III. Линейные пространства, линейная зависимость и ранг

Определения и формулы.

Линейным пространством называется множество (элементы которого называются векторами), в котором определены операция сложения векторов и операция умножения вектора на число. Эти операции удовлетворяют определенным соотношениям:

(1) $(a+b)+c=a+(b+c)$ (ассоциативность операции сложения).

(2) $a+b=b+a$ (коммутативность операции сложения).

(3) Существует единственный нуль-вектор (обозначаемый $\bar{0}$) такой, что для всех a верно $a+\bar{0}=\bar{0}+a=a$.

(4) Для любого a существует единственный вектор $b=-a$ такой, что $a+(-a)=\bar{0}$.

(5) $(\lambda\mu)a=\lambda(\mu a)$ (ассоциативность операции умножения на число).

(6) $\lambda(a+b)=\lambda a+\lambda b$ (дистрибутивность сложения векторов относительно умножения на число).

(7) $(\lambda+\mu)a=\lambda a+\mu a$ (дистрибутивность сложения чисел относительно умножения на вектор).

Набор векторов $a=\{a_1,a_2,\dots,a_k\}$ называется линейно зависимым, если существует такие числа $\{\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_k\}$, не все из которых равны нулю, что $\lambda_1 a_1+\lambda_2 a_2+\ \dots+\lambda_k a_k=\bar{0}$.

Набор векторов $a=\{a_1,a_2,\dots,a_k\}$ называется линейно независимым, если из равенства $\lambda_1 a_1+\lambda_2 a_2+\ \dots+\lambda_k a_k=\bar{0}$ следует, что $\lambda_j=0$ для всех j.

Вектор b линейно выражается через набор векторов $a=\{a_1,a_2,\dots,a_k\}$, если существует такие числа $\{\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_k\}$, что $b=\lambda_1 a_1+\lambda_2 a_2+\ \dots+\lambda_k a_k$.

Набор векторов линейно зависим тогда и только тогда, когда хотя бы один его вектор линейно выражается через остальные.

Набор векторов b линейно выражается через набор векторов $a=\{a_1,\dots,a_k\}$, если каждый вектор набора b выражается через набор a.

Рангом $rank(a)$ (или $r(a)$) набора a называется максимальное число линейно независимых векторов в наборе a.

Базой набора a называется его поднабор f, который, во-первых, линейно независим, во-вторых, становится линейно зависимым при добавлении любого вектора из набора a.

Поднабор f является базой набора a тогда и только тогда, когда он линейно независим и любой вектор набора a линейно выражается через поднабор f.

Число векторов во всех базах набора a одинаково и равно рангу набора a.

Теорема о двух наборах. Если набор векторов $b=\{b,b,\dots,b_m\}$ выражается через набор векторов $a=\{a_1,a_2,\dots,a_k\}$ и $m>k$, то набор b линейно зависим.

Теорема о сравнении рангов наборов. Если набор векторов b выражается через набор векторов a, то $rank(a)\geq rank(b)$.

Рангом матрицы называется ранг ее строк или столбцов, рассматриваемых как координатные векторы (эти числа совпадают).

Если в определения и теоремы выше вместо слова «набор» подставлять словосочетание «линейное пространство», то ранг называется размерностью, а база называется базисом. Линейное пространство, в котором есть конечный базис, называется конечномерным.

Примеры решения задач.

Пример 1. Найдите ранг набора векторов a (другая формулировка: найдите ранг строк матрицы A). Набор $a=\{a_1(1;1;-2),a_2(2;-3;1),a_3(1;-2;1)\}$.

Решение. Если два набора векторов выражаются друг через друга, то их ранги одинаковы. Поэтому преобразования набора векторов, подобные преобразованиям Гаусса, а именно: умножить вектор на число, прибавить к вектору другой вектор, умноженный на число, исключить или добавить нулевой вектор – не меняют ранга набора.

Эти преобразования оформляются схемой, подобной схеме Гаусса-Жордана решения однородной системы. Составляется матрица, в которой координаты векторов образуют строки. Далее преобразованиями Гаусса она приводится к виду, где строки линейно независимы. Тогда количество строк в последней матрице является также рангом исходного набора векторов.

