&2\\2&-1&0&0&3\end{array}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(\begin{array}{cccc|c}5&0&1&-1&7\\2&-1&0&0&3\\-2&0&0&\boxed{1}&-7\\0&0&0&0&0\end{array}\right)\Rightarrow\left(\begin{array}{cccc|c}3&0&1&0&0\\2&-1&0&0&3\\-2&0&0&1&-7\end{array}\right).$$

Общее решение $\begin{cases}x_2=-3+2x_1\\x_3=\ \ -3x_1\\x_4=-7+2x_1\end{cases}.$

Ассоциированная однородная СЛАУ $\begin{cases}x_2=\ \ 2x_1\\x_3=-3x_1\\x_4=\ \ 2x_1\end{cases}.$

Для получения частного решения следует в уравнения неоднородной СЛАУ подставить любое значение свободной переменной, например, $x_1=1$, тогда $x_2=-1$, $x_3=-3$, $x_4=-5$, $c=(1,-1,-3,-5)$. Для построения ФНР ассоциированной однородной СЛАУ в ее уравнения подставим $x_1=1$, тогда $x_2=2$, $x_3=-3$, $x_4=2$, $a_1=(1,2,-3,2)$. Окончательно, $H=c(1,-1,-3,-5)+L\{a_1(1,2,-3,2)\}$.

Для многообразий можно определить операцию суммы.

Определение 6.10. Суммой $H=H_1+H_2$ двух линейных многообразий называется их сумма Минковского, то есть $x\in H\Leftrightarrow x=x_1+x_2$, , где $x_1\in H_1$, $x_2\in H_2$.

Теорема 6.11. Сумма линейных многообразий $H_1=c_1+L_1$ и $H_2=c_2+L_2$ является линейным многообразием $H=(c_1+c_2)+(L_1+L_2)$.

Доказательство. Докажем, что $(c_1+c_2)+(L_1+L_2)\subseteq H$. Условие $a\in L_1+L_2$ означает $a=a_1+a_2$, где $a_1\in L_1$, $a_2\in L_2$. Тогда

$$(c_1+c_2)a=(c_1+c_2)+(a_1+a_2)=(c_1+a_1)+(c_2+a_2)=x_1+x_2\in H,$$

так как $x_1 \in H_1$, $x_2 \in H_2$.

Теперь докажем, что $H = (c_1 + c_2) + (L_1 + L_2)$. Предположим, что $x = x_1 + x_2$, где $x_1 = c_1 + a_1 \in H_1$, $x_2 = c_2 + a_2 \in H_2$. Тогда

$$x = (c_1 + c_2) + (a_1 + a_2) \in (c_1 + c_2) + (L_1 + L_2),$$

так как $(a_1 + a_2) \in L_1 + L_2$.

Замечание. Из формулы $H_1 \cap H_2 = c + (L_1 \cap L_2)$ для пересечения многообразий и формулы $H_1 + H_2 = (c_1 + c_2) + (L_1 + L_2)$ для суммы многообразий следует, что если два многообразия пересекаются, то для них выполняется аналог формулы Грассмана:

$$dim(H_1 + H_2) = dim(H_1) + dim(H_2) - dim(H_1 \cap H_2).$$

Но если многообразия не пересекаются, то значение $dim(H_1 \cap H_2)$ не определено.

Пример 4. Построить СЛАУ для линейного многообразия $H = H_1 + H_2$. Указать его размерность.

$$H_1 : \begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 + x_4 = 4 \\ x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 5 \end{cases}, \quad H_2 : \begin{cases} -x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 3 \\ -5x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = -1 \end{cases}.$$

Решение. Решив обе СЛАУ, найдем параметрический вид обоих многообразий. Получим

$$H_1 = c_1(0,\ 0,\ 3,\ -2) + L\begin{Bmatrix} a_1(1,0,-3,4) \\ a_2(0,1,3,-2) \end{Bmatrix},$$

$$H_2 = c_2(0,\ \ 2,\ 1,0) + L\begin{Bmatrix} b_1(1,2,3,0) \\ b_2(0,-1,-3,2) \end{Bmatrix}.$$

Тогда сумма $H_1 + H_2 = (c_1 + c_2) + L\{a_1, a_2, b_1, b_2\}$.

Будем искать СЛАУ для подпространства $L = L_1 + L_2$. Один из стандартных способов заключается в решении вспомогательной однородной СЛАУ с матрицей, строки которой составлены из векторов $\{a_1, a_2, b_1, b_2\}$:

$$\begin{cases} y_1 - 3y_3 + 4y_4 = 0 \\ y_2 + 3y_3 - 2y_4 = 0 \\ y_1 + 2y_2 + 3y_3 = 0 \\ - y_2 - 3y_3 + 2y_4 = 0 \end{cases}.$$

Ее ранг равен двум. В качестве ФНР этой СЛАУ можно выбрать набор из двух векторов $f_1(-4, 2, 0, 1)$, $f_2(-6, 0, 2, 3)$. Это значит, что СЛАУ для направляющего подпространства $L = L_1 + L_2$ имеет вид

$$\left(L_1 + L_2\right): \begin{cases} -4x_1 + 2x_2 \qquad + \ x_4 = 0 \\ -6x_1 \qquad + 2x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}.$$

Оказалось, что подпространство $L = L_1 + L_2$ двумерное. Из формулы Грассмана следует, что подпространства L_1 и L_2 совпадают. В частности, многообразия H_1 и H_2 параллельны или совпадают (на самом деле они параллельны). Многообразие $H = H_1 + H_2$ должно содержать вектор $c_1 + c_2 = c(0, -2, 4, -2)$, поэтому СЛАУ для многообразия $H = H_1 + H_2$ имеет вид

$$\left(H_1 + H_2\right): \begin{cases} -4x_1 + 2x_2 \quad + \quad x_4 = -6 \\ \ -6x_1 \quad + 2x_3 + 3x_4 = 2 \end{cases}.$$

§ 3. Взаимное расположение многообразий

Из школьной стереометрии известно, что непересекающиеся прямые в трехмерном пространстве могут быть либо параллельными, либо скрещивающимися. Также могут быть параллельными прямая и плоскость. Понятия параллельности и скрещивания можно обобщить на произвольные линейных многообразия.

Определение 6.12. Два линейных многообразия $H_1 = c_1 + L_1$ и $H_2 = c_2 + L_2$, не имеющие общих точек, называются параллельными, если либо $L_1 \subseteq L_2$, либо $L_2 \subseteq L_1$. Если ни одно из этих двух условий не выполняется, то непересекающиеся многообразия называются скрещивающимися.

Если два линейных многообразия заданы неоднородными СЛАУ, то их пересечение пусто, если объединенная СЛАУ несовместна. Однако, если многообразия заданы в параметрическом виде, то для определения их взаимного расположения не обязательно задавать их в форме СЛАУ.

Теорема 6.13. (Критерий непустого пересечения многообразий). Пусть многообразия H_1 и H_2 заданы параметрически: $H_1 = c_1 + L_1$, $H_2 = c_2 + L_2$. Пересечение $H = H_1 \cap H_2 \neq \varnothing$ тогда и только тогда, когда $c_2 - c_1 \in L_1 + L_2$. В этом случае подпространство L в параметрическом представлении $H = c + L$ равно $L = L_1 \cap L_2$.

Доказательство необходимости. Если $x \in H_1 \cap H_2$, то $x = c_1 + a_1 = c_2 + a_2$, где $a_1 \in L_1$, $a_2 \in L_2$. Следовательно, $c_2 - c_1 = a_1 - a_2 \in L_1 + L_2$.

Доказательство достаточности. Если $c_2 - c_1 \in L_1 + L_2$, то $c_2 - c_1 = a_1 + a_2$, где $a_1 \in L_1$, $a_2 \in L_2$. Это означает, что для вектора $x = c_1 + a_1 = c_2 + (-a_2)$ выполняется $x = c_1 + a_1 \in H_1$ и $x = c_2 + (-a_2) \in H_2$. Следовательно, $x \in H_1 \cap H_2$, и пересечение многообразий непусто.

Если пространства пересекаются, то для них можно выбрать общий сдвиг c_3. В этом случае другая общая точка многообразий задается соотношением $c_3 + a_1 = c_3 + a_2$, откуда $a_1 = a_2$. Из этого следует, что для многообразий с непустым пересечением будет $H_1 \cap H_2 = c_3(L_1 \cap L_2)$.

Теорема 6.14. (Критерий параллельности). Два заданных параметрически непересекающихся многообразия $H_1 = c_1 + L_1$ и $H_2 = c_2 + L_2$ параллельны тогда и только тогда, когда для размерностей направляющих подпространств L_1 и L_2 выполнено условие $dim(L_1 \cap L_2) = min(dim(L_1), dim(L_2))$. Вместо этого условия можно проверять эвивалентное условие $dim(L_1 + L_2) = max(dim(L_1), dim(L_2))$.

Соответственно, если $dim(L_1 \cap L_2) < min(dim(L_1), dim(L_2))$, (другой вариант того же условия $dim(L_1 + L_2) > max(dim(L_1), dim(L_2))$), то многообразия H_1 и H_2 скрещиваются.

Доказательство необходимости. Пусть $H_1 \parallel H_2$. Если верно включение $L_1 \subseteq L_2$, то $L_1 \cap L_2 = L_1$, чтоозначает $dim(L_1 \cap L_2) = dim(L_1) \le dim(L_2)$, откуда следует $dim(L_1 \cap L_2) = min(dim(L_1),\ dim(L_2))$. Второе условие вытекает из первого и формулы Грассмана. Аналогичные соотношения получаются при включении $L_2 \subseteq L_1$.

Доказательство достаточности. Если $dim(L_1 \cap L_2) < min(dim(L_1), dim(L_2))$, то невозможно ни включение $L_1 \subseteq L_2$, ни включение $L_2 \subseteq L_1$. Из той же формулы Грассмана следует эквивалентность условий $dim(L_1 \cap L_2) < min(dim(L_1), dim(L_2))$ для пересечения и $dim(L_1 + L_2) > max(dim(L_1), dim(L_2))$ для суммы двух подпространств.

Замечание. Если $L_1 = \{a_1, a_2, ..., a_k\}$ и $L_2 = \{b_1, b_2, ..., b_p\}$ заданы своими линейными оболочками, то проверка выполнимости критерия $c_2 - c_1 \in L_1 + L_2$ для непустого пересечения многообразий означает проверку совместности векторного уравнения $\sum_{j=1}^{k} x_j a_j + \sum_{q=1}^{p} x_{k+q} b_q = c_2 - c_1$.

Это уравнение покоординатно записывается как СЛАУ, в которой столбцы матрицы коэффициентов A состоят из столбцов a_j и b_q, а столбец свободных членов равен $(c_2 - c_1)$. В процессе решения этой СЛАУ попутно с проверкой совместности находится ранг матрицы A. Этот ранг совпадает с размерностью подпространства $L_1 + L_2$. Следовательно, проверяя критерий наличия пересечения двух многообразий, мы одновременно будем иметь возможность проверить критерий параллельности (совпадения) этих многообразий.

Пример 5. Найти взаимное расположение линейных многообразий H_1 и H_2, где

$$H_1 = c_1(2, 0, \quad 1, 2) + L\{a_1(-1, 2, 2, -2), a_2(-1, \ 3, 4, -5),$$

$$H_2 = c_2(2, \quad 7, \quad 6, 3) + L\{b_1(4, 2, 3, \quad 2), b_2(2, 5, 5, -3).$$

Если пространства пересекаются, то представить $H_3 = H_1 \cap H_2$ в параметрическом виде и указать его размерность. Чему равна размерность линейного многоообразия $H_4 = H_1 + H_2$?

Решение. Будем проверять, принадлежит или нет вектор $c_2 - c_1 = (0, -7, -5, 1)$ подпространству $L_1 + L_2 = L\{a_1,\ a_2,\ b_1,\ b_2\}$, то есть существует ли разложение

$$x_1 \cdot a_1 + x_2 \cdot a_2 + x_3 \cdot b_1 + x_4 \cdot b_2 = c_2 - c_1.$$

Это соотношение является векторной записью неоднородной системы линейных уравнений

$$x_1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + x_4 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -7 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x_1 - \ x_2 + 4x_3 + 2x_4 = \ 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 = -7 \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 = -5 \\ -2x_1 - 5x_2 - 2x_3 - 3x_4 = \ 1 \end{cases}.$$

Решение этой системы дает следующие результаты: СЛАУ совместна, ранг СЛАУ равен трем, ее решение представляет собой прямую $x = x_0(-1, 1, 1, -2) + t \cdot f(3, -1, 1, -1)$. Из этих результатов можно сделать несколько выводов:

(1) Так как СЛАУ совместна, вектор $c_2 - c_1 \in L_1 + L_2$, что означает, что $H_3 = H_1 \cap H_2 \neq \varnothing$.

(2) Если ранг СЛАУ равен трем, то $dim(L_1+L_2)=rank(a_1, a_2, b_1, b_2)=3.$ По формуле Грассмана $dim(L_1 \cap L_2)=1.$

(3) Тот факт, что $dim(L_1+L_2)>dim(L_1)=dim(L_2)=2,$ означает, что многообразия не совпадают. Заметим, что если бы оказалось, что СЛАУ несовместна, то соотношение размерностей указывало на то, что многообразия скрещиваются.

(4) $dim(H_1 \cap H_2)=dim(L_1 \cap L_2)=1,$ что означает, что многообразия H_1 и H_2 пересекаются по прямой. Для суммы $dim(H_1+H_2)=dim(L_1+L_2)=3.$

(5) Координаты вектора $f(3,-1,1,-1),$ составляющего ФНР однородной СЛАУ, задают зависимость базисных векторов подпространств L_1 и L_2: $3a_1-a_2+b_1-b_2=\Theta.$ Значит, вектор $d=3a_1-a_2=-b_1+b_2 \in L_1 \cap L_2,$ то есть $L_1 \cap L_2 = L\{d\}.$ Вычисления дают $d=(-2, 3, 2, -1).$

(6) Решение неоднородной СЛАУ $x_0(-1,1,1,-2)$ позволяет нам найти разложение $c_2-c_1=-a_1+a_2+b_1-2b_2.$ Значит, вектор $c=c_1-a_1+a_2=c_2-b_1+2b_2 \in H_1 \cap H_2,$ то есть $H_3=H_1 \cap H_2 = c+L\{d\}.$ Вычисления дают $c=(2,1,1,-1).$

В итоге параметрический вид пересечения $H_3=H_1 \cap H_2 = c(2,1,1,-1)+L\{d(-2,3,2,-1)\}.$

§ 5. Выпуклые множества в линейном пространстве

Геометрическое определение выпуклости требует использования понятия отрезка в линейном пространстве. Отрезком $[a, b]$ называется подмножество тех точек прямой, проходящей через a и b, которые лежат между этими точками.

Определение 6.15. (Геометрическое определение выпуклости). Подмножество линейного пространства называется выпуклым, если для любой пары точек, содержащихся в этом множестве, в нем содержится также отрезок с концами в этих точках.

Определение 6.16. (Алгебраическое определение выпуклости). Подмножество M линейного пространства называется выпуклым, если из условия $x \in M,\ y \in M$ следует $s \cdot x + t \cdot y \in M$ для любых чисел s и t с ограничениями $s \geq 0,\ t \geq 0,\ s+t=1.$

Теорема 6.17. Геометрическое и алгебраическое определения выпуклости эквивалентны.

Доказательство. В Лемме 6.5 было показано, что точка x тогда и только тогда принадлежит отрезку $[a, b]$, когда $x = s \cdot a + t \cdot b$ с ограничениями $s \ge 0,\ t \ge 0,\ s + t = 1.$

Теорема 6.18. Пересечение выпуклых множеств является выпуклым множеством.

Доказательство. Если концы отрезка принадлежат пересечению множеств, то они принадлежат каждому множеству. Так как все множества выпуклые, каждое из них содержит весь отрезок. Следовательно, пересечение множеств тоже содержит весь отрезок, и по определению является выпуклым множеством.

Рассмотрим треугольник с вершинами A, B и C. Любая точка K внутри треугольника лежит на некотором отрезке AN, где $N \in BC$. Точка $N \in BC$ задается условием $N = u \cdot B + v \cdot C$ с ограничениями $u \ge 0,\ v \ge 0,$ $u + v = 1.$ Точка $K \in AN$ задается условием $K = t \cdot A + w \cdot N = t \cdot A + wu \cdot B + wv \cdot C$ с аналогичными ограничениями $t \ge 0,\ w \ge 0,\ t + w = 1.$ Положим $s = wu \ge 0,\ r = wv \ge 0.$ Тогда $K = t \cdot A + s \cdot B + r \cdot C,$ где $t \ge 0,\ s \ge 0,\ r \ge 0,\ t + s + r = 1.$ Итак, для точки внутри треугольника мы получили условие, аналогичное условию для точки внутри отрезка.

Определение 6.19. Назовем линейную комбинацию $\sum\limits_{j=1}^{k} \lambda_j a_j$ векторов, принадлежащих набору $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$, выпуклой, если выполняются ограничения $\lambda_j \ge 0$ для всех $j = 1, 2, \ldots, k$ и $\sum\limits_{j=1}^{k} \lambda_j = 1.$

Теорема 6.20. (Необходимое и достаточное условие выпуклости) Множество M в линейном пространстве выпуклое тогда и только тогда, когда для любого конечного набора векторов, принадлежащих M, любая их выпуклая линейная комбинация также принадлежит M.

Доказательство достаточности. Для выпуклой линейной комбинации двух векторов условия теоремы совпадают с определением выпуклости.

Доказательство необходимости. Пусть множество M выпуклое. Тогда по определению выпуклости утверждение теоремы для выпуклой комбинации двух векторов выполняется. Пусть утверждение верно для всех выпуклых комбинаций векторов наборов, в которых не более $(m-1)$-го вектора. Рассмотрим выпуклую комбинацию m векторов, в которой коэффициент $t_m < 1$ (иначе остальные $t_k = 0$). Получим

$$K = \sum_{k=1}^{m} t_k A_k = (1 - t_m) \cdot \sum_{k=1}^{m-1} \frac{t_k}{1 - t_m} \cdot A_k + t_m A_m.$$

Так как $\frac{t_k}{1-t_m} \geq 0$, а сумма $\sum_{k=1}^{m-1} \frac{t_k}{1-t_m} = \frac{1}{1-t_m} \cdot \sum_{k=1}^{m-1} t_k = \frac{1-t_m}{1-t_m} = 1$, по предположению индукции $N = \sum_{k=1}^{m-1} \frac{t_k}{1-t_m} \cdot A_k$ лежит в M, значит, и искомая точка $K = (1-t_m)N + t_m A_m \in M$. Теорема доказана.

Теорема 6.21. Линейное многообразие (в частности, линейное подпространство) является выпуклым множеством.

Доказательство. Рассмотрим набор из m точек $x_k = c + a_k \in H$ и выпуклую линейную комбинацию $y = \sum_{k=1}^{m} t_k x_k$. Тогда

$$y = \left(\sum_{k=1}^{m} t_k \right) \cdot c + \sum_{k=1}^{m} t_k a_k = c + b, \quad b \in L.$$

Значит, $y \in H$, и из необходимого и достаточного условия выпуклости следует, что линейное многообразие H является выпуклым множеством.

Определение 6.22. Выпуклой оболочкой множества M называется множество, состоящее из всех конечных выпуклых комбинаций векторов из M. Выпуклая оболочка обозначается $conv(M)$.

Теорема 6.23. Выпуклая оболочка множества M является выпуклым множеством.

Доказательство. Пусть имеются две выпуклые комбинации $a = \sum_{k=1}^{m} s_k \cdot a_k$, $b = \sum_{j=1}^{p} \cdot t_j b_j$ векторов из M. Для доказательства выпуклости надо показать, что сумма $s \cdot a + t \cdot b$, где $s \geq 0$, $t \geq 0$, является выпуклой комбинацией векторов из M. Проверим это:

$$s \cdot a + t \cdot b = \sum_{k=1}^{m} \left(s \cdot s_k \right) a_k + \sum_{j=1}^{p} (t \cdot t_j) b_j.$$

Очевидно что $s \cdot s_k \geq 0$ и $t \cdot t_j \geq 0$ для всех k и j. Осталось лишь проверить, что

$$\sum_{k=1}^{m} \left(s \cdot s_k \right) \sum_{j=1}^{p} \left(t \cdot t_j \right) = s \cdot \sum_{k=1}^{m} s_k + t \cdot \sum_{j=1}^{p} t_j = s + t = 1.$$

Теорема 6.24. Выпуклая оболочка $conv(M)$ является наименьшим выпуклым подмножеством, содержащим множество M (наименьшим в том смысле, что любое другое выпуклое подмножество, содержащее M, содержит также $conv(M)$).

Доказательство. С одной стороны, все элементы множества *conv*(*M*), являющиеся выпуклыми комбинациями векторов множества *M*, содержатся в любом выпуклом множестве, содержащем *M*. Следовательно, множество *conv*(*M*) содержится в искомом пересечении. С другой стороны, *conv*(*M*) само является выпуклым множеством. Значит, оно содержит искомое пересечение. Из этого следует, что пересечение всех выпуклых множеств, содержащих *M*, совпадает с *conv*(*M*).

Определение 6.25. Пусть набор векторов $M=\{a_0, a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ таков, что набор, состоящий из разностей $\{a_1-a_0, a_2-a_0, \ldots, a_k-a_0\}$, линейно независимый. Тогда множество *conv*(*M*) называется *k*-мерным тетраэдром.

Рассмотрим одну из типовых задач на выпуклые множества. Пусть требуется в пространстве R^2 найти пересечение прямой $H=c+t\cdot a$, заданной в параметрическом виде, и треугольника, заданного вершинами *A*, *B* и *C*.

Согласно изложенной теории, произвольную точку *K* плоскости R^2 можно единственным способом представить в виде суммы $K=x\cdot A+y\cdot B+z\cdot C$, где $x+y+z=1$. Точка внутри треугольника отличается тем, что $x\ge 0$, $y\ge 0$, $z\ge 0$. Запишем условия пересечения треугольника и прямой в виде системы уравнений

$$\begin{cases} xA+yB+zC=c+ta \\ x+y+z=1 \end{cases}$$

с неизвестными x, y, z, t и ограничениями $x\ge 0$, $y\ge 0$, $z\ge 0$.

Первое уравнение векторное и состоит из двух обычных уравнений. Выразим из первых трех уравнений три базисные переменные *x*, *y*, *z* через свободную переменную *t*, и подставим эти выражения в неравенства. Получим систему трех неравенств с переменной *t*. Решением этих неравенств будет либо отрезок (если решение $t\in[t_1, t_2]$), либо точка (если $t = t_0$, то прямая проходит через вершину треугольника), либо пустое множество(если $t\in\varnothing$, то прямая с треугольником не пересекается).

ГЛАВА 7

ЕВКЛИДОВЫ ПРОСТРАНСТВА

§ 1. Скалярное произведение

В практических приложениях используемые множества объектов наделяются метрикой, позволяющей оценить расстояния между элементами. В евклидовой метрике в линейном пространстве расстояния и углы задаются с помощью скалярного произведения. Ранее (в Главе «Аналитическая геометрия») скалярное произведение выражалось через длины и углы. Теперь мы поступим наоборот: сначала определим понятие скалярного произведения, а затем с его помощью зададим длины и углы.

