BASİT EŞİTSİZLİKLER

$x = y$,,, $x \neq y$,,, $x < y$

$x \leq y$,,, $x > y$,,, $x \geq y$

ÖZELLİKLER

1) $x < y \Leftrightarrow x \pm m < y \pm m$

2) $x < y \Leftrightarrow x.m < y.m \quad (m > 0)$

3) $x < y \Leftrightarrow x.m > y.m \quad (m < 0)$

4) $x < y$ ve $m < n \Rightarrow x + m < y + n$

5) $x < y$ ve $m < n \Rightarrow x.m < y.n \quad (m, n \in R^+)$

6) $x < y$ ve $y < z \Rightarrow x < z$

7) $x.y > 0$ ise $x < y \Leftrightarrow \frac{1}{x} > \frac{1}{y}$

8) $x.y < 0$ ise $x < y \Leftrightarrow \frac{1}{x} < \frac{1}{y}$

9) $0 < m < n \Rightarrow 0 < m^a < n^a \quad (a \in Z^+)$

10) a) $a < b < 0 \Rightarrow a^{2n-1} < b^{2n-1} < 0 \; (n \in Z^+)$

b) $a < b < 0 \Rightarrow a^{2n} > b^{2n} > 0 \; (n \in Z^+)$

11) $0 < x < 1 \Rightarrow 0 < x^n < x < 1 \quad (n \in Z^+)$

12) $-1 < x < 0$ veya $x > 1$ ise $x^n > x \; (n \in Z^+)$

13) $\left.\begin{array}{l} x < -1 \Rightarrow x^{2n-1} < x \\ x < -1 \Rightarrow x^{2n} > x \end{array}\right\} n \in Z^+$

14) Özel olarak

$x^2 < x \Rightarrow 0 < x < 1$

$x^2 > x \Rightarrow x > 1$ veya $x < 0$

$x^3 < x \Rightarrow 0 < x < 1$ veya $x < -1$

$x^3 > x \Rightarrow -1 < x < 0$ veya $x > 1$

$|x| > x$ ise $x<0$ ve $x^2 > |x| > x$ ise $x<-1$

GENEL ÖRNEKLER

ÖRNEK(1)

2(x–1) + 3(x+9)>0 eşitsizliğini sağlayan negatif tamsayıların toplamı nedir?

ÇÖZÜM:

2(x–1) + 3(x+9)>0

2x-2+3x+27>0

5x+25>0

5x>-25

x>-5

x=-4,-3;-2,-1 olur.

Bunların toplamı da -10 dur.

ÖRNEK(2)

3<2x+1≤11 eşitsizliğini sağlayan tamsayıların toplamı nedir?

ÇÖZÜM:

3<2x+1≤11

3-1<2x≤11-1

2<2x≤10

1<x≤5

x=2,3,4,5 bulunur.

Buradan 2+3+4+5=14 eder.

ÖRNEK(3)

$\frac{4}{21} < \frac{4}{3x} < \frac{8}{9}$ eşitsizliğini sağlayan kaç x∈Z vardır?

ÇÖZÜM:

$\frac{4}{21} < \frac{4}{3x} < \frac{8}{9}$ eşitsizliğini önce ters çevirelim.

$$\frac{21}{4} > \frac{3x}{4} > \frac{9}{8}$$

$$4.\frac{21}{4} > 4.\frac{3x}{4} > 4.\frac{9}{8}$$

$$21 > 3x > \frac{9}{2}$$

$$\frac{21}{3} > \frac{3x}{3} > \frac{9}{2.3}$$

$$7 > x > \frac{3}{2}$$

x=2,3,4,5,6 olur. Yani 5 tane x vardır.

ÖRNEK(4)

x–2y+4=0 ve 2<x<8 ise y'nin en küçük tamsayı değeri kaçtır?

ÇÖZÜM:

Bu tür sorularda aralık içinde verilen değişken tamsayı değilse önce istenen diğer değişken bulunur, sonra değer verilir. Eğer aralık içinde verilen değişken tamsayı ise önce aralık içinden değerler alınır sonra istenen değişken bulunur. Bu sorda aralık içindeki değişken tamsayı değil o yüzden önce istenen diğer değişken aralığı bulunur.

x–2y+4=0 → x = 2y – 4

2<x<8

2<2y-4<8

2+4<2y<8+4

$\frac{6}{2} < \frac{2y}{2} < \frac{12}{2}$

3<y<6

o halde bu aralıktaki y tamsayıları 4 ve 5 tir. En küçüğü ise 4 olur.

ÖRNEK(5)

$\frac{2}{3} < \frac{x+4}{3} < 3$ eşitsizliğini sağlayan en küçük x∈Z kaçtır?

ÇÖZÜM:

$$\frac{2}{3} < \frac{x+4}{3} < 3$$

$$3.\frac{2}{3} < 3.\frac{x+4}{3} < 3.3$$

$$2 < x+4 < 9$$

$$2-4 < x+4-4 < 9-4$$

$$-2 < x < 5$$

x'in alacağı değerler -1,0,1,2,3,4 bunların en küçüğü de -1 dir.

ÖRNEK(6)

$m, n \in Z$, $m<0$ ve $m.(3n-1)<11.m$ ise en küçük $n \in Z$ kaçtır?

ÇÖZÜM:

Bir eşitsizliğin her iki tarafı negatif bir sayıyla çarpılır veya bölünürse eşitsizlik yön değiştirir.
O halde

$$\frac{m.(3n-1)}{m} > \frac{11.m}{m}$$

3n-1>11

3n>12

n>4 olur.

O halde en küçük $n \in Z$ değeri 5 olur.

ÖRNEK(7)

$$\left.\begin{aligned} -5 < 2x+1 \le 9 \\ -5 < 2-x \le 1 \end{aligned}\right\} \text{ sisteminin Ç.K=?}$$

ÇÖZÜM:

Her iki eşitsizlik ayrı ayrı çözülür.

-5 < 2x+1 ≤9

-5-1 <2x+1-1≤9-1

-6 < 2x ≤8

$$\frac{-6}{2} < \frac{2x}{2} \le \frac{8}{2}$$

-3<x≤4 ……(1)

-5< 2-x ≤1

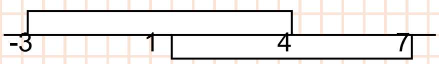
-5-2 < -x ≤ 1-2

-7 < -x ≤ -1

(her taraf -1 ile çarpılırsa)

7> x ≥ 1 …….(2)

(1) ve (2) yi sayı doğrusu üzerinde gösterirsek



görüldüğü gibi ortak bölge 1 ve 4 arasıdır. 1 ve 4 eşitsizliklerde dahil olduğunda çözüm aralığımız. [1,4] olur.

ÖRNEK(8)

2<x<5 ve –1<y<3 eşitsizlikleri veriliyor. 2x–3y ifadesinin en küçük tamsayı değeri nedir?

ÇÖZÜM:

Verilen aralıklardaki değişkenler tamsayıların tamsayı olduğu söylenmemiş o halde önce (2x-3y) bulunur sonra değer verilir.

2<x<5	-1<y<3
2.2 < 2x < 5.2	-3.(-1) > -3.y > 3.(-3)
4 < 2x < 10	-9 <-3y < 3

bu eşitsizlikler atl alta toplanırsa

4 < 2x < 10

-9 <-3y < 3

-5 < 2x-3y < 13 buradan

(2x-3y)'nin en küçük tamsayı değeri -4 bulunur.

ÖRNEK(9)

x+4<3x–8<2x+3 eşitsizliğini sağlayan tamsayılar kaç tanedir?

ÇÖZÜM:

Bu tür sorularda ilkin bakılır, eğer x'ler tek hamlede ortaya toplanabilirse yapılır, aksi halde iki ayrı eşitsizlik şeklinde çözüme gidilir.
Bu soruda tek hamlede x'ler ortaya toplanmıyor.(örneğin her üç tarafa –x eklesek en sağda yine bir x kalıyor)bu yüzden iki eşitsizlik yöntemi uygulanır.

x+4< 3x–8< 2x+3

x+4 < 3x-8 ve 3x-8 < 2x+3 eşitsizlikleri çözülür.

x+4 < 3x-8	3x- 8 < 2x+3
4+8 < 3x-x	3x-2x < 3+8
12 < 2x	x < 11
6 < x	

buradan 6 < x < 11 bulunur. elde edilen x'ler ise 7,8,9,10 olur. Yani 4 tane.

ÖRNEK(10)

x,y∈Z ve –2<x<5 , 0<y<4 ise 3x–2y'nin alabileceği en büyük ve en küçük değerlerin toplamı nedir?

ÇÖZÜM:

Burada aralıkta verilen değişkenler tamsayı olduğundan değişkenlere değerler vererek isteneni buluruz.

3x-2y'nin en büyük olması için x'e büyük ve y'ye de küçük değer vermeliyiz.

x=4 ve y=1 seçilirse → 3.4-2.1=10 olur.

3x-2y'nin en küçük olması için x'e küçük ve y'ye de büyük değer verilir.

x=-1 ve y= 3 seçilirse → 3.(-1)-2.3 = -9 olur.

Sonuç : -9+10 = 1 dir.

ÖRNEK(11)

–3<x≤5 ve –4<y≤7 ise x.y hangi aralıktadır?

ÇÖZÜM:

Önce sınırlar aşağıdaki gibi çarpılarak elde edilebilecek max-min değerler bulunur.

–3 < x ≤ 5

–4 < y ≤ 7

-20 12 35 -21

elde edilen değerlerin en küçüğü -21 ve en büyüğü 35 olduğundan

-21 < x.y ≤ 35 bulunur.

(<.< , <.≤ çarpımlarından < elde edilir. ≤.≤ çarpımından ≤ elde edilir.)

ÖRNEK(12)

x,y∈Z olmak üzere $\left.\begin{matrix}-3<x<2\\-8<y<-1\end{matrix}\right\}$ eşitsizlikleri veriliyor. x^3-y^2 ifadesinin alabileceği en küçük değer kaçtır?

ÇÖZÜM:

x^3-y^2 ifadesinin küçük olması için, x^3'ün küçük, y^2'nin büyük olması gerekir.

x ve y tamsayı oldukları için değer vererek x^3 ve y^2 yi buluruz.

x= -2 için $x^3 = (-2)^3 = -8$

y=-7 için $y^2 = (-7)^2 = 49$

O halde x^3-y^2 = -8 – 49 = -57 olur.

ÖRNEK(13)

x,y∈R olmak üzere $\left.\begin{matrix}-2<x<3\\-4<y<2\end{matrix}\right\}$ eşitsizlikleri veriliyor. x^3-y^2 ifadesinin alabileceği en küçük değer ile en büyük değerin toplamı kaçtır?

ÇÖZÜM:

Bu sefer x,y∈R olduğundan önce x^3 ve y^2 değerlerini aralık olarak bulacağız sonra değer vereceğiz.

$-2 < x < 3 \rightarrow (-2)^3 < x^3 < 3^3 \rightarrow -8 < x^3 < 27$

$-4 < y < 2 \rightarrow 0 \le y^2 < (-4)^2 \rightarrow 0 \le y^2 < 16$

(alt sınırın 0, üst sınırın 2 değil -4'ün karesi alındığına dikkat edin $(-4)^2>2^2$)

$$\begin{array}{rl} & -8 < x^3 < 27 \\ + & -16 < -y^2 \le 0 \\ \hline & -24 < x^3-y^2 < 27 \end{array}$$

O halde en küçük -23 ve en büyük 26 bulunur.

Sonuç : -23+26 = 3 bulunur.

Şu işlemlere bi bakın derim ☺…

$2 < x < 5 \rightarrow 2^2 < x^2 < 5^2$, $2^3 < x^3 < 5^3$

$-2 < x < 5 \rightarrow 0 \le x^2 < 5^2$, $(-2)^3 < x^3 < 5^3$

$-4 < x < 3 \rightarrow 0 \le x^2 < (-4)^2$, $(-4)^3 < x^3 < 3^3$

$-3 < x < -2 \rightarrow (-2)^2 < x^2 < (-3)^2, (-3)^3 < x^3 < (-2)^3$

ÖRNEK(14)

$-3<x<4$ olmak üzere (x^2-6) ifadesinin alabileceği tamsayı değerlerinin toplamı nedir?

ÇÖZÜM:

x için tamsayı denmediğinden önce x^2-6 bulunur sonra değer verilir.

$-3<x<4 \rightarrow 0 \le x^2 < 4^2$

$0-6 \le x^2-6 < 16-6$

$-6 \le x^2-6 < 10$

(x^2-6)'nin alabileceği değerler;

-6,-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 dir.
Bu değerler toplanırsa sonuç :24 olur.

ÖRNEK(15)

$\left.\begin{array}{l} -3 < x < 2 \\ -4 < y < -2 \end{array}\right\}$ eşitsizlikleri veriliyor.

x^2+y^2'nin alabileceği kaç tamsayı değeri vardır?

ÇÖZÜM:

$-3 < x < 2 \rightarrow 0 \le x^2 < (-3)^2 \rightarrow 0 \le x^2 < 9$
$-4 < y < -2 \rightarrow (-2)^2 < y^2 < (-4)^2 \rightarrow 4 < y^2 < 16$

$$\begin{array}{rl} & 0 \le x^2 < 9 \\ + & \underline{4 < y^2 < 16} \\ & 4 < x^2+y^2 < 25 \end{array}$$

x^2+y^2'nin alabileceği değerler 20 tane olur.

ÖRNEK(16)

a<0<b olmak üzere $\dfrac{5a-b}{a}$ ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisi olabilir?

A) 35 B) 4 C) 4,5 D) 5 E) 5,5

ÇÖZÜM:

$\dfrac{5a-b}{a} = \dfrac{5a}{a} - \dfrac{b}{a} = 5 - \dfrac{b}{a}$, burada a ve b zıt işaretli olduğundan $-\dfrac{b}{a} > 0$ olur. Bu durumda $\dfrac{5a-b}{a}$ ifadesi 5'ten büyük çıkar o halde cevap E şıkkıdır.

ÖRNEK(17)

$x^2 < x$ ise $-3x+5$ ifadesinin alabileceği tamsayı değerlerinin toplamı nedir?

ÇÖZÜM:

$x^2 < x \rightarrow 0 < x < 1$ olduğunu özelliklerde vermiştik. Şimdi -3x+5 değerini bulalım

$0.(-3) > -3x > 1.(-3)$

$0+5 > -3x+5 > -3+5$

$5 > -3x+5 > 2$

(-3x+5)'in alabileceği değerler. 4 ve 3 tür. Toplamları ise 7 eder.

MATEMATİĞİM

ÖRNEK(18)

x∈N olmak üzere $\frac{2x+3}{3x+1} < \frac{4}{5}$ eşitsizliğini sağlayan en küçük x kaçtır?

ÇÖZÜM:

Normalde eşitsizlerde içler dışlar çarpımı yoktur. Ancak çarpılan ifadeler pozitif ise yönlere dikkat ederek sırayla ve kontrollü biçimde çarpım yapılabilir.

$\frac{2x+3}{3x+1} < \frac{4}{5}$ → 5(2x+3) < 4(3x+1)

10x+15 < 12x + 4

15-4 < 12x-10x

11 < 2x

$\frac{11}{2} < x$

x değerleri 6,7,8,… olduğundan en küçükleri 6 dır.

ÖRNEK(19)

x,y,z negatif reel sayı olmak üzere $\frac{2}{x} = \frac{3}{y} = \frac{5}{z}$ ise x,y,z ‘yi sıralayın

ÇÖZÜM:

$\frac{2}{x} = \frac{3}{y} = \frac{5}{z} = -1$ dersek

x=-2 , y=-3 , z=-5 bulunur.

O halde z<y<x olur.

ÖRNEK(20)

$-\frac{1}{3} > x > -\frac{5}{7}$ ise $\frac{5x+4}{x+1}$ ifadesinin alabileceği tamsayı değerlerinin toplamı nedir?

ÇÖZÜM:

$\frac{5x+4}{x+1} = 5 - \frac{1}{x+1}$ yazılabilir.

$-\frac{1}{3} > x > -\frac{5}{7} \quad \rightarrow \quad 1-\frac{1}{3} > x+1 > 1-\frac{5}{7}$

$\frac{2}{3} > x+1 > \frac{2}{7} \quad \rightarrow \quad \frac{3}{2} < \frac{1}{x+1} < \frac{7}{2}$

$-\frac{3}{2} > -\frac{1}{x+1} > -\frac{7}{2} \quad \rightarrow 5-\frac{3}{2} > 5-\frac{1}{x+1} > 5-\frac{7}{2}$

$\frac{7}{2} > 5-\frac{1}{x+1} > \frac{3}{2}$

bu aralıkta ifadenin alabileceği değerler 2 ve 3 tür. Toplamları da 5 eder.

ÖRNEK(21)

a<b<c ve $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} = \frac{1}{4}$ ise c’nin en küçük değeri kaçtır?

ÇÖZÜM:

Bu tür sorularda tüm değişkenler önce ortanca değişkene eşit alınır. Dada sonra yorum yapılarak istenen değer bulunur.
(a=b=c)=b alınsın. Bu durumda eşitsizlik
$\frac{1}{b}+\frac{1}{b}+\frac{1}{b} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{3}{b} = \frac{1}{4} \Rightarrow b = 12$ bulunur.
a<b<c → a<12<c olduğundan en küçük c=13 olur.

ÖRNEK(22)

a,c pozitif tamsayı $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{2}$ olmak üzere a en büyük ve c en küçük değerini aldığında b kaç olur?

ÇÖZÜM:

Yukarıdaki sorunun farklı bir soruş şekli ile karşı karşıyayız

A,b,c değişkenlerini a<b<c şeklinde sıralayıp (a=b=c)=b alırsak

$\frac{1}{b}+\frac{1}{b}+\frac{1}{b}=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{3}{b}=\frac{1}{2}\Rightarrow b=6$ varsayılırsa (bu değer b'nin gerçek değeri değildir. Çünkü a<b<c iken a=b=c aldık)

a<b<c için a<6<c yazılır. Burada a'nın en büyük değeri 5 ve c'nin en küçük değeri 7 olur. O halde asıl kesirli denklemde bu değerleri yerine yazarsak

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{b}+\frac{1}{7}=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{1}{b}=\frac{1}{2}-\frac{1}{5}-\frac{1}{7}$$
$$(35)\ (14)\ (10)$$

$$\frac{1}{b}=\frac{35-14-10}{70}$$

$$\frac{1}{b}=\frac{11}{70}$$

$b=\frac{70}{11}$ bulunur.

ÖRNEK(23)

b bir tamsayı olmak üzere 1<a<3 ve 3a+2b=1 ise a'nın alabileceği değerlerin toplamı nedir?

ÇÖZÜM:

3a+2b=1 → 2b = 1-3a → $b=\frac{1-3a}{2}$

şimdi a'nın aralığını kullanarak $\frac{1-3a}{2}$ 'nın aralığını bulalım

1<a<3 → 1.(-3)>-3a>3.(-3)

1-3 > 1-3a > 1-9

$$\frac{-2}{2}>\frac{1-3a}{2}>\frac{-8}{2}$$

$$-1>\frac{1-3a}{2}>-4\quad\Rightarrow\quad -1>b>-4$$

buradan b=-2 ve b=-3 bulunur.

3a+2b=1 ifadesinde b'leri yerine yazarsak

3a+2.(-2)=1 → 3a = 5 → $a=\frac{5}{3}$

3a+2.(-3)=1 → 3a = 7 → $a=\frac{7}{3}$

o halde $\frac{5}{3}+\frac{7}{3}=\frac{12}{3}=4$ eder.

ÖRNEK(24)

–3<x<6 , x∈R ise x^2-6x'in en büyük değeri kaçtır?

ÇÖZÜM:

x^2-6x ifadesi tamkareye tamamlanırsa ;

$x^2-6x+9-9=(x-3)^2-9$ şimdi verilen aralıktan bu ifadeye ulaşmaya çalışacağız.

-3<x<6

-3-3 < x-3 < 6-3

-6 < x-3 < 3

0≤ $(x-3)^2<(-6)^2$

0-9 ≤ $(x-3)^2-9$ < 36-9

-9 ≤ $(x-3)^2-9$ < 27

-9 ≤ x^2-6x < 27 olur. O halde en büyük değer 26 dır.

ÖRNEK(25)

$$\left.\begin{array}{l} -1<\dfrac{2}{x+2}<2 \\ \dfrac{x+4}{x+1}<1 \end{array}\right\}$$ sistemini sağlayan x hangi aralıktadır?

ÇÖZÜM:

$$-1<\frac{2}{x+2}<2$$
$$-1<\frac{x+2}{2}<\frac{1}{2}$$
$$-2<x+2<1$$
-2-2 < x < 1-2
-4 < x < -1

$$\frac{x+4}{x+1}<1$$
$$1+\frac{3}{x+1}<1$$
$$\frac{3}{x+1}<0$$
x+1<0 → x<-1

her iki eşitsizlik dikkate alındığında x için
–4<x<–1
aralığının geçerli olduğu görülür.

ÖRNEK(26)

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{2x^2+3}{3x-2}<0 \\ \dfrac{2x+10}{x^2+4}\geq 0 \end{array}\right\}$$ sistemini sağlayan x∈Z'lerin toplamı nedir?

ÇÖZÜM:

$\dfrac{2x^2+3}{3x-2}<0$ ifadesinde 2x²+3 daima pozitif olduğundan eşitsizliğin sağlanması için 3x-2<0 olmalıdır.

3x-2<0 → $x<\dfrac{2}{3}$

$\dfrac{2x+10}{x^2+4}\geq 0$ ifadesinde x²+4 daima pozitif olduğundan 2x+10≥0 olmalı

2x+10 ≥0 → x ≥ -5

bu iki eşitsizlikten elde edilen sonuçlar birleştirilirse

-5≤ x < $\dfrac{2}{3}$ elde edilir.

x'lerin alabileceği değerler ; -5,-4,-3,-2,-1,0 olur bu değerlerin toplamı ise -15 tir.

ÖRNEK(27)

a,b∈R olmak üzere (a+1).(b+3)<(b+3) ise aşağıdakilerden hangisi daima doğrudur?

