V. Матричная алгебра

Определения и формулы.

Матрицей называется отображение, которое каждой комбинации из номера строки j, где $1 \le j \le m$, и номера столбца k, где $1 \le k \le n$, ставит в соответствие число a_{jk}. Число a_{jk} называется элементом матрицы. Запись $(m \times n)$ обозначает порядок матрицы.

Строкой матрицы с номером j называется набор ее значений при фиксированном значении аргумента j, столбцом с номером k– набор значений при фиксированном k. Строки и столбцы матрицы можно считать элементами линейных пространств R^n и R^m.

Матрица записывается заключенной в круглые скобки таблицей со списком всех значений, распределенных по строкам и столбцам.

Вектор-строкой называется матрица, состоящая из одной строки. Вектор-столбцом называется матрица, состоящая из одного столбца.

Матрицы можно почленно складывать и умножать на действительное число. Множество $M[m, n]$ матриц порядка $(m \times n)$ с так определенными операциями является линейным пространством размерности mn. Базисом этого пространства являются матрицы M^{pq} для $1 \le p \le m$, $1 \le q \le n$. Элементы матрицы M^{pq} задаются формулой $m_{jk} = \delta_{pj}\delta_{qk}$, где δ_{ij} – символ Кронекера.

Произведением матрицы A порядка $(m \times n)$ и матрицы B порядка $(n \times p)$ является матрица $C = A \cdot B$ порядка $(m \times p)$, значения которой вычисляются по формуле $c_{jq} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} b_{kq}$.

Произведение матриц ассоциативно (то есть $A(BC) = (AB)C$) и дистрибутивно относительно сложения (то есть $A(B + C) = AB + AC$ и $(A + B)C = AC + BC$), но в общем случае не коммутативно.

Система линейных алгебраических уравнений, состоящая из m уравнений с n неизвестными, эквивалентна матричному уравнению $AX = B$, где A – матрица коэффициентов порядка $(m \times n)$, X – вектор-столбец неизвестных высотой n, B – вектор-столбец свободных членов высотой m. Матрица A, к которой справа присоединен еще один столбец B, называется расширенной матрицей коэффициентов СЛАУ.

Необходимое и достаточное условие совместности СЛАУ (Теорема Кронекера-Капелли): система совместна тогда и только тогда, когда ранг ее матрицы коэффициентов совпадает с рангом расширенной матрицы коэффициентов.

Матрица B порядка $(n \times m)$ называется транспонированной к матрице A порядка $(m \times n)$, если $b_{kj} = a_{jk}$. Транспонированная матрица обозначается A^T.

Операция транспонирования удовлетворяет соотношению двойственности: $(A^T)^T = A$.

Для произведения матриц выполняется формула: $(AB)^T = B^T A^T$.

Для произведения матриц $C = AB$ выполняются соотношения $C^k = AB^k$ и $C_j = A_j B$, где C^k и B^k – столбцы матриц C и B с номером k, C_j и A_j – строки матриц C и A с номером j.

В этих же обозначениях верна формула $C^k = \sum_{i=1}^{n} A^i b_{ik}$. Словесная формулировка: k-ый столбец матрицы $C = AB$ является линейной комбинацией столбцов матрицы A, коэффициентами которой являются элементы k-го столбца матрицы B.

Верна также формула $C_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ji} B_i$. Словесная формулировка: j-ая строка матрицы $C = AB$ является линейной комбинацией строк матрицы B, коэффициентами которой являются элементы j-ой строки матрицы A.

Рангом $r(A)$ матрицы A является ранг набора ее строк, рассматриваемых как элементы пространства R^n, или ранг набора ее столбцов, рассматриваемых как элементы пространства R^m. Эти числа совпадают.

Квадратной матрицей порядка n называется матрица E, у которой число строк m равно числу столбцов n. Главной диагональю квадратной матрицы считается совокупность ее элементов, у которых номер строки равен номеру столбца. Единичной матрицей называется квадратная матрица, у которой на главной диагонали стоят единицы, вне главной диагонали – нули.

Квадратная матрица называется невырожденной, если ее ранг $r(A) = n$.

Для произведения матриц выполняется неравенство $r(AB) \le \min(r(A), r(B))$. В случае, когда матрица A – невырожденная, верно $r(AB) = r(B)$. Аналогично $r(AB) = r(A)$, если невырожденная матрица B.

Обратной матрицей к квадратной матрице A называется такая матрица B, для которой $BA = AB = E$. Обратная матрица обозначается A^{-1}.

Переход к обратной матрице удовлетворяет соотношению двойственности: $(A^{-1})^{-1} = A$.

Для произведения матриц выполняется формула: $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$, если оба множителя в правой части существуют.

Если матрица A имеет обратную, то в матричных уравнениях $AX = B$ и $XA = B$ решение единственное. Решения даются формулами $X = A^{-1}B$ и $X = BA^{-1}$ соответственно.

Примеры решения задач.

Пример 1. Представьте вторую строку матрицы $C = A \cdot B$, где $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, в виде линейной комбинации строк B_1, B_2, B_3 матрицы B.