Для нашего набора

$$A=\begin{pmatrix}1 & \boxed{1} & -2\\ 2 & -3 & 1\\ 1 & -2 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ 5 & 0 & -5\\ \boxed{3} & 0 & -3\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}.$$

В матрице $\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}$ есть два базисных столбца. Значит, $rank(a)=2$.

В исходной матрице координаты векторов можно также записывать по столбцам.

Пример 2. Найдите при всех значениях параметра P ранг набора строк матрицы

$$A=\begin{pmatrix}3 & 8 & P\\ -1 & -3 & 1\\ -2 & P-4 & 0\end{pmatrix}.$$

Решение. Будем преобразовывать матрицу A так, как при решении однородной СЛАУ:

$$\begin{pmatrix}3 & 8 & P\\ \boxed{-1} & -3 & 1\\ -2 & P-4 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}0 & \boxed{-1} & P+3\\ -1 & -3 & 1\\ 0 & P+2 & -2\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}0 & -1 & P+3\\ -1 & -3 & 1\\ 0 & 0 & P^2+5P+4\end{pmatrix}.$$

При данных преобразованиях ранг набора строк матрицы не меняется. Если $P^2+5P+4=(P+1)(P+4)\neq 0$, то, сократив третью строку на число (P^2+5P+4) и переставив первые две строки, получим треугольную матрицу с ненулевой главной диагональю, набор строк которой имеет ранг три

$$\begin{pmatrix}-1 & -3 & 1\\ 0 & -1 & P+3\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

При $P=-1$ и $P=-4$ ранг набора строк получающихся матриц

$$\begin{pmatrix}0 & -1 & 2\\ -1 & -3 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix}0 & -1 & -1\\ -1 & -3 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

равен двум.

Пример 3. Найдите коэффициенты разложения вектора $b(0;1;-1)$ по векторам набора $a=\{a_1(2;3;-2),a_2(1;2;3),a_3(2;3;1)\}$.

Решение. Разложение вектора b по набору векторов $a=\{a_1,a_2,...\}$ эквивалентно наличию решения у векторного уравнения $x_1a_1+x_2a_2+\ldots=b$. В пространстве R^n такое уравнение эквивалентно неоднородной СЛАУ $AX=B$, у которой столбцы матрицы A составляют координаты векторов a_j, а столбец свободных членов B состоит из координат вектора b. Решим систему методом Гаусса-Жордана:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}2 & \boxed{1} & 2 & 0\\ 3 & 2 & 3 & 1\\ -2 & 3 & 1 & -1\end{array}\right)\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}2 & 1 & 2 & 0\\ -1 & 0 & \boxed{-1} & 1\\ -8 & 0 & -5 & -1\end{array}\right)\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}0 & 1 & 0 & 2\\ -1 & 0 & -1 & 1\\ \boxed{-3} & 0 & 0 & -6\end{array}\right)\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}0 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & -1 & 3\\ 1 & 0 & 0 & 2\end{array}\right).$$

Следовательно, $x_1=2$, $x_2=2$, $x_3=-3$, откуда $b=2a_1+2a_2-3a_3$.

Пример 4. Опишите все линейные зависимости набора векторов $a=\{a_1,a_2,...\}$. Определите ранг этого набора. Перечислите все возможные базы этого набора. Укажите, какие векторы набора нельзя выразить через остальные.

(1) $a=\{a_1(1;-5;2),a_2(1;-2;-1),a_3(-2;1;5)\}$.

(2) $a=\{a_1(3;-7;-4),a_2(1;-3;-1),a_3(-1;1;3)\}$.

(3) $a=\{a_1(3;2;4),a_2(0;1;-1),a_3(2;1;3),a_4(5;4;6)\}$.

Решение. Линейная зависимость набора векторов $a=\{a_1,a_2,...\}$ эквивалентна наличию нетривиального решения у векторного уравнения $x_1a_1+x_2a_2+\ldots=\overline{0}$. В пространстве R^n такое векторное уравнение записывается в виде однородной СЛАУ. Столбцы матрицы коэффициентов этой СЛАУ составляют координаты векторов a_j.

