VI. Линейные многообразия

Определения и формулы.

Суммой Минковского двух подмножеств M_1 и M_2 линейного пространства V называется подмножество M, содержащее все суммы $a_1 + a_2$, где $a_1 \in M_1, a_2 \in M_2$. Сумма Минковского обозначается $M = M_1 + M_2$.

Линейным многообразием в линейном пространстве V называется сумма Минковского $H = c + L$, где c фиксированный вектор, L линейное подпространство.

Размерность $dim(H)$ многообразия H по определению равна размерности $\dim(L)$ подпространства L. В частности, размерность многообразия, содержащего одну точку, равна нулю. Пустое множество также считается линейным многообразием, размерность которого не определена.

Многообразие, которое содержит нуль-вектор, является подпространством.

Подпространство L определяется по многообразию H однозначно и состоит из всевозможных попарных разностей $(x - y)$ элементов многообразия H.

Одномерное линейное многообразие называется прямой. k-мерное многообразие называется k-мерной плоскостью. Многообразие размерности $(n - 1)$ в линейном пространстве размерности n называется гиперплоскостью.

Подмножество H координатного пространства является линейным многообразием тогда и только тогда, когда оно является множеством решений некоторой СЛАУ.

Пересечением нескольких линейных многообразий является подмножество векторов, содержащихся во всех многообразиях (то есть теоретико-множественное пересечение).

Пересечение линейных многообразий является линейным многообразием.

Суммой двух линейных многообразий $H_1 = c_1 + L_1$ и $H_2 = c_2 + L_2$ называется их сумма Минковского (обозначение $H = H_1 + H_2$). Сумма линейных многообразий является линейным многообразием, заданным формулой $H_1 + H_2 = (c_1 + c_2) + (L_1 + L_2)$.

Два линейных многообразия $H_1 = c_1 + L_1$ и $H_2 = c_2 + L_2$, не имеющие общих точек, называются параллельными, если либо $L_1 \subseteq L_2$, либо $L_2 \subseteq L_1$. Если ни одно из двух условий не выполняется, то многообразия без общих точек называются скрещивающимися.

Критерий непустого пересечения многообразий: два многообразия $H_1 = c_1 + L_1$ и $H_2 = c_2 + L_2$ имеют непустое пересечение тогда и только тогда, когда $c_2 - c_1 \in L_1 + L_2$.

Если два многообразия пересекаются, то верна формула, аналогичная формуле Грассмана:

$$dim(H_1 + H_2) + \dim(H_1 \cap H_2) = \dim(H_1) + \dim(H_2).$$

Если пересечение многообразий пусто, то значение $\dim(H_1 \cap H_2)$ не определено.

Критерий параллельности многообразий: два многообразия $H_1 = c_1 + L_1$ и $H_2 = c_2 + L_2$ параллельны или совпадают тогда и только тогда, когда

$$\dim(L_1 \cap L_2) = \min(\dim(L_1), \dim(L_2)).$$

Эквивалентное условие $\dim(L_1 + L_2) = \max(\dim(L_1), \dim(L_2))$.

Два многообразия пересекаются или скрещиваются тогда и только тогда, когда

$$\dim(L_1 \cap L_2) < \min(\dim(L_1), \dim(L_2)).$$

Эквивалентное условие $\dim(L_1 + L_2) > \max(\dim(L_1), \dim(L_2))$.

Примеры решения задач.

Пример 1. В пространстве $P_n[x]$ многочленов степени не выше четырех задайте в параметрическом виде многообразие H, ограниченное условиями $p(-1) = -p(1)$ и $p'(1) = 3$. Укажите его размерность.

Решение. Запишем многочлен в виде в общем виде с неизвестными коэффициентами:

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 .$$

Условия $p(-1) = -p(1)$ и $p'(1) = 3$ записываются уравнениями для коэффициентов:

$$\begin{cases} a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 = -a_0 - a_1 - a_2 - a_3 - a_4 \\ a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4 = 3 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} a_0 \quad + \quad a_2 \qquad + \quad a_4 = 0 \\ \quad a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4 = 3 \end{cases}.$$

Система имеет ранг 2, ее решением является трехмерное многообразие в R^5. Частным решением может служить вектор $c = (0; 3; 0; 0; 0)$, которому соответствует многочлен $p_0(x) = 3x$. В качестве ФНР соответствующей однородной СЛАУ можно выбрать векторы

$$f_1 = (1; 2; -1; 0; 0), \quad f_2 = (0; 3; 0; -1; 0), \quad f_3 = (1; 4; 0; 0; -1).$$

Им будут соответствовать многочлены

$$p_1(x) = -x^2 + 2x + 1, \quad p_2(x) = -x^3 + 3x, \quad p_3(x) = -x^4 + 4x + 1.$$

Параметрическое представление многообразия $H = p_0(x) + L\{p_1(x), p_2(x), p_3(x)\}$.

Пример 2. В пространстве R^3 многообразие $H = c(1; -2; 2) + L\{(4; -1; 3)\}$ задать с помощью СЛАУ.

Решение. Сначала надо составить однородную СЛАУ для прямой $L = L\{a_1(4; -1; 3)\}$, используя стандартный подход, описанный в Главе V. Получим $L = \begin{cases} x_1 + 4x_2 \qquad = 0 \\ \qquad 3x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$.

Система для H должна быть неоднородной с той же матрицей коэффициентов. При этом вектор $c = (1; -2; 2)$ должен быть частным решением этой СЛАУ. Для этого свободные члены уравнений вычисляются подстановкой в левую часть координат вектора c. Получим

$$H: \begin{cases} x_1 + 4x_2 \qquad = -7 \\ \qquad 3x_2 + x_3 = -4 \end{cases}.$$

Второй способ. Вектор $x(x_1, x_2, x_3) \in H$, если выполняется векторное уравнение $t \cdot a_1 = -c + x$. Запишем решение соответствующей СЛАУ с неизвестной t, в которой свободные члены изображаются параметрами x_1, x_2, x_3:

$$\left(\begin{array}{r|r} 4 & -1 + x_1 \\ -1 & 2 + x_2 \\ 3 & -2 + x_3 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{r|l} 0 & 7 + x_1 + 4x_2 \\ -1 & 2 + x_2 \\ 0 & 4 + x_3 + 3x_2 \end{array}\right).$$

Эта система совместна при ограничениях

$$H: \begin{cases} x_1 + 4x_2 \qquad + 7 = 0 \\ \qquad 3x_2 + x_3 + 4 = 0 \end{cases},$$

которые задают искомую СЛАУ для H. Ответ оказался таким же, как при решении первым способом.

Пример 3. Пусть заданы два многообразия

$$H_1 = c_1(1; -2; 1; 3) + L\{a_1(1; 2; 2; 0), a_2(0; -2; -2; 1)\} \quad \text{и} \quad H_2: \begin{cases} x_1 - x_4 = -1 \\ x_2 - x_3 = -3 \end{cases}.$$

Найдите параметрическое представление для их пересечения $H_3 = H_1 \cap H_2$.

