ASAL SAYILAR

1 ve kendisinden başka pozitif böleni olmayan 1 den büyük tamsayılara asal sayı denir. Negatif ve ondalıklı sayılar asal olamaz. Asal sayıları veren bir formül yoktur.

Bileşik sayı: 1 den büyük asal olmayan sayılara bileşik sayı denir.

Bazı asal sayılar; 2,3,5,7,11,13,17,19,...

❖ 7"yi bölenlerin kümesi→{1,7}

11'i bölenlerin kümesi →{1,11}

12'yi bölenlerin kümesi→{1,2,3,4,6,12}

15'i bölenlerin kümesi→{1,3,5,15}

görüldüğü gibi 7 ve 11 asal , 12 ve 15 asal değildir.

Bir sayının bölenlerinden asal olan pozitif sayılara o sayının asal çarpanları denir.

❖ 210 'un bölenleri {1,2,3,5,7,10,...210} sayısında 2,3,5,7 sayıları 210 'un asal çarpanlarıdır.

Bunun gibi 45'in asal çarpanları da 3 ve 5 tir.

❖ 240'ı asal çarpanlarına ayıralım

240	2
120	2
60	2
30	2
15	3
5	5
1	

$240 = 2^4.3.5$

Aralarında Asal Sayılar : 1 den başka ortak tam böleni olmayan sayılara aralarında asal sayılar denir.

❖ 3 ile 8 , 5 ile 17 , 2 ile 9 veya 3,5,6 gibi

Not: 1- Aralarında asal olan sayılar asal olmak zorunda değiller.

2- Aralarında asal olan sayılar kendi aralarında sadeleştirilemezler.

3- 1, her sayıyla aralarında asaldır.

ÖRNEK(1)

a–2b ve a+3b aralarında asaldır

$\frac{a-2b}{a+3b} = \frac{10}{6}$ ise a–b=?

ÇÖZÜM :

Bu tür sorularda kesir en sade hale getirilir. Daha sonra aralarında asal olan ifadeler karşılarındaki sayılara eşitlenirler

$$\frac{a-2b}{a+3b} = \frac{10}{6} \rightarrow \frac{a-2b}{a+3b} = \frac{5}{3}$$

a-2b=5 ve a+3b=3 eşitlikleri ortak çözülür.

-1 / a-2b =5
a+3b =3

-a+2b = -5
a+3b = 3

5b=-2
b=-2/5

a-2(-2/5)= 5
a+4/5=5
a=21/5

a-b= $\frac{21}{5} - \left(-\frac{2}{5}\right) = \frac{23}{5}$ olur.

ÖRNEK(2)

$2m+n$ ve $3m-2n$ aralarında asaldır.
$\frac{2m+n}{4}=\frac{3m-2n}{14}$ ise m=?

ÇÖZÜM :

Önce aralarında asal ifadeleri tek kesre dönüştürelim

$\frac{2m+n}{3m-2n}=\frac{4}{14} \rightarrow \frac{2m+n}{3m-2n}=\frac{2}{7}$

2 / 2m+n=2
3m-2n=7

4m+2n = 4
3m-2n = 7

7m = 11 → $m=\frac{11}{7}$ bulunur.

ÖRNEK(3)

$m,n \in N^{+}$ ve $45.m=n^2$ ise m'nın en küçük değeri için n–m=?

ÇÖZÜM :

$9.5.m = n^2$ ifadesinde 9 zaten bir tam kare, 5 için de bir 5'e ihtiyaç var o halde m=5 seçersek

$9.5.5= n^2$

$(3.5)^2 = n^2 \rightarrow (15)^2 = n^2$ buradan m=5 ve n=15 çıkar.

Sonuç 15-5=10 dur

ÖRNEK(4)

$a,b \in N^{+}$ ve $75.a=b^3$ ise a'nın en küçük değeri için a+b=?

ÇÖZÜM :

$5^2.3.a = b^3$ burada sağ taraf küp olduğundan sol tarafın da küp olması gerekir. O halde bir tane 5 ve 2 tane 3 barındıran bir sayı lazım

$a=5.3^2$ seçersek

$5^3.3^3 = b^3 \rightarrow (15)^3 = b^3$ buradan da a=45 ve b=15 bulunur

o halde a+b=45+15=60 olur.

MATEMATİĞİM

ÖRNEK(5)

$(2a+3b+1).(a-2b+2) = 13$ ve $a,b \in N$ ise a.b=?

