

## BİRİNCİ DERECEDEN BİR BİLİNMEYENLİ DENKLEMLER

$a, b \in \mathbb{R}$  ve  $a \neq 0$  olmak üzere

$ax+b=0$  şeklindeki denklemlere Birinci dereceden bir bilinmeyenli denklemler denir. Bu denklemin çözümünden elde edilen  $x(\text{ler})$ 'e denklemin kök(leri) denir

Denklemin çözüm kümesi  $x$  tek başına bırakılarak bulunur. temel kural 'bilinenler bir tarafa, bilinmeyenler diğer tarafa' şeklindedir. Bilinmeyenler demek denklemin bağlı olduğu değişkenin tek başına veya bir çarpanla beraber olduğu terimler demektir. Bilinenler ise bunun dışında kalan tüm terimler demektir.

Bazen  $x$ 'in sorulduğu sorularda farklı değişkenlerde denklemde yer alabilir  $a, b, c$  gibi bunlarda bilinen safında kabul edilir.

Terimler soldan  $\rightarrow$  sağa veya sağdan  $\rightarrow$  sola gönderildiğinde işaretleri değişir.  $+$  ise  $-$ ,  $-$  ise  $+$  olurlar.

$$ax+b=0$$

$$ax=-b$$

$$x = -\frac{b}{a} \text{ bulunur.}$$

Yani çözüm kümesi  $\text{ÇK} = \{-b/a\}$  dır.

### ÖRNEK(1)

$3x-15=2x-4$  denklemini sağlayan  $x$  nedir?

**ÇÖZÜM:**

$$3x-15=2x-4$$

$$3x-2x=-4+15$$

$$x=+11 \text{ bulunur.}$$

### ÖRNEK(2)

$2x+3a-2=5x-b+3$  denklemini sağlayan  $x$  değeri nedir?

**ÇÖZÜM:**

$$3a-2+b-3=5x-2x$$

$$\frac{\cancel{3}x}{\cancel{3}} = \frac{3a+b-5}{3}$$

$$x = \frac{3a+b-5}{3} \text{ olur.}$$

### ÖRNEK(3)

$$\frac{x-3}{2} - \frac{x+2}{3} = 2 \text{ denkleminin çözüm kümesi}$$

nedir?

**ÇÖZÜM:**

Önce paydalar eşitlenir.

$$\frac{x-3}{2} - \frac{x+2}{3} = 2 \Rightarrow \frac{3x-9}{6} - \frac{2x+4}{6} = 2$$

$$(3) \quad (2)$$

$$\Rightarrow \frac{3x-9-2x-4}{6} \times 2$$

$$\Rightarrow x-13=12$$

$$\Rightarrow x=12+13$$

$$\Rightarrow x=25 \text{ bulunur.}$$

O halde  $\text{ÇK}=\{25\}$  olur.

### ÖRNEK(4)

$$\frac{x}{2} - 1 = \frac{x+3}{4} + 3 \text{ denkleminin çözüm kümesi}$$

nedir?

**ÇÖZÜM:**

$$\frac{x}{2} - 1 = \frac{x+3}{4} + 3 \Rightarrow \frac{x}{2} - \frac{x+3}{4} = +3+1$$

$$(2) \quad (1)$$

$$\Rightarrow \frac{2x}{4} - \frac{x+3}{4} = 3$$

$$\Rightarrow \frac{2x-x-3}{4} \times 3$$

$$\Rightarrow x-3=12$$

$$\Rightarrow x=15$$

çözüm kümesi  $\text{ÇK}=\{15\}$  olur.

## ÖRNEK( 5)

$$x^2 + \frac{1}{2-x} = 4 - \frac{1}{x-2} \text{ denkleminin çözüm}$$

kümesi nedir?

**ÇÖZÜM:**

$$x^2 + \frac{1}{2-x} = 4 - \frac{1}{x-2}$$

$$x^2 + \frac{1}{\cancel{2-x}} = 4 + \frac{1}{\cancel{2-x}}$$

$$x^2 = 4$$

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{4}$$

$$|x| = 2 \quad (\text{DİKKAT !!!})$$

$$x = 2 \text{ ve } x = -2 \text{ bulunur.}$$

Bu tür rasyonel tipli denklemlerde dikkat edilmesi gereken önemli bir husus var. O da bulunan değerlerin paydayı sıfır yapıp yapmadığı. Çünkü paydayı sıfır yapan değerler ifadeyi tanımsız yapacağından çözüme dahil edilmezler. Tıpkı bu soruda olduğu gibi.  $x=2$  sorudaki bir paydayı sıfır yaptığından çözüme dahil edilmez yani çözüm sadece  $x=-2$  olur.

O halde çözüm kümesi  $\text{ÇK}=\{-2\}$  dir

## ÖRNEK( 6)

$$\frac{3(2x+5)}{5} - \frac{7(x+8)}{10} - \frac{4(x-2)}{15} = 0 \text{ ise } \text{Ç}=?$$

**ÇÖZÜM:**

$$\frac{3(2x+5)}{5} - \frac{7(x+8)}{10} - \frac{4(x-2)}{15} = 0$$

$$(6) \quad (3) \quad (2)$$

$$\frac{18(2x+5)}{30} - \frac{21(x+8)}{30} - \frac{8(x-2)}{30} = 0$$

$$\frac{36x+90-21x-168-8x+16}{30} \neq 0$$

$$7x - 62 = 0$$

$$7x = 62 \rightarrow x = \frac{62}{7}$$

o halde çözüm kümesi  $\text{ÇK}=\{\frac{62}{7}\}$  olur.

## ÖRNEK( 7)

$$\frac{3(3a-2)}{4} - \frac{2(5a-3)}{5} = 1 \frac{1}{4} \text{ ise } \text{ÇK}=?$$

**ÇÖZÜM:**

$$\frac{3(3a-2)}{4} - \frac{2(5a-3)}{5} = 1 \frac{1}{4}$$

$$(5) \quad (4)$$

$$\frac{15(3a-2)}{20} - \frac{8(5a-3)}{20} = \frac{5}{4}$$

$$\frac{45a-30-40a+24}{20} = \frac{5}{4}$$

$$\frac{5a-6}{20} \neq \frac{5}{4}$$

$$5a-6 = 25 \quad 5a = 31 \Rightarrow a = \frac{31}{5}$$

O halde çözüm kümesi  $\text{ÇK}=\{\frac{31}{5}\}$  olur.

## ÖRNEK( 8)

$$\frac{5}{1 - \frac{2}{x-3}} = 4 \text{ ise } \text{Ç}=?$$

**ÇÖZÜM:**

$$\frac{5}{1 - \frac{2}{x-3}} = 4$$

$$\frac{5}{x-3-2} = 4$$

$$\frac{5}{x-3-2} = 4$$

$$\frac{5(x-3)}{x-5} \neq 4$$

$$5x-15 = 4x-20$$

$$5x-4x = -20+15$$

$$x = -5 \text{ bulunur.}$$

o halde çözüm kümesi  $\text{ÇK}=\{-5\}$  tir.

## BİRİNCİ DERECEYE DÖNÜŞEBİLEN DENKLEMLER

$$P(x).Q(x).R(x)=0 \text{ ise } P(x)=0 \text{ veya } Q(x)=0$$

veya  $R(x)=0$  dır.

### (DİKKAT !!)

$P(x).Q(x)=P(x)$  denkleminde  $P(x)$ 'ler sadeleşir ancak  $P(x)$  denklemi bir kenarda sıfıra eşitlenir ( $P(x)=0$ ) 'ler sadeleştiğinde sol tarafta sıfır değil 1 kalır. Yani çözüm

$P(x)=0$  ve  $Q(x)=1$  şeklindedir.

(DİKKAT !!)

$\frac{P(x).Q(x)}{R(x)} = \frac{P(x)}{R(x)}$  şeklindeki bir denklem

çözülürken  $P(x)$ 'ler sadeleştirilir ve sıfıra eşitlenir ancak  $R(x)$ 'ler sadeleştirilir fakat sıfıra eşitlenmez çünkü paydada yer alıyorlar. Yani denklemin çözümü

$$\frac{P(x).Q(x)}{R(x)} = \frac{P(x)}{R(x)} \Rightarrow \frac{\cancel{P(x)}.Q(x)}{\cancel{R(x)}} = \frac{\cancel{P(x)}}{\cancel{R(x)}}$$

$P(x)=0$  ,  $Q(x)=1$  ve  $R(x) \neq 0$

Eğer  $R(x)$ 'in kökü diğer denklemlerden de bulunuyorsa bu kök çözüme dahil edilmez

### ÖRNEK( 9)

$x^3-2x^2=0$  ise  $\mathbb{C}=?$

### ÇÖZÜM:

$x^2(x-2)=0$  buradan  $x^2=0$  ve  $x-2=0$  bulunur. bu denklemler çözülürse

$x^2=0$  ise  $x=0$  ve  $x-2=0$  ise  $x=2$  olur. Yani çözüm kümesi

$\mathbb{C}K=\{0,2\}$  bulunur.

