IV. Линейные подпространства

Определения и формулы.

Подмножество M линейного пространства V называется линейным подпространством, если для любых $x, y \in M$ и любых $\lambda, \mu \in R$ выполняется $\lambda x + \mu y \in M$.

Любое линейное подпространство само является линейным пространством.

Пересечением $L = L_1 \cap L_2$ линейных подпространств называется множество их общих элементов.

Пересечение линейных подпространств является линейным подпространством.

Суммой $L = L_1 + L_2$ двух подпространств L_1 и L_2 называется множество, содержащее все суммы вида $a_1 + a_2$, где $a_1 \in L_1$, $a_2 \in L_2$.

Сумма линейных подпространств является линейным подпространством.

Сумма линейных подпространств $L = L_1 + L_2 + \ldots + L_k$ называется прямой суммой (обозначение $L = L_1 \oplus L_2 \oplus \ldots \oplus L_k$), если из равенства $a + a_2 + \ldots + a_k = \bar{0}$, где $a_j \in L_j$, следует $a_j = \bar{0}$ для всех j.

Сумма линейных подпространств $L = L_1 + L_2 + \ldots + L_k$ является прямой суммой тогда и только тогда, когда $\sum_{j=1}^{k} \dim(L_j) = \dim(L)$.

Для любых двух линейных подпространств выполняется формула Грассмана:

$$\dim(L_1 + L_2) + \dim(L_1 \cap L_2) = \dim(L_1) + \dim(L_2).$$

Линейной оболочкой набора $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ называется множество $L\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$, содержащее все суммы вида $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_k a_k$, где $\lambda_j \in R$ для всех j.

Линейная оболочка набора является линейным подпространством.

Множество решений однородной СЛАУ ранга r в координатном пространстве R^n является линейным подпространством размерности $k = n - r$, совпадающей с количеством свободных переменных. Базисом подпространства может служить любой ФНР данной СЛАУ.

Обратное утверждение: каждое линейное подпространство в R^n размерности k является множеством решений некоторой однородной СЛАУ ранга $r = n - k$.

Для того чтобы построить пересечение двух подпространств, каждое из них должно быть представлено в виде множества решений соответствующей СЛАУ. Затем следует объединить уравнения обеих СЛАУ в одну СЛАУ.

Для того чтобы построить сумму двух подпространств, каждое из них должно быть представлено в виде линейной оболочки некоторого набора. Затем следует выписать линейную оболочку объединения двух наборов.

Примеры решения задач.

Пример 1. Какие из множеств $M_k \subset R^n$, выделяемых некоторым условием, являются подпространствами?

а) $M_1 = \{x(x_1, x_2):\ x = t \cdot (1; -2),\ \text{где}\ t \in R\}$.

б) $M_2 = \{x(x_1, x_2):\ x_1 = 0\}$.

в) $M_3 = \{x(x_1, x_2):\ |x_1| = |x_2|\}$.

г) $M_4 = \{x(x_1, x_2):\ x_1 + x_2 = 1\}$.

д) $M_5 = \{x(x_1, x_2):\ x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_2^2 = 0\}$.

е) $M_6 = \{x(x_1, x_2):\ x_1^2 + 2x_1x_2 - 3x_2^2 = 0\}$.

Решение. Ответ отрицательный, если нуль-вектор не принадлежит M_k. В частном случае может сработать теорема: множество решений однородной СЛАУ является подпространством. Если оба рассуждения не работают, надо проверить выполнение определения линейного подпространства: если $x, y \in R^n$ и $\lambda, \mu \in R$, то $\lambda x + \mu y \in R^n$.

а) Проверим определение линейного подпространства. Пусть векторы $x = t_1 \cdot (1; -2)$, $y = t_2 \cdot (1; -2)$, тогда $\lambda x + \mu y = \lambda t_1 \cdot (1; -2) + \mu t_2 \cdot (1; -2) = (\lambda t_1 + \mu t_2) \cdot (1; -2) \in R^n$. Множество M_1 является подпространством.

б) Множество M_2 является подпространством, так как оно является решением однородной СЛАУ, состоящей из одного уравнения $\{x_1 = 0$.

в) Множество M_3 не является подпространством, так как векторы $x = (1; 1)$ и $y = (1; -1)$ принадлежат M_3, а вектор $x + y = (2; 0) \notin M_3$.

г) Множество M_4 не является подпространством, так как вектор $\bar{0} = (0; 0) \notin M_4$.

д) Уравнение $x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_2^2 = 0$ имеет только нулевое решение, а множество $M_5 = \{(0; 0)\}$ является подпространством.

е) Множество M_6 не является подпространством. Уравнение $x_1^2 + 2x_1x_2 - 3x_2^2 = 0$ эквивалентно уравнению $(x_1 - x_2)(x_1 + 3x_2) = 0$. Векторы $x = (1; 1)$ и $y = (3; -1)$ принадлежат M_6, а вектор $x + y = (4; 0) \notin M_6$.

Пример 2. Найдите размерность и базис подпространства L, заданного однородной СЛАУ $L = \begin{cases} \quad -2y + z - 2t = 0 \\ x - \; y \quad\quad + \; t = 0 \end{cases}$.

Решение. Известно, что множество решений однородной системы является подпространством. Базисом L является ФНР этой СЛАУ, $\dim(L) = n - r = 4 - 2 = 2$. Решив СЛАУ, получим $f_1(1; 1; 2; 0)$, $f_2(-1; 0; 2; 1)$.

Пример 3. Найдите размерность и базис линейной оболочки $L = L\{a_1, a_2, a_3\}$, где $a_1 = (1; 3; -2; -1)$, $a_2 = (2; 1; 1; -1)$, $a_3 = (-1; 7; -8; -1)$.

Решение. Размерность и базис подпространства L совпадают с рангом и базой набора $\{a_1, a_2, a_3\}$. Имеем:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & \boxed{-1} \\ -1 & 7 & -8 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ -3 & 6 & -9 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \boxed{-1} & 2 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Значит, $\dim(L) = 2$, базисом может служить набор $\{f_1(-1; 2; -3; 0), \{f_2(2; 1; 1; -1)\}$.