A) a<0 ise b<0
B) a<0 ise b>–3
C) a<0 ise b>0
D) a<–1 ise b<–3
E) a>0 ise b>–3

ÇÖZÜM:

(a+1).(b+3)<(b+3) ifadesinde (b+3)'ler sadeleşir ancak işaret bilinmediğinden;

(b+3)<0 ise $(a+1).\cancel{(b+3)} < \cancel{(b+3)}$
a+1 > 1
b < -3 ve a > 0

(b+3) ≥ 0 ise $(a+1).\cancel{(b+3)} < \cancel{(b+3)}$
a+1<1 → a < 0 ve b ≥ -3 bulunur.

bu şartlara uyan şık B şıkkıdır.

ÖRNEK(28)

x,y,z∈R olmak üzere x–y>0>z– y ise aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

A) x<0 B) z>0 C) x+y+z >0
D) x<y<z E) x>y>z

ÇÖZÜM:

x–y>0>z– y eşitsizliğini iki ayrı eşitsizlik olarak alırsak
x-y > 0 ve 0 > z-y buradan
x > y ve y > z bulunur.
sonuç x>y>z olur. Cevap E şıkkı

ÖRNEK(29)

a,b,c∈R olmak üzere $a.c^2 < 0$,

$\frac{c}{a} < \frac{b}{a}$, $a.b \leq 0$ ise aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

A) a<b<0<c B) a<0≤b<c
C) a≤0<b<c D) b≤0<a<c
E) c<0≤b<a

ÇÖZÜM:

$a.c^2 < 0$ eşitsizliğinde c² pozitif olduğundan a<0 olur.

a<0 olduğundan $\frac{c}{a} < \frac{b}{a} \Rightarrow c>b$ olur.

a < 0 olduğundan $a.b \leq 0$ ise b≥o olur.

b ≥0 ve c > b ise c >0 dır.

o halde a < 0 ≤b<c olur. Doğru cevap B şıkkıdır.

ÖRNEK(30)

a,b,c∈R ve $\left.\begin{matrix} a.b.c^2 < 0 \\ a.b^2.c < 0 \\ a^2.b^2.c > 0 \end{matrix}\right\}$ ise a,b,c'nin işareti sırasıyla nedir?

ÇÖZÜM:

a².b².c>0 eşitsizliğinde a² ve b² pozitif olduklarından c de pozitiftir.(c>0)

a.b².c<0 eşitsizliğinde b² ve c pozitif olduklarından a negatiftir..(a<0)

a.b.c²<0 eşitsizliğinde a negatif ve c² pozitif olduklarından b pozitif olur.. (b>0)

o halde sonuç -,+ ,+ olur.

ÖRNEK(31)

x.y<x.z , y>z ve x.z>0 ise aşağıdakilerden hangisi kesinlikle doğrudur?

A) x.y>0 B) x.y<z.y C) z<0
D) x.y<0 E) $x^2.y^2.z > 0$

ÇÖZÜM:

x.y<x.z eşitsizliğinde x'ler sadeleştiğinde y>z elde ediliyorsa demek ki x negatiftir ki yön değişmiş(x<0)

x.z>0 eşitsizliğinde x negatif olduğundan z'de negatiftir.(z<0)

y>z eşitsizliğinde z negatif olduğundan y'yi tahmin edemeyiz(y pozitif veya negatif olabilir.)
bu durumda cevap C şıkkıdır.

ÖRNEK(32)

x<0<y<z ise aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

A) $\frac{1}{x} > \frac{1}{y} > \frac{1}{z}$ B) $\frac{1}{z} > \frac{1}{y} > \frac{1}{x}$

C) $\frac{1}{y} > \frac{1}{x} > \frac{1}{z}$ D) $\frac{1}{y} > \frac{1}{z} > \frac{1}{x}$

E) $\frac{1}{z} > \frac{1}{x} > \frac{1}{y}$

ÇÖZÜM:

y ve z pozitif olmak üzere $y < z \Rightarrow \frac{1}{y} > \frac{1}{z}$ olur. z zaten negatf olduğundan en küçüktür. O halde $\frac{1}{y} > \frac{1}{z} > \frac{1}{x}$ olur yani D şıkkı doğru cevaptır.

ÖRNEK(33)

x,y,z∈ Z^+ olmak üzere x>y>z ve $x+\frac{y}{z}=30$ ise x+y+z en az kaç olur?

ÇÖZÜM:

X=16, y=14 ve z=1 seçilirse x+y+z en küçük olur.
O halde x+y+z=31 olur.

ÖRNEK(34)

$$\left.\begin{array}{l} x^4.y^5.z^6>0 \\ x^5.y^6.z^7>0 \\ x^6.y^7.z^9<0 \end{array}\right\}$$ ise x,y,z'nin işareti sırasıyla nedir?

ÇÖZÜM:

Çift kuvvetin fazla olduğu eşitsizlikten başlamak en doğrusudur.

$x^4.y^5.z^6>0$ eşitsizliğinde x^4 *ve* z^6 pozitif olduğundan y^5 de pozitif , dolayısıyla y>0 olmalı

$x^6.y^7.z^9<0$ eşitsizliğinde x^6 *ve* y^7 pozitif olduğundan z^9 negatif , dolayısıyla z<0 olmalıdır.

$x^5.y^6.z^7>0$ eşitsizliğinde y^6 pozitif ve z^7 negatif olduğundan x^5 negatif yani x<0 olmalıdır.
O halde işaretler sırasıyla - ,+ , - olur.

ÖRNEK(35)

a,b,c∈R olmak üzere
(a–b).(b–c)<0 ve a<b ise aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

A) c>a B) a>c C) b>c D) c>b E) a.b>0

ÇÖZÜM:

(a–b).(b–c)<0 ise (a-b) veya (b-c) den biri negatif olmalı. a<b olduğundan a-b<0 dır.

o halde (a-b)<0 ve (b-c) > 0 dır.

Buradan; a<b ve b>c çıkar.

Doğru cevap C şıkkıdır.

ÖRNEK(36)

$a^2+b^2<(a+b)^2-4ab$ ise aşağıdakilerden hangisi daima doğrudur?(a ve b sıfırdan farklı)

A) a<b<0 B) 0<b<a C) a. b^2 <0
D) $\frac{a^2}{b}>0$ E) $\frac{a}{b}<0$

ÇÖZÜM:

$a^2+b^2<(a+b)^2-4ab$ ifadesi açılırsa

$a^2+b^2<a^2+2ab+b^2-4ab$

$a^2-a^2+b^2-b^2<-2ab$

$0<-2ab \Rightarrow 2ab<0$ buradan a ve b 'nin zıt işaretli olduğu görülür. Buna en uygun şık E şıkkıdır.

ÖRNEK(37)

x<|x|< x^2 ifadesi neyi gerektirir?

A) –1<x<1 B) –1<x<0 C) x<–1
D) x>1 E) 0<x<1

ÇÖZÜM:

Eşitsizlik ikişer ikişer düşünüldüğünde
x<|x| eşitsizliği x<0 iken geçerlidir.

x< x^2 eşitsizliği de x>1 ve x<0 iken geçerlidir.

|x|< x^2 eşitsizliği ise x>1 ve x<-1 iken geçerlidir.
Bu üç bilgiyi kullanarak ortak çözüm elde etmeye çalışalım.

Üç eşitsizlikte de ortak olan x'in negatif olmasıdır. Ancak son yazdığımız eşitsizlik x'in ancak -1'den küçük olduğunda sağlandığı için (en dar aralığı almamız gerektiğinden) çözüm aralığımız x<-1 olur ki doğru cevap C şıkkıdır.

ÖRNEK(38)

a,b,c∈Z olmak üzere

$$\left.\begin{aligned} a+b &> a+c \\ b.c &> c^2 \\ 3a &= 2c \end{aligned}\right\}$$ ise a,b,c'yi sıralayın.

ÇÖZÜM:

$\cancel{a}+b>\cancel{a}+c$ → b>c çıkar

$b.c>c^2$ eşitsizliğinde c>0 olursa c'ler sadeleşir ve b>c çıkar

$3a=2c$ eşitsizliğinde örneğin c=3 iken a=2 dir.
yani c>a dır.
o halde b>c>a elde edilir.

ÖRNEK(39)

a>b , a.b<0 ve a+b<0 ise Aşağıdakilerden HangisiK. doğrudur?

A) |b|>|a| B) $a^5>b^4$ C) $a^4>b^4$
D) |a|>a E) $\frac{b}{a}>0$

ÇÖZÜM:

b<0 olduğundan a ve b zıt işaretlidir. A>b olduğu için de a>0 ve b<0 olmalıdır.

a+b <0 ise mutlak değerce büyük olanın negatif sayı olduğu anlamına gelir (2+(-5) gibi)

o halde |b|>|a| olmalıdır. yani doğru cevap A şıkkıdır.

x∈R olmak üzere x^2<|x| ve |x|>x ise x reel sayısı hangi sayı aralığındadır?

A) $(-\infty,0)$ B) (–1,1) C) (0,1)
D) (–1,0) E) $(0,\infty)$

ÇÖZÜM:

|x|>x eşitsizliği x'in negatif olduğunu bildirir.
x^2<|x| eşitsizliği ise -1<x<0 veya 0<x<1 aralıklarını işaret eder. O halde ikisini de sağlayan aralık -1<x<0 olur ki doğru cevap D şıkkıdır.

NOT: Yukarıdaki örneğe benzer sorularda eğer verilen eşitsizliğin hangi aralıktaki sayılar için geçerli olduğu soruluyorsa ya konu başında verdiğimiz özellikleri hatırlayacaksınız yada bazı değerler vererek ezber yapmadan aralık bulacaksınız.

Mesela ;

-∞<x<-1 aralığı için x = -2
-1 < x < 0 aralığı için x = -1/2
0 < x < 1 aralığı için x = ½
1 < x < +∞ aralığı için x=2 alabilirsiniz.

Alınan değerlerden hangisi eşitsizliği sağlıyorsa değişkenimiz o aralıktadır.

ÖRNEK(40)

$x > x^3$ ve |x| = –x koşullarını sağlayan x , hangi aralıktadır?

A) –1<x≤0 B) x≥1 C) x≤0
D) 0<x≤1 E) x<–1

ÇÖZÜM:

|x| = –x eşitliği x'in negatif olduğuna işaretttir.
$x > x^3$ eşitsizliği ise x<-1 ve 0<x<1 aralıklarını gerektirir.x negatif olduğu için 0<x<1 alınmaz, x<-1 alınır.doğru cevap E şıkkıdır.

ÖRNEK(41)

$\frac{x}{0,6} = y$ ve 1<x<6 ise y'nin alabileceği kaç farklı tamsayı değeri vardır?

ÇÖZÜM:

$$\frac{x}{0,6} = y \Rightarrow \frac{10.x}{6} = y \Rightarrow \frac{5.x}{3} = y$$

1<x<6 → $\frac{5.1}{3} < \frac{5.x}{3} < \frac{5.6}{3}$

$\frac{5}{3} < y < 10$ bulunur.

buradan y için 2,3,…9 yani 8 değer vardır.

ÖRNEK(42)

a,b∈R ve 0<a<b<1 için *aşağıdakilerden hangisi* yanlıştır?

A) $\frac{a}{b} < 1$ B) $a^2 < b^2$ C) $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$
D) a–b<0 E) $\frac{1}{a.b} < 1$

ÇÖZÜM:

$a = \frac{1}{3}$ ve $b = \frac{1}{2}$ seçersek

$\frac{1}{a.b} < 1 \Rightarrow \frac{1}{\frac{1}{3}.\frac{1}{2}} < 1 \Rightarrow 6 < 1$ çıkar ki bu da yanlıştır. O halde cevap E şıkkıdır.

MATEMATİĞİM

ÖRNEK(43)

0<x<y olduğuna göre aşağıdakilerden hangisi yanlıştır? ***(ÖSS-2001)***

A) $\frac{x-y}{y} < 0$ B) $\frac{y-x}{x} > 0$ C) $\frac{x-y}{y} < 1$
D) $\frac{x+y}{y} > 1$ E) $\frac{x+y}{x} < 1$

ÇÖZÜM:

$\frac{x+y}{x} < 1$ eşitsizliğini düzenlersek

$1 + \frac{y}{x} < 1 \Rightarrow \frac{y}{x} < 0$ olur. Halbuki x ve y pozitif iken $\frac{y}{x}$'in pozitif olması gerekirdi.

O halde cevap E şıkkıdır

ÖRNEK(44)

$-3<a\leq5$ ve $3a-2b=1$ ise b için aşağıdakilerden hangisi doğrudur? ***(ÖSS-98)***

A) $5<b\leq8$ B) $-8<b\leq-5$ C) $-5<b\leq7$ D) $5<b\leq7$ E) $-7<b\leq5$

ÇÖZÜM:

$3a-2b=1$ eşitliğinde a'yi çekersek

$3a-2b=1 \rightarrow a=\dfrac{2b+1}{3}$ olur. Şimdi bu değeri a'nın aralığına yerleştirelim

$$-3<\frac{2b+1}{3}\leq5$$

$-3.3 < 2b+1 \leq 5.3$

$-9-1 < 2b+1-1 \leq 15-1$

$-10 < 2b \leq 14$

$-5 < b \leq 7$ olur ki doğru cevap C şıkkıdır.

MATEMATİĞİM

KONUMUZ BİTTİ. ŞİMDİ TESTLERE GEÇEBİLİRSİNİZ

DİLERSENİZ KONU ANLATIMINI BİR DE YOUTUBE KANALIMIZDAN VİDEO OLARAK DA İZLEYEBİLİRSİNİZ

Youtube kanalımız: CEBİR HOCAM

Başarılar diliyorum
İbrahim Halil BABAOĞLU
Matematik Öğretmeni