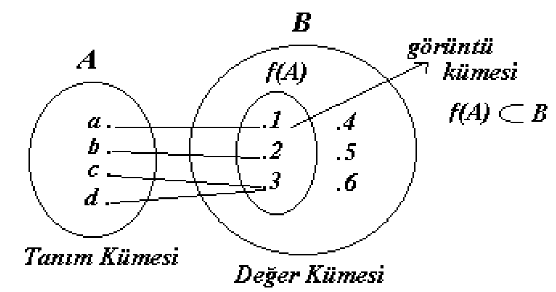
FONKSİYONLAR

A ve B boşan farklı iki küme olsun. A dan B ye tanımlı f fonksiyonu $f: A \rightarrow B$ ile gösterilir.

A ya tanım kümesi, B ye de değer kümesi denir.

A nın elemanlarının B de eşleştiği elemanların kümesine de A nın görüntü kümesi denir ve f(A) ile gösterilir.



ÖRNEK(1)

A={–1,0,1,2} ve B={–1,0,1,2,8,16} kümeleri veriliyor. A dan B ye f fonksiyonu $f:\{(x,y)|y=x^4\}$ olsun.

$f(x)=x^4$ olur.

x = –1 için y = 1 ,

x = 0 için y = 0

x = 1 için y = 1 ,

x = 2 için y = 16 olur.

Burada F(A)={0,1,16} dır.

ÖRNEK(2)

A={–2,–1,0,1,2} ve B={0,1,2,3,4} kümeleri veriliyor. A dan B ye f fonksiyonu $f:\{(x,y)I\ y=x^2\}$ olsun.

$f(x)=x^2$ olur. x= –1 için y=1 , x=1 için y=1 , x=0 için y=0 , x=2 için y=4 olur. Burada F(A)={0,1,4} dır.

UYARI-1: A dan B ye tanımlanan f bağıntısının fonksiyon olması için;

1) A da açıkta eleman olmamalı, B de açıkta eleman olabilir.

2) A daki bir elemanın B de iki yada daha fazla elemanla eşleşmemesi gerekir.

ÖRNEK(3)

f : R→R tanımlı

f : {(x,y)| y=$\frac{x+4}{x^2-4}$} bağıntısı bir fonksiyon mudur?

ÇÖZÜM:

$y=\frac{x+4}{x^2-4}$ bağıntısının bir fonksiyon olması için tanım aralığında ifadeyi tanımsız yapan bir değerin bulunmaması gerekir.

Bu bağıntının tanım aralığı Reel sayılardır. Ve bu bağıntıyı tanımsız yapan ;

$x^2 - 4 = 0 \rightarrow x = -2$ ve $x = 2$ değerleri birer reel sayıdır. Yani ifadeyi tanımsız yapan değerler tanım kümesinin bir elemanıdır bu yüzden bu bağıntı bir fonksiyon olamaz

ÖRNEK(4)

f:R→R tanımlı f : {(x,y) | y= $\dfrac{2x}{x^2+2}$) bağıntısı bir fonksiyon mudur?

ÇÖZÜM:

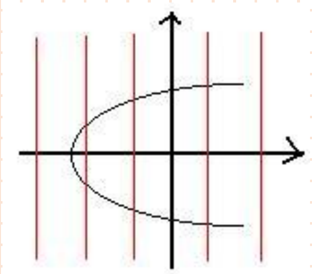
$y=\dfrac{2x}{x^2+2}$ bağıntısı tanım aralığındaki hiçbir değer için tanımsız olamaz çünkü x^2+2 ifadesini 0(sıfır) yapacak hiçbir reel sayı yoktur. Bu yüzden bu bağıntı bir fonksiyondur.

NOT 1:
Grafiği verilen bir bağıntının fonksiyon olup olmadığını anlamak için bağıntının tanım kümesinin her noktasından OX eksenine dikmeler çizilir.