Пример 4. Докажите, что подмножество M пространства многочленов степени не выше четырех, для которых $\begin{cases} p(-x) = p(x) \\ p'(2) = 0 \end{cases}$, является подпространством. Найдите базис и размерность этого подпространства.

<u>Решение</u>. Проверим, что если $p(x) \in M$, $q(x) \in M$, то $s(x) = \lambda \cdot p(x) + \mu \cdot q(x) \in M$.

(1) $s(-x) = \lambda \cdot p(-x) + \mu \cdot q(-x) = -\lambda \cdot p(x) - \mu \cdot q(x) = -s(x)$.

(2) $s'(2) = \lambda \cdot p'(2) + \mu \cdot q'(2) = \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 0 = 0$.

Итак, подмножество M является подпространством.

Пусть $p(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$. Условие $p(-x) = p(x)$ изображается тождеством

$$a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = a_4x^4 - a_3x^3 + a_2x^2 - a_1x + a_0,$$

или $a_3x^3 + a_1x = 0$. Поскольку последнее равенство должно выполняться для всех x, получаем $a_3 = 0$, $a_1 = 0$.

Далее, $p'(x) = 4a_4x^3 + 3a_3x^2 + 2a_2x + a_1$. Подставив $x = 2$, получим уравнение $p'(2) = 32a_4 + 12a_3 + 4a_2 + a_1 = 0$. В итоге набор коэффициентов многочлена, принадлежащего подмножеству M, является решением однородной СЛАУ

$$\begin{cases} a_1 \quad\quad = 0 \\ a_3 \quad\quad = 0. \\ a_2 + 8a_4 = 0 \end{cases}$$

Множество L решений этой СЛАУ является подпространством. Ранг СЛАУ $r = 3$, откуда $\dim(L) = 5 - 3 = 2$. Свободными переменными являются коэффициенты a_0 и a_4.

Согласно теореме об изоморфизме линейных пространств, множества M и L изоморфны. При $a_0 = 1$, $a_4 = 0$ получаем первый базисный многочлен $p_1(x) = 1$, при $a_0 = 0, a_4 = 1$ получаем второй базисный многочлен $p_2(x) = x^4 - 8x^2$.

Пример 5. Множество $M \in R^9$ состоит из всех векторов, у которых 1-я координата совпадает со 2-й, а 4-я координата с 7-й и 8-й. Показать, что это множество является подпространством, и указать его размерность и базис.

Решение. Множество M является решением однородной СЛАУ $\begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_7 = x_4 \\ x_8 = x_4 \end{cases}$, ранг которой $r = 3$, свободные переменные $x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_9$, поэтому $M -$ линейное подпространство и $\dim(M) = 6$. Базис в M состоит из шести векторов:

$f_1(1;1;0;0;0;0;0;0;0)$, $f_2(0;0;1;0;0;0;0;0;0)$, $f_3(0;0;0;1;0;0;1;1;0)$,
$f_4(0;0;0;0;1;0;0;0;0)$, $f_5(0;0;0;0;0;1;0;0;0)$, $f_6(0;0;0;0;0;0;0;0;1)$.

Пример 6. Линейную оболочку набора векторов $L = L\{a_1, a_2, \ldots\}$ задать как множество решений СЛАУ.

а) $a_1 = (1;2;-2)$, $a_2 = (1;-1;1)$.

б) $a_1 = (3;2;-3;-1;-2)$, $a_2 = (1;2;-2;2;1)$, $a_3 = (-2;1;1;4;5)$

Решение. а) Условие, что вектор $x \in L(a_1, a_2)$, то есть $x = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2$, эквивалентно утверждению, что совместна неоднородная СЛАУ $AX = B$, в которой столбцами матрицы A являются координаты векторов a_1 и a_2, а столбец B состоит из координат x_1, x_2, x_3 вектора x. Система $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x_1 \\ 2 & -1 & x_2 \\ -2 & 1 & x_3 \end{array}\right)$ приводится к виду $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x_1 \\ 2 & -1 & x_2 \\ 0 & 0 & x_2 + x_3 \end{array}\right)$. Последняя система совместна тогда и только тогда, когда выполнено условие $\{x_2 + x_3 = 0$. Это и есть искомая система уравнений для L.

б) СЛАУ $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -2 & x_1 \\ 2 & 2 & 1 & x_2 \\ -3 & -2 & 1 & x_3 \\ -1 & 2 & 4 & x_4 \\ -2 & 1 & 5 & x_5 \end{array}\right)$ приводится к виду $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & -x_1 - x_3 \\ 0 & 0 & 3 & 6x_1 + x_2 + 6x_3 + 2x_4 \\ 0 & 0 & 0 & 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 \\ 1 & 0 & -2 & -2x_1 - 2x_3 - x_4 \\ 0 & 0 & 0 & 3x_1 + 3x_3 + 2x_4 - x_5 \end{array}\right)$.

Последняя СЛАУ совместна тогда и только тогда, когда $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 + 3x_3 + 2x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$. Эти соотношения представляют собой СЛАУ для L.

Другой способ. Составим вспомогательную однородную СЛАУ с матрицей A, строки которой составляют координаты векторов a_k: $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 - x_4 - 2x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 0 \end{cases}$. Векторы $b_1 = (2;-1;1;1;0)$, $b_2 = (1;-2;-1;0;1)$ образуют ФНР этой СЛАУ. Тогда для матрицы B, строки которой составляют координаты векторов b_j, получим $AB^T = 0$. Но тогда $BA^T = 0$. Из этого и из соотношения рангов матриц $(r(A) + r(B) = n)$ следует, что столбцы матрицы A^T составляют ФНР для однородной СЛАУ $BX = 0$. Мы получили СЛАУ для $L: \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + x_5 = 0 \end{cases}$.

