Список вопросов к Теоретической Контрольной №2

1. Какая СЛАУ называется однородной? Сформулировать и доказать теорему о существовании нетривиальных решений у однородной СЛАУ.
2. Дать определение линейного пространства с перечислением всех аксиом. Доказать единственность нуля и единственность противоположного элемента в линейном пространстве.
3. Дать определение линейной зависимости набора векторов. Дать определение понятия «вектор x выражается через набор F». Сформулировать и доказать необходимое и достаточное условие линейной зависимости набора векторов.
4. Дать определение линейной независимости без отрицания. Сформулировать и доказать соотношение между линейной независимостью набора векторов и единственностью разложения по набору.
5. Дать определение максимального линейно независимого поднабора в наборе. Доказать, что если при добавлении вектора x к линейно независимому набору F набор перестает быть линейно независимым, то вектор x выражается через набор F.
6. Дать определение понятия «набор G выражается через набор F». Доказать, что если G выражается через F, а H выражается через G, то H выражается через F.
7. Дать определение базы множества векторов (принятое в данном курсе). Доказать, что ЛНЗ набор F является базой множества M тогда и только тогда, когда при добавлении к F любого вектора из множества M набор становится линейно зависимым.
8. Сформулировать и доказать теорему о двух наборах. Какие две теоремы существенно используются в этом доказательстве?
9. Доказать утверждение о том, что все базы одного и того же множества векторов имеют одинаковый размер.
10. Доказать теорему о существовании базы у конечного набора векторов.
11. Сформулировать и доказать теорему о связи свойств базы множества векторов с рангом этого множества.
12. Сформулировать и доказать теорему о сравнении рангов двух наборов.
13. Дать определение размерности линейного пространства, определение конечномерного пространства и определение базиса пространства. Доказать теорему о существовании базиса в конечномерном пространстве.
14. Сформулировать и доказать одно из двух достаточных условия того, что набор из n векторов в n-мерном линейном пространстве является базисом.
15. Дать определение координат вектора в данном базисе. Доказать единственность разложения вектора по базису, не ссылаясь на другие теоремы.
16. Дать определение линейного подпространства. Сформулировать и доказать необходимое условие того, что множество является линейным подпространством.
17. Доказать, что если для двух линейных подпространств L_1 и L_2 выполнены условия $L_1 \subseteq L_2$ и $\dim(L_1) = \dim(L_2)$, то $L_1 = L_2$.
18. Дать определение линейной оболочки $L\{M\}$ множества векторов M. Доказать, что линейная оболочка множества векторов является линейным подпространством, и что размерность линейной оболочки равна рангу исходного множества.
19. Дать определение пересечения произвольного числа линейных подпространств. Доказать, что пересечение линейных подпространств является линейным подпространством.
20. Доказать, что $L\{M\}$ является пересечением всех линейных подпространств, содержащих M.
21. Дать определение суммы конечного числа линейных подпространств. Доказать, что сумма линейных подпространств является линейным подпространством.
22. Дать основное определение прямой суммы конечного числа линейных подпространств (принятое в курсе). Дать другое определение прямой суммы (необходимое и достаточное условие) и доказать его эквивалентность основному определению.
23. Сформулировать и доказать необходимое и достаточное условие того, что сумма двух линейных подпространств является прямой суммой (использующее пересечение ЛПП).
24. Сформулировать и доказать необходимое и достаточное условие (в терминах их размерностей) того, что сумма линейных подпространств является прямой суммой. Сформулировать формулу Грассмана для двух линейных подпространств.

25. Дать определение изоморфизма двух линейных пространств. Сформулировать теорему об изоморфизме линейных пространств.
26. Доказать теорему о том, что множество решений однородной СЛАУ является линейным подпространством. Сформулировать обратную теорему.
27. Дать определение произведения матриц. Сформулировать все свойства произведения матриц.
28. Дать определение строчного и столбцового рангов матрицы размером $m \times n$. На какой теореме основывается определение ранга матрицы? На каком утверждении основывается практическое вычисление ранга матрицы методом Гаусса?
29. Дать определение транспонированной матрицы. Как операция транспонирования связана с умножением матриц?
30. Дать определение квадратной, скалярной, единичной и обратной матриц. Доказать, что если у матрицы существуют правая обратная и левая обратная, то они совпадают. Доказать, что если существуют A^{-1} и B^{-1}, то $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
31. Дать определение невырожденной матрицы. Доказать, что необходимым и достаточным условием существования обратной к матрице A является ее невырожденность.
32. Как строки и столбцы произведения матриц записываются в виде линейных комбинаций строк и столбцов сомножителей? Сформулировать и доказать теорему о ранге произведения матриц.
33. Сформулировать и доказать теорему о ранге произведения матриц в случае, когда одна из матриц – квадратная невырожденная.
34. Сформулировать и доказать теорему Кронекера-Капелли для СЛАУ и обобщенную теорему Кронекера-Капелли для матричного уравнения.
35. Дать определение суммы Минковского. Дать определение линейного многообразия $H = c + L$. Докажите, что направляющее пространство L совпадает с множеством $\{z = x - y,\ x, y \in H\}$.
36. Доказать теорему о том, что множестве решений произвольной СЛАУ является многообразием и обратную теорему о СЛАУ для многообразия.
37. Доказать теорему о том, что пересечение линейных многообразий либо пусто, либо является линейным многообразием.
38. Дать определение параллельных и скрещивающихся линейных многообразий.
39. Сформулировать и доказать необходимое и достаточное условие непустого пересечения многообразий, заданных параметрически.
40. Сформулировать и доказать необходимое и достаточное условие пустого пересечения многообразий, заданных параметрически.
41. Сформулировать и доказать (в терминах размерностей) необходимое и достаточное условие параллельности непересекающихся многообразий.
42. Сформулировать и доказать (в терминах размерностей) необходимое и достаточное условие того, что непересекающиеся линейные многообразия скрещиваются.