Определение 7.1. Скалярным произведением в линейном пространстве V называется числовая функция $B(x, y)$ двух векторных аргументов, обладающая следующими свойствами (аксиомами скалярного произведения):

(1) $B(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y) = \lambda_1 B(x_1, y) + \lambda_2 B(x_2, y)$ (линейность по первому аргументу);

(2) $B(x, \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) = \lambda_1 B(x, y_1) + \lambda_2 B(x, y_2)$ (линейность по второму аргументу);

(3) $B(x, y) = B(y, x)$ для всех x и y (симметричность).

(4) $\forall x\, B(x, x) \geq 0$, причем $B(x, x) = 0 \Rightarrow x = \Theta$ (положительная определенность).

В записи скалярного произведения символ B опускается и пишется просто (x, y).

Конечномерное линейное пространство, в котором задано скалярное произведение, называется евклидовым пространством.

Определение 7.2. (Модуль вектора). Длиной (или модулем) вектора x в евклидовом пространстве считается неотрицательное число $|x| = \sqrt{(x,x)}$. Расстоянием между точками x и y в евклидовом пространстве называется число $\rho(x, y) = |x - y|$.

Из определения расстояния следует, что $\rho(x, y) \geq 0$, причем $\rho(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$.

Угол между векторами мы будем задавать известной формулой $\cos\varphi = \dfrac{(x, y)}{|x|\cdot|y|}$. Для того, чтобы это выражение имело смысл, необходимо, чтобы модуль выражения в правой части не превосходил единицы. Такое неравенство вытекает из определения скалярного произведения.

Теорема 7.3. (Неравенство Коши-Буняковского). Для любых векторов x и y евклидова пространства выполняется неравенство $|(x, y)| \le |x|\cdot|y|$, причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда векторы x и y пропорциональны.

Доказательство. Из положительной определенности скалярного произведения при любом t следует, что $(x+ty, x+ty) = (y, y)t^2 + 2(x, y)t + (x, x) \ge 0$. Следовательно, дискриминант квадратного трехчлена $D = (x, y)^2 - (x, x)(y, y) \le 0$, из чего следует неравенство $(x, y)^2 \le (x, x)(y, y) = |x|^2|y|^2$ и $|(x, y)| \le |x|\cdot|y|$.

Если векторы x и y не пропорциональны, то при любом t вектор $x + ty \ne \Theta$, поэтому квадратный трехчлен $(x+ty, x+ty) = (y, y)t^2 + 2(x, y)t + (x, x) > 0$ при всех t. Это означает, что дискриминант квадратного трехчлена строго отрицателен, то есть неравенство Коши-Буняковского строгое.

Если векторы x и y пропорциональны, то есть $x = ty$, то $(x - ty, x - ty) = 0$. Это означает, что число $(-t)$ является корнем уравнения $(y, y)t^2 + 2(x, y)t + (x, x) = 0$, то есть дискриминант квадратного трехчлена равен нулю, откуда $|(x, y)| = |x|\cdot|y|$.

Определение 7.4. Угол φ между ненулевыми векторами задается формулой (считается, что $\varphi \in [0, \pi]$)

$$\cos\varphi = \frac{(x, y)}{|x|\cdot|y|}.$$

Это определение корректно, так как из неравенства Коши-Буняковского следует, что выражение $\left|\dfrac{(x, y)}{|x|\cdot|y|}\right| \le 1$.

В координатном пространстве R^n в качестве стандартного скалярного произведения используется величина $(x, y) = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$. Тогда выражение $|x| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}$ для длины вектора — это теорема Пифагора. Расстояние между точками задается известной формулой $\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \left(x_k - y_k\right)^2}$.

Координатное пространство со стандартным скалярным произведением обозначается E^n. Условимся, что вектор в E^n всегда будет изображаться вектор-столбцом X. Соответственно вектор-строка с теми же координатами будет обозначаться X^T (матрица, транспонированная к столбцу X). Сравнение формулы скалярного произведения $(x, y) = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k = \sum_{k=1}^{n} x_k^T y_k$ с формулой матричного умножения показывает, что число (x, y) совпадает с единственным элементом матричного произведения $X^T \cdot Y$. Для простоты будем отождествлять матрицу порядка один и ее матричный элемент.

Лемма 7.5. Скалярное произведение в E^n можно записать матричной формулой $(x, y) = X^T \cdot Y$.

Замечание. В конечномерном линейном пространстве многочленов степени не выше n можно задать скалярное произведение формулой $\big(P(x), Q(x)\big) = \int_0^1 P(x)Q(x)dx.$ Свойство линейности по обоим аргументам и условие положительной определенности $\big(P(x), P(x)\big) = \int_0^1 \big(P(x)\big)^2 dx > 0$ при $P(x) \neq 0$ следуют из свойств интеграла.

Можно не ограничиваться многочленами и определить аналогичное скалярное произведение для двух интегрируемых функций $f(x)$ и $g(x)$, заданных на отрезке $[a, b]$, такой же формулой $\big(f(x), g(x)\big) = \int_a^b f(x)g(x)dx.$ Можно доказать, что этот интеграл существует для интегрируемых функций, для которых существует интеграл $\int_a^b \big(f(x)\big)^2 dx.$ Пространство таких функций с введенным подобным образом скалярным произведением является одним из примеров гильбертова пространства. Его обозначение $L_2[a, b]$. Гильбертово пространство бесконечномерно.

Теорема 7.6. (Теорема косинусов). Пусть в евклидовом пространстве задан треугольник с вершинами Θ, x и y. Стороны треугольника составляют векторы x, y и $(y - x)$, φ – угол между векторами x и y. Тогда верна теорема косинусов:

$$|y - x|^2 = |x|^2 + |y|^2 - 2|x| \cdot |y| \cdot \cos\varphi.$$

Доказательство. Из формулы для косинуса угла между векторами следует, что $(x,\ y) = |x| \cdot |y| \cdot \cos\varphi.$ Поэтому

$$|y-x|^2=(y-x,\ y-x)=(y,\ y)-2(x,\ y)+(x,\ x)=|x|^2+|y|^2-2|x|\cdot|y|\cdot\cos\varphi.$$

Неравенство Коши-Буняковского и вытекающая из него теорема косинусов позволяют доказать классическое неравенство для сторон треугольника: $AB+BC\geq AC$.

Теорема 7.7. (Неравенство треугольника). В евклидовом пространстве сумма длин двух сторон треугольника больше или равна длине третьей стороны.

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что стороны треугольника равны векторам x, y, $y-x$. Тогда

$$|y-x|^2=|x|^2-2|x|\cdot|y|\cdot\cos\varphi+|y|^2\leq|x|^2+2\cdot|x|\cdot|y|+|y|^2=\left(|x|+|y|\right)^2,$$

откуда $|y-x|\leq|x|+|y|$.

Равенство достигается, когда $\cos\varphi=-1$, то есть векторы x и y коллинеарны и противоположны по направлению.

§ 2. Ортогональность векторов и подпространств

Два вектора x и y считаются ортогональными или перпендикулярными (обозначение $x\perp y$), если угол между ними прямой, что эквивалентно условию $(x,y)=0$. Свойство ортогональности можно перенести на множества.

Определение 7.8. Два множества M_1 и M_2 называются ортогональными друг к другу (обозначение $M_1\perp M_2$), если для любого $x\in M_1$ и любого $y\in M_2$ имеет место $(x,y)=0$.

Лемма 7.9. Если два множества M_1 и M_2 ортогональны, то пересечение $M_1\cap M_2$ не содержит ненулевых векторов.

Доказательство. Если $x\in M_1\cap M_2$, то по определению ортогональности множеств $(x,x)=0$, и поэтому $x=\Theta$.

Следствие 7.10. Если два подпространства L_1 и L_2 ортогональны, то сумма подпространств $L=L_1+L_2$ прямая, то есть $L=L_1\oplus L_2$.

Доказательство. Условие $L_1\cap L_2=\{\Theta\}$ является необходимым и достаточным условием того, что сумма двух подпространств прямая.

Определение 7.11. Набор векторов $\{f_1, f_2, \ldots, f_k\}$ называется ортогональным, если вектора этого набора попарно ортогональны: $(f_j,f_k)=0$ при $j\neq k$. Если вдобавок длина каждого вектора равна единице, то набор называется ортонормированным. Для ортонормированного набора $(f_j,f_k)=\delta_j^k$, где δ_j^k – символ Кронекера.

Лемма 7.12. Ортогональный набор ненулевых векторов линейно независим.

Доказательство. Если $\sum_{i=1}^{k}\lambda_i x_i = \Theta$, то $(x_j, \sum_{i=1}^{k}\lambda_i x_i) = \sum_{i=1}^{k}\lambda_i (x_j, x_i) =$

$= \lambda_j |x_j|^2 = 0$ для всех j. Так как $|x_j|^2 \neq 0$ для всех j, $\lambda_j = 0$ для всех j.

Пример 1. Дополнить вектор $a_1(2, 1, 3, -2) \in E^4$ до ортогонального базиса.

Решение. Координаты вектора (x_1, x_2, x_3, x_4), ортогонального вектору a_1, должны удовлетворять уравнению $(a_1, x) = 2x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0$. Выберем частное решение этой СЛАУ: $a_2 = (1, -2, 0, 0)$. Тогда $a_2 \perp a_1$. Два других вектора ортогонального базиса должны удовлетворять СЛАУ из двух уравнений

$$\begin{cases} (a_1, x) = 2x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0 \\ (a_2, x) = x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases}.$$

Снова выберем частное решение этой СЛАУ: $a_3 = (0, 0, 2, 3)$. Тогда $a_3 \perp a_1$ и $a_3 \perp a_2$. Последний вектор ортогонального базиса должен удовлетворять СЛАУ из трех уравнений

$$\begin{cases} (a_1, x) = 2x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0 \\ (a_2, x) = x_1 - 2x_2 = 0. \\ (a_3, x) = 2x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

Решением этой СЛАУ является вектор $a_4 = (26, 13, -15, 10)$, ортогональный a_1, a_2 и a_3. Четыре ортогональных вектора $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ в E^4 составляют ортогональный базис.

Построенный базис можно сделать ортонормированным. Для этого каждый вектор надо разделить на его длину. В результате получатся векторы длины 1. Длины векторов a_1, a_2, a_3, a_4 равны соответственно $3\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{13}$, $3\sqrt{2\cdot 5\cdot 13}$. Следовательно, ортонормированный базис составляют векторы $b_1 = \frac{1}{3\sqrt{2}}\cdot(2, 1, 3, -2)$, $b_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot(1, -2, 0, 0)$, $b_3 = \frac{1}{\sqrt{13}}\cdot(0, 0, 2, 3)$, $b_4 = \frac{1}{3\sqrt{130}}\cdot(26, 13, -15, 10)$.

Если при решении конкретных задач выбирать в качестве базиса ортогональный базис, то, как правило, расчетные формулы становятся значительно проще. В еще большей мере это относится к ортонормированному базису. Обоснованием этого служат несколько последующих утверждений. Позднее мы докажем, что в любом евклидовом пространстве ортонормированный базис существует.

Лемма 7.13. Пусть базис $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ ортогональный. Тогда в разложении вектора $x = \sum_{k=1}^{n} x_k f_k$ коэффициенты вычисляются по формулам $x_k = \dfrac{(x, f_k)}{(f_k, f_k)}$. Для ортонормированного базиса $(f_k, f_k) = 1$, и поэтому разложение вектора x по ортонормированному базису задается формулой $x = \sum_{k=1}^{n} (x, f_k) \cdot f_k$.

Доказательство. Так как $(f_i, f_k) = 0$ при $j \neq k$, скалярное произведение

$$(x, f_k) = \sum_{j=1}^{n} (x_j f_j, f_k) = \sum_{j=1}^{n} x_j \cdot (f_j, f_k) = x_k \cdot (f_k, f_k),$$

Лемма 7.14. Пусть в пространстве L задан ортонормированный базис $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$, в котором векторы x и y имеют разложения $x = \sum_{j=1}^{n} x_j f_j$ и $y = \sum_{k=1}^{n} y_k f_k$. Тогда скалярное произведение задается формулой $(x, y) = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$.

Доказательство. По определению ортонормированного базиса $(f_j, f_k) = \delta_j^k$, поэтому после раскрытия скобок получим

$$(x, y) = \left(\sum_{j=1}^{n} x_j f_j, \sum_{k=1}^{n} y_k f_k \right) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} x_j y_k \cdot \left(f_j, f_k \right) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} x_j y_k \cdot \delta_j^k = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k.$$

Ранее мы называли два линейных подпространства L_1 и L_2 изоморфными, если существует взаимно однозначное отображение (изоморфизм) F: $L_1 \to L_2$ одного пространства на другое, которое линейную комбинацию двух векторов переводит в такую же линейную комбинацию образов этих векторов (то есть $F(\lambda a + \mu b) = \lambda(Fa) + \mu(Fb)$).

Определение 7.15. (Изоморфизм евклидовых пространств). Если отображение F одного евклидова пространства в другое задает изоморфизм линейных пространств, и, кроме того, отображение F не меняет скалярного произведения (то есть выполняется тождество $(Fa, Fb) = (a, b)$), то такое отображение называется изоморфизмом евклидовых пространств.

Теорема 7.16. Пусть V – некоторое n-мерное евклидово пространство. Тогда выбор произвольного ортонормированного базиса пространства V задает изоморфизм между пространством V и координатным евклидовым пространством E^n со стандартным скалярным произведением $(x, y) = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$.

Доказательство. После выбора базиса каждому вектору можно сопоставить набор его координат в этом базисе. При этом n-мерное пространство превращается в координатное пространство R^n. Из Леммы 7.14 следует, что если выбранный базис ортонормированный, то скалярному произведению в исходном пространстве соответствует стандартное скалярное произведение в координатном пространстве.

§ 3. Ортогональное дополнение

Определение 7.17. Ортогональным дополнением к подпространству L евклидова пространства V (обозначение $L^{\perp}$) называется множество всех векторов $y \in V$, ортогональных подпространству L. Другими словами, $y \in L^{\perp}$ тогда и только тогда, когда $\forall x \in L (x,\ y) = 0$.

Теорема 7.18. Ортогональное дополнение $L^{\perp}$ к подпространству L является линейным подпространством.

Доказательство. Надо доказать, что если векторы $y, z \in L^{\perp}$, то любая их линейная комбинация $\lambda y + \mu z \in L^{\perp}$. Выберем произвольный вектор $x \in L$. Для него выполняется $(x, y) = 0$ и $(x, z) = 0$. Тогда $(x, \lambda y + \mu z) = (x, \lambda y) + (x, \mu z) = \lambda(x, y) + \mu(x, z) = 0$. Следовательно, $\lambda y + \mu z \in L^{\perp}$.

Лемма 7.19. (Критерий ортогонального дополнения). Для линейной оболочки векторов $L = L\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ условие $y \in L^{\perp}$ выполняется тогда и только тогда, когда $(a_j, y) = 0$ для всех $j = 1, 2, \ldots, k$.

Доказательство необходимости. Если $y \in L^{\perp}$, то $(a_j, y) = 0$ для всех $j = 1, 2, \ldots, k$ по определению.

Доказательство достаточности. Пусть $(a_j, y) = 0$ для всех $j = 1, 2, \ldots, k$. Для любого $x \in L$ существует разложение $x = \sum_{j=1}^{k} x_j a_j$, поэтому $(x, y) = \sum_{j=1}^{k} x_j \cdot (a_j, y) = 0$ для любого x, откуда по определению $y \in L^{\perp}$.

Теорема об изоморфизме евклидовых пространств позволяет без потери общности считать, что наше евклидово пространство — это координатное пространство E^n со стандартным скалярным произведением.

Легко видеть, что в пространстве E^n скалярное произведение $(a, x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot x_k = 0$ с неизвестным вектором x является однородным линейным алгебраическим уравнением.

Теорема 7.20. Пусть $\{a_1, a_2, ..., a_k\}$ — базис подпространства L евклидова пространства E^n. Тогда СЛАУ, состоящая из уравнений $(a_j, x) = 0$ для всех j от 1 до n, задает ортогональное дополнение $L^{\perp}$.

Доказательство. Теорема следует из доказанного выше необходимого и достаточного условия: утверждение $x \in L^{\perp}$ эквивалентно утверждению $\forall j : (a_j, x) = 0$.

Следствие 7.21. Так как ранг СЛАУ равен $dim(L) = k$, то $dim(L^{\perp}) = n - k$.

Замечание. Из доказательства следует, что каждая однородная СЛАУ задает ортогональное дополнение к подпространству, которое является линейной оболочкой строк ее матрицы коэффициентов.

Замечание. Неоднородную СЛАУ $AX = B$ можно трактовать аналогичным образом: задан набор векторов a_j в евклидовом пространстве E^n (совпадающих со строками матрицы A), и требуется найти все такие векторы x, которые бы давали заданное скалярное произведение b_j с каждым вектором a_j.

Пример 2. Построить базис в ортогональном дополнении $L^{\perp}$ к линейной оболочке набора векторов: $L = L\{a_1(1, 3, 2, 5), a_2(1, 1, -2, -3)\}$.

Решение. В соответствии с теорией запишем СЛАУ, задающую ортогональное дополнение:

$$L^{\perp} : \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 0 \\ x_1 + \ \ x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}.$$

Решив ее, получим возможный ФНР: $\{b_1(1, 0, 2, -1),\ b_2(4, -2, 1, 0)\}$. Эти векторы составляют базис ортогонального дополнения: $L^{\perp} = L\{b_1(1, 0, 2, -1),\ b_2(4, -2, 1, 0)\}$.

Пример 3. В условиях Примера 2 построить в ортогональном дополнении $L^{\perp}$ ортогональный базис.

Решение. Базис строится двумя способами. Первый заключается в том, чтобы ортогонализовать набор $\{b_1, b_2\}$, полученный в Примере 2 (о процессе ортогонализации смотрите ниже). Другой способ такой же, какой использовался при продолжении базиса: надо выбрать одно частное решение $b_1(1, 0, 2, -1)$, а затем решить СЛАУ из трех уравнений:

$$L^{\perp}:\begin{cases} x_1+3x_2+2x_3+5x_4=0 \\ x_1+\ \ x_2-2x_3-3x_4=0. \\ x_1+\qquad +2x_3-\ \ x_4=0 \end{cases}$$

Решение этой СЛАУ даст нам второй вектор $b_2'(-3,2,1,-1)$ базиса в $L^{\perp}$, который будет ортогонален первому вектору b_1 и обоим векторам a_1 и a_2.

Теорема 7.22. Для любого подпространства L евклидова пространства E^n пространство E^n разлагается в прямую сумму $E^n = L\oplus L^{\perp}$. Обратно, если $E^n = L_1\oplus L_2$ и $L_1\perp L_2$, то $L_2 = L_1^{\perp}$.

Доказательство. (1) Во-первых, из ортогональности подпространств L и $L^{\perp}$ следует, что сумма $L+L^{\perp}$ является прямой суммой. Во-вторых, для размерностей подпространств выполняется равенство $dim(L\oplus L^{\perp}) = dim(L)+dim(L^{\perp}) = r+(n-r)=n.$ Значит, $L\oplus L^{\perp}=E^n$.

(2) Из условия $E^n = L_1\oplus L_2$ следует $dim(L_2)=n-dim(L_1)=dim(L_1^{\perp})$, а из условия $L_1\perp L_2$ следует $L_2\subseteq L_1^{\perp}$. В совокупности эти утверждения означают, что $L_2=L_1^{\perp}$.

Следствие 7.23. Верна формула $(L^{\perp})^{\perp}=L$ (это утверждение называется соотношением двойственности для ортогонального дополнения).

Доказательство. С одной стороны, $L\subseteq (L^{\perp})^{\perp}$. С другой стороны, из предыдущей теоремы вытекает, что $dim((L^{\perp})^{\perp})=dim(L)$. Следовательно, $(L^{\perp})^{\perp}=L$.

Подведем итог. Пусть один набор $a=\{a_1,a_2,\dots,a_m\}$ – базис подпространства $L\in E^n$, а второй набор $b=\{b_1,b_2,\dots,b_r\}$ – базис подпространства $L^{\perp}$. Здесь $m+r=n.$ Составим из строк a_j матрицу A размером $m\times n$, а из строк b_k матрицу B размером $r\times n.$ Тогда, согласно Теореме 7.20, подпространство $L^{\perp}$ является множеством решений однородной СЛАУ $AY=\Theta$, а подпространство L является множеством решений однородной СЛАУ $BX=\Theta$. При этом набор b можно выбрать в качестве ФНР СЛАУ $AY=\Theta$, а набор a можно выбрать в качестве ФНР СЛАУ $BX=\Theta$.

Однородные СЛАУ $AY=\Theta$ и $BX=\Theta$ с ограничением $rank(A)+rank(B)=n$ естественно называть двойственными. Тот факт, что для всех j и k выполняется $(b_k,a_j)=0$, в матричной форме можно записать как в виде равенства $B\cdot A^T=0$, так и в виде транспонированного равенства $A\cdot B^T=0$.

Двойственность операции перехода к ортогональному дополнению связана с двойственностью операций пересечения и суммы подпространств.

Теорема 7.24. Для любых двух подпространств евклидова пространства E^n верны два тождества:

(1) $(L_1 + L_2)^{\perp} = L_1^{\perp} \cap L_2^{\perp}$;

(2) $(L_1 \cap L_2)^{\perp} = L_1^{\perp} + L_2^{\perp}$.

Доказательство. (1) Предположим, что $x \perp (L_1 + L_2)$. Из этого следует, что $x \perp L_1$ и $x \perp L_2$. Тогда $x \in (L_1^{\perp} \cap L_2^{\perp})$. Следовательно, $(L_1 + L_2)^{\perp} \subseteq L_1^{\perp} \cap L_2^{\perp}$.

Докажем обратное включение. Пусть $x \in (L_1^{\perp} \cap L_2^{\perp})$. Это означает, что $x \in L_1^{\perp}$ и $x \in L_2^{\perp}$. Следовательно, $x \perp y_1$ и $x \perp y_2$ для любых векторов $y_1 \in L_1$ и $y_2 \in L_2$. Но любой вектор $y \in (L_1 + L_2)$ представляется в виде $y = y_1 + y_2$, где $y_1 \in L_1$ и $y_2 \in L_2$. Из этого следует, для всех $y \in (L_1 + L_2)$ выполняется $x \perp y$. Значит $x \in (L_1 + L_2)^{\perp}$. Итак, $L_1^{\perp} \cap L_2^{\perp} \subseteq (L_1 + L_2)^{\perp}$. Окончательно $(L_1 + L_2)^{\perp} = L_1^{\perp} \cap L_2^{\perp}$.

(2) Заменим в соотношении (1) обозначения L_1 и L_2 на $L_1^{\perp}$ и $L_2^{\perp}$, а $L_1^{\perp}$ и $L_2^{\perp}$ на L_1 и L_2. Тогда $(L_1^{\perp} + L_2^{\perp})^{\perp} = L_1 \cap L_2$. Теперь перейдем в обеих частях равенства к ортогональным дополнениям. В результате получим второе соотношение $(L_1 \cap L_2)^{\perp} = L_1^{\perp} + L_2^{\perp}$.

Теорема 7.25. Любой ортогональный набор векторов в пространстве E^n можно дополнить до ортогонального базиса.

Доказательство. Пусть задан ортогональный набор, количество векторов k в котором меньше размерности n пространства. Составим однородную СЛАУ с матрицей из координат векторов набора. Ранг этой СЛАУ $k < n$, поэтому у нее есть ненулевое решение. Добавив к набору это решение, получим ортогональный набор из $(k + 1)$ вектора.

Ортогональный набор нельзя пополнить, когда $k = n$. Так как ортогональный набор линейно независим, в случае $k = n$ он является ортогональным базисом. Теорема доказана.

Вследствие теоремы об изоморфизме евклидовых пространств для произвольных евклидовых пространств утверждения, начиная со Следствия 7.21 и кончая Теоремой 7.25, также верны.

§ 4. Проекция вектора на подпространство

Пусть в евклидовом пространстве E^n задано подпространство L. Теорема 7.22 утверждает, что верно разложение в прямую сумму $E^n = L \oplus L^{\perp}$, поэтому из свойств прямой суммы следует, что любой вектор $a \in E^n$ единственным образом раскладывается в сумму $a = g + h$, где $g \in L$, $h \in L^{\perp}$.

Определение 7.26. В разложении $a = g + h$, где $g \in L$, $h \in L^{\perp}$, вектор $g \in L$ называется ортогональной проекцией вектора a при проектировании на подпространство L, а вектор $h \in L^{\perp}$ – ортогональной составляющей при таком проектировании.

Замечание. Если проектировать на подпространство $L^{\perp}$, то векторы поменяются ролями: ортогональной проекцией будет вектор h, а ортогональной составляющей вектор g.

Замечание. Длина вектора a равна $|a| = \sqrt{(g+h, g+h)} = \sqrt{|g|^2 + |h|^2}$.

Расстоянием от точки до множества называется минимум длины вектора, соединяющего данную точку с одной из точек множества. Например, если точка принадлежит множеству, то это расстояние равно нулю.

Лемма 7.27. Вектор h, дающий минимальное расстояние от точки a до подпространства L, совпадает с ортогональной составляющей при проектировании точки a на подпространство L.

Доказательство. Пусть $a = g + h$, где $g \in L$, $h \perp L$. Рассмотрим другое разложение $a = b + d$, где $b \in L$. Тогда вектор $g - b = (a - b) - (a - g) = d - h$, поэтому из $g - b \in L$ следует $d - h \perp h$. По теореме Пифагора $|d|^2 = |h|^2 + |d - h|^2 > |h|^2$.

Это утверждение хорошо известно из школьной геометрии: кратчайшее расстояние от точки до прямой (или до плоскости) равно длине перпендикуляра, опущенного на прямую (соответственно, на плоскость).

Покажем, как решать конкретную задачу нахождения ортогональной проекции для заданного вектора a и подпространства L.

Теорема 7.28. Пусть вектор a проектируется на подпространство L с базисом $F = \{f_1, \ldots, f_m\}$. Тогда коэффициенты разложения вектора проекции g по базису F являются решением некоторой СЛАУ $GX = B$. В этой СЛАУ элементы матрицы G вычисляются по формулам $g_{jk} = (f_j, f_k)$ (матрица такого вида называется матрицей Грама набора F). Столбец B состоит из скалярных произведений (f_j, a).

Доказательство. Пусть $g = \sum_{k=1}^{m} x_k f_k$ – разложение вектора g по базису F. Ортогональная составляющая равна $h = a - g = a - \sum_{k=1}^{m} x_k f_k$. Вектор h

перпендикулярен L тогда и только тогда, когда выполнены соотношения $(f_j, h) = (f_j, a) - \sum_{k=1}^{m} x_k \cdot (f_j, f_k) = 0$ для j от 1 до m. Это дает нам искомую систему из m уравнений с m неизвестными x_k.

Поскольку из Теоремы 7.22 следует, что решение этой системы всегда существует и единственное, матрица Грама невырожденная.

Замечание. Можно заметить, что элемент $g_{jk} = (f_j, f_k)$ матрицы G, как скалярное произведение, равен сумме произведений строки координат вектора f_j на столбец координат вектора f_k. Если сравнить это с формулой матричного умножения, то окажется, что $G = F^T \cdot F$, где F – матрица размером $n \times m$, столбцы которой составлены из координат векторов f_k. Те же соображения дают формулу $B = F^T \cdot a$.

Следствие 7.29. Если базис $F = \{f_1, f_2, \ldots, f_m\}$ в подпространстве L ортогональный, то матрица Грама оказывается диагональной, а если базис вдобавок ортонормированный, то матрица Грама единичная. СЛАУ с диагональной матрицей коэффициентов распадается на отдельные уравнения и легко разрешима. Для ортогонального базиса проекция равна $g = \sum_{k=1}^{m} \frac{(a, f_k)}{(f_k, f_k)} \cdot f_k$, ортогональная составляющая $h = a - \sum_{k=1}^{m} \frac{(a, f_k)}{(f_k, f_k)} \cdot f_k$.

Если базис ортонормированный, то $g = \sum_{k=1}^{m} (a, f_k) \cdot f_k$, $h = a - \sum_{k=1}^{m} (a, f_k) \cdot f_k$.

Пример 4. Найти проекцию g и ортогональную составляющую h при проектировании вектора $a(3, -4, 0, 5)\}$ на подпространство $L = L\{f_1(2, -1, 3, 2),\ f_2(2, 1, 4, 1)\}$ в E^4.

Решение. Представим вектор a в виде суммы $a = g + h = \lambda f_1 + \mu f_2 + h$. Умножим это равенство скалярно на векторы f_1 и f_2. Так как $(f_1, h) = (f_2, h) = 0$, получим СЛАУ в общем виде:

$$\begin{cases} (f_1, f_1) \cdot \lambda + (f_1, f_2) \cdot \mu = (f_1, a) \\ (f_2, f_1) \cdot \lambda + (f_2, f_2) \cdot \mu = (f_2, a) \end{cases}.$$

Вычислив все скалярные произведения, получим следующую СЛАУ:

$$\begin{cases} 18 \cdot \lambda + 17 \cdot \mu = 20 \\ 17 \cdot \lambda + 22 \cdot \mu = 7 \end{cases}.$$

Решение СЛАУ $\lambda = 3$, $\mu = -2$. Это означает, что проекция $g = 3f_1 - 2f_2 = (2, -5, 1, 4)$, ортогональная составляющая $h = a - g = (1, 1, -1, 1)$.

Пример 5. Найти проекцию g и ортогональную составляющую h при проектировании вектора $a(3,-2,4,-1)$ на подпространство $L:\{2x_1-x_2+3x_3+2x_4=0.$ Найти расстояние от точки a до подпространства L.

Решение. Подпространство L трехмерное, а подпространство $L^{\perp}=L\{n(2,-1,3,2)\}$ одномерное. Выгоднее проектировать на $L^{\perp}$, при этом проекция g и ортогональная составляющая h меняются местами. Из формул проекции следует, что проекция вектора a на одномерное подпространство $L\{n\}$ равна $h=\frac{(a,n)}{(n,n)}\cdot n=\frac{18}{18}\cdot n=n=(2,-1,3,2).$ Следовательно, $g=a-h=(1,-1,1,-3).$ Расстояние $r=|h|=3\sqrt{2}.$

§ 5. Ортогонализация набора векторов

Ортогонализация набора векторов – это алгоритм (называемый алгоритмом Грама-Шмидта), позволяющий из линейно независимого набора векторов евклидова пространства получить другой линейно независимый набор того же размера, все векторы которого попарно ортогональны. Важным условием является тот факт, что линейные оболочки любых k первых векторов обоих наборов совпадают.

Идея алгоритма заключается в том, что каждый вектор исходного набора заменяется на ортогональную составляющую при его проектировании на линейную оболочку предыдущих векторов исходного набора.

Теорема 7.30. Предположим, что в евклидовом пространстве задан линейно независимый набор векторов $F=\{f_1,f_2,\dots,f_m\}.$ Для $1\le k\le m$ определим подпространства L_k следующими формулами: $L_0=\{\Theta\}$, $L_k=L\{f_1,f_2,\dots,f_k\}.$ Существует единственный линейно независимый ортогональный набор векторов $H=\{h_1,h_2,\dots,h_m\}$, такой что $h_{k+1}\perp L_k$, и при этом каждая разность $f_{k+1}-h_{k+1}\in L_k$.

Доказательство. Воспользуемся методом математической индукции. Из условия $f_1-h_1\in L_0=\{\Theta\}$ следует, что $h_1=f_1$. Пусть векторы $\{h_1,h_2,\dots,h_k\}$ с нужными свойствами уже построены. Спроектируем вектор f_{k+1} на подпространство L_k. Так как $f_{k+1}\notin L_k$, в разложении $f_{k+1}=g+h$ ортогональная составляющая $h\ne\Theta$. Положим $h_{k+1}=h$. Тогда $h_{k+1}\perp L_k$, и при этом разность $f_{k+1}-h_{k+1}=g\in L_k$. Итак, существует нужный набор из $(k+1)$ вектора. Согласно принципу математической индукции, торема верна для всех $k\le m$.

Для обоснования единственности заметим, что из условий $f_{k+1} - h_{k+1} \in L_k$ и $h_{k+1} \perp L_k$ следует, что h_{k+1} – ортогональная составляющая при проектировании вектора f_{k+1} на подпространство L_k. Поэтому выбор вектора h_{k+1} однозначен.

Алгоритм ортогонализации Грама-Шмидта. Теорема об ортогонализации вместе с теоремой о проекции позволяют выписать рекурсивные формулы, с помощью которых по исходному набору $F = \{f_1, f_2, \ldots, f_m\}$ строится набор $H = \{h_1, h_2, \ldots, h_m\}$. На первом шаге $h_1 = f_1$. Пусть ортогональный набор $H_k = \{h_1, h_2, \ldots, h_k\}$ длины k уже построен. Положим $h_{k+1} = f_{k+1} - g = f_{k+1} - \sum_{j=1}^{k} \alpha_j h_j$. Из ортогональности набора H_k следует, что $(h_{k+1}, h_j) = (f_{k+1}, h_j) - \alpha_j \cdot (h_j, h_j) = 0$ для $j = 1, 2, \ldots, k$. Из этих соотношений определяются все коэффициенты α_j разложения вектора проекции g по векторам $\{h_1, h_2, \ldots, h_k\}$. Именно, $\alpha_j = \dfrac{(f_{k+1}, h_j)}{(h_j, h_j)}$.

Процесс завершится, когда будет построен вектор h_m. Линейная независимость искомого набора $H = \{h_1, h_2, \ldots, h_m\}$ следует из его ортогональности.

Пример 6. Ортогонализовать набор $\{a_1(2, -1, 3, -2), a_2(5, -4, 6, -2), a_3(-3, -1, 5, 5)\}$ в евклидовом пространстве E^4.

Решение. На первом шаге ортогонализации $b_1 = a_1 = (2, -1, 3, -2)$. На втором шаге должно быть $b_2 = a_2 - \lambda b_1$, откуда $\lambda = \dfrac{(a_2, b_1)}{(b_1, b_1)} = \dfrac{36}{18} = 2$. Следовательно, вектор $b_2 = a_2 - 2b_1 = (1, -2, 0, 2)$.

На третьем шаге ортогонализации должно быть $b_3 = a_3 - \lambda b_1 - \mu b_2$. Формулы для коэффициентов разложения дают $\lambda = \dfrac{(a_3, b_1)}{(b_1, b_1)} = \dfrac{0}{18} = 0$, $\mu = \dfrac{(a_3, b_2)}{(b_2, b_2)} = \dfrac{9}{9} = 1$. Следовательно, $b_3 = a_3 - b_2 = (-4, 1, 5, 3)$. В результате ортогонализации мы получили ортогональный базис $\{b_1(2, -1, 3, -2), b_2(1, -2, 0, 2), b_3(-4, 1, 5, 3)\}$.

Замечание. Можно выполнять процесс ортогонализации и для набора F из линейно зависимых векторов. Но тогда при проектировании вектора, который является линейной комбинацией предыдущих векторов, он совпадет со своей проекцией на подпространство $L\{f_1, \ldots, f_k\}$, поэтому его ортогональная составляющая h_{k+1} окажется равной нулю. В результате мы тоже получим ортогональный набор, но в нем некоторые векторы h_k будут нулевыми. Если исключить из набора нулевые векторы, останется ортогональный базис линейной оболочки набора F.

§ 6. Проекция вектора на многообразие

Предположим теперь, что нам надо найти минимальное расстояние от вектора a до многообразия $H = c + L$, а не до подпространства L, как ранее. Из очевидного тождества $\min\limits_{c+x\in H}\left|a-(c+x)\right| = \min\limits_{x\in L}\left|(a-c)-x\right|$ следует, что эта задача сводится к нахождению минимального расстояния от вектора $(a - c)$ до подпространства L, то есть к задаче ортогонального проектирования вектора $(a - c)$ на подпространство L.

Теорема 7.31. Основание перпендикуляра, опущенного из точки a на многообразие $H = c + L$, задается формулой $d = c + g$, где g — проекция вектора $(a - c)$ на подпространство L: $a - c = g + h$, где $g \in L$, $h \perp L$. При этом расстояние от точки a до многообразия H равно длине ортогональной составляющей: $\rho = |h|$.

Доказательство. Из разложения $a - c = g + h$ следует соотношение $a = (c + g) + h$. Уравнение прямой, проходящей через точку a и перпендикулярной многообразию H, имеет вид $H_1 = c_1 + L\{h\}$, где либо $c_1 = a$, либо $c_1 = c + g$.

Прямую, проходящую через точку a и перпендикулярную многообразию H, будем называть перпендикуляром, опущенным из точки a на многообразие H.

Покажем, как найти минимальное расстояние между двумя многообразиями и построить отрезок M_1M_2, который это минимальное расстояние реализует. Условие минимальности длины для вектора $h = M_1M_2$, где $M_1 \in H_1$, $M_2 \in H_2$, такое же, как для точки и подпространства: $h \perp L_1$ и $h \perp L_2$. Следовательно, искомый отрезок будет перпендикулярен обоим многообразиям.

Прямую, перпендикулярную двум многообразиям, будем называть их общим перпендикуляром.

Теорема 7.32. Пусть заданы два непересекающихся многообразия $H_1 = c_1 + L_1$ и $H_2 = c_2 + L_2$. Существуют такие точки $M_1 \in H_1$ и $M_2 \in H_2$, что прямая M_1M_2 является общим перпендикуляром к многообразиям H_1 и H_2. Другая подобная прямая $M_1'M_2'$ является общим перпендикуляром к многообразиям H_1 и H_2 тогда и только тогда, когда выполняется равенство $M_1M_1' = M_2M_2' \in L_1 \cap L_2$.

Доказательство. Построим ортогональную проекцию и ортогональную составляющую вектора $(c_2 - c_1)$ на подпространство $L_1 + L_2$, то есть разложение $c_2 - c_1 = g + h$, где $g \in L_1 + L_2$, $h \perp L_1 + L_2$. По определению подпространства $L_1 + L_2$ вектор $g = a_1 + a_2$, где $a_1 \in L_1$, $a_2 \in L_2$. Получаем разложение $c_2 - c_1 = a_1 + a_2 + h$, или $c_2 - a_2 = a_1 + c_1 + h$. Положим теперь $M_1 = c_1 + a_1 \in H_1$, $M_2 = c_2 - a_2 \in H_2$. Тогда $h = M_2 - M_1 = \overline{M_1 M_2}$.

Для другого общего перпендикуляра $h' = \overline{M_1' M_2'}$ получим тождество $c_2 - a_2' = c_1 + a_1' + h'$, откуда $c_2 - c_1 = a_1' + a_2' + h'$. Из единственности ортогональной составляющей следует, что $h' = h$. Вычитая из разложения $c_2 - c_1 = a_1' + a_2' + h$ разложение $c_2 - c_1 = a_1 + a_2 + h$, получим $b = a_1' - a_1 = a_2 - a_2' \in L_1 \cap L_2$. Осталось заметить, что

$$M_1' - M_1 = (c_1 + a_1') - (c_1 + a_1) = a_1' - a_1 = b,$$

$$M_2' - M_2 = (c_2 - a_2') - (c_2 - a_2) = a_2 - a_2' = b.$$

И наоборот, если $b \in L_1 \cap L_2$, $M_1' = M_1 + b$, $M_2' = M_2 + b$, то $M_2' - M_1' = M_2 - M_1 = h$, то есть прямая $M_1' M_2'$ также является общим перпендикуляром.

Расстояние между многообразиями равно $\left|\overline{M_1 M_2}\right| = |h|$.

Следствие 7.33. В обозначениях теоремы 7.32 теоретико-множественное объединение всех общих перпендикуляров к двум многообразиям H_1 и H_2 составляет многообразие вида $H_3 = M_1 + L_3$, где направляющее подпространство $L_3 = (L_1 \cap L_2) + L\{h\}$.

Пример 7. Найти расстояние между двумя многообразиями

$$H_1 = c_1(0, 2, 1, 1) + L\{a_1(1, 2, 2, 0), a_2(0, -2, -2, 1)\},$$

$$H_2 = c_2(0, 3, 0, 0) + L\{b_1(2, 1, 1, 2),\ b_2(3, 1, 1, 3)\}.$$

Представить в параметрическом виде многообразие H_3, которое является объединением всех общих перпендикуляров к многообразиям H_1 и H_2.

Решение. Выберем в подпространстве L_1 базис $\{a_1(1, 2, 2, 0),\ a_2'(1, 0, 0, 1)\}$, а в подпространстве L_2 базис $\{b_1'(0, 1, 1, 0),\ b_2'(1, 0, 0, 1)\}$. Мы видим, что $a_2' = b_2'$. Поскольку $L_1 \neq L_2$, единственная альтернатива, вытекающая из формулы Грассмана – это $dim(L_1 + L_2) = 3$, $dim(L_1 \cap L_2) = 1$.

Из этого можно сделать несколько выводов. Во-первых, $L_1 \cap L_2 = L\{a_2'(1, 0, 0, 1)\}$. Во-вторых, направление общего перпендикуляра задается нормалью к гиперплоскости $L_1 + L_2$. После соответствующих вычислений получим вектор $n(0, 1, -1, 0)$. Спроектируем вектор $c = c_2 - c_1 = (0, 1, -1, -1)$ на нормаль n. Имеем $h = \dfrac{(c, n)}{(n, n)} \cdot n = \dfrac{2}{2} \cdot n = n.$

Теперь можно вычислить вектор $g = c - h = (0, 0, 0, -1)$ и его разложение по базису $\{a_1, a_2', b_1'\}$ подпространства $L_1 + L_2$: $g = a_1 - a_2' - 2b_1'$. Из равенства для проекции $c_2 - c_1 = g + h = a_1 - a_2' - 2b_1' + h$ получаем формулы для отрезка, перпендикулярного к обоим многообразиям:

$M_1 = c_1 + a_1 - a_2' = (0, 4, 3, 0),$ $\quad M_2 = c_2 + 2b_1' = (0, 5, 2, 0),$ $M_1M_2 = h = (0, 1, -1, 0).$

Следовательно, расстояние между многообразиями $r = |h| = \sqrt{2}$, а параметрическое представление найденного общего перпендикуляра $H_4 = M_1(0, 4, 3, 0) + L\{n(0, 1, -1, 0)\}$. Соответственно, параметрическое представление многообразия H_3, которое является объединением всех общих перпендикуляров к многообразиям H_1 и H_2, имеет вид

$$H_3 = M_1(0, 4, 3, 0) + L\{n(0, 1, -1, 0), a_2'(1, 0, 0, 1)\}.$$

§ 7. Метод наименьших квадратов

В ряде прикладных задач в процессе обработки требуется решить систему линейных алгебраических уравнений, коэффициенты которых взяты из реальных данных. Часто они вычислены приближенно. Если число неизвестных в СЛАУ меньше числа уравнений (а это бывает нередко), система, как правило, несовместна. Тогда встает вопрос о приближенном решении и критериях выбора оптимального приближенного решения.

Один из методов, называемый методом наименьших квадратов, использует для оценки оптимальности приближения теорию евклидовых пространств.

Обоснование метода наименьших квадратов. Пусть дана система линейных алгебраических уравнений $Ax = b$, в общем случае несовместная. Будем считать, что все столбцы A^k матрицы A и столбец b принадлежат евклидову пространству E^m со стандартным скалярным произведением. Приближенным решением матричного уравнения $Ax = b$ по методу наименьших квадратов считается такой вектор-столбец x_{opt}, для которого квадрат расстояния $r^2 = (\rho(b, Ax_{opt}))^2 = |b - Ax_{opt}|^2$ минимален. Мерой отклонения приближенного решения в этом случае служит величина r^2 (отсюда название метода).

Согласно теореме Кронекера-Капелли все векторы вида $z = Ax$ составляют линейную оболочку $L = L\{A^1, A^2, \ldots, A^n\}$ столбцов матрицы A. В соответствие с общей теорией евклидовых пространств элемент g, ближайший к вектору b — это ортогональная проекция вектора b на подпространство L, то есть $b = g + h,\ \ g \in L,\ \ h \in L^{\perp}$. Процесс решения заключается в следующем: надо найти ортогональную проекцию вектора b на подпространство L. Коэффициенты разложения вектора g по столбцам A^k матрицы A будут приближенными решениями СЛАУ. Если $b = g$, то приближенное решение является точным.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 8. Используя метод наименьших квадратов, решить СЛАУ

$$\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 - 2x_3 = -3 \\ x_1 - \ \ x_2 + 2x_3 = 5 \\ -3x_1 \qquad\ \ + 3x_3 = -7 \\ 4x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 8 \end{cases}.$$

Указать, точное получилось решение или приближенное.

Решение. Согласно методу наименьших квадратов, надо искать проекцию g вектора $b(-3, 5, -7, 8)$ на подпространство $L = L\{(a_1(3, 1, -3, 4), a_2(-5, -1, 0, 4), a_3(-2, 2, 3, -2)\}$. СЛАУ для определения коэффициентов разложения $g = x_1a_1 + x_2a_2 + x_3a_3$ имеет вид $GX = J$ (здесь $G = A^T A,\ \ J = A^T B$):

$$\begin{cases} (a_1, a_1)x_1 + (a_1, a_2)x_2 + (a_1, a_3)x_3 = (a_1, b) \\ (a_2, a_1)x_1 + (a_2, a_2)x_2 + (a_2, a_3)x_3 = (a_2, b). \\ (a_3, a_1)x_1 + (a_3, a_2)x_2 + (a_3, a_3)x_3 = (a_3, b) \end{cases}$$

Вычисления дают:

$$\begin{cases} 35x_1 \qquad\quad - 21x_3 = 49 \\ \qquad\ \ 42x_2 \qquad\quad\ = 42 \\ -21x_1 \qquad\quad + 21x_3 = -21 \end{cases}.$$

Эта СЛАУ имеет решение $x = (2, 1, 1)$. Тот же вектор является точным или приближенным решением исходной СЛАУ. Вектор $g = 2a_1 + a_2 + a_3 = (-1, 3, -3, 10)$, вектор $h = b - g = (-2, 2, -4, -2)$. Значит, решение $x=(2,1,1)$ является приближенным решением исходной СЛАУ.

Замечание. Формально матричное уравнение $Gx = d$, которое можно записать в виде $A^T Ax = A^T b$, получается из уравнения $Ax = b$ умножением слева на матрицу A^T. Матрица $G = A^T A$ квадратная. В главе о квадратичных формах второй части курса будет доказано, что если столбцы матрицы A линейно независимы, матрица $G = A^T A$ невырожденна. Поэтому СЛАУ $Gx = d$ имеет единственное решение.

Можно вместо вектора g искать ортогональную проекцию h на одномерное ортогональное дополнение $L^\perp = L\{n\}$. Для нахождения образующей n следует решить однородную СЛАУ

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ -5x_1 - x_2 + \phantom{3x_3 +{}} 4x_4 = 0 \\ -2x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}.$$

Ранг СЛАУ равен трем, ФНР состоит из одного вектора $n=(1,-1,2,1)$. Проекция вектора b на одномерное подпространство $L\{n\}$ задается формулой $h=\dfrac{(b,n)}{(n,n)}\cdot n.$ Следовательно, $h=\dfrac{-14}{7}\cdot n=-2n=(-2,2,-4,-2)$. Тогда проекция на подпространство L равна $g=b-h=(-1,3,-3,10)$. Теперь осталось решить исходную систему, заменив столбец свободных членов b на g.

Пример 9. Линейная апроксимация временных рядов. Пусть даны результаты нескольких измерений $\{x_1, x_2, ..., x_m\}$ величины $x = x(t)$ в разные моменты времени $\{t_1, t_2, ..., t_m\}$. Предполагается, что функция $x(t)=at+b$ линейная. Требуется найти конкретные значения коэффициентов a и b, для которых измеренные величины наиболее точно ложатся на прямую. В идеале должны выполняться равенства $x_j = at_j + b$ для всех $j = 1, 2, ..., m$, которые составляют неоднородную СЛАУ из m линейных уравнений с двумя неизвестными величинами a и b. Матрица коэффициентов СЛАУ состоит из двух столбцов: столбца аргументов t_j и столбца, состоящего из единиц.

Для решения СЛАУ используется метод наименьших квадратов. Если система совместна, то все точки лежат на одной прямой, что нас устраивает. Если система несовместна, решение, найденное по методу наименьших квадратов, даст наилучшее линейное приближение к измеренным данным.

Пример 10. Квадратичная апроксимация временных рядов. В предположениях Примера 9 будем искать квадратичное выражение

$x = at^2 + bt + c,$ приближающее временной ряд $\{x_1, x_2, ..., x_m\}$. В результате мы получим m уравнений вида $x_j = at_j^2 + bt_j + c$ с неизвестными коэффициентами a, b, c. Матрица коэффициентов СЛАУ состоит из трех столбцов: столбца квадратов аргументов t_j^2, столбца аргументов t_j и столбца, состоящего из единиц.

Для нахождения коэффициентов оптимальной параболы используется метод наименьших квадратов.

Замечание. Можно несколько видоизменить критерий оптимальности приближенного решения СЛАУ. Предположим, что в процессе поиска оптимального приближенного решения мы заменили вектор-столбец b свободных членов на другой столбец b', при котором СЛАУ совместна. Используем для количественной оценки приближения выражение $\sum_{j=1}^{m} r_j (b_j - b'_j)^2$ с весами $r_j > 0.$ Практический смысл такой модификации заключается в том, что измерения с большими весами более значимы для практики, чем измерения с меньшими весами. В этих условиях выгодно уменьшить отклонение для измерения с большим весом за счет измерения с меньшим весом.

Однако с точки зрения теории евклидовых пространств разница в подходах заключается только в том, что вместо стандартного скалярного произведения в пространстве R^m используется другое скалярное произведение $(x, y) = \sum_{j=1}^{m} r_j \cdot x_j y_j$. Сама задача формулируется так же: найти ортогональную проекцию вектора b на то же самое подпространство $L = L\{A^1, A^2, ..., A^n\} \subseteq R^m,$ которое было задействовано ранее при описании стандартного метода наименьших квадратов.

Пример 11. Линейная апроксимация для двухфакторного показателя. Пусть величина z зависит от двух числовых аргументов x и y. В качестве ее приближения будем искать линейную функцию $z = ax + by + c.$ Предположим, имеется m результатов измерений величины z, полученных для m пар значений аргументов (x_j, y_j). Если бы величина z действительно вычислялась по формуле $z = ax + by + c,$ то у нас было бы m соотношений $z_j = ax_j + by_j + c.$ Будем считать эти соотношения уравнениями относительно неизвестных переменных a, b, c. Матрица коэффициентов СЛАУ состоит из трех столбцов: столбца аргументов x_j, столбца аргументов y_j и столбца, состоящего из единиц.

Для нахождения коэффициентов линейной функции используется метод наименьших квадратов.

Замечание. При решении СЛАУ $Ax = b$ подпространство $L = L\{A^1, A^2, \ldots, A^n\} \subseteq E^m$ меняется, если произвести в СЛАУ преобразование Гаусса. В частности, оно меняется при умножении уравнения на число. Например, сравним две СЛАУ:

$$\begin{cases} x+y=5 \\ x-y=1 \\ x-2y=0 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x+y=5 \\ x-y=1 \\ 2x-4y=0 \end{cases}.$$

С практической точки зрения они кажутся эквивалентными. Однако подпространства $L\{(1,1,1),(1,-1,-2)\}$ и $L\{(1,1,2),(1,-1,-4)\}$ в евклидовом пространстве E^3 не совпадают, и поэтому проекции вектора $(5,1,0)$ на эти подпространства разные. Приближенные решения, полученные в обоих случаях по методу наименьших квадратов, будут отличаться.

Замечание. Можно определить расстояние в векторном пространстве другими формулами. Например, часто используется расстояние $\rho(x, y) = \sum_{j=1}^{m} \left| x_j - y_j \right|$. Однако оно не индуцируется никаким скалярным произведением. Поэтому задача нахождения минимального расстояния до подпространства $L = L\{A^1, A^2, \ldots, A^n\}$ не может быть решена методом проектирования на это подпространство. Такую задачу следует решать как задачу нахождения условного экстремума.

Г Л А В А 8

ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

§ 1. Определители 2-го и 3-го порядков

Определитель (синоним «детерминант») – это функция $det(A)$ (или $\Delta(A)$), которая по определенному закону ставит в соответствие каждой квадратной матрице порядка n число. Для записи определителя принято заключать элементы матрицы в прямые скобки (вместо круглых скобок, которые обозначают саму матрицу).

Замечание. Можно также считать определитель числовой функцией от n^2 аргументов, которыми служат элементы матрицы. Еще один подход заключается в том, что определитель считается числовой функцией от n векторных аргументов, которыми являются строки матрицы (рассматриваемые как элементы пространства R^n).

Замечание. Термин «определитель» приводит к некоторой неуклюжести при формулировке теорем, но в русскоязычной традиции он используется повсеместно.

В теории определителей можно выделить несколько аспектов.

(1) Теоретическое обоснование понятия определителя и вывод общей формулы определителя. Тут имеется несколько подходов, но все они непросты и требуют привлечения достаточно глубоких алгебраических понятий.

(2) Разнообразные свойства определителей.

(3) Методы вычисления определителей.

(4) Использование определителей при решении прикладных задач.

Наиболее оптимальным при изложении теории определителей, на наш взгляд, будет отталкиваться от фундаментальных свойств определителя. Такой подход позволит нам сформулировать все основные факты об определителях и в конце концов естественным путем прийти к его общей формуле.

Сначала в качестве примера использования определителей рассмотрим общее решение системы линейных уравнений второго порядка $\begin{cases} ax+by=k \\ cx+dy=n \end{cases}$. Вычтем из первого уравнения, умноженного на d, второе уравнение, умноженное на b. Коэффициент при y уничтожится, и мы получим уравнение $(ad-cb)x = kd-nb.$ Теперь если $ad-cb \neq 0,$ то $x=\dfrac{kd-nb}{ad-cb}.$ Аналогично, если из второго уравнения, умноженного на a, вычесть первое уравнение, умноженное на c, то уничтожится коэффициент при x, и мы получим $(ad-cb)y = an-ck,$ или $y=\dfrac{an-ck}{ad-cb}.$

Сопоставим матрице $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ число $\Delta(A)=a_{11}\cdot a_{22}-a_{12}\cdot a_{21},$ и назовем его определителем матрицы. Согласно этому правилу

$$\Delta=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc,\ \ \Delta_1=\begin{vmatrix} k & b \\ n & d \end{vmatrix}=kd-bn,\ \ \Delta_2=\begin{vmatrix} a & k \\ c & n \end{vmatrix}=an-kc.$$

Тогда $x=\dfrac{\Delta_1}{\Delta},\ \ y=\dfrac{\Delta_2}{\Delta}.$ Данная формула для решения СЛАУ от двух переменных называется правилом Крамера. Позже мы докажем ее в общем случае.

Определитель второго порядка имеет простой геометрический смысл. В Главе 2 мы получили формулу для площади параллелограмма: $S_{ABCD}=\left|x_1y_2-x_2y_1\right|.$ Сравнивая ее с выражением для определителя, мы видим, что модуль определителя матрицы второго порядка численно равен площади параллелограмма, построенного на векторах, которыми служат строки A_1 и A_2 матрицы A.

Определитель матрицы третьего порядка задается формулой

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=$$

$$=(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32})-(a_{13}a_{22}a_{31}+a_{12}a_{21}a_{33}+a_{11}a_{23}a_{32}).$$

В этой сумме каждое слагаемое равно произведению трех элементов, взятых по одному из каждой строки и каждого столбца (всего таких слагаемых $3! = 6$). Знаки слагаемых выбираются по закону, который будет описан позже. Можно показать, что модуль определителя матрицы A третьего порядка численно равен объему параллелепипеда в пространстве E^3, ребра которого равны векторам A_1, A_2, A_3 (строкам матрицы A).

Непосредственное вычисление показывает, что при перестановке двух строк матрицы он меняет знак, а определитель единичной матрицы равен единице.

Выражение для определителя третьего порядка можно переписать в виде

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11} \cdot (a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12} \cdot (a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13} \cdot (a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) =$$

$$= a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11} \cdot M_{11} - a_{12} \cdot M_{12} + a_{13} \cdot M_{13}.$$

Выражение M_{1k} равно определителю матрицы второго порядка, полученной вычеркиванием из исходной матрицы первой строки и k-го столбца. Этот определитель называется минором элемента a_{1k}, а само выражение $\Delta = a_{11} \cdot M_{11} - a_{12} \cdot M_{12} + a_{13} \cdot M_{13}$ называется разложением определителя по элементам первой строки. Позже мы его выведем в общем виде.

Так как в разложении определителя по первой строке миноры не зависят от элементов первой строки, определитель линеен по первой строке. Это же верно и для других строк.

Соберем вместе основные свойства определителей второго и третьего порядка.

(1) Если строка C_j матрицы C равна линейной комбинации $C_j = \lambda \cdot A_j + \mu \cdot B_j$ строк матриц A и B, а остальные строки всех трех матриц одинаковые, то $\Delta(C) = \lambda \cdot \Delta(A)\mu \cdot \Delta(B)$.

(2) При перестановке двух строк матрицы ее определитель меняет знак.

(3) Определитель единичной матрицы равен единице.

Эти свойства назовем линейностью по строкам, антисимметричностью и нормировкой на единичную матрицу.

Пример 1. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & 5 & 2 \end{vmatrix}$ разложением по первой строке:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} - (-2) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= (3 \cdot 2 - 5 \cdot 4) + 2(2 \cdot 2 - 4 \cdot (-1)) + 3(2 \cdot 5 - 3 \cdot (-1)) = 41.$$

§ 2. Полилинейные функции

Наша программа изложения теории определителей заключается в следующем. Сначала мы дадим общие определения линейной и полилинейной функции и выведем некоторые их свойства. Затем мы рассмотрим кососимметрические полилинейные функции и их свойства. После этого мы дадим определение определителя как полилинейной кососимметрической функции n-го порядка с условием нормировки на единичную матрицу, и выведем из этого определения основные свойства определителя и формулу его вычисления.

Введем понятия линейных, билинейных и полилинейных функций.

Определение 8.1. Линейной функцией (или линейным функционалом) в векторном пространстве V называется числовая функция $f(x)$ векторного аргумента $x \in V$, для которой выполняется свойство линейности: $f(\lambda x + \mu y) = \lambda \cdot f(x) + \mu \cdot f(y)$.

Лемма 8.2. Для линейного функционала $f(\Theta) = 0$.

Доказательство. $f(\Theta) = f(2 \cdot \Theta) = 2 \cdot f(\Theta)$. Следовательно, $f(\Theta) = 0$.

Теорема 8.3. Зафиксируем в пространстве V базис $G = \{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$. Тогда любой вектор x задается своими координатами: $x = \sum_{k=1}^{n} x_k g_k$. Функция $f(x)$ является линейной тогда и только тогда, когда существуют такие константы $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, что

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k x_k .$$

Доказательство необходимости. Согласно определению линейного функционала $f(x) = \sum_{k=1}^{n} x_k f(g_k)$. Если положить $a_k = f(g_k)$, то $f(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k x_k$.

Доказательство достаточности. То, что формула $f(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k x_k$ с произвольными коэффициентами задает линейный функционал, проверяется непосредственно:

$$f(\lambda x + \mu y) = \sum_{k=1}^{n} a_k (\lambda x_k + \mu y_k) = \lambda \cdot \sum_{k=1}^{n} a_k x_k + \mu \cdot \sum_{k=1}^{n} a_k y_k = \lambda \cdot f(x) + \mu \cdot f(y).$$

Замечание. В другом базисе набор констант $\{a_k\}$ будет другим.

Лемма 8.4. Значение линейной функции можно представить в виде единственного элемента квадратной матрицы первого порядка, полученной матричным умножением $A^T \cdot X$, где вектор-столбец X содержит координаты вектора x в базисе G, а вектор-столбец A содержит набор констант $\{a_k\}$.

Доказательство. Надо сравнить формулу линейной функции с определением матричного умножения для матриц A^T и X:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k x_k = A^T \cdot X.$$

Лемма 8.5. Множество линейных функционалов в линейном пространстве V является линейным пространством.

Доказательство. При умножении на число и при сложении линейные функции остаются линейными, поэтому линейные функционалы являются подпространством пространства всех функций на V.

Замечание. Пространство линейных функционалов называется пространством, сопряженным к V. Это пространство обозначается V^*.

Замечание. Формула $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k x_k$ для координат вектора x в базисе $G = \{g_k\}$ показывает, что набор функционалов $h = \{h^k\}$ таких, что $h^k(x) = x_k$, является базисом в пространстве V^* (так как имеет место разложение $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \cdot h^k(x)$). Базис h в пространстве V^* называется сопряженным к базису g в пространстве V.

Теперь определим билинейные функции.

Определение 8.6. Билинейной функцией (или билинейной формой) в векторном пространстве V называется числовая функция $f(x, y)$ от двух векторных аргументов $x \in V$ и $y \in V$, которая линейна по каждому аргументу при фиксированном значении другого аргумента.

Иначе говоря, если для билинейной функции $f(x, y)$ задать числовую функцию одного векторного аргумента, зафиксировав другой аргумент (функция $g_a(x) = f(x, a)$ или $h_b(y) = f(b, y)$), то такие функции окажутся линейными функционалами.

Теорема 8.7. Пусть в пространстве V задан базис $g = \{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$. Выпишем для векторов x и y их разложения по базису g: $x = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j g_j$, $y = \sum\limits_{k=1}^{n} y_k g_k$. Функция двух аргументов $f(x, y)$ будет билинейной тогда и только тогда, когда существуют n^2 констант $\{b_{jk}\}$, для которых

$f(x,y)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}b_{jk}\cdot x_j y_k$. Константы $\{b_{jk}\}$ составляют матрицу B_g, которая называется матрицей билинейной формы в базисе g.

Доказательство необходимости. Вследствие линейности билинейной формы по каждому аргументу

$$f(x,y)=f\left(\sum_{j=1}^{n}x_j g_j,\ \sum_{k=1}^{n}y_k g_k\right)=\sum_{j=1}^{n}x_j\cdot f\left(g_j,\ \sum_{k=1}^{n}y_k g_k\right)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}x_j y_k\cdot f(g_j,g_k).$$

Положим $b_{jk}=f(g_j,g_k)$. Тогда $f(x,y)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}b_{jk}\cdot x_j y_k$.

Доказательство достаточности. Линейность по обоим аргументам двойной суммы $f(x,y)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}b_{jk}\cdot x_j y_k$ с произвольными константами b_{jk} проверяется так же, как это делается для линейного функционала.

Лемма 8.8. Значение билинейной формы можно представить в виде единственного элемента квадратной матрицы первого порядка, полученной матричным умножением трех матриц $X^T\cdot B_g\cdot Y$, где X и Y – вектор-столбцы координат векторов x и y в базисе g.

Доказательство. Надо сравнить формулу билинейной функции с определением матричного умножения для трех матриц X^T, B_g и Y:
$f(x,y)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}x_j\cdot b_{jk}\cdot y_k=X^T\cdot B_g\cdot Y$.

Замечание. В другом базисе h матрица B_h будет другой.

Билинейная форма является частным случаем полилинейной функции.

Определение 8.9. Полилинейной функцией ранга m (или порядка m) в векторном пространстве V называется числовая функция $f(x^1,x^2,\ldots,x^m)$ от m векторных аргументов $x^j\in L$, которая линейна по каждому аргументу при фиксированных значениях остальных аргументов. Другими словами, если задать числовую функцию $h_j(x)$ одного векторного аргумента $x\in V$ формулой $h_j(x)=f(a^1,\ldots,a^{j-1},x,a^{j+1},\ldots,a^m)$, то функция $h_j(x)$ будет линейным функционалом.

В частности, полилинейная функция первого ранга – линейный функционал, полилинейная функция второго ранга – билинейная форма.

Замечание. Другое название полилинейной функции – тензор m-го ранга.

Лемма 8.10. Если какой-нибудь аргумент полилинейной функции равен нуль-вектору, то ее значение равно нулю.

Доказательство. Если для произвольного набора аргументов $\{a^i\}$, где $i \neq j$, задать линейный функционал $h_j(x) = f(a^1, \ldots, a^{j-1}, x, a^{j+1}, \ldots, a^m)$, то из необходимого условия для линейного функционала следует, что $h_j(\Theta) = f(a^1, \ldots, a^{j-1}, \Theta, a^{j+1}, \ldots, a^m) = 0.$

Для полилинейной функции существует представление, обобщающее представление для билинейной формы.

Теорема 8.11. Пусть в пространстве V задан базис $g = \{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$. Запишем разложения векторов x^j по этому базису: $x^j = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k^j g_k$ для всех $j = 1, 2, \ldots, m$. Функция $f(x^1, x^2, \ldots, x^m)$ от m векторных аргументов будет полилинейной тогда и только тогда, когда существуют n^m констант $\{c_{k_1, \ldots, k_m}\}$ таких, что значение полилинейной функции равно m-кратной сумме:

$$f(x^1, x^2, \ldots, x^m) = \sum_{k_1=1}^{n} \sum_{k_2=1}^{n} \cdots \sum_{k_m=1}^{n} c_{k_1 k_2 \ldots k_m} x_{k_1}^1 x_{k_2}^2 \ldots x_{k_m}^m .$$

Коэффициенты в m-кратной сумме заданы равенством $c_{k_1 k_2 \ldots k_m} = f(g_{k_1}, g_{k_2}, \ldots, g_{k_m})$.

Доказательство необходимости. Следует последовательно использовать линейность функции по всем ее аргументам:

$$f(x^1, x^2, x^3, \ldots, x^{m-1}, x^m) = f\left(\sum_{k_1=1}^{n} x_{k_1}^1 \cdot g_{k_1}, x^2, x^3, \ldots, x^{m-1}, x^m \right) =$$

$$= \sum_{k_1=1}^{n} x_{k_1}^1 \cdot f\left(g_{k_1}, x^2, x^3, \ldots, x^{m-1}, x^m \right) =$$

$$= \sum_{k_1=1}^{n} x_{k_1}^1 \cdot f\left(g_{k_1}, \sum_{k_1=1}^{n} x_{k_2}^2 \cdot g_{k_2}, x^3, \ldots, x^{m-1}, x^m \right) =$$

$$= \sum_{k_1=1}^{n} \sum_{k_2=1}^{n} x_{k_1}^1 x_{k_2}^2 \cdot f\left(g_{k_1}, g_{k_2}, x^3, \ldots, x^{m-1}, x^m \right) = \ldots =$$

$$= \sum_{k_1=1}^{n} \sum_{k_2=1}^{n} \cdots \sum_{k_{m-1}=1}^{n} x_{k_1}^1 x_{k_2}^2 \ldots x_{k_{m-1}}^{m-1} \cdot f\left(g_{k_1}, g_{k_2}, \ldots, g_{k_{m-1}}, x^m \right) =$$

$$=\sum_{k_1=1}^{n}\sum_{k_2=1}^{n}\dots\sum_{k_{m-1}=1}^{n}x^1_{k_1}x^2_{k_2}\dots x^{m-1}_{k_{m-1}}\cdot f\left(g_{k_1},g_{k_2},\dots,g_{k_{m-1}},\sum_{k_m=1}^{n}x^m_{k_m}\cdot g_{k_m}\right)=$$

$$=\sum_{k_1=1}^{n}\sum_{k_2=1}^{n}\dots\sum_{k_m=1}^{n}x^1_{k_1}x^2_{k_2}\dots x^m_{k_m}\cdot f\left(g_{k_1},g_{k_2},\dots,g_{k_m}\right).$$

Осталось положить $c_{k_1k_2\dots k_m}=f\left(g_{k_1},g_{k_2},\dots,g_{k_m}\right)$.

Доказательство достаточности. Если в m-кратной сумме

$$f(x^1,x^2,\dots,x^m)=\sum_{k_1=1}^{n}\sum_{k_2=1}^{n}\dots\sum_{k_m=1}^{n}c_{k_1k_2\dots k_m}x^1_{k_1}x^2_{k_2}\dots x^m_{k_m}$$

считать константами координаты всех векторов $x^i=b^i$, кроме координат x^j_k вектора x^j, то получится выражение

$$h(x^j)=f(b^1,b^2,\dots,x^j,\dots,b^m)=\sum_{k_1=1}^{n}\sum_{k_2=1}^{n}\dots\sum_{k_m=1}^{n}c_{k_1k_2\dots k_m}b^1_{k_1}b^2_{k_2}\dots x^j_{k_j}\dots b^m_{k_m}=$$

$$\sum_{k_j=1}^{n}\left(\sum_{k_1=1}^{n}\dots\sum_{k_{j-1}=1}^{n}\sum_{k_{j+1}=1}^{n}\dots\sum_{k_m=1}^{n}c_{k_1k_2\dots k_m}b^1_{k_1}\dots b^{j-1}_{k_{j-1}}b^{j+1}_{k_{j+1}}\dots b^m_{k_m}\right)\cdot x^j_{k_j}.$$

Для зафиксированного набора $\{b^i\}$ и любого k выражение

$$a_k=\sum_{k_1=1}^{n}\dots\sum_{k_{j-1}=1}^{n}\sum_{k_{j+1}=1}^{n}\dots\sum_{k_m=1}^{n}c_{k_1k_2\dots k_m}b^1_{k_1}\dots b^{j-1}_{k_{j-1}}b^{j+1}_{k_{j+1}}\dots b^m_{k_m}$$

является константой. Поэтому функция $h(x^j)==\sum_{k=1}^{n}a_kx^j_k$ является линейным функционалом.