Решение. Если нужно найти пересечение многообразий, желательно, чтобы они были заданы в виде СЛАУ. Поэтому сначала нужно построить неоднородную СЛАУ для многообразия H_1, как в Примере 2. Получим

$$H_1: \begin{cases} 2x_1 - x_2 - 2x_4 = -2 \\ x_2 - x_3 = -3 \end{cases}.$$

СЛАУ для пересечения многообразий получается объединением уравнений СЛАУ для обоих многообразий:

$$H_3:\begin{cases} 2x_1 - x_2 \qquad - 2x_4 = -2 \\ \qquad x_2 - x_3 \qquad = -3 \\ x_1 \qquad\qquad - x_4 = -1 \\ \qquad x_2 - x_3 \qquad = -3 \end{cases}.$$

В качестве частного решения годится вектор $c_3(0;0;3;1)$. ФНР соответствующей однородной СЛАУ состоит из одного вектора $f_1(1;0;0;1)$. В итоге

$$H_3 = c_3(0;0;3;1) + L\{f_1(1;0;0;1)\}.$$

Пример 4. Пусть заданы два многообразия

$$H_1 = c_1(1;-2;1;3) + L\{a_1(1;2;2;0), a_2(0;-2;-2;1)\} \text{ и } H_2:\begin{cases} x_1 - x_4 = -1 \\ x_2 - x_3 = -3 \end{cases}.$$

Найдите СЛАУ для их суммы $H_3 = H_1 + H_2$ и укажите ее размерность.

Решение. Найдем параметрическое представление многообразия H_2, решив соответствующую систему. Получим

$$H_2 = c_2(0;0;3;1) + L\{b_1(1;0;0;1), b_2(0;1;1;0)\}.$$

Сумма многообразий в параметрическом представлении

$$H_3 = H_1 + H_2 = (c_1 + c_2) + L\{a_1, a_2, b_1, b_2\}.$$

Вычислим СЛАУ для подпространства $L_3 = L\{a_1, a_2, b_1, b_2\}$. Получим $L_3 = \{x_2 - x_3 = 0$. В СЛАУ для H_3 надо изменить свободные члены так, чтобы вектор $c_3 = c_1 + c_2$ был ее частным решением. Получим $H_3 = \{x_2 - x_3 = -6$.

Пример 5. Найдите, как взаимно расположены линейные многообразия H_1 и H_2. В случае непустого пересечения укажите размерность пересечения.

а) $H_1 = c_1(1;2;1;3) + L\{a_1(1;0;1;-1); a_2(1;-1;0;2)\}$,
$H_2 = c_2(1;-2;-2;0) + L\{b_1(2;1;-1;0); b_2(1;2;-1;1)\}$;

б) $H_1 = c_1(-1;2;1;-1) + L\{a_1(1;-1;1;2); a_2(1;2;-1;-2)\}$,
$H_2 = c_2(1;2;1;2) + L\{b_1(2;1;0;0); b_2(1;-4;3;6)\}$;

в) $H_1 = c_1(3;-1;1;-3) + L\{a_1(1;-1;1;-1); a_2(1;-1;-1;2)\}$,
$H_2 = c_2(2;-1;1;-2) + L\{b_1(1;0;2;-3); b_2(0;1;1;-2)\}$.

Решение. Взаимное расположение двух многообразий зависит от двух факторов: пустого или непустого пересечения многообразий и взаимного расположения их направляющих подпространств. В зависимости от этого возможны четыре варианта расположения:

(1) $H_1 \cap H_2 = \emptyset$, $L_1 \subseteq L_2$ или $L_2 \subseteq L_1$: многообразия параллельны;

(2) $H_1 \cap H_2 = \emptyset$, ни $L_1 \subseteq L_2$, ни $L_2 \subseteq L_1$: многообразия скрещиваются;

(3) $H_1 \cap H_2 \neq \emptyset$, $L_1 \subseteq L_2$ или $L_2 \subseteq L_1$: одно многообразие включает другое;

(4) $H_1 \cap H_2 \neq \emptyset$, ни $L_1 \subseteq L_2$, ни $L_2 \subseteq L_1$: многообразия пересекаются.

Критерий непустого пересечения многообразий: $c_2 - c_1 \in L_1 + L_2$.

Критерий параллельности или включения: $L_1 \subseteq L_2$ или $L_2 \subseteq L_1$ тогда и только тогда, когда $\dim(L_1 \cap L_2) = \min(\dim(L_1), \dim(L_2))$ (или $\dim(L_1 + L_2) = \max(\dim(L_1), \dim(L_2))$).

Вектор $c_2 - c_1 \in L_1 + L_2$, если $c_2 - c_1$ разлагается по векторам $\{a_1, a_2, b_1, b_2\}$. Для проверки надо составить неоднородную СЛАУ, в которой в матрице коэффициентов координаты векторов $\{a_1, a_2, b_1, b_2\}$ записаны по столбцам, а координаты вектора $c_2 - c_1$ составляют столбец свободных членов. Ранг матрицы коэффициентов этой СЛАУ совпадает с размерностью подпространства $L\{a_1, a_2, b_1, b_2\} = L_1 + L_2$.

а) Имеем $\dim(L_1)=2$, $\dim(L_2)=2$. Далее, $c_2-c_1=(0;-4;-3;-3)$, так что СЛАУ для проверки непустого пересечения принимает вид

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & -4 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right).$$

Матрица коэффициентов этой СЛАУ невырожденная, поэтому СЛАУ имеет единственное решение. Следовательно, пересечение многообразий не пусто. Невырожденность СЛАУ означает, что $\dim(L_1+L_2)=r\{a_1,a_2,b_1,b_2\}=4$. При непустом пересечении по формуле Грассмана $\dim(H_1\cap H_2)=\dim(L_1\cap L_2)=0$. Итак, многообразия H_1 и H_2 пересекаются в одной точке.

б) Имеем $\dim(L_1)=2$, $\dim(L_2)=2$. Далее, $c_2-c_1=(2;0;0;3)$, так что СЛАУ для проверки непустого пересечения принимает вид

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & -4 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 6 & 3 \end{array}\right).$$

Решая систему, получим, что она несовместна, то есть, $c_2-c_1\notin L_1+L_2$. Следовательно, пересечение многообразий H_1 и H_2 пусто. В процессе решения СЛАУ оказывается, что ранг системы равен 2, откуда $\dim(L_1+L_2)=r\{a_1,a_2,b_1,b_2\}=2$. Проверим условие параллельности: $\dim(L_1+L_2)=\dim(L_1)=\dim(L_2)$, то есть $L_1=L_2$. Итак, многообразия H_1 и H_2 параллельны.

в) Имеем $\dim(L_1)=2$, $\dim(L_2)=2$. Далее, $c_2-c_1=(-1;0;0;0)$, так что СЛАУ для проверки непустого пересечения принимает вид

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -3 & -2 & 0 \end{array}\right).$$

Решая систему, получим, что она несовместна, то есть, $c_2-c_1\notin L_1+L_2$. Следовательно, пересечение многообразий H_1 и H_2 пусто. В процессе решения СЛАУ оказывается, что ранг системы равен 2, откуда $\dim(L_1+L_2)=r\{a_1,a_2,b_1,b_2\}=3$. Проверим условие параллельности: $\dim(L_1+L_2)>\max(\dim(L_1),\dim(L_2))$. Итак, многообразия H_1 и H_2 скрещиваются.

