

## RASYONEL SAYILAR

**KESİR:**  $a, b \in \mathbb{Z}$  ve  $b \neq 0$  olmak üzere  $\frac{a}{b}$  şeklindeki ifadeler kesir denir.

$\frac{a}{b}$   $\rightarrow$  pay  
 $\frac{a}{b}$   $\rightarrow$  kesir çizgisi  
 $\frac{a}{b}$   $\rightarrow$  payda

$\frac{4}{6}, -\frac{14}{7}, \frac{5}{15}, -\frac{7}{21}, \frac{0}{9}, 4, -2, \dots$  gibi ifadeler kesir belirtir.

**DENK KESİRLER:**  $\frac{a}{b}$  ile  $\frac{c}{d}$  kesirleri için  $a \cdot d = b \cdot c$  oluyorsa  $\frac{a}{b} \equiv \frac{c}{d}$  denir. Bu denklik  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  olarak da yazılabilir.

$$\frac{2}{4} \equiv \frac{1}{2} \equiv \frac{3}{6} \dots \Rightarrow \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = \frac{3}{6}$$

**RASYONEL SAYI:** kesirler kümesinde denklik sınıflarını temsil eden her bir elemana bir rasyonel sayı denir. O halde  $a, b \in \mathbb{Z}$ ,  $b \neq 0$  ve  $a$  ile  $b$  aralarında asal olmak üzere  $\frac{a}{b}$  şeklindeki her ifadeye bir rasyonel sayı denir.

**NOT: i)**  $\frac{0}{a} = 0$  dır. ( $a \neq 0$ )

**ii)**  $\frac{a}{0} \rightarrow$  tanımsız

**iii)** Payları 1 olan kesirlerin her birine kesir birimi denir.

$\frac{1}{2}$  kesri,  $\frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \dots$  kesirlerinin

$\frac{1}{5}$  kesri,  $\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \dots$  kesirlerinin birimidir.

$\frac{5}{3}$  kesri, kesir birimi cinsinden  $5 \cdot \frac{1}{3}$  şeklinde yazılır.

## KESİR ÇEŞİTLERİ:

$\frac{a}{b}$  kesri için,

**i)**  $|a| < |b|$  ise kesir, basit kesirdir.

basit kesir için  $-1 < \frac{a}{b} < 1$  eşitsizliği geçerlidir.

$-\frac{4}{5}, -\frac{1}{4}, 0, \frac{3}{5}, \dots$  gibi

## ÖRNEK( 1 )

$a \in \mathbb{Z}$  olmak üzere  $\frac{3a-4}{5a-2}$  bir basit kesir ise  $a$  aşağıdakilerden hangisi olamaz?

A) -2 B) -1 C) 1 D) 2 E) 3

## ÇÖZÜM:

Basit kesir kuralından hareketle

$-1 < \frac{3a-4}{5a-2} < 1$  şartına uygun olmayan şıkkı arayacağız

$$a = -1 \text{ için } \frac{3a-4}{5a-2} = \frac{3(-1)-4}{5(-1)-2}$$

$$= \frac{-7}{-7} = 1 \text{ bulunur.}$$

bu değer (-1,1) aralığında olmadığından bir basit kesir olamaz.

O halde cevap B şıkkı olur.

## ÖRNEK( 2 )

$a \in \mathbb{Z}$  ve  $\frac{2a-4}{3a+5}$  kesri bir basit kesir ise  $a$ 'nın alamayacağı tamsayı değerleri kaç tanedir?

## ÇÖZÜM:

$\frac{2a-4}{3a+5}$  kesri bir basit kesir ise  $|2a-4| < |3a+5|$  şartı sağlanmalıdır.  $a$  nın alamayacağı değerler ise bu eşitsizliğin tersini almayı gerektirir

$|2a-4| \geq |3a+5|$  eşitsizliğini çözersek  
(önce her tarafın karesi alınır.)

$$\begin{aligned}(2a-4)^2 &\geq (3a+5)^2 \\ 4a^2 - 16a + 16 &\geq 9a^2 + 30a + 25 \\ 5a^2 + 46a + 9 &\leq 0 \\ (5a+1) \cdot (a+9) &\leq 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}5a+1 &= 0, \quad a = -1/5 \\ a+9 &= 0, \quad a = -9\end{aligned}$$

a	-9	-1/5
+	-	+

o halde  $a = -9, -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1$   
 $a$  sayısı 9 değer alabilir.

ii)  $|a| \geq |b|$  ise kesir, bileşik kesirdir.

bileşik kesirler için;  $\frac{a}{b} \geq 1$  veya  $\frac{a}{b} \leq -1$  g  
eçerlidir.

$$-\frac{5}{3}, -\frac{7}{2}, -5, 4, \frac{7}{4}, \dots \text{gibi}$$

## ÖRNEK( 3 )

$\frac{3x+4}{7}$  kesri bileşik kesir ise  $x \in \mathbb{Z}$  'lerin toplamı nedir?

## ÇÖZÜM:

$$\left| \frac{3x+4}{7} \right| \geq 1 \text{ olmalı buradan;}$$

$$\frac{3x+4}{7} \geq 1 \text{ ve } \frac{3x+4}{7} \leq -1 \quad \text{eşitsizlikleri çözümlürse}$$

$$\frac{3x+4}{7} \geq 1 \rightarrow 3x+4 \geq 7 \rightarrow 3x \geq 3 \rightarrow x \geq 1$$

$$\frac{3x+4}{7} \leq -1 \rightarrow 3x+4 \leq -7 \rightarrow x \leq -\frac{11}{3}$$

her iki aralıktaki tamsayı değerlerini toplayalım,

$$x \geq 1 \text{ için : } 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \dots$$

$$x \leq -\frac{11}{3} \text{ için : } \dots -8, -7, -6, -5, -4$$

geriye kalan sayılar  $1+2+3 = 6$  bulunur.

iii) Bir tamsayı ve bir basit kesirle ifade edilen kesirlere tamsayılı kesir denir.  $a \frac{b}{c}$

**NOT:**  $a \frac{b}{c} = a + \frac{b}{c}$  olarak da ifade edilebilir

$$-3\frac{4}{7}, 2\frac{3}{5}, 5\frac{0}{7}, \dots \text{gibi}$$

**DİKKAT!!:**  $2\frac{1}{2} \neq 2\frac{1}{2}$

**SABİT KESİR:**  $\frac{ax+b}{cx+d}$  kesri  $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$  şartını sağlıyorsa sabit kesir adını alır. Sabit kesirde  $x$  yerine yazılacak tüm değerler için kesrin değeri değişmez.

$$\diamond \frac{2x+6}{3x+9} \text{ gibi}$$

## ÖRNEK( 4 )

$\frac{5x+a}{2x-3}$  kesri bir sabit kesir ise  $a=?$

## ÇÖZÜM:

Kural gereği  $\frac{5}{2} = \frac{a}{-3}$  olmalı. Buradan

$$2a = -15$$

$$a = -\frac{15}{2} \text{ olur.}$$

## BİLEŞİK KESİRDEN TAMSAYILI KESİRE ÇEVİRME

Pay paydaya bölünür. Bölüm, tam kısma; kalan, paya ve bölen de paydaya yazılır.

$$\diamond \frac{25}{4} = 6\frac{1}{4}$$

$$\diamond -\frac{17}{5} = -3\frac{2}{5}$$

## ÖRNEK( 5 )

$a, b, c \in \mathbb{Z}^+$  ve  $\frac{32}{12} = a + \frac{1}{b + \frac{1}{c}}$  ise  $a+b+c=?$

## ÇÖZÜM:

İşlemi aşama aşama yapalım.

$$\begin{array}{r|l} 32 & 12 \\ -24 & 2 \\ \hline 8 & \end{array}$$

$$2\frac{8}{12} = 2\frac{2}{3} = 2\frac{1}{\frac{3}{2}} = 2\frac{1}{1\frac{1}{2}}$$

$$2\frac{1}{1\frac{1}{2}} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}$$

$$a=2, b=1, c=2$$

$$a+b+c=2+1+2=5 \text{ bulunur.}$$

## TAMSAYILI KESİRDEN BİLEŞİK KESİRE ÇEVİRME

$$a\frac{b}{c} = \frac{a \cdot c + b}{c} \text{ ve } -a\frac{b}{c} = -\left(\frac{a \cdot c + b}{c}\right) \text{ dir.}$$

$$\diamond 2\frac{3}{4} = \frac{2 \cdot 4 + 3}{4} = \frac{11}{4}$$

$$\diamond -3\frac{1}{4} = -\frac{13}{4}$$

## NOT:

$$a\frac{b}{c} = a + \frac{b}{c} \text{ ve } -a\frac{b}{c} = -a - \frac{b}{c}$$

olduğunu unutmayınız.

