

ORAN – ORANTI

Oran: En az biri sıfırdan farklı aynı cinsten iki çokuğun bölümüne oran denir. Oran birimsizdir.

Oranti: İki ve daha fazla oranın eşitliğine oranti denir.

$$\frac{a}{b} \rightarrow \text{oran} \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \rightarrow \text{oranti}$$

ORANTININ ÖZELLİKLERİ

$$1) \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a.d = b.c$$

$$2) \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d} \text{ veya } \frac{d}{b} = \frac{c}{a}$$

$$3) \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{b}{a} = \frac{d}{c}$$

$$4) \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a \pm b}{b} = \frac{c \pm d}{d}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b \pm a} = \frac{c}{d \pm c}$$

$$5) m \neq 0 \text{ ve } n \neq 0$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k \Rightarrow \frac{n.a \pm m.c}{n.b \pm m.d} = k$$

$$6) m \neq 0$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k \Rightarrow \frac{a.m}{b.m} = \frac{c}{d} = k, \frac{a:m}{b:m} = \frac{c}{d} = k$$

$$7) m \in R, \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} \pm m = \frac{c}{d} \pm m$$

$$8) \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = k \Rightarrow a:c:e = b:d:f = k$$

$$9) \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} \text{ ise } \frac{a}{t.b} = \frac{c}{t.d} = \frac{e}{t.f}$$

$$\text{veya } \frac{t.a}{b} = \frac{t.c}{d} = \frac{t.e}{f} \text{ yazılabilir.}$$

NOT: (sadeleştirme)

İşlemlerimizin çoğu sadeleştirme olduğundan bu konumuzda sadeleştirme tekniklerini öğrenelim. Aşağıda kimlerin sadeleştirileceği, kimlerin sadeleştirilemeyeceği açıklanmıştır. Dikkatle inceleyin hata yapmayın

Kimler sadeleşir

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Kimler sadeleşmez

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

ÖRNEK(1)

$$ax = by = cz = 8 \text{ ve } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{5}{4} \text{ ise } x + y + z = ?$$

ÇÖZÜM:

Once a,b ve c yi ayrı ayrı bulalim

$$\begin{array}{ccc} ax = by = cz = 8 & & \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ ax = 8 & by = 8 & cz = 8 \\ \cancel{\frac{a}{x}} = \frac{8}{x} & \cancel{\frac{b}{y}} = \frac{8}{y} & \cancel{\frac{c}{z}} = \frac{8}{z} \\ a = \frac{8}{x} & b = \frac{8}{y} & c = \frac{8}{z} \end{array}$$

Şimdi bu değerleri $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{5}{4}$ ifadesinde yazalim

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{5}{4} \Rightarrow \frac{1}{\frac{8}{x}} + \frac{1}{\frac{8}{y}} + \frac{1}{\frac{8}{z}} = \frac{5}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{8} + \frac{y}{8} + \frac{z}{8} = \frac{5}{4} \Rightarrow \frac{x+y+z}{8} = \frac{5}{4}$$

$$\Rightarrow x + y + z = 10 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK(2)

$a, b, c \in \mathbb{Z}^+$ ve $\frac{2a}{3} = \frac{7b}{8} = \frac{2c}{5}$ ise a, b, c yi sıralayınız.

ÇÖZÜM:

a, b, c pozitif olduğundan $\frac{2a}{3} = \frac{7b}{8} = \frac{2c}{5}$ ifadesini $+1'$ e eşitleyelim

$\frac{2a}{3} = \frac{7b}{8} = \frac{2c}{5} = 1$ şimdi a, b ve c yi ayrı ayrı bulalım

$$\frac{2a}{3} = \frac{7b}{8} = \frac{2c}{5} = 1$$

$$\begin{array}{lll} \frac{2a}{3} \cancel{\times} 1 & \frac{7b}{8} \cancel{\times} 1 & \frac{2c}{5} \cancel{\times} 1 \\ \cancel{2}a = \frac{3}{2} & \cancel{7}b = \frac{8}{7} & \cancel{2}c = \frac{5}{2} \end{array}$$

şimdi bulunan rasyonel değerleri sıralayalım

$$\begin{array}{lll} a = \frac{3}{2} = \frac{21}{14}, & b = \frac{8}{7} = \frac{16}{14}, & c = \frac{5}{2} = \frac{35}{14} \\ (7) & (2) & (7) \end{array}$$

paydaları eşit rasyonel sayılarından payı büyük olan daha büyüktür.

O halde cevap $c > a > b$ olur.

BİR DE SİZ ÇÖZÜN:

İfadeyi $+1$ yerine $+14$ seçseydik işimiz daha kolay olurdu. Siz bu soruyu bir de $14'$ e eşitleyip çözüm(sadeleştirme yapmayı unutmayın yoksa iş daha da zorlaşır)

ÖRNEK(3)

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{3}{2} \text{ ise } \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2} = ?$$

ÇÖZÜM:

Once a ile b arasındaki bağıntıyı bulalım

$$\frac{a+b}{a-b} \cancel{\times} \frac{3}{2} \Rightarrow 2a + 2b = 3a - 3b$$

$$\Rightarrow 2b + 3b = 3a - 2a$$

$$\Rightarrow 5b = a$$

$a = 5b$ olduğuna göre a yerine $5b$ azılabılır

$$\frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2} = \frac{(5b)^2 + b^2}{(5b)^2 - b^2}$$

$$= \frac{25b^2 + b^2}{25b^2 - b^2} = \frac{\cancel{26}b^2}{\cancel{24}b^2} = \frac{13}{12} \text{ olur.}$$

ÖRNEK(4)

$$x, y, z \in \mathbb{Z}^+ \quad \frac{x}{3} = \frac{y}{5} = \frac{z}{4} \quad \text{ve} \quad xy - 15z = 0 \text{ ise}$$

$$x + z - y = ?$$

ÇÖZÜM:

Oran orantının bu tip sorularında genelde uyguladığımız yöntem orantıyı bir k değişkenine(orantı sabiti) eşitlemektedir.

$$\frac{x}{3} = \frac{y}{5} = \frac{z}{4} = k \text{ buradan}$$

$x = 3k, y = 5k, z = 4k$ bulunur. Şimdi bu değerleri denklemde yerine yazalım

$$xy - 15z = 0 \Rightarrow (3k)(5k) - 15(4k) = 0$$

$$\Rightarrow 15k^2 - 60k = 0$$

$$\Rightarrow 15k(k-4) = 0$$

$$15k = 0 \Rightarrow k = 0 \quad \text{ve} \quad k-4 = 0 \Rightarrow k = 4$$

$x, y, z \in \mathbb{Z}^+$ olduğundan $k \neq 0$ dır bu yüzden $k = 4$ alınır. Bu aşamadan sonra

1. yol

$$k = 4 \text{ için } x = 3k = 3 \cdot 4 = 12$$

$$y = 5k = 5 \cdot 4 = 20$$

$$z = 4k = 4 \cdot 4 = 16$$

$$x + z - y = 12 + 16 - 20 = 28 - 20 = 8 \text{ olur.}$$

2. yol

$$x + z - y = 3k + 4k - 5k = 7k - 5k = 2k = 2 \cdot 4 = 8 \text{ olur.}$$

ÖRNEK(5)

$$\frac{1}{3a} = \frac{1}{4b} = \frac{1}{2c} \text{ ve } a+b+c = \frac{13}{6} \text{ ise } c-a = ?$$

ÇÖZÜM:

Önce verilen orantıyı ters çevirip k'ya eşitleyelim

$$\frac{1}{3a} = \frac{1}{4b} = \frac{1}{2c} \Rightarrow 3a = 4b = 2c = k$$

$$\begin{aligned}\cancel{3}a &= \frac{k}{3} & \cancel{4}b &= \frac{k}{4} & \cancel{2}c &= \frac{k}{2} \\ a &= \frac{k}{3} & b &= \frac{k}{4} & c &= \frac{k}{2}\end{aligned}$$

şimdi verilen bu değerleri denklemde yazıp k'yi bulalım

$$a+b+c = \frac{13}{6} \Rightarrow \frac{k}{3} + \frac{k}{4} + \frac{k}{2} = \frac{13}{6}$$

(4) (3) (6) (2)

$$\Rightarrow \frac{4k}{12} + \frac{3k}{12} + \frac{6k}{12} = \frac{26}{12}$$

$$\Rightarrow \frac{4k+3k+6k}{12} = \frac{26}{12}$$

$$\Rightarrow \frac{13k}{12} = \frac{26}{12}$$

$$\Rightarrow k = 2$$

$$c-a = \frac{k}{2} - \frac{k}{3} = \frac{3k-2k}{6} = \frac{k}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$(3) (2)$$

ÖRNEK(6)

$$\frac{a}{b} = \frac{x}{y} = \frac{4}{3} \text{ ise aşağıdakilerden hangisi}$$

Yanlıştır?

$$A) \frac{a}{x} = \frac{b}{y} \quad B) bx=ay \quad C) \frac{x-y}{y} = \frac{1}{3}$$

$$D) \frac{a^2}{b^2} = \frac{16}{9} \quad E) \frac{x+2}{y+2} = \frac{6}{5}$$

ÇÖZÜM:

A,B ve C şıkları zaten özelliklerde var.

D şıkları

$$\frac{a}{b} = \frac{4}{3} \xrightarrow{\text{Her iki tarafın karesi alırsak}} \frac{a^2}{b^2} = \frac{4^2}{3^2} = \frac{16}{9}$$

doğru

geriye E şıkları kalıyor ki oran orantıda böyle bir özellik de işlem de yok

o yüzden yanlış olan E şıklıdır.

ÖRNEK(7)

$$\frac{x+y}{7} = \frac{x-y}{3} = \frac{x.y}{30} \text{ ise } x+y=?$$

ÇÖZÜM:

Orantıyı k'ya eşitleyelim

$$\frac{x+y}{7} = \frac{x-y}{3} = \frac{x.y}{30} = k \text{ ayrı ayrı k'ya eşitleyelim}$$

$$\frac{x+y}{7} = k, \quad \frac{x-y}{3} = k, \quad \frac{x.y}{30} = k$$

$$x+y = 7k \quad x-y = 3k \quad x.y = 30k$$

$$x+y = 7k$$

$$+ x-y = 3k$$

$$2x = 10k \rightarrow x = 5k \text{ ve } y = 2k$$

x.y = 30k olduğundan

$$5k.2k = 30k$$

$$10k = 30 \rightarrow x+y = 7k = 7.3 = 21 \text{ bulunur.}$$

$$k = 3$$

NOT:

a,b,c sayıları sırasıyla 2,3,4 ile
(doğru)orantılı ise $a = 2k$, $b = 3k$, $c = 4k$
Ters orantılı ise $a = \frac{k}{2}$, $b = \frac{k}{3}$, $c = \frac{k}{4}$ alınır.
(k,orantı sabiti)

ÖRNEK(8)

Üç küpün ayrıtları 2,3,4 sayılarıyla orantılıdır.
Alanları toplamı 696 cm^2 ise en küçük küpün alanı
kaç cm^2 dir?

ÇÖZÜM:

Küplerin ayrıtları a, b, c olsun. Orantı konusunda
orantı çeşidi belirtilmediği müddetçe doğru orantı¹
kabul edileceğinden

$a = 2k$, $b = 3k$, $c = 4k$ alınırsa
(küpün bir ayrıtı x olmak üzere alanı $6x^2$ dir)

1. küpün alanı = $6(2k)^2 = 6 \cdot 4k^2 = 24k^2$
2. küpün alanı = $6(3k)^2 = 6 \cdot 9k^2 = 54k^2$
3. küpün alanı = $6(4k)^2 = 6 \cdot 16k^2 = 96k^2$

$$\begin{array}{r} + \\ \hline 174k^2 \end{array}$$

$$\frac{174k^2}{174} = \frac{696}{174} \Rightarrow k^2 = 4 \Rightarrow k = \mp 2$$

alan negatif olamayacağından $k=2$ alınır.

1.küp en küçük küptür ve alanı

$$24k^2 = 24 \cdot 2^2 = 24 \cdot 4 = 96 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK(9)

$$\frac{x+y-z}{7} = \frac{x-z}{3} = \frac{y+z}{6} \text{ ise } x:y:z = ?$$

ÇÖZÜM:

orantı yine k 'ya eşitlenirse:

$$\frac{x+y-z}{7} = \frac{x-z}{3} = \frac{y+z}{6} = k$$

$$x+y-z = 7k, \quad x-z = 3k, \quad y+z = 6k$$

$$\underbrace{x-z}_{3k} + y = 7k \rightarrow y = 4k$$

$$y+z = 6k \rightarrow 4k+z = 6k \rightarrow z = 2k$$

$$x-z = 3k \rightarrow x-2k = 3k \rightarrow x = 5k$$

o halde $x:y:z = 5:4:2$ bulunur.

ÖRNEK(10)

x,y,z sayıları sırasıyla 1,2,3 ile orantılıdır.

$x^2+y^2+z^2 = 350$ ise $(x-4y+3z)$ ifadesinin pozitif
değeri nedir.

ÇÖZÜM:

x,y,z sayıları sırasıyla 1,2,3 ile orantılı ise
 $x = k$, $y = 2k$, $z = 3k$ alınırsa

$$x^2+y^2+z^2 = 350$$

$$(k)^2+(2k)^2+(3k)^2=350$$

$$k^2+4k^2+9k^2 = 350$$

$$\frac{14k^2}{14} = \frac{350}{14}$$

$$k^2 = 25$$

$$k = \mp 5$$

$x-5y+3z = k-4 \cdot (2k)+3(3k)=k-8k+9k = 2k$ bulunur.

sonucun pozitif olması istendiğinden

$k = 5$ alınır.

$$2k = 2 \cdot 5 = 10 \text{ olur.}$$

ÖRNEK(11)

Ali'nin yaşıının Bekir'in yaşına oranı $3/5$, Bekir'in yaşıının Leyla'nın yaşına oranı $25/6$ ise Ali'nin yaşıının Leyla'nın yaşına oranı nedir?

ÇÖZÜM:

$$\frac{\text{Ali}}{\text{Bekir}} = \frac{3}{5}, \quad \frac{\text{Bekir}}{\text{Leyla}} = \frac{25}{6} \Rightarrow \frac{\text{Ali}}{\text{Leyla}} = ?$$

istenmeyen Bekir olduğundan Bekir'i yok edecek bir işlem yapmalıyız. Bu da yan yana çarpmakla olur.

$$\frac{\text{Ali}}{\cancel{\text{Bekir}}} \cdot \frac{\cancel{\text{Bekir}}}{\text{Leyla}} = \frac{3}{\cancel{5}} \cdot \frac{25}{\cancel{6}} \Rightarrow \frac{\text{Ali}}{\text{Leyla}} = \frac{5}{2} \text{ olur.}$$

ÖRNEK(12)

$$x:y:z=7:9:12 \quad \text{ise} \quad \frac{y-x}{y} : \frac{z-x}{z} = ?$$

ÇÖZÜM:

$$x:y:z=7:9:12 \Rightarrow \frac{x}{7} = \frac{y}{9} = \frac{z}{12} = k$$

$x = 7k, y = 9k, z = 12k$ olur. buradan

$$\begin{aligned} \frac{y-x}{y} : \frac{z-x}{z} &= \frac{9k-7k}{9k} : \frac{12k-7k}{12k} \\ &= \frac{2k}{9k} : \frac{5k}{12k} \\ &= \frac{2}{9} \cdot \frac{4}{5} = \frac{8}{45} \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

ÖRNEK(13)

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} \text{ orantısında}$$

$$\frac{a \cdot c \cdot e}{b \cdot d \cdot f} = 64 \text{ ise } \frac{c}{d} = ?$$

ÇÖZÜM:

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = k &\Rightarrow \frac{a}{b} = k, \frac{c}{d} = k, \frac{e}{f} = k \\ \frac{a \cdot c \cdot e}{b \cdot d \cdot f} = 64 &\Rightarrow \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f} = 64 \Rightarrow k \cdot k \cdot k = 64 \\ &\Rightarrow k^3 = 64 \Rightarrow \sqrt[3]{k^3} = \sqrt[3]{64} \Rightarrow k = 4 \end{aligned}$$

o halde $\frac{c}{d} = k = 4$ bulunur.

ÖRNEK(14)

$$\frac{a-2b}{b} = k \text{ ise } \frac{a+b}{a-2b} = ? \quad (\text{k cinsinden})$$

ÇÖZÜM:

$$\begin{aligned} \frac{a-2b}{b} = \frac{a}{b} - \frac{2b}{b} = \frac{a}{b} - 2 = k &\Rightarrow \frac{a}{b} = k + 2 \\ &\Rightarrow a = b(k+2) \end{aligned}$$

a'nın b cinsinden bulduğumuz bu değerini soruda yazalım

$$\frac{a+b}{a-2b} = \frac{b(k+2)+b}{b(k+2)-2b} = \frac{b(k+2+1)}{b(k+2-2)} = \frac{k+3}{k}$$

elde edilir.

ÖRNEK(15)

$$\frac{x+3}{x-3} = \frac{a-b}{a+b} \Rightarrow \frac{a}{b} = ?$$

ÇÖZÜM:

İçler dışlar çarpımı yapmakla başlayalım

$$\begin{aligned} \frac{x+3}{x-3} \times \frac{a-b}{a+b} &= \cancel{ax+3a+bx+3b} - \cancel{ax-3a-bx+3b} \\ 3a+3a &= -bx-bx \\ 6a &= -2bx \end{aligned}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{-2x}{6} = \frac{-x}{3} \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK(16)

924 gramlık karışımındaki madde miktarları A,B,C dir.

$$\frac{A}{B} = \frac{3}{5}, \quad \frac{B}{C} = \frac{4}{9} \text{ ise } A = ?$$

ÇÖZÜM:

Bu tür sorular oran orantının klasik sorularındandır. İlk yapılacak şey ortak olan değişkenin karşısını payda eşitlenir gibi eşitlenir.
Ortak olan B olduğundan, B'lerin karşısına eşitlenir.

$$\frac{A}{B} = \frac{3.4}{5.4}, \quad \frac{B}{C} = \frac{4.5}{9.5} \Rightarrow \frac{A}{B} = \frac{12}{20}, \quad \frac{B}{C} = \frac{20}{45}$$

oranı sabiti devreye girsin..