### ÖRNEK( 10)

$x^2-4x+4=0$  ise  $\mathbb{C}=?$

### ÇÖZÜM:

$$x^2-4x+4=0 \rightarrow (x-2)(x-2)=0$$

$$x-2=0 \quad x-2=0$$

$$x=2 \quad x=2$$

o halde çözüm kümesi  $\mathbb{C}K=\{2\}$  olur.

(Burada iki tane  $(x-2)$  çarpanı ve bir tane kök olduğuna dikkat edin. Böyle köklere çift kat kök denir.)

### ÖRNEK( 11)

$3x^2+5x=0$  ise  $\mathbb{C}=?$

### ÇÖZÜM:

$$3x^2+5x=0 \rightarrow x(3x+5)=0$$

$$\begin{array}{l} \swarrow \quad \searrow \\ x=0 \quad 3x+5=0 \\ \quad \quad 3x=-5 \\ \quad \quad x=-\frac{5}{3} \end{array}$$

çözüm kümesi  $\mathbb{C}K=\{-\frac{5}{3}, 0\}$  olur.

### ÖRNEK( 12)

$(3x-4).(2x+1).(7x-3)=0$  ise  $\mathbb{C}=?$

### ÇÖZÜM:

$$(3x-4).(2x+1).(7x-3)=0$$

$$\begin{array}{lll} 3x-4=0 & 2x+1=0 & 7x-3=0 \\ 3x=4 & 2x=-1 & 7x=3 \\ x=\frac{4}{3} & x=-\frac{1}{2} & x=\frac{3}{7} \end{array}$$

çözüm kümesi  $\mathbb{C}K=\{-\frac{1}{2}, \frac{3}{7}, \frac{4}{3}\}$  olur.

### ÖRNEK( 13)

$x^2-5=0$  ise  $\mathbb{C}=?$

## ÇÖZÜM:

$$x^2 - 5 = 0 \rightarrow x^2 = 5 \rightarrow x = \pm\sqrt{5}$$

O halde ÇK:  $\{-5, +5\}$  olur.

## ÖRNEK( 14)

$$x^2 + 7 = 0 \text{ ise } \text{Ç}=?$$

## ÇÖZÜM:

$x^2 + 7 = 0$  ise  $x^2 = -7$  çıkar. Bir reel sayının karesi negatif olamayacağından  $\text{Ç} = \emptyset$  olur.

## ÖRNEK( 15)

$$(2x-3)^2 - 4 = 0 \text{ ise } \text{Ç}=?$$

## ÇÖZÜM:

$$(2x-3)^2 - 4 = 0 \text{ ise } (2x-3)^2 = 4$$

$$\sqrt{(2x-3)^2} = \sqrt{4}$$

$$|2x-3| = 2$$

$2x-3=2$  ve  $2x-3 = -2$  bulunur. Buradan

$$2x-3=2 \rightarrow 2x = 2+3 \rightarrow x = 5/2$$

$$2x-3 = -2 \rightarrow 2x = -2+3 \rightarrow x = 1/2$$

o halde  $\text{ÇK} = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{5}{2} \right\}$

## ÖRNEK( 16)

$$(3x-2)^2 - (4x+3)^2 = 0 \text{ ise } \text{Ç}=?$$

## ÇÖZÜM:

Bu soruyu diğerlerinden farklı olarak iki kare farkı ile çözelim (maksat değişiklik olsun ☺)

$$\begin{aligned} (3x-2)^2 - (4x+3)^2 &= 0 \\ [(3x-2)+(4x+3)] \cdot [(3x-2)-(4x+3)] &= 0 \\ (7x+1)(-x-5) &= 0 \end{aligned}$$

$7x+1 = 0$   
 $7x = -1$   
 $x = -1/7$

ve

$-x-5 = 0$   
 $-x = 5$   
 $x = -5$

o halde  $\text{ÇK} = \{-5, -1/7\}$  olur.

## RASYONEL DENKLEMLER

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = 0 \Rightarrow P(x) = 0 \text{ ve } Q(x) \neq 0 \text{ olmalı}$$

## ÖRNEK( 17)

$$\frac{1}{x+m} + \frac{2}{x+2} + \frac{3}{x} = \frac{13}{6} \text{ denkleminin bir kökü}$$

$x=2$  ise  $m=?$

## ÇÖZÜM:

Denklemin bir kökü 2 ise  $x$  yerine 2 yazıldığında denklemi sağlamalı. O halde

$$x=2 \text{ için } \frac{1}{x+m} + \frac{2}{x+2} + \frac{3}{x} = \frac{13}{6}$$

$$\frac{1}{2+m} + \frac{2}{2+2} + \frac{3}{2} = \frac{13}{6}$$

$$\frac{1}{2+m} = \frac{13}{6} - \frac{3}{2} - \frac{1}{2}$$

(3) (3)

$$\frac{1}{2+m} = \frac{13-9-3}{6}$$

$$\frac{1}{2+m} \neq \frac{1}{6}$$

$$m+2 = 6$$

$$m = 4 \text{ bulunur.}$$

**ÖRNEK( 18)**

$$\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3} = \frac{2x-1}{x^2-5x+6}$$

ise Ç=?

**ÇÖZÜM:**

Önce payda eşitleyelim

$$\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3} = \frac{2x-1}{x^2-5x+6}$$

$$(x-3)(x-2)$$

$$\frac{x-3+x-2}{x^2-5x+6} = \frac{2x-1}{x^2-5x+6}$$

paydalar eşit olduğundan payları eşitleyelim

$$2x-5 = 2x-1$$

$$2x-2x = 5-1$$

$$0 = 4$$

böyle bir eşitlik olamayacağına göre bu denklemi sağlayan bir x yoktur. Yani çözüm kümesi  $\emptyset$  olur.

**ÖRNEK( 19)**

$$\frac{x+1}{x-1} - \frac{x+3}{x+1} = \frac{4}{x+1} \text{ ise } \text{Ç}=?$$

**ÇÖZÜM:**

$$\frac{x+1}{x-1} - \frac{x+3}{x+1} = \frac{4}{x+1}$$

$$\frac{x+1}{x-1} = \frac{4}{x+1} + \frac{x+3}{x+1}$$

$$\frac{x+1}{x-1} \neq \frac{x+7}{x+1}$$

$$(x+1)(x+1) = (x-1)(x+7)$$

$$x^2 + x + x + 1 = x^2 + 7x - x - 7$$

$$2x+1 = 6x-7$$

$$6x-2x = 1+7$$

$$4x = 8$$

$$x = 2 \text{ olur.}$$

O halde ÇK={2} dir.

**ÖRNEK( 20)**

$$\frac{1 + \frac{x}{x+3}}{1 - \frac{x}{x+3}} = 5 \text{ ise } \text{Ç}=?$$

**ÇÖZÜM:**

$$\frac{1 + \frac{x}{x+3}}{1 - \frac{x}{x+3}} = 5 \Rightarrow \frac{\frac{x+3+x}{x+3}}{\frac{x+3-x}{x+3}} = 5$$

$$\frac{2x+3}{3} \neq 5$$

$$2x+3 = 15$$

$$2x = 15-3$$

$$2x = 12$$

$$x = 6$$

Çözüm kümesi :{6} olur.

## ÖRNEK( 21)

$$\frac{5x-3}{3+\frac{2}{1-\frac{x}{x+4}}}$$
 ifadesini tanımsız yapan

x'lerin toplamı kaçtır?

## ÇÖZÜM:

Bir rasyonel ifadeyi tanımsız yapan değerler rasyonel ifadedeki her bir paydayı sıfır yapan değerlerdir. Bu yüzden her bir paydayı ayrı ayrı sıfıra eşitleriz.

$$\frac{5x-3}{3+\frac{2}{1-\frac{x}{x+4}}}$$

çerçeveye alınmış her ifade ayrı ayrı sıfıra eşitlenirse;

$$i) x+4 = 0 \rightarrow x = -4$$

$$ii) 1 - \frac{x}{x+4} = 0 \rightarrow 1 \times \frac{x}{x+4} \rightarrow x+4 = x \rightarrow 4 = 0$$

bu eşitlik doğru olmadığından bu ifade sıfır olmaz

$$iii) 3 + \frac{2}{1 - \frac{x}{x+4}} = 0 \rightarrow \frac{2}{\frac{x+4-x}{x+4}} = -3$$

$$\rightarrow \frac{2(x+4)}{4} \times -3$$

$$\rightarrow 2x+8 = -12$$

$$\rightarrow 2x = -12-8$$

$$\rightarrow 2x = -20$$

$$\rightarrow x = -10$$

şimdi buluna değerleri toplayalım,  
 $-4-10 = -14$  bulunur.