## KESİRLERDE GENİŞLETME VE SADELEŞTİRME

Bir kesrin payı ve paydası aynı sayıyla çarpılır yada bölünürse kesrin değeri değişmez.

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot k}{b \cdot k} = \frac{a \div k}{b \div k}$$

**NOT:** Bir kesir en sade şekle geldiğinde yeni kesrin pay ve paydası aralarında asal olurlar.  $a$  ve  $b$  aralarında asal iki sayı ise;

Örneğin;  $\frac{a}{b} = \frac{20}{25}$  kesri için  $\frac{a}{b} = \frac{4}{5}$  olduğunda  $a=4$  ve  $b=5$  olur.

## ÖRNEK( 6 )

Değeri  $\frac{3}{7}$  olan bir kesrin payına 5 ekler, paydasına da yeni payı eklersek kesrin değeri  $\frac{4}{11}$  oluyor. Esas kesrin paydası payından kaç fazla idi?

## ÇÖZÜM:

Kesrimiz  $\frac{3x}{7x}$  olsun. Payına 5 ekler, paydasına da yeni payı eklersek

$$\frac{3x+5}{7x+3x+5} = \frac{4}{11}$$

$$\frac{3x+5}{10x+5} = \frac{4}{11}$$

$$40x+20 = 33x+55$$

$$7x = 35$$

$$x = 5$$

$$\text{o halde kesrimiz } \frac{3x}{7x} = \frac{3.5}{7.5} = \frac{15}{35} \text{ olur}$$

sorumuzun cevabı ise  $35-15=20$  dir.

## ÖRNEK( 7 )

$3xy-4 = y+5+x$  ifadesinde x'in hangi değeri için y bulunamaz?

## ÇÖZÜM:

Denklemden y çekilirse

$$3xy-y = y+5+x$$

$$y(3x-1) = y+9 \rightarrow y = \frac{y+9}{3x-1}$$

bir kesrin paydası 0 ise o kesir tanımsız olacağından  $3x-1 \neq 0$  dir. o halde  $x = \frac{1}{3}$  olursa y bulunamaz.

## ÖRNEK( 8 )

$x, y \in \mathbb{R}$  ve  $y = \frac{2x-3}{3x+1}$  ifadesinde y'nin hangi değeri için x bulunamaz?

## ÇÖZÜM:

Burada da x'i çekmeliyiz

$$y = \frac{2x-3}{3x+1}$$

$$3xy+y = 2x-3$$

$$3xy-2x = -3-y$$

$$x(3y-2) = -3-y$$

$$x = \frac{-3-y}{3y-2}$$

y'nin tanımlı olması için  $3y-2 \neq 0$  olmalıdır. o halde  $3y-2=0$  olursa y bulunamaz

$$3y-2=0 \rightarrow y=2/3 \text{ olur.}$$

## ÖRNEK( 9 )

5,25 sayısı  $3 + \frac{a}{b}$  şeklinde yazılırsa a ve b sayma sayıları için en küçük a+b ne olur?

## ÇÖZÜM:

$$5,25 = 5 + 0,25$$

$$= 5 + \frac{25}{100} = 5 + \frac{1}{4}$$

$$= 3+2 + \frac{1}{4} = 3 + \frac{9}{4}$$

$$a=9 \text{ ve } b=4 \text{ buradan } a+b = 13 \text{ olur.}$$

## ÖRNEK( 10 )

Bir kesrin paydası payının 3 katından 4 eksiktir. Bu kesrin payına 7 ekler paydasından 5 çıkarırsak en küçük pozitif tamsayı elde ediliyor. Esas kesrin pay ve paydasının toplamı nedir?

## ÇÖZÜM:

$$\text{Esas kesir} = \frac{x}{3x-4} \text{ olsun}$$

Bu kesrin payına 7 ekler paydasından 5 çıkarırsak;

$$\frac{x+7}{3x-4-5} = \frac{x+7}{3x-9}$$

en küçük pozitif tamsayı 1 olduğundan

$$\frac{x+7}{3x-9} = 1 \rightarrow 3x-9 = x+7$$

$$3x-x = 7+9$$

$$2x = 16$$

$$x=8 \text{ bulunur.}$$

Buradan

$$\frac{x}{3x-4} = \frac{8}{3 \cdot 8 - 4} = \frac{8}{20}$$

pay ve paydanın toplamı :  $8+20=28$  olur.

## RASYONEL SAYILARDA İŞLEMLER

## 1) TOPLAMA – ÇIKARMA

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d \pm b \cdot c}{b \cdot d}$$

**Uyarı:** Bir tamsayı ile bir kesir  $a \pm \frac{b}{c} = \frac{a \cdot c \pm b}{c}$  veya

$$\frac{b}{c} \pm a = \frac{b \pm a \cdot c}{c} \text{ şeklinde pratik olarak payda}$$

eşitlemeden toplanıp çıkarılabilir.

## ÖRNEK( 11 )

$$\frac{3}{2} - 1 + \frac{2}{5} + \frac{7}{2} = ?$$

## ÇÖZÜM:

Önce paydası aynı olanlar arasında işlem yapılır.

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} - 1 + \frac{2}{5} + \frac{7}{2} &= \frac{3+7}{2} - 1 + \frac{2}{5} = 5 - 1 + \frac{2}{5} \\ &= 4 + \frac{2}{5} = \frac{4 \cdot 5 + 2}{5} = \frac{22}{5} \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

## ÖRNEK( 12 )

$$1 + \left( \frac{1}{2} + \frac{2}{5} \right) - \left( \frac{2}{5} - \frac{1}{2} \right) = ?$$

## ÇÖZÜM:

Parantezler açılırsa bazı değerlerin sadeleştiği görülür.

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{5} - \frac{2}{5} + \frac{1}{2} &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{2}{5} - \frac{2}{5} \\ &= 1 + \frac{1+1}{2} + \frac{2}{5} - \frac{2}{5} \\ &= 1 + 1 \\ &= 2 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

## ÖRNEK( 13 )

$$\frac{3}{4} + \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = ?$$

## ÇÖZÜM:

Payda eşitlemekle başlanır.

$$\begin{aligned} \frac{3}{4} + \frac{2}{3} - \frac{1}{2} &= \frac{9+8-6}{12} \\ (3) \quad (4) \quad (6) \\ &= \frac{11}{12} \text{ dir.} \end{aligned}$$

## ÖRNEK( 14 )

$$\frac{1}{3} - \left( \frac{1}{5} + \frac{1}{3} \right) + \left( \frac{1}{5} - \frac{1}{3} \right) = ?$$

## ÇÖZÜM:

Önce parantezler açılır ki sadeleşenler bulunsun

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{3} &= \frac{1}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{5} - \frac{1}{3} \\ &= -\frac{1}{3} \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

## ÖRNEK( 15 )

$$2003\frac{1}{2} - 2002\frac{1}{3} = ?$$

## ÇÖZÜM:

$$\begin{aligned} 2003\frac{1}{2} - 2002\frac{1}{3} &= 2003 + \frac{1}{2} - 2002 - \frac{1}{3} \\ &= 2003 - 2002 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \\ &= 1 + \frac{3-2}{6} \\ &= 1 + \frac{1}{6} = \frac{7}{6} \end{aligned}$$

## ÖRNEK( 16 )

$$\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{3}{2} - \frac{4}{3} + \dots + \frac{11}{2} - \frac{12}{3} = ?$$

## ÇÖZÜM:

Paydası aynı olanlar bir araya getirilirse

$$\left( \frac{1}{2} + \frac{3}{2} + \dots + \frac{11}{2} \right) - \left( \frac{2}{3} + \frac{4}{3} + \dots + \frac{12}{3} \right)$$

$$= \frac{1+3+\dots+11}{2} - \frac{2+4+\dots+12}{3}$$

$$= \frac{36}{2} - \frac{42}{3}$$

$$= 18 - 14$$

$$= 4 \text{ bulunur.}$$

**NOT:** İki rasyonel sayı arasında sonlu sayıda rasyonel sayı vardır. İki rasyonel sayının orta arasındaki sayı; paydalar eşitlendikten sonra paylar toplamının yarısı paya , eşitlenen payda da paydaya yazılarak bulunur.

$$\diamond \frac{6}{7} \text{ ile } \frac{4}{3} \text{ arasına sayı } \frac{23}{21} \text{ dir.}$$

## ÇARPMA VE BÖLME

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} \quad \text{ve} \quad \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c} \text{ dir.}$$

**Uyarı-1):**  $\frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{b}{a}$  ve  $\frac{\frac{a}{b}}{1} = \frac{a}{b}$  olduğuna

dikkat edin

2)  $\frac{\frac{2}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{2}{3}$  payda'daki 5'ler sadeleşir

3)  $\frac{\frac{5}{7}}{\frac{3}{7}} = \frac{5}{3}$  pay'daki 7'ler sadeleşir.