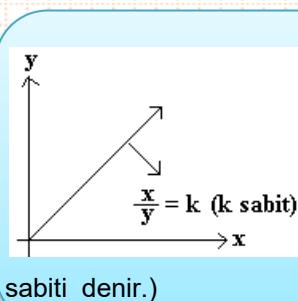
$$\Rightarrow A=12k, \quad B=20k, \quad C=45k$$

$$A+B+C=12k+20k+45k=924$$

$$\frac{12k}{20k} = \frac{924}{?} \\ k = 12$$

sıra A'yi bulmada

$$A = 12k = 12 \cdot 12 = 144 \text{ bulunur.}$$

ORANTI ÇEŞİTLERİ**1) DOĞRU ORANTI:**

Bir çöklük artarken
diğeri de artıyor, yada
biri azalırken diğerinin
azalıyorsa bu iki çöklük
doğru orantıdır denir.
(burada k ya orantı
sabit denir.)

ÖRNEK(17)

$x+3$ ile $y-1$ doğru orantılıdır. $x=2$ iken $y=3$ ise $x=7$ iken $y=?$

ÇÖZÜM:

Önce orantımızı kuralım

$$\frac{x+3}{y-1} = k \text{ şimdi de ilk değerleri yazıp k'yi bulalım}$$

$$\frac{x+3}{y-1} = k \Rightarrow \frac{2+3}{3-1} = k \Rightarrow k = \frac{5}{2}$$

son olarak x'i yerine yazıp y'yi bulalım

$$\begin{aligned} \frac{x+3}{y-1} &= \frac{5}{2} \Rightarrow \frac{7+3}{y-1} = \frac{5}{2} \\ &\Rightarrow 5y - 5 = 20 \\ &\Rightarrow 5y = 25 \\ &\Rightarrow y = 5 \end{aligned}$$

bulunur.

ÖRNEK(18)

Bir üçgenin iç açıları 3,4 ve 5 ile doğru orantılıdır.
en büyük dış açı kaç olur?

ÇÖZÜM:

Bir üçgenin iç açıları 180 derecedir. Verilen üçgen
açlarını k orantı sabitiyle ifade edelim

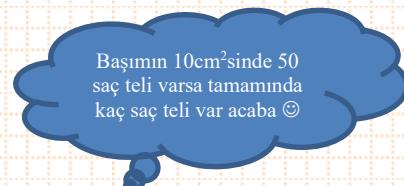
Açılar : $3k, 4k, 5k$

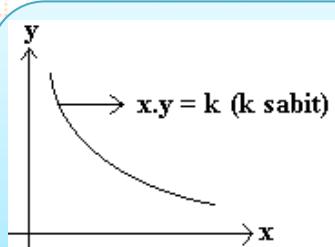
Bir üçgenin iç açılar toplamı 180 derece
olduğundan

$$3k + 4k + 5k = 12k = 180$$

$$k = 15$$

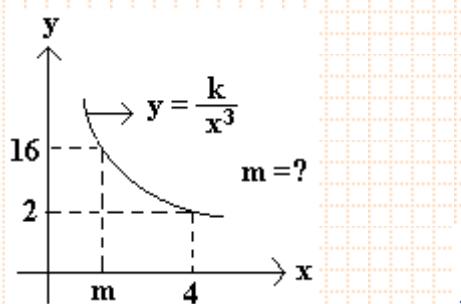
en büyük dış açı en küçük iç açıda olduğundan
küçük açı $3k = 3 \cdot 15 = 45$ ve bu açının dış açısı
 $180 - 45 = 135$ tır.



2) TERS ORANTI:

Bir çokluk artarken
diğeri azalıyor yada
biri azalırken diğerini
artıyorsa bu
çokluklar ters
orantıdır denir.

(burada k ya orantı sabiti denir.)

ÖRNEK(19)**ÇÖZÜM:**

Grafik ters orantıya işaret ediyor. Grafik üzerindeki noktalar grafiğin denklemini sağlayacağından;

Grafik üzerindeki noktalar

$x = 4$ iken $y = 2$ ve $x = m$ iken $y = 16$ dir.

$$y = \frac{k}{x^3}$$

denkleminde önce bilinen x ve y değerleri

yerine yazılır ve k bulunur.

önce $x = 4$ ve $y = 2$ değerlerini yazalım

$$y = \frac{k}{x^3} \Rightarrow k = y \cdot x^3 = 2 \cdot 4^3 = 2 \cdot 64 = 128$$

son olarak

$x=m$ ve $y=16$ değerlerini kullanalım

$$k = y \cdot x^3 \Rightarrow \frac{128}{m^3} = \frac{16 \cdot m^3}{16}$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{m^3} = \sqrt[3]{8}$$

$$\Rightarrow m = 2 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK(20)

$x+1$ ile $2y-3$ ters orantılıdır. $x=3$ iken $y=4$ ise $y=2$ iken $x=?$

ÇÖZÜM:

Yine önce orantıyı yazalım

$$(x+1)(2y-3)=k$$

yne önce bilinen değerlerle başlayalım

$$x=3 \text{ için } y=4 \text{ yazalım}$$

$$(x+1)(2y-3)=k \rightarrow (3+1)(2 \cdot 4 - 3)=k$$

$$k=4 \cdot 5=20$$

son olarak

$$y = 2 \text{ için } x' \text{i bulalım}$$

$$(x+1)(2y-3)=20 \rightarrow (x+1)(2 \cdot 2 - 3)=20$$

$$x+1 = 20$$

$$x = 19 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK(21)

3 işçi bir işi 10 günde yaparsa 5 işçi aynı işi kaç günde yapar?

ÇÖZÜM:

Orantı çeşidini belirlemek bu sorularda çok önemli
bu soruda işçi sayısı arttıkça işin bitme süresi
azaldığından ters orantı vardır.

3 işçi _____ 10 günde

5 işçi _____ x günde

Ters Oranti

$$5x = 30 \rightarrow x = 6 \text{ günde yapar}$$

3) KARIŞIK ORANTI

a sayısı b ile doğru, c ile ters orantılı ise

$$\frac{a}{b} \cdot c = k \text{ yazılır. (k, orantı sabiti)}$$

ÖRNEK (22)

a sayısı b+3 ile doğru, c-1 ile ters orantılıdır. a=5 ve b=3 iken c=7 ise b=8 ve c=12 iken a kaçtır?

ÇÖZÜM:

Orantıyı kuralım

$$\frac{a(c-1)}{(b+3)} = k$$

ilk işimiz k'yı bulmak

a=5, b=3 ve c=7 için

$$\frac{a(c-1)}{(b+3)} = k \Rightarrow \frac{5(7-1)}{(3+3)} = k \Rightarrow \frac{30}{6} = k \Rightarrow k = 5$$

şimdi de a yi bulalım

b=8 ve c=12 ise

$$\frac{a(c-1)}{(b+3)} = 5 \Rightarrow \frac{a(12-1)}{(8+3)} = 5 \Rightarrow \frac{11a}{11} = 5$$

a = 5 olur.

4) BİLEŞİK ORANTI:

İçinde ikiden fazla oran bulunan orantılara bileşik oranti denir.

Çözüm yolları

1) Orantıda iş belli ise

$$\frac{\dot{\text{İ}}\ddot{\text{s}}_1}{\dot{\text{İ}}\ddot{\text{s}}_2} = \frac{\text{Diğerleri}_1}{\text{Diğerleri}_2}$$

2) İş belli değilse orantıların çeşidine karar vermelii daha sonra kim neyle çarpılacak onu belirlemeli

Belirleyici diye yazdığımız sütun ile önce 1.sütunu kapatıp ikinci sütunun orantısına karar veririz.

Aynı işlemi diğer sütün için de yaparız. Yani 2.sütun kapatılıp 1.sütunun orantısına karar verilir

Orantılara karar verdikten sonra yine 1.sütun kapatılıp 2.sütun ile belirleyici sütun arasındaki çarpım çizgilerine karar verilir aynısı diğer sütun için de yapılır.

Çizgiyi çizmeye binmeyenden başlanır. Çizilenler kendi arasında, çizilmeyenler kendi arasında çarpılır.

Aşağıdaki örnekleri inceleyin

1. örnekk

1.sütun	2.sütun	3.sütun
a	b	c
d	e	x

Doğru Or. Doğru Or. (belirleyici)

1.sütun	2.sütun	3.sütun
a	b	c
d	e	x

Doğru Or. Doğru Or. (belirleyici)

Şimdi ikisini bağlayacağız

önce b ile sonra a ile çarpılması gerekiğinden çizgimiz önce b'ye oradan da a'ya gitmeli

1.sütun	2.sütun	3.sütun
a	b	c
d	e	x

Doğru Or. Doğru Or. (belirleyici)

İşlemimiz : $a \cdot b \cdot x = d \cdot e \cdot c$

2. örnekk

yukarıdaki yolları izlediğimizde

1.sütun	2.sütun	3.sütun
a	b	c
d	e	x

Ters Or. Doğru Or. (belirleyici)

(1.sütundaki d ile x'in çarpılması için x'in ilk çarpıldığı b'den sonra d ile çarpılması gereklidir.

İşlemimiz : $d \cdot b \cdot x = a \cdot e \cdot c$

ÖRNEK(23)

Eş güçte 8 işçi 30 metre kanalı 15 günde tamir ediyor. Buna göre aynı nitelikteki 12 işçi 45 metre kanalı kaç günde tamir eder?

ÇÖZÜM:

8 işçi	30 m	15 günde
12 işçi	45 m	x günde

yapılan iş belli olduğundan orantı çeşitlerini bulmaya dahi gerek yoktur. Direk çözüme geçeriz.

$$\frac{\dot{I}ş_1}{\dot{I}ş_2} = \frac{\text{Diğerleri}_1}{\text{Diğerleri}_2} \Rightarrow \frac{30}{45} = \frac{8.15}{12.x}$$

(artık sadeleştirmeyi öğrendiğinize göre siz sadeleştirmeye başlayın biz cevabı yazalım ☺)
Cevap x = 15 bulunur.

ÖRNEK(24)

k tane işçinin 12 saat çalışmasıyla 20 günde bitirilebilen bir iş, işçi sayısı arttırılarak ve günde 10 saat çalışılarak 10 günde bitiriliyor. Buna göre k aşağıdakilerden hangisi olabilir?

- A) 11 B) 10 C) 9 D) 8 E) 7

(ÖSYS-2000)

ÇÖZÜM:

K işçi	1 işi	12 sa	20 günde
H işçi	1 işi	10 sa	10 günde

$$\frac{\dot{I}ş_1}{\dot{I}ş_2} = \frac{\text{Diğerleri}_1}{\text{Diğerleri}_2} \Rightarrow \frac{1}{1} = \frac{k.12.20}{h.10.10}$$

$$h = \frac{12k}{5}$$

h bir tamsayı olduğundan k'nın 5 ile bölünmesi yani 5'in katı olması gereklidir. Şıkların içinde bir tek B şıkları 5 ile tam bölünürlüktür.

Cevap B şıklıdır.

5) DÖRDÜNCÜ ORANTILI:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{x} \text{ orantısında elde edilen } x' \text{e}$$

dördüncü orantılı denir.

ÖRNEK(25)

4,3 ve 8 sayılarının dördüncü orantılısı kaçtır?

ÇÖZÜM:

Kural uygulanırsa

$$\frac{1}{3} = \frac{8^2}{x} \Rightarrow x = 6 \text{ bulunur}$$

ÖRNEK(26)

3 kadın 8 günde 6 halı dokursa , 4 kadın 15 günde kaç halı dokur

ÇÖZÜM:

3 kadın 8 günde 6 halı

4 kadın 15 günde x halı

yapılan iş halı dokuma olduğundan

$$\frac{\dot{I}ş_1}{\dot{I}ş_2} = \frac{\text{Diğerleri}_1}{\text{Diğerleri}_2} \Rightarrow \frac{6}{x} = \frac{3.8}{4.15} \text{ sadeleştirmeler}$$

yapıldığında x = 15 bulunur.

ÖRNEK(27)

8 traktör 10 dönüm tarayı 5 saat çalışarak 6 günde sürüyor. 7 traktör 21 dönüm tarayı 6 günde 8 saat çalışarak kaç günde sürer?

ÇÖZÜM:

8 traktör	10 dön.tar.	5 sa	6 günde
7 traktör	21 dön.tar.	8 sa	x günde

yapılan iş tarla sürme işi olduğundan

$$\frac{\text{İş}_1}{\text{İş}_2} = \frac{\text{Diğerleri}_1}{\text{Diğerleri}_2} \Rightarrow \frac{10}{21} = \frac{8.5.6}{7.8.x}$$

sadeleştirme yaparsak $x = 9$ buluruz.

ÖRNEK(28)

Üç kişi bir miktar ceviz kendi aralarında 3,4 ve 8 sayılarıyla orantılı olacak biçimde paylaşıyorlar. En çok ceviz alan kişi 56 ceviz aldığına göre en az ceviz alan kaç ceviz almıştır?

ÇÖZÜM:

Sadece 'orantılıdır' diyorsa bu doğru orantı demektir.

Kişiler a,b,c olsun

$$a = 3k, b = 4k, c = 8k$$

en çok ceviz alan c olduğundan

$$c = 8k = 56 \rightarrow k = 7 \text{ olur.}$$

En az ceviz alan da a olduğundan

$$a = 3k = 3.7 = 21 \text{ ceviz almıştır}$$

ÖRNEK(29)

$$\frac{x}{y} = \frac{z}{t} = \frac{2}{5} \Rightarrow \frac{3x+2z}{6y+16} = 0,2 \quad \text{ise } t=?$$

ÇÖZÜM:

Bu soruda $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k \Rightarrow \frac{na \pm mc}{nb \pm md} = k$ özelliğini kullanacağız. Yalnız ufak bir sorunumuz var oda paydadaki katsayılar paya uymuyor.. uyduracağız

$$\frac{3x+2z}{6y+16} = 0,2 \Rightarrow \frac{3x+2z}{2(3y+8)} = 0,2$$

$$\Rightarrow \frac{3x+2z}{3y+8} = 2.(0,2) = 0,4 = \frac{2}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{3x+2z}{3y+8} = \frac{2}{5} \text{ şimdi oldu}$$

x, 3 ile çarpılmış, y'de 3 ile çarpılmış

z, 2 ile çarpılmış t'de 2 ile çarpılmalı ki orantı sabiti bozulmasın. Yani şöyle olmalı

$$\frac{3x+2z}{3y+8} = \frac{2}{5} \Rightarrow \frac{3x+2z}{3y+2t} = \frac{2}{5}$$

bakın 8 yerine 2t gelmeliydi... eşitleyelim.

$$2t = 8$$

$$t = 4 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK(30)

8,10,15 yaşlarındaki üç kardeşe yaşları ile orantılı olarak harçlık veren bir baba 99 milyon para dağıtıyorsa ortanca kardeş kaç lira alır?

ÇÖZÜM:

Küçük : 8k

Ortanca : 10k

+ Büyük : 15k

$$\text{kardeşler} : 33k \rightarrow 33k = 99 \rightarrow k = 3$$

Ortanca : $10k = 10.3 = 30$ almıştır.

ÖRNEK(31)

12,18 ve 20 yaşlarındaki üç kardeşe bir miktar para yaşları ile ters orantılı olarak paylaştırılacaktır. En küçük ile en büyük kardeşin aldığı paraların toplamı 12 000 ise ortancanın aldığı para kaç liradır?

ÇÖZÜM:

Orantı sabitimiz her zamanki gibi k olsun

Kardeşler

$$\text{Küçük : } \frac{k}{12}$$

$$\text{Ortanca : } \frac{k}{18} \quad \frac{k}{12} + \frac{k}{20} = 12000 \\ (5) \quad (3)$$

$$\text{Büyük : } \frac{k}{20} \quad \frac{8k}{60} = 12000 \\ k = 60 \cdot 1500 = 90000$$

$$\text{Ortanca : } \frac{k}{18} = \frac{90000}{18} = 5000 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK(32)

$a, b, c \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere; $\frac{2}{3a} = \frac{3}{5b} = \frac{1}{2c}$ ise

$a+b+c$ aşağıdakilerden hangisi olabilir?

- A) 25 B) 38 C) 45 D) 63 E) 106

ÇÖZÜM:

(özelliklerimizi kullanalım. Orantıyı ters çevir)

$$\frac{2}{3a} = \frac{3}{5b} = \frac{1}{2c} \Rightarrow \frac{3a}{2} = \frac{5b}{3} = \frac{2c}{1} = k$$

$$\frac{3a}{2} = k \Rightarrow a = \frac{2k}{3} \quad a, b, c \text{ birer tamsayı iseler}$$

$$\frac{5b}{3} = k \Rightarrow b = \frac{3k}{5} \quad \text{paydada } 3,5,2 \text{ kalmamalı}$$

$$\frac{2c}{1} = k \Rightarrow c = \frac{k}{2} \quad \text{yani } k; 3,5,2 \text{ ile bölünmeli}$$

(k sayısı 3,5,2'nin bir katıdır.)

o halde $Okek(3,5,2)=30$ olduğundan $k=30$ seçilir(bu tutmazsa sırayla 30,60,90 .. deneriz)

$$a = \frac{2k}{3} = \frac{2 \cdot 30}{3} = 20$$

$$b = \frac{3k}{5} = \frac{3 \cdot 30}{5} = 18 \rightarrow 20+18+15=53$$

$$c = \frac{k}{2} = \frac{30}{2} = 15$$

tutmadı.. e o zaman 60'ı deneyelim .k, iki katına çıktığında(yani 60 olduğunda) toplam da iki katına çıkar yani $53 \cdot 2 = 106$ olur ki bu da E şıklını işaret eder.

ÖRNEK(33)

$$\frac{a+b+c}{8} = \frac{a-c}{4} = \frac{b+c}{3} \text{ ise } a:b:c=?$$

ÇÖZÜM:

$$\frac{a+b+c}{8} = \frac{a-c}{4} = \frac{b+c}{3} = k$$

$$a+b+c = 8k$$

$$b+c = 3k$$

$$a-c = 4k$$

şimdi denklemleri kullanarak a,b,c'leri k cinsinden bulalım

$$\underbrace{a+b+c}_{3k} = 8k \rightarrow a=5k$$

$$a-c = 4k \rightarrow 5k-c = 4k \rightarrow c=k$$

$$b+c = 3k \rightarrow b+k=3k \rightarrow b=2k$$

o halde a:b:c=5:2:1 bulunur.

ÖRNEK(34)

$x,y,z \in \mathbb{R}^-$ olmak üzere; $\frac{1}{4x} = \frac{2}{5y} = \frac{4}{3z}$ ise

x,y,z 'nin sıralanışı?

ÇÖZÜM:

x,y,z negatif olduğu için orantıyı -1'e eşitleyip
 x,y,z 'yi çekelim

$$\frac{1}{4x} = \frac{2}{5y} = \frac{4}{3z} = -1$$

$$\frac{1}{4x} = -1 \Rightarrow x = -\frac{1}{4}$$

$$\frac{2}{5y} = -1 \Rightarrow y = -\frac{2}{5}$$

$$\frac{4}{3z} = -1 \Rightarrow z = -\frac{4}{3}$$

kesirleri sıralamak için paylarını eşitleyelim

$$x = -\frac{1}{4}, \quad y = -\frac{2}{5}, \quad z = -\frac{4}{3}$$

(4)

(2)

(1)

$$x = -\frac{4}{16}, \quad y = -\frac{4}{10}, \quad z = -\frac{4}{3}$$

Bu kesirler pozitif olsaydılar paydası küçük olan
 daha büyük olurdu $z > y > x$

Ancak bu kesirler negatif olduklarından

$z < y < x$ olur.

KURAL;

D , Doğru orantı --- T, Ters orantı 'yı göstersin

x ile y D , y ile z D \Rightarrow x ile z D

x ile y T , y ile z T \Rightarrow x ile z D

x ile y D , y ile z T \Rightarrow x ile z T

x ile y T , y ile z D \Rightarrow x ile z T

ilişkisi vardır.

ÖRNEK(35)

$\frac{a}{b} = 9, \frac{b}{c} = 4, c.d = 12, d.e = 8$ olduğuna

göre aşağıdakilerden hangisi Doğrudur?

- A) a ile d doğru orantılıdır.
- B) a ile e ters orantılıdır.
- C) c ile e ters orantılıdır.
- D) b ile e doğru orantılıdır.
- E) b ile d doğru orantılıdır.

ÇÖZÜM:

B ile c doğru , c ile d ters \rightarrow b ile d ters

B ile d ters , d ile e ters \rightarrow b ile e doğru

O halde cevap D şıkkıdır.

ORTALAMA ÇEŞİTLERİ

1) ARİTMETİK ORTA

n tane sayının aritmetik ortası;

$$AO = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

$$\text{Ö.O.2S.A.O} = \frac{a+b}{2}$$

2) GEOMETRİK ORTA

n tane sayının geometrik ortası

$$GO = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}$$

$$\text{Ö.O.2S.G.O} = \sqrt{ab}$$

(iki sayının geometrik ortalamasına özel olarak
'orta oranti' denir)

3) HARMONİK ORTA

n tane sayının harmonik ortası;

$$HO = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}}$$

$$\text{Ö.O.2S.H.O} = \frac{2ab}{a+b}$$

NOT: $(G.O)^2 = (A.O)(H.O)$

NOT: iki sayının herhangi iki ortalaması eşit ise bu iki sayı da eşittir.

ÖRNEK(36)

x,y ∈ R olmak üzere ;

$(x^2 + y^2 + 25)$ ile $(6x - 10y - 9)$ sayılarının aritmetik ortası geometrik ortasına eşitse $x+y=?$

ÇÖZÜM:

$$x^2 + y^2 + 25 = 6x - 10y - 9$$

$$\underbrace{x^2 - 6x + 9}_{(x-3)^2} + \underbrace{y^2 + 10y + 25}_{(y+5)^2} = 0$$

$$(x-3)^2 + (y+5)^2 = 0$$

iki sayının kareleri toplamı sıfır ise bu sayılar ya zit işaretli veya ikisi de sıfır olmalı. birinden biri negatif olamayacağına göre (çift kuvvet) ikisi de sıfırdır.

$$x-3=0 \rightarrow x=3, \quad y+5=0 \rightarrow y=-5$$

o halde $x+y = 3-5 = -2$ olur.

NOT: iki sayının aritmetik ortası, geometrik ortasından daima büyük veya eşittir.

İSP:

$$\begin{aligned} (a-b)^2 &\geq 0 \Rightarrow (a-b)^2 + 4ab \geq 4ab \\ &\Rightarrow (a+b)^2 \geq 4ab \\ &\Rightarrow \frac{(a+b)^2}{4} \geq ab \\ &\Rightarrow \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \end{aligned}$$

ÖRNEK(37)

$\frac{x^2 + 5}{2x}$ ifadesinin en küçük değeri kaçtır?

ÇÖZÜM:

İfadeyi iki sayının aritmetik ortası şeklinde göstermeye çalışalım

$$\frac{x^2 + 5}{2x} \Rightarrow \frac{x}{2} + \frac{5}{x} \Rightarrow \frac{x + \frac{5}{x}}{2}$$

Şimdi elde edilen ifade x ve $\frac{5}{x}$ 'in aritmetik

ortasına dönüştü

$$\frac{x + \frac{5}{x}}{2} \geq \sqrt{x \cdot \frac{5}{x}}$$

$$\frac{x + \frac{5}{x}}{2} \geq \sqrt{5}$$

O halde en küçük değer $\sqrt{5}$ olur.

GENEL ÖRNEKLER**ÖRNEK(38)**

a ve b sıfırdan farklı pozitif sayılardır.

$$a + \frac{1}{3b} = 2, b + \frac{1}{3a} = 3 \text{ ise } \frac{b^2 - a^2}{a^2} = ?$$

ÇÖZÜM:

$$a + \frac{1}{3b} = 2 \Rightarrow \frac{3ab + 1}{3b} = 2 \Rightarrow \underbrace{3ab + 1}_{\downarrow} = 6b$$

$$b + \frac{1}{3a} = 3 \Rightarrow \frac{3ab + 1}{3a} = 3 \Rightarrow \underbrace{3ab + 1}_{\downarrow} = 9a$$

$$a + \frac{1}{3b} = 2 \rightarrow \frac{3ab + 1}{3a} = 2 \rightarrow 3ab + 1 = 6b$$

$$b + \frac{1}{3a} = 3 \rightarrow \frac{3ab + 1}{3b} = 3 \rightarrow 3ab + 1 = 6b$$

$$9a = 6b \rightarrow 3a = 2b$$

Bu eşitliği sağlaması için $a=2$ ve $b=3$ seçilirse

$$\frac{b^2 - a^2}{a^2} = \frac{3^2 - 2^2}{2^2} = \frac{9 - 4}{4} = \frac{5}{4} \text{ bulunur}$$

ÖRNEK(39)

İki sayının geometrik ortası a , x ile bu iki sayının geometrik ortası b ise x nedir?

ÇÖZÜM:

Sayılarımız m ve n olsun

$$\sqrt{m \cdot n} = a \Rightarrow m \cdot n = a^2$$

$$\sqrt[3]{x \cdot m \cdot n} = b \Rightarrow \left(\sqrt[3]{x \cdot a^2}\right)^3 = b^3 \Rightarrow x \cdot a^2 = b^3$$

$$\Rightarrow x = \frac{b^3}{a^2} \text{ dir.}$$

ÖRNEK(40)

30 kişilik bir sınıfın $\frac{3}{5}$ 'i kızdır. Kız öğrencilerin matematik dersi not ortalaması 6, erkek öğrencilerin matematik dersi not ortalaması 8'dir. Bu sınıfın matematik dersi not ortalaması nedir?

ÇÖZÜM:

$$\text{Kız öğrenciler: } 30 \cdot \frac{3}{5} = 18 \text{ kişi}$$

$$\text{Erkek öğrenciler: } 30 - 18 = 12 \text{ kişi}$$

$$\text{Kız Not Ort.} = \frac{\text{Kız Not Top.}}{\text{Kız ögr. sayısı}}$$

$$6 = \frac{\text{Kız. Not Top.}}{18} \Rightarrow \text{Kız. Not Top.} = 108$$

$$\text{Erkek Not Ort.} = \frac{\text{Erkek Not Top.}}{\text{Erkek ögr. sayısı}}$$

$$8 = \frac{\text{Erkek Not Top.}}{12} \Rightarrow \text{Erkek Not Top.} = 96$$

$$\text{Sınıf Not Ort.} = \frac{\text{Erkek Not Top.} + \text{Kız Not Top.}}{\text{Tüm Öğr. Sayısı}}$$

$$= \frac{96 + 108}{30} = \frac{204}{30} = 6,8 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK(41)

3 ve 7 yaşlarında iki kardeş bir miktar parayı küçüğü yaşı ile doğru, büyüğü yaşı ile ters orantılı olarak bölüşüyorlar. Payları oranı kaçtır?