Решение. В соответствие с формулой $C_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ji} B_i$ имеем $C_2 = 2B_1 - B_2 + 2B_3$.

Пример 2. Найдите матрицу, обратную к матрице $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 2 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, и сделайте проверку.

Решение. Для решения матричного уравнения $AX = E$ используется обобщенная схема, аналогичная схеме Гаусса-Жордана для стандартной СЛАУ:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & \boxed{1} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 9 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 0 & 0 & 1 & -9 & 15 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & -3 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -9 & 15 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 11 & -18 \end{array}\right).$$

В результате $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -9 & 15 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 11 & -18 \end{pmatrix}$.

Сделаем проверку: $A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 2 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -9 & 15 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 11 & -18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Пример 3. Решите матричное уравнение $XA = B$, где $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

Решение. Транспонируем уравнение и сделаем замену $Y = X^T$. Для решения матричного уравнения $A^T Y = B^T$ воспользуемся обобщенной схемой Гаусса-Жордана:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & \boxed{1} & 2 & 2 & 3 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \boxed{1} & 0 & -2 & 0 & -2 \\ 4 & 3 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & -2 & 0 & -2 \\ \boxed{1} & 0 & 0 & 7 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 4 & 2 & 5 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & -9 & 1 & -6 \\ 1 & 0 & 0 & 7 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 3 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 7 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -9 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 3 & 1 \end{array}\right).$$

Тогда $X = Y^T = \begin{pmatrix} 7 & -9 & -3 \\ -1 & 1 & 3 \\ 4 & -6 & 1 \end{pmatrix}$.

Сделаем проверку: $XA = \begin{pmatrix} 7 & -9 & -3 \\ -1 & 1 & 3 \\ 4 & -6 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} = B$.

Пример 4. Решите матричное уравнение $AX = B$, где $A = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 12 & 21 \\ -8 & -14 \end{pmatrix}$.

Решение. Используя схему Гаусса-Жордана, получим, что матричное уравнение эквивалентно уравнению $\begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 4 & 7 \end{pmatrix}$. Решение этого уравнения будет суммой частного решения, например $X_0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, и общего решения однородного уравнения $\begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot Y = 0$.

Однородная СЛАУ $\{-y_1+2y_2=0$ имеет решение $b=(2;1)$. Каждый столбец матрицы Y пропорционален вектору b. В итоге получим

$$Y=\begin{pmatrix}2\lambda & 2\mu\\ \lambda & \mu\end{pmatrix}=\lambda\cdot\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}0 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix},\text{ где } \lambda,\mu\in R.$$

Общее решение исходного уравнения

$$X=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 2 & 3\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}0 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0+2\lambda & -1+2\mu\\ 2+\ \lambda & 3+\ \mu\end{pmatrix},\text{ где } \lambda,\mu\in R.$$

Пример 5. Решите матричное уравнение

$$\begin{pmatrix}2 & 2 & 1\\ -1 & 2 & 2\\ 0 & 3 & 1\end{pmatrix}\cdot X\cdot\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 5 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12 & -7\\ -12 & 7\\ -27 & 14\end{pmatrix}.$$

Решение. Матрица $\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 5 & -3\end{pmatrix}$ невырожденная, поэтому можно умножить обе части уравнения справа на $\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 5 & -3\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}-3 & -1\\ -5 & -2\end{pmatrix}$. В правой части получим

$$\begin{pmatrix}12 & -7\\ -12 & 7\\ -24 & 14\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-3 & -1\\ -5 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & -2\\ 2 & -4\end{pmatrix},\text{ откуда }\begin{pmatrix}2 & 2 & 1\\ -1 & 2 & 2\\ 0 & 3 & 1\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & -2\\ 2 & -4\end{pmatrix}.$$

Решим стандартное матричное уравнение типа $AX=B$ методом Гаусса-Жордана. В результате $X=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & -2\\ -1 & 2\end{pmatrix}$.

Пример 6. Решите матричное уравнение $\begin{pmatrix}2 & 3\\ -3 & -4\end{pmatrix}\cdot X\cdot\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & 2\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 6\\ -4 & -9\end{pmatrix}$. Укажите параметрическое представление множества решений.

Решение. Матрица $\begin{pmatrix}2 & 3\\ -3 & -4\end{pmatrix}$ невырожденная. Умножим обе части уравнения слева на $\begin{pmatrix}2 & 3\\ -3 & -4\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}-4 & -3\\ 3 & 2\end{pmatrix}$. Получим

$$X\cdot\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & 2\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4 & -3\\ 3 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4 & 6\\ -4 & -9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4 & 3\\ 4 & 0\end{pmatrix}\text{ или }\begin{pmatrix}-2 & 1 & -1\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}\cdot X^T=\begin{pmatrix}-4 & 4\\ 3 & 0\end{pmatrix}.$$

Матрица $Y=X^T$ порядка 3×2 содержит 6 неизвестных, матричное уравнение эквивалентно СЛАУ из 4 уравнений. В системе 2 свободных переменных и 4 базисных. Решим СЛАУ с использованием схемы Гаусса-Жордана. Получим общее решение

$$Y=\begin{pmatrix}1+3\lambda & -1+3\mu\\ \lambda & 1+\mu\\ 2-5\lambda & -1-5\mu\end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$X=Y^T=\begin{pmatrix}1+3\lambda & \lambda & 2-5\lambda\\ -1+3\mu & 1+\mu & -1-5\mu\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ -1 & 1 & -1\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}3 & 1 & -5\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 3 & 1 & -5\end{pmatrix}.$$

Пример 7. Решите матричное уравнение $\begin{pmatrix}2 & 4\\ 1 & 2\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}p & 6\\ 1 & 3\end{pmatrix}$ при всех значениях параметра p.