Пример 6. Найдите все значения параметра p, при которых параллельны многообразия
$H_1=c_1(1;-2;3)+L\{a_1(1;0;p)\}$ и $H_2=c_2(-1;1;1)+L\{b_1(p;2;1),b_2(0;1;0)\}$.

Решение. Сначала проверим критерий параллельности: для параллельности или совпадения многообразий необходимо и достаточно, чтобы ранг набора $\{a_1,b_1,b_2\}$ был равен двум. Подсчитаем этот ранг:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & p \\ p & 2 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & p \\ p & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & p \\ 0 & 0 & 1-p^2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ранг равен двум при $p=\pm1$. Теперь при $p=1$ и $p=-1$ проверим критерий непустого пересечения. Для этого следует вычислить $c=c_2-c_1=(-2;3;-2)$ и определить, совместны ли системы

$$\left(\begin{array}{rr|r} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \end{array}\right) \text{ (для } p=1\text{) и } \left(\begin{array}{rr|r} -1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \end{array}\right) \text{ (для } p=-1\text{).}$$

Первая система совместна (многообразия пересекаются), вторая система несовместна (многообразия параллельны). Итак, $p = -1$.

Пример 7. Приведите пример трехмерного линейного многообразия H_2, которое проходит через точку $M = (-3;-1;-2;0)$ и параллельно двумерному линейному многообразию

$H_1 = c_1(1;-2;1;3) + L\{a_1(1;0;2;-4), a_2(-1;2;-2;1)\}$ и.

Решение. Условия задачи означают, что $H_2 = M + L\{b_1, b_2, b_3\}$, векторы $\{b_1, b_2, b_3\}$ линейно независимы, векторы $\{b_1, b_2, b_3, c_2 - c_1\}$ также линейно независимы, и $L(a_1, a_2) \subset L(b_1, b_2, b_3)$. В качестве векторов b_1 и b_2 можно взять векторы a_1 и a_2. Тогда остается подобрать вектор b_3 так, чтобы было выполнено условие $r\{a_1, a_2, b_3, c_2 - c_1\} = 4$. Проверка показывает, что годится, например, вектор $b_3 = (0;0;0;1)$.

Пример 8. Приведите пример двух двумерных линейных многообразий H_1 и H_2, пересечение которых состоит из единственной точки $M_0 = (-3;-1;-2;0)$, при этом $M_1 \in H_1$, $M_2 \in H_2$ для заданных точек $M_1 = (1;0;2;-4)$ и $M_2 = (-1;2;-2;1)$.

Решение. Условия задачи означают, что $H_1 = M_0 + L_1$, $H_2 = M_0 + L_2$, $M_1 - M_0 \in L_1$, $M_2 - M_0 \in L_2$, $L_1 = L\{a_1, a_2\}$, $L_2 = L\{b_1, b_2\}$. Значит, можно взять $M_1 - M_0 = a_1$, $M_2 - M_0 = b_1$. Тот факт, что пересечение $H_1 \cap H_2$ состоит из одной точки, означает, что $\dim(L_1 \cap L_2) = 0$. По формуле Грассмана $\dim(L_1 + L_2) = 4$. Тогда остается подобрать векторы a_2 и b_2 так, чтобы было выполнено условие $r\{a_1, a_2, b_1, b_2\} = 4$. Проверка показывает, что годятся, например, векторы $a_2 = (0;0;0;1)$, $b_2 = (0;0;1;0)$.

Типовые задачи

1. Многообразие, представленное в виде множества решений СЛАУ, задайте в параметрическом виде $H = c + L\{a_1, a_2, ..., a_k\}$, и укажите его размерность.

а) $H: \begin{cases} -x + 2y = 3 \\ 3x - 6y = -9 \end{cases}$.

б) $H: \begin{cases} 3x + 4y - 5z = 1 \\ 2x + 3y + 2z = 5 \end{cases}$.

в) $H: \begin{cases} 3x + y - 2z = -1 \\ 2x + 3y - z = 5 \\ 5x - 3y - 4z = -13 \end{cases}$.

г) $H: \begin{cases} 3x + 2y - 3z - t = 3 \\ -2x - 3y + 5z + 2t = -1 \\ 7x + 3y - 4z - t = 8 \\ -x - 4y + 7z + 3t = 1 \end{cases}$.

д) $H: \begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 - 2x_5 = 5 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_5 = 5 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 - 3x_4 = -5 \end{cases}$.

е) $H: \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 = 2 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2 \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 + 4x_4 - x_5 = 2 \end{cases}$.

2. Многообразие, представленное в параметрической виде $H = \mathrm{c} + L\{a_1, a_2, a_3\}$, задайте в виде множества решений СЛАУ.

а) $H = c(1;-2) + L\{a_1(-1;1)\}$.

б) $H = c(1;-2;2) + L\{a_1(4;-1;3)\}$.

в) $H = c(1;-2;2) + L\{a_1(1;-2;3),\ a_2(-1;1;-2)$.

г) $H = \mathrm{c}(2;1;2;-1) + L\{a_1(-1;2;1;-5),\ a_2(-2;1;1;-3)\}$.

д) $H = \mathrm{c}(1;2;-1;3) + L\{a_1(0;5;-1;1),\ a_2(2;-1;-1;1),\ a_3(3;1;-2;2)\}$.

е) $H = c(1;-2;1;3) + L\{a_1(2;-1;5;7),\ a_2(4;-2;7;5),\ a_3(2;-1;1;-5)\}$.

ж) $H = \mathrm{c}(2;0;-1;1) + L\{a_1(1;-6;2;2),\ a_2(2;3;-1;-6),\ a_3(-1;3;1;-2)\}$.

з) $H = c(1; 0; -2; 3; 2) + L\{a_1(3; 2; -3; -3; -2),\ a_2(1; 2; -2; 2; 1),\ a_3(-2; -3; 5; 1; 1)\}$.

и) $H = c(1; -1; -1; 0; 3) + L\{a_1(1; 1; 1; 1; 1),\ a_2(-1; 0; 0; 0; -1),\ a_3(0; 1; 0; 1; 0)\}$.

3. В пространстве $P_4[x]$ многочленов степени не выше четырех линейное многообразие H задано условиями на значения многочлена и его производных. Представьте многообразие в параметрическом виде $H = p_0(x) + L\{p_1(x), p_2(x), ...\}$, и укажите его размерность.

а) $p(-1) = 1$.

б) $p'(-1) = 2$.

в) $p'(1) = -2,\ p''(x) = p''(-x)$.

г) $p(1) = 4,\ \ p'(1) = 8,\ \ p''(x) = p''(-x)$.

д) $p(-1) = 2,\quad p''(x) = -p''(-x)$.

е) $p'(1) = -4,\quad p(-x) = p(x)$.

4. В пространстве функций $V = L\{f_1(x),\ f_2(x), ...\}$ линейное многообразие H задано условиями на значения функции и ее производных вида $f(a_j) = c_j$ или $f'(b_k) = d_k$. Найдите параметрическое представление многообразия.

а) $V = L\{\sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x\},\ \ f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1,\ \ f(\pi) = 2$.