ÇÖZÜM:

Oranti sabitimiz k olsun

$$\text{Küçük} = 3k, \quad \text{Büyük} = \frac{k}{7}$$

$$\text{Payları oranı: } \frac{3k}{\frac{k}{7}} = \frac{3k \cdot 7}{k} = 21 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK(42)

15 kişinin yaş ortalaması 22'dir. Üç sene sonra kaç olur?

ÇÖZÜM:

Üç sene sonra herkes 3 yaş büyüyeceğinden ortalama 3 yaş artar $22+3=25$ olur.

ÖRNEK(43)

5 ve 7 ile orantılı olan pozitif iki sayının kareleri toplamı 296 ise bu sayıların farkının mutlak değeri kaçtır?

ÇÖZÜM:

Sayılarımız x ve y olsun

$$\begin{aligned} x &= 5k \\ y &= 7k \end{aligned} \Rightarrow (5k)^2 + (7k)^2 = 296$$

$$\Rightarrow 25k^2 + 49k^2 = 296$$

$$\Rightarrow \frac{74k^2}{74} = \frac{296}{74}$$

$$\Rightarrow k^2 = 4$$

$$\Rightarrow k = \pm 2$$

sayılar pozitif olduğundan $k=2$ alınır.

$$x = 5k = 5 \cdot 2 = 10$$

$$y = 7k = 7 \cdot 2 = 14$$

$$|x - y| = |10 - 14| = |-4| = 4 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK(44)

Üç erkek işçi günde A,B,C lira , üç kadın işçi günde X,Y,Z lira almaktadır. Bir günde erkeklerin aldığı ücret kadınların aldığı ücretle eşittir.

A:B:C=2:4:6 ve X:Y:Z=7:8:9 olduğuna göre aşağıdakilerden hangisi Doğrudur?

- A) A=X B) C<Z C) B>Z
 D) Y<A E) B=Y

ÇÖZÜM:

Erkekler için orantı sabitimiz k

Kadınlar için orantı sabitimiz m olsun

$$A:B:C=2:4:6 \rightarrow A = 2k, B = 4k, C = 6k$$

$$\begin{array}{r} + \\ \hline A+B+C = 12k \end{array}$$

$$X:Y:Z=7:8:9 \rightarrow X = 7m, Y = 8m, Z = 9m$$

$$\begin{array}{r} + \\ \hline X+Y+Z = 24m \end{array}$$

Bunlar eşit olduğundan $12k = 24m \rightarrow k = 2m$

Aradaki bağlantıyı kurmak için erkeklerin orantı sabitini de m ye çevirelim

$$A = 2k = 2.2m = 4m$$

$$B = 4k = 4.2m = 8m$$

$$C = 6k = 6.2m = 12m$$

Göründüğü gibi $B = 8m$ ve $Y = 8m$ olduğundan

$B = Y$ dir. Doğru sık E şökkidir.

ÖRNEK(45)

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{2}{3}, a+3c-4e=10 \text{ ve } b=4f \text{ ise } d$$

kaçtır?

ÇÖZÜM:

Once $a+3c-4e=10$ denkleminin sol tarafını

Verilen orantıdan (orantı özelliklerinin 5.si kullanılarak) buluruz

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{\overbrace{a+3c-4e}^{10}}{\underbrace{b+3d-4f}_{4f}} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{10}{3d} \cancel{\times} \frac{2}{3} \Rightarrow 6d = 30 \Rightarrow d = 5 \text{ olur.}$$

ÖRNEK(46)

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = 5 \text{ tir. } 2a-3c+e=7 \text{ ve } f-3d=5 \text{ ise } b=?$$

ÇÖZÜM:

Aynı şekilde,

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = 5 \Rightarrow \frac{\overbrace{2a-3c+e}^7}{\underbrace{2b-3d+f}_5} = 5$$

$$\Rightarrow \frac{7}{2b+5} \cancel{\times} 5$$

$$\Rightarrow 10b+25=7$$

$$\Rightarrow 10b=7-25$$

$$\Rightarrow \frac{10b}{10} = \frac{-18}{10},$$

$$\Rightarrow b = \frac{-9}{5} \text{ elde edilir.}$$

ÖRNEK(47)

$$\frac{x}{y} = \frac{z}{t} = k \quad \text{ve} \quad \frac{2x + mz}{6y - 6t} = \frac{k}{3} \quad \text{ise } m = ?$$

ÇÖZÜM:

Sorumuz orantının 5. özelliğine benziyor. Ancak paydayı biraz düzenlemeliyiz.

$$\begin{aligned} \frac{2x + mz}{6y - 6t} &= \frac{k}{3} \Rightarrow \frac{2x + mz}{\cancel{2}(3y - 3t)} = \frac{k}{\cancel{2}} \\ &\Rightarrow \frac{2x + mz}{3y - 3t} = k \quad \text{şimdi oldu} \end{aligned}$$

dikkat edildiyse orantı sabiti yine k yani bozulmamış. Orantının beşinci özelliği gereği pay ve paydadaki katsayılar aynı olmalı. o halde

$$\frac{2x + mz}{3y - 3t} = k \Rightarrow \frac{2x + -2z}{3y - 3t} = k$$

olursa $m = -2$ olur.

ÖRNEK(48)

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k \quad \frac{3a - 2}{3b + 5d} = k \quad \text{ise } c = ?$$

ÇÖZÜM:

Yine 5. özellik..

$$\frac{3a - 2}{3b + 5d} = k \Rightarrow \frac{3a + 5c}{3b + 5d} = k \quad \text{olmalı ki orantı}$$

sabiti bozulmasın

bu durumda $5c = -2 \rightarrow c = -\frac{2}{5}$ bulunur.

NOT:

A ve b doğru orantılı iki çokluk olsun

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} &= k \\ 2a &\rightarrow 2b \quad (\text{a, 2 ile çarpılırsa b de çarpılır}) \\ \frac{a}{3} &\rightarrow \frac{b}{3} \quad (\text{a, 3 ile bölünürse b de bölünür}) \end{aligned}$$

A ve b ters orantılı iki çokluk olsun

$$\frac{a}{b}$$

$$2a \rightarrow \frac{b}{2} \quad (\text{a, 2 ile çarpılırsa b 2'ye bölünür})$$

$$\frac{a}{3} \rightarrow 3b \quad (\text{a, 3 ile bölünürse b 3 ile çarpılır})$$

ÖRNEK(49)

x işçi günde y saat çalışarak bir işi 2 günde bitiriyor. işçi sayısı 2 kat arttırılır, çalışma süresi üçte birine inerse iş kaç günde biter?

ÇÖZÜM:**1.yol**

İşçi sayısı (x) ile işin bitme süresi ters orantılıdır.

$$\frac{x}{2} \rightarrow \frac{2}{2} = 1$$

çalışma süresi (y) ile işin bitme süresi ters orantılıdır.

$$\frac{y}{3} \rightarrow 3.1 = 3 \text{ gün bulunur.}$$

2.yol

Normal bileşik orantı kurarız

$$\begin{array}{ccc} x \text{ işçi} & \text{günde } y \text{ saat} & 2 \text{ gün} \\ 2x \text{ işçi} & \text{günde } y/3 \text{ saat} & ? \text{ gün} \end{array}$$

Ters Or. Ters Or.

$$2x \cdot \frac{y}{3} \cdot ? = x \cdot y \cdot 2$$

? = 3 gün bulunur.

ÖRNEK(50)

$x, y, z \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere,

$3xy = 5yz = 7zx$ ise x, y, z sayıları hangi sayılarla orantılı olur?

ÇÖZÜM:

Orantının her tarafını xyz ile bölelim (9. özellik)

$$\frac{3\cancel{xy}}{\cancel{xyz}} = \frac{5\cancel{yz}}{x\cancel{yz}} = \frac{7\cancel{zx}}{\cancel{xyz}}$$

$$\frac{3}{z} = \frac{5}{x} = \frac{7}{y} \text{ şimdi de ters çevirelim (3. özellik)}$$

$$\frac{x}{5} = \frac{y}{7} = \frac{z}{3} \text{ bulunur. o halde } x:y:z = 5:7:3 \text{ olur.}$$

ÖRNEK(51)

a, b, c pozitif tam sayılar $2a=3b$ ve $5b=3c$ ise $a+b+c$ nin en küçük değeri nedir?

ÇÖZÜM:

Bu eşitlikleri orantıya çevirip ,ortak olanların karşıslarını eşitleyelim

$$2a=3b \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{3.3}{2.3} = \frac{9}{6} \text{ (b 'ler ortak)}$$

$$5b=3c \Rightarrow \frac{b}{c} = \frac{3.2}{5.2} = \frac{6}{10}$$

bu durumda k sabitini de kullanırsak

$$a = 9k, b = 6k, c = 10k \text{ bulunur.}$$

$a+b+c$ nin en küçük olması isteniyorsa k'yi en küçük seçeriz.

$k = +1$ seçenek (pozitif olduklarından)

$$a = 9k = 9, b = 6k = 6, c = 10k = 10$$

$$\text{sonuç } a+b+c = 9+6+10 = 25 \text{ elde edilir.}$$

ÖRNEK(52)

a ve b pozitif tamsayılardır.

$$a + \frac{1}{b} = 3 \text{ ve } b + \frac{1}{a} = 1 \text{ ise } \frac{a^2 + b^2}{b^2} = ?$$

ÇÖZÜM:

$$a + \frac{1}{b} = 3 \rightarrow \frac{ab + 1}{b} = 3 \rightarrow ab + 1 = 3b$$

$$b + \frac{1}{a} = 1 \rightarrow \frac{ab + 1}{a} = 1 \rightarrow ab + 1 = a$$

$a = 3b$ değerini yerine yazalım

$$\frac{a^2 + b^2}{b^2} = \frac{(3b)^2 + b^2}{b^2} = \frac{9b^2 + b^2}{b^2} = \frac{10b^2}{b^2} = 10$$

bultur.

ÖRNEK(53)

a, b, c sayıları sırasıyla 3 ve m ile doğru, n ile ters orantılıdır. c sayısı a ve b' nin orta orantılısı ise m ile n arasında aşağıdaki bağıntıların hangisi vardır?

- A) $n^2=3m$ B) $m=3n$ C) $3mn^2=1$
 D) $m.n=3$ E) $n^2=m$

ÇÖZÜM:

Orantı sabitimiz k olsun

$$a = 3k, b = mk, c = \frac{k}{n}$$

c sayısı a ve b' nin orta orantılısı ise $c = \sqrt{ab}$

şimdi değerleri yerine yazalım

$$c = \sqrt{ab} \Rightarrow \frac{k}{n} = \sqrt{3k \cdot mk} \Rightarrow \left(\frac{k}{n}\right)^2 = (\sqrt{3k \cdot mk})^2$$

$$\frac{k^2}{n^2} = 3m \Rightarrow 3mn^2 = 1 \text{ olur.}$$

O halde cevap C şıkları olur.

ÖRNEK(54)

a sayısı ($b+1$) ile doğru orantılı iken (b^2+2) ile ters orantılıdır. $a=11$ için $b=2$ ise $b=3$ için $a=?$

ÇÖZÜM:

Orantıyı kuracak olursak;

$$\frac{a}{b+1} \cdot (b^2 + 2) = k \text{ olsun}$$

$a = 11$ ve $b = 2$ için

$$\frac{11}{2+1} \cdot (2^2 + 2) = k \Rightarrow k = \frac{66}{3} = 22$$

$b = 3$ için a yi bulalım

$$\frac{a}{3+1} \cdot (3^2 + 2) = 22 \Rightarrow \frac{a}{4} = 22$$

$$\Rightarrow a = 8 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK(55)

Bir tüccar 3 tanesini a liraya aldığı yumurtaların 5 tanesini b liraya satıyor. Satış fiyatı alış fiyatının iki katı olduğuna göre a/b oranını nedir?

ÇÖZÜM:

3 tanesi a liraya alınmışsa bir tanesi $\frac{a}{3}$ liradır.

5 tanesi b liraya satılıyorsa tanesi $\frac{b}{5}$ liraya

satılıyor demektir.

Satış fiyatı alış fiyatının iki katılmış yani;

$$\left(\frac{b}{5}\right) = 2\left(\frac{a}{3}\right)$$

$$\frac{b}{5} \cancel{\times} \frac{2a}{3}$$

$$10a = 3b$$

$$\frac{a}{b} = \frac{3}{10} \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK(56)

$$\frac{3x - 2y}{2} = \frac{x + 3y}{3} \text{ eşitliğinde } x \text{ ve } y \text{ negatif tamsayılardır. } x+y \text{ toplamının alabileceği en büyük değer nedir?}$$

ÇÖZÜM:

$$\frac{3x - 2y}{2} \cancel{\times} \frac{x + 3y}{3} \Rightarrow 9x - 6y = 2x + 6y$$

$$\Rightarrow 9x - 2x = 6y + 6y$$

$$\Rightarrow 7x = 12y$$

7 ve 12 sadeleşmediklerinden eşitliğin sağlanması için $x=-12$ ve $y = -7$ seçilebilir.

O halde $x+y = -12-7 = -19$ bulunur.

ÖRNEK(57)

Bir öğrenci kampındaki kızların sayısının erkeklerin sayısına oranı $7/11$ dir. Kampa 3 erkek daha gelince bu oran $5/8$ oluyor. Son durumda bu kamptaki öğrenci sayısı nedir?

ÇÖZÜM:

$$\frac{\text{kız}}{\text{erkek}} = \frac{7k}{11k} \rightarrow \text{kız} = 7k, \text{ erkek} = 11k \text{ olsun}$$

Kampa 3 erkek gelince erkekler $11k+3$ olur. Yeni

$$\text{oran ise } \frac{\text{kız}}{\text{erkek}} = \frac{7k}{11k+3} \cancel{\times} \frac{5}{8}$$

$$56k = 55k+15$$

$$56k-55k = 15$$

$$k = 15$$

Son durumdaki öğrenci sayısı :

$$7k + 11k + 3 = 18k + 3 = 18 \cdot 15 + 3 \\ = 273 \text{ kişi vardır.}$$

ÖRNEK(58)

Farklı iki mumdan uzun olanı 3 saat, kısa olanı 5 saat yanabiliyor. Aynı anda yakılan bu mumların boyları 2 saat sonra eşit olduğuna göre yanmadan önceki boyları oranı kaçtır?

ÇÖZÜM:

Mum soruları kalıp sorulardandır. O yüzden adım adım çözelim ki iyi kavransın

Mumların boyları

Uzun olan: x

Kısa olan : y olsun

Once 1 saatte yanın kısımalar bulunur

Uzun olan 3 saatte yanıyorsa 1 saatte $\frac{x}{3}$ 'ü yanar.

Kısa olan 5 saatte yanıyorsa 1 saatte $\frac{y}{5}$ 'i yanar.

2 saat sonra yanan kısım

uzun olan 2. $\frac{x}{3} = \frac{2x}{3}$ yanar

kısa olan 2. $\frac{y}{5} = \frac{2y}{5}$ yanar

2 saat sonra kalan kısım

uzun olan $x - \frac{2x}{3} = \frac{x}{3}$ kalır

kısa olan $y - \frac{2y}{5} = \frac{3y}{5}$ kalır

2 saat sonra boyalar eşit demek, yanın değil kalan kısımalar eşitlenecek demektir. Bu yüzden;

$$\frac{x}{3} = \frac{3y}{5} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{9}{5} \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK(59)

Bir y değişkeni x^2+1 ile doğru , $4x-1$ ile ters orantılı olarak değişmektedir. $x=3$ iken $y=10$ ise $x=1$ iken $y=?$

ÇÖZÜM:

Orantımız $\frac{y}{x^2+1}(4x-1) = k$ olur.

$x=3$ ve $y = 10$ için

$$\frac{y}{x^2+1}(4x-1) = k \Rightarrow \frac{10}{3^2+1}(4 \cdot 3 - 1) = k$$

$$\Rightarrow \frac{10}{10}(12-1) = k$$

$$\Rightarrow k = 11$$

$x = 1$ iken y yi bulalım

$$\frac{y}{x^2+1}(4x-1) = 11 \Rightarrow \frac{y}{1^2+1}(4 \cdot 1 - 1) = 11$$

$$\Rightarrow \frac{y}{2} \cdot 3 = 11$$

$$\Rightarrow y = \frac{22}{3} \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK(60)

42 cm 'lik bir çubuk, birinci parça 2 ile , ikinci parça 3 ile doğru, üçüncü parça 4 ile ters orantılı olacak biçimde üç parçaya bölünüyor. Üçüncü parçanın uzunluğu kaç cm dir?

ÇÖZÜM:

Birinci parça = $2k$

İkinci parça = $3k$

Üçüncü parça = $\frac{k}{4}$

$$2k + 3k + \frac{k}{4} = 42 \rightarrow \frac{21k}{4} = 42 \rightarrow k = 8$$

Üçüncü parça $\frac{k}{4} = \frac{8}{4} = 2$ bulunur.

ÖRNEK(61)

x, y den 6 fazla, z den 3 eksiktir. $z-x$ ile $z-y$ nin orta orantısı kaçtır?

ÇÖZÜM:

$$x = y + 6 \rightarrow x - y = 6 \quad \text{denklemleri toplayıp}$$

$$x = z - 3 \rightarrow z - x = 3 \quad z - y'yi bulalım$$

$$\begin{array}{r} + \\ \hline z - y = 9 \end{array}$$

$z-x$ ile $z-y$ nin orta orantısı $= \sqrt{3.9} = 3\sqrt{3}$ olur.

ÖRNEK(62)

x tane kız, y tane erkek öğrencinin bulunduğu bir sınıfta, kızların not ortalaması 40, erkeklerin not ortalaması 50 dir. Sınıfın not ortalaması 47 olduğuna göre sınıfta en az kaç öğrenci vardır?

ÇÖZÜM:

$$\text{Kız Not Ort.} = \frac{\text{Kız Not Top.}}{\text{Kız ögr. sayısı}}$$

$$40 = \frac{\text{Kız. Not Top.}}{x} \Rightarrow \text{Kız. Not Top.} = 40x$$

$$\text{Erkek Not Ort.} = \frac{\text{Erkek Not Top.}}{\text{Erkek ögr. sayısı}}$$

$$50 = \frac{\text{Erkek Not Top.}}{y} \Rightarrow \text{Erkek Not Top.} = 50y$$

$$\text{Sınıf Not Ort.} = \frac{\text{Erkek Not Top} + \text{Kız Not Top}}{\text{Tüm Öğr. Sayısı}}$$

$$47 = \frac{50y + 40x}{x + y}$$

$$47x + 47y = 40x + 50y$$

$$47x - 40x = 50y - 47y$$

$$7x = 3y$$

7 ve 3 sadeleşemez olduklarından $x=3$ ve $y=7$ alınırsa en küçük değerler elde edilir.

O halde sınıfta en az : $x+y=3+7=10$ kişi vardır.

8 kişi 6 parça işi günde 4 saat çalışarak 12 günde bitirebilmektedir. Aynı nitelikte 18 parça işi 2 kişi günde 8 saat çalışarak kaç günde bitirir?

ÇÖZÜM:

8 kişi 6 parça iş günde 4 saat 12 gün

2 kişi 18 parça iş günde 8 saat xgün

yapılan iş belli olduğundan pratik yöntemimizi kullanabiliriz.

$$\frac{\text{İş}_1}{\text{İş}_2} = \frac{\text{Digerleri}_1}{\text{Digerleri}_2} \Rightarrow \frac{6}{18} = \frac{8.4.12}{2.8.x}$$

gerekli sadeleştirmeler yapılrsa

$$x = 72 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK(63)

a ve b gibi iki sayının aritmetik ortalaması 6, geometrik ortalaması 4 olduğuna göre $a^2+b^2=?$

ÇÖZÜM:

a ve b 'nin aritmetik ortalaması :

$$\frac{a+b}{2} = 6 \rightarrow a+b = 12$$

a ve b 'nin geometrik ortalaması :

$$\sqrt{a.b} = 4 \rightarrow a.b = 4^2 = 16$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{Çarpanlara Ayırma özdeşliklerinden} \\ a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab \end{array} \right)$$

$$a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$$

$$= 12^2 - 2.16$$

$$= 144 - 32$$

$$= 112 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK(64)

Bir makinede arka arkaya birbirini çeviren x,y,z dişli çarkların diş sayıları toplamı 74 tür. x , 20 kez dönençeye kadar y, 25 kez, z 'de 30 kez dönmektedir. x çarkında kaç dişli vardır?

ÇÖZÜM:

Diş sayısı ile dönme sayısı ters orantılıdır. Diş sayısı ne kadar çoksa , çark o kadar büyktür ve yavaş döner

O halde orantıyı kuralım

Diş sayıları:

$$x = \frac{k}{20}, \quad y = \frac{k}{25}, \quad z = \frac{k}{30}$$

Diş sayıları toplamı:

$$\frac{k}{20} + \frac{k}{25} + \frac{k}{30} = 74 \Rightarrow \frac{15k + 12k + 10k}{300} = 74$$

(15) (12) (10)

$$\Rightarrow \frac{37k}{300} = 74^2 \Rightarrow k = 600$$

Şimdi x çarkındaki dişli sayısını bulalım

$$x = \frac{k}{20} = \frac{600}{20} = 30 \text{ diş vardır.}$$

ÖRNEK(65)

Matematik sınavlarından 2 ve 5 alan bir öğrenci üçüncü sınavdan kaç olmalı ki not ortalaması 4 olsun?

ÇÖZÜM:

Üçüncü sınavdan x almış olsun.

$$\text{Bu üç sınavın ortalaması : } \frac{2+5+x}{3} = 4$$

$$\frac{7+x}{3} \cancel{\times} 4 \Rightarrow x+7=12 \Rightarrow x=5$$

almalı ki ortalaması 4 düşsün.

ÖRNEK(66)

Tek tür mal üreten bir atölyede makinelerden biri a saatte b birim mal üretiyor.

Aynı süre içinde bu makinenin c katı mal üreten başka bir makine , b birim malı kaç saatte üretir?

(ÖSS 2003)

ÇÖZÜM:

Birinci makine a saatte b birim üretirken ikincisi a saatte b.c adet mal üretiyormuş.

İkinci makine: bc malı \cancel{x} saatte
b malı x saatte

Doğru Oranti

$$x \cancel{,} b c = a \cancel{b}$$

$$x = \frac{a}{c} \text{ saatte üretir}$$

ÖRNEK(67)

Bir guruptaki kız sporcuların yaş ortalaması 15, erkek sporcuların yaş ortalaması 24 tür.

Kızların sayısı erkeklerin sayısının 2 katı olduğuna göre , bu gurubun yaş ortalaması kaçtır?

(ÖSS 2003)

ÇÖZÜM:

Kızlar : $2x$ kişi olsun

Erkekler : x kişi olur.

$$\text{Kız Yaşı Ort.} = \frac{\text{Kız Yaş Top.}}{\text{Kız Öğr. sayısı}}$$

$$15 = \frac{\text{Kız. Yaş Top.}}{2x} \Rightarrow \text{Kız. Yaş Top.} = 30x$$

$$\text{Erkek Yaşı Ort.} = \frac{\text{Erkek Yaş Top.}}{\text{Erkek Öğr. sayısı}}$$

$$24 = \frac{\text{Erkek Yaş Top.}}{x} \Rightarrow \text{Erkek Yaş Top.} = 24x$$

$$\text{Grup Yaşı Ort.} = \frac{\text{Erkek Yaş Top} + \text{Kız Yaş Top}}{\text{Tüm Öğr. Sayısı}}$$

$$= \frac{24x + 30x}{x + 2x} = \frac{54x}{3x} = 18 \text{ yaşı olur.}$$

ÖRNEK(68)

Bir sınıfı matematik sınavından aldığı puan 2,3 ve 4 olan öğrencilerden 8 kişilik bir gurup oluşturulmuştur. Gurupta bu üç puandan her birini alan en az bir öğrenci bulunmaktadır ve gurubun puan ortalaması 25/8 dir.

Bu gurupta puanı 3 olan en çok kaç öğrenci bulunabilir?

(ÖSS 2003)

ÇÖZÜM:

Sınıfta : 2 alan x kişi → notları toplamı :2x

3 alan y kişi → notları toplamı :3y

4 alan z kişi → notları toplamı :4z

$$\text{Sınıfın Not Ort.} = \frac{\text{Tüm Notların Toplamı}}{\text{Öğrenci Sayısı}}$$

$$\frac{25}{8} = \frac{2x + 3y + 4z}{8}$$

$$2x + 3y + 4z = 25$$

3 alan en çok olacaksa diğerlerini en az seçeriz .
yani x ve z küçük olacak

$x=1$ ve $z=2$ seçersek

$$2x + 3y + 4z = 25$$

$$2.1 + 3y + 4.2 = 25$$

$$3y + 10 = 25$$

$$3y = 15$$

$y = 5$ bulunur.

ÖRNEK(69)

a tanesi b TL den satılan kalemlerden c tane satın alınarak d TL ödeniyor.Buna göre , aşağıdakilerden hangisi her zaman doğrudur?

- A) $ab=cd$ B) $ac=bd$ C) $ad=bc$
 D) $a^2b=cd^2$ E) $a^2d=bc^2$

(ÖSS 2002)

ÇÖZÜM:

a tanesi b lira ise bir tanesi $\frac{b}{a}$ liradır.

Bir tanesi $\frac{b}{a}$ lira ise c tanesi $c \cdot \frac{b}{a}$ olur. Buda d

liraya eşitmiş. O halde

$$\frac{c \cdot b}{a} = d \rightarrow b \cdot c = a \cdot d \text{ olur.}$$

Doğru cevap C şıkları olur.

ÖRNEK(70)

$$a - \frac{1}{b} = 3 \quad \text{ve} \quad b - \frac{1}{a} = 12 \quad \text{olduğuna göre}$$

$$\frac{b-a}{b} = ?$$

(ÖSS-2000)

ÇÖZÜM:

$$a - \frac{1}{b} = 3 \rightarrow \frac{ab-1}{b} = 3 \rightarrow ab - 1 = 3b$$

$$b - \frac{1}{a} = 1 \rightarrow \frac{ab-1}{a} = 12 \rightarrow ab - 1 = 12a \quad \downarrow$$

$$3b = 12a$$

$b=4a$ bu değeri soruda yerine yazalım,

$$\frac{b-a}{b} = \frac{4a-a}{4a} = \frac{3a}{4a} = \frac{3}{4}$$

elde edilir.

KONUMUZ BİTTİ. ŞİMDİ TESTLERE
GEŞEBİLİRSİNİZ

DİLERSENİZ KONU ANLATIMINI BİR DE
YOUTUBE KANALIMIZDAN VİDEO OLARAK
DA İZLEYEBİLİRSİNİZ

Youtube kanalımız: **CEBİR HOCAM**

Başarılar diliyorum
İbrahim Halil BABAOĞLU
Matematik Öğretmeni