1) Tüm dikmeler grafiği kesiyorsa,
2) Dikmelerin her biri grafiği bir noktada kesiyorsa,

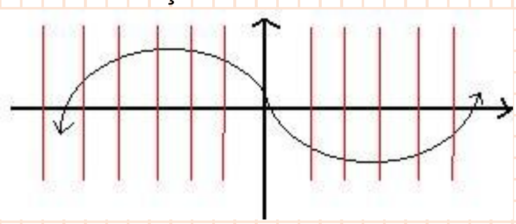
bağıntı bir fonksiyondur.

❖ f:R→R için



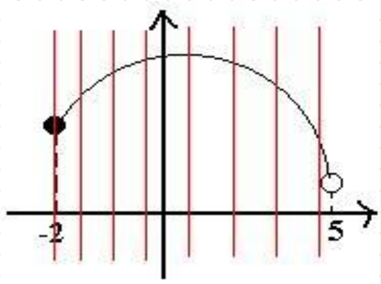
yukarıda grafiği verilen bağıntı bir fonksiyon değil

❖ F: R→R için



Bağıntısı bir fonksiyondur.

❖ f:[–2,5)→R için



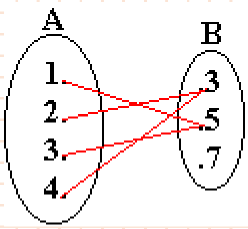
Verilen aralıkta bağıntı bir fonksiyondur.

FONKSİYON ÇEŞİTLERİ

f: A→B bir fonksiyon olsun . A;tanım kümesi , B;değer kümesi olmak üzere;

1) İÇİNE FONKSİYON:

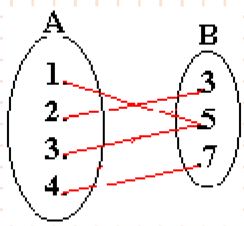
f: A→B fonksiyonu için B de en az bir boşta eleman kalıyorsa yani , f(A)≠B ise f bir içine fonksiyondur. f(A)⊂B



f(A)={3,5} ve f(A)⊂B

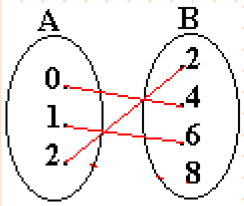
2) ÖRTEN FONKSİYON:

f:A→B fonksiyonu için s(A) ≥ s(B) olmak üzere f(A)=B yani B de açıkta eleman kalmıyorsa f ye örten fonksiyon denir.



3) BİREBİR FONKSİYON:

f:A→B fonksiyonu için s(A) ≤ s(B) olmak üzere A nın her elemanının B deki görüntüsü farklı ise f , birebirdir.



y=f(x) birebir fonksiyonu için;

i) $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

ii) $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ dir.

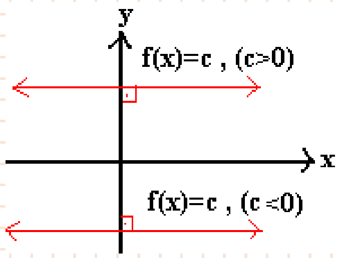
NOT 2:
y=f(x) şeklindeki bir fonksiyonun değer kümesinin her noktasından OY eksenine dikmeler çizilir,
i) Grafiği kesmeyen dikme varsa f, içine fonksiyondur.
ii) Grafiği kesmeyen dikme yoksa f, örten fonksiyondur.
iii) Grafiği kesen dikmelerin her biri grafiği sadece bir noktada kesiyorsa f, birebirdir.

4) SABİT FONKSİYON:

f: A→B bir fonksiyon olsun A nın her elemanının B deki görüntüsü aynı ise f, sabit bir fonksiyondur. ∀ x∈A için f(x)=c ve c∈B

❖ f(x)=3 , g(x)=1/2 gibi

SABİT FONKSİYONUN GRAFİĞİ



UYARI-2: $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ fonksiyonu sabit fonksiyon ise $\dfrac{a}{c} = \dfrac{b}{d}$ olmalıdır.

MATEