МГУ им. М.В. Ломоносова. Экономический факультет. Кафедра ММАЭ.
1 курс, 1 семестр, Линейная алгебра - 1. Работа 2, 1 час 20 минут. **Образец**.
Всего 16 баллов. Все утверждения должны быть обоснованы.

Контрольная №2 (теоретическая)

1а. Дайте определение того, что вектор x выражается через набор F и что набор G выражается через набор F. Докажите, что если G выражается через F, а H выражается через G, то H выражается через F. (3б)

1б. Докажите, что для любой матрицы A СЛАУ $Ax = b$ несовместна при некотором $b \in R^n$ тогда и только тогда, когда строки матрицы A линейно зависимы. (3б)

2а. Дайте определение линейной зависимости набора векторов. Докажите, что набор векторов линейно зависим тогда и только тогда, когда в наборе существует вектор, который выражается через другие. (2б)

2б. Дайте определение линейной независимости набора векторов без отрицания. Докажите, что если вектор x выражается через набор F, то разложение единственно тогда и только тогда, когда набор F линейно независим. (2б)

3а. Докажите или опровергните утверждение: если любой вектор линейного пространства R^n можно разложить по векторам $\{f_1, ..., f_n\}$, то набор $\{f_1, ..., f_n\}$ – базис в R^n. (2б)

3б. Набор векторов F в R^3 таков, что ранг набора F не меняется при добавлении к нему пары линейно независимых векторов a и b, и меняется при добавлении вектора c. Каким может быть ранг такого набора? (2б)

4а. Существуют ли такие две квадратные матрицы (3×3) ранга два, что их произведение равно матрице ранга один? Если существуют, приведите пример. (2б)

4б. Верно ли следующее утверждение: если A и B – квадратные матрицы, и $r(A\cdot B) = r(B)$, то A – невырожденная матрица? (2б)

5а. Пусть A – матрица размером 4×4. Верно ли, что если в матрице есть три линейно зависимых строки, то в ней есть три линейно зависимых столбца? (3б)

5б. Набор векторов $\{b_1, b_2, b_3\}$ линейно независим и линейно выражается через набор $\{a_1, a_2, a_3\}$. Верно ли, что набор $\{a_1, a_2, a_3\}$ линейно выражается через набор $\{b_1, b_2, b_3\}$? (3б)

6а. Докажите, что в линейном пространстве для каждого вектора x существует единственный противоположный элемент $(-x)$. (1б)

6б. Докажите, что если у квадратной матрицы A существует левая обратная матрица и правая обратная матрица, то эти матрицы равны. (1б)

7а. Докажите, что две двумерные плоскости в R^3 либо параллельны, либо совпадают, либо пересекаются по общей прямой. (3б)

7б. Постройте в координатном пространстве R^4 две скрещивающиеся плоскости, параллельные прямой $H = c(1; 2; 0; 0) + L\{a(0; 2; 1; 0)\}$. (3б)