Системы, полученные двумя способами, эквивалентны.

Пример 7. Для подпространства $L = L_1 \cap L_2$ составьте однородную СЛАУ, в которой число уравнений равно рангу. Найдите размерность и базис L.

а) $L_1 = \{a_1(1;-4;0;3), a_2(0;5;1;-2)\}$, $L_2 : \begin{cases} x+2y-2z-t=0 \\ x-\ y+\ \ z-t=0 \\ x+\ y-\ \ z-t=0 \end{cases}$.

б) $L_1 = \{a_1(1;0;-1;0), a_2(0;-1;0;1)\}$, $L_2 = \{b_1(1;0;0;1), b_2(0;1;1;0)\}$.

Решение. а) Для построения СЛАУ для подпространства $L = L_1 \cap L_2$ оба подпространства L_1 и L_2 тоже должны быть представлены в виде СЛАУ. Действуя, как в Примере 6, получим $L_1 : \begin{cases} x+y-3z+t=0 \\ 2x-y+z-2t=0 \end{cases}$. Теперь обе СЛАУ следует объединить в одну: $L = L_1 \cap L_2 : \begin{cases} x+\ y-3z+\ \ t=0 \\ 2x-\ y+\ \ z-2t=0 \\ x+2y-2z-\ t=0 \\ x-\ y+\ \ z-\ t=0 \\ x+\ y-\ \ z-\ t=0 \end{cases}$. Преобразовав систему, получим $\begin{cases} y-z=0 \\ t\ -z=0 \\ x-z=0 \end{cases}$. Из этого следует $\dim(L)=1$, $L = L\{f_1(1;1;1;1)\}$.

б) Сначала найдем однородные СЛАУ, задающие подпространства L_1 и L_2. Действуя, как в Примере 6, найдем эти СЛАУ: $L_1 : \begin{cases} x_1+x_3=0 \\ x_2+x_4=0 \end{cases}$, $L_2 : \begin{cases} x_1-x_4=0 \\ x_2-x_3=0 \end{cases}$.

Далее следуем по решению пункта а). Объединенная СЛАУ $L : \begin{cases} x_1+x_3=0 \\ x_2+x_4=0 \\ x_1-x_4=0 \\ x_2-x_3=0 \end{cases}$.

После преобразований получим $\begin{cases} x_1+x_3=0 \\ x_2+x_4=0 \\ x_1-x_4=0 \end{cases}$. Из этого следует $\dim(L)=1$,

$\mathrm{L} = \mathrm{L}\{f_1(1;-1;-1;1)\}$.

Пример 8. Подпространство $L = L_1 + L_2$ представьте в виде линейной оболочки и в виде СЛАУ. Найдите его размерность и базис, и составьте однородную СЛАУ.

а) $L_1 : -\begin{cases} -x+y\ \ \ \ +t=0 \\ -x\ \ \ \ +z+t=0 \end{cases}$ и $L_2 = \{b_1(1;0;0;0), b_2(0;0;0;2)\}$.

б) $L_1 = \begin{cases} x+y-z\ \ \ \ =0 \\ \ \ \ \ y-z\ \ \ \ =0 \\ \ \ \ 2y\ \ \ \ -t=0 \end{cases}$ и $L_2 = \begin{cases} x\ \ \ \ -z+t=0 \\ -x-y+z\ \ \ \ =0 \\ \ \ \ \ y\ \ \ \ +t=0 \end{cases}$.

Решение. а) Для представления подпространства $L = L_1 + L_2$ в виде линейной оболочки оба подпространства L_1 и L_2 тоже должны быть представлены в виде линейной оболочки. Решив СЛАУ для L_1, получим $L_1 = \{a_1(1;1;1;0), a_2(0;-1;-1;1)\}$. Согласно теории $L = L_1 + L_2 = L\{a_1, a_2, b_1, b_2\}$. Ранг набора $\{a_1, a_2, b_1, b_2\}$ равен 3, база $\{a_1, b_1, b_2\}$. Двойственная СЛАУ имеет вид $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ x_1=0 \\ x_4=0 \end{cases}$, ее решение $f_1(0;1;-1;0)$. Из этого следует $L : \{x_2 - x_3 = 0$, $\dim(L)=3$, базис $\{a_1, b_1, b_2\}$.

б) Задача решается в три этапа. На первом шаге, решая СЛАУ для L_1 и L_2, находим базисы этих подпространств. Получим $L_1 = L\{a_1(0;1;1;2)\}$, $L_2 = \{b_1(1;0;1;0)\}$. На втором шаге находим ранг и базу объединенного набора $\{a_1, b_1\}$, которая будет базисом подпространства $L = L_1 + L_2$. Имеем $\dim(L) = 2$, базис $\{a_1, b_1\}$. На третьем шаге, как в Примере 6, строится СЛАУ для подпространства L. Получим, $L: \begin{cases} x - z = 0 \\ 2y - t = 0 \end{cases}$.

Типовые задачи

1. Какие из множеств $M_1, M_2 \subset R^n$, выделяемых заданными условиями, являются подпространствами?
   а) $M_1 = \{x(x_1, x_2):\ x_1 = x_2 = 0\}$, $M_2 = \{x(x_1, x_2): 2|x_1| - x_2 = 0\}$.
   б) $M_1 = \{x(x_1, x_2):\ x_1 x_2 = 0\}$, $M_2 = \{x(x_1, x_2): x_1^2 + x_2^2 = 0\}$.
   в) $M_1 = \{x(x_1, x_2, x_3):\ x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$, $M_2 = \{x(x_1, x_2): \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_1}{x_2} = 2\}$.
   г) $M_1 = \{x(x_1, x_2):\ x_1 + 2x_2 = 1\}$, $M_2 = \{x(x_1, x_2): x_1^2 = x_2^2\}$.
   д) $M_1 = \{x(x_1, x_2):\ 2x_1 - 5x_2 = 0\}$, $M_2 = \{x = c(2;4) + t \cdot b(3;6)\}$, $t \in R$.
   е) $M_1 = \{x(x_1, x_2): \frac{x_2}{x_1} = 2\}$, $M_2 = \{x(x_1, x_2): x_1^2 - 2x_1 x_2 - 3x_2^2 = 0\}$.
   ж) $M_1 = \{x(x_1, x_2): 2x_1^2 - 3x_1 x_2 + 2x_2^2 = 0\}$, $M_2 = \{x(x_1, x_2, x_3):\ |x_1 + 3x_2 - 2x_3| = 0\}$.
   з) $M_1 = \{x(x_1, x_2, x_3):\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1\}$, $M_2 = \{x = a(2;1;3) + \lambda \cdot b(3;2;5)\}$, $\lambda \in R$.
   и) $M_1 = \{x = \lambda \cdot a(2;1;3) + \mu \cdot b(3;2;5)\}$, $\lambda, \mu \in R$, $M_2 = \{x(x_1, x_2, x_3):\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 \ge 0\}$.
   к) $M_1 = \{x = a(4;2;-6) + \lambda \cdot b(-6;-3;9)\}$, $\lambda \in R$, $M_2 = \{x(x_1, x_2, x_3): x_1 = x_2 = 2x_3\}$.
2. Найдите размерность и базис $\{a_1, a_2, ..., a_k\}$ подпространства L, заданного однородной СЛАУ.
   а) $L = \begin{cases} x + 3y - 2z = 0 \\ x - y + 4z = 0 \\ 5x + 7y + 2z = 0 \end{cases}$.
   б) $L = \begin{cases} 2x + 4y - 3z = 0 \\ 3x + y - z = 0 \\ 2x - 5y + 3z = 0 \end{cases}$.
   в) $L = \begin{cases} 2x - y - 3z = 0 \\ 3x - 4y - 8z = 0 \\ 3x + y - z = 0 \\ x + 2y + 2z = 0 \end{cases}$.
   г) $L = \begin{cases} 4x - 5y + z + 3t = 0 \\ 2x + y - z + t = 0 \\ 5x - y - z + 3t = 0 \\ x - 3y + z + t = 0 \end{cases}$.
   д) $L = \begin{cases} 5x + 5y + 6z - t - 5u = 0 \\ 2x - y + 3z + 2t - 2u = 0 \\ x - 3y + 2z + 3t - u = 0 \\ 3x + y + 4z + t - 3u = 0 \end{cases}$.
   е) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - 3x_2 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$.
   ж) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_5 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_4 + 5x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_3 - x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$.
   з) $\begin{cases} 2x_1 + x_3 + 4x_4 - 3x_5 = 0 \\ +2x_2 - 3x_3 + 2x_4 - x_5 = 0 \\ -5x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 13x_4 + 9x_5 = 0 \end{cases}$.
   и) $\begin{cases} x_1 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_5 = 0 \\ 4x_1 + 3x_2 + 7x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 0 \\ 3x_1 - 3x_2 + 14x_3 + 10x_4 + 2x_5 = 0 \end{cases}$.
   к) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 - x_5 = 0 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 + 4x_4 - 3x_5 = 0 \end{cases}$.
3. Найдите размерность и базис линейной оболочки $L = L\{a_1, a_2, ..., a_k\}$ набора векторов.
   а) $a_1(2; -3; 1)$, $a_2(4; 2; -3)$, $a_3(1; -3; 2)$.
   б) $a_1(3; 5; -5)$, $a_2(6; -4; 1)$, $a_3(2; 8; -7)$.
   в) $a_1(1; 2; 0; -3)$, $a_2(2; -1; 2; -3)$, $a_3(-2; 3; 1; -2)$, $a_4(2; -4; -1; 3)$.
   г) $a_1(3; -1; 0; -2)$, $a_2(0; 2; 2; 4)$, $a_3(3; 0; 1; 0)$, $a_4(6; 1; 3; 2)$.
   д) $a_1(1; 2; 3; 4)$, $a_2(2; 3; 4; 5)$, $a_3(3; 4; 5; 6)$, $a_4(4; 5; 6; 7)$.
   е) $a_1(1; -2; -1; 1)$, $a_2(0; 3; -2; 2)$, $a_3(-2; 1; 0; 0)$, $a_4(0; -3; 1; -1)$.

ж) $a_1 = 1 + x + x^2$, $a_2 = x + x^2 + x^3$, $a_3 = 1 + x^2 + x^3$, $a_4 = 1 + x + x^3$.

з) $a_1 = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 11 \end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix} -5 & -3 \\ -3 & 13 \end{pmatrix}$, $a_3 = \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 9 & 4 \end{pmatrix}$, $a_4 = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$.

4. В пространстве $V = P_n[x]$ многочленов $p(x)$ степени не выше n линейное подпространство L задано ограничениями на значения многочленов и их производных. Найдите базис и размерность подпространства L.

а) $n = 4$, $p(2) = 0$.

б) $n = 4$, $p'(2) = 0$.

в) $n = 4$, $p(1) = -p(-1)$, $p'(1) = 0$.

г) $n = 4$, $p'(-1) = 0$, $p(-x) = -p(x)$.

д) $n = 4$, $p(1) = 0$, $p'(-1) = 0$, $p''(1) = 0$.

е) $n = 5$, $p(1) = 0$, $p'(1) = 0$, $p(x) = p(-x)$.

ж) $n = 5$, $p'(1) = 0$, $p''(x) = -p''(-x)$.

5. Найдите базис и размерность подпространства L функций $f(x)$ в линейном функциональном пространстве V, заданного ограничениями на значения функций и их производных.

а) $V = L\{\sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x\}$, $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$, $f(\pi) = 0$.

б) $V = L\{1;\ \sin x;\ \sin 2x;\ \cos 2x\}$, $f'(\pi) = 0$, $f'(\pi/2) = 0$.

в) $V = L\{1, \sin^2 x, \cos^2 x, \sin 2x, \cos 2x\}$, $f(\pi/4) = -f(-\pi/4)$.

г) $V = L\{\sin 3x, \cos 3x, \sin 2x, \cos 2x\}$, $f(0) = 0$, $f'(\pi) = 0$.

д) $V = L\{1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x\}$, $f(x) = -f(-x)$, $f'(\pi) = 0$.

6. Множество $L \subset R^n$ состоит из всех векторов, координаты которых удовлетворяют определенным условиям. Покажите, что это множество является подпространством, укажите его размерность и базис.

а) $L \subset R^7$, координаты векторов с четными номерами равны нулю.

б) $L \subset R^9$, 1-я координата совпадает со 2-й, а 4-я с 7-й и 8-й.

в) $L \subset R^{10}$, координаты векторов с нечетными номерами равны нулю.

г) $L \subset R^6$, координаты векторов с четными номерами равны друг другу.

7. Линейную оболочку набора векторов $L = L(a_1, a_2, ..., a_k)$ задайте с помощью СЛАУ.

а) $a_1 = (1; 2; -2)$, $a_2 = (1; -1; 1)$.

б) $a_1 = (1; 2; -1)$, $a_2 = (1; 0; 1)$, $a_3 = (1; -1; 2)$.

в) $a_1 = (0; 5; -1)$, $a_2 = (2; -1; -1)$, $a_3 = (3; 1; -2)$.

г) $a_1 = (1; 1; 3)$, $a_2 = (2; 3; -1)$, $a_3 = (1; -1; -2)$.

д) $a_1 = (1; 2; -2; 3)$, $a_2 = (1; -1; 1; -1)$.

е) $a_1 = (1; -1; 0; -3)$, $a_2 = (0; 1; 2; -4)$, $a_3 = (1; 0; -2; 5)$.

ж) $a_1 = (2; -1; 5; 7)$, $a_2 = (4; -2; 7; 5)$, $a_3 = (2; -1; 1; -5)$.

з) $a_1 = (1; 1; 5; 3; 1)$, $a_2 = (2; 5; -1; 4; 4)$, $a_3 = (1; 1; 0; 1; 0)$.

и) $a_1 = (1; 1; -3; -3; -2)$, $a_2 = (1; 2; -2; 2; 1)$, $a_3 = (-2; -3; 5; 1; 1)$, $a_4 = (0; 1; 1; 5; 3)$.

8. Найдите в R^n размерности суммы и пересечения подпространств L_1 и L_2.

а) $n = 5$, $L_1 : \begin{cases} x_1 \quad - x_3 + x_4 - x_5 = 0 \\ \quad x_2 - x_3 \qquad\quad = 0 \end{cases}$, $L_2 : \begin{cases} x_1 - x_4 = 0 \\ x_2 - x_5 = 0 \end{cases}$.

б) $L_1 = L\{a_1(1;2;0;1), a_2(0;1;-1;2), a_3(1;0;1;-2)\}$, $L_2 = L\{b_1(2;1;1;2), b_2(1;0;1;2), b_3(2;1;-1;0)\}$.

в) $n = 4$, $L_1 = \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$, $L_2 = L\{a_1(-1; 3; 3; 1), a_2(6; 2; -3; 4)\}$.

г) $n=5$, $L_1:\begin{cases} x_1 \quad +x_3+\ 2x_4+x_5=0 \\ x_1+x_2-x_3+x_4 \quad =0 \end{cases}$, $L_2:\begin{cases} \quad x_2-x_3-x_4+x_5=0 \\ x_1 \quad +2x_3 \ +2x_5=0 \end{cases}$.

д) $L_1=L\{a_1(1;2;1;1),\ a_2(2;1;-1;2),\ a_3(1;1;1;-2)\}$, $L_2=L\{b_1(2;1;1;2),\ b_2(1;0;1;2),\ b_3(2;-1;3;6)\}$.

е) $n=4$, $L_1=\begin{cases} 2x_1-\ x_2+2x_3-x_4=0 \\ \ x_1-2x_2+2x_3+x_4=0 \end{cases}$, $L_2=L\{a_1(6;2;-3;4),a_2(1;2;-1;2)\}$;

9. Для подпространства $L=L_1\cap L_2$ пространства R^n найдите размерность и базис. Составьте однородную СЛАУ, задающую L, в которой число уравнений равно рангу.

а) $n=4$, $L_1:\begin{cases} x+y-3z+\ t=0 \\ 2x-y+\ z-2t=0 \end{cases}$, $L_2:\begin{cases} x+2y-2z-t=0 \\ x-\ \ y+\ \ z-t=0 \\ x+\ \ y-\ \ z-t=0 \end{cases}$.

б) $n=4$, $L_1:\begin{cases} x+\ y+2z \qquad =0 \\ 2x+2y+\ z-3t=0 \end{cases}$, $L_2:\begin{cases} x-2y-2z-t=0 \\ x-\ \ y+\ \ z+t=0 \\ x+\ \ y+\ \ z-t=0 \end{cases}$.

в) $n=4$, $L_1:\begin{cases} x+y-\ z+2t=0 \\ 4x+y-\ z+3t=0 \\ \quad 3y-3z+5t=0 \end{cases}$, $L_2:\begin{cases} 2x-\ y+\ \ z-\ t=0 \\ 3x \qquad\qquad +\ t=0 \\ -3x+3y-3z+4t=0 \end{cases}$.

г) $n=4$, $L_1=\begin{cases} x+\ \ y+z-\ \ t=0 \\ 2x+\ \ y+z \qquad =0 \\ 3x+2y-z+2t=0 \end{cases}$, $L_2=\begin{cases} x+2y-2z+\ \ t=0 \\ x-\ \ y+3z-\ \ t=0 \\ x-2y+\ \ z+2t=0 \end{cases}$.

д) $n=4$, $L_1=L\{a_1(1;0;-1;0),a_2(0;-1;0;1)\}$, $L_2=\begin{cases} x_1-x_4=0 \\ x_2-x_3=0 \end{cases}$.