(1) Однородная СЛАУ имеет вид

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ -5x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}.$$

Решим ее помощью схемы Гаусса-Жордана:

$$\begin{pmatrix} 1 & \boxed{1} & -2 \\ -5 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -3 & 0 & -3 \\ \boxed{3} & 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

ФНР последней системы состоит из одного вектора $f_1 = (-1; 3; 1)$. Мы получили единственную (с точностью до множителя) линейную зависимость: $-a_1 + 3a_2 + a_3 = \bar{0}$. Итак, тройка $\{a_1, a_2, a_2\}$ линейно зависима, а линейно независимыми являются пары $\{a_1, a_2\}$, $\{a_1, a_3\}$, $\{a_2, a_3\}$. Любая из этих пар может служить базой набора a, $rank(a) = 2$. Зависимость $-a_1 + 3a_2 + a_3 = \bar{0}$ показывает, что любой из трех векторов можно выразить через два других.

(2) Однородная СЛАУ имеет вид

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ -7x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \\ -4x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}.$$

Решим ее помощью схемы Гаусса-Жордана:

$$\begin{pmatrix} 3 & \boxed{1} & -1 \\ -7 & -3 & 1 \\ -4 & -1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ \boxed{-1} & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & \boxed{2} \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Такая система имеет только тривиальное решение. Итак, тройка $\{a_1, a_2, a_2\}$ линейно независима и является единственной базой набора a, $rank(a) = 3$. Линейная независимость означает, что ни один из трех векторов нельзя выразить через два других.

(3) Однородная СЛАУ имеет вид

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_3 + 5x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 = 0 \\ 4x_1 - x_2 + 3x_3 + 6x_4 = 0 \end{cases}.$$

Решим ее:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & \boxed{1} & 4 \\ 4 & -1 & 3 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \boxed{-1} & -2 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ -2 & -4 & 0 & -6 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

ФНР этой системы состоит из двух векторов $f_1 = (-2; 1; 3; 0)$ и $f_2 = (-3; 0; 2; 1)$. Мы получили две не пропорциональных линейных зависимости:

$$-2a_1 + a_2 + 3a_3 = \bar{0} \text{ и } -3a_1 + 2a_3 + a_4 = \bar{0}.$$

Из этого следует, что любая пара $\{a_j, a_k\}$ линейно независима, а другие векторы набора выражаются через эти два вектора. Значит, любая пара $\{a_j, a_k\}$ может служить базой набора a, $rank(a) = 2$.

Типовые задачи

1. Найдите ранг набора векторов или ранг набора строк матрицы A.

а) $a_1 = (1; -1; -2)$, $a_2 = (2; 1; 1)$, $a_3 = (3; 1; -2)$.

б) $a_1 = (-2; -1; 3)$, $a_2 = (-3; 1; 2)$, $a_3 = (-3; -4; 7)$.

в) $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 7 & 6 & -2 \\ 2 & 4 & -3 \end{pmatrix}$.

г) $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

д) $a_1 = (3; -1; 0; -2)$, $a_2 = (0; 2; 2; 4)$, $a_3 = (3; 0; 1; 0)$, $a_4 = (1; 1; 1; 1)$.

е) $a_1 = (2; 1; 0; 1)$, $a_2 = (4; 3; 2; 3)$, $a_3 = (-5; -1; 3; -1)$, $a_4 = (1; 2; 3; 2)$.

ж) $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

з) $A=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

и) $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 & -1 \\ 4 & 6 & -5 & 4 \end{pmatrix}$.

к) $a_1=(1;-2;4;-3;2)$, $a_2=(3;4;-5;3;1)$, $a_3=(-5;0;7;-5;-3)$, $a_4=(7;6;4;-5;6)$.

2. Найдите ранг матрицы A при всех значениях параметра p.

а) $A=\begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & p+2 \end{pmatrix}$.

б) $A=\begin{pmatrix} 4 & -2 & 5 \\ 2 & -1 & -3 \\ -2 & 1 & 2p-3 \end{pmatrix}$.

в) $A=\begin{pmatrix} 4 & 2 & -6 \\ 2 & p-1 & -3 \\ -2 & -1 & 2p-1 \end{pmatrix}$.

г) $A=\begin{pmatrix} p^2-4 & 0 & p^2-4 \\ 2p-4 & p^2-3p+2 & 2p-4 \\ p^2+2p-8 & 2p-4 & 2p-4 \end{pmatrix}$.

д) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & p \\ 1+p & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

е) $A=\begin{pmatrix} p & p & p+1 \\ 1 & 1 & 0 \\ p^2 & p+2 & p+1 \end{pmatrix}$.

ж) $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & -7 & p+1 \\ -1 & p-2 & 1 \end{pmatrix}$.

з) $A=\begin{pmatrix} p^2-3p+2 & -2p+2 & p^2-5p+4 \\ 0 & p^2-1 & -2p+2 \\ p^2-3p+2 & -2p+2 & -2p+2 \end{pmatrix}$.

3. Найдите коэффициенты разложения вектора b по векторам набора $\{a_1,a_2,...\}$.

а) $b=(-4;15)$, $a_1=(2;3)$, $a_2=(3;1)$.

б) $b=(2;3)$, $a_1=(2;-3)$, $a_2=(-6;9)$.

в) $b=(5;2;1)$, $a_1=(2;3;-1)$, $a_2=(3;-1;2)$.

г) $b=(3;-5;2)$, $a_1=(1;0;0)$, $a_2=(0;1;0)$, $a_3=(1;1;1)$.

д) $b=(0;-7;3)$, $a_1=(2;-1;3)$, $a_2=(1;-1;2)$, $a_3=(2;3;1)$.

е) $b=(-1;1;2)$, $a_1=(2;3;-1)$, $a_2=(3;2;1)$, $a_3=(1;-1;2)$.

ж) $b(x)=-1+5x-7x^2$, $a_1(x)=1-x^2$, $a_2(x)=1-x+2x^2$, $a_3(x)=2x+x^2$.

з) $b(x)=-2x^2+6x+3$, $a_1(x)=x^2+2x-1$, $a_2(x)=-2x^2+x+3$, $a_3(x)=2x^2-x-2$.

и) $b(x)=5+4x-3x^2$, $a_1(x)=2+x-3x^2$, $a_2(x)=1+x^2$, $a_3(x)=x+x^2$.

к) $b(x)=2(2\cos x-3\sin x)^2$, $a_1(x)=\sin 2x$, $a_2(x)=\cos 2x$, $a_3(x)=1$.

л) $B=\begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 7 & -2 \end{pmatrix}$, $A_1=\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$, $A_2=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$, $A_3=\begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$.

4. Найдите все значения параметра p, при которых вектор b выражается линейно через векторы $\{a_1,a_2,...,a_n\}$.

а) $b=(p;\,p^2+3)$, $a_1=(1;2)$, $a_2=(-2;1)$.

б) $b=(-4;3)$, $a_1=(3;1)$, $a_2=(p;-2)$.

в) $b=(-4;1;p)$, $a_1=(-2;4;2)$, $a_2=(1;-2;-1)$, $a_3=(-1;2;3)$.

г) $b=(3;-2;5)$, $a_1=(2;1;-3)$, $a_2=(1;-1;2)$, $a_3=(2p+2;3;-7)$.

д) $b=(1;3;3)$, $a_1=(2;p+3;-1)$, $a_2=(-1;1;-5)$, $a_3=(2;4;7)$.

е) $b=(6;2;13)$, $a_1=(2;4;1)$, $a_2=(1;3;1-p)$, $a_3=(1;p;1)$.

ж) $b=(4;2p-1;7;-1)$, $a_1=(2;-1;3;1)$, $a_2=(1;-3;2;-1)$, $a_3=(4;3;5;5)$.

5. Найдите все значения параметра p, при которых набор векторов $\{a_1, a_2, ...\}$ линейно зависим.

   а) $a_1 = (3; -4; 5)$, $a_2 = (1; -1; 2)$, $a_3 = (0; -1; -p)$.

   б) $a_1 = (1; -1; -2)$, $a_2 = (-2; 2; 4)$, $a_3 = (3; p-1; p)$.

   в) $a_1 = (1; -2; -2)$, $a_2 = (p-1;\ 4; 5)$, $a_3 = (3; -6; 2p)$.

   г) $a_1(x) = 2 + 2x + x^2$, $a_2(x) = 1 + 3x + x^2$, $a_3(x) = 3 + 5x + px^2$.

   д) $a_1(x) = 1 + px + 3x^2$, $a_2(x) = 1 - 2x^2$, $a_3(x) = 2 + x + px^2$.

   е) $a_1(x) = \sin x + p\cos x + p\cos 2x$, $a_2(x) = 3\sin x + \cos x + 2\cos 2x$, $a_3(x) = \sin x + 2\cos x - \cos 2x$.

   ж) $a_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ p & -1 \end{pmatrix}$, $a_3 = \begin{pmatrix} 4 & 1-2p \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$.

6. Найдите все значения параметра p, при которых набор $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ линейно независим.

   а) $a_1 = (3; -1; -2)$, $a_2 = (-1; 2; 4)$, $a_3 = (-2; 1; p)$.

   б) $a_1 = (2; 1; -1)$, $a_2 = (4; p; 1)$, $a_3 = (-4; -2; 2)$.

   в) $a_1 = (4; -2; -7)$, $a_2 = (1; p-2; 5)$, $a_3 = (3; -1; -3)$.

7. Найдите ранг набора векторов $\{a_1, a_2, ..., a_k\}$ и определите полную систему зависимостей этих векторов. Перечислите все варианты базы этого набора. Какой вектор нельзя выразить через остальные?

   а) $a_1 = (0; 5; -1)$, $a_2 = (2; -1; -1)$, $a_3 = (3; 1; -2)$.

   б) $a_1 = (4; 3; -1)$, $a_2 = (-1; 2; 1)$, $a_3 = (-1; 2; 3)$.

   в) $a_1 = (1; 2; -1)$, $a_2 = (0; 0; 0)$, $a_3 = (1; -1; 2)$.

   г) $a_1 = (1; 0; 1)$, $a_2 = (1; 1; 0)$, $a_3 = (2; -1; 1)$, $a_4 = (-1; -1; 1)$.

   д) $a_1 = (3; 2; 1)$, $a_2 = (10; 7; 1)$, $a_3 = (0; 1; -7)$, $a_4 = (2; 1; 3)$.

   е) $a_1 = (1; 2; -1)$, $a_2 = (-1; -2; 1)$, $a_3 = (-3; -6; 3)$, $a_4 = (-2; -4; 2)$.

   ж) $a_1 = (2; -1; 3; -2)$, $a_2 = (-4; 2; -6; 4)$, $a_3 = (1; -1; 3; -2)$.

   з) $a_1 = (3; -1; 1; 2)$, $a_2 = (3; 1; -2; 3)$, $a_3 = (6; -4; 5; 3)$, $a_4 = (9; -1; 0; 7)$.

   и) $a_1 = (1; 2; 1; 3)$, $a_2 = (3; 1; 2; 2)$, $a_3 = (7; -1; 4; 0)$, $a_4 = (-1; 1; -3; 2)$.

   к) $a_1 = (-2; 3; 4; -3; -1)$, $a_2 = (3; -2; 1; 0; 4)$, $a_3 = (2; -4; -5; 3; 2)$, $a_4 = (5; 3; 1; -3; -3)$.

   л) $a_1 = (3; 5;\ -4; -6; -1)$, $a_2 = (3; 4; 1; 0; -2)$, $a_3 = (-5; -6; -5; -4; 4)$, $a_4 = (2; 3; -1; -2; -1)$.

   м) $a_1 = (9; -4; 2; -1; 3)$, $a_2 = (3; 1; -2; 1; 3)$, $a_3 = (2; 3; -1; 2; 3)$, $a_4 = (1; -2; 2; -1; -1)$, $a_5 = (1; 3;\ -1; 1; -4)$.

Дополнительные задачи

10. Существует ли набор из двух векторов, имеющий ранг нуль?
11. Приведите пример трех линейно зависимых векторов, один из которых нельзя выразить через два других.
12. Набор векторов F в R^3 таков, что ранг набора F не меняется при добавлении к нему вектора $a \neq \bar{0}$ и меняется при добавлении вектора b. Каким может быть ранг такого набора?
13. Приведите пример такого линейно зависимого набора F векторов в R^3, ранг которого при добавлении произвольного вектора не меняется.
14. Приведите пример такого непустого набора F векторов в R^3, ранг которого при добавлении произвольного ненулевого вектора увеличивается.

15. Приведите пример 3-х линейно зависимых многочленов в пространстве $P_2[x]$ многочленов степени не выше второй, не каждый из которых линейно выражается через остальные.
16. Приведите пример набора из 3-х векторов в R^3, у которого есть единственная база: а) из двух векторов. б) из одного вектора.
17. Набор векторов $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ имеет ровно одну базу. Опишите все варианты, при которых это возможно.
18. Приведите пример набора из 3-х векторов в R^3, у которого нет базы.
19. Приведите пример набора из 4-х векторов в R^3, имеющего ровно две базы.
20. Приведите пример набора из четырех разных ненулевых многочленов в $P_3[x]$, имеющего ровно две базы.
21. Верно ли утверждение: если существует вектор, который имеет два различных разложения по векторам $\{f_i\}$, то набор $\{f_i\}$ линейно зависим?
22. Набор из четырех векторов в R^3 таков, что присоединение к нему произвольного вектора не меняет его ранга. Чему в этом случае равен ранг набора?
23. Набор из четырех векторов в R^3 таков, что присоединение к нему вектора $(1;1;1)$ меняет его ранг, а присоединение вектора $(1;2;1)$ или вектора $(-1;1;1)$ не меняет его ранга. Чему в этом случае равен ранг набора?
24. Набор векторов $\{b_1, b_2\}$ линейно независим и линейно выражается через набор $\{a_1, a_2\}$. Докажите, что набор $\{a_1, a_2\}$ линейно выражается через набор $\{b_1, b_2\}$.
25. Набор векторов $\{b_1, b_2\}$ линейно независим, и наборы $\{b_1, b_2\}$ и $\{a_1, a_2, a_3\}$ линейно выражаются друг через друга. Чему может быть равен ранг набора $\{a_1, a_2, a_3\}$?
26. Набор векторов $\{b_1, b_2\}$ линейно независим и линейно выражается через набор $\{a_1, a_2, a_3\}$, а набор $\{a_1, a_2, a_3\}$ не выражается линейно через набор $\{b_1, b_2\}$.
    а) Чему может быть равен ранг набора $\{a_1, a_2, a_3\}$?
    б) Докажите, что хотя бы один из векторов a_j таков, что $r\{b_1, b_2, a_j\} = 3$.
27. Наборы векторов $\{a_1, a_2, a_3\}$ и $\{b_1, b_2, b_3\}$ линейно выражаются друг через друга, набор $\{b_1, b_2, a_1\}$ линейно независим. Чему может быть равен ранг набора $\{a_1, a_2, a_3\}$?
28. Наборы векторов $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ и $\{b_1, b_2, b_3\}$ линейно выражаются друг через друга.
    а) Верно ли, что если набор $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ ЛЗ, то набор $\{b_1, b_2, b_3\}$ тоже ЛЗ?
    б) Верно ли, что если набор $\{b_1, b_2, b_3\}$ ЛНЗ, то набор $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ тоже ЛНЗ?
29. Верно ли утверждение: если любой вектор линейного пространства R^n можно разложить по векторам $\{f_1, ..., f_n\}$, то набор $\{f_1, ..., f_n\}$ – базис в R^n?

Ответы на типовые задачи

1. а) $r=3$. б) $r=2$. в) $r=2$. г) $r=3$.
   д) $r=3$. е) $r=2$. ж) $r=4$.
   з) $r=2$. и) $r=3$. к) $r=3$.

2. а) $r=2$ при $p=-1$; $r=3$ при $p\neq-1$.
   б) $r=2$ при всех p.
   в) $r=1$ при $p=2$; $r=3$ при $p\neq 2$.
   г) $r=0$ при $p=2$; $r=2$ при $p=-2,1$; $r=3$ при прочих p.
   д) $r=2$ при $p=-2$, $p=1$; $r=3$ при прочих p.
   е) $r=1$ при $p=-1$; $r=2$ при $p=2$; $r=3$ при прочих p.
   ж) $r=2$ при $p=-4,-2$; r = 3 при прочих p.
   з) $r=0$ при $p=1$; $r=2$ при $p=2,-1$; $r=3$ при прочих p.