## ÖRNEK( 22)

$$3x = \frac{5x+y}{2-y} \text{ ise } y\text{'nin } x \text{ cinsinden değeri nedir?}$$

## ÇÖZÜM:

$$3x \times \frac{5x+y}{2-y} \Rightarrow 6x - 3xy = 5x + y$$

$$\Rightarrow 6x - 5x = 3xy + y$$

$$\Rightarrow y(3x+1) = x$$

$$\Rightarrow y = \frac{x}{3x+1} \text{ olur.}$$

## BİRİNCİ DERECEDEN İKİ BİLİNMEYENLİ DENKLEMLER

a,b,c,d,e,f ∈ R olmak üzere ax+by+c=0 şeklindeki denklemlere Birinci Dereceden İki Bilinmeyenli Denklemler denir. Bu denklem aynı zamanda Analitik Düzlemde bir doğru belirtir

$$\left. \begin{array}{l} d_1 \dots ax + by + c = 0 \\ d_2 \dots dx + ey + f = 0 \end{array} \right\} \text{Denklem Sistemi denir}$$

## ÇÖZÜM KÜMESİNİN BULUNMASI

1)  $\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f} \Rightarrow d_1 \equiv d_2$  Bu durumda denklemin sonsuz çözümü vardır.(doğrular çakışiktır)

## ÖRNEK( 23)

$$\left. \begin{array}{l} 3x - 2y = 6 \\ 4x + my = 8 \end{array} \right\} \text{sonsuz çözüm için } m = ?$$

## ÇÖZÜM:



$$\begin{cases} 3x - 2y = 6 \\ 4x + my = 8 \end{cases} \text{ ise } \frac{3}{4} = \frac{-2}{m} = \frac{6}{8}$$

$$\frac{3}{4} \neq \frac{-2}{m} \Rightarrow 3m = -8 \Rightarrow m = -\frac{8}{3} \text{ olur.}$$

**ÖRNEK( 24)**

$$\begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ 6x + 4y = 8 \end{cases} \text{ çözümünü araştırın}$$

**ÇÖZÜM:**

Katsayıları oranlayıp bakalım

$$\begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ 6x + 4y = 8 \end{cases} \text{ ise } \frac{3}{6} = \frac{2}{4} = \frac{4}{8} \text{ elde edilen tüm}$$

kesirlerin  $\frac{1}{2}$ 'ye eşit olduğu görülür. Bu durumda

tüm katsayılar oranı eşit olduğundan **sonsuz çözüm** vardır.

$$2) \frac{a}{d} = \frac{b}{e} \neq \frac{c}{f} \Rightarrow d_1 // d_2 \text{ ve çözüm kümesi } \emptyset \text{ dir.}$$

**ÖRNEK( 25)**

$$\begin{cases} 2x - 4y + 1 = 0 \\ x - 2y - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \emptyset = ?$$

**ÇÖZÜM:**

Katsayıları oranlarsak

$$\begin{cases} 2x - 4y + 1 = 0 \\ x - 2y - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{2}{1} = \frac{-4}{-2} \neq \frac{1}{-3} \text{ sabit terimin}$$

katsayıları oranı eşit olmadığından çözüm boş kümedir

$$3) \frac{a}{d} \neq \frac{b}{e} \Rightarrow d_1 \cap d_2 = P(x_0, y_0) \\ \text{ve } \emptyset = \{(x_0, y_0)\} \text{ (Doğrular Kesişir)}$$

Bu durumda çözüm bulma yollarına ihtiyaç vardır.

**ÇÖZÜM YOLLARI****a)Yok Etme Metodu:****ÖRNEK( 26)**

$$\begin{cases} 2x - 3y = 2 \\ x + y = 6 \end{cases} \Rightarrow \emptyset = ?$$

**ÇÖZÜM:**

$$\begin{cases} 2x - 3y = 2 \\ x + y = 6 \end{cases} \text{ ise } \begin{array}{l} 2x - 3y = 2 \\ -2 / x + y = 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \cancel{2x} - 3y = 2 \\ \cancel{-2x} - 2y = -12 \\ \hline -5y = -10 \\ y = 2 \end{array}$$

bu y değerini bir veya ikinci denklemden hangisi kolayınıza gelirse onda yerine yazın. Zaten sonuç ikisinde de aynı çıkmak zorundadır.

$$x+y=6 \text{ denkleminde } y=2 \text{ için } x+2=6 \rightarrow x=4$$

o halde denklem sistemini sağlayan (x,y) ikilisi (4,2) olur.  $\emptyset K = \{(4,2)\}$

**ÖRNEK( 27)**

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{2}{x} + \frac{3}{y} = \frac{23}{20} \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{9}{20} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Ç} = ?$$

**ÇÖZÜM:**

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{2}{x} + \frac{3}{y} = \frac{23}{20} \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{9}{20} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \frac{2}{x} + \frac{3}{y} = \frac{23}{20} \\ -2 / \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{9}{20} \\ \hline \frac{2}{x} + \frac{3}{y} = \frac{23}{20} \\ \frac{-2}{x} - \frac{2}{y} = \frac{-18}{20} \\ \hline \frac{3}{y} - \frac{2}{y} = \frac{23}{20} - \frac{18}{20} \\ \frac{1}{y} \times \frac{5}{20} \\ 5y = 20 \\ y = 4 \end{array}$$

bu değer ikinci denklemde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} &= \frac{9}{20} \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{4} = \frac{9}{20} \\ \Rightarrow \frac{1}{x} &= \frac{9}{20} - \frac{1}{4} \\ &= \frac{9-5}{20} \\ \Rightarrow \frac{1}{x} &= \frac{4}{20} \\ 4x &= 20 \Rightarrow x = 5 \end{aligned}$$

denklem sistemini sağlayan (x,y) değerleri (5,4) ve çözüm kümesi  $\text{ÇK}=\{(5,4)\}$  olur.

**b) Yerine Koyma Metodu:**

Bu yöntemde; seçilen bir değişken, denklemlerin birinden çekilip diğer denklemde yerine yazılır ve diğer değişken bulunur. daha sonra bu değer herhangi bir denklemde yerine yazılıp diğer değişken bulunur.

**ÖRNEK( 28)**

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x + 4y = 14 \\ 2x = 3y \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Ç} = ?$$

**ÇÖZÜM:**

İkinci denklemde zaten yalnız bulunan 2x'i birinci denklemde yazarsak;

$$2x = 3y \text{ ise } 2x+4y = 14 \rightarrow 3y+4y = 14$$

$$\rightarrow 7y = 14$$

$$\rightarrow y = 2 \text{ bulunur. Bu}$$

değer ikinci denklemde yerine yazılırsa;

$$2x = 3y \rightarrow 2x = 3 \cdot 2 = 6 \rightarrow x = 3 \text{ bulunur. o halde}$$

çözüm kümesi  $\text{ÇK}=\{(3,2)\}$  olur.

**ÖRNEK( 29)**

$$\left\{ \begin{array}{l} x - ay = a \\ x + ay = 3a \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Ç} = ? \quad (a \neq 0)$$

**ÇÖZÜM:**



Birinci denlemden x çekilirse

$x - ay = a \rightarrow x = ay + a$  ve bu değer birinci denklemden yerine yazılırsa

$$x + ay = 3a \rightarrow ay + a + ay = 3a$$

$$\rightarrow 2ay = 2a$$

$\rightarrow y = 1$  şimdi bu değeri birinci denklemden yerine yazalım

$$x - ay = a \rightarrow x - a \cdot 1 = a$$

$$\rightarrow x = 2a$$

o halde denklemin çözüm kümesi  $\{(2a, 1)\}$  olarak bulunur.

### ÖRNEK( 30)

$$\left. \begin{array}{l} \frac{a}{x} - \frac{b}{y} = \frac{1}{6} \\ \frac{a}{3x} - \frac{b}{2y} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Ç} = ?$$

### ÇÖZÜM:

Birinci denlemden  $\frac{a}{x}$ 'i çekip ikinci denklemden yerine yazalım

$\frac{a}{x} - \frac{b}{y} = \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{a}{x} = \frac{1}{6} + \frac{b}{y}$  şimdi bu değeri ikinci denklemden yerine yazalım

$$\frac{a}{3x} - \frac{b}{2y} = 0 \Rightarrow \frac{1}{3} \left( \frac{1}{6} + \frac{b}{y} \right) - \frac{b}{2y} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{18} + \frac{b}{3y} - \frac{b}{2y} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{18} = \frac{b}{2y} - \frac{b}{3y} \quad (3) \quad (2)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{18} \times \frac{3b - 2b}{6y}$$

$$\Rightarrow 6y = 18b$$

$$\Rightarrow y = 3b$$

şimdi bu değeri birinci denklemden yerine yazalım

$$\frac{a}{x} - \frac{b}{y} = \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{a}{x} - \frac{b}{3b} = \frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{x} = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \quad (1) \quad (2)$$

$$\Rightarrow \frac{a}{x} \times \frac{1+2}{6}$$

$$\Rightarrow 3x = 6a$$

$\Rightarrow x = 2a$  bulunur o halde çözüm kümesi  $\text{ÇK} = \{(2a, 3b)\}$  olur.

### ÖRNEK( 31)

$$(2x - 5y - 5)^2 + (3x + 10y - 25)^2 = 0$$

ise  $x + y = ?$

### ÇÖZÜM:

İki sayının toplamı ne zaman sıfır olur? Bu sorunun cevabını öğrenmeden önce düşünmenizi istiyorum (Tabi bu satırdan önce aşağıya bakmadıysanız)

Evet düşündüyseniz düşüncenizi cevapla karşılaştırın bakalım..

İki sayının toplamının sıfır olması için ya mutlak değerce eşit zıt işaretli iki sayı (-5 ve +5 gibi), veya ikisi de sıfır olmalıdır.

Soruya bakıldığında üssü çift olan iki ifade olduğunu ve bunların negatif olamayacağı için ikisinin de sıfır olması gerektiği anlaşılır. O halde ;

$$\underbrace{(2x - 5y - 5)^2}_0 + \underbrace{(3x + 10y - 25)^2}_0 = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} 2x - 5y - 5 = 0 \\ 3x + 10y - 25 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} 2x - 5y = 5 \\ + 3x + 10y = 25 \end{array}$$

$$4x - 10y = 10$$

$$\underline{3x + 10y = 25}$$

$$7x = 35$$

$$x = 5$$

şimdi bu değer birinci denklemden yerine yazılırsa  $2x - 5y = 5 \rightarrow 2 \cdot 5 - 5y = 5 \rightarrow 10 - 5 = 5y$

$$\rightarrow 5y = 5 \rightarrow y = 1 \text{ bulunur.}$$

demek ki  $x+y = 5+1 = 6$  dır.

**UYARI:**  $A, B \in \mathbb{R}$  olmak üzere;

1)  $A^2+B^2 = 0$  ise  $A=0$  ,  $B=0$

2)  $\sqrt{A} + \sqrt{B} = 0$  ise  $A=0$  ,  $B=0$

3)  $\sqrt{A} + \sqrt{-A} \dots\dots$  ise  $A=0$

4)  $|A| + |B| = 0$  ise  $A=0$  ,  $B=0$

### ÖRNEK( 32)

$$\sqrt{x-3} + 2x - 5 + \sqrt{3-x}$$

işleminin sonucu nedir?

### ÇÖZÜM:

Kuralda  $\sqrt{A} + \sqrt{-A} \dots\dots$  ise  $A=0$  bilgisi vardı

$$3-x = -(x-3) \text{ olduğundan}$$

$$\sqrt{x-3} + 2x - 5 + \sqrt{-(x-3)} \Rightarrow x-3=0 \Rightarrow x=3$$

$$2x-5 = 2.3-5 = 1$$

o halde cevap 1 olur.

### ÖRNEK( 33)

$$|x+y-5| + |x-y+7| = 0 \text{ ise } x \text{ kaçtır?}$$

### ÇÖZÜM:

Kuralımız  $|A| + |B| = 0$  ise  $A=0$  ,  $B=0$  diyor. O halde

$$\left| \underbrace{x+y-5}_0 \right| + \left| \underbrace{x-y+7}_0 \right| = 0$$

elde edilen denklemleri alt alta yazıp toplayalım

$$x+y-5=0$$

$$+ x-y+7=0$$

$$2x+2=0 \rightarrow 2x=-2 \rightarrow x=-1 \text{ olur.}$$

### ÖRNEK( 34)

$$\sqrt{a-5} + \sqrt{b+2} = 0 \text{ ise } a.b \text{ nedir?}$$

### ÇÖZÜM:

Kuralımız  $\sqrt{A} + \sqrt{B} = 0$  ise  $A=0$  ,  $B=0$  diyor.

$$\sqrt{a-5} + \sqrt{b+2} = 0$$

$$a-5=0 \rightarrow a=5 \text{ ve } b+2=0 \rightarrow b=-2$$

sonuç  $a.b = 5.(-2) = -10$  bulunur.

### ÖRNEK( 35)

$(3a-2b+4)x + (2a+3b-2)y = 0$  denklemi  $x$  ve  $y$  'nin tüm değerleri için sağlandığına göre  $a/b=?$

### ÇÖZÜM:

Mademki her  $x,y$  için denklem doğru oluyormuş, o zaman bizde işimize gelen değerleri veririz.

Mesela önce  $x=0$  ve  $y=1$  verelim

$$(3a-2b+4).0 + (2a+3b-2).1 = 0 \rightarrow 2a+3b-2 = 0$$

şimdi de  $y=0$  ve  $x=1$  verelim

$$(3a-2b+4).1 + (2a+3b-2).0 = 0 \rightarrow 3a-2b+4 = 0$$

bu aşamadan sonra iki yolla çözüme gidebiliriz. Birincisi ortak çözüm yapıp  $a$  ve  $b$  yi bularak istenen orana ulaşmak,

ikincisi de mademki  $a/b$  oranı isteniyor o zaman sabit terim istenmiyor demektir. Bizde sabit terimleri yok edip istenen orana ulaşırız.

Biz ikinci yolu izleyeceğiz.

$$\begin{array}{rcl} 2a+3b-2 & = & 0 \\ 3a-2b+4 & = & 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{rcl} 2/2a+3b & = & 2 \\ + 3a-2b & = & -4 \\ \hline 4a+6b & = & 4 \\ + 3a-2b & = & -4 \end{array}$$

$$7a + 4b = 0$$

$$7a = -4b$$

$$\frac{a}{b} = -\frac{4}{7} \text{ olur.}$$

görüldüğü gibi bu yöntem birinciye göre daha pratik

### ÇOK BİLİNMEYENLİ DENKLEM SİSTEMLERİ

**1)** Bilinmeyen sayısı üç, denklem sayısı bir ise Ç.K sonsuz elemanlıdır.

❖  $3x - 4y + z = 0$  ise Ç.K:  $\{(1, 1, 0), (2, 1, -2), (\dots)\}$

**2)** Bilinmeyen sayısı üç, denklem sayısı iki ise Ç.K sonsuz elemanlıdır.

❖ 
$$\left. \begin{array}{l} a + b - c = 1 \\ 2a - 2b + c = 3 \end{array} \right\} \text{ alt alta toplarsak } 3a - b = 4$$

bulunur. burada tek denklem iki bilinmeyen elde edildiğinden çözüm kümesi sonsuz elemanlı olur. o halde Ç.K:  $\{(1, -1), (2, 2), (\dots)\}$

**3)** Bilinmeyen sayısı, denklem sayısına eşit ise çözüm; tek elemanlı, boş küme veya sonsuz elemanlı olabilir.

## ÖRNEK( 36)

$$\left. \begin{array}{l} -\frac{2}{x} - \frac{4}{y} + \frac{1}{z} = \frac{4}{3} \\ -\frac{1}{x} + \frac{3}{y} - \frac{2}{z} = 9 \\ \frac{6}{x} + \frac{4}{y} + \frac{4}{z} = -\frac{7}{3} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{xyz}{xy + xz + yz} = ?$$

## ÇÖZÜM:

Bu tür sorular özel çözüm gerektiren sorular yani bazen altalta toplama bazen çıkarma ile istenen hedefe değişkenleri tek tek bulmadan gidilir.

Her üç denklemi alt alta toplarsak

$$\left. \begin{array}{l} -\frac{2}{x} - \frac{4}{y} + \frac{1}{z} = \frac{4}{3} \\ -\frac{1}{x} + \frac{3}{y} - \frac{2}{z} = 9 \\ \frac{6}{x} + \frac{4}{y} + \frac{4}{z} = -\frac{7}{3} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{3}{x} + \frac{3}{y} + \frac{3}{z} = 8$$

$$\Rightarrow \frac{3}{x} + \frac{3}{y} + \frac{3}{z} = 8$$

(yz) (xz) (xy)

$$\Rightarrow \frac{3(yz + xz + xy)}{xyz} = 8$$

$$\Rightarrow \frac{xyz}{yz + xz + xy} = \frac{3}{8} \text{ bulunur.}$$

## ÖRNEK( 37)

$$\left. \begin{array}{l} 2x - y + z = 4 \\ x + y + z = 4 \\ 3x + y + z = 9 \end{array} \right\} \Rightarrow (x, y, z) = ?$$

## ÇÖZÜM:

Soruda x,y,z ayrı ayrı istendiği için denklemleri ikiye ayırıp bir bilinmeyen yok edeceğiz. Daha sonra oluşan denklemlerden diğer bilinmeyenler bulunacak

$$\begin{array}{r} 2x - y + z = 4 \\ + \quad x + y + z = 4 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2x - y + z = 4 \\ + \quad 3x + y + z = 9 \\ \hline \end{array}$$

$$3x + 2z = 8$$

$$5x + 2z = 13$$

$$5x + 2z = 13$$

$$-3x + 2z = 8$$

$$2x = 5$$

$$x = 5/2$$

bu değeri  $5x + 2z = 13$  denkleminde yazalım

$$5 \cdot \frac{5}{2} + 2z = 13$$

$$2z = 13 - \frac{25}{2}$$

$$2z = \frac{1}{2}$$

$$z = \frac{1}{4}$$

şimdi x ve z 'yi 1. denklemde yazalım,

$$2x - y + z = 4 \Rightarrow \frac{2 \cdot 5}{2} - y + \frac{1}{4} = 4$$

$$y = 5 - 4 + \frac{1}{4}$$

$$y = \frac{5}{4}$$

istenen sıralı üçlü  $(x, y, z) = \left(\frac{5}{2}, \frac{5}{4}, \frac{1}{4}\right)$  şeklindedir.

## ÖZEL DENKLEMLER

Bazı denklem sistemlerinde özel şartlar istenir.

### ÖRNEK( 38)

$$\left. \begin{array}{l} 3a - 2c = 6 \\ 2b - a = 3 \\ c - b = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{i) } 2a + b - c = ? \\ \text{ii) } a + b + c = ? \end{array}$$

### ÇÖZÜM:

Bu soruda istenenleri bulmak için denklemleri uygun katsayılarla çarpacağız

a) her üç denklem alt alta toplanır ise istenen bulunur.

$$\left. \begin{array}{l} 3a - 2c = 6 \\ 2b - a = 3 \\ c - b = 4 \end{array} \right\} \text{ ise } \begin{array}{r} 3a - 2c = 6 \\ 2b - a = 3 \\ + \quad c - b = 4 \\ \hline 2a + b - c = 13 \text{ bulunur.} \end{array}$$

b) bu şık için uygun katsayılar bulmalıyız.

$$\left. \begin{array}{l} 3a - 2c = 6 \\ 2b - a = 3 \\ c - b = 4 \end{array} \right\} \text{ ise } \begin{array}{r} 3a - 2c = 6 \\ 2b - a = 3 \\ + \quad 3c - 3b = 12 \\ \hline a + b + c = 24 \text{ bulunur.} \end{array}$$

(bu tip sorularda ilkin istenenin alt alta toplama veya çıkarmayla bulunup bulunmayacağına bakılır. Eğer bulunmuyorsa denklemler için uygun katsayılar aranır. Bu da zor ise o zaman bir önceki soruda gösterilen teknikle değişkenler tek tek bulunur ve istenen denklemde yerine yazılır. Biliyorum bu son anlattığım zor ama soruyu boş bırakmaktansa hele de vakit varsa neden uygulanmasın..)

### ÖRNEK( 39)

$$\left. \begin{array}{l} \frac{m+n}{2} = 5 \\ p+m=8 \\ \frac{p+n}{3} = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow m+n+p = ?$$

### ÇÖZÜM:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{m+n}{2} \times 2 \Rightarrow m+n=10 \\ p+m=8 \Rightarrow p+m=8 \\ \frac{p+n}{3} = 2 \Rightarrow p+n=6 \end{array} \right\} \text{ ise } \begin{array}{r} m+n=10 \\ p+m=8 \\ + \quad p+n=6 \\ \hline 2(m+n+p) = 24 \\ m+n+p = 12 \text{ dir.} \end{array}$$

### ÖRNEK( 40)

$$\left. \begin{array}{l} \frac{x}{3} - \frac{x+2y}{4} = 1 \\ -3x + \frac{5x+y}{2} = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Ç.K} = ?$$

## ÇÖZÜM:

Önce denklemleri tek satır haline getirelim

$$\frac{x}{3} - \frac{x+2y}{4} = 1 \quad -3x + \frac{5x+y}{2} = -1$$

(4) (3)

$$\frac{4x-3x-6y}{12} = 1 \quad \frac{-6x+5x+y}{2} = -1$$

$$\frac{x-6y}{12} \neq 1 \quad \frac{-x+y}{2} \neq -1$$

$$x-6y = 12$$

$$-x+y = -2$$

$$x-6y = 12$$

$$-x+y = -2$$

$$-5y = 10$$

$$y = -2$$

birinci denklemde yerine yazalım

$$x-6y = 12 \rightarrow x-6.(-2) = 12$$

$$\rightarrow x+12 = 12$$

$$\rightarrow x = 0$$

O halde ÇK={{(0,-2)}} olur.

## ÖRNEK( 41)

$$\frac{x - \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}} = \frac{3x-1}{2} \Rightarrow \text{ÇK} = ?$$

## ÇÖZÜM:

$$\frac{x - \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}} = \frac{3x-1}{2} \Rightarrow \frac{\frac{x^2-1}{x}}{\frac{x+1}{x}} = \frac{3x-1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{(x-1)(x+1)}{x+1} \neq \frac{3x-1}{2}$$

$$\Rightarrow 2x-2 = 3x-1$$

$$\Rightarrow -2+1 = 3x-2x$$

$$\Rightarrow x = -1$$

ancak  $x=-1$  değeri sorudaki paydalardan bir tanesi

olan  $1+\frac{1}{x}$  'i sıfır yaptığından çözüme dahil

edilemez. O halde çözüm kümesi  $\emptyset$  (boş küme) dir.

**NOT:** Dikkat ettiyseniz güzel güzel soruyu çözüp - 1 bulduk. Burada işte soruyu çözmek kadar matematik kaidelerini ve püf noktalarını dikkate almak ta çok önemli. Eğer dikkatsiz ve umarsız iseniz ve de şıklarda -1 varsa yandınız!! Onun için bu tür kesirli sorularda çözümden sonra mutlaka bulduğunuz değeri kontrol ediniz.

## ÖRNEK( 42)

$$\begin{cases} -3x + 4y = -2 \\ x - 3y = 5 \end{cases} \Rightarrow (x, y) = ?$$

## ÇÖZÜM:

$$\begin{cases} -3x + 4y = -2 \\ 3/x - 3y = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3x + 4y = -2 \\ + 3x - 9y = 15 \end{cases}$$

$$-5y = 13$$

$$y = -\frac{13}{5}$$

bu değeri birinci denklemde yerine yazalım

$$-3x + 4y = -2 \Rightarrow -3x + 4\left(-\frac{13}{5}\right) = -2$$

$$\Rightarrow -3x - \frac{52}{5} = -2$$

$$\Rightarrow -3x = \frac{52}{5} - 2$$



$$\begin{aligned} \Rightarrow -3x &\cancel{\times} \frac{52-10}{5} \\ \Rightarrow -3x &= \frac{42}{5} \\ \Rightarrow x &= -\frac{\cancel{42}}{\cancel{15}} = -\frac{14}{5} \end{aligned}$$

Çözüm kümesi  $\mathcal{C}K = \left\{ \left( -\frac{14}{5}, -\frac{13}{5} \right) \right\}$  olur.

**ÖRNEK( 43)**

$$\frac{2x-6}{3x-8} = \frac{2x-5}{3x-7} \Rightarrow \mathcal{C} = ?$$

**ÇÖZÜM:**

$$\begin{aligned} \frac{2x-6}{3x-8} &\cancel{\times} \frac{2x-5}{3x-7} \\ (2x-6)(3x-7) &= (2x-5)(3x-8) \\ \cancel{6x^2} - 18x - 14x + 42 &= \cancel{6x^2} - 15x - 16x + 40 \\ -32x + 42 &= -31x + 40 \\ 42 - 40 &= -31x + 32x \\ x &= 2 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

**ÖRNEK( 44)**

$$\frac{x}{2} - \frac{x-1}{12} = 1 - \frac{2-x}{3} \Rightarrow x = ?$$

**ÇÖZÜM:**

$$\frac{x}{2} - \frac{x-1}{12} = 1 - \frac{2-x}{3} \Rightarrow \frac{x}{2} - \frac{x-1}{12} = \frac{3-2+x}{3}$$

(6) (1)

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{6x-x+1}{12} &\cancel{\times} \frac{x+1}{3} \\ \Rightarrow 15x+3 &= 12x+12 \\ \Rightarrow 3x &= 9 \\ \Rightarrow x &= 3 \end{aligned}$$

**ÖRNEK( 45)**

$9 - \frac{1}{3-x} = x^2 + \frac{1}{x-3}$  ise kökler toplamı nedir?

**ÇÖZÜM:**

$$\begin{aligned} 9 - \frac{1}{3-x} &= x^2 + \frac{1}{x-3} \Rightarrow 9 + \frac{1}{\cancel{x-3}} = x^2 + \frac{1}{\cancel{x-3}} \\ \Rightarrow x^2 &= 9 \\ \Rightarrow x &= \pm 3 \end{aligned}$$

ancak  $x=3$ 'ün ifadeyi tanımsız yaptığına dikkat edin bu durumda sadece  $x=-3$  cevap olacaktır. Dolayısıyla kökler toplamı da -3 tür.

**ÖRNEK( 46)**

$a = \frac{2t-5}{3}$ ,  $b = \frac{3t+2}{5}$  ise a'nın b türünden değeri nedir?

**ÇÖZÜM:**

Burada a ve b'yi birbirine bağlayan t dir. o yüzden her iki denklemde t'yi çekip eşitleriz.

$$\begin{aligned} a &\cancel{\times} \frac{2t-5}{3} \Rightarrow 2t-5=3a \Rightarrow t = \frac{3a+5}{2} \\ b &\cancel{\times} \frac{3t+2}{5} \Rightarrow 3t+2=5b \Rightarrow t = \frac{5b-2}{3} \end{aligned}$$

şimdi t'leri eşitleyelim

$$\frac{3a+5}{2} \times \frac{5b-2}{3} \Rightarrow 9a+15=10b-4$$

$$\Rightarrow 9a=10b-4-15$$

$$\Rightarrow a=\frac{10b-19}{9}$$

bulunur.

### ÖRNEK( 47)

$$\begin{cases} 2x + ay = 3 \\ ax + 2y = -3 \end{cases} \text{ sisteminin çözümü varsa } a \text{ ne}$$

olmamalıdır?

### ÇÖZÜM:

Sistemin çözüm kümesi varsa ya tüm katsayılar oranı eşit olmalı veya x ve y nin katsayıları oranı eşit olmalı.

$$\begin{cases} 2x + ay = 3 \\ ax + 2y = -3 \end{cases} \text{ ise } \frac{2}{a} \neq \frac{a}{2} \Rightarrow a^2 = 4 \Rightarrow a = \pm 2$$

tüm  $a=-2$  için tüm katsayılar eşit oluyor. Bu durumda da sonsuz çözüm elde edilir. Yani çözüm vardır. Ama  $a=2$  seçilirse katsayılar oranı;

$$\frac{2}{2} = \frac{2}{2} \neq \frac{3}{-3} \text{ olur ki bu durumda çözüm boş}$$

kümedir. Yani çözüm yoktur. O halde  $a=2$  olmamalıdır.

### ÖRNEK( 48)

$$(2x-3)(x+4)=4x^2-9 \text{ ise } x\text{'in değerleri toplamı nedir?}$$

### ÇÖZÜM:

$$(2x-3)(x+4)=4x^2-9 \text{ ise}$$

$$(\cancel{2x-3})(x+4)=(\cancel{2x-3})(2x+3)$$

$$x+4=2x+3$$

$$4-3=2x-x$$

$$x=1$$

$$2x-3=0$$

$$2x=3$$

$$x=3/2$$

bu duruma x değerlerinin toplamı,

$$1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2} \text{ bulunur.}$$

### ÖRNEK( 49)

$2xy-5x-7y+3=0$  denkleminde x'in hangi değeri için y hesaplanamaz?

### ÇÖZÜM:

Bu sorularda hesaplanamaz ifadesinin kullanıldığı değişken çekilir. Bu soruda y'yi çekeriz

$$2xy-5x-7y+3=0$$

$$2xy-7y=5x-3$$

$$y(2x-7)=5x-3$$

$$y=\frac{5x-3}{2x-7}$$

y değeri bir kesire eşit ve kesirlerde payda sıfır olursa kesir hesaplanamaz.o halde

$$2x-7 \neq 0$$

$$2x \neq 7$$

$$x \neq \frac{7}{2}$$

### ÖRNEK( 50)

$$\frac{y-3}{x+5}=4 \text{ ve } x^2+3x-10=0 \text{ ise } x+y=?$$

### ÇÖZÜM:

$$x^2+3x-10=0 \text{ denklemini çözelim}$$

$$\begin{array}{c} x \quad 5 \\ x \quad -2 \end{array}$$

$$(x+5)(x-2)=0 \rightarrow x+5=0 \text{ ve } x-2=0$$

$$x=-5$$

$$x=2$$

$x=-5$  değeri  $\frac{y-3}{x+5}=4$  ifadesini tanımsız yaptığından alınmaz.

$$x = 2 \text{ için } \frac{y-3}{x+5} = 4 \Rightarrow \frac{y-3}{2+5} \neq 4$$

$$\Rightarrow y-3 = 28$$

$$\Rightarrow y = 31 \text{ bulunur.}$$

sonuç olarak  $x+y = 2+31 = 33$  olur.

**ÖRNEK( 51)**

$$a \neq b \neq 0 \quad \frac{bx}{a} - b = \frac{ax}{b} - a \text{ ise } x=?$$

**ÇÖZÜM:**

Sorunun bu kadar bilinmeyen içerdiğine bakmayın bizi sadece  $x$  ilgilendiriyor. Ve biz  $x$ 'in olduğu terimleri bir tarafa toplayıp işimize bakacağız

$$\frac{bx}{a} - b = \frac{ax}{b} - a \Rightarrow \frac{bx}{a} - \frac{ax}{b} = b - a$$

$$\Rightarrow x \left( \frac{b}{a} - \frac{a}{b} \right) = b - a \Rightarrow x \left( \frac{b^2 - a^2}{ab} \right) = b - a$$

$$\Rightarrow x \left( \frac{a+b}{ab} \right) = 1 \Rightarrow x = \frac{ab}{a+b} \text{ bulunur.}$$

**ÖRNEK( 52)**

$3x+2a-4=bx+a+2$  denkleminin sonsuz çözümü varsa  $a+b=?$

**ÇÖZÜM:**

Sonsuz çözüm için katsayıların eşitliğine ihtiyaç vardır.

$$3x + 2a - 4 = b \quad x + a + 2$$

3 olmalı      2a-4 olmalı

bu durumda  $b=3$  tür ve

$$2a-4 = a+2 \rightarrow a = 6 \text{ dır.}$$

sonuç  $a+b = 6+3 = 9$  dur.

**DİKKAT!**

Bir denklem çözüldüğünde  $0 = 0$ ,  $2 = 2$ , ... gibi doğru eşitlikler çıkarsa sonsuz çözüm vardır.

$0 = -3$ ,  $1 = 5$  gibi yanlış eşitlikler çıkarsa o zaman da çözüm boş kümedir.

**ÖRNEK( 53)**

$5x+a-2=(a+1)x+4$  denkleminin çözümsüz olması için  $a=?$

**ÇÖZÜM:**

$$5x + a - 2 = (a + 1)x + 4$$

5 olmalı      a-2 olmalı

$a+1 = 5$  için  $a=4$  bulunur.

Bu değer  $a-2 \neq 4 \rightarrow a \neq 6$  şartına da uyduğundan cevabımız  $a = 4$  olur.

(dikkat ederseniz  $a=4$  yazıldığında

$$5x+4-2 = (4+1)x+4$$

$$5x+2 = 5x+4$$

$2=4$  bulunur ki bu da bizim çözümsüzlük şartlarımızdan biridir.)

**ÖRNEK( 54)**

$$\begin{cases} 3x + 2y + 7 = 0 \\ bx + 4y + 5 = 0 \end{cases} \text{ denklem sisteminin tek çözümü}$$

olması için  $b$ , ne olmalıdır?

**ÇÖZÜM:**

Hatırlarsanız tek çözüm için  $x$  ve  $y$  katsayılarının oranı eşit olmamalıydı

$$\begin{cases} 3x + 2y + 7 = 0 \\ bx + 4y + 5 = 0 \end{cases} \left\{ \frac{3}{b} \neq \frac{2}{4} \text{ şartı sağlanmalı} \right.$$

burada eğer  $b=6$  seçilirse  $\frac{\cancel{6}}{\cancel{6}} \neq \frac{\cancel{2}}{\cancel{4}} \Rightarrow \frac{1}{2} \neq \frac{1}{2}$   
eşitsizlik değil eşitlik çıkıyor. Demek ki  $b=6$  olamamalıdır.

**ÖRNEK( 55)**

$\frac{6x+7}{x-2}$  kesrini tamsayı yapan  $x \in \mathbb{N}$ 'lerin toplamı nedir?

**ÇÖZÜM:**

İfadenin daha sade hale gelmesi için pay paydaya bölünür

$$\begin{array}{r|l} 6x+7 & x-2 \\ - 6x+12 & 6 \\ \hline & 19 \end{array}$$

$$\frac{6x+7}{x-2} \Rightarrow 6 + \frac{19}{x-2}$$

şimdi 6 zaten bir tamsayı, geriye  $\frac{19}{x-2}$ 'nin

tamsayı olması kalıyor ki bu da  $x-2$ 'nin 19'u bölmesine bağlı. O halde  $(x-2)$  ifadesinin alabileceği değerler  $\{1, 19, -1, -19\}$  dur.

$$x-2=1 \rightarrow x=3$$

$$x-2=19 \rightarrow x=21$$

$$x-2=-1 \rightarrow x=1$$

$$x-2=-19 \rightarrow x=-17 \notin \mathbb{N}$$

o halde  $x$ 'in alabileceği değerler toplamı  $3+21+1=25$  olur.