б) $V = L\{1;\ \sin x;\ \sin 2x; \cos 2x\},\ \ f'(\pi) = 1,\ f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

в) $V = L\{1, \sin^2 x, \cos^2 x, \sin 2x, \cos 2x\},\ \ f(\pi) = -1,\ \ f(\pi/4) = -f(-\pi/4)$.

г) $V = L\{\sin x, \cos x, \sin 3x, \cos 3x\},\ f(\pi) = -1,\ f'(\pi) = 1$.

д) $V = L\{1, \sin x, \cos x, \sin 3x, \cos 3x\},\ \ f(\pi) = 1,\ \ f'(\pi) = -1$.

е) $V = L\{1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x\},\ \ f(x) = -f(-x),\ \ f'(\pi) = 1$.

5. Задайте многообразие $H_3 = H_1 \cap H_2$ и в виде решений СЛАУ, и в параметрическом виде $H_3 = c_3 + L$, и укажите его размерность.

а) $H_1 = c_1(3; 1; 1; 0) + L\{a_1(1; 2; 0; -1), a_2(0; 1; 0; 1)\}$, $H_2 : \begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 2 \\ x_3 = 1 \end{cases}$.

б) $H_1 : \begin{cases} x_1 - x_2 + x_4 = -1 \\ x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$, $H_2 = c_2(1; 3; -1; -1) + L\{b_1(1; -1; 1; 0), b_2(0; -1; 1; 2)\}$.

в) $H_1 = c_1(1; -2; 1; 3) + L\{a_1(1; 0; -1; 0), a_2(0; -1; 0; 1)\}$,
$H_2 = c_2(0; -2; 1; 1) + L\{b_1(1; 0; 0; 1), b_2(0; 1; 1; 0)\}$.

г) $H_1 = c_1(1; -2; 1; 3) + L\{a_1(1; 1; 1; 0), a_2(0; -1; -1; 1)\}$,
$H_2 = c_2(0; -2; 1; 1) + L\{b_1(1; 0; 0; 0), b_2(0; 0; 0; 2)\}$.

д) $H_1 = c_1(1; -2; 1; 3) + L\{a_1(1; 2; 2; 0), a_2(0; -2; -2; 1)\}$,
$H_2 = c_2(0; -2; 1; 1) + L\{b_1(1; 1; 1; 1), b_2(0; 1; 1; 0)\}$.
$H_2 = c_2(3; -1; 2; 1) + L\{b_1(5; 3; 3; -2), b_2(2; 1; 2; -1)\}$.

е) $H_1 = c_1(0; -2; 1; 3; 3) + L\{a_1(0; 1; 1; 1; 0), a_2(1; 0; 0; 0; 1), a_3(1; 1; 1; 0; 0)\}$,
$H_2 = c_2(0; -2; 1; 1; 1) + L\{b_1(1; 1; 1; 1; 1), b_2(-1; 0; 0; 0; -1), b_3(0; 1; 0; 1; 0)\}$.

6. Задайте многообразие $H_3 = H_1 + H_2$ с помощью СЛАУ и укажите его размерность.

а) $H_1 : \begin{cases} x_1 - x_2 - x_4 = 0, \\ x_3 = 1, \end{cases}$, $H_2 = c_2(2; 0; 1; 0) + L\{b_1(2; 1; 0; 0), b_2(0; 1; 0; 1)\}$.

б) $H_1 = c_1(1;0;0;0) + L\{a_1(1;0;1;0), a_2(0;1;0;1)\}$, $H_2: \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_1 + x_3 = 2 \end{cases}$.

в) $H_1 = L\{\bar{a}_1(1;0;0;1),\ \bar{a}_2(-1;0;1;0)\} + \bar{c}_1(1;0;3;4)$, $H_2: \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 2 \\ 2x_1 + x_3 = 1 \end{cases}$.

г) $H_1: \begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 5 \\ x_1 - x_2 + 3x_4 = 2 \end{cases}$, $H_2 = c_2(3;0;1;0) + L\{b_1(3;1;0;0), b_2(0;1;1;1)\}$.

д) $H_1: \begin{cases} 5x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 5x_4 = -1 \\ x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 3 \end{cases}$, $H_2: \begin{cases} 4x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 2x_4 = -2 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 4 \end{cases}$.

е) $H_1: \begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 4 \end{cases}$, $H_2 = c_2(1;-1;0;1) + L\{b_1(1;1;-4;6), b_2(1;-1;-3;2)\}$.

7. Найдите общий вид матриц X, удовлетворяющих матричному уравнению $AX = B$ или $XA = B$. Представьте многообразие H всех таких матриц в параметрическом виде и укажите его размерность.

а) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -7 & 2 \\ 4 & 11 \end{pmatrix}$.

б) $X \cdot \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ 5 & -15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -12 \\ 10 & -20 \end{pmatrix}$.

в) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -2 & 10 \\ 3 & -15 \end{pmatrix}$.

г) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -3 & -4 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -5 & 7 & 0 \\ 5 & -9 & 1 \\ -12 & 9 & 6 \end{pmatrix}$.

д) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -2 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

е) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -5 \\ 0 & 7 & 5 \end{pmatrix}$.

ж) $X \cdot \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

з) $X \cdot \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 5 \\ 2 & -4 \\ 9 & 7 \end{pmatrix}$.

8. Установите с полным обоснованием, как взаимно расположены два линейных многообразия H_1 и H_2. Определите размерность их суммы. Определите размерность их пересечения, если многообразия пересекаются.

а) $H_1 = c_1(2;5;1;-2) + L\{a_1(2;1;-1;3), a_2(1;2;0;1)\}$,
$H_2 = c_2(4;1;0;2) + L\{b_1(0;-3;-1;2)\}$.

б) $H_1 = c_1(2;1;1;-1) + L\{a_1(2;1;-1;4), a_2(1;2;0;1)\}$,
$H_2 = c_2(4;2;0;3) + L\{b_1(0;-3;-1;2)\}$.

в) $H_1 = c_1(1;-3;2;-1) + L\{a_1(-1;2;-3;1), a_2(5;-2;-1;2)\}$,
$H_2 = c_2(4;-2;3;-1) + L\{b_1(1;2;-5;2), b_2(2;0;-2;1)\}$.

г) $H_1 = c_1(0;1;2;5) + L\{a_1(1;0;-1;4), a_2(1;1;0;1)\}$,
$H_2 = c_2(0;2;3;1) + L\{b_1(1;2;1;-2), b_2(1;3;2;-5)\}$.

д) $H_1 = c_1(0;2;1;1) + L\{a_1(1;2;2;0), a_2(0;-2;-2;1)\}$,
$H_2 = c_2(0;1;0;0) + L\{b_1(2;1;1;2), b_2(0;1;1;0)\}$.

е) $H_1 = c_1(3;1;1;1) + L\{a_1(0;-2;1;6), a_2(1;-1;1;1)\}$,
$H_2 = c_2(1;1;0;5) + L\{b_1(2;-4;3;8), b_2(1;3;-1;-11)\}$.

ж) $H_1 = c_1(0;-3;2;-1) + L\{a_1(0;2;-1;-3), a_2(2;0;3;-1)\}$,
$H_2 = c_2(1;2;1;0) + L\{b_1(1;2;-3;0), b_2(2;1;-1;1)\}$.