е) $n=4$, $L_1=L\{a_1(1;2;2;0),a_2(-1;3;-2;1)\}$, $L_2=\begin{cases} x_1-x_4=0 \\ x_2-x_3=0 \end{cases}$.

ж) $n=4$, $L_1=L\{a_1(1;-1;2;-1),a_2(2;1;-3;1)\}$, $L_2=L\{b_1(0;3;-7;3),b_2(4;-1;1;-1)\}$.

з) $n=5$, $L_1=L\{a_1(0;1;1;1;0),a_2(1;0;0;0;1),a_3(1;1;1;0;0)\}$,
$L_2=L\{b_1(1;1;1;1;1),b_2(-1;0;0;0;-1)\}$.

10. Для подпространства $L=L_1+L_2$ пространства R^n найдите его размерность и базис. Составьте однородную СЛАУ, задающую L, в которой число уравнений равно рангу.

а) $L_1=L\{a_1(1;1;1;0),a_2(0;-1;-1;1)\}$, $L_2=L\{b_1(1;0;0;0),b_2(0;0;0;2)\}$.

б) $L_1=L\{a_1(1;2;2;3),a_2(-1;3;-2;0)\}$, $L_2=L\{b_1(1;2;3;1),b_2(-2;1;-3;-1)\}$.

в) $L_1=L\{a_1(1;-1;2;-1),a_2(2;1;-3;1)\}$, $L_2=L\{b_1(0;3;-7;3),b_2(4;-1;1;-1)\}$.

г) $L_1=L\{a_1(0;1;1;1;0),a_2(1;0;0;0;1),a_3(1;1;1;0;0)\}$,
$L_2=L\{b_1(1;1;1;1;1),b_2(-1;0;0;0;-1),b_3(0;1;0;1;0)\}$.

д) $L_1=L\{a_1(1;0;-1;0),a_2(0;-1;0;1)\}$, $L_2=\begin{cases} x_1+x_4=0 \\ x_2+x_3=0 \end{cases}$.

е) $n=4$, $L_1:\begin{cases} x+2y-2z-t=0 \\ x-\ \ y+\ \ z-t=0 \end{cases}$, $L_2:\begin{cases} 2x-y \qquad -t=0 \\ 3x-y-z-t=0 \\ \ x-y+z-t=0 \end{cases}$.

ж) $n=4$, $L_1:\begin{cases} x+\ y\ -z \qquad =0 \\ \qquad y\ -z \qquad =0 \\ 3x+2y-z-t=0 \end{cases}$, $L_2:\begin{cases} x+2y-3z+\ \ t=0 \\ x-\ \ y+3z-2t=0 \\ 4x-\ \ y+6z-5t=0 \end{cases}$.

з) $n=4$, $L_1:\begin{cases} x+y-z \qquad =0 \\ \quad y-z \qquad =0 \\ \quad 2y \qquad -t=0 \end{cases}$, $L_2:\begin{cases} x \qquad -z+t=0 \\ -x-y+z \qquad =0 \\ \quad y \qquad +t=0 \end{cases}$.

Дополнительные задачи

11. Пусть СЛАУ $Ax=b$ имеет решения при некотором $b\in R^m$, $b\neq 0$. Верны ли следующие утверждения (матрица A размером $(m\times n)$):

а) Система $Ax=\overline{0}$ обязательно имеет ненулевое решение.

б) Система $Ax=\overline{0}$ не имеет ненулевых решений.

в) Система $Ax=\overline{0}$ может не иметь ненулевых решений.

г) Система $Ax=\overline{0}$ может иметь ненулевое решение.

12. Пусть СЛАУ $Ax=b$ не имеет решений при некотором $b\in R^m$, $b\neq 0$. Верны ли следующие утверждения (матрица A размером $(m\times n)$):

   а) Система $Ax=\overline{0}$ обязательно имеет ненулевое решение.

   б) Система $Ax=\overline{0}$ не имеет ненулевых решений.

   в) Система $Ax=\overline{0}$ может не иметь ненулевых решений.

13. Пусть СЛАУ $Ax=\overline{0}$ имеет только нулевое решение. Верны ли следующие утверждения (матрица A размером $(m\times n)$):

   а) Система $Ax=b$ обязательно имеет решение при любом $b\in R^m$.

   в) Существует $b\in R^m$, для которого система $Ax=b$ не имеет решений.

14. Пусть СЛАУ $Ax=\overline{0}$ имеет ненулевое решение. Верны ли следующие утверждения (матрица A размером $(m\times n)$):

   а) Система $Ax=b$ обязательно имеет решение при любом $b\in R^m$.

   б) Система $Ax=b$ может иметь решение при любом $b\in R^m$.

   в) Обязательно существует $b\in R^m$, для которого система $Ax=b$ не имеет решений.

   г) Система $Ax=b$ при некотором $b\in R^m$ имеет единственное решение.

15. Как соотносятся следующие утверждения (матрица A размером $(m\times n)$):

   а) (1) СЛАУ $Ax=\overline{0}$ имеет только нулевое решение;
   (2) Существует $b\in R^n$, для которого система $Ax=b$ не имеет решения.

   б) (1) СЛАУ $Ax=\overline{0}$ не имеет ненулевых решений;
   (2) СЛАУ $Ax=b$ имеет решение при любом $b\in R^m$.

   в) (1) СЛАУ $Ax=b$ имеет решения при всех $b\in R^m$;
   (2) Система $Ax=\overline{0}$ имеет ненулевое решение.

   г) (1) СЛАУ $Ax=b$ имеет единственное решение;
   (2) Система $Ax=\overline{0}$ имеет ненулевое решение.

   д) (1) СЛАУ $Ax=b$ не имеет решения при некотором $b\in R^m$;
   (2) Система $Ax=\overline{0}$ имеет ненулевое решение.

16. Укажите базис и размерность подпространства $P_3[x]$ многочленов степени не выше трех, имеющих корень $x=1$.