Решение. Система $\left(\begin{array}{cc|cc}2 & 4 & p & 6\\ 1 & 2 & 1 & 3\end{array}\right)\Rightarrow\left(\begin{array}{cc|cc}0 & 0 & p-2 & 0\\ 1 & 2 & 1 & 3\end{array}\right)$ совместна, только если $p=2$. В этом случае решение матричного уравнения $(1\ \ 2)\cdot X=(1\ \ 3)$ можно представить в виде

$$X=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 0\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & 0\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}0 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix},\text{ где } \lambda,\mu\in R \text{ (см. Пример 4).}$$

Пример 8. Найдите размерность подпространства решений матричного уравнения

$$\begin{pmatrix}-3 & 6 & 0 & -1 & 2\\ 2 & -4 & 3 & 2 & -2\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Решение. Матрица X должна иметь размер 5×3. Соответствующая система линейных уравнений содержит 15 переменных и состоит из шести уравнений – по два на каждый столбец. Ее ранг равен шести, тогда размерность решения равна 15 – 6 = 9.

Пример 9. Найдите общий вид матриц X, перестановочных с матрицей A, укажите размерность подпространства L всех таких матриц и его базис.

а) $A=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}$; в) $A=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$.

Решение. а) Надо решить систему

$$\begin{pmatrix}1&-3\\-1&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&-3\\-1&2\end{pmatrix},\ \text{или}$$

$$\begin{pmatrix}x_1-3x_3&x_2-3x_4\\-x_1+2x_3&-x_2+2x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1-x_2&-3x_1+2x_2\\x_3-x_4&-3x_3+2x_4\end{pmatrix}.$$

Приравнивая элементы обеих матриц, получим СЛАУ

$$\begin{cases}x_1-3x_3=x_1-x_2\\x_2-3x_4=-3x_1+2x_2\\-x_1+2x_3=x_3-x_4\\-x_2+2x_4=-3x_3+2x_4\end{cases},\ \text{или}\ \begin{cases}x_2-3x_3=0\\x_1-x_3-x_4=0\end{cases}.$$

Ранг СЛАУ равен 2, общее решение

$$X=\begin{pmatrix}\lambda+\mu&3\lambda\\\lambda&\mu\end{pmatrix}=\lambda\cdot\begin{pmatrix}1&3\\1&0\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\ \text{где}\ \lambda,\mu\in R.$$

Базис в L составляют матрицы $f_1=\begin{pmatrix}1&3\\1&0\end{pmatrix}$, $f_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $\dim(L)=2$.

Замечание. Можно заметить, что $f_2=E$, $-f_1+2f_2=A$. Очевидно, заранее можно было предвидеть, что эти две матрицы лежат в L. Однако то, что $\dim(L)=2$, заранее не ясно.

Пример 10. Дана матрица $A=\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}$. Найти A^{29}.

Решение. Проверим, что

$$A^2=\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-2\\2&0\end{pmatrix},\ A^4=\begin{pmatrix}0&-2\\2&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&-2\\2&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4&0\\0&-4\end{pmatrix}=-4E.$$

Тогда $A^{29}=(A^4)^7\cdot A=(-4E)^7\cdot A=-2^{14}\cdot A$.

Типовые задачи

1. Пусть $C=A\cdot B$, где B задано, матрица A порядка 3×3. Представьте k-ую строку матрицы C в виде линейной комбинации строк B_1,B_2,B_3 матрицы B.

а) A=$\begin{pmatrix}3&2&2\\2&-4&1\\1&-2&1\end{pmatrix}$, $k=3$. б) $A=\begin{pmatrix}1&6&7\\-2&3&2\\3&8&-5\end{pmatrix}$, $k=3$. в) $A=\begin{pmatrix}1&4&-3\\6&-2&7\\2&5&1\end{pmatrix}$, $k=2$.

2. Пусть $C=A\cdot B$, где A задано, матрица B порядка 3×3. Представьте k-ый столбец матрицы C в виде линейной комбинации столбцов A^1,A^2,A^3 матрицы A.

а) $B=\begin{pmatrix}1&2&-3\\4&1&2\\5&-3&2\end{pmatrix}$, $k=2$. б) $B=\begin{pmatrix}6&4&-3\\7&5&1\\-2&2&-3\end{pmatrix}$, $k=1$. в) $B=\begin{pmatrix}-2&4&-2\\-3&6&8\\2&-3&-5\end{pmatrix}$, $k=2$.

3. Матрица A задана. Найдите A^{-1} методом Гаусса и сделайте проверку (по определению).