ÇÖZÜM :

$(2a+3b+1).(a-2b+2) = 13$ ise

$(2a+3b+1)=1$ ve $(a-2b+2)=13$
veya
$(2a+3b+1)=13$ ve $(a-2b+2)=1$ olmalıdır.
$(2a+3b+1)=1$ ve $(a-2b+2)=13$ seçeneğinde $(2a+3b+1)=1 \rightarrow 2a+3b=0$ olduğundan bu seçenek kullanılamaz

$(2a+3b+1)=13$ ve $(a-2b+2)=1$ denklemlerinden

2a+3b = 12
-2/ a-2b = -1

7b=14 → b=2

a-2b = -1 de yerine yazarsak
a-2.2=-1→a=3 olur. Buradan a.b=3.2=6 çıkar

ÖRNEK(6)

(a+b) ve (a–b) aralarında asaldır.

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{17}{7} \text{ ise } 1-\frac{a^2}{b^2}=?$$

(ÖYS-94)

ÇÖZÜM :

$\frac{a+b}{a-b}=\frac{17}{7}$ ifadesinden a+b=17 ve a-b=7 elde edilir.

Bu iki denklem ortak çözülürse

a+b = 17
a-b = 7

2a= 24 → a=12 ve bu değer a+b=17 denkleminde yerine yazıldığında

12+b= 17 →b=5 bulunur.

Bulunan bu değerler yerine yazılırsa

$$1-\frac{12^2}{5^2}=1-\frac{144}{25}=-\frac{119}{25}$$ elde edilir.

SAYILARIN ASAL ÇARPANLARA AYRILMASI

❖ 45,72,490 sayılarını asal çarpanlarına ayıralım

ÇÖZÜM :

45	3
15	3
5	5
1	

$45 = 3^2.5$

72	2
36	2
18	2
9	3
3	3
1	

$72 = 2^3.3^2$

490	2
245	5
49	7
7	7
1	

$490 = 2.5.7^2$

BİR TAMSAYININ BÖLENLERİ

a,b,c asal olmak kaydıyla $A= a^m.b^n.c^p...$ ise

A'nın P.B.S = (m+1).(n+1).(p+1)...
A'nın N.B.S = (m+1).(n+1).(p+1)...
A'nın T.B.S = 2. (m+1).(n+1).(p+1)... dir.
A'dan küçük A ile aralarında asal sayılar

$$T=A.\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{1}{c}\right)$$

(Bu sayıların toplamı ise $\frac{A}{2}.T$)

(P.B.S= Pozitif bölen sayısı
N.B.S= Negatif bölen sayısı
T.B.S= Tüm bölen sayısı)

❖ 45'in pozitif ve negatif bölenlerini bulalım

45'in pozitif bölenleri={1,3,5,9,15,45}
45'in negatif bölenleri={-1,-3,-5,-9,-15,-45}

ÖRNEK(7)

490 sayısının P.B.S=?

ÇÖZÜM :

490	2
245	5
49	7
7	7
1	

$490 = 2^1.5^1.7^2$

P.B.S= (1+1).(1+1).(2+1)=2.2.3=12 olur

ÖRNEK(8)

14’ün asal olmayan tüm bölenlerini bulun

ÇÖZÜM :

14’ün tüm bölenleri ={1,2,7,14,-1,-2,-7,-14}
bunların içinden asal olan bölenler (2 ve 7) çıkarılırsa

14’ün asal olmayan tüm bölenleri ={1,14,-1,-2,-7,-14} olur

ÖRNEK(9)

75’in PBS=?

ÇÖZÜM :

75	3
25	5
5	5
1	

$75=3.5^2$

P.B.S=(1+1).(2+1)=2.3=6 olur

ÖRNEK(10)

56 sayısının asal olmayan PBS=?

ÇÖZÜM :

56	2
28	2
14	2
7	7
1	

$56 = 2^3.7$

PBS = (3+1).(1+1) = 4.2 = 8

bunlardan iki tanesi (2 ve7) asal olduğundan cevap

8-2=6 olur.

ÖRNEK(11)

48’in asal olmayan TBS=?

ÇÖZÜM :

48	2
24	2
12	2
6	2
3	3
1	

$48 = 2^4.3$

TBS = 2.(4+1).(1+1)=2.5.2=20

bunlardan iki tanesi (2 ve 3) asal olduğundan cevap 20-2=18 olur.

BİR TAMSAYININ POZİTİF BÖLENLERİNİN TOPLAMI

Bir A sayısı A = $a^x.b^y.c^z$.. şeklinde asal çarpanlarına ayrılmış olsun

$$A'nın\ P.B.T = \frac{a^{x+1}-1}{a-1}.\frac{b^{y+1}-1}{b-1}.\frac{c^{z+1}-1}{c-1}..\text{dir}$$

ÖRNEK(12)

45 sayısının PBT ve NBT bulun?

ÇÖZÜM :

Bunun için önce 45 i asal çarpanlarına ayırmalıyız.

45 = $3^2.5$

$$PBT = \frac{3^{2+1}-1}{3-1}.\frac{5^{1+1}-1}{5-1} = \frac{27-1}{2}.\frac{25-1}{4}$$

$$= \frac{26}{2}.\frac{24}{4} = 13.6 = 78$$

NBT = - PBT olduğundan NBT= -78 olur.

ÖRNEK(13)

150'nin PBT=?

ÇÖZÜM :

$$\begin{array}{r|l} 150 & 2 \\ 75 & 3 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

150 = $2.3.5^2$

$$PBT = \frac{2^{1+1}-1}{2-1}.\frac{3^{1+1}-1}{3-1}.\frac{5^{2+1}-1}{5-1}$$

$$= \frac{3}{1}.\frac{8}{2}.\frac{124}{4} = 3.4.31 = 372 \text{ olur.}$$

ÖRNEK(14)

14 sayısının asal olmayan bölenlerinin toplamını bulun

ÇÖZÜM :

Sayı küçük olduğundan formülle uğraşmaya gerek yoktur
14'ün tüm bölenleri ={1,2,7,14,-1,-2,-7,-14}
14'ün asal olmayan tüm bölenleri ={1,14,-1,-2,-7,
-14} ve bunların toplamı da -9 eder.
(Bu sonucun, çıkartılan asal sayıların negatifleri toplamına eşit olduğuna dikkat edin)

ÖRNEK(15)

180'in asal olmayan TBT=?

ÇÖZÜM :

$$\begin{array}{r|l} 180 & 2 \\ 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

180 = $2^2.3^2.5$

180'in asal bölenleri 2 , 3 ve 5 tir

TBT=0 olduğundan asal olmayan tüm bölen toplamı = TBT - (asal bölenlerin toplamı)
= 0 – 10 = -10 olur

(yukarıdaki örneğin sonundaki not ile formülden yapılan çözümün uyum sağladığına dikkat edin)

ÖRNEK(16)

180'in asal olmayan PBT=?

ÇÖZÜM :

180	2
90	2
45	3
15	3
5	5
1	

$180 = 2^2.3^2.5$

Asal olmayan PBT=PBT– (asal bölen toplamı)
O halde önce PBT bulunmalı

$$PBT=\frac{2^{2+1}-1}{2-1}.\frac{3^{2+1}-1}{3-1}.\frac{5^{1+1}-1}{5-1}$$
$$=\frac{7}{1}.\frac{26}{2}.\frac{24}{4}=7.13.6=546$$

Asal olmayan PBT = PBT– (asal bölen toplamı)
= 546-(2+3+5)
=5

ÖRNEK(17)

$15^2+25^2+30^2$ sayısının tüm bölenlerinin kaçı 5'in katıdır?

ÇÖZÜM :

Bu tip sorularda önce neyin katı olması isteniyorsa onun parantezine alınır, sonrada parantez içinin istenen bölen sayısı bulunur. Bu soruda önce ifadeyi çarpanlarına ayırmalıyız

$$15^2+25^2+30^2=5^2(3^2+5^2+6^2)=$$
$$5^2(9+25+36)=5^2.70=5^2.2.5.7=2.5^3.7$$

$=5(2.5^2.7)$ (ifade 5 parantezine alındı şimdi sıra parantez içinin tüm bölenlerini bulmaya geldi)
5'in katı olan TBT= 2(1+1)(2+1)(1+1)=2.2.3.2=24

ÖRNEK(18)

$\frac{x+18}{x}\varepsilon Z$ ise x kaç farklı tamsayı değeri alır?

ÇÖZÜM :

İfadeyi daha sade düşünülebilir hale getirmek için önce x'i dağıtalım

$\frac{x}{x}+\frac{18}{x}=1+\frac{18}{x}\varepsilon Z$ Şimdi işimiz (zaten 1 bir tamsayı olduğundan) $\frac{18}{x}$'in bir tamsayı olmasını sağlamak. Buda x'e 18'i bölen sayılar vererek olur. O halde sorumuzun cevabı 18'in tüm bölenleri sayısına eşittir.

$18 = 2.3^2$ → TBS= 2.(1+1)(2+1)=2.2.3=12 sorumuzun cevabıdır.

ÖRNEK(19)

5! Sayısının PBS=?

ÇÖZÜM :

Önce 5! Sayısını asal çarpanlar cinsinden yazarız.

$5!=1.2.3.4.5=2^3.3.5$ →
PBS=(3+1)(1+1)(1+1)=4.2.2=16
sorumuzun cevabıdır.

ÖRNEK(20)

7!+8! Sayısının asal olmayan kaç tane pozitif tamsayı böleni vardır?

ÇÖZÜM :

Önce 7!+8! Sayısını asal çarpanlar cinsinden yazarız.