Замечание. Запись m-кратной суммы будет более компактной, если ввести обозначение для набора номеров координат аргументов полилинейной функции. Будем использовать набор $K=\{k_1,k_2,\dots,k_m\}$, и обозначим символом C_K константу $c_{k_1k_2\dots k_m}$, где k_j – номер координаты вектора x^j. Тогда формулу полилинейной функции можно записать в виде $f(x^1,x^2,\dots,x^m)=\sum_K C_K\cdot\prod_{j=1}^{m}x^j_{k_j}$, где суммирование ведется по всем наборам индексов $K=\{k_1,k_2,\dots,k_m\}$ длины m, а в произведении для каждого слагаемого, соответствующего набору K, стоят сомножители $x^j_{k_j}$, обозначающие координату с номером k_j вектора x^j.

Определение 8.12. Назовем полилинейную функцию симметричной, если при любой перестановке пары ее аргументов значение функции не меняется. Назовем полилинейную функцию антисимметричной (синоним «кососимметрическая полилинейная функция»), если при любой перестановке пары ее аргументов значение функции меняет знак.

Замечание. При умножении на число и при сложении полилинейные функции остаются полилинейными, поэтому полилинейные функции на линейном пространстве L сами образуют линейное пространство. Это пространство называют тензорным, его размерность n^m. Симметричные и кососимметрические полилинейные функции порядка m являются подпространствами тензорного пространства.

Определитель является кососимметрической полилинейной функцией, аргументами которой служат строки матрицы. Поэтому в дальнейшем нас интересуют свойства именно кососимметрических полилинейных функций.

Теорема 8.13. Пусть функция $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ полилинейная и кососимметрическая. Тогда:

(1) Если два аргумента функции равны, то значение функции равно нулю.

(2) Значение функции не изменится, если к одному аргументу прибавить другой, умноженный на любое действительное число.

(3) Значение функции не изменится, если к одному аргументу прибавить линейную комбинацию других аргументов.

Доказательство. (1) При перестановке одинаковых аргументов значение функции, с одной стороны, не изменится, с другой стороны, согласно свойству антисимметричности, оно должно изменить знак. Значит, значение функции равно нулю.

(2) Используем свойство линейности для j-го аргумента полилинейной функции:

$$f(x^1, \dots, x^i, \dots, x^j + \lambda x^i, \dots, x^m) =$$
$$= f(x^1, \dots, x^i, \dots, x^j, \dots, x^m) + \lambda \cdot f(x^1, \dots, x^i, \dots, x^i, \dots, x^m).$$

Второе слагаемое в силу пункта (1) равно нулю.

(3) Прибавить к какому-то аргументу линейную комбинацию других аргументов означает несколько раз выполнить преобразование пункта (2).

Теорема 8.14. (Критерий кососимметричности). Для того чтобы полилинейная функция была кососимметрической, необходимо и достаточно, чтобы все коэффициенты $C_K = c_{k_1 k_2 \dots k_m}$ при перестановке индексов k_p и k_q меняли знак.

Доказательство необходимости. Перестановке двух индексов k_p и k_q в наборе $K = \{k_1, k_2, \dots, k_m\}$ соответствует перестановка двух аргументов g_{k_p} и g_{k_q} в выражении $C_K = f(g_{k_1}, g_{k_2}, \dots, g_{k_m})$. Вследствие кососимметричности знак функции при этом меняется. Следовательно, константы C_K при перестановке индексов k_p и k_q меняют знак.

Доказательство достаточности. Пусть кососимметрическая функция в некотором базисе $G = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ задана формулой $f(x^1, x^2, \dots, x^m) = \sum\limits_K C_K \cdot \prod\limits_{j=1}^{m} x^j_{k_j}$, где при перестановке индексов k_p и k_q константы C_K меняют знак. Проанализируем, что произойдет в m-кратной сумме при перестановке векторов x^p и x^q. Рассмотрим в обеих суммах слагаемые, содержащие произведение одних и тех же координат одних и тех же векторов: $x^1_{k_1} \dots x^p_{k_p} \dots x^q_{k_q} \dots x^m_{k_m}$ и $x^1_{k_1} \dots x^q_{k_q} \dots x^p_{k_p} \dots x^m_{k_m}$. Если первому слагаемому соответствует коэффициент $C_K = c_{k_1 \dots k_p \dots k_q \dots k_m}$, то во втором слагаемом это будет коэффициент $C_{K'} = c_{k_1 \dots k_q \dots k_p \dots k_m} = -C_K$. Значит, при перестановке векторов x^p и x^q вся сумма поменяет знак.

Следствие 8.15. Для кососимметрической функции, если в наборе $K = \{k_1, k_2, \dots, k_m\}$ будет $k_i = k_j$, то $C_K = c_{k_1 k_2 \dots k_m} = f(g_{k_1}, g_{k_2}, \dots, g_{k_m}) = 0$.

Доказательство. Коэффициент $C_K = f(g_{k_1}, g_{k_2}, \dots, g_{k_m})$ при перестановке аргументов g_p и g_q, с одной стороны, не меняется, с другой стороны, должен поменять знак. Следовательно, $C_K = 0$.

Следствие 8.16. В пространстве размерности n кососимметрическая полилинейная функция порядка $m > n$ тождественно равна нулю.

Доказательство. При $m > n$ среди аргументов функции $f(g_{j_1}, g_{j_2}, \dots, g_{j_m})$ обязательно есть одинаковые. Согласно предыдущему следствию, все константы $c_{j_1 j_2 \dots j_m} = 0$, то есть полилинейная функция тождественно равна нулю.

Замечание. Пока не доказано, что в n-мерном пространстве существуют ненулевые кососимметрические функции порядка $m \le n$.

Особый интерес представляет полилинейная функция порядка n. В ее записи участвуют только такие константы C_K, для которых набор K состоит из разных натуральных чисел от 1 до n. Поскольку всего в наборе n чисел, каждое число от 1 до n встретится в наборе K ровно один раз (это рассуждение называется принципом Дирихле). Такие наборы изучаются в теории перестановок.

§ 3. Элементы теории перестановок

Определение 8.17. Назовем упорядоченный набор чисел $K=\{k_1, k_2, \dots, k_n\}$ длины n перестановкой n-го порядка, если членами набора являются числа от 1 до n, причем все числа в наборе разные. Перестановку $e=\{1, 2, \dots, n\}$ назовем тривиальной или единичной. Множество всех перестановок n-го порядка назовем группой перестановок и обозначим символом S_n.

Лемма 8.18. Общее количество различных перестановок n-го порядка равно $n!$.

Доказательство стандартное для процедуры, которая в теории вероятностей называется «выбором без возврата». На первое место перестановки можно поставить любое из n чисел. На второе место – любое из $(n-1)$ оставшихся. На третье место – любое из $(n-2)$ оставшихся, и т.д. В результате получится $n(n-1)(n-2)\dots2\cdot1=n!$ вариантов.

Определение 8.19. Назовем транспозицией преобразование перестановки, при котором два члена перестановки меняются местами. Если меняются местами соседние члены перестановки, будем называть транспозицию элементарной.

Замечание. Понятие «транспозиция» специально введено для того, чтобы не путать набор «перестановка» и действие «перестановка» (например, перестановка строк матрицы).

Мы докажем, что от перестановки e к перестановке K можно перейти либо всегда за четное, либо всегда за нечетное число транспозиций. Четность или нечетность такого числа транспозиций является характеристическим свойством перестановки.

Определение 8.20. Будем говорить, что в перестановке $\{k_1, k_2, \dots, k_n\}$ для элементов k_i и k_j есть инверсия, если $i < j$, но $k_i > k_j$. Подсчитаем в перестановке общее количество I инверсий для всех пар ее элементов. Перестановка называется четной, если I четное, и нечетной, если I нечетное. Определим функцию четности перестановки формулой: $\sigma(K)=+1$ для четной перестановки, $\sigma(K)=-1$ для нечетной перестановки.

В единичной перестановке инверсий нет, то есть она четная.

Лемма 8.21. В результате элементарной транспозиции элементов k_j и k_{j+1} перестановка меняет четность.

Доказательство. Очевидно, инверсия пары элементов перестановки, не затронутых транспозицией, не изменится. Также транспозиция не влияет на инверсию k_j или k_{j+1} с элементом k_i для $i < j$ или $i > j + 1$. В то же время для элементов k_j и k_{j+1} инверсия появится, если ее не было, или исчезнет, если она была. Следовательно, общее количество инверсий изменится на 1, а четность перестановки изменится.

Лемма 8.22. В результате любой транспозиции перестановка меняет четность.

Доказательство. Покажем, как можно выполнить транспозицию элементов $p = k_i$ и $q = k_j$, где $i < j$, с помощью нескольких элементарных транспозиций соседних элементов. Будем последовательно менять число p в позиции i с каждым соседним числом справа, пока оно не окажется после числа q на позиции j (для этого потребуется $(j - i)$ элементарных транспозиций). Затем число q в позиции $(j - i)$ будем менять местами с соседями слева, пока оно не займет i-ю позицию (для этого потребуется $((j - 1) - i)$элементарных транспозиций). Общее количество элементарных транспозиций равно $(2j - 2i - 1)$ – число нечетное, поэтому четность перестановки изменится.

Следствие 8.23. Четность перестановки совпадает с четностью числа транспозиций в любой последовательности транспозиций, с помощью которых можно получить данную перестановку из единичной.

Подведем итоги. Мы определили функцию $\sigma(K)$ на множестве перестановок, называемую четностью. После этого было доказано, что количество транспозиций N, которое требуется, чтобы получить данную перестановку из единичной, либо всегда четно, либо всегда нечетно, и что $\sigma(K) = (-1)^N$.

Замечание. В классической алгебре перестановки определяются иначе. Именно, перестановкой называется взаимно-однозначное отображение конечного множества на себя. Если перенумеровать элементы множества числами от 1 до n, то каждую перестановку можно задать матрицей из двух строк длины n, в которой в первой строке стоит номер аргумента отображения, а во второй строке – номер результата отображения.

Порядок столбцов в такой матрице не важен. Например, матрица $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ описывает отображение, при котором $1 \to 3$, $2 \to 5$,

$3 \to 2,\ \ 4 \to 4,\ \ 5 \to 1.$ То же отображение можно описать матрицей $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 4 & 1 \\ 5 & 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$. Для единообразия принято использовать первую запись, в которой элементы в верхней строке идут в порядке возрастания. Тогда первую строку можно отбросить и задавать перестановку только второй строкой матрицы.

Именно так мы и поступили при определении перестановок.

§ 4. Понятие определителя матрицы

Определение 8.24. Определителем (или детерминантом) матрицы A называется числовая функция $\Delta(A)$, определенная на квадратных матрицах порядка n, удовлетворяющая трем условиям:

(1) Если три матрицы A, B и C отличаются только в j-й строке, причем $C_j = \lambda \cdot A_j + \mu \cdot B_j$, то $\Delta(C) = \lambda \cdot \Delta(A) + \mu \cdot \Delta(B)$ (линейность по строке).

(2) При перестановке двух строк матрицы определитель меняет знак (антисимметричность).

(3) $\Delta(E) = 1$ (нормировка на единичную матрицу).

Эквивалентная формулировка. Определителем квадратной матрицы A называется полилинейная кососимметрическая функция $\Delta(A) = \Delta(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ порядка n, заданная в пространстве R^n строк матрицы A, и удовлетворяющая ограничению нормировки: $\Delta(E) = \Delta(e_1, e_2, \ldots, e_n) = 1$. В определении подразумевается, что $e = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ – стандартный базис пространства R^n.

Наша ближайшая задача – выписать формулу определителя через коэффициенты матрицы. Будем это делать последовательно.

Первая формула определителя. Строка A_j матрицы A в стандартном базисе $\{e_k\}$ характеризуется разложением $A_j = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{jk} e_k$. Следовательно, для определителя матрицы общая формула $f(x^1, x^2, \ldots, x^n) = \sum\limits_{K} C_K \cdot \prod\limits_{j=1}^{n} x^j_{k_j}$ полилинейной кососимметрической функции ранга n принимает вид

$$\Delta(A_1, A_2, \ldots, A_n) = \sum_{k_1=1}^{n} \sum_{k_2=1}^{n} \ldots \sum_{k_n=1}^{n} c_{k_1 k_2 \ldots k_n} a_{1k_1} a_{2k_2} \ldots a_{nk_n} = \sum_{K} C_K \cdot \prod_{j=1}^{n} a_{jk_j},$$

где сумма берется по всем наборам K с попарно различными индексами (по всем перестановкам), причем все коэффициенты $C_K = c_{k_1 k_2 \ldots k_n} = \Delta(e_{k_1}, e_{k_2}, \ldots, e_{k_n})$ меняют знак при перестановке любой пары индексов.

Вторая формула определителя. Каждой перестановке $K = (k_1, k_2, \ldots, k_n)$ сопоставим матрицу E_K, у которой j-я строка равна базисному вектору e_{k_j}. Тогда $C_K = \Delta(E_K)$, и формула определителя принимает вид

$$\Delta(A) = \sum_K \Delta(E_K) \cdot \prod_{j=1}^{n} a_{jk_j}.$$

В каждой матрице E_K можно поменять строки так, чтобы получилась единичная матрица E. Для этого строку с вектором e_1 надо поменять местами с первой строкой, затем строку с вектором e_2 поменять местами со второй строкой и т.д. Каждой такой операции соответствует одна транспозиция в перестановке K. Количество таких операций, приводящих матрицу E_K к матрице E, равно количеству транспозиций, приводящих перестановку K к единичной перестановке. При каждой перестановке двух строк знак определителя меняется. Следовательно, величина $C_K = \Delta(E_K) = (-1)^N$, где N – количество транспозиций, приводящих перестановку K к единичной перестановке. Величина $(-1)^N$ равна четности перестановки: $C_K = \Delta(E_K) = (-1)^N = \sigma(K)$.

Приведенное рассуждение позволяет положительно решить вопрос о существовании ненулевых структурных констант C_K.

Лемма 8.25. Структурные константы в формуле определителя $C_K = \Delta(E_K) = \sigma(K)$.

Доказательство. Четность числа транспозиций строк, необходимых для перехода от единичной матрицы к матрице E_K, зависит только от перестановки K. При каждой транспозиции строк меняют знак и определитель, и четность перестановки. Следовательно, $\Delta(E_K) = \sigma(K)$.

Теперь мы можем привести окончательную формулу определителя матрицы.

Теорема 8.26. (Строчная формула определителя). Определитель матрицы порядка n вычисляется по формуле

$$\Delta(A) = \sum_{K \in S_n} \sigma(K) \cdot \prod_{j=1}^{n} a_{jk_j},$$

где сумма берется по всем перестановкам K порядка n, а элемент перестановки k_j интерпретируется как номер столбца в j-й строке.

Словесная формулировка. Определитель матрицы n-го порядка равен алгебраической сумме всех произведений из n элементов матрицы, взятых по одному из каждой строки и каждого столбца матрицы. Знак перед каждым слагаемым определяется следующим образом: сомножители в произведении надо упорядочить по номерам строк, после чего подсчитать четность перестановки, образованной номерами столбцов.

Замечание. Упомянутую перестановку можно трактовать как взаимно однозначное отображение s множества строк на множество столбцов, заданное сомножителями произведения: для сомножителя a_{jk_j} имеем $s(j)=k_j$.

Для матрицы второго порядка $\sigma(\{1,2\})=1$, $\sigma(\{2,1\})=-1$, так что формула определителя второго порядка $\Delta(A)=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ согласована с общей формулой определителя. В качестве упражнения попробуйте самостоятельно подсчитать четности перестановок третьего порядка и вывести формулу определителя третьего порядка.

Теорема 8.27. (Столбцовая формула определителя). Функция на множестве квадратных матриц порядка n, которая вычисляется по формуле $\Delta'(A)=\sum\limits_{J\in S_n}\sigma(J)\cdot\prod\limits_{k=1}^{n}a_{j_k k}$, совпадает с ранее введенным определителем $\Delta(A)$. Здесь элемент перестановки j_k интерпретируется как номер строки в k-м столбце.

Доказательство. Нужно показать, что для любой матрицы значения, вычисленные при помощи строчной и столбцовой формул, совпадают. Согласно Второй формуле определителя, его строчное значение однозначно задается значениями на множестве таких матриц A, которые содержат ровно одну единицу в каждой строке, причем столбцы этих единиц в разных строках разные (остальные элементы равны нулю). По аналогии столбцовое значение определителя однозначно задается значениями на множестве матриц A, которые содержат ровно одну единицу в каждом столбце, причем строки этих единиц в разных столбцах разные. Нетрудно видеть, что эти множества совпадают и состоят из множества матриц A, которые содержат ровно по одной единице в каждой строке и каждом столбце, а остальные элементы матрицы равны нулю.

Рассмотрим матрицу A такого вида. Для нее строчная формула дает значение $\sigma(K)$, а столбцовая формула – значение $\sigma(J)$. Надо доказать, что при приведении матрицы A к единичной матрице перестановкой строк или перестановкой столбцов четность числа перестановок в обоих случаях одинаковая. Для этого воспользуемся особым описанием матрицы A. Каждая единица в этой матрице задается парой (j, k), состоящей из номера строки и номера столбца. Матрица A задается множеством из n таких пар. Выберем в этом множестве произвольный порядок. Будем описывать матрицу A парой $S = (J, K)$, где $J = \{j_1, j_2, \ldots, j_n\}$ задает получившийся порядок номеров строк, а $K = \{k_1, k_2, \ldots, k_n\}$ задает порядок номеров столбцов. Из-за того, что порядок при описании единиц в матрице A не важен, при одновременной транспозиции в перестановках J и K членов с одинаковыми номерами новый набор $S' = (J', K')$ будет описывать ту же матрицу A.

Переставим в матрице A строки с номерами i_1 и i_2. Тогда новой матрице A' будет соответствовать пара $S' = (J', K)$, в которой перестановка J' получается некоторой транспозицией членов перестановки J с номерами p и q (такими, что $j_p = i_1$ и $j_q = i_2$).

Сопоставим сделанной перестановке строк перестановку столбцов с номерами k_p и k_q. Этой операции соответствует транспозиция в перестановке K членов с такими же номерами p и q. Новая матрица получит описание $S'' = (J, K')$. Но пары $S' = (J', K)$ и $S'' = (J, K')$ описывают одну и ту же матрицу, поскольку вторая пара из первой получается одновременной транспозицией в перестановках J' и K членов с одинаковыми номерами p и q (в результате получатся перестановки J и K'). Следовательно, для каждой перестановки строк матрицы A можно указать такую перестановку ее столбцов, которая приводит к той же матрице.

Из последнего утверждения следует, что если мы некоторой последовательностью перестановок строк привели матрицу A к единичной матрице, то ее можно привести к единичной матрице за такое же число перестановок столбцов. Из этого следует, что для матрицы A указанного вида четности $\sigma(J)$ и $\sigma(K)$, фигурирующие в строчной и столбцовой формулах определителя, одинаковые. Как уже упоминалось вначале, из этого следует, что они верны для любой матрицы. Теорема 8.27 доказана.

Замечание. Поскольку порядок пар (j, k) при описании матрицы A, в которой в каждой строке и каждом столбце ровно по одной единице, не важен, можно выбрать два специальных описания. В первом описании пары будут упорядочены по номерам строк, то есть $S_1 = (e, K)$, где e – единичная перестановка. Во втором описании они упорядочены по номерам столбцов, то есть $S_2 = (J, e)$. Тогда $\sigma(K)$ и $\sigma(J)$ – именно те четности, которые фигурируют в строчной и столбцовой формулах определителя.

Следствие 8.28. Определитель транспонированной матрицы, вычисленный по столбцовой формуле, совпадает с определителем исходной матрицы, вычисленной по строчной формуле. Следовательно, определитель транспонированной матрицы равен определителю исходной матрицы.

§ 5. Свойства определителя

Приведем полный набор свойств определителя, которые либо содержатся в определении, либо следуют непосредственно из его определения.

Теорема 8.29. Свойства определителя.

(1) Если три матрицы A, B и C отличаются только в j-й строке, причем $C_j = \lambda A_j + \mu B_j$, то $\Delta(C) = \lambda\Delta(A) + \mu\Delta(B)$ (линейность по строке).

(2) При перестановке двух строк матрицы определитель меняет знак (антисимметричность).

(3) $\Delta(E) = \Delta(e_1, e_2, \ldots, e_n) = 1$ (нормировка на единичную матрицу).

(4) При умножении некоторой строки на число определитель умножается на то же самое число.

(5) Если одна из строк матрицы нулевая, то определитель равен нулю.

(6) Если среди строк матрицы есть одинаковые, то определитель равен нулю.

(7) Если две строки матрицы пропорциональны, то определитель равен нулю.

(8) Определитель матрицы не изменится, если к одной строке матрицы прибавить другую строку, умноженную на некоторое число (основное свойство, используемое при вычислении определителя).

(9) Определитель матрицы не изменится, если к одной строке матрицы прибавить любую линейную комбинацию остальных его строк.

(10) Определитель диагональной матрицы (у которой все элементы вне главной диагонали равны нулю) равен произведению чисел на главной диагонали.

Доказательство. Свойства (1) – (3) составляют определение определителя. Свойства (4) – (9) являются общими свойствами полилинейной кососимметрической функции. Для вывода свойства (10) заметим, что при подсчете определителя из каждой строки, используя свойство (4), можно вынести множитель, равный элементу на главной диагонали. После этого останется определитель единичной матрицы, равный единице.

Теорема 8.30. Определитель верхней треугольной матрицы (у которой все элементы под главной диагональю равны нулю) или нижней треугольной матрицы (у которой все элементы над главной диагональю равны нулю) равен произведению чисел на главной диагонали.

Доказательство. Верхнюю треугольную матрицу можно привести к диагональной матрице, несколько раз используя операцию прибавления к одной строке другой строки, умноженной на некоторое число (при этих операциях определитель матрицы не меняется). На первом шаге, если последний элемент на главной диагонали не равен нулю, используя его в качестве ведущего, можно обнулить все элементы последнего столбца выше главной диагонали. На втором шаге, если предпоследний элемент на главной диагонали не равен нулю, используя его в качестве ведущего, можно обнулить все элементы предпоследнего столбца выше главной диагонали, и т.д.

Если все диагональные элементы треугольной матрицы не равны нулю, то после $(n - 1)$-й итерации получится диагональная матрица с той же главной диагональю. В этом случае утверждение теоремы верно. Если диагональный элемент $a_{kk} = 0$, то в матрице после $(n - k)$ итераций k-я строка окажется нулевой, поэтому определитель матрицы будет равен нулю. Значит, определитель исходной матрицы также равен нулю.