а) $A=\begin{pmatrix}3&4&-2\\2&3&-1\\1&0&-1\end{pmatrix}$. б) $A=\begin{pmatrix}5&2&1\\2&3&2\\2&-1&-1\end{pmatrix}$. в) $A=\begin{pmatrix}4&2&1\\2&1&2\\-1&-1&-1\end{pmatrix}$.

г) $A=\begin{pmatrix}1&5&1\\3&11&2\\2&7&1\end{pmatrix}$. д) $A=\begin{pmatrix}4&2&3\\3&1&2\\2&1&1\end{pmatrix}$. е) $A=\begin{pmatrix}1&3&2\\1&4&3\\2&-2&-3\end{pmatrix}$.

ж) $A=\begin{pmatrix}4&-3&-4\\3&-2&-3\\2&5&-1\end{pmatrix}$. з) $A=\begin{pmatrix}5&1&-2\\-2&-3&5\\1&-2&3\end{pmatrix}$. и) $A=\begin{pmatrix}3&1&-2&1\\2&3&-1&1\\1&-2&2&-1\\1&3&-1&1\end{pmatrix}$.

4. Найдите общий вид матриц X, удовлетворяющих однородному матричному уравнению $AX=0$, $XB=0$ или $AXB=0$, а также найдите базис и размерность подпространства L таких матриц.

а) $X\cdot\begin{pmatrix}1&-2\\-2&5\\4&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$.

б) $\begin{pmatrix}2&-1&0&3\\1&3&0&2\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$.

в) $\begin{pmatrix}3&-1&2\\4&-2&1\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.

г) $\begin{pmatrix}2&3\\1&2\end{pmatrix}\cdot X\cdot\begin{pmatrix}1&2\\3&-3\\4&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$.

д) $\begin{pmatrix}-3&6&0&-1&2\\2&-4&3&2&-2\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.

е) $\begin{pmatrix}-3&6&0&2\\2&-4&0&-2\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$.

ж) $\begin{pmatrix}-1&2&3&1&0\\2&-4&3&2&-2\\-1&2&12&5&-2\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\\0&0\end{pmatrix}$.

з) $\begin{pmatrix}3&5\\7&8\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&1&5&-2\\3&-2&-1&3\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.

и) $\begin{pmatrix}-2&5&-2&-1&3\\2&-3&3&2&-2\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$.

к) $\begin{pmatrix}-3&6&3&2\\2&-4&2&-1\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$.

л) $\begin{pmatrix}5&2&5&-2\\3&1&4&3\end{pmatrix}\cdot X\cdot\begin{pmatrix}2&3\\3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$.

м) $\begin{pmatrix}5&-1&7&2&-3\\7&-1&10&4&-6\\-6&1&-8&2&5\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\\0&0\end{pmatrix}$.

5. Найдите общий вид матриц X, удовлетворяющих матричному уравнению $AX=C$, $XB=C$ или $AXB=C$.

а) $\begin{pmatrix}3&2\\5&4\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}3&4\\7&6\end{pmatrix}$.

б) $\begin{pmatrix}-3&6\\2&-4\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}3&4\\6&8\end{pmatrix}$.

в) $\begin{pmatrix}-3&6\\2&-4\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}12&21\\-8&-14\end{pmatrix}$.

г) $\begin{pmatrix}2&1&-1\\3&2&1\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}4&-4\\2&1\end{pmatrix}$

д) $X\cdot\begin{pmatrix}3&2\\5&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}$.

е) $X\cdot\begin{pmatrix}3&4&2\\2&3&1\\1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&2\\2&-1&2\\1&-2&3\end{pmatrix}$.

ж) $\begin{pmatrix}-3&5\\1&-2\end{pmatrix}\cdot X\cdot\begin{pmatrix}2&3\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6&3\\4&-2\end{pmatrix}$.

з) $\begin{pmatrix}3&-4\\6&-8\end{pmatrix}\cdot X\cdot\begin{pmatrix}1&2\\3&7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1\\4&2\end{pmatrix}$.

и) $\begin{pmatrix}2&3\\3&4\end{pmatrix}\cdot X\cdot\begin{pmatrix}0&2\\0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-2\\0&3\end{pmatrix}$.

к) $\begin{pmatrix}2&4&3\\1&2&-1\end{pmatrix}\cdot X\cdot\begin{pmatrix}5&7\\2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&-11\\4&7\end{pmatrix}$.

л) $\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&1\\2&1&2\end{pmatrix}\cdot X\cdot\begin{pmatrix}3&4\\4&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&3\\0&1\\-1&4\end{pmatrix}$.

м) $\begin{pmatrix}2&2&1\\-1&2&2\\0&3&1\end{pmatrix}\cdot X\cdot\begin{pmatrix}-2&1\\5&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12&-7\\-12&7\\-24&14\end{pmatrix}$.

н) $\begin{pmatrix}2&3\\3&4\end{pmatrix}\cdot X\cdot\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&1\\1&-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-1&1\\3&1&4\end{pmatrix}$.

о) $\begin{pmatrix}-6&3\\4&-2\end{pmatrix}\cdot X\cdot\begin{pmatrix}-3&4&3\\2&1&1\\3&2&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9&3&3\\-6&-2&-2\end{pmatrix}$.

6. Решите матричное уравнение $AX=B$ или $XA=B$ при всех значениях параметра p.

а) $\begin{pmatrix}2&3\\1&2\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}p&3\\1&0\end{pmatrix}$.

б) $\begin{pmatrix}p&-1\\-8&2\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}1&-3\\-4&1\end{pmatrix}$.

в) $\begin{pmatrix}2&-4\\-1&2\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}p&6\\1&2\end{pmatrix}$.

г) $X\cdot\begin{pmatrix}-3&1\\p&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&-2\\-6&3\end{pmatrix}$.

д) $X\cdot\begin{pmatrix}2&3\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p&3\\1&0\end{pmatrix}$.

е) $X\cdot\begin{pmatrix}2&-1\\p&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&1\\-2&1\end{pmatrix}$.

ж) $\begin{pmatrix}2&4\\1&2\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}p&6\\1&3\end{pmatrix}$.

7. Выпишите общий вид квадратных матриц X порядка 2, перестановочных с матрицей A, найдите базис и размерность подпространства L таких матриц.

а) $A=\begin{pmatrix}4&0\\3&0\end{pmatrix}$. б) $A=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$. в) $A=\begin{pmatrix}1&-3\\-1&2\end{pmatrix}$. г) $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$.

8. Дана матрица A. Найдите A^n.

а) $A=\begin{pmatrix}3&-2\\4&-3\end{pmatrix}$, $n=29$. б) $A=\begin{pmatrix}1&2\\1&-1\end{pmatrix}$, $n=25$.

в) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $n=75$. г) $A=\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$, $n=40$.

Дополнительные задачи

9. Докажите, что произведение двух верхних треугольных квадратных матриц порядка n есть снова верхняя треугольная матрица.

10. Приведите пример матриц A и B, для которых AB существует, а BA нет.
11. Приведите примеры ненулевых квадратных матриц второго порядка, для которых:
    а) $A^2 = 0,\ \ A \neq 0$. б) $A^2 = E,\ A \neq \alpha E$. в) $A^2 = -E$.
    г) $A^{-1} = -A$. д) $A^2 = A,\ A \neq \alpha E$.
12. Приведите пример квадратных матриц второго порядка, для которых $AB \neq BA$.
13. Верно ли следующее утверждение: если A и B – квадратные матрицы, и $r(A\cdot B)=r(B)$, то A – невырожденная матрица?
14. Если известно, что $AB = CA = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$, то можно ли утверждать, что $rank(B) = rank(C)$?
15. Пусть A и B – матрицы размером (2×2). Проверьте истинность утверждения « $r(AB)=r(BA)$ при любом B» в зависимости от ранга матрицы A.
16. Пусть A и B – матрицы размером $(n\times n)$ и $rank(AB)=2$.
    Следует ли из этого, что $rank(BA)=2$?
17. Даны две матрицы $A\,(2\times 3)$ и $B\,(3\times 2)$, обе ранга 2.
    (а) Обязательно ли $r(AB)=2$?
    (б) Обязательно ли $r(BA)=2$?
18. Пусть A и B – матрицы размером (5×5), $r(A)=3$ и $AB=0$. Чему может быть равен ранг матрицы B?
19. Существуют ли такие две квадратные матрицы 3-го порядка ранга два, что их произведение равно матрице ранга один?
20. Существуют ли такие две квадратные матрицы (3×3) ранга два, что их произведение равно нулевой матрице?
21. Приведите пример двух квадратных матриц размеров (3×3) рангов 2 и 1 соответственно, произведением которых является нулевая матрица.
22. Дана неоднородная СЛАУ из трех уравнений с двумя неизвестными. Найдите ранг матрицы СЛАУ и ранг расширенной матрицы СЛАУ при заданном условии.
    а) Три прямые, соответствующие уравнениям, пересекаются в одной точке.
    б) Все три точки, являющиеся пересечениями двух из трех прямых, различны.
    в) Прямые, соответствующие двум уравнениям из трех, параллельны.
    г) Прямые, соответствующие всем трем уравнениям, параллельны.
23. Дана неоднородная СЛАУ из трех уравнений с тремя неизвестными. Найдите ранг матрицы системы и ранг расширенной матрицы системы при заданном условии.
    а) Плоскости, соответствующие трем уравнениям, пересекаются в одной точке.
    б) Плоскости, соответствующие трем уравнениям, пересекаются по одной прямой.
    в) Плоскости, соответствующие двум уравнениям, параллельны, третья их пересекает.
    г) Попарные пересечения плоскостей являются тремя параллельными прямыми.
    д) Плоскости, соответствующие трем уравнениям, параллельны.
24. Докажите, используя определение подпространства, что множество матриц, перестановочных с квадратной матрицей A порядка n (то есть $AX = XA$), является подпространством пространства квадратных матриц порядка n.
25. Какова минимальная размерность подпространства L матриц, перестановочных с матрицей A размером (2×2)? Приведите пример матрицы, для которой это минимум достигается.
26. Какова максимальная размерность подпространства L матриц, перестановочных с матрицей A размером (2×2)? Приведите пример матрицы, для которой это максимум достигается.

27. Докажите, что множество L квадратных матриц X размером 3×3, удовлетворяющих условию $X = X^T \cdot A$, где $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, является линейным подпространством. Укажите размерность и базис этого подпространства.

28. $\tilde{A}$ – матрица, присоединенная к матрице A размером (4×4), $rank(A) = 2$. Чему равен $rank(\tilde{A})$?

29. $\tilde{A}$ – матрица, присоединенная к матрице A размером (4×4), $rank(A) = 3$. Чему равен $rank(\tilde{A})$?

30. Пусть A, B, C, D – матрицы 2×2, и $AB = AC = D$. Следует ли, что $B = C$, если:
а) $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. б) $D = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. в) $D = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

31. Пусть A, B_1 и B_2 – квадратные матрицы $(n \times n)$. Докажите, что из условия $AB_1 = AB_2$ всегда следует равенство $B_1 = B_2$ в том и только в том случае, когда матрица A невырожденная.

32. Докажите, что для матрицы размером (2×2) найдется многочлен $P(t)$ степени не выше четырех, для которого $P(A) = 0$.

33. Пусть A – матрица размером 4×4. Верны ли следующие утверждения?
а) Если в матрице есть три ЛНЗ строки, то в ней есть три ЛНЗ столбца.
б) Если в матрице есть три ЛНЗ строки, то в ней любые три столбца ЛНЗ.
в) Если в матрице есть три ЛЗ строки, то в ней есть три ЛЗ столбца.
г) Если в матрице есть три ЛЗ строки, то в ней любые три столбца ЛЗ.
д) Если в матрице есть три ЛЗ строки, то в ней есть столбец, который выражается через три других.
е) Если в матрице любые три строки ЛЗ, то в ней есть три ЛЗ столбца.
ж) Если в матрице любые три строки ЛЗ, то в ней любые три столбца ЛЗ.
з) Если в матрице любые три строки ЛНЗ, то в ней любые три столбца ЛНЗ.
и) Если в матрице любые три строки ЛНЗ, то в ней может быть столбец, который выражается через три других.

Ответы на типовые задачи

1. а) $C_3 = B_1 - 2B_2 + B_3$. б) $C_3 = 3B_1 + 8B_2 - 5B_3$. в) $C_2 = 6B_1 - 2B_2 + 7B_3$.
2. а) $C^2 = 2A^1 + A^2 - 3A^3$. б) $C^2 = 6A^1 + 7A^2 - 2A^3$. в) $C^2 = 4A^1 + 6A^2 - 3A^3$.
3. а) $A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ -3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$. б) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -6 & 7 & 8 \\ 8 & -9 & -11 \end{pmatrix}$. в) $A^{-1} = \frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.
г) $A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -4 \end{pmatrix}$. д) $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. е) $A^{-1} = \begin{pmatrix} -6 & 5 & 1 \\ 9 & -7 & -1 \\ -10 & 8 & 1 \end{pmatrix}$.
ж) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 17 & -23 & 1 \\ -3 & 4 & 0 \\ 19 & -26 & 1 \end{pmatrix}$. з) $A^{-1} = \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 11 & 17 & -21 \\ 7 & 11 & -13 \end{pmatrix}$. и) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & -4 \\ 1 & -6 & 2 & 7 \\ 4 & -19 & 5 & 21 \end{pmatrix}$.
4. а) $\dim(L) = 2$; $X = \begin{pmatrix} 24\lambda & 10\lambda & -\lambda \\ 24\mu & 10\mu & -\mu \end{pmatrix}$, где $\lambda, \mu \in R$; $L = L\left\{\begin{pmatrix} 24 & 10 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 24 & 10 & -1 \end{pmatrix}\right\}$.
б) $\dim(L) = 4$; $X = \begin{pmatrix} 11\lambda & 11\mu \\ \lambda & \mu \\ \alpha & \beta \\ -7\lambda & -7\mu \end{pmatrix}$, где $\alpha, \beta, \lambda, \mu \in R$; базисом служит набор из четырех матриц X_{jk} размером 4×2, где $j = 1,2$, $k = 1,2$; если положить $f_1 = (11; 1; 0; -7)$, $f_2 = (0; 0; 1; 0)$, то в матрице X_{jk} j-ый столбец равен f_k^T, другой столбец нулевой.
в) $\dim(L) = 3$; $X = \begin{pmatrix} 3\lambda & 3\mu & 3\gamma \\ 5\lambda & 5\mu & 5\gamma \\ -2\lambda & -2\mu & -2\gamma \end{pmatrix}$, где $\lambda, \mu, \gamma \in R$;
$L = L\left\{\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}\right\}$.

г) $\dim(L)=2$; $X=\begin{pmatrix}6\lambda & 2\lambda & -3\lambda\\ 6\mu & 2\mu & -3\mu\end{pmatrix}$, где $\lambda,\mu\in R$; $L=L\left\{\begin{pmatrix}6 & 2 & -3\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 6 & 2 & -3\end{pmatrix}\right\}$.

д) $\dim(L)=9$; $X=\begin{pmatrix}2a+6b+c & 2f+6g+h & 2j+6k+m\\ a & f & j\\ 2b & 2g & 2k\\ c & h & m\\ 9b+2c & 9g+2h & 9k+2m\end{pmatrix}$, где $a,b,c,f,g,h,j,k,m\in R$; базисом служит набор из девяти матриц X_{jk} размером 5×3, где $j=1{,}2{,}3$, $k=1{,}2{,}3$; если положить $f_1=(2;1;0;0;0)$, $f_2=(6;0;2;0;9)$, $f_3=(1;0;0;1;2)$, то в матрице X_{jk} j-ый столбец равен f_k^T, остальные столбцы нулевые.

е) $\dim(L)=8$; $X=\begin{pmatrix}2a & 2c & 2f & 2h\\ a & c & f & h\\ b & d & g & j\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$, где $a,b,c,d,f,g,h,j\in R$; базисом служит набор из восьми матриц X_{jk} размером 4×4, где $j=1{,}2{,}3{,}4$, $k=1{,}2$; если положить $f_1=(2;1;0;0)$, $f_2=(0;0;1;0)$, то в матрице X_{jk} j-ый столбец равен f_k^T, остальные столбцы нулевые.

ж) $\dim(L)=6$; $X=\begin{pmatrix}2a+6b+c & 2f+6g+h\\ a & f\\ 2b & 2g\\ c & h\\ 9b+2c & 9g+2h\end{pmatrix}$, где $a,b,c,f,g,h\in R$; базисом служит набор из шести матриц X_{jk} размером 5×2, где $j=1{,}2$, $k=1{,}2{,}3$; если положить $f_1=(2;1;0;0;0)$, $f_2=(6;0;2;0;9)$, $f_3=(1;0;0;1;2)$, то в матрице X_{jk} j-ый столбец равен f_k^T, другой столбец нулевой.

з) $\dim(L)=6$; $X=\begin{pmatrix}a & c & f\\ 12a+13b & 12c+13d & 12f+13g\\ b & d & g\\ 7a+9b & 7c+9d & 7f+9g\end{pmatrix}$, где $a,b,c,d,f,g\in R$; базисом служит набор из шести матриц X_{jk} размером 4×3, где $j=1{,}2{,}3$, $k=1{,}2$; если положить $f_1=(1;12;0;7)$, $f_2=(0;13;1;9)$, то в матрице X_{jk} j-ый столбец равен f_k^T, остальные столбцы нулевые.

и) $\dim(L)=6$; $X=\begin{pmatrix}a & f\\ b & g\\ -2a+7b+4c & -2f+7g+4h\\ 2a-9b-5c & 2f-9g-5h\\ c & h\end{pmatrix}$, где $a,b,c,f,g,h\in R$; базисом служит набор из шести матриц X_{jk} размером 5×2, где $j=1{,}2$, $k=1{,}2{,}3$; если положить $f_1=(1;0;-2;2;0)$, $f_2=(0;1;7;-0;0)$, $f_3=(0;0;4;-5;1)$, то в матрице X_{jk} j-ый столбец равен f_k^T, другой столбец нулевой.

к) $\dim(L)=8$; $X=\begin{pmatrix}2a-7b & 2c-7d & 2f-7g & 2h-7j\\ a & c & f & h\\ b & d & g & j\\ -12b & -12d & -12g & -7j\end{pmatrix}$, где $a,b,c,d,f,g,h,j\in R$; базисом служит набор из восьми матриц X_{jk} размером 4×4, где $j=1{,}2{,}3{,}4$, $k=1{,}2$; если положить $f_1=(2;1;0;0)$, $f_2=(-7;0;1;-12)$, то в матрице X_{jk} j-ый столбец равен f_k^T, остальные столбцы нулевые.

л) $\dim(L)=4$; $X=\begin{pmatrix}-3a-8b & -3c-8d\\ 5a+21b & 5c+21d\\ a & c\\ b & d\end{pmatrix}$, где $a,b,c,d\in R$; базисом служит набор из четырех матриц X_{jk} размером 4×2, где $j=1{,}2$, $k=1{,}2$; если положить $f_1=(-3;5;1;0)$, $f_2=(-8;21;0;1)$, то в матрице X_{jk} j-ый столбец равен f_k^T, другой столбец нулевой.

м) $\dim(L) = 4$; $X = \begin{pmatrix} 14a+3b & 14c+3d \\ 2a+5b & 2c+5d \\ -10a-b & -10c-d \\ a & c \\ b & d \end{pmatrix}$, где $a, b, c, d \in R$; базисом может служить набор из четырех матриц X_{jk} размером 5×2, где $j = 1{,}2$, $k = 1{,}2$; если положить $f_1 = (14; 2; -10; 1; 0)$, $f_2 = (3; 5; -1; 0; 1)$, то в матрице X_{jk} j-ый столбец равен f_k^T, другой столбец нулевой.

5. а) $X = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

в) Нет решений.

в) $X = \begin{pmatrix} 2+2\lambda & -1+2\mu \\ 3+\lambda & 3+\mu \end{pmatrix}$, где $\lambda, \mu \in R$.