17. Укажите базис и размерность подпространства $P_4[x]$ многочленов степени не выше четырех, производная которых является четной функцией.

18. Чему равна размерность подпространства L симметричных квадратных матриц третьего порядка (для которых $a_{jk}=a_{kj}$)? Укажите его базис.

19. Чему равна размерность подпространства L симметричных квадратных матриц третьего порядка со следом нуль? Укажите его базис.

20. Чему равна размерность подпространства L антисимметричных квадратных матриц третьего порядка (для которых $a_{jk}=-a_{kj}$)? Укажите его базис.

21. Приведите пример двух двумерных подпространств в пространстве матриц (2×2), которые пересекаются только в нуле.

22. Приведите пример такого трехмерного подпространства L в пространстве квадратных матриц (2×2), которое не содержит матрицу A.

   а) $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. б) $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$.

23. Приведите пример подпространства L в пространстве квадратных матриц размером (3×3), не содержащего ненулевых симметричных матриц.
24. Является ли линейным подпространством множество матриц L размером $(m\times n)$, являющихся решением матричного уравнения $AX=\overline{0}$ (где A и $\overline{0}$ – матрицы подходящего размера)?
25. Является ли линейным подпространством множество векторов, являющихся одновременно решением двух СЛАУ: $Ax=b$ и $Cx=b$ ($A\neq C$)?

Ответы на типовые задачи

1. а) M_1 является, M_2 не является.
   б) M_1 не является, M_2 является.
   в) M_1 является, M_2 не является.
   г) M_1 не является, M_2 не является.
   д) M_1 является, M_2 является.
   е) M_1 не является, M_2 не является.
   ж) M_1 является, M_2 является.
   з) M_1 не является, M_2 не является.
   и) M_1 является, M_2 не является.
   к) M_1 является, M_2 является.

2. а) $L=L\{a_1(-5;3;2)\}$, $\dim(L)=1$.
   б) $L=\{\overline{0}\}$, $\dim(L)=0$.
   в) $L=L\{a_1(4;-7;5)\}$, $\dim(L)=1$.
   г) Например, $L=L\{a_1(-4;1;0;7),a_2(2;0;1;-3)\}$, $\dim(L)=2$.
   д) Например, $L=L\{a_1(-7;1;5;0;0),a_2(5;0;-4;1;0),a_3(1;0;0;0;1)\}$, $\dim(L)=3$.
   е) $L=L\{a_1(6;2;-3;4)\}$, $\dim(L)=1$.
   ж) Например, $L=L\{a_1(-1;0;2;3;0),a_2(0;0;2;5;-1)\}$, $\dim(L)=2$.
   з) Например, $L=L\{a_1(-1;3;2;0;0),a_2(0;7;4;-1;0),a_3(0;5;3;0;1)\}$, $\dim(L)=3$.
   и) Например, $L=L\{a_1(-6;4;0;3;0),a_2(0;2;-6;9;0),a_3(0;2;0;1;-2)\}$, $\dim(L)=3$.
   к) Например, $L=L\{a_1(0;0;1;5;7),a_2(2;-5;0;-10;-21)\}$, $\dim(L)=2$.

3. а) Например, $L=L\{a_1,a_2,a_3\}$, $\dim(L)=3$.
   б) Например, $L=L\{a_1,a_2\}$, $\dim(L)=2$.
   в) Например, $L=L\{a_1,a_2,a_3\}$, $\dim(L)=3$.
   г) Например, $L=L\{a_1,a_2\}$, $\dim(L)=2$.
   д) Например, $L=L\{a_1(1;2;3;4),\ a_2-a_1=b(1;1;1;1)\}$, $\dim(L)=2$.
   е) Например, $L=L\{a_1,a_2,a_3\}$, $\dim(L)=3$.
   ж) $L=L\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$, $\dim(L)=4$.
   з) Например, $L=L\left\{b_1\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\ b_2\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix},\ b_3\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\right\}$, $\dim(L)=3$.

4. а) Например, $L=L\{x-2,x(x-2),x^2(x-2),x^3(x-2)\}$, $\dim(L)=4$.
   б) Например, $L=L\{1,(x-2)^2,(x-2)^3,(x-2)^4\}$, $\dim(L)=4$.
   в) Например, $L=L\{x^2-2x-1,\ x^3-3x,x^4-4x-1\}$, $\dim(L)=3$.
   г) Например, $L=L\{x^3-3x,x^5-5x\}$, $\dim(L)=2$.
   д) Например, $L=L\{x^3-3x^2-9x+11,\ x^4-6x^2-8x+13\}$, $\dim(L)=2$.
   е) Например, $L=L\{1-2x^2+x^4\}$, $\dim L=1$.
   ж) Например, $L=L\{1,\ x^3-3x,\ x^5-5x\}$, $\dim(L)=3$.

5. а) $L=L\{\sin x,\ 2\cos x-\sin 2x+2\cos 2x\}$, $\dim L=2$.
   б) $L=L\{1,\cos 2x\}$, $\dim L=2$.
   в) $L=L\{\sin 2x,\cos 2x\}$, $\dim(L)=2$.
   г) $L=L\{\cos 2x-\cos 3x,\ 3\sin 2x+2\sin 3x\}$, $\dim L=2$.
   д) $L=L\{2\sin x+\sin 2x\}$, $\dim L=1$.

6. а) $L=L\{$ (1;0;0;0;0;0;0), (0;0;1;0;0;0;0), (0;0;0;0;1;0;0), (0;0;0;0;0;0;1) $\}$, $\dim L = 4$.
   б) $L=L\{$ (1;1;0;0;0;0;0;0;0;0), (0;0;1;0;0;0;0;0;0), (0;0;0;1;0;0;1;1;0), (0;0;0;0;1;0;0;0;0), (0;0;0;0;0;1;0;0;0), (0;0;0;0;0;0;0;0;1) $\}$, $\dim L = 6$.
   в) $L=L\{$ (0;1;0;0;0;0;0;0;0;0), (0;0;0;1;0;0;0;0;0;0), (0;0;0;0;0;1;0;0;0;0), (0;0;0;0;0;0;0;1;0;0), (0;0;0;0;0;0;0;0;0;1) $\}$, $\dim L = 5$.
   г) $L=L\{$ (1;0;0;0;0;0), (0;0;1;0;0;0), (0;0;0;0;1;0), (0;1;0;1;0;1) $\}$, $\dim L = 4$.