**ÖRNEK( 56)**

$$\left. \begin{array}{l} 3x+5y=27 \\ x-y=1 \\ mx+2y=2 \end{array} \right\} \text{denkleminin tek çözümü}$$

varsa  $m=?$

**ÇÖZÜM:**

Tek çözüm olması için ilk iki denklemden elde edilen  $x$  ve  $y$  değerlerinin üçüncü denklemi sağlaması lazım. O zaman önce ilk iki denklemi çözelim

$$\left. \begin{array}{l} 3x+5y=27 \\ 5/x-y=1 \end{array} \right\} \text{ise} \quad \begin{array}{r} 3x+5y=27 \\ + \quad 5/x-y=1 \\ \hline 3x+5y=27 \\ + \quad 5x-5y=5 \\ \hline 8x=32 \\ x=4 \end{array}$$

$$x-y=1 \rightarrow 4-y=1 \rightarrow y=3$$

şimdi bulunan değerleri üçüncü denklemde yerine yazalım

$$x=4 \text{ ve } y=3 \text{ için}$$

$$mx+2y=2 \rightarrow 4m+2.3=2 \rightarrow 4m=-4 \rightarrow m=-1 \text{ bulunur.}$$

**ÖRNEK( 57)**

$x, y, z$  sıfırdan farklı reel sayılar olmak üzere ;

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{z} = 5 \text{ ise } \frac{2x+5}{x} + \frac{3y+5}{y} - \frac{2z+5}{z} = ?$$

**ÇÖZÜM:**

$$\frac{2x+5}{x} + \frac{3y+5}{y} - \frac{2z+5}{z} = \text{ifadesini biraz sade hale getirelim}$$

$$\begin{aligned} \frac{2x}{x} + \frac{5}{x} + \frac{3y}{y} + \frac{5}{y} - \frac{2z}{z} - \frac{5}{z} &= 2 + \frac{5}{x} + 3 + \frac{5}{y} - 2 - \frac{5}{z} \\ &= 3 + 5 \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{z} \right) \\ &= 3 + 5.5 = 28 \text{ olur.} \end{aligned}$$

**ÖRNEK( 58)**

$$\left. \begin{aligned} \frac{2}{x} + \frac{2}{y} &= 6 \\ \frac{3}{y} + \frac{3}{z} &= 9 \\ \frac{4}{z} + \frac{4}{x} &= 12 \end{aligned} \right\} \text{ ise } y = ?$$

**ÇÖZÜM:**

Soruyu bu hali ile çözmektense biraz sadeleştirip çözmek çok daha iyi olur.

$$\left. \begin{aligned} \frac{2}{x} + \frac{2}{y} &= 6 \\ \frac{3}{y} + \frac{3}{z} &= 9 \\ \frac{4}{z} + \frac{4}{x} &= 12 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \cancel{\frac{2}{x}} + \frac{2}{y} &= \cancel{6} & \frac{1}{x} + \frac{1}{y} &= 3 \\ \cancel{\frac{3}{y}} + \frac{3}{z} &= \cancel{9} & \frac{1}{y} + \frac{1}{z} &= 3 \\ \cancel{\frac{4}{z}} + \frac{4}{x} &= \cancel{12} & -1/\frac{1}{z} + \frac{1}{x} &= 3 \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} &= 3 \\ \frac{1}{y} + \frac{1}{z} &= 3 \\ -\frac{1}{z} - \frac{1}{x} &= -3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{2}{y} = 3 \Rightarrow y = \frac{2}{3} \text{ olur}$$

**ÖRNEK( 59)**

$$\frac{7}{a+2} + \frac{5}{a-5} = 8 \text{ ise } \frac{1-3a}{a+2} + \frac{2a-5}{a-5} = ?$$

**ÇÖZÜM:**

$\frac{1-3a}{a+2} + \frac{2a-5}{a-5}$  ifadesini her zaman olduğu gibi biraz sadeleştirelim. Bunun için her kesri payını paydasına bölelim

$$\begin{array}{r|l} 1-3a & a+2 \\ \hline \pm 3a \pm 6 & -3 \\ \hline 7 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 2a-5 & a-5 \\ \hline \mp 2a \pm 10 & 2 \\ \hline 5 & \end{array}$$

$$\frac{1-3a}{a+2} = -3 + \frac{7}{a+2}, \quad \frac{2a-5}{a-5} = 2 + \frac{5}{a-5}$$

$$\frac{1-3a}{a+2} + \frac{2a-5}{a-5} = -3 + \frac{7}{a+2} + 2 + \frac{5}{a-5}$$

$$= -3 + 2 + \underbrace{\frac{7}{a+2} + \frac{5}{a-5}}_8$$

$$= -1 + 8 \\ = 7 \text{ bulunur.}$$

**ÖRNEK( 60)**

$$\left. \begin{aligned} x + y &= 17 \\ y + z &= 11 \\ x + z &= 18 \end{aligned} \right\} \Rightarrow z = ?$$

**ÇÖZÜM:**

**1.yol**

denklemleri alt alta toplayalım

$$\left. \begin{aligned} x + y &= 17 \\ y + z &= 11 \\ x + z &= 18 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{array}{r} x + y = 17 \\ y + z = 11 \\ + \quad x + z = 18 \\ \hline 2(x+y+z) = 46 \end{array}$$

$$x+y+z=23 \rightarrow x+y+z=23 \rightarrow z=6 \text{ dir}$$

## 2.yol

birinci denklemi -1 ile çarpıp alt alta toplayalım

$$\left. \begin{array}{l} -1/x + y = 17 \\ y + z = 11 \\ x + z = 18 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{r} -\cancel{x} - \cancel{y} = -17 \\ \cancel{y} + z = 11 \\ + \cancel{x} + z = 18 \\ \hline 2z = 12 \rightarrow z = 6 \text{ bulunur.} \end{array}$$

## ÖRNEK( 61)

$$\left. \begin{array}{l} 5x + 3y - z = 10 \\ x - y - 5z = -4 \end{array} \right\} \Rightarrow x + y + z = ?$$

## ÇÖZÜM:

İkinci denklemi -1 ile çarpıp alt alta toplayalım

$$\left. \begin{array}{l} 5x + 3y - z = 10 \\ -1/x - y - 5z = -4 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{r} 5x + 3y - z = 10 \\ -x + y + 5z = 4 \\ \hline 4(x+y+z) = 14 \\ x+y+z = \frac{7}{4} \text{ olur.} \end{array}$$

## ÖRNEK( 62)

$$\frac{3ax - 2b}{3b} - \frac{ax - a}{2b} = \frac{ax}{b} - \frac{2}{3}$$

ise x=? (a≠0, b≠0)

## ÇÖZÜM:

$$\frac{3ax - 2b}{3b} - \frac{ax - a}{2b} = \frac{ax}{b} - \frac{2}{3}$$

$$\frac{3ax - 2b}{3b} - \frac{ax - a}{2b} - \frac{ax}{b} = -\frac{2}{3}$$

(2)                      (3)                      (6)

$$\frac{6ax - 4b}{6b} - \frac{3ax - 3a}{6b} - \frac{6ax}{6b} = -\frac{2}{3}$$

$$\frac{\cancel{6ax} - 4b - 3ax + 3a - \cancel{6ax}}{6b} = -\frac{2}{3}$$

$$\cancel{-12b} - 9ax + 9a = \cancel{-12b}$$

$$9ax = 9a$$

$$\frac{9ax}{9a} = \frac{9a}{9a}$$

$$x = 1 \text{ bulunur.}$$

## ÖRNEK( 63)

(x≠y≠z≠0)∈Z<sup>+</sup> ve 4x+3y+z=52 ise En Büyük z=?

## ÇÖZÜM:

z'nin büyük olması 4x ve 3y nin küçük olmasına bağlı şimdi x ve y'den katsayısı büyük olana daha küçük değer verelim ki 4x+3y fazla büyümesin x,y,z birbirinden farklı olduğundan x=1 ve y=2 seçelim

$$\begin{aligned} 4x+3y+z &= 52 \rightarrow 4.1+3.2+z = 52 \\ &\rightarrow 4+6+z = 52 \\ &\rightarrow 10+z = 52 \\ &\rightarrow z = 42 \text{ olur.} \end{aligned}$$

## ÖRNEK( 64)

$$\left. \begin{array}{l} 5x + 3y + z = 22 \\ 3x + 5y + z = 20 \end{array} \right\} \text{ x,y,z} \in \mathbb{N} \text{ ve}$$

ise En Büyük z=?

A) 2    B) 12    C) 15    D) 17    E) 21

## ÇÖZÜM:

Burada 2 denklem 3 bilinmeyen olduğundan çözüm birden fazladır. Biz x ve y arasındaki bağıntıyı bulup z yi büyük yapan x ve y değerlerini bulalım

İkinci denklemi -1 ile çarpıp z 'yi yok edelim



$$\begin{cases} 5x + 3y + z = 22 \\ -1/3x + 5y + z = 20 \end{cases} \quad \begin{cases} 5x + 3y + z = 22 \\ -3x - 5y - z = -20 \end{cases}$$

$$2x - 2y = 2$$

$$2(x - y) = 2$$

$$x - y = 1$$

şimdi x ve y doğal sayı olduğundan x=1 ve y=0 verelim ve birinci denklemde yerine yazalım

$$5x + 3y + z = 22 \rightarrow 5.1 + 3.0 + z = 22$$

$$\rightarrow 5 + z = 22$$

$$\rightarrow z = 17 \text{ bulunur.}$$

**ÖRNEK( 65)**

$$\left. \begin{array}{l} \frac{y.z}{x} = 1 \\ \text{ve } \frac{x.y}{z} = 5 \\ \frac{z.x}{y} = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow x^2 + y^2 - z^2 = ?$$

**ÇÖZÜM:**

Verilen üç denklemi ikişer ikişer yan yana çarparsak ;

$$\frac{x.y}{z} = 5 \text{ ve } \frac{z.x}{y} = 3 \Rightarrow \frac{x.\cancel{y}}{z} \cdot \frac{\cancel{z}.x}{\cancel{y}} = 5.3 \Rightarrow x^2 = 15$$

$$\frac{y.z}{x} = 1 \text{ ve } \frac{x.y}{z} = 5 \Rightarrow \frac{y.\cancel{z}}{x} \cdot \frac{\cancel{x}.y}{\cancel{z}} = 1.5 \Rightarrow y^2 = 5$$

$$\frac{y.z}{x} = 1 \text{ ve } \frac{z.x}{y} = 3 \Rightarrow \frac{\cancel{y}.z}{x} \cdot \frac{z.\cancel{x}}{\cancel{y}} = 1.3 \Rightarrow z^2 = 3$$