з) $H_1: \begin{cases} x_1 - x_3 + 2x_4 = 1 \\ x_2 - x_3 - 3x_4 = 2 \end{cases}$, $H_2: \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_4 = -3 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = -5 \end{cases}$.

и) $H_1: \begin{cases} 2x_1 + x_3 + x_4 = 2 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = 3 \end{cases}$, $H_2: \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$.

к) $H_1 = \begin{cases} -x_1 + 2x_2 - 3x_3 + \ \ x_4 = 3 \\ \ 5x_1 - 2x_2 - \ \ x_3 + 2x_4 = 7 \end{cases}$, $H_2 = \begin{cases} \ x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 2x_4 = -2 \\ 2x_1 \qquad\quad - 2x_3 + \ \ x_4 = -3 \end{cases}$.

л) $H_1 = \begin{cases} 2x_1 - \ \ x_2 + 3x_3 + 2x_4 = \ \ 2 \\ \ 3x_1 + 2x_2 + 7x_3 + 6x_4 = 12 \end{cases}$, $H_2 = \begin{cases} \ \ x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 4x_4 = 10 \\ -x_1 + 4x_2 + \ \ x_3 + 2x_4 = \ \ 8 \end{cases}$.

9. Найдите все значения параметра p, при которых многобразия H_1 и H_2 скрещиваются.

а) $H_1 = c_1(0;1;1;1) + L\{a_1(1;0;-1;0)\}$, $H_2 = c_2(0;0;1;0) + L\{b_1(1;1;p;1)\}$.

б) $H_1 = c_1(2;2;-1;2) + L\{a_1(2;3;0;1)\}$, $H_2 = c_2(0;1;1;3) + L\{b_1(1;0;p;-1)\}$.

в) $H_1 = c_1(2;1;0;1) + L\{a_1(2;3;-1;1)\}$, $H_2 = c_2(0;-2;1;0) + L\{b_1(2;p;0;1)\}$.

г) $H_1 = c_1(2;1;3;1) + L\{a_1(2;1;1;3)\}$, $H_2 = c_2(3;2;1;1) + L\{b_1(3;p-2;2;-1)\}$.

д) $H_1 = c_1(4;1;p-3;2) + L\{a_1(1;-1;-2;3)\ a_2(3;2;-1;4)\}$,
$H_2 = c_2(-1;p+1;4;1) + L\{b_1(1;4;0;1), b_2(2;2;-3;2)\}$.

10. Найдите все значения параметра p, при которых многобразия H_1 и H_2 пересекаются.

а) $H_1 = c_1(-2;0;1;2) + L\{a_1(1;1;-2;1)\}$, $H_2 = c_2(1;0;p;1) + L\{b_1(2;1-p;-1;2)\}$.

б) $H_1 = c_1(-1;p;1;2) + L\{a_1(1;3;-2;2)\}$, $H_2 = \begin{cases} \ x_1 - \ \ x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 1 \\ -x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 2 \end{cases}$.

в) $H_1 = c_1(-1;p-2;2;1) + L\{a_1(1;2;-1;1), a_2(-1;2;3;-1)\}$,
$H_2 = c_2(1;-1;3+2p;-2) + L\{b_1(1;-1;-2;3)\ b_2(2;3;1;1)\}$.

г) $H_1 = c_1(2;3;2;-2) + L\{a_1(2;1;1;-4), a_2(1;-3;-1;-3)\}$,
$H_2 = c_2(-1;4;2;3) + L\{b_1(-2;3;1;4)\ b_2(2;3-2p;1;2)\}$.

д) $H_1 = c_1(1;3;-2;2) + L\{a_1(1;1;-2;4), a_2(1;2;-3;1-p)\}$,
$H_2 = c_2(-2;1;2;3) + L\{b_1(1;-1;0;3)\ b_2(-1;-4;5;1)\}$.

11. Найдите все значения параметра p, при которых многобразия H_1 и H_2 параллельны.

а) $H_1 = c_1(4;1;0;1) + L\{a_1(1;3;-1;2)\}$, $H_2 = c_2(5;4;p;3) + L\{b_1(2;6;-2;4)\}$.

б) $H_1 = c_1(0;1;1;0) + L\{a_1(-1;2;3;1)\}$,
$H_2 = c_2(1;2;3;1) + L\{b_1(1;2;2p-1;2), b_2(2;0;2;1)\}$.

в) $H_1 = \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 - x_4 = 3 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$,
$H_2 = c_2(1;2;3;1) + L\{b_1(-1;2-p;p-1;1), b_2(-2;1;1;2)\}$.

г) $H_1 = \begin{cases} -x_1 + x_2 - 3x_3 + px_4 = -3 \\ \ 5x_1 - x_2 - \ \ x_3 + \ \ x_4 = -7 \end{cases}$, $H_2 = \begin{cases} \ x_1 + x_2 - 5x_3 + 2x_4 = 2 \\ 2x_1 \qquad\quad - 2x_3 + \ \ x_4 = 3 \end{cases}$.

д) $H_1 = c_1(2;-1;1;2) + L\{a_1(1;1;-1;1), a_2(1;2;-4;-1)\}$,
$H_2 = c_2(4;2;0;p) + L\{b_1(-2;-3;5;0)\ b_2(2;1;1;4)\}$.

е) $H_1 = c_1(1;3;2;-3) + L\{a_1(1;1;-2;2), a_2(-1;-4;p+3;1)\}$,
$H_2 = c_2(3;p;-1;2) + L\{b_1(1;2;-3;1)\ b_2(1;-1;0;4)\}$.

12. Определите взаимное расположение многообразий H_1 и H_2 при всех значениях параметра p.

а) $H_1 = c_1(0;3;-2) + L\{a_1(1;2;-1)\}$, $H_2 = c_2(p;7;-1) + L\{b_1(1;0;3)\}$.

б) $H_1 = \begin{cases} 2x_1 + \ \ x_2 + 3x_3 + \ \ x_4 = \ \ 2 \\ \ 3x_1 - 2x_2 + 7x_3 + 3x_4 = 14 \end{cases}$, $H_2 = \begin{cases} \ \ x_1 - 3x_2 + \qquad\quad 4x_3 + 2x_4 = 10 \\ -x_1 - 4x_2 + (p-3)x_3 + \ \ x_4 = \ \ 6 \end{cases}$.

в) $H_1 = c_1(1;p;9) + L\{a_1(p+1;1-p;0)\}$, $H_2 = c_2(p;2;p^2) + L\{b_1(1-p;1;0)\}$.

г) $H_1 = \begin{cases} 2x_1 + (p-1)x_2 + x_3 - 2x_4 = -3 \\ 5x_1 - \qquad\quad x_2 + x_3 - \ \ x_4 = \ \ 3 \end{cases}$, $H_2 = \begin{cases} \ \ x_1 + x_2 + 2x_3 - 5x_4 = -12 \\ -x_1 + x_2 + px_3 - 3x_4 = \ -9 \end{cases}$.

д) $H_1 = \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = \ \ 2 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = -6 \end{cases}$, $H_2 = c_2(-1;3;1;p-4) + L\{b_1(-1;p+1;1;0)\}$.