## ÖRNEK( 17 )

$$\frac{12}{27} \cdot \frac{48}{32} = ?$$

ÇÖZÜM:

$$\begin{aligned} \frac{12}{27} \cdot \frac{48}{32} &= \frac{12 \cdot 48}{27 \cdot 32} \\ &= \frac{(3 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (16 \cdot 3)}{(3 \cdot 3 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 16)} \text{ sadeleştirilirse} \\ &= \frac{2}{3} \text{ bulunur} \end{aligned}$$

## ÖRNEK( 18 )

$$\frac{3}{4} + \frac{5}{7} \cdot \frac{49}{25} = ?$$

ÇÖZÜM:

$$\begin{aligned} \frac{3}{4} + \frac{5}{7} \cdot \frac{7 \cdot 7}{5 \cdot 5} &= \frac{3}{4} + \frac{7}{5} \\ &\quad (5) (4) \\ &= \frac{15 + 28}{20} = \frac{43}{20} \text{ dir.} \end{aligned}$$

## ÖRNEK( 19 )

$$\frac{a}{3} = \frac{7}{8} \text{ ise } a = ?$$

ÇÖZÜM:

$$\begin{aligned} \frac{a \cdot 4}{3} &= \frac{7}{8} \\ 32a &= 21 \\ a &= \frac{21}{32} \end{aligned}$$

İŞLEM SIRASI:

- 1) Önce parantez içleri (parantez ve kesir çizgileri işlemin yönünü belirler)
- 2) Üslü ifadeler
- 3) Çarpma – Bölme
- 4) Toplama Çıkarma

## ÖRNEK( 20 )

$$2 - \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) \cdot \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \right) - 3 \div \frac{1}{3} = ?$$

ÇÖZÜM:

Önce parantez içleri yapılırsa

$$\begin{aligned} 2 - \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) \cdot \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \right) - 3 \cdot \frac{3}{1} \\ &\quad (3) (2) \quad (2) \\ &= 2 - \frac{3+2}{6} \cdot \frac{1-2}{4} - 9 \\ &= 2 - \frac{5}{6} \cdot \frac{-1}{4} - 9 \\ &= \frac{5}{24} - 7 = \frac{5-168}{24} = -\frac{163}{24} \end{aligned}$$

## ÖRNEK( 21 )

$$\frac{\left( \frac{1}{2} - \frac{3}{4} \right) \cdot \left( \frac{5}{3} - \frac{3}{4} \right)}{\frac{2}{3} \div \frac{4}{9}} = ?$$

ÇÖZÜM:

$$\begin{aligned} \frac{\left( \frac{1}{2} - \frac{3}{4} \right) \cdot \left( \frac{5}{3} - \frac{3}{4} \right)}{\frac{2}{3} \div \frac{4}{9}} &= \frac{\frac{2-3}{4} \cdot \frac{20-9}{12}}{\frac{2 \cdot 9}{3 \cdot 4}} \\ &= \frac{\frac{-1}{4} \cdot \frac{11}{12}}{\frac{2 \cdot 3}{3 \cdot 2}} \\ &= \frac{-\frac{1}{4} \cdot \frac{11}{12}}{\frac{2}{2}} \\ &= -\frac{11}{48} \cdot \frac{2}{3} = -\frac{11}{72} \text{ olur.} \end{aligned}$$

## ÖRNEK( 22 )

$$\left(1 + \frac{2}{3}\right) \cdot \left(1 + \frac{2}{5}\right) \cdot \left(1 + \frac{2}{7}\right) \cdots \left(1 + \frac{2}{15}\right) = ?$$

## ÇÖZÜM:

Önce parantez içlerindeki işlemler yapılır.  
daha sonra gerekli sadeleştirmeler yapılır.

$$\frac{\cancel{5} \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{9} \cdot \cancel{17}}{3 \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{15}} = \frac{17}{3} \text{ bulunur.}$$

## ÖRNEK( 23 )

$$a = \left[ \left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{4}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{18}\right) \right]$$

$$\text{ve } b = \left[ \left(1 - \frac{1}{5}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{7}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{19}\right) \right] \text{ ise } a.b = ?$$

## ÇÖZÜM:

Önce parantez içleri yapılır. Daha sonra sadeleştirmeler gerçekleştirilir.

$$a = \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{7}{6} \cdots \frac{19}{18} \text{ ve } b = \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{9} \cdots \frac{18}{19}$$

a ve b 'yi iç içe çarparsak;

$$a.b = \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{6}{7} \cdots \frac{19}{18} \cdot \frac{18}{19}$$

$$a.b = \frac{3}{2} \text{ bulunur.}$$

## ÖRNEK( 24 )

$$\frac{2000 \frac{1}{5} - 1998 \frac{1}{5}}{2001 \frac{3}{7} - 1999 \frac{3}{7}} = ?$$

## ÇÖZÜM:

$$\frac{2000 \frac{1}{5} - 1998 \frac{1}{5}}{2001 \frac{3}{7} - 1999 \frac{3}{7}} = \frac{2000 + \frac{1}{5} - 1998 - \frac{1}{5}}{2001 + \frac{3}{7} - 1999 - \frac{3}{7}} = \frac{2}{2} = 1 \text{ bulunur.}$$

## ÖRNEK( 25 )

$$\frac{2}{5 - \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} - \frac{5}{2}} = ?$$

## ÇÖZÜM:

$$\frac{2}{5 - \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} - \frac{5}{2}} = \frac{2}{5 - \frac{1}{2} - \frac{5}{2}} = \frac{2}{5 - 6}$$

$$\frac{2}{5-3} = \frac{2}{2} = 1 \text{ bulunur.}$$

## ÖRNEK( 26 )

$$\frac{4}{\frac{3}{2}} - \frac{\frac{4}{3}}{2} + \frac{7}{3} - 10 = ?$$

## ÇÖZÜM:

$$\frac{4}{\frac{3}{2}} - \frac{\frac{4}{3}}{2} + \frac{7}{3} - 10 = 4 \cdot \frac{2}{3} - \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{7}{3} - 10$$

$$= \frac{8}{3} - \frac{2}{3} + \frac{7}{3} - 10$$

$$= \frac{8-2+7}{3} - 10$$

$$= \frac{13}{3} - 10$$

$$= \frac{13-30}{3} = -\frac{17}{3} \text{ bulunur.}$$



## ÖRNEK( 27 )

$x, y \in \mathbb{R}$  ve  $y \neq 0$  ise  $\frac{x}{y}$  sayısı  $\frac{x}{\frac{y}{7}}$  sayısının kaç

katıdır?

## ÇÖZÜM:

İfadelerin bilinmeyenlerden örülü olması bazen acaba dedirtir kişiye, halbuki somut sayılarla bu işlem nasıl yapılıyorsa bilinmeyenlerle de öyle yapılır. Yani 8 sayısı 2'nin kaç katıdır. Dendiğinde

nasıl 8'i 2'ye bölüyorsak burada da  $\frac{x}{y}$ 'yi  $\frac{x}{\frac{y}{7}}$ 'ye

böleriz

$$\begin{aligned} \frac{x}{y} : \frac{x}{\frac{y}{7}} &= \left( \frac{x}{y} : \frac{1}{5} \right) : \left( \frac{x}{1} : \frac{7}{y} \right) \\ &= \frac{x}{5y} : \frac{7x}{y} \\ &= \frac{x}{5y} \cdot \frac{y}{7x} \\ &= \frac{1}{35} \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

(x ve y'ler sadeleşirse)

## ÖRNEK( 28 )

Bir x doğal sayısını 0,36 ile bölmek, aslında kaç ile çapmak demektir?

## ÇÖZÜM:

$$\begin{aligned} \frac{x}{0,36} &= \frac{x}{\frac{36}{100}} \\ &= x \cdot \frac{100}{36} \\ &= x \cdot \frac{25}{9} \end{aligned}$$

demek ki bir x doğal sayısını 0,36 ile bölmek, aslında  $\frac{25}{9}$  ile çapmak demekmiş

## ÖRNEK( 29 )

$$\left(2 - \frac{15}{4}\right) \cdot \left(1 - \frac{15}{5}\right) \cdot \left(2 - \frac{15}{6}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{15}{21}\right) = ?$$

## ÇÖZÜM:

Parantez içleri açıldığında benzer sorular gibi sadeleşmenin olmadığı görülür. Burada gizlenen bir 0(sıfır) var. Hangi terim sıfırdır onu bulalım.