$7!(1+8)=1.2.3.4.5.6.7.9 = 2^4.3^4.5.7$
bu sayının 4 tane (2,3,5,7) asal böleni var
Asal olmayan PBS = PBS – (asal bölen sayısı)
= (4+1)(4+1)(1+1)(1+1) - 4
=5.5.2.2 – 4
= 96 olur.

ÖRNEK(21)

20.45.30.16 sayısının sonunda kaç sıfır vardır?

ÇÖZÜM :

Bu sorunun cevabı için sayının içinde kaç tane 10 çarpanının var olduğunu bulmalıyız. Önce sayıyı asal çarpanlara ayıralım

$(2.2.5)(3.3.5)(2.3.5)(2.2.2.2)=2^7.3^3.5^3 = 2^3.5^3.2^4.3^3$
$=10^3.2^4.3^3$
görüldüğü gibi ifadede 3 tane 10 çarpanı var. O halde bu sayı hesaplandığında sonunda 3 tane sıfır bulunur.

(çözümde 2 ve 5 dışındaki çarpanların sonucu etkilemediğine, 2 ve 5 in kuvvetlerinden küçük olanın sorunun cevabı olduğuna dikkat edin)

ÖRNEK(22)

50.75.125.16.12 sayısının sonunda kaç sıfır vardır?

ÇÖZÜM :

Yukarıdaki ÇÖZÜM basamaklarını izlersek
(2.5.5)(3.5.5)(5.5.5)(2.2.2.2)(2.2.3)
sadece 2 ve 5 in kuvvetleri gerekli olduğundan

$2^7.5^7 = 10^7$ o halde cevap 7 dir.

ÖRNEK(23)

73! Sayısının sonunda kaç sıfır vardır?

ÇÖZÜM :

Bu soruyu diğerleri gibi açarak yapmak çok zor olduğundan faktöriyeller için kullanacağımız pratik bir yol verelim.

Bu tip sorularda 10 çarpanının gerekli olduğunu söylemiştik. 10 sayısı 2 ve 5 ten oluşur. 10 sayısı için eşit sayıda 2 ve 5 lazım olduğundan. İfadede en az olan hangisi ise ona bakılır.

73!'de 5 sayısı, 2'den azdır. O halde 5'lerin sayısı sorumuzun cevabıdır.

73!'deki 5çarpanlarının sayısı aşağıdaki gibi bulunur.

73 | 5
14 | 5
2

14+2=16 o halde sayımızın sonunda 16 tane 0(sıfır) vardır

(73! Sayısı sürekli 5'e bölünüp sadece bölüm kısımları toplandığından bölme işlemini uzatmadan yapıp sonuca gitmek en iyisidir.)

ÖRNEK(24)

73!–1 Sayısının sonunda kaç 9 vardır?

ÇÖZÜM :

Bu sorunun cevabı iin aşağıda verilen küçük örnekleri inceleyin

- 100 sayısının sonunda 2 tane sıfır, 100-1=99 sayısının sonunda da 2 tane 9 vardır
- 1000 sayısının sonunda 3 tane sıfır, 1000-1=999 sayısının sonunda da 3 tane 9 vardır

o halde bir sayının sonunda kaç sıfır varsa, sayı-1 ifadesinin sonunda da o kadar 9 vardır.

O halde bu tür bir soru için sayının sonundaki sıfır sayısını bulmak yeterli olacaktır.

73! Sayısının sonunda (önceki sorudan) 16 sıfır vardı. O halde 73!-1 sayısının sonunda da 16 tane 9 vardır.

ÖRNEK(25)

$\underbrace{2600..0}_{\text{n tane}}$ sayısının 84 tane negatif böleni varsa n kaçtır?

ÇÖZÜM :

$$\underbrace{2600..0}_{\text{n tane}} = 26.10^n = 2.13.2^n.5^n = 2^{n+1}.5^n.13$$

NBS = (n+2).(n+1).(1+1) = 84

(n+2).(n+1) = 42 buradan n=5 bulunur

ÖRNEK(26)

$37! = 15^x.A$ ise x'in en büyük değeri nedir?

ÇÖZÜM :

15 sayısının çarpanları 3 ve 5 tir. 37! İçinde 5'ten daha az sayıda bulunduğu için 5'lerin sayısına bakılır.

37! deki 5'lerin sayısı

$$\begin{array}{l|l} 37 & 5 \\ \hline & 7 \;|\; 5 \\ & \quad\; 1 \end{array}$$

x = 7+1=8 olur.

KONUMUZ BİTTİ. ŞİMDİ TESTLERE GEÇEBİLİRSİNİZ

DİLERSENİZ KONU ANLATIMINI BİR DE YOUTUBE KANALIMIZDAN VİDEO OLARAK DA İZLEYEBİLİRSİNİZ

Youtube kanalımız: CEBİR HOCAM

Başarılar diliyorum
İbrahim Halil BABAOĞLU
Matematik Öğretmeni