Аналогичные рассуждения годятся для нижней треугольной матрицы.

Теорема 8.31. (Критерий невырожденности квадратной матрицы). Квадратная матрица невырождена тогда и только тогда, когда $\Delta(A) \neq 0$.

Доказательство необходимости. Пусть матрица невырождена. Это означает, что $rank(A) = n$. Тогда преобразованиями Гаусса (к одной строке прибавить другую, умноженную на некоторое число, или переставить строки) можно привести матрицу к диагональному виду с ненулевыми коэффициентами на главной диагонали. Все такие преобразования либо не меняют определителя матрицы, либо меняют его знак. Но определитель полученной диагональной матрицы равен произведению диагональных элементов и поэтому не равен нулю. Следовательно, определитель исходной матрицы не равен нулю.

Доказательство достаточности. Пусть, $\Delta(A) \neq 0$, но $rank(A) < n$. Последнее означает, что строки матрицы линейно зависимы, то есть найдется строка, которая является линейной комбинацией остальных строк. Если мы вычтем эту линейную комбинацию из данной строки, то получим матрицу с тем же определителем и нулевой строкой. Значит, определитель исходной матрицы равен нулю, что противоречит предположению.

Теорема 8.32. Определитель произведения двух квадратных матриц равен произведению их определителей.

Доказательство. Пусть $C = AB$. Если определитель матрицы B равен нулю, то она вырожденная и ее ранг меньше n. По теореме о ранге произведения ранг матрицы C меньше n, матрица C вырожденная и ее определитель также равен нулю.

Пусть матрица B невырожденная, то есть $\Delta(B) \neq 0$. Определим функцию формулой $f(A) = \dfrac{\Delta(AB)}{\Delta(B)}$. Докажем, что функция $f(A)$ удовлетворяет всем трем характеристическим свойствам определителя матрицы.

(1) Пусть три матрицы A, A' и A'' таковы, что, во-первых, $A_j = \lambda \cdot A'_j + \mu \cdot A''_j$, во-вторых, $A_i = A'_i = A''_i$ при $i \neq j$. Положим $C = AB$, $C' = A'B$, $C'' = A''B$. В матричной алгебре было доказано, что строка C_i матрицы $C = AB$ вычисляется по формуле $C_i = A_i B$. Из этого следует, что, во-первых, $C_j = \lambda \cdot C'_j + \mu \cdot C''_j$, во-вторых, $C_i = C'_i = C''_i$ при $i \neq j$. По свойству линейности определителя будет $\Delta(C) = \lambda \cdot \Delta(C') + \mu \cdot \Delta(C'')$, из чего следует, что $f(A) = \lambda \cdot f(A') + \mu \cdot f(A'')$. Это означает, что функция $f(A)$ полилинейная.

(2) Из того же утверждения $C_i = A_i B$ следует, что транспозиции двух строк A_i и A_j матрицы A соответствует транспозиция тех же строк C_i и C_j матрицы $C = AB$. Следовательно, при транспозиции строк матрицы A функция $f(A)$ меняет знак, то есть полилинейная функция $f(A)$ кососимметрическая.

(3) Условие нормировки также выполняется: $f(E) = \dfrac{\Delta(EB)}{\Delta(B)} = 1$.

Из единственности функции, обладающей тремя перечисленными свойствами, следует $f(A) = \dfrac{\Delta(AB)}{\Delta(B)} = \Delta(A)$, откуда $\Delta(AB) = \Delta(A) \cdot \Delta(B)$.

Следствие 8.33. Если у квадратной матрицы есть обратная, то произведение их определителей равно единице.

§ 6. Разложение определителя по строке или столбцу

Определение 8.34. Пусть дана произвольная матрица A. Выберем в ней r произвольных строк и r произвольных столбцов. В их пересечении образуется квадратная матрица порядка r. Определитель этой матрицы называется минором r-го порядка матрицы A. Если матрица A квадратная, и множество номеров строк минора совпадает с множеством номеров его столбцов, то такой минор называется главным.

С помощью миноров можно устанавливать ранг матрицы.

Теорема 8.35. Ранг матрицы r совпадает с наибольшим порядком ненулевого минора этой матрицы.

Доказательство. (1) Выберем в матрице те r строк, которые линейно независимы. Полученная матрица размером $r \times n$ будет иметь ранг r, и поэтому в ней найдутся r линейно независимых столбцов. Если из выбранных строк и выбранных столбцов составить минор r-го порядка, то согласно теореме об определителе невырожденной матрицы этот минор будет отличен от нуля. Следовательно, у матрицы ранга r есть ненулевой минор ранга r.

(2) Возьмем любой минор порядка $k > r.$ Отобранные для этого минора k строк образуют матрицу размером $k \times n.$ Так как ее ранг $r < k$, любые k ее столбцов, в том числе и столбцы заданного минора, линейно зависимы, и минор равен нулю. Следовательно, любой минор порядка $k > r$ равен нулю.

Определение 8.36. В квадратной матрице n-го порядка сопоставим каждому элементу a_{jk} минор M_{jk} порядка $(n - 1)$), полученный вычеркиванием j-й строки и k-го столбца. Число $A_{jk} = (-1)^{j+k} M_{jk}$ будем называть алгебраическим дополнением элемента a_{jk}.

Лемма 8.37. Пусть матрица A такова, что все ее элементы в последней строке равны нулю, кроме $a_{nn} = 1.$ Тогда $\Delta(A) = M_{nn} = A_{nn}.$

Доказательство. В разложении $\Delta(A) = \sum\limits_{K \in S_n} \sigma(K) \cdot \prod\limits_{j=1}^{n} a_{jk_j}$ в каждом произведении множитель a_{nk_n} отличен от нуля, только если $k_n = n.$ Значит, в ненулевых слагаемых в перестановке K всегда $k_n = n$. Пусть перестановка K' порядка $(n-1)$ получена из K исключением последнего члена $k_n = n$. Легко видеть, что количество инверсий в перестановках K и K' одинаковое. Значит, $\sigma(K) = \sigma(K').$ Формула определителя дает

$$\Delta(A) = \sum_{K \in S_n} \sigma(K) \prod_{j=1}^{n} a_{jk_j} = \sum_{K' \in S_{n-1}} \sigma(K') \prod_{j=1}^{n-1} a_{jk_j} = M_{nn} = A_{nn}.$$

Лемма 8.38. Если в матрице A все элементы в j-й строке равны нулю, кроме $a_{jk} = 1,$ то ее определитель $\Delta(A) = (-1)^{j+k} M_{jk} = A_{jk}.$

Доказательство. Будем переставлять j-ю строку с последующими, пока она не окажется последней. Для этого потребуется $(n - j)$ транспозиций. Затем $(n - k)$ транспозициями переставим k-й столбец на место последнего. При этом определитель матрицы умножится на $(-1)^{(n-j)+(n-k)} = (-1)^{j+k}.$ Матрицы, полученные в первом случае вычеркиванием j-й строки и k-го столбца, а во втором случае n-й строки и n-го столбца, одинаковые, значит, минор M_{jk} в исходной матрице равен минору M_{nn} во второй матрице.

Теорема 8.39. Определитель порядка n может быть вычислен с помощью рекуррентной формулы $\Delta(A)=\sum_{k=1}^{n}a_{jk}A_{jk}$. Эта формула называется разложением определителя по j-й строке.

Аналогичное разложение определителя по k-му столбцу имеет вид $\Delta(A)=\sum_{j=1}^{n}a_{jk}A_{jk}$.

Доказательство. Используя разложение j-й строки матрицы по базису e и формулу Леммы 8.38, получим

$$\Delta(A)=\Delta(A_1,\ldots,A_{j-1},\sum_{k=1}^{n}a_{jk}e_k,A_{j+1},\ldots,A_n)=$$
$$=\sum_{k=1}^{n}a_{jk}\Delta(A_1,\ldots,A_{j-1},e_k,A_{j+1},\ldots,A_n)=\sum_{k=1}^{n}a_{jk}A_{jk}.$$

Доказательство разложения по столбцу получится, если использовать столбцовую формулу вычисления определителя.

Замечание. Можно использовать эту теорему для рекурсивного определения определителя: определитель первого порядка равен элементу матрицы, а определитель n-го порядка определяется формулой разложения по последней строке. Из этого можно вывести основные свойства определителя и формулу его вычисления.

Пример 2. Вычислить определитель $\begin{vmatrix}2&1&1&2\\1&1&3&-3\\4&5&7&1\\3&1&2&1\end{vmatrix}$.

Решение. Будем вычислять определитель методом Гаусса, используя ведущий элемент для обнуления остальных элементов в строке или столбце (после чего можно разложить определитель по этой строке (соответственно, столбцу)).

$$\begin{vmatrix}2&\boxed{1}&1&2\\1&1&3&-3\\4&5&7&1\\3&1&2&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&1&1&2\\-1&0&2&-5\\-6&0&2&-9\\1&0&1&-1\end{vmatrix}=(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix}-1&2&-5\\6&2&-9\\1&\boxed{1}&-1\end{vmatrix}=$$
$$=-\begin{vmatrix}-3&0&-3\\-8&0&-7\\1&1&-1\end{vmatrix}=-(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix}-3&-3\\-8&-7\end{vmatrix}=-3.$$

С помощью алгебраических дополнений можно вычислять обратную матрицу.

Теорема 8.40. (О фальшивом разложении). Если номера строк $i \neq j$, то $\sum_{k=1}^{n} a_{jk} A_{ik} = 0.$ Аналогичное утверждение имеет место для столбцов: если $m \neq k$, то $\sum_{j=1}^{n} a_{jm} A_{jk} = 0.$

Словесная формулировка: разложение определителя по строке, в котором алгебраические дополнения элементов данной строки заменены алгебраическими дополнениями элементов другой строки, равно нулю.

Доказательство. Первая формула является разложением определителя матрицы, в которой i-ая строка матрицы A заменена на j-ю строку. В такой матрице две одинаковые строки, поэтому данный определитель равен нулю. Для разложения по столбцам доказательство аналогичное.

Определение 8.41. Составим матрицу из алгебраических дополнений A_{jk} к элементам a_{jk} матрицы A, а затем транспонируем ее. Полученную матрицу $\tilde{A}$ назовем матрицей, присоединенной к матрице A. Другими словами, $\tilde{a}_{jk} = A_{kj}$.

Следующая формула называется основным соотношением для присоединенной матрицы.

Теорема 8.42. Для любой матрицы A верно тождество $A \cdot \tilde{A} = \Delta(A) \cdot E.$

Доказательство. Положим $B = A \cdot \tilde{A}.$ Для всех j по Теореме 8.39 о разложении определителя по строке имеем

$$b_{jj} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} \tilde{a}_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} A_{jk} = \Delta(A).$$

При $j \neq p$ по Теореме 8.40 о фальшивом разложении получим

$$b_{jp} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} \tilde{a}_{kp} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} A_{pk} = 0.$$

Следствие 8.43. Если $\Delta = \Delta(A) \neq 0,$ то матрица A^{-1} существует и равна $A^{-1} = \Delta^{-1} \cdot \tilde{A}.$

Доказательство. Из условия $\Delta(A) \neq 0$ следует, что матрица A невырожденная. Из ее невырожденности вытекает наличие обратной матрицы. Из формулы $A \cdot \tilde{A} = \Delta(A) \cdot E$ получим, что $A^{-1} = \Delta^{-1} \cdot \tilde{A}.$

Пример 3. С использованием алгебраических дополнений вычислить обратную матрицу к матрице

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -3 & -1 & 4 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Вычислим все девять миноров 2-го порядка и соответствующие алгебраические дополнения

$$M_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -7, \ M_{12} = -5, \ M_{13} = -4, \ M_{21} = -5, \ M_{22} = -4,$$
$$M_{23} = -2, \ M_{31} = 13, \ M_{32} = 11, \ M_{33} = 7.$$

$$A_{11} = -7, \ A_{12} = 5, \ A_{13} = -4, \ A_{21} = 5, \ A_{22} = -4, \ A_{23} = 2, \ A_{31} = 13,$$
$$A_{32} = -11, \ A_{33} = 7.$$

Разложением по первой строке вычислим определитель матрицы A:

$$det(A) = 2 \cdot (-7) + 3 \cdot 5 + 1 \cdot (-4) = -3.$$

Осталось выписать матрицу из алгебраических дополнений, транспонировать ее и разделить на определитель исходной матрицы:

$$A^{-1} = \Delta^{-1} \cdot \tilde{A} = -\frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -7 & 5 & 13 \\ 5 & -4 & -11 \\ -4 & 2 & 7 \end{pmatrix}.$$

Пример 4. Пусть известен $\Delta(A) = \Delta.$ Найти $\Delta(\tilde{A}).$

Решение. Из тождества $A \cdot \tilde{A} = \Delta \cdot E$ следует $|A| \cdot |\tilde{A}| = |\Delta \cdot E| = |\Delta|^n \cdot |E| = |\Delta|^n,$ так как при умножении матрицы на число ее определитель умножается на n-ю степень числа. Значит, $|\tilde{A}| = |\Delta|^{n-1}.$

Пример 5. Чему может быть равен $rank(\tilde{A}),$ если матрица A вырожденная?

Решение. Если $rank(A) < n-1,$ то в ней любой минор ранга (n — 1) равен нулю. Это означает, что все A_{jk} = 0. Следовательно, матрица $\tilde{A}$ нулевая и $rank(\tilde{A}) = 0.$

Если же $rank(A) = n-1,$ то вследствие $\Delta(A) = 0$ мы получим, что произведение $A \cdot \tilde{A} = \Delta(A) \cdot E$ является нулевой матрицей. Это означает, что каждый столбец $\tilde{A}^k \in R^n$ матрицы $\tilde{A}$ является решением однородной СЛАУ $AX = \Theta.$ Так как $rank(A) = n-1,$ подпространство решений этой СЛАУ одномерно, следовательно, все столбцы матрицы $\tilde{A}$ пропорциональны некоторому вектору. Следовательно, $rank(\tilde{A}) \le 1.$

На самом деле $rank(\tilde{A})=1$, так как в матрице A ранга $(n-1)$ есть по крайней мере один ненулевой минор M_{jk} порядка $(n-1)$. Тогда соответствующее алгебраическое дополнение $A_{jk} \neq 0$, то есть матрица $\tilde{A}$ ненулевая.

§ 7. Правило Крамера

С помощью определителей можно решать системы линейных алгебраических уравнений.

Теорема 8.44. (Правило Крамера). Пусть задана СЛАУ $AX = B$ с невырожденной квадратной матрицей A. Обозначим через $\Delta \neq 0$ определитель матрицы A, а через Δ_k — определитель матрицы, полученной из A заменой k-го столбца A^k на столбец свободных членов B. Тогда решение системы дается формулами $x_k = \dfrac{\Delta_k}{\Delta}$ для всех k от 1 до n.

Доказательство. В условиях теоремы у матрицы A есть обратная матрица, заданная формулой $A^{-1} = \Delta^{-1} \cdot \tilde{A}$, где $\tilde{A}$ — присоединенная матрица. Элементы присоединенной матрицы $\tilde{a}_{kj} = A_{jk}$, где A_{jk} – алгебраическое дополнение элемента a_{jk} матрицы A. Решение системы дается формулой $X = A^{-1}B = \Delta^{-1} \cdot \tilde{A}B.$ Распишем это матричное равенство для элементов столбца X: $x_k = \Delta^{-1} \cdot \sum\limits_{j=1}^{n} \tilde{a}_{kj} b_j = \Delta^{-1} \cdot \sum\limits_{j=1}^{n} b_j A_{jk}$. Осталось заметить, что выражение $\Delta_k = \sum\limits_{j=1}^{n} b_j A_{jk}$ представляет собой разложение по k-му столбцу определителя матрицы, полученной из A заменой k-го столбца A^k на столбец свободных членов B.

Пример 6. Для СЛАУ $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 16 \\ 10 \\ 3 \end{pmatrix}$ найти только переменную x_1.

Решение. Надо вычислить два определителя:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 11 \text{ и } \Delta_1 = \begin{vmatrix} 16 & 2 & 4 \\ 10 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} = -22.$$

Тогда $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = \dfrac{-22}{11} = -2.$

Г Л А В А 9

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

§ 1. Поле комплексных чисел

Понятие комплексного числа появилось в математике в результате обобщения понятия числа. Для того, чтобы уравнение $x^2 = -1$ имело решение, было предложено ввести условное число i, для которого $i^2 = -1$. Если сделать это, то для любой пары x, y действительных чисел должно также существовать число $x + yi$. Перемножим два подобных числа, используя привычные правила арифметики:

$$(a+bi)(x+yi) = ax + ayi + bxi + byi^2 = (ax - by) + (ay + bx)i.$$

Итак, это снова число вида $c + di$, где $c = ax - by \in R$, $d = ay + bx \in R$. Если мы хотим, чтобы с введенными объектами можно было бы обращаться, как с обычными числами, с неизбежностью последняя формула должна задавать операцию умножения. Но пока совершенно неясно, существует ли корректно определенная операция деления таких чисел.

Сначала определим общее понятие поля.

Определение 9.1. Полем называется множество X, в котором определены две операции: сложение и умножение. Элементы поля называются числами. Сложение и умножение должны удовлетворять следующими условиям (аксиомам поля).

Аксиомы сложения:

(1) Для любых чисел $x, y, z \in X$ выполняется тождество $(x+y)+z = x+(y+z)$ (ассоциативность операции сложения);

(2) В множестве X существует число 0 такое, что для всех чисел $x \in X$ выполняется тождество $x + 0 = 0 + x = x$ (наличие нуля);

(3) Для любого числа $x \in X$ существует число y, для которого $x + y = y + x = 0$ (наличие противоположного числа; обозначение $y = -x$);

(4) Для любых чисел $x, y \in X$ выполняется тождество $x + y = y + x$ (коммутативность сложения).

Аксиомы умножения:

(5) Для любых чисел $x, y, z \in X$ выполняется тождество $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ (ассоциативность операции умножения);

(6) В множестве X существует число 1 такое, что для всех чисел $x \in X$ выполняется тождество $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$ (наличие единицы);

(7) Для любого числа $x \neq 0$ существует число y, для которого $x \cdot y = y \cdot x = 1$ (наличие обратного числа; обозначение $y = x^{-1}$);

(8) Для любых чисел $x, y \in X$ выполняется тождество $x \cdot y = y \cdot x$ (коммутативность умножения).

Аксиома дистрибутивности:

(9) Для любых чисел $x, y, z \in X$ выполняется тождество $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.

Используя свойство ассоциативности, легко показать, что в любом поле противоположное и обратное число задаются единственным образом:

если $y + x = x + z = 0$, то $z = 0 + z = (y + x) + z = y + (x + z) = y + 0 = y$;

если $y \cdot x = x \cdot z = 1$, то $z = 1 \cdot z = (y \cdot x) \cdot z = y \cdot (x \cdot z) = y \cdot 1 = y$.

Разностью чисел x и y называется такое число z, что $x = y + z$. Легко видеть, что $z = x + (-y)$. Отношением чисел x и y, где $y \neq 0$, называется такое число z, что $x = y \cdot z$. Оно равно $z = x \cdot y^{-1}$.

Примером поля служит множество R действительных чисел. Другой известный со школы пример – множество Q всех рациональных чисел.

Определение 9.2. Множеством C комплексных чисел называется двумерное действительное линейное евклидово пространство E^2 со стандартным базисом $\{e_1, e_2\}$, в котором операции сложения и умножения определены следующим образом:

(1) сумма комплексных чисел совпадает с суммой векторов пространства E^2;

(2) произведение двух комплексных чисел задается формулой

$$(x_1 e_1 + y_1 e_2) \cdot (x_2 e_1 + y_2 e_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) \cdot e_1 + (x_1 y_2 + y_1 x_2) \cdot e_2.$$

Корректность этого определения будет доказана ниже. Будет показано, что нулем в поле комплексных чисел служит нуль-вектор Θ. Роль единицы поля играет вектор e_1.

Вектор e_2 в поле комплексных чисел называется мнимой единицей и обозначается символом i. Будет показано, что $i^2 = -1$.

Комплексное число обычно записывается в виде $z = x \cdot e_1 + y \cdot e_2 = x + yi$. Координаты x и y в изображении комплексного числа называются действительной и мнимой частью комплексного числа.

Теорема 9.3. Множество комплексных чисел с введенным сложением и умножением удовлетворяет всем аксиомам поля. Кроме того, $i^2 = -1$.

Доказательство. Проверим выполнение всех аксиом.

(1) Аксиомы сложения выполняются, так как они идентичны аксиомам сложения векторов. Роль нуля в поле комплексных чисел играет нуль-вектор Θ.

(2) Ассоциативность умножения чисел: надо вычислить и сравнить два выражения

$$((x_1+y_1i)\cdot(x_2+y_2i))\cdot(x_3+y_3i)=((x_1x_2-y_1y_2)+(x_1y_2+y_1x_2)\cdot i)\cdot(x_3+y_3i)=$$

$$=(x_1x_2x_3-x_1y_2y_3-x_2y_1y_3-x_3y_1y_2)+(x_1x_2y_3+x_1x_3y_2+x_2x_3y_1-y_1y_2y_3)\cdot i;$$

$$(x_1+y_1i)\cdot((x_2+y_2i)\cdot(x_3+y_3i))=(x_1+y_1i)\cdot((x_2x_3-y_2y_3)+(x_2y_3+y_2x_3)\cdot i)=$$

$$=(x_1x_2x_3-x_1y_2y_3-x_2y_1y_3-x_3y_1y_2)+(x_1x_2y_3+x_1x_3y_2+x_2x_3y_1-y_1y_2y_3)\cdot i.$$

(3) Вектор e_1 в поле комплексных чисел играет роль единицы:

$$(xe_1+ye_2)\cdot(1\cdot e_1+0\cdot e_2)=(x\cdot 1-y\cdot 0)\cdot e_1+(x\cdot 0+y\cdot 1)\cdot e_2=xe_1+ye_2.$$

(4) Наличие обратного элемента будет доказано позже.

(5) Коммутативность умножения чисел: надо вычислить и сравнить два выражения

$$(x_1+y_1i)\cdot(x_2+y_2i)=(x_1x_2-y_1y_2)+(x_1y_2+y_1x_2)\cdot i$$

$$(x_2+y_2i)(x_1+y_1i)=(x_2x_1-y_2y_1)+(x_2y_1+y_2x_1)\cdot i.$$

(6) Дистрибутивность умножения относительно сложения:

$$(x_1+y_1i)\cdot((x_2+y_2i)+(x_3+y_3i))=$$

$$=((x_1(x_2+x_3)-y_1(y_2+y_3))+((x_1(y_2+y_3)+y_1(x_2+x_3))\cdot i=$$

$$=((x_1x_2-y_1y_2)+(x_1x_3-y_1y_3))+((x_1y_2+y_1x_2)+(y_1x_2+y_1x_3))\cdot i=$$

$$=(x_1+y_1i)\cdot(x_2+y_2i)+(x_1+y_1i)\cdot(x_3+y_3i).$$

(7) $i^2=e_2\cdot e_2=(0\cdot e_1+1\cdot e_2)\cdot(0\cdot e_1+1\cdot e_2)=(-1)\cdot e_1+0\cdot e_2=-e_1$.