şimdide bunları toplayım işi bitirelim

$$x^2 + y^2 - z^2 = 15 + 5 - 3 = 17 \text{ bulunur.}$$

**ÖRNEK( 66)**

$$\frac{x}{a} + c = \frac{x(b+c)}{a.b} \Rightarrow x = ?,$$

A) a.b B) c/a C) a.b.c D) c.b E) a/b

**ÇÖZÜM:**

Sorunun karışık ve çok bilinmeyenli olduğuna bakmayın sadece sizden isteneni düşünün ve her zaman yaptığınızı yapın.x istendiğinden x'li terimler bir yana diğerleri bir yana

$$\frac{x}{a} + c = \frac{x(b+c)}{a.b} \Rightarrow \frac{x(b+c)}{a.b} - \frac{x}{a} = c$$

$$(1) \quad (b)$$

$$\Rightarrow \frac{xb + xc}{a.b} - \frac{xb}{ab} = c$$

$$\Rightarrow \frac{\cancel{xb} + xc - \cancel{xb}}{a.b} = c$$

$$\Rightarrow \frac{xc}{c} = \frac{abc}{c}$$

$$\Rightarrow x = ab \text{ bulunur.}$$

**ÖRNEK( 67)**

$$(3x+y-9)^2 + (2x-y-1)^2 = 0 \text{ ise } x.y=?$$

**ÇÖZÜM:**

Kuralı hatırlayalım ve parantez içlerini sıfıra eşitleyelim.

$$3x + y - 9 = 0$$

$$+ 2x - y - 1 = 0$$

$$5x - 10 = 0 \rightarrow 5x = 10 \rightarrow x = 2$$

x 'i birinci denklemde yerine yazalım

$$3x + y - 9 = 0 \rightarrow 3.2 + y - 9 = 0$$

$$\rightarrow 6 + y - 9 = 0$$

$$\rightarrow y - 3 = 0$$

$$\rightarrow y = 3$$

sonuç : x.y = 2.3 = 6 bulunur.

**ÖRNEK( 68)**

$\frac{x+1}{x-1} + \frac{1}{x-2} = \frac{4x}{x+3} + \frac{1}{4-x}$  denkleminin bir kökü aşağıdakilerden hangisi Olabilir?

- A) -3 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

**ÇÖZÜM:**

Bu soru acaba bir denklemde paydayı sıfır yapan bir değerin kök olup olmadığını biliyor musunuz sorusudur. Yoksa soru işlem yapıp çözülsün diye sorulmamış

Bakın  $x=-3, 1, 2$  ve  $4$  değerleri paydaları sıfır yapıyor. Bir tek  $3$  paydaların hiçbirini sıfır yapmıyor. Deme ki cevap D şıkkı yani  $x=3$  tür.

**ÖRNEK( 69)**

$$\frac{x}{x^2+x-6} - \frac{2}{x^2-5x+6} = \frac{1}{x+3} \text{ ise } \text{Ç.K.}=?$$

- A)  $\emptyset$  B)  $\mathbb{R}$  C)  $\{-3, 2, 3\}$   
D)  $\{0\}$  E)  $\mathbb{R} - \{-3, 2, 3\}$

**ÇÖZÜM:**

Soruyu çözmek için payda eşitlemeliyiz ama önce paydaları çarpanlarına ayıralım

$$\frac{x}{x} + \frac{x-6}{-2} , \quad \frac{x^2-5x+6}{x} = \frac{-3}{-2}$$

$$(x+3)(x-2) , \quad (x-3)(x-2)$$

şimdi bu değerleri asıl soruda yerine yazalım

$$\frac{x}{x^2+x-6} - \frac{2}{x^2-5x+6} = \frac{1}{x+3}$$

$$\frac{x}{(x+3)(x-2)} - \frac{2}{(x-3)(x-2)} = \frac{1}{x+3}$$

$$\frac{x(x-3)}{(x-3)(x+3)(x-2)} - \frac{2(x+3)}{(x+3)(x-3)(x-2)} = \frac{1}{x+3}$$

$$\frac{x(x-3)-2(x+3)}{(x-3)(x+3)(x-2)} \neq \frac{1}{x+3}$$

$$\cancel{x}^2 - 3x - 2x - 6 = \cancel{x}^2 - 3x - 2x + 6$$

$$\cancel{-5x} - 6 = \cancel{-5x} + 6$$

$$-6 = +6$$

gördüğünüz gibi doğru olmayan bir eşitlik var bu daha öncede dediğimiz gibi çözümün boş küme olduğu anlamına gelirdi.

O halde  $\text{Ç.K.} = \emptyset$  olur.

**ÖRNEK( 70)**

$y = x^3 + ax^2 + bx + c$  ifadesinde  $x_1 = 1$  için  $y_1$  ve  $x_2 = -1$  için  $y_2$  değeri bulunuyor.  $y_1 - y_2 = 3$  ise  $b=?$

**ÇÖZÜM:**

$x_1 = 1$  yazıp  $y_1$ 'i bulalım

$$y_1 = 1^3 + a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c$$

$$y_1 = 1 + a + b + c$$

$x_2 = -1$  yazıp  $y_2$ 'i bulalım

$$y_2 = (-1)^3 + a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c$$

$$y_2 = -1 + a - b + c$$

şimdi sıra bulduklarımızı yerine yazmada

$$y_1 - y_2 = 3$$

$$(1 + a + b + c) - (-1 + a - b + c) = 3$$

$$1 + \cancel{a} + b + \cancel{c} + 1 - \cancel{a} + b - \cancel{c} = 3$$

$$2 + 2b = 3$$

$$2b = 3 - 2$$

$$2b = 1$$

$$b = 1/2 \text{ bulunur.}$$

### ÖRNEK( 71)

$$3a - 3b + 4c = 7 \text{ ve } 2a - 6b + 8c = 2 \text{ ise } a = ?$$

(ÖSS 2002)

### ÇÖZÜM:

Soruda 3 bilinmeyen ve 2 denklem olduğuna göre demek ki bir hamleyle b de c de yok olacak. Şimdi o hamleyi bulalım.

İlk verilen denklemi -2 ile çarpıp diğer denklemle toplayalım

$$\begin{array}{r} -2 / 3a - 3b + 4c = 7 \\ 2a - 6b + 8c = 2 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} -6a + 6b - 8c = -14 \\ + 2a - 6b + 8c = 2 \\ \hline -4a = -12 \\ \hline \frac{-4a}{-4} = \frac{-12}{-4} \\ a = 3 \text{ bulunur.} \end{array}$$

### ÖRNEK( 72)

Bir kabın ağırlığı boşken a gr. 1/5'i su ile doluyken b gr. dır. Bu kabın tamamı su ile doluyken ağırlığı kaç gr olur? (ÖSS-2001)

### ÇÖZÜM:

Kabın boş ağırlığına dara denir. Tabi kabın bir de alabildiği sıvı miktarı var.

Kabın Darası = a ( boş ağırlık )

Kabın alabileceği sıvı miktarı = x olsun

Bu durumda bizden istenen (a+x) tir.

Kabın 1.5'i dolu demek, alabileceği sıvı miktarının

$$1/5'i \text{ demek olduğundan } (x \cdot \frac{1}{5} = \frac{x}{5})$$

$$\text{Kabın } 1/5'i \text{ doluyken ağırlığı : } a + \frac{x}{5} = b \text{ dır.}$$

Buradan x'i çekelim

$$a + \frac{x}{5} = b \rightarrow \frac{x}{5} = b - a \rightarrow x = 5b - 5a$$

şimdi bulduklarımızı istenende yerine yazalım

$$\text{istenen } a+x = a + 5b - 5a = 5b - 4a \text{ bulunur.}$$

### ÖRNEK( 73)

Bir satıcıdaki kırmızı toparın her biri K TL'ye , maviler M TL'ye siyahlar da S TL'ye satılmaktadır.

4 kırmızı ve 2 mavi topa ödenen toplam para 5 siyah topa ödenen toplam paraya eşit, 2 siyah ve 2 mavi topa ödenen toplam para 3 kırmızı topa ödenen paraya eşittir.

Buna göre 1 kırmızı ve 4 mavi topa ödenen toplam para, kaç siyah topa ödenen paraya eşittir.

(ÖSS-2001)

### ÇÖZÜM:

Verilen bilgiler ışığında denklemlerimizi oluşturalım  $4K+2M = 5S$  ve  $2S+2M = 3K$  olur. Şimdi bu iki denklemi alt alta yazalım ve toplayalım

$$\begin{array}{r} 4K+2M = 5S \\ + 2S+2M = 3K \\ \hline 4K+4M+2S = 5S+3K \\ 4K-3K+4M = 5S-2S \\ K+4M = 3S \text{ bulunur.} \end{array}$$

Demek ki bir kırmızı ve 4 mavi topa ödenen para 3 siyah topa ödenen paraya eşitmiş