Дополнительные задачи

13. Верно ли следующее утверждение: множество невырожденных квадратных матриц размера (2×2) является линейным многообразием в пространстве всех матриц размером (2×2)?

14. Верно ли следующее утверждение: множество квадратных матриц размера (2×2) с положительными элементами является линейным многообразием в пространстве всех матриц размером (2×2)?

15. Докажите, что если две плоскости в R^3 имеют общую точку, то они имеют и общую прямую.

16. Докажите, что две плоскости в R^3 либо параллельны, либо совпадают, либо пересекаются по общей прямой.

17. Могут ли два трехмерных многообразия в R^5:
   а) Не иметь общих точек.
   б) Иметь ровно одну общую точку.
   в) Иметь ровно две общие точки.

18. Докажите, что гиперплоскость не может скрещиваться ни с каким другим многообразием.

19. Докажите, что гиперплоскость и двумерная плоскость в R^4 либо параллельны, либо гиперплоскость содержит плоскость, либо они пересекаются по общей прямой.

20. Докажите, что две гиперплоскости в R^4 либо параллельны, либо совпадают, либо пересекаются по общей двумерной плоскости.

21. Пусть $H_1 = c_1 + L_1$ – гиперплоскость в R^n, $H_2 = c_2 + L\{a\}$ – прямая в R^n. Верно ли следующее утверждение: если $a \notin L_1$, то $H_1 \cap H_2 \neq \varnothing$?

22. Верно ли следующее утверждение: если H_1 и H_2 – линейные многообразия в R^n и $H_1 + H_2 = R^n$, то $H_1 \cap H_2 \neq \varnothing$?

23. Пусть H_1 и H_2 – линейные многообразия в R^8, и $\dim H_1 = 6$. Известно, что многообразия H_1 и H_2 скрещиваются. Докажите, что $\dim(H_1 + H_2) = 7$.

24. Приведите пример трехмерного линейного многообразия H_2 в R^4, которое проходит через точку M параллельно линейному многообразию H_1:
   а) $M = (-3;-1;-2;0)$, $H_1 = c_1(1;-2;1;3) + L\{a_1(1;0;2;-4), a_2(-1;2;-2;1)\}$.
   б) $M = (1;2;0;0)$, $H_1 : \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_4 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$.

25. Может ли двумерная плоскость в R^4, содержащая точки M_1 и M_2, скрещиваться с двумерной плоскостью, содержащей точки M_3 и M_4?
   а) $M_1(0;1;-1;2)$, $M_2(-1;1;2;0)$, $M_3(3;2;-2;1)$, $M_4(-1;3;1;0)$.
   б) $M_1(0;1;-1;2)$, $M_2(-1;1;2;0)$, $M_3(2;2;0;-1)$, $M_4(1;0;-11;11)$.

26. Приведите пример двумерной плоскости H_2 в R^4, которая проходит через точку M и скрещивается с линейным многообразием H_1.
   а) $M = (3;1;3;0)$, $H_1 = c_1(0;2;1;1) + L\{a_1(1;0;1;1), a_2(1;2;0;1)\}$.

б) $M=(1;2;2;3)$, $H_1:\begin{cases}2x_1+x_2-\ x_3+x_4=3\\ x_1+x_2+3x_3\qquad =2\end{cases}$.

27. Приведите пример двумерной плоскости H_2 в R^4, которая проходит через точку $M(2,1,2,-1)$ и пересекается с двумерной плоскостью $H_1:\begin{cases}x_1+x_2-x_3+x_4=3\\ x_1-x_2+x_3\qquad =2\end{cases}$ в одной точке.

28. Приведите пример многообразия H_2 в R^4, проходящего через точки $A=(0;3;2;0)$ и $B=(1;2;2;-3)$, и параллельного плоскости $H_1=L\{a_1(1;1;1;2),a_2(0;1;0;-1)\}+c_1(1;2;2;0)$.

29. Приведите пример двух двумерных плоскостей H_1 и H_2 в R^4, содержащих соответственно точки $A(1;0;-1;1)$ и $B(-1;1;2;0)$, пересечение которых состоит из одной точки $M(2;1;-1;2)$.

30. Приведите пример двух двумерных плоскостей в R^4, которые проходят через точки $A=(0;3;2;0)$ и $B=(1;2;2;-3)$ соответственно, и пересекаются по прямой $H=c(1;1;2;0)+L\{a(-1;2;0;1)\}$.

31. Приведите пример двух двумерных плоскостей H_1 и H_2 в R^4, содержащих соответственно точки $M_1(1;0;-1;1)$ и $M_2(-1;1;2;0)$, пересечение которых является прямой, параллельной прямой $H_3=c(-1;1;2;0)+L\{a(1;1;0;-2)\}$.

32. Приведите пример двумерного и трехмерного многообразий H_1 и H_2 в R^4, содержащих соответственно точки $M_1=(1;1;-2;0)$ и $M_2=(-1;1;2;-1)$, пересекающихся по прямой $H_3=c(-1;1;2;0)+L\{a(1;1;0;-2)\}$.

33. Приведите пример двумерного и трехмерного многообразий H_1 и H_2 в R^5, пересекающихся в одной точке $M(1;-2;0;-1;3)$, причем H_1 содержит точку $M_1(-1;1;-1;2;1)$, а H_2 содержит прямую $H=c(1;1;2;-1;2)+L\{a(-1;1;0;1;1)\}$.

34. Приведите пример двух СЛАУ, задающих два скрещивающихся двумерных ЛМ в R^4, одно из которых лежит в ЛМ $H_1:\{\ 2x_1+x_2-x_3+3x_4=4$, а другое лежит в ЛМ $H_2:\{\ x_2-x_3+x_4=1$.

35. Приведите пример двух СЛАУ, задающих два параллельных ЛМ в R^5, одно из которых (двумерное) лежит в многообразии $H_1:\{\ x_1-2x_2+3x_4=4$, а другое (трехмерное) лежит в многообразии $H_2:\{\ x_2+2x_3+x_4=1$.

36. Пусть линейно независимый набор $\{a_1,a_2,a_3\}$ выражается через набор $\{b_1,b_2,c_2-c_1\}$. Каково может быть взаимное расположение многообразий $H_1=c_1+L\{a_1,a_2,a_3\}$ и $H_2=c_2+L\{b_1,b_2\}$?

Ответы на типовые задачи

1. а) Например, $H=c(-3;0)+L\{a_1(2;1)\}$, $\dim(H)=1$.
   б) Например, $H=c(-17;13;0)+L\{a_1(23;-16;1)\}$, $\dim(H)=1$.
   в) Например, $H=c(11;0;17)+L\{a_1(-5;1;-7)\}$, $\dim(H)=1$.
   г) Например, $H=c(0;5;0;7)+L\{a_1(1;-4;0;-5),a_2(0;1;1;-1)\}$, $\dim(H)=2$.
   д) Например, $H=c(1;2;0;0;0)+L\{a_1(3;1;0;0;5),a_2(2;-5;4;7;0)\}$, $\dim(H)=2$.
   е) Например, $H=c(0;-2;0;0;6)+L\{a_1(2;0;0;-3;-8),a_2(0;0;1;-1;-3)\}$, $\dim(H)=2$.