3. а) $(7;-6)$. б) Не разлагается. в) $(1;1)$. г) $(1;-7;2)$.
д) $(3;-2;-2)$. е) Не разлагается. ж) $(2;-3;1)$. з) $(2;1;-1)$.
и) $(2;1;2)$. к) $(-12;-5;13)$. л) $(1;2;-2)$.

4. а) При всех p. б) $p\neq -6$. в) Ни при каких p. г) $p\neq -1$.
д) При всех p. е) $p\neq 1$. ж) $p=-3$.
5. а) $p=1$. б) При любых p. в) $p=-1$, $p=-3$. г) $p=2$.
д) $p=1$, $p=-5$. е) $p=½$. ж) $p=4$.

6. а) $p\neq 2$. б) Ни при каких p. в) $p\neq 3$.

7. а) $r=2$; $a_1+3a_2-2a_3=0$; $\{a_1,a_2\}$, $\{a_1,a_3\}$, $\{a_2,a_3\}$; ни один.
б) $r=3$; тривиальная; $\{a_1,a_2,a_3\}$; каждый.
в) $r=2$; $a_2=0$; $\{a_1,a_3\}$; a_2.
г) $r=3$; $-3a_1+3a_2+a_3+2a_4=0$; любые три из четырех; ни один.
д) $r=2$; $2a_1-a_3-3a_4=0$ и $a_2-2a_3-5a_4=0$; ни один.
е) $r=1$; $a_1+a_2=0$, $3a_1+a_3=0$, $2a_1+a_4=0$; любой вектор; ни один.
ж) $r=2$; $2a_1+a_2=0$; $\{a_1,a_3\}$, $\{a_2,a_3\}$; a_3.
з) $r=2$; $3a_1-a_2-a_3=0$ и $2a_1+a_2-a_4=0$; любые два из четырех; ни один.
и) $r=3$, $2a_1-3a_2+a_3=0$; $\{a_1,a_2,a_4\}$, $\{a_1,a_3,a_4\}$, $\{a_2,a_3,a_4\}$; a_4.
к) $r=4$; тривиальная; $\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$; каждый.
л) $r=2$; $3a_2+a_3-2a_4=0$; $a_1+a_2-3a_4=0$; любые два; ни один.
м) $r=4$; $a_1-2a_2-3a_4=0$; $\{a_1,a_2,a_3,a_5\}$, $\{a_1,a_3,a_4,a_5\}$, $\{a_2,a_3,a_4,a_5\}$. a_3 и a_5.

Ответы на дополнительные задачи

10. $f=\{\bar{0},\bar{0}\}$.
11. $a_1(1;0;0)$, $a_2(1;0;0)$, $a_3(1;1;0)$.
12. $rank(F)=1$ или 2.
13. $F=\{a_1(1;0;0), a_2(0;1;0), a_3(0;0;1), a_4(1;0;0)\}$.
14. $F=\{a_1(0;0;0)\}$. 16. $p_1(x)=1$, $p_2(x)=1$, $p_3(x)=x$.
16. а) $F=\{a_1(1;0;0), a_2(0;1;0), a_3(0;0;0)\}$.
б) $F=\{a_1(1;0;0), a_2(0;0;0), a_3(0;0;0)\}$.
17. Указание. В наборе нет поднабора из ненулевых элементов, который был бы ЛЗ.
18. $F=\{a_1(0;0;0), a_2(0;0;0), a_3(0;0;0)\}$.
19. $F=\{a_1(1;0;0), a_2(0;1;0), a_3(0;0;1), a_4(1;0;0)\}$.
20. $F=\{p_1(x)=1,\ p_2(x)=2,\ p_3(x)=x,\ p_4(x)=x^2\}$.
21. Верно.
22. Трем.
23. Двум.
24. Указание. Рассмотрите набор $\{a_1,a_2,b_1,b_2\}$.
25. Указание. Рассмотрите набор $\{a_1,a_2,a_3,b_1,b_2\}$.
26. а) Трем. б) Указание. Рассмотрите набор $\{a_1,a_2,a_3,b_1,b_2\}$.
27. Трем.
28. а) Неверно. б) Неверно.
29. Верно.