Определение 9.4. Подмножество Y поля X называется подполем поля X, если результаты любых операций сложения, умножения, перехода к противоположному числу и перехода к обратному числу для элементов подмножества Y принадлежат подмножеству Y.

Из определения подполя следует, что нуль и единица поля X принадлежат подполю Y. Подразумевается, что подполе Y наследует операции сложения и умножения поля X. Легко проверить, что с такими операциями подполе Y само является полем.

Если Y является подполем поля X, то также говорят, что X является расширением поля Y. Например, поле R действительных чисел является расширением поля Q рациональных чисел.

Теорема 9.5. Поле C комплексных чисел является расширением поля R действительных чисел.

Доказательство. Докажем, что подпространство $L = L\{e_1\}$ является подполем поля C, изоморфным полю R (изоморфизм полей означает, что между полями установлено взаимно-однозначное соответствие, при котором сумма чисел переходит в сумму, нуль переходит в нуль, произведение переходит в произведение, единица переходит в единицу). Сопоставим числу $x \in R$ вектор $a_x = x \cdot e_1 \in L.$ Ограничения изоморфизма относительно сложения, нуля и единицы очевидны. Проверим ограничение, касающееся умножения:

$$(x_1 e_1) \cdot (x_2 e_1) = (x_1 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2) \cdot (x_2 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2) = x_1 x_2 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2.$$

В дальнейшем подполе L всегда будет отождествляться с полем R действительных чисел.

Лемма 9.6. Умножению комплексного числа $z = x + yi$ на действительное число $\lambda \in R$ соответствует умножение вектора $x \cdot e_1 + y \cdot e_2$ на число λ в пространстве E^2.

Доказательство. Воспользуемся формулой умножения:

$$(\lambda e_1 + 0 \cdot e_2) \cdot (x e_1 + y e_2) = (\lambda \cdot x - 0 \cdot y) + (\lambda \cdot y + 0 \cdot x) \cdot e_2 = \lambda x \cdot e_1 + \lambda y \cdot e_2.$$

Определение 9.7. Модулем комплексного числа $z = x + yi$ называется длина вектора $x e_1 + y e_2$ в евклидовом пространстве E^2: $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Замечание. Это число равно нулю только при $z = 0.$ Для действительных чисел модуль в множестве комплексных чисел совпадает с модулем в множестве действительных чисел: $|x + 0 \cdot i|_C = |x|_R.$

Определение 9.8. Число $\bar{z} = x - yi$ называется сопряженным к числу $z = x + yi.$

Лемма 9.9. Свойства операции сопряжения.

(1) Число является действительныи тогда и только тогда, когда оно сопряжено самому себе;

(2) Число $z = x + yi$ сопряжено к числу $\bar{z} = x - yi$ (двойственность операции сопряжения);

(3) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2;$

(4) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2;$

(5) $\overline{z^n} = \bar{z}^n.$

(6) $z \cdot \bar{z} = |z|^2 = |\bar{z}|^2$ (произведение пары сопряженных чисел равно квадрату их длины);

(7) $z^{-1} = \dfrac{\bar{z}}{|z|^2}$ (формула обратного элемента).

Доказательство. Свойства (1) – (3) очевидны.

(4) $\overline{(x_1+y_1i)\cdot(x_2+y_2i)}=(x_1x_2-y_1y_2)-(x_1y_2+y_1x_2)i=$

$$=(x_1-y_1i)\cdot(x_2-y_2i)==\overline{(x_1+y_1i)}\cdot\overline{(x_2+y_2i)}.$$

(5) Надо несколько раз применить правило (4).

(6) $z\cdot\overline{z}=(x+yi)\cdot(x-yi)=x^2-y^2i^2=x^2+y^2=|z|^2=|\overline{z}|^2.$

(7) Так как $\dfrac{z\cdot\overline{z}}{|z|^2}=1,$ то $z^{-1}=\dfrac{\overline{z}}{|z|^2}.$

Свойство (7) означает выполнение последней аксиомы поля – наличие для любого ненулевого комплексного числа обратного числа.

Замечание. Операция сопряжения представляет собой взаимно-однозначное отображение поля комплексных чисел на себя, сохраняющее все операции поля. Такие преобразования называются автоморфизмами поля. Других автоморфизмов в поле комплексных чисел нет.

Теорема 9.10. Модуль произведения двух комплексных чисел равен произведению их модулей. Модуль отношения двух комплексных чисел равен отношению их модулей.

Доказательство. $|z_1\cdot z_2|=\sqrt{(z_1\cdot z_2)\cdot(\overline{z_1\cdot z_2})}=\sqrt{z_1\cdot\overline{z_1}}\cdot\sqrt{z_2\cdot\overline{z_2}}=|z_1|\cdot|z_2|.$ Отсюда вытекает тождество $|z^{-1}|=|z|^{-1},$ из которого следует второе утверждение теоремы.

Пример 1. Вычислить $\dfrac{8-9i}{1+2i}.$

Решение. Надо домножить числитель и знаменатель на число $\overline{1+2i}=1-2i$:

$$\frac{8-9i}{1+2i}=\frac{(8-9i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}=\frac{(8\cdot1-9\cdot2)+(-8\cdot2-9\cdot1)i}{5}=\frac{-10-25i}{5}=-2-5i.$$

Пример 2. Вычислить модуль $\left|\dfrac{(1-3i)^3(2+3i)^2(2\sqrt{2}-3i)^5}{(1+2i)^3(5-i)^2(\overline{1+4i})^5}\right|.$

Решение. Модуль произведения и отношения комплексных чисел равен произведению и отношению модулей. Поэтому

$$\left|\frac{(1-3i)^3(2+3i)^2(2\sqrt{2}-3i)^5}{(1+2i)^3(5-i)^2(\overline{1+4i})^5}\right|=\frac{|1-3i|^3\cdot|2+3i|^2\cdot|2\sqrt{2}-3i|^5}{|1+2i|^3\cdot|5-i|^2\cdot|1-4i|^5}=$$

$$=\frac{\sqrt{10^3}\cdot\sqrt{13^2}\cdot\sqrt{17^5}}{\sqrt{5^3}\cdot\sqrt{26^2}\cdot\sqrt{17^5}}=\sqrt{2}.$$

§ 2. Тригонометрическая форма комплексного числа

Из определения комплексных чисел следует, что их можно изображать точками плоскости в прямоугольной системе координат: комплексному числу z соответствует точка с координатами (x, y). Горизонтальная ось OX называется действительной осью, вертикальная ось OY называется мнимой осью. Все действительные числа лежат на действительной оси. Мнимой единице соответствует точка с координатами (0, 1).

Модуль $r = |z|$ комплексного числа z совпадает с длиной вектора Oz. Расстояние между точками z_1 и z_2 равно модулю разности $|z_1 - z_2|$.

Определение 9.11. Назовем аргументом комплексного числа $z = x + yi$ (обозначение $\varphi = \arg(z)$) тот геометрический угол, который вектор Oz составляет с положительным направлением оси OX. В полярной системе координат получим $x = r \cdot \cos\varphi$, $y = r \cdot \sin\varphi$. Из этого вытекает, что комплексное число можно представить в виде

$$z = r(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi),$$

где r — модуль числа, а φ — его аргумент. Это представление называется тригонометрической формой комплексного числа.

Теорема 9.12. При умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются.

Доказательство. Перемножим два числа по формуле умножения комплексных чисел и воспользуемся формулами синуса суммы и косинуса суммы двух углов:

$$(r_1(\cos\varphi_1 + i \cdot \sin\varphi_1)) \cdot (r_2(\cos\varphi_2 + i \cdot \sin\varphi_2)) =$$

$$= (r_1 r_2) \cdot (\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \sin\varphi_2) + i \cdot (\cos\varphi_1 \sin\varphi_2 + \sin\varphi_1 \cos\varphi_2) =$$

$$= (r_1 r_2) \cdot (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2)).$$

Теорема 9.13. (Формула Муавра). Для целочисленной степени комплексного числа, представленного в тригонометрической форме, верна формула

$$z^n = (r(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi))^n = r^n(\cos(n\varphi) + i \cdot \sin(n\varphi)).$$

Доказательство. При возведении в квадрат имеем

$$(r(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi))^2 = r^2(\cos(2\varphi) + i \cdot \sin(2\varphi)).$$

Пусть формула верна при возведении в степень $(n - 1)$. Умножая z^{n-1} на z, получим:

$$(r(\cos\varphi + i\cdot\sin\varphi))^n = r^{n-1}r(\cos((n-1)\varphi+\varphi)+i\cdot\sin((n-1)\varphi+\varphi)) =$$
$$= r^n(\cos(n\varphi)+i\cdot\sin(n\varphi)).$$

Пример 3. Вычислить выражение $z=\dfrac{(1-3i)^3(2+2i)^8(2\sqrt{3}-2i)^4}{(1-i)^5(3+i)^3((-4+4\sqrt{3}i)^5}$. Результат записать в каноническом алгебраическом виде.

Решение. Во-первых, следует заметить, что

$$\frac{(1-3i)^3}{(3+i)^3}=\left(\frac{(1-3i)(3-i)}{(3+i)(3-i)}\right)^3=\left(\frac{-10i}{10}\right)^3=-i^3=i.$$

Модуль всего выражения равен произведению и отношению модулей:

$$|z|=|i|\cdot\frac{\left(2^{\frac{3}{2}}\right)^8\cdot\left(2^2\right)^4}{\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^5\cdot\left(2^3\right)^5}=4\sqrt{2}.$$

Затем следует найти аргументы всех сомножителей. Хороший аргумент φ имеют:

числа вида $(\pm1\pm i)$ (тогда $\varphi=\dfrac{k\pi}{4}$);

числа вида $(\pm\sqrt{3}\pm i)$ или $(\pm1\pm\sqrt{3}\cdot i)$ (тогда $\varphi=\dfrac{k\pi}{6}$).

В нашем случае

$$2+2i=2\sqrt{2}\cdot\left(\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{4}\cdot i\right),$$
$$2\sqrt{3}-2i=4\cdot\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\cdot i\right),$$
$$1-i=\sqrt{2}\cdot\left((\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\cdot i\right),$$
$$-4+4\sqrt{3}i=8\cdot\left(\cos\frac{2\pi}{3}+\sin\frac{2\pi}{3}\cdot i\right).$$

Аргумент всего выражения равен сумме и разности аргументов сомножителей с учетом кратностей:

$$arg(z)=\frac{\pi}{2}+\left(8\cdot\frac{\pi}{4}-4\cdot\frac{\pi}{6}\right)-\left(-5\cdot\frac{\pi}{4}+5\cdot\frac{2\pi}{3}\right)=-\frac{\pi}{4}.$$

В результате

$$z = 4\sqrt{2}\cdot\left((\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\cdot i\right)=4\sqrt{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot i\right)=4-4i.$$

Важное отличие комплексных чисел от действительных заключается в том, что из любого комплексного числа можно извлечь корень любой степени.

Теорема 9.14. Все числа вида $\cos\frac{2\pi k}{n}+i\cdot\sin\frac{2\pi k}{n}$, где $k=0,1,\dots,n-1$, являются разными корнями n-й степени из единицы. Других корней n-й степени из единицы нет. Таким образом, существует ровно n разных корней n-й степени из единицы.

Доказательство. Все указанные числа имеют аргументы, которые с геометрической точки зрения попарно различаются. Проверим утверждение теоремы непосредственным возведением в степень n:

$$\left(\cos\frac{2\pi k}{n}+i\cdot\sin\frac{2\pi k}{n}\right)^n=\cos\left(\frac{2\pi k}{n}\cdot n\right)+i\cdot\sin\left(\frac{2\pi k}{n}\cdot n\right)=\cos(2\pi k)+i\cdot\sin(2\pi k)=1.$$

С другой стороны, пусть

$$r^n(\cos(n\varphi)+i\cdot\sin(n\varphi))=1=\cos(2\pi k)+i\cdot\sin(2\pi k)$$

для некоторого k. Тогда должно выполняться $\varphi=\frac{2\pi k}{n}$. При $k<0$ или $k\ge n$ угол φ отличается на величину, кратную 2π, от аргумента одного из перечисленных корней при $0\le k\le n-1$.

Из этой теоремы вытекает, что уравнение $z^n-1=0$ имеет ровно n комплексных корней. В главе о многочленах будет показано, что любое алгебраическое уравнение степени n имеет ровно n корней, в общем случае комплексных. Это замечательное утверждение носит название Основной Теоремы Высшей алгебры.

Будем обозначать корни n-й степени из единицы символами $\nu_0,\nu_1,\dots,\nu_{n-1}$. Из формулы Муавра следует, что $\nu_k=(\nu_1)^k$. Корень ν_1 часто называют первообразным. Если $z_1^n=z_2^n$, то $\left(\frac{z_2}{z_1}\right)^n=1$. Следовательно, $z_2=\nu_k z_1$ для некоторого k. Нетрудно указать один корень степени n из комплексного числа $z=r(\cos\varphi+i\cdot\sin\varphi)$: согласно формуле Муавра

$$\left(\sqrt[n]{r}\cdot\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n}\right)+i\cdot\sin\left(\frac{\varphi}{n}\right)\right)\right)^n=r(\cos\varphi+i\cdot\sin\varphi).$$

Остальные корни могут быть получены умножением на один из корней из единицы вида $\nu_k=\nu_1^k$. Итог сформулируем в виде теоремы.

Теорема 9.15. Существует ровно n различных корней n-й степени из произвольного комплексного числа $z = r(\cos\varphi + i\cdot\sin\varphi)$, отличного от нуля. Все эти корни задаются формулой

$$t_k = \sqrt[n]{r}\cdot\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n} + i\cdot\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right),$$

где $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Пример 4. Найти тот корень 17-й степени из числа $z = -1-\sqrt{3}i$, который имеет наименьшую мнимую часть.

Решение. Число z имеет модуль $|z| = 2$ и аргумент $arg(z) = -\frac{2\pi}{3}$. Все корни 17-й степени из z имеют один и тот же модуль и лежат на окружности с центром в начале координат и радиусом $\sqrt[17]{2}$. Наименьшую мнимую часть будет иметь корень, аргумент которого ближе всего к углу $\frac{3\pi}{2}$.

Формула аргумента для корней имеет вид $\alpha_k = \frac{-2\pi}{3\cdot 17} + \frac{2\pi k}{17} = \frac{-4\pi + 12\pi k}{102}$, где $k = 0, 1, \ldots, 16$. Угол $\frac{3\pi}{2} = \frac{153\pi}{102}$ лежит между углом $\frac{-4+12\cdot 13\cdot\pi}{102} = \frac{152\pi}{102}$ и углом $\frac{-4+12\cdot 14\cdot\pi}{102} = \frac{164\pi}{102}$. Очевидно, ближе к углу $\frac{3\pi}{2}$ является первый угол. Искомый корень

$$t_{13} = \sqrt[17]{2}\cdot\left(\cos\frac{76\pi}{51} + i\cdot\sin\frac{76\pi}{51}\right).$$

§ 3. Формула Эйлера

Теорема 9.16. (Формула Эйлера). Для произвольного $x \in R$ верно тождество

$$e^{ix} = \cos x + i\cdot\sin x.$$

Для обоснования сделаем небольшой экскурс в математический анализ и выполним вычисления, не вполне законные с точки зрения нашего нынешнего знания этого предмета. Из начального курса математического анализа известно, что показательная функция e^x раскладывается в ряд

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots .$$

Более того, этот ряд служит возможным определением экспоненты для объектов разной природы (например, матриц). В частности, так можно определить экспоненту от комплексного числа. Подставим в ряд вместо числа x число xi. При возведении i в степень поочередно получаются выражения $i, -1, -i, 1, i, -1, -i, 1,$ и т.д. Сгруппируем отдельно четные и нечетные степени x (строго говоря, корректность этой операции надо обосновывать). Получим сумму

$$e^x = \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!} \ldots\right) + i \cdot \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n1}}{(2n1)!} + \ldots\right).$$

В первой скобке стоит ряд для $\cos x$, во второй для $\sin x$ (как и для экспоненты, функции $\cos x$ и $\sin x$ можно определять как сумму соответствующего ряда). Подставляя их вместо суммы ряда, получим формулу Эйлера: $e^{ix} = \cos x + i \cdot \sin x$.

Следствие 9.17. $\cos(ix) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, $\sin(ix) = \dfrac{e^{-x} - e^x}{2i}$.

Доказательство. Подставим в формулу Эйлера вместо действительного числа x мнимые числа ix и $-ix$ (эта операция корректна, так как формула Эйлера фактически является соотношением не для функций, а для рядов). Получим $e^{-x} = \cos ix + i \cdot \sin ix$, $e^x = \cos x - i \cdot \sin ix$. Полусумма этих тождеств дает $\cos(ix) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$. Разность этих тождеств, деленная на $2i$, дает $\sin(ix) = \dfrac{e^{-x} - e^x}{2i}$.

Следствие 9.18. Свойства экспоненты можно вывести из ее представления в виде ряда. Поэтому они выполняются также для комплексных чисел. Следовательно, для комплексного числа $z = x + yi$ можно использовать основное свойство экспоненты: $e^z = e^{x+yi} = e^x \cdot e^{yi} =$ $= e^x(\cos y + i \cdot \sin y)$.

Из этого представления следует, что комплекснозначная функция комплексного переменного $u = e^z$ периодическая с периодом $2\pi i$. В частности, $e^{2\pi i} = 1$. Все корни из единицы степени n можно записать в виде $\nu_k = e^{\frac{2\pi k i}{n}}$, где $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

Замечание. Формула $e^z = e^{x+yi} = e^x(\cos y + i \cdot \sin y)$ связывает комплексный показатель экспоненты с тригонометрической формой числа e^z: $r(e^z) = e^{\mathrm{Re}(z)}$, $\arg(e^z) = Im(z)$. Это позволяет определить натуральный логарифм комплексного числа: $\ln z = \ln|z| + \arg(z) \cdot i$. Так как аргумент комплексного числа определен с точностью до слагаемого $2\pi k$, функция $\ln z$ бесконечнозначная, и любые два ее значения отличаются на $2\pi k i$.

ГЛАВА 10
МНОГОЧЛЕНЫ И АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

§ 1. Многочлены

Под полем K будем понимать либо множество R действительных чисел, либо множество C комплексных чисел.

Определение 10.1. Назовем многочленом (или полиномом) степени n над полем K функцию $P(z)$ от переменной $z \in K$, имеющую вид $P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$, где коэффициенты $a_k \in K$, причем $a_n \neq 0$. Слагаемое $a_n z^n$ называется старшим членом многочлена. Многочлен называется приведенным, если $a_n = 1$. Степень многочлена $P(z)$ обозначается $deg(P(z))$.

Лемма 10.2. При умножении многочленов их степени складываются.

Доказательство. Пусть степени сомножителей равны m и n, их старшие члены $a_m z^m$ и $b_n z^n$ соответственно. При умножении многочленов после раскрытия скобок степени всех слагаемых не будут превышать суммы $(m + n)$. С другой стороны, слагаемое $a_m b_n z^{m+n}$ степени $(m + n)$ будет единственным, причем $a_m b_n \neq 0$.

Теорема 10.3. (О делении многочленов с остатком). Для любого многочлена $P(z)$ степени n (делимое) и любого многочлена $Q(z)$ степени $m \geq 1$ (делитель) существуют единственный многочлен $S(z)$ степени $max(n - m, 0)$ (частное) и единственный многочлен $R(z)$ степени $r < m$ (остаток) такие, что $P(z) = S(z) \cdot Q(z) + R(z)$.

Доказательство. Будем доказывать существование разложения для фиксированного $Q(z)$ индукцией по n. Если $n < m$, то $S(z) = 0$, $R(z) = P(z)$. В случае $n \geq m$ предположим, что разложение существует для всех многочленов $P(z)$ степени, не превосходящей $(n-1)$. Пусть a_n и b_m – старшие коэффициенты многочленов $P(z)$ и $Q(z)$. Положим $P_0(z) = P(z) - \left(\frac{a_n}{b_m}\right) \cdot z^{n-m} \cdot Q(z)$. При вычитании слагаемое со степенью z^n сокращается, поэтому $deg(P_0(z)) < n$.

По предположению индукции $P_0(z) = S_0(z)\cdot Q(z) + R(z)$. Имеем

$$P(z) = P_0(z) + \left(\frac{a_n}{b_m}\right)\cdot z^{n-m}\cdot Q(z) = S_0(z)\cdot Q(z) + R(z) + \left(\frac{a_n}{b_m}\right)\cdot z^{n-m}\cdot Q(z).$$

Если положить $S(z) = S_0(z) + \left(\frac{a_n}{b_m}\right)\cdot z^{n-m}$, то $P(z) = S(z)\cdot Q(z) + R(z)$. Существование разложения доказано.

Для доказательства единственности разложения рассмотрим разность двух разных разложений. Получим $0 = (S_1(z) - S_2(z))Q(z) + {}$ $+ (R_1(z) - R_2(z))$. Если $S_1(z) \neq S_2(z)$, то первое слагаемое имеет степень не меньше m, а степень второго меньше m. Это невозможно, следовательно, $S_1(z) = S_2(z)$, а $R_1(z) = R_2(z)$.

Теорему можно также записать в виде утверждения для отношений многочленов: для произвольной дроби $\frac{P(z)}{Q(z)}$ единственным образом можно выделить целую часть и дробную часть: $P(z) = S(z) + \frac{R(z)}{Q(z)}$, причем $\frac{R(z)}{Q(z)}$ – правильная дробь (степень $R(z)$ меньше степени $Q(z)$).

Пример 1. Найти частное и остаток от деления многочлена $P(x) = 3z^5 - 2z^4 - z^3 - 5z + 2$ на многочлен $Q(z) = z^3 - 2z^2 + 4$.

Решение. Делим многочлены уголком.

$$\begin{array}{rrrrrr|l}
3z^5 & -\,2z^4 & -\,z^3 & & -\,5z & +\,2 & z^3 - 2z^2 + 4 \\
\cline{7-7}
3z^5 & -\,6z^4 & & +12z^2 & & & 3z^2 + 4z + 7 \\
\cline{1-4}
 & 4z^4 & -\,z^3 & -\,12z^2 & -\,5z & & \\
 & 4z^4 & -\,8z^3 & & +\,16z & & \\
\cline{2-5}
 & & 7z^3 & -\,12z^2 & -\,21z & +\,2 & \\
 & & 7z^3 & -\,14z^2 & & +\,28 & \\
\cline{3-6}
 & & & 2z^2 & -\,21z & -\,26 &
\end{array}$$

Итак, $3z^5 - 2z^4 - z^3 - 5z + 2 = (3z^2 + 4z + 7)(z^3 - 2z^2 + 4) + (2z^2 - 21z - 26)$.

Если остаток $R(z) = 0$, то будем говорить что многочлен $P(z)$ нацело делится на многочлен $Q(z)$. Отношение двух многочленов может быть числом, поэтому возможна ситуация, когда $P(z)$ делится на $Q(z)$, $Q(z)$ делится на $P(z)$, и при этом $P(z) \neq Q(z)$.