2. а) $\{x_1+x_2=-1$.
   б) $\begin{cases}x_1+4x_2\qquad =-7\\ \qquad 3x_2+x_3=-4\end{cases}$.

в) $\{x_1 - x_2 - x_3 = 1$.

г) $\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 7 \\ 2x_2 + x_3 + x_4 = 3 \end{cases}$.

д) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 5x_3 = 0 \\ x_3 + x_4 = 2 \end{cases}$.

е) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = -3 \\ -8x_2 - 3x_3 + x_4 = 16 \end{cases}$.

ж) $\{2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4$.

з) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 7x_4 - 11x_5 = 0 \\ x_3 + 7x_4 - 12x_5 = -5 \end{cases}$.

и) $\begin{cases} x_1 - x_5 = -2 \\ x_2 - x_4 = -1 \end{cases}$.

3. а) Например, $H = 1 + L\{x+1,\ (x+1)^2, (x+1)^3, (x+1)^4\}$, $dim(H) = 4$.
   Или $H = 1 + L\{x+1,\ x^2 - 1, x^3 + 1, x^4 - 1\}$, $dim(H) = 4$.
   б) Например, $H = 2x + L\{1,\ (x+1)^2, (x+1)^3, (x+1)^4\}$, $dim(H) = 4$.
   Или $H = 2x + L\{1,\ x^2 + 2x, x^3 - 3x, x^4 + 4x\}$, $dim(H) = 4$.
   в) Например, $H = -x^2 + L\{1, x, x^4 - 2x^2\}$, $dim(H) = 3$.
   г) Например, $H = (8x - 4) + L\{x^2 - 2x + 1,\ x^4 - 4x + 3\}$, $dim(H) = 2$.
   д) Например, $H = 2 + L\{x+1,\ x^3 + 1\}$, $dim(H) = 2$.
   е) Например, $H = -2x^2 + L\{1,\ x^4 - 2x^2\}$, $dim(H) = 2$.
4. а) $H = (\cos 2x - \cos x) + L\{\sin x,\ 2\cos x - \sin 2x + 2\cos 2x\}$, $\dim H = 2$.
   б) $H = -\sin x + L\{1, \cos 2x\}$, $\dim H = 2$.
   в) $H = -\cos 2x + L\{\sin 2x\}$, $\dim H = 1$.
   г) $H = (\cos x - \sin x) + L\{\cos x - \cos 3x, 3\sin x - \sin 3x\}$, $\dim H = 2$.
   д) $H = (1 + \sin x) + L\{1 + \cos x, \cos x - \cos 3x, 3\sin x - \sin 3x\}$, $\dim H = 3$.
   е) $H = -\sin x + L\{2\sin x + \sin 2x\}$, $\dim H = 1$.
5. а) $H_3 = \begin{cases} x_1 - x_2 = 3 \\ x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_4 = 5 \end{cases}$, $dim(H_3) = 1$, $H_3 = c_3(0; -3; 1; 5) + L\{b(1; 1; 0; -2)\}$.
   б) $H_3 = \begin{cases} x_1 - 3x_3 = 2 \\ x_2 + x_3 = 2 \\ 4x_3 + x_4 = -1 \end{cases}$, $dim(H_3) = 1$, $H_3 = c_3(2; 2; 0; -1) + L\{b(3; -1; 1; -4)\}$.
   в) $H_3: \begin{cases} x_1 + x_3 = 2 \\ x_2 + x_4 = 1 \\ x_1 - x_4 = -1 \\ x_2 - x_3 = -3 \end{cases}$, система несовместна, пересечение пусто.
   г) $H_3: \begin{cases} x_2 = -2 \\ x_3 = 1 \\ x_1 - x_4 = -2 \end{cases}$, $\dim(H_3) = 1$, $H_3 = c_3(-2; -2; 1; 0) + L\{b(1; 0; 0; 1)\}$.
   д) $H_3: \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_3 = 3 \\ x_1 - x_4 = -1 \end{cases}$, $\dim(H_3) = 1$, $H_3 = c_3(0; 0; 3; 1) + L\{b(1; 0; 0; 1)\}$.
   е) $H_3: \begin{cases} x_2 - x_3 = -3 \\ x_2 - x_4 = -3 \\ x_1 - x_5 = -1 \end{cases}$, $dim(H_3) = 2$, $H_3 = c_3(0; 0; 3; 3; 1) + L\{a_2(1; 0; 0; 0; 1), a_1(0, 1, 1, 1, 0)\}$.

6. а) $H_3: \{x_3 = 2$, $dim(H_3) = 3$.
   б) $H_3: \{2x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 4$, $dim(H_3) = 3$.
   в) $H_3: \{0 \cdot x_1 = 0$ $(H_3 = R^4)$, $dim(H_3) = 4$.
   г) $H_3: \{x_3 - x_4 = 2$, $dim(H_3) = 3$.
   д) $H_3: \{3x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 2$, $dim(H_3) = 3$.

е) $H_1\colon\begin{cases}3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 7\\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 0\end{cases}$ или $H_1\colon\begin{cases}7x_1 + x_2 + 2x_3 = 14\\ 10x_1 + 4x_3 + x_4 = 21\end{cases}$, $\dim(H_3) = 2$.

7. а) $X = \begin{pmatrix}3 & 4\\ -2 & 3\end{pmatrix}$, $H = \begin{pmatrix}3 & 4\\ -2 & 3\end{pmatrix} + L\left\{\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right\}$, $\dim(H) = 0$.

б) Нет решений, $H = \emptyset$.

в) $X = \begin{pmatrix}-1+2\lambda & 5+2\mu\\ \lambda & \mu\end{pmatrix}$, где $\lambda, \mu \in R$; $H = \begin{pmatrix}-1 & 5\\ 0 & 0\end{pmatrix} + L\left\{\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\}$, $\dim(H) = 2$.

г) $X = \begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\ -3 & 2 & -1\\ -2 & 1 & 3\end{pmatrix}$, $H = \begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\ -3 & 2 & -1\\ -2 & 1 & 3\end{pmatrix} + L\left\{\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\right\}$, $\dim(H) = 0$.

д) $X = \begin{pmatrix}1+5\lambda & -4+5\mu & -2+5\nu\\ -\lambda & -\mu & -\nu\\ 7\lambda & -5+7\mu & -2+7\nu\end{pmatrix}$, где $\lambda, \mu, \nu \in R$;

$H = \begin{pmatrix}1 & -4 & -2\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & -5 & -2\end{pmatrix} + L\left\{\begin{pmatrix}5 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0\\ 7 & 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 5 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 7 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0 & 5\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 7\end{pmatrix}\right\}$, $\dim(H) = 3$.

е) $X = \begin{pmatrix}3+4\lambda & 4+4\mu & -10+4\nu\\ 2+2\lambda & 5+2\mu & -5+2\nu\\ \lambda & \mu & \nu\end{pmatrix}$, где $\lambda, \mu, \nu \in R$;

$H = \begin{pmatrix}3 & 4 & -10\\ 2 & 5 & -5\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} + L\left\{\begin{pmatrix}4 & 0 & 0\\ 2 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 4 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0 & 4\\ 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right\}$, $\dim(H) = 3$.