İfade açılmaya devam edildiğinde;

$$\left(2 - \frac{15}{4}\right) \cdot \left(1 - \frac{15}{5}\right) \cdot \left(2 - \frac{15}{6}\right) \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{15}{15}\right)}_0 \cdot \dots = 0$$

çarpım durumundaki sayılardan biri sıfır ise sonuç da sıfırdır. O halde cevap 0(sıfır) olur.

## ÖRNEK( 30 )

$$\frac{\frac{3}{5} - \frac{2}{3} + \frac{1}{8}}{\frac{3}{4} - \left( \frac{20}{3} - \frac{1}{2} - \frac{26}{5} \right) + \frac{4}{5}} = ?$$

## ÇÖZÜM:

Bu denli kalabalık sorularda hep bir püf noktası vardır. Ve aslında hep te kolay olurlar o püf nokta bulununca .Sorunun içine direk girmektense önce o püf noktasını bulmak zaman kaybını önleyecektir. Aksi halde payda eşitleme yoluyla bu soruyu çözmeye çalışmak deveye hendek atlatmaktan beterdir...

$$\frac{\frac{3}{5} - \frac{2}{3} + \frac{1}{8}}{\frac{3}{4} - \frac{20}{3} + \frac{1}{2} - \frac{26}{5} + \frac{4}{5}} = \frac{\frac{3}{5} - \frac{2}{3} + \frac{1}{8}}{\frac{6+4}{8} - \frac{20}{3} + \frac{26+4}{5}}$$

(2)      (4)

$$= \frac{\frac{3}{5} - \frac{2}{3} + \frac{1}{8}}{\frac{10}{8} - \frac{20}{3} + \frac{30}{5}} = \frac{\frac{3}{5} - \frac{2}{3} + \frac{1}{8}}{10 \left( \frac{1}{8} - \frac{2}{3} + \frac{3}{5} \right)} = \frac{1}{10}$$

(Burada pay'daki kesirlerin paydalarına bakarak payda'daki kesirleri düzenlediğimize dikkat edin)

## ÖRNEK( 31 )

$$\frac{\frac{5}{2} - \frac{12}{7} - \frac{6}{5}}{\frac{2}{5} - \frac{8}{7} - \frac{4}{5}} = ?$$

(!!Üstteki 2, alttaki 3 paydalarını 6 da eşle)

## ÇÖZÜM:

Üstteki soruda yaptığımız açıklama burada da geçerli önce püf nokta bulunmalı  
üstteki 2, alttaki 3 paydalarını 6 da eşleyip ortak paranteze alalım

$$\frac{\frac{5}{2} - \frac{12}{7} - \frac{6}{5}}{\frac{2}{5} - \frac{8}{7} - \frac{4}{5}} = \frac{\frac{15}{6} - \frac{12}{7} - \frac{6}{5}}{\frac{6}{6} - \frac{8}{7} - \frac{4}{5}}$$

(3)

$$\frac{\frac{5}{3} - \frac{8}{7} - \frac{4}{5}}{\frac{3}{6} - \frac{8}{7} - \frac{4}{5}}$$

(2)

$$= \frac{3 \left( \frac{5}{6} - \frac{4}{7} - \frac{2}{5} \right)}{2 \left( \frac{5}{6} - \frac{4}{7} - \frac{2}{5} \right)} = \frac{3}{2} \text{ bulunur.}$$

## ÖRNEK( 32 )

$a = \frac{2}{3} - \frac{4}{5} + \frac{1}{7}$  ise  $\frac{5}{3} + \frac{1}{5} - \frac{6}{7}$  nin a cinsinden değeri nedir?

## ÇÖZÜM:

$\frac{5}{3} + \frac{1}{5} - \frac{6}{7}$  ifadesini düzenleyelim

$$\frac{5}{3} = 1 + \frac{2}{3}, \quad \frac{1}{5} = +1 - \frac{4}{5}, \quad -\frac{6}{7} = -1 + \frac{1}{7}$$

$$= 1 + \frac{2}{3} + 1 - \frac{4}{5} - 1 + \frac{1}{7}$$

$$= 1 + \underbrace{\frac{2}{3} - \frac{4}{5} + \frac{1}{7}}_a$$

=a+1 bulunur.

## ÖRNEK( 33 )

x pozitif bir ondalık sayı ve  $x + \frac{3}{25}$  bir tamsayı ise

x'in virgülden sonrası kaçtır?

## ÇÖZÜM:

İfadeyi 1'e eşitlesek

$$x + \frac{3}{25} = 1 \rightarrow x = 1 - \frac{3}{25}$$

$$x = \frac{22}{25}$$

(4)

$$x = \frac{88}{100} = 0,88$$

O halde cevap 88 olur.

## ÖRNEK( 34 )

$$A = \frac{33}{26} \cdot \frac{105}{34} \text{ ise } \frac{51}{35} \cdot \frac{39}{22} \text{ nin A cinsinden değeri}$$

nedir?

## ÇÖZÜM:

$$\frac{51}{35} \cdot \frac{39}{22} \text{ ifadesine x der ve A ile çarparsak;}$$

$$x = \frac{51}{35} \cdot \frac{39}{22} \rightarrow A \cdot x = \frac{33}{26} \cdot \frac{105}{34} \cdot \frac{51}{35} \cdot \frac{39}{22}$$

şimdi gereli sadeleştirmeleri yapıp sonuca ulaşalım

$$A \cdot x = \frac{81}{8} \quad x = \frac{81}{8 \cdot A} \text{ bulunur.}$$

## ÖRNEK( 35 )

$$\frac{172 + \frac{22}{17}}{174 - \frac{12}{17}} = ?$$

## ÇÖZÜM:

Bu soruda payda eşitlemek hem zahmetli hem de sağlıksız bir çözüm olur. Burada da bir püf nokta aranmalıdır.

İfadede yer alan kesirleri düzenlersek

$$\frac{172 + \frac{22}{17}}{174 - \frac{12}{17}} = \frac{172 + 2 - \frac{12}{17}}{174 - \frac{12}{17}}$$

$$= \frac{174 - \frac{12}{17}}{174 - \frac{12}{17}} = 1 \text{ bulunur.}$$

## ÖRNEK( 36 )

$$\frac{3}{a} + \frac{5}{b} + \frac{11}{c} = x \text{ ve}$$

$$\frac{5a+3}{a} + \frac{7b+5}{b} + \frac{10c+11}{c} = 13 \text{ ise x kaçtır?}$$

## ÇÖZÜM:

$$\frac{5a+3}{a} + \frac{7b+5}{b} + \frac{10c+11}{c} = 13 \text{ ifadesini}$$

düzenlemekle işe başlayalım

$$\frac{5a}{a} + \frac{3}{a} + \frac{7b}{b} + \frac{5}{b} + \frac{10c}{c} + \frac{11}{c} = 13$$

$$5 + \frac{3}{a} + 7 + \frac{5}{b} + 10 + \frac{11}{c} = 13$$

$$22 + \frac{3}{a} + \frac{5}{b} + \frac{11}{c} = 13$$

$$\underbrace{\frac{3}{a} + \frac{5}{b} + \frac{11}{c}}_x = 13 - 22$$

$$x = -9 \text{ bulunur.}$$

## ÖRNEK( 37 )

$A = \frac{4}{7} + \frac{3}{8} - \frac{7}{15}$  ve  $B = \frac{3}{7} + \frac{5}{8} - \frac{8}{15}$  ise A'nın B cinsinden değeri nedir?

**ÇÖZÜM:**

İfadeleri alt alta toplarsak

$$\begin{array}{r} A = \frac{4}{7} + \frac{3}{8} - \frac{7}{15} \\ + \quad B = \frac{3}{7} + \frac{5}{8} - \frac{8}{15} \\ \hline A + B = \frac{7}{7} + \underbrace{\frac{8}{8} - \frac{15}{15}}_{1+1-1} \end{array}$$

$$A+B=1 \rightarrow A=1-B \text{ bulunur.}$$

## ÖRNEK( 38 )

x ve y doğal sayı olmak üzere;  $x = \frac{3y-8}{y}$  ise  
y'nin alabileceği değerler toplamı nedir?

**ÇÖZÜM:**

İfade paydalarına parçalanırsa;

$$x = \frac{3y}{y} - \frac{8}{y}$$

$$x = 3 - \frac{8}{y}$$

burada  $y$ 'ye 8'i bölen ve aynı zamanda  $x$ 'i doğal sayı yapan değerler verilmeli

8'in doğal sayı bölenleri  $\{1,2,4,8\}$  dir. bunlarda 1 ve 2 ifadeyi negatif yapar geriye 4 ve 8 yani iki sayı kalır.

Buradan  $4+8=12$  olur.

### ÖRNEK( 39 )

$$\frac{2a}{3} + \frac{3b}{4} + \frac{c}{6} = 5 \quad \text{ise} \quad \frac{4a}{15} + \frac{3b}{10} + \frac{c}{15} = ?$$

**ÇÖZÜM:**

$\frac{4a}{15} + \frac{3b}{10} + \frac{c}{15}$  ifadesini  $\frac{1}{5}$  parantezine alalım;

$$\frac{1}{5} \left( \frac{4a}{3} + \frac{3b}{2} + \frac{c}{3} \right)$$

$$\frac{2a}{3} + \frac{3b}{4} + \frac{c}{6} = 5$$

ifadesinin her iki tarafını 2 ile

çarpalım;

$$2\left(\frac{2a}{3} + \frac{3b}{4} + \frac{c}{6}\right) = 2.5$$

$$\frac{4a}{3} + \frac{3b}{2} + \frac{c}{3} = 10$$

şimdi bulunan bu değeri

$$\frac{1}{5} \left( \frac{4a}{3} + \frac{3b}{2} + \frac{c}{3} \right)$$
 ifadesinde yerine yazalım

$$\frac{1}{5} \cdot 10 = \frac{10}{5} = 2 \text{ bulunur.}$$

## ÖRNEK( 40 )

$$\left[ \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \right) \cdot \frac{1}{4} \right] : \frac{5}{6} = ?$$

(ÖSS 2002)

**ÇÖZÜM:**

$$\left[ \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \right) \cdot \frac{1}{4} \right] \cdot \frac{5}{6} = \frac{1}{24} \cdot \frac{5}{6}$$

$$= \frac{1}{24} \cdot \frac{6}{5} \text{ (sadeleştirirsek)}$$

$$= \frac{1}{20} \text{ bulunur.}$$

## ÖRNEK( 41 )

$$\left( \frac{3}{1-\frac{3}{4}} + \frac{\frac{3}{4}-1}{3} \right) \div \frac{1}{12} = ?$$

(ÖSS-2000)

ÇÖZÜM:

$$\begin{aligned} \left( \frac{3}{1-\frac{3}{4}} + \frac{\frac{3}{4}-1}{3} \right) \div \frac{1}{12} &= \left( \frac{3}{\frac{1}{4}} + \frac{-\frac{1}{4}}{3} \right) \cdot 12 \\ &= \left( 3 \cdot \frac{4}{1} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \right) \cdot 12 \\ &= \left( 12 - \frac{1}{12} \right) \cdot 12 = \left( \frac{144-1}{12} \right) \cdot 12 = 143 \end{aligned}$$

bulunur.

MERDİVENLİ(ZİNCİR -BASAMAK)

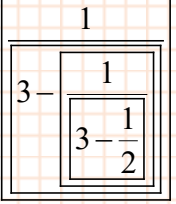
KESİRLER:

Önce kesir çizgileri belirlenir. Paydaki ve paydadaki kesirler uçlardan kesir çizgisine doğru işleme tabi tutulur.

## ÖRNEK( 42 )

$$3 - \frac{1}{3 - \frac{1}{3 - \frac{1}{2}}} = ?$$

ÇÖZÜM:

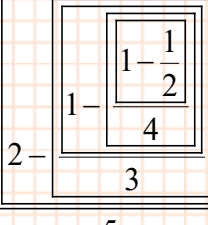
3 -  çerçevesi işlem sırası takip edilir.

$$\begin{aligned} 3 - \frac{1}{3 - \frac{1}{3 - \frac{1}{2}}} &= 3 - \frac{1}{3 - \frac{1}{\frac{5}{2}}} \rightarrow \frac{2}{5} \\ &= 3 - \frac{1}{3 - \frac{2}{5}} \rightarrow \frac{13}{5} \\ &= 3 - \frac{1}{\frac{13}{5}} \rightarrow \frac{5}{13} \\ &= 3 - \frac{5}{13} = \frac{39-5}{13} = \frac{34}{13} \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

## ÖRNEK( 43 )

$$2 - \frac{1 - \frac{1}{2}}{\frac{4}{3}} = ?$$

ÇÖZÜM:



çerçevesi işlem sırası takip edilir.

$$\begin{aligned} 2 - \frac{1 - \frac{1}{2}}{\frac{4}{3}} &= 2 - \frac{\frac{1}{2}}{\frac{4}{3}} \rightarrow \frac{1}{8} \\ &= 2 - \frac{1}{\frac{8}{3}} \rightarrow \frac{7}{8} \\ &= \frac{2 - \frac{7}{8}}{\frac{3}{5}} = \frac{\frac{9}{8}}{\frac{3}{5}} = \frac{45}{24} = \frac{15}{8} \end{aligned}$$

## ÖRNEK( 44 )

$$\frac{a - \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{4}}} = 3 \text{ ise } a = ?$$

## ÇÖZÜM:

$$\begin{aligned} \frac{a - \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{4}}} = 3 &\rightarrow \frac{a - \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{\frac{3}{4}}} = 3 \rightarrow \frac{2a - 1}{1 - \frac{4}{3}} = 3 \rightarrow \\ \frac{2a - 1}{-\frac{1}{3}} = 3 &\rightarrow \frac{2a - 1}{2} = 3 \left( -\frac{1}{3} \right) \rightarrow \frac{2a - 1}{2} = -1 \\ 2a - 1 = -2 &\rightarrow a = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

## ÖRNEK( 45 )

$$\left( \frac{1 - \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{2}}} \right)^{-1} : \left( 2 - \frac{3}{4} \right) = ?$$

## ÇÖZÜM:

$$\begin{aligned} \left( \frac{1 - \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{2}}} \right)^{-1} : \left( 2 - \frac{3}{4} \right) &= \left( \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{\frac{1}{2}}} \right)^{-1} : \left( \frac{5}{4} \right) \\ &= \left( \frac{\frac{1}{2}}{1 - 2} \right)^{-1} \cdot \left( \frac{4}{5} \right) \\ &= \left( -\frac{1}{2} \right)^{-1} \cdot \left( \frac{4}{5} \right) = -2 \cdot \left( \frac{4}{5} \right) = -\frac{8}{5} \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

## ÖRNEK( 46 )

$$3 + \frac{a}{3 + \frac{a}{3 + \frac{a}{\dots}}} = 5 \text{ ise } a = ?$$

## ÇÖZÜM:

Sonsuza giden kesirlerde eşitliğin sonsuz tarafı aynı düzende gidiyorsa, ifadenin tamamına benzeyen ilk kısma eşitliğin sağındaki değer atanır.

$$3 + \frac{a}{3 + \frac{a}{3 + \frac{a}{\dots}}} = 5 \rightarrow 3 + \frac{a}{\boxed{3 + \frac{a}{3 + \frac{a}{\dots}}}} = 5 \rightarrow 5$$

(çerçeve içine alınmış ifade ile ifadenin tamamının aynı okunduğuna dikkat edelim )

$$\rightarrow 3 + \frac{a}{5} = 5 \rightarrow \frac{a}{5} = 2$$

$\rightarrow a = 10$  bulunur.

## ÖRNEK( 47 )

$$7 - \frac{16}{6 - \frac{8}{5 - \frac{x}{3}}} = 3 \text{ ise } x = ?$$

## ÇÖZÜM:

Bu tür soruları merdivenli kesir mantığı yerine aşağıdaki gibi çözmek daha kolaydır.

$$7 - \frac{16}{6 - \frac{8}{5 - \frac{x}{3}}} = 3 \rightarrow 7 - \frac{16}{\boxed{6 - \frac{8}{5 - \frac{x}{3}}}} = 3$$

4 olmalıdır

$$\rightarrow \frac{16}{\boxed{6 - \frac{8}{5 - \frac{x}{3}}}} = 4 \rightarrow 6 - \frac{8}{\boxed{5 - \frac{x}{3}}} = 4$$

2 olmalıdır

$$\rightarrow \frac{8}{\boxed{5 - \frac{x}{3}}} = 2 \rightarrow 5 - \frac{x}{3} = 4 \rightarrow \frac{x}{3} = 1$$

4 olmalıdır.

$x = 3$  bulunur.