Теорема 10.4. (Теорема Безу). Для каждого многочлена $P(z)$ и для произвольного a существует многочлен $S(z)$ степени $(n-1)$ такой, что верна формула

$$P(z) = S(z)(z-a) + P(a).$$

Доказательство. Эта теорема – частный случай теоремы о делении с остатком в ситуации, когда делитель имеет степень 1. Тогда остаток имеет степень нуль, то есть является константой. Если в функциональное тождество $P(z) = S(z)(z-a) + b$ подставить значение $z = a$, то получим $b = P(a)$.

Следствие 10.5. Число a является корнем многочлена $P(z)$ тогда и только тогда, когда $P(z)$ нацело делится на линейный множитель $(z-a)$.

Следствие 10.6. У многочлена степени n число корней не превосходит n.

Следствие 10.7. Если у многочлена степени не выше n число корней больше n, то он тождественно равен нулю.

Лемма 10.8. Для любого набора из $(n+1)$ попарно различных чисел $\{b, a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ существует многочлен $P(z)$ степени n такой, что $P(b) = 1$, а $P(a_j) = 0$ при всех j.

Доказательство. Проверка показывает, что подходит многочлен $P(z) = \prod_{k=1}^{n} \frac{z-a_k}{b-a_k}$.

Теорема 10.9. Пусть задан набор из попарно различных чисел $\{a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}\}$. Определим многочлены $P_k(z)$ степени n такие, что $P_k(a_k) = 1$, а $P_k(a_j) = 0$ при всех $j \neq k$ (они существуют по Лемме 10.8). Тогда набор многочленов $\{P_k(z)\}$ линейно независим, и любой многочлен $P(z)$ степени не выше n представляется в виде $P(z) = \sum_{k=1}^{n+1} b_k P_k(z)$, где $b_k = P(a_k)$. Иначе говоря, набор $\{P_k(z)\}$ является базисом в линейном пространстве многочленов степени не выше n (это пространство обозначается $P_n[z]$). Следовательно $dim(P_n[z]) = n+1$.

Доказательство. (1) Нетрудно проверить, что если $\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k P_k(z) = 0$ для всех z, то из условия $P_k(a_j) = \delta_{jk}$ следует, что $\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k P_k(a_j) = \lambda_j = 0$ для всех j.

(2) Положим $Q(z) = P(z) - \sum_{k=1}^{n+1} b_k P_k(z)$, где $b_k = P(a_k)$. Тогда для всех a_j будет выполнено $Q(a_j) = P(a_j) - \sum_{k=1}^{n+1} b_k P_k(a_j) = b_j - b_j = 0$, и у

многочлена $Q(z)$ имеется по крайней мере $(n + 1)$ корней. Согласно следствию 10.7, многочлен $Q(z)$ тождественно равен нулю, откуда $P(z)=\sum_{k=1}^{n+1} b_k P_k(z)$.

Следствие 10.10. Любой многочлен степени не выше n выражается через набор многочленов $\{1, z, z^2, \ldots, z^n\}$, и этот набор содержит $(n+1)=dim(P_n[z])$ векторов. По достаточному признаку набор $\{1, z, z^2, \ldots, z^n\}$ является базисом в пространстве $P_n[z]$.

Определение 10.11. Число k называется кратностью корня a многочлена $P(z)$, если верно разложение $P(z)=S(z)(z-a)^k$, причем $S(a)\neq 0$.

Лемма 10.12. Если для многочлена $P(z)$ число a является корнем кратности k, то для производной многочлена $P'(z)$ число a является корнем кратности $(k-1)$.

Доказательство. Формулы дифференцирования для суммы, разности, произведения и степени многочленов не зависят от поля. Значит, если $P(z)=S(z)(z-a)^k$, то

$$P'(z)=S'(z)\cdot(z-a)^k+S(z)\cdot(k(z-a)^{k-1})=$$
$$=(S'(z)(z-a)+kS(z))\cdot(z-a)^{k-1}=Q(z)\cdot(z-a)^{k-1}.$$

Осталось заметить, что $Q(a)=S'(a)(a-a)+kS(a)=kS(a)\neq 0$.

Пример 2. Найдите все значения параметра a, при котором многочлен третьей степени $P(z)=z^3+3z^2-9z+a$ имеет кратные корни.

Решение. Кратный корень многочлена обязан быть корнем производной многочлена. Производная $P'(z)=3z^2+6z-9$ имеет два корня $z = 1$ и $z = -3$. Соответственно, многочлен $P(z)$ имеет кратный корень либо при $P(1)=-5+a_1=0$, тогда $a_1 = 5$, либо при $P(3)=27+a_2=0$, тогда $a_2=-27$.

Определение 10.13. Многочлен $Q(z)$ называется общим делителем двух многочленов $P_1(z)$ и $P_2(z)$, если они оба делятся на $Q(z)$ без остатка. Многочлен $Q(z)$ называется наибольшим общим делителем (НОД) двух многочленов $P_1(z)$ и $P_2(z)$, если он делится на любой другой их общий делитель. Если два многочлена не имеют общих делителей степени больше нуля, то они называются взаимно простыми.

Следует отметить, что делители, отличающиеся числовым множителем, не считаются различными.

Замечание. Между многочленами и целыми числами наблюдается некоторое сходство. Это сходство не случайно. В обоих множествах выполняются все аксиомы поля, кроме наличия обратного элемента.

Такие объекты в математике называются коммутативными кольцами без делителей нуля. Поле рациональных чисел получается из кольца целых чисел с помощью следующего приема: образуются формальные дроби $\frac{a}{b}$, причем дроби $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ считаются равными, если $ad = bc$. Аналогично можно поступить с многочленами: образуем формальные дроби $\frac{P(z)}{Q(z)}$, причем две дроби $\frac{P(z)}{Q(z)}$ и $\frac{S(z)}{R(z)}$ считаются равными, если $P(z)\cdot R(z) = Q(z)\cdot S(z)$. Полученное поле называется полем рациональных функций.

Определение 10.14 (Алгоритм Евклида). Пусть даны два многочлена $Q_1(z)$ и $Q_2(z)$ с условием $deg(Q_1(z)) \geq deg(Q_2(z))$. Определим для $j > 2$ рекуррентную последовательность многочленов $Q_j(z)$. Именно, если многочлены $Q_{j-2}(z)$ и $Q_{j-1}(z)$ уже построены, то разделим с остатком $Q_{j-2}(z)$ на $Q_{j-1}(z)$, и обозначим остаток через $Q_j(z)$. Получим $Q_{j-2}(z) = S_{j-1}(z)\cdot Q_{j-1}(z) + Q_j(z)$.

В силу теоремы о делении с остатком $deg(Q_{j-1}(z)) > deg(Q_j(z))$. Поскольку убывающая последовательность целых чисел $deg(Q_j(z))$ не может быть бесконечной, для некоторого k будет $Q_{k+1}(z) = 0$, то есть $Q_{k-1}(z) = S_k(z)\cdot Q_k(z)$. Это означает, что многочлен $Q_{k-1}(z)$ делится на $Q_k(z)$.

Алгоритм Евклида для многочленов полностью повторяет аналогичный алгоритм для целых чисел.

Лемма 10.15. Последний многочлен $Q_k(z)$ в последовательности $\{Q_j(z)\}$ является наибольшим общим делителем многочленов $Q_1(z)$ и $Q_2(z)$.

Доказательство. Из равенства $Q_{j-2}(z) = S_{j-1}(z)\cdot Q_{j-1}(z) + Q_j(z)$ следует, во-первых, что общий делитель многочленов $Q_{j-2}(z)$ и $Q_{j-1}(z)$ является также делителем многочлена $Q_j(z)$, во-вторых, общий делитель многочленов $Q_{j-1}(z)$ и $Q_j(z)$ является также делителем многочлена $Q_{j-2}(z)$. Из первого факта выводится, что любой общий делитель многочленов $Q_1(z)$ и $Q_2(z)$ является делителем всех многочленов $Q_j(z)$, в частности, $Q_k(z)$. Из второго факта и того, что $Q_{k-1}(z) = S_k(z)\cdot Q_k(z)$, следует, что $Q_k(z)$ является общим делителем всех многочленов $Q_j(z)$. В совокупности оба утверждения означают, что $Q_k(z)$ при всех j является наибольшим общим делителем многочленов $Q_{j-1}(z)$ и $Q_j(z)$.

Лемма 10.16. Для всех номеров j существуют такие два многочлена $N_j(z)$ и $N_{j+1}(z)$, что многочлен $Q_k(z) = N_j(z)\cdot Q_j(z) + N_{j+1}(z)\cdot Q_{j+1}(z)$.

Доказательство. Используем индукцию по убыванию j. Утверждение верно для номера $j = k-1$, так как $Q_k = 0\cdot Q_{k-1} + 1\cdot Q_k$. Пусть оно верно для номера $j - 1$. Это означает, что существуют такие два многочлена N_{j+1} и N_{j+2}, что выполнено равенство $Q_k = N_{j+1}Q_{j+1} + N_{j+2}Q_{j+2}$. Используя также условие $Q_{j+2} = Q_j - S_{j+1}Q_{j+1}$, получим новое соотношение

$$Q_k = N_{j+1}Q_{j+1} + N_{j+2}(Q_j - S_{j+1}Q_{j+1}) = N_{j+2}Q_j + (N_{j+1} - S_{j+1})Q_{j+1}.$$

Итак, если положить $N'_j = N_{j+2}$, $N'_{j+1} = N_{j+1} - S_{j+1}$, то утверждение окажется верным для номера j. Значит, оно верно для всех j.

В частности, при $j = 1$ получаем следующую теорему.

Теорема 10.17. Наибольший общий делитель $R(z)$ двух многочленов $Q_1(z)$ и $Q_2(z)$ существует. При этом найдутся такие два многочлена $N_1(z)$ и $N_2(z)$, что

$$R(z) = N_1(z) \cdot Q_1(z) + N_2(z) \cdot Q_2(z).$$

В частности, если $Q_1(z)$ и $Q_2(z)$ — взаимно-простые многочлены, то найдутся такие два многочлена $N_1(z)$ и $N_2(z)$, что

$$N_1(z) \cdot Q_1(z) + N_2(z) \cdot Q_2(z) = 1.$$

Замечание. Аналогичная теорема для целых чисел гарантирует целочисленное решение уравнения $ax + by = 1$, если a и b взаимно просты.

Определение 10.18. Многочлен $S(z)$ называется общим кратным двух многочленов $P_1(z)$ и $P_2(z)$, если он делится на $P_1(z)$ и $P_2(z)$. Многочлен $S(z)$ называется наименьшим общим кратным (НОК) двух многочленов $P_1(z)$ и $P_2(z)$, если на него делится любое другое общее кратное.

Замечание. Как и для целых чисел, верно соотношение

$$P_1(z) \cdot P_2(z) = (\text{НОК}(P_1(z), P_2(z)))(z) \cdot (\text{НОД}(P_1(z), P_2(z)))(z).$$

Пример 3. Даны многочлены $P(z) = 2z^2 - 4z + 5$ и $Q(z) = z - 3$. Подобрать многочлены $K(z)$ и $N(z)$ так, чтобы было $K(z) \cdot P(z) + N(z) \cdot Q(z) = c$, где c — некоторая константа.

Решение. Имеем $P(3) = 11$, поэтому многочлен $P(z) - 11 = 2z^2 - 4z - 6$ делится на $Q(z) = z - 3$: $P(z) - 11 = 2z^2 - 4z - 6 = 2(z+1)(z-3)$. Следовательно, $P(z) - 2(z+1) \cdot Q(z) = 11$, то есть $K(z) = 1$, $N(z) = -2(z+1)$, $c = 11$. Если разделить $K(z)$ и $N(z)$ на 11, можно получить $c = 1$.

Пример 4. Даны многочлены $P(z) = z^2 - 4z + 5$ и $Q(z) = z^2 - 3z - 4$. Подобрать многочлены $K(z)$ и $N(z)$ так, чтобы было $K(z) \cdot P(z) + N(z) \cdot Q(z) = c$, где c — некоторая константа.

Решение. Используем алгоритм Евклида. Многочлены $P(z)$ и $Q(z)$ взаимно просты, так как не имеют общих корней. Разделим с остатком $P(z)$ на $Q(z)$. В результате получим $z^2 - 4z + 5 = (z^2 - 3z - 4) + (-z + 9)$. Остаток $R(z) = -z + 9 = P(z) - Q(z)$.

Разделим с остатком $Q(z)$ на $R(z)$. Получим $Q(z) = z^2 - 3z - 4 =$ $= (-z-6)(-z+9)+50.$ Следовательно,

$$50 = Q(z) - (-z-6)\cdot R(z) = Q(z) + (z+6)(P(z) - Q(z)) =$$
$$= (z+6)\cdot P(z) + (-z-5)\cdot Q(z).$$

§ 2. Алгебраические уравнения

Основная теорема высшей алгебры дается без доказательства.

Теорема 10.19. (Основная Теорема Высшей алгебры). Любой многочлен $P(z)$ над полем комплексных чисел степени $n > 0$ имеет хотя бы один корень (в общем случае комплексный).

В качестве следствия получаем следующее фундаментальное утверждение.

Теорема 10.20. Любой многочлен n-й степени над полем комплексных чисел имеет (с учетом кратностей) ровно n корней (в общем случае комплексных) и раскладывается в произведение линейных множителей: $P(z) = a_n \cdot \prod\limits_{j=1}^{n}(z - z_j),$ где z_j – корни многочлена, которые могут быть одинаковыми.

Другая запись: $P(z) = a_n \cdot \prod\limits_{j=1}^{k}(z - z_j)^{m_j}$, где z_j – различные корни многочлена, m_j – их кратности, при этом $\sum\limits_{j=1}^{k} m_j = n.$

Доказательство. Теорему будем доказывать по индукции. Для многочленов первой степени она верна. Пусть она верна для многочленов степени $(n-1)$. Докажем ее для многочленов степени n. Согласно Основной Теореме Высшей алгебры многочлен $P(z)$ степени $n > 0$ имеет некоторый корень z_n. По Следствию 10.5 из Теоремы Безу многочлен можно представить в виде $P(z) = a_n \cdot Q(z)\cdot(z - z_n),$ где $Q(z)$ – приведенный многочлен степени $(n - 1)$. Согласно предположению, для многочлена $Q(z)$ теорема верна: $Q(z) = \prod\limits_{j=1}^{n-1}(z - z_j).$ Тогда для многочлена $P(z)$ теорема также верна: $P(z) = a_n \cdot \prod\limits_{j=1}^{n}(z - z_j).$ Согласно принципу математической индукции Теорема 10.20 верна для любых многочленов.

Используя основную теорему о разложении многочлена в поле комплексных чисел, можно вывести несколько полезных утверждений о связи коэффициентов многочлена и его корней.

Определение 10.21. Элементарным симметрическим многочленом от n переменных порядка k называется функция, задаваемая формулой $s_k(z_1, z_2, ..., z_n) = \sum_J \left(\prod_{m=1}^{k} z_{j_m} \right)$. Здесь сумма берется по всем наборам $J = \{j_1, j_2, ..., j_k\}$, где $j_1 < j_2 < ... < j_k$. Для слагаемого с индексом J в произведении участвуют переменные с номерами $j_1, j_2, ..., j_k$. Число слагаемых в сумме равно биномиальному коэффициенту C_n^k.

Теорема 10.22. (Теорема Виета). Пусть многочлен $P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ разлагается на линейные множители $P(z) = a_n \cdot \prod_{j=1}^{n} (z - z_j)$. Тогда его коэффициенты выражаются через его корни с помощью формулы $a_{n-k} = (-1)^k a_n \cdot s_k(z_1, z_2, ..., z_n)$, где s_k – элементарный симметрический многочлен k-го порядка от n переменных.

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что $a_n = 1$. Проанализируем, что произойдет при раскрытии скобок в произведении $P(z) = \prod_{j=1}^{n} (z - z_j)$. Слагаемые, в которых переменная z входит в степени $(n-k)$, образуются следующим образом: из k скобок выбирается соответствующий корень z_j со знаком минус, а из остальных $(n - k)$ скобок переменная z. В результате коэффициент при z^{n-k} складывается из k-кратных призведений $\prod_{m=1}^{k} z_{j_m}$ разных корней со знаком $(-1)^k$. Произведения берутся по всем возможным комбинациям $J = \{j_1, j_2, ..., j_k\}$ из разных номеров корней.

Если $a_n \neq 1$, то вся сумма умножается на a_n.

Следствие 10.23. $a_{n-1} = -a_n \cdot \sum_{j=1}^{n} z_j$, $a_{n-2} = a_n \cdot \sum_{j \neq k}^{n} z_j z_k$, $a_0 = (-1)^n a_n \cdot \prod_{j=1}^{n} z_j$.

Пример 5. Найти сумму квадратов корней многочлена $P(z) = 3z^3 - 2z^2 + 9z - 7$.

Решение. Воспользуемся известным тождеством

$$\sum_{j=1}^{n} z_j^2 = \left(\sum_{j=1}^{n} z_j \right)^2 - 2 \cdot \sum_{j \neq k}^{n} z_j z_k = (s_1(z_1, z_2, ..., z_n))^2 - 2 \cdot s_2(z_1, z_2, ..., z_n).$$

Если $z_1, z_2, \ldots, z_n$ – корни многочлена $P(z)$, то из Теорема Виета следует, что

$$s_1(z_1, z_2, \ldots, z_n) = -\frac{a_{n-1}}{a_n}, \quad s_2(z_1, z_2, \ldots, z_n) = \frac{a_{n-2}}{a_n}.$$

При $n = 3$ получим

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = (z_1 + z_2 + z_3)^2 - 2(z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1) = \left(-\frac{a_2}{a_3}\right)^2 - 2 \cdot \frac{a_1}{a_3} = \frac{4}{9} - 6 = -\frac{50}{9}.$$

Из теоремы о разложении многочленов с комплексными коэффициентами можно получить важный результат о разложении многочлена с действительными коэффициентами.

Лемма 10.24. Если для многочлена $P(z)$ с действительными коэффициентами комплексное число b с ненулевой мнимой частью является корнем кратности k, то сопряженное число $\overline{b}$ также является корнем этого многочлена кратности k.

Доказательство. Из условия следует, что $P(z) = Q(z) \cdot (z - b)^k$, причем $Q(b) \neq 0.$ Переходя к сопряжению в обеих частях равенства, получим $\overline{P(z)} = \overline{Q(z)} \cdot (\overline{z} - \overline{b})^k$. Поскольку коэффициенты многочлена $P(z)$ действительные, $\overline{P(z)} = P(\overline{z})$. Многочлен $\overline{Q(z)}$ можно представить в виде $\overline{Q(z)} = Q_1(\overline{z})$, где коэффициенты многочлена $Q_1(z)$ сопряжены к коэффициентам многочлена $Q(z)$. В итоге получим $P(\overline{z}) = Q_1(\overline{z}) \cdot (\overline{z} - \overline{b})^k$. Заменим в этом равенстве обозначение переменной $\overline{z}$ на стандартное обозначение z. Получим $P(z) = Q_1(z)(z - \overline{b})^k$, причем $Q_1(\overline{b}) = \overline{Q(b)} \neq 0.$ Лемма 10.24 доказана.

Например, каждый квадратный трехчлен $p(z) = z^2 + pz + q$ с отрицательным дискриминантом $D = p^2 - 4q < 0$ имеет два сопряженных комплексных корня $z_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{-D} \cdot i.$

Теорема 10.25. Каждый многочлен $P(z)$ с действительными коэффициентами разлагается в произведение множителей, которые либо линейные (то есть множители вида вида $(z - z_k)$), либо квадратичные (то есть множители вида $(z^2 + p_j z + q_j)$ с отрицательным дискриминантом). Здесь подразумевается, что числа z_k, p_j, q_j – действительные.

Доказательство. Любые два сопряженных числа $z_{1,2} = a \pm bi$ являются корнями некоторого квадратного уравнения с действительными коэффициентами (с отрицательным дискриминантом):

$$(z-z_1)(z-z_2)=z^2-(z_1+z_2)z+z_1z_2=z^2-2az+(a^2+b^2)=0.$$

Сгруппировав в разложении многочлена $P(z)$ каждый линейный множитель $(z-z_k)$ с соответствующим множителем $(z-\overline{z_k})$, мы сопоставим этой паре квадратичный множитель $(z^2+p_jz+q_j)$ с действительными коэффициентами с отрицательным дискриминантом.

Определение 10.26. Многочлен $P(z)$ с коэффициентами в некотором поле называется неприводимым над этим полем, если он не раскладывается в произведение двух многочленов положительной степени с коэффициентами в этом поле.

Теорема 10.27. В поле комплексных чисел все неприводимые многочлены имеют степень один. В поле действительных чисел неприводимые многочлены могут быть степени один или два.

В поле рациональных чисел существуют неприводимые многочлены любой степени, например, неприводим многочлен $P(q)=q^n-2$.

Пример 6. Известно, что у многочлена $P(z)=\sum\limits_{k=0}^{n}a_kz^k$ с действительными коэффициентами есть следующие корни: 2 кратности 2, $(1-i)$ кратности 2, i кратности 3 и $(2+i)$ кратности 1. Кроме того, $a_n=3$ и $P(0)=720.$ Найти минимальную степень такого многочлена, его коэффициент a_{n-1} и его разложение в произведение неприводимых многочленов с действительными коэффициентами.

Решение. Если многочлен с действительными коэффициентами имеет корни $(1-i)$ кратности 2, i кратности 3 и $(2+i)$ кратности 1, то он также должен иметь сопряженные корни $(1+i)$ кратности 2, $-i$ кратности 3 и $(2-i)$ кратности 1. Произведение всех 14 перечисленных корней, включая действительный корень 2 кратности 2, дает $2^2\cdot((1-i)(1+i))^2\cdot(i\cdot(-i))^3\cdot((2+i)(2-i))=80.$ В то же время дано, что $P(0)=a_0=(-1)^n\cdot 3\cdot\prod\limits_{j=1}^{n}z_j=720.$ Значит должен быть еще как минимум один корень. Оптимальный многочлен получится, если добавить один корень. Тогда $n=15,$ и добавить надо корень $z_{15}=(-1)^{15}\cdot\dfrac{720}{3\cdot 80}=-3.$

Коэффициент a_{n-1} вычисляется по формуле $a_{n-1}=-a_n\cdot\sum\limits_{j=1}^{n}z_j,$ где сумма совпадает с суммой всех действительных частей всех корней: $a_{14}=-3(2\cdot 2+6\cdot 1+6\cdot 0+2\cdot 2-3)=-33.$

Чтобы найти разложение многочлена на неприводимые множители с действительными коэффициентами, надо построить неприводимые квадратные трехчлены, перемножив одночлены с парой сопряженных комплексных корней:

$$(z-(1-i))(z-(1+i))=z^2-2z+2;$$

$$(z-i)(z+i)=z^2+1;$$

$$(z-(2+i))(z-(2-i))=z^2-4z+5.$$

В результате получим разложение

$$P(z)=3(z-2)^2(z^2-2z+2)^2(z^2+1)^3(z^2-4z+5)(z+3).$$

Е.И. Анно

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Курс лекций

ISBN 978-5-906932-69-3