ж) $X = \begin{pmatrix}\lambda & 1+\mu & 3\lambda+2\mu\\ \nu & \eta & 1+3\nu+2\eta\end{pmatrix}$, где $\lambda, \mu, \nu, \eta \in R$;

$H = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} + L\left\{\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}\right\}$, $\dim(H) = 4$.

з) $X = \begin{pmatrix}\lambda & 3+3\lambda & -2-2\lambda\\ \mu & -2+3\mu & 1-2\mu\\ \nu & 1+3\nu & 2-2\nu\end{pmatrix}$, где $\lambda, \mu, \nu \in R$;

$H = \begin{pmatrix}0 & 3 & -2\\ 0 & -2 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix} + L\left\{\begin{pmatrix}1 & 3 & -2\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 3 & -2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 3 & -2\end{pmatrix}\right\}$, $\dim(H) = 3$.

8. а) H_1 и H_2 скрещиваются, $dim(H_1 + H_2) = 3$.

б) H_2 содержится в H_1, $H_1 \cap H_2 = H_2$, $dim(H_1 + H_2) = 2$, $\dim(H_1 \cap H_2) = 1$.

в) H_1 и H_2 скрещиваются, $dim(H_1 + H_2) = 3$.

г) H_1 и H_2 параллельны, $dim(H_1 + H_2) = 2$.

д) H_1 и H_2 пересекаются, $dim(H_1 + H_2) = 3$, $\dim(H_1 \cap H_2) = 1$.

е) H_1 и H_2 совпадают, $dim(H_1 + H_2) = 2$, $\dim(H_1 \cap H_2) = 2$.

ж) H_1 и H_2 скрещиваются, $dim(H_1 + H_2) = 3$.

з) H_1 и H_2 пересекаются, $dim(H_1 + H_2) = 4$, $dim(H_1 \cap H_2) = 0$.

и) H_1 и H_2 параллельны, $dim(H_1 + H_2) = 2$.

к) H_1 и H_2 скрещиваются, $dim(H_1 + H_2) = 3$.

л) H_1 и H_2 совпадают, $dim(H_1 + H_2) = 2$, $dim(H_1 \cap H_2) = 2$.

9. а) При $p \neq -1$. б) При $p \neq -\frac{3}{2}$.

в) Ни при каком p. г) При всех p.

д) Ни при каком p.

10. а) Ни при каком p. б) При $p = 6$.

в) При всех p. г) При всех p.

д) Ни при каком p.

11. а) При $p \neq -1$. б) При $p = 3$.

в) При всех p. г) При $p = 1$.

д) Ни при каком p. е) При $p = 2$.

12. а) При $p = 3$ пересекаются в одной точке; при $p \neq 3$ скрещиваются.

б) При $p = 4$ параллельны; при прочих p скрещиваются.

в) При $p = 0$ параллельны; при $p = 3$ совпадают; при $p = -3$ пересекаются в одной точке; при прочих p скрещиваются.

г) При $p \neq 1$ пересекаются в одной точке; при $p = 1$ совпадают.

д) При $p = -2$ параллельны; при $p = 2$ пересекаются в одной точке; при прочих p скрещиваются.

Ответы на дополнительные задачи

13. Неверно.
14. Неверно.
15. Указание. Используйте формулу Грассмана.
17. а) Да. б) Нет. в) Нет.
21. Верно.
22. Верно.
23. Указание. Используйте формулу Грассмана и критерий пустого пересечения.
24. а) Например, $H_2 = M + L(a_1, a_2, b)$, где $b = (0;0;0;1)$.

Указание. Должно быть $\dim(L_1 + L_2) = 3$, $rank(a_1, a_2, b, M - c_1) = 4$.

б) Например, $H_2 : \{x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = -3$. Указание. Объединение СЛАУ для H_1 и H_2 должно быть несовместной СЛАУ ранга 3.

25. а) Например, $a_1 = b_1 = (1;0;0;0)$.

Указание. Надо подобрать a_1 и b_1 так, что:

$H_1 = M_1 + L\{a_1, M_2 - M_1\}$, $H_2 = M_3 + L\{b_1, M_4 - M_3\}$,

$rank\{a_1, M_2 - M_1, b_1, M_4 - M_3\} = 3$, $rank\{a_1, M_2 - M_1, b_1, M_4 - M_3, M_3 - M_1\} = 4$.

б) Не может.

26. а) Например, $H_2 = M + L(a_1, b)$, где $b = (0;0;0;1)$.

Указание. Из условий задачи следует, что $\dim(L_1 + L_2) = 3$, $rank(a_1, a_2, b, M - c_1) = 4$.

б) Например, $H_2 : \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 5 \\ x_1 = 1 \end{cases}$.

Указание. Точка M должна удовлетворять СЛАУ для H_2, а объединение СЛАУ для H_1 и H_2 должно быть несовместной СЛАУ ранга 3.

27. Например, $H_2 : \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 1 \end{cases}$.

Указание. Точка M должна удовлетворять СЛАУ для H_2, а объединенная СЛАУ должна иметь ранг 4.

28. $H_2 = c_2(1;2;2;-3) + L\{a_1, a_2, B - A\}$, $\dim(H_2) = 3$.

Указание. Надо проверить, что $rank\{a_1, a_2, B - A\} = 3$, $c_2 - c_1 \notin L\{a_1, a_2, B - A\}$.

29. Указание. Надо подобрать a_1 и b_1 так, что:
$H_1 = A + L\{a_1, M - A\}$, $H_2 = B + L\{b_1, M - B\}$, $rank\{a_1, M - A, b_1, M - B\} = 4$.

30. Например, $H_1 = L\{a_1, a_2\} + c$, $H_2 = L\{b_1, b_2\} + c$, где $a_1 = b_1 = a$, $a_2 = A - c$, $b_2 = B - c$.
Указание. Надо проверить, что набор $\{a, A - c, B - c\}$ ЛНЗ (это верно).

31. Указание. Должно быть $H_1 = c_1 + L\{M_1 - c_1, a)\}$, $H_2 = c_1 + L\{M_2 - c_1, a)\}$, где $c_4 \notin H_3$.

32. Указание. Должно быть $H_1 = c + L\{M_1 - c, a)\}$, $H_2 = c + L\{M_2 - c, a, b)\}$, где $rank\{M_1 - c, M_2 - c, a, b\} = 4$.

33. Указание. Должно быть $H_1 = M + L\{M_1 - M, b)\}$, $H_2 = M + L\{c - M, a, d)\}$, где $rank\{M_1 - M, c - M, a, b, d\} = 5$.

34. Указание. Пример получится, если добавить в каждую СЛАУ по уравнению с одинаковой левой, но разной правой частью. Тогда объединение СЛАУ для H_1 и H_2 будет несовместной СЛАУ ранга 3.

35. Указание. В первую СЛАУ достаточно добавить уравнение $x_2 + 2x_3 + x_4 = a \neq 1$ и еще одно так, чтобы СЛАУ имела ранг 3. Во вторую СЛАУ добавить уравнение $x_1 - 2x_2 + 3x_4 = 4$. Тогда объединенная СЛАУ будет несовместной (обратите внимание на отсутствие переменной x_5).