з) $X = \begin{pmatrix} 3\lambda & 3\mu \\ 2-5\lambda & -1-5\mu \\ -2+\lambda & 3+\mu \end{pmatrix}$, где $\lambda, \mu \in R$.

д) $X = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

е) $X = \begin{pmatrix} 7 & -9 & -3 \\ -1 & 1 & 3 \\ 4 & -6 & 1 \end{pmatrix}$.

ж) $X = \begin{pmatrix} -20 & 32 \\ -15 & 24 \end{pmatrix}$.

з) $X = \begin{pmatrix} 1+4\lambda & -1+4\mu \\ -2+3\lambda & 3\mu \end{pmatrix}$, где $\lambda, \mu \in R$.

и) $X = \begin{pmatrix} \lambda & -17+2\lambda \\ \mu & 12+2\mu \end{pmatrix}$, где $\lambda, \mu \in R$.

к) $X = \begin{pmatrix} 5+2\lambda & -11+2\mu \\ -\lambda & -\mu \\ 7 & -18 \end{pmatrix}$, где $\lambda, \mu \in R$.

л) $X = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ -13 & 10 \\ 17-\lambda & -13-\mu \end{pmatrix}$, где $\lambda, \mu \in R$.

м) $X = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

н) $X = \begin{pmatrix} \lambda & 8-3\lambda & 1-\lambda \\ \mu & -5-3\mu & -\mu \end{pmatrix}$, где $\lambda, \mu \in R$.

о) $X = \begin{pmatrix} \lambda & \mu & \nu \\ 2\lambda & 3+2\mu & -1+2\nu \end{pmatrix}$, где $\lambda, \mu, \nu \in R$.

6. а) При всех p $X = \begin{pmatrix} 2p-3 & 6 \\ -p+2 & -3 \end{pmatrix}$.

б) При $p = 4$ нет решений; при $p \neq 4$ имеем $X = \frac{1}{2p-8} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ -4p+8 & p-24 \end{pmatrix}$.

в) При всех p нет решений.

г) При $p = 6$ нет решений; при $p \neq 6$ имеем $X = \frac{1}{6-p} \cdot \begin{pmatrix} 2p-8 & 2 \\ -3p+12 & -3 \end{pmatrix}$.

д) При всех p $X = \begin{pmatrix} 2p-3 & -3p+6 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$.

е) При $p \neq -4$ $X = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$; при $p = -4$ имеем $X = \begin{pmatrix} -1+2\lambda & \lambda \\ -1+2\mu & \mu \end{pmatrix}$, где $\lambda, \mu \in R$.

ж) При $p \neq 2$ нет решений; при $p = 2$ имеем $X = \begin{pmatrix} 1+2\lambda & 3+2\mu \\ -\lambda & -\mu \end{pmatrix}$, где $\lambda, \mu \in R$.

7. а) $X = \begin{pmatrix} 4\lambda+\mu & 0 \\ 3\lambda & \mu \end{pmatrix}$, где $\lambda, \mu \in R$; $\dim(L) = 2$, $L = L\left\{\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$.

б) $X = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, где $\lambda, \mu \in R$; $\dim(L) = 2$, $L = L\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}$.

в) $X = \begin{pmatrix} \lambda+\mu & -3\mu \\ -\mu & \lambda+2\mu \end{pmatrix}$, где $\lambda, \mu \in R$; $\dim(L) = 2$, $L = L\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\right\}$.

г) $X = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{pmatrix}$, где $\lambda, \mu, \nu \in R$; $\dim(L) = 3$, $L = L\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$.

8. а) $A^2 = E$, $A^{29} = A$.

б) $A^2 = 3E$, $A^{25} = 3^{12} \cdot A$.

в) $A^2 = -E$, $A^{75} = -A$.

г) $A^3 = -8E$, $A^{40} = -2^{39} \cdot A$.

Ответы на дополнительные задачи

10. Например, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

11. а) Например, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. б) Например, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. в) Например, $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

г) Например, $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. д) Например, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

12. Например, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

13. Неверно.

14. Нельзя.

15. Если $r(A)=0$ или $r(A)=2$, то верно, если $r(A)=1$, то неверно.
16. Не следует.
17. а) Нет. б) Да.
18. $0 \le r(B) \le 2$.
19. Например, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
20. Не существуют.
21. Например, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$..
22. а) Два и два. б) Два и три. в) Два и три. г) Один и два.
23. а) Три и три. б) Два и два. в) Два и три. г) Два и три. д) Один и два.
25. $dim(L) = 2$; например, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.
26. $dim(L) = 4$, $A = E$.
27. $dim(L) = 2$, $F = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$.
28. $rank(\tilde{A}) = 0$.
29. $rank(\tilde{A}) = 1$.
30. а) Следует. б) Следует. в) Не следует.
31. $rank(A) = 1$.
32. Указание. Сравните с размерностью пространства всех матриц.
33. а) Верно. б) Неверно. в) Неверно. г) Неверно. д) Верно.
е) Верно. ж) Верно. з) Неверно. и) Верно.