7. а) $L:\{x_2 + x_3 = 0$.
   б) $L:\{x_1 - x_2 - x_3 = 0$.
   в) $L:\{3x_1 + x_2 + 5x_3 = 0$.
   г) $L\{0\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + 0\cdot x_3 = 0$ или пустая СЛАУ.
   д) $L:\begin{cases} x_1 \quad - 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 \quad = 0 \end{cases}$.
   е) $L:\{x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0$.
   ж) $L:\begin{cases} 8x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 \quad = 0 \end{cases}$.
   з) $L:\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 - 3x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$.
   и) $L:\begin{cases} 2x_1 \quad + x_3 + x_4 - 2x_5 = 0 \\ 2x_1 - x_2 \quad - x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 \quad + x_5 = 0 \end{cases}$.

8. а) $\dim(L_1 \cap L_2) = 1$, $\dim(L_1 + L_2) = 5$.
   б) $\dim(L_1 \cap L_2) = 2$, $\dim(L_1 + L_2) = 4$.
   в) $\dim(L_1 \cap L_2) = 2$, $\dim(L_1 + L_2) = 2$.
   г) $\dim(L_1 \cap L_2) = 1$, .
   д) $\dim(L_1 \cap L_2) = 1$, $\dim(L_1 + L_2) = 4$.
   е) $\dim(L_1 \cap L_2) = 1$, $\dim(L_1 + L_2) = 3$.

9. а) $L:\{x = y = z = t$, $\dim(\mathrm{L}) = 1$, $L = L\{f_1(1;1;1;1)\}$.
   б) $L:\{x = y = t = -z$, $\dim(L) = 1$, $L = L\{f_1(-1;-1;1;-1)\}$.
   в) $L:\begin{cases} 5x - y + z \quad = 0 \\ 3x \quad + t = 0 \end{cases}$, $\dim(\mathrm{L}) = 2$, $L = L\{f_1(1;0;-5;-3), f_2(0;1;1;0)\}$.
   г) $L:\begin{cases} x + y = 0 \\ x + z = 0 \\ x + t = 0 \end{cases}$, $\dim(\mathrm{L}) = 1$, $L = L\{f_1(-1;1;1;1)\}$.
   д) $L:\{x_1 = -x_2 = -x_3 = x_4$, $\dim(L) = 1$, $L = L\{f_1(1;-1;-1;1)\}$.
   е) $L:\{x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$, $\dim(L) = 0$.
   ж) $L:\begin{cases} x_2 - x_4 \quad = 0 \\ x_1 + 7x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$, $\dim(L) = 2$, $L = L\{a_1(1;-1;2;-1), a_2(2;1;-3;1)\}$.
   з) $L:\begin{cases} x_1 - x_5 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \end{cases}$, $\dim(L) = 2$, $L = L\{a_1(1;0;0;0;1), a_2(0;1;1;1;0)\}$.

10. а) $L = L(a_1, b_1, b_2)$, $\dim(L) = 3$, $L:\{x_2 - x_3 = 0$.
   б) $L = L(a_1, a_2, b_1, b_2)$, $\dim(L) = 4$, $L:\{0\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + 0\cdot x_3 + 0\cdot x_4 = 0$.
   в) $L = L_1 = L_2 = L(a_1, a_2)$, $\dim(L) = 2$, $L:\begin{cases} x_1 + 3x_3 + 7x_4 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \end{cases}$.
   г) $L = L(a_1, a_2, a_3, b_3)$, $\dim(L) = 4$, $L:\{x_1 - x_2 + x_4 - x_5 = 0$.
   д) $L = L\{a_1, a_2, b(1;-1;-1;1)\}$, $\dim(L) = 3$, $L:\{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$.
   е) $L\{a_1(0;1;1;0), a_2(1;0;0;1), a_3(1;1;0;0)\}$, $\dim(L) = 3$, $L:\{x - y + z - t = 0$.
   ж) $L = L\{b_1(0;1;1;1), b_2(1;-1;0;1)\}$, $\dim(L) = 2$, $L:\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x + z - t = 0 \end{cases}$.
   з) $L = L\{a_1(0;1;1;2), b_1(1;0;1;0)\}$, $\dim(L) = 2$, $L:\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2y - t = 0 \end{cases}$.

Ответы на дополнительные задачи

11. а) Неверно. б) Неверно. в) Верно. г) Верно.
12. а) Неверно. б) Неверно. в) Верно.
13. а) Неверно. б) Неверно.

14. а) Неверно. б) Верно. в) Неверно. г) Неверно.
15. а) Не зависят друг от друга. б) Не зависят друг от друга.
в) Не зависят друг от друга. г) Противоречат друг другу.
д) Не зависят друг от друга.
16. $p_1(x) = x - 1,\ p_2(x) = (x-1)^2,\ p_3(x) = (x-2)^3,\ dim(L) = 3$
17. $p_1(x) = 1,\ p_2(x) = x,\ p_3(x) = x^3,\ dim(L) = 3$
18. $dim(L) = 6$. Пример базиса: $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$

$A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ A_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ A_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$
19. $dim(L) = 5$. Пример базиса: $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$

$A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\quad A_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$
20. $dim(L) = 3$. Пример базиса: $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$
21. Например, $L_1 = L\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$ и $L_2 = L\left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\}$.
22. а) Например, $L: \{a_{22} = 0$. б) Например, $L: \{a_{11} = a_{22}$.
23. Например, подпространство антисимметричных матриц.
24. Является.
25. Если $b = \overline{0}$, то является, если $b \neq \overline{0}$, то не является.