## ÖRNEK( 48 )

$$1 - \frac{1 - \frac{x}{3}}{3} = \frac{3}{5} \text{ ise } x = ?$$

## ÇÖZÜM:

$$1 - \frac{1 - \frac{x}{3}}{3} = \frac{3}{5} \rightarrow 1 - \frac{3}{5} = \frac{1 - \frac{x}{3}}{3}$$

$$\rightarrow \frac{2}{5} = \frac{1 - \frac{x}{3}}{3} \text{ 2 olmalıdır.}$$

$$1 - 2 = \frac{1 - \frac{x}{3}}{3} \rightarrow \frac{1 - \frac{x}{3}}{3} = -1 \text{ -3 olmalıdır.}$$

$$1 - \frac{x}{3} = -3 \rightarrow 1 + 3 = \frac{x}{3} \rightarrow \frac{x}{3} = 4$$

x=12 bulunur.

## ÖRNEK( 49 )

$$7 + \frac{18}{7 + \frac{18}{7 + \frac{18}{\dots}}} = ?$$

## ÇÖZÜM:

İfadeyi önce x'e eşitleyelim. Daha sonra bu tür kesirler için öğrendiğimiz yöntemi uygulayalım

$$7 + \frac{18}{7 + \frac{18}{7 + \frac{18}{\dots}}} = x \rightarrow 7 + \frac{18}{\underbrace{7 + \frac{18}{7 + \frac{18}{\dots}}}_{x \text{ olsun}}} = x$$

$$7 + \frac{18}{x} = x \text{ her iki tarafı } x \text{ ile çarparsak}$$

$$7x + 18 = x^2 \text{ buradan;}$$

$$x^2 - 7x - 18 = 0 \text{ denklemini çözümlerse}$$

$$\begin{array}{r} x \quad -9 \\ x \quad 2 \\ (x-9)(x+2)=0 \\ \downarrow \quad \downarrow \end{array}$$

$$x-9=0 \quad x+2=0$$

$$x=9 \quad x=-2 \text{ bulunur.}$$

İfadenin tamamı pozitif olduğundan sonucun negatif çıkması mümkün değil.

O halde cevap 9 olur.

## ÖRNEK( 50 ) A

$$x + 3 + \frac{9}{x + \frac{9}{x + \frac{9}{\dots}}} = 12 \text{ ise } x = ?$$

## ÇÖZÜM:

$$x + 3 + \frac{9}{x + \frac{9}{x + \frac{9}{\dots}}} = 12 \text{ ifadeyi düzenlersek}$$

$$x + \frac{9}{x + \frac{9}{x + \frac{9}{\dots}}} = 12 - 3 = 9$$

$$x + \frac{9}{\underbrace{x + \frac{9}{x + \frac{9}{\dots}}}_{9 \text{ olmalıdır.}}} = 9 \rightarrow x + \frac{9}{9} = 9$$

$$x + 1 = 9$$

$$x = 8 \text{ olur.}$$

## ÖRNEK( 51 )

$$3 - \frac{1 + \frac{1 - \frac{1 + \dots}{2}}{2}}{2} = ?$$

ÇÖZÜM:

$$3 - \frac{1 + \frac{1 - \frac{1 + \dots}{2}}{2}}{2} = ? \text{ ifade düzenli bir görüntü}$$

arzetmediğinden önce bu ifadeyi düzenlemeliyiz

$$3 - \frac{1 + \frac{1 - \frac{1 + \dots}{2}}{2}}{2} = x \rightarrow$$

$$1 - \frac{1 + \frac{1 - \frac{1 + \dots}{2}}{2}}{2} = x - 2$$

$$1 - \frac{1 + \frac{1 - \frac{1 + \dots}{2}}{2}}{2} = x - 2 \rightarrow$$

$$1 - \frac{1 + \frac{x-2}{2}}{2} = x - 2$$

$$3 - x = \frac{1 + \frac{x-2}{2}}{2} \rightarrow 6 - 2x = 1 + \frac{x-2}{2}$$

her iki taraf 2 ile çarpılırsa

$$12 - 4x = 2 + x - 2$$

$$5x = 12$$

$$x = \frac{12}{5} \text{ bulunur.}$$

## RASYONEL SAYILARDA SIRALAMA

1) Paydaları eşit olan pozitif iki rasyonel sayıdan payı küçük olan daha küçüktür.

$$\frac{4}{9} < \frac{5}{9} < \frac{9}{9}$$

2) Payları eşit olan iki pozitif rasyonel sayıdan paydası büyük olan daha küçüktür.

$$\frac{17}{8} < \frac{17}{4} < \frac{17}{2}$$

3)  $\frac{a}{b}$  ve  $\frac{c}{d}$  iki pozitif kesir olsunlar

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} > 1 \text{ ise } \frac{a}{b} > \frac{c}{d} \text{ dir.}$$

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = 1 \text{ ise } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ dir.}$$

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} < 1 \text{ ise } \frac{a}{b} < \frac{c}{d} \text{ dir.}$$

$$\diamond \frac{5}{4} \text{ ve } \frac{8}{7} \text{ için } \frac{5}{4} \div \frac{8}{7} = \frac{35}{32} > 1 \Rightarrow \frac{5}{4} > \frac{8}{7} \text{ dir.}$$

4) İki rasyonel sayı pay paydaya bölünerek karşılaştırılabilir. Bu iki ondalık sayıdan tam kısım büyük olan daha büyük, eşit ise virgülden sonraki sayılara bakılır. İlk farklı sayı için büyük sayıyı içeren sayı diğerinden büyüktür.

$$\diamond 5,123 \text{ ile } 2,98 \text{ için } 5 > 2 \text{ ol.dan } 5,123 > 2,98$$

$$\diamond 2,234 \text{ ile } 2,235 \text{ için } 4 < 5 \text{ ol.dan } 2,234 < 2,235$$

5) pay ve paydası eşit olmayan iki kesir; ya pay, yada paydaları eşitlenerek 1 ve 2.ci kurala uygun hale getirilip sıralanır.

$$\frac{2}{3} \text{ ile } \frac{4}{7} \text{ için } \frac{2.2}{3.2} = \frac{4}{6} > \frac{4}{7}$$



6) Pay ve paydası arasındaki fark eşit olan pozitif kesirlerin ; pay ve paydasındaki sayılar büyüdükçe basit kesirler için değer artar, bileşik kesirler için değer azalır.

$$\frac{5}{6} < \frac{8}{9} < \frac{14}{15} \quad \text{ve} \quad \frac{10}{7} < \frac{8}{5} < \frac{6}{3} \text{ dir.}$$

7) Negatif sayılar karşılaştırılırken önce pozitifmiş gibi karar verilir, sonra da yönler ters çevrilir.

$$-\frac{3}{4} \text{ ile } -\frac{2}{4} \text{ için } \frac{3}{4} > \frac{2}{4} \Rightarrow -\frac{3}{4} < -\frac{2}{4}$$

## ÖRNEK(1)

$$a = \frac{2}{5}, b = \frac{3}{4}, c = \frac{4}{5} \text{ ise } a, b, c' \text{ yi sırala}$$

## ÇÖZÜM:

Paydaları eşitlersek

$$a = \frac{2}{5}, b = \frac{3}{4}, c = \frac{4}{5}$$

(4) (5) (4)

$$a = \frac{8}{20}, b = \frac{15}{20}, c = \frac{16}{20}$$

paydaları eşit olan pozitif rasyonel sayıların payı büyük olan daha büyüktür.

$c > b > a$  olur.

## ÖRNEK(2)

$$\frac{3}{23}, \frac{4}{17}, \frac{6}{43} \text{ sayılarını sıralayın}$$

## ÇÖZÜM:

Payları eşitlemek burada daha kolaydır.

$$\frac{3}{23}, \frac{4}{17}, \frac{6}{43} \rightarrow \frac{3}{23}, \frac{4}{17}, \frac{6}{43}$$

(4) (3) (2)

$$\rightarrow \frac{12}{92}, \frac{12}{51}, \frac{12}{86}$$

payları eşit olan pozitif rasyonel sayıların paydası küçük olan daha büyüktür.

$$\frac{12}{51} > \frac{12}{86} > \frac{12}{92}$$

## ÖRNEK(3)

$$\frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6} \text{ sayılarını sıralayın}$$

## ÇÖZÜM:

Pay ve paydası arasında ortak fark olduğundan

$$\frac{3}{4} < \frac{4}{5} < \frac{5}{6} \text{ olur.}$$

## ÖRNEK(4)

$$\frac{7}{10}, \frac{12}{15}, \frac{17}{20} \text{ sayılarını sıralayın}$$

## ÇÖZÜM:

Pay ve paydası arasında ortak fark olduğundan

$$\frac{7}{10} < \frac{12}{15} < \frac{17}{20} \text{ olur.}$$

## ÖRNEK(5)

$\frac{5}{2}, \frac{7}{4}, \frac{8}{5}$  sayılarını sıralayın

## ÇÖZÜM:

Pay ve paydası arasında ortak fark olduğundan

$$\frac{5}{2} > \frac{7}{4} > \frac{8}{5} \text{ olur. (Bileşik kesir)}$$

## ÖRNEK(6)

$\frac{3}{4}, \frac{5}{7}, \frac{7}{10}$  sayılarını sıralayın

## ÇÖZÜM:

Bu soruyu pay-payda eşitleme veya ortak fark kurallarından birini kullanarak yapabiliriz. Hangisi size kolay gelirse onu uygulayın. Biz burada örnek olsun diye farkları eşitleme yöntemiyle çözeceğiz.

$$\frac{3}{4}, \frac{5}{7}, \frac{7}{10} \rightarrow \frac{18}{24}, \frac{15}{21}, \frac{14}{20}$$

(6) (3) (2)

ortak farklar eşitlendi. Şimdi sıralamaya geçebiliriz.

$$\frac{18}{24} > \frac{15}{21} > \frac{14}{20} \text{ olur.}$$

## ÖRNEK(7)

$\frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{7}{9}$  sayılarını sıralayın

## ÇÖZÜM:

Bu soruyu da ortak farktan çözelim

$$\frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{7}{9} \rightarrow \frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{7}{9}$$

(2) (2)

$$\frac{4}{6}, \frac{8}{10}, \frac{7}{9}$$

şimdi sıralayabiliriz.

$$\frac{8}{10} > \frac{7}{9} > \frac{4}{6} \text{ olur.}$$

## ÖRNEK(8)

$x \in \mathbb{R}^-$  olmak üzere;

$$a = \frac{x}{3}, b = \frac{x}{4}, c = \frac{2x}{5} \quad a, b, c \text{ sayılarını}$$

sıralayın

## ÇÖZÜM:

Paylarını eşitlersek

$$a = \frac{x}{3}, b = \frac{x}{4}, c = \frac{2x}{5}$$

(2) (2)

$$a = \frac{2x}{3}, b = \frac{2x}{4}, c = \frac{2x}{5}$$

$x$  negatif olduğundan kesirler de negatiftir. Negatif rasyonel sayılar önce pozitifmiş gibi sıralanıp daha sonra yönleri değiştirilir.

Paylar eşit olduğundan paydası küçük olan daha büyüktür.

$$a > b > c$$

Ancak sayılar negatif olduğu için asıl sıralama

$$a < b < c \text{ olur.}$$

## ÖRNEK(9)

$x < y < 0$  olmak üzere

$a = \frac{x}{3}$ ,  $b = \frac{x}{y}$ ,  $c = \frac{y}{3}$  ise  $a, b, c$  sayılarını

sıralayın

## ÇÖZÜM:

$x = -2$ ,  $y = -1$  olsun

$$a = \frac{-2}{3}, b = \frac{-2}{-1}, c = \frac{-1}{3}$$

$$a = \frac{-2}{3}, b = 2, c = \frac{-1}{3}$$

$b$  pozitif olduğundan en büyüktür.  
o halde  $b > c > a$  olur.

## ÖRNEK(10)

$$\frac{2x}{3} = \frac{3y}{4} = \frac{4z}{5} = k \text{ ve } k \in \mathbb{Z}^- \text{ ise } x, y, z \text{ 'yi}$$

sıralayın.

## ÇÖZÜM:

$k = -1$  seçelim

$$\frac{2x}{3} = \frac{3y}{4} = \frac{4z}{5} = -1$$

$$\frac{2x}{3} = -1 \rightarrow x = -\frac{3}{2}$$

$$\frac{3y}{4} = -1 \rightarrow y = -\frac{4}{3}$$

$$\frac{4z}{5} = -1 \rightarrow z = -\frac{5}{4}$$

pay-payda arasında orta fark olan pozitif bileşik kesirler sayı değeri büyüdükçe kesirler küçülür.

$$x > y > z$$

fakat bu kesirler negatif olduklarından  
 $x < y < z$  olur.

## ÖRNEK(11)

$x < y < 0$  ve  $a = \frac{x-y}{y}$  ise aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

A)  $0 < a$  B)  $a < -3$  C)  $-2 < a < 0$

D)  $-1 < a < 0$  E)  $-2 < a < +1$

## ÇÖZÜM:

$$a = \frac{x-y}{y} \rightarrow a = \frac{x}{y} - \frac{y}{y} \rightarrow a = \frac{x}{y} - 1$$

$x$ , mutlak değerce  $y$ 'den büyük olduğundan  $\frac{x}{y}$  pozitif bir bileşik kesirdir. Yani  $1$ 'den büyüktür. Bu durumda  $\frac{x}{y} - 1 > 0$  olur.

O halde cevap A şıkkı olur.

## ÖRNEK(12)

$a < 0 < b$  olmak üzere  $k = \frac{b-a}{a}$  gerçel sayısı veriliyor. Buna göre  $k$  sayısı aşağıdakilerden hangisi olabilir?

A)  $-\frac{4}{3}$  B)  $-\frac{2}{3}$  C)  $-1$  D)  $\frac{2}{3}$  E)  $\frac{4}{3}$

## ÇÖZÜM:

$$k = \frac{b}{a} - \frac{a}{a} = \frac{b}{a} - 1$$

$a$  ve  $b$  zıt işaretli olduklarından  $\frac{b}{a}$  negatiftir.

O yüzden  $\frac{b}{a} - 1 < -1$  dir . yani cevap A şıkkı olur.

## ÖRNEK(13)

$x \in \mathbb{N}$  olmak üzere

$$a = \frac{x+2}{x+10}, b = \frac{x+6}{x+9}, c = \frac{x+8}{x+11}$$

ise a,b,c sayılarını sıralayın

## ÇÖZÜM:

$x=0$  olsun

$$a = \frac{2}{10}, b = \frac{6}{9}, c = \frac{8}{11} \text{ elde edilir.}$$

B ve c'yi ortak farktan sıralarsak  $b < c$  olur.

A ve b yi de 3.sıralama özelliğinden sıralarsak

$$\frac{b}{a} = \frac{\frac{6}{9}}{\frac{2}{10}} = \frac{60}{18} > 1 \text{ olduğundan } b > a \text{ dır.}$$

sonuç olarak

$$a < b < c \text{ olur.}$$

## ÖRNEK(14)

$x, y, z \in \mathbb{Z}^+$ ,  $2x=3y$  ve  $5y=3z$  ise x,y,z sayılarını sıralayın.

## ÇÖZÜM:

Ortak olan y'ye her iki eşitliğin karşısındaki 2 ve 3 'ün bir katı olan 6'yı versek

$y=6$  için  $x=9$  ve  $z=10$  olur. Bu durumda

$$y < x < z \text{ bulunur.}$$

## ÖRNEK(15)

$x < 0$  olmak üzere

$$a = \frac{x}{0,2}, b = \frac{x}{0,3}, c = \frac{x}{0,4} \text{ ise } a, b, c$$

sayılarını sıralayın

## ÇÖZÜM:

Sayılar pozitif olsaydılar paylar eşit olduğundan paydası küçük olan daha büyük olurdu yani  $a > b > c$  Fakat sayılar negatif olduğundan sıralama;

$$a < b < c \text{ olur.}$$

## ÖRNEK(16)

$$\frac{123}{124}, \frac{135}{137}, \frac{142}{145} \text{ sayılarını sıralayın}$$

## ÇÖZÜM:

Pay ve paydadaki değerler büyük olduğundan pay veya payda eşitleme zor olur. En mantıklı yol farkları eşitlemektir.

$$\frac{123}{124}, \frac{135}{137}, \frac{142}{145} \rightarrow \frac{738}{744}, \frac{405}{411}, \frac{284}{290}$$

(6)                      (3)                      (2)

ortak fark eşitlendi o halde sıralama

$$\frac{738}{744} > \frac{405}{411} > \frac{284}{290} \text{ olur.}$$

## ÖRNEK(17)

$$\left. \begin{array}{l} a+b=\frac{1}{3} \\ a+c=\frac{1}{4} \\ b+c=\frac{1}{6} \end{array} \right\} \text{ ise } a,b,c\text{'yi sıralayın}$$

## ÇÖZÜM 1:

İfadeleri alt alta toplayıp  $a+b+c$ 'yi bulur , daha sonra tek tek denklemlerden faydalananarak  $a,b,c$ 'yi buluruz. Sonrası kolay;

$$\left. \begin{array}{l} a+b=\frac{1}{3} \\ a+c=\frac{1}{4} \\ b+c=\frac{1}{6} \end{array} \right\} 2(a+b+c)=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}$$

$$2(a+b+c)=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}$$

(4) (3) (2)

$$2(a+b+c)=\frac{4+3+2}{12}=\frac{9}{12}$$

$$(a+b+c)=\frac{9}{24}=\frac{3}{8} \text{ bundan sonra } a,b,c \text{ tek tek}$$

bulunur.

$$a+b+c=\frac{3}{8} \rightarrow c=\frac{1}{24}$$

$\frac{1}{3}$

$$a+b+c=\frac{3}{8} \rightarrow a=\frac{5}{24}$$

$\frac{1}{6}$

$$a+c+b=\frac{3}{8} \rightarrow b=\frac{3}{24}$$

$\frac{1}{4}$

o halde  $a>b>c$  olur.

## ÇÖZÜM 2:

Görüldüğü gibi 1 çözüm oldukça uzun. Şimdi göstereceğimiz yol oldukça pratik;

$a+b$  ,  $a+c$  ,  $b+c$  ifadeleri birer kesirdir ve sıralanabilir

$\frac{1}{3} > \frac{1}{4} > \frac{1}{6}$  olduğundan  $a+b>a+c>b+c$  dir. bu eşitsizlikler ikiye ikiye ele alınırsa

$$\left. \begin{array}{l} a+b>a+c \rightarrow b>c \\ a+c>b+c \rightarrow a>b \end{array} \right\} a>b>c \text{ bulunur.}$$

## ÖRNEK(18)

$$x < 0 , a = \frac{x}{10}, b = \frac{x}{11}, c = \frac{x}{12} \quad \text{ise}$$

Aşağıdakilerden Hangisi Doğrudur? ( 88-öys)

- A)  $c<a<b$       B)  $b<a<c$       C)  $b<c<a$   
D)  $a<c<b$       E)  $a<b<c$

## ÇÖZÜM:

Pozitif kesirler için paylar eşit olduğunda paydası küçük olan daha büyüktür. Önce pozitifmiş gibi sıralayalım

$$a>b>c$$

kesirler  $x<0$  dan dolayı negatif olduğundan

$$a<b<c \text{ olur. Yani cevap E şıkkı olur.}$$

## ARADA OLMA:

a ve b rasyonel ise a ve b arasında  
 $a < \frac{a+b}{2} < b$  olacak şekilde bir  $\frac{a+b}{2}$  sayısı  
 vardır.

## ÖRNEK(19)

$\frac{2}{17}$  ile  $\frac{10}{17}$  sayıları arasına eşit aralıkta 3 sayı  
 yazılacak. İkinci sayı ne olur?

## ÇÖZÜM:

$\frac{2}{17} < a < b < \frac{10}{17}$  şeklinde düşünürsek  $\frac{10}{17}$  kesri ile  
 $\frac{2}{17}$  kesri arasında 4 aralık var. Bu aralık  
 uzunluğunu bulalım.

$\frac{10 - 2}{17 - 17} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$  o halde b için iki aralık  
 gerekeceğinden  $2 \cdot \frac{2}{17} = \frac{4}{17}$  bunu  $\frac{2}{17}$ 'ye eklersek;  
 $b = \frac{2}{17} + \frac{4}{17} = \frac{6}{17}$  olur

## ÖRNEK(20)

$\frac{5}{6}$  ile  $\frac{8}{5}$  sayıları arasına eşit aralıkta 2 sayı  
 yazılacak . ikinci sayı ne olur?

## ÇÖZÜM:

$\frac{5}{6} < a < b < \frac{8}{5}$  şeklinde düşünürsek  $\frac{5}{6}$  kesri ile  $\frac{8}{5}$   
 kesri arasında 3 aralık var. Bu aralık uzunluğunu  
 bulalım.

$$\frac{8 - 5}{5 - 6} = \frac{23}{3} = \frac{23}{90}$$

o halde b için iki aralık gerekeceğinden

$$2 \cdot \frac{23}{90} = \frac{46}{90} \text{ bunu } \frac{5}{6} \text{ 'ye eklersek } \frac{5}{6} + \frac{46}{90} = \frac{121}{90} \text{ (15)}$$

bulunur.

## ÖRNEK(21)

$\frac{2}{7} < x < \frac{3}{7}$  ise x aşağıdakilerden hangisi olabilir?

- A)  $\frac{1}{14}$  B)  $\frac{5}{14}$  C)  $\frac{5}{6}$  D)  $\frac{1}{4}$  E)  $\frac{1}{12}$

(ÖSS 2002)

## ÇÖZÜM:

Bu tür sorularda önce şıklardaki paydalara bakılır  
 ve sorudaki paydalar benzetilerek bakılır.  
 Önce paydayı 14'e genişletelim

$$\frac{2}{7} < x < \frac{3}{7} \rightarrow \frac{4}{14} < x < \frac{6}{14} \text{ görüldüğü gibi B}$$

şıkkı x için alınabilir bir değerdir. O halde cevap B  
 şıkkı olur.

## ÖRNEK(22)

$n \in \mathbb{Z}^+$  olmak üzere  $x = \frac{2n-1}{4}$  sayısı  $\frac{5}{2}$  ile  $\frac{17}{3}$  arasında ise n'nin alacağı kaç değer vardır?

## ÇÖZÜM:

$\frac{5}{2} < \frac{2n-1}{4} < \frac{17}{3}$  olur. Bu eşitsizlik çözülür.

Önce her tarafı 4 ile çarpalım

$$4 \cdot \frac{5}{2} < 4 \cdot \frac{2n-1}{4} < 4 \cdot \frac{17}{3}$$

$$10 < 2n-1 < \frac{68}{3}$$

$$10+1 < 2n-1+1 < \frac{68}{3}+1$$

$$11 < 2n < \frac{71}{3} \quad (\text{her taraf 2'ye bölünür.})$$

$$\frac{11}{2} < n < \frac{71}{6}$$

o halde  $n=6,7,8,9,10,11$  değerlerini alır. Yani n, 6 değer alır.

## ÖRNEK(23)

$\frac{7}{6}$  ile  $\frac{5}{3}$  arasındaki sayıları  $\frac{x}{12}$  diye yazarsak

kaç tane x tamsayısı elde edilebilir?

## ÇÖZÜM:

$$\frac{7}{6} < \frac{x}{12} < \frac{5}{3} \rightarrow \frac{14}{12} < \frac{x}{12} < \frac{20}{12}$$

(2) (4)

burada x için  $14 < x < 20$  aralığı geçerli olur. Buradan  $x=15,16,17,18$  değerlerini alabilir. O halde x'in 4 değeri vardır.

## ÖRNEK(24)

$\frac{1}{2} < a < b < \frac{11}{4}$  sıralamasında birbirini izleyen sayılar arasındaki farklar eşittir. Buna göre  $a+b=?$

(ÖSS 2003)

## ÇÖZÜM:

Ortak farkın sabit olduğu sayı dizilerinde baştan ve sondan eşit uzaklıktaki sayıların toplamı eşittir(bu bilgi ardışık sayılar konusunda da verilmişti)

$$\frac{1}{2} < a < b < \frac{11}{4}$$

$$a+b = \frac{1}{2} + \frac{11}{4} \rightarrow a+b = \frac{2+11}{4} = \frac{13}{4} \text{ olur.}$$

(2)

## ÖRNEK(25)

$\frac{7}{5} < x < \frac{5}{3}$  olacak şekilde her iki kesre eşit uzaklıktaki x kesri kaçtır?

## ÇÖZÜM:

$$x = \frac{\frac{7}{5} + \frac{5}{3}}{2}$$

$$x = \frac{\frac{21+25}{15}}{2}$$

$$x = \frac{46}{15} \cdot \frac{1}{2} \text{ ve } x = \frac{23}{15} \text{ bulunur.}$$

**KONUMUZ BİTTİ. ŞİMDİ TESTLERE  
GEÇEBİLİRSİNİZ**

**DİLERSENİZ KONU ANLATIMINI BİR DE  
YOUTUBE KANALIMIZDAN VİDEO OLARAK  
DA İZLEYEBİLİRSİNİZ**

**Youtube kanalımız: CEBİR HOCAM**

**Başarılar diliyorum  
İbrahim Halil BABAOĞLU  
Matematik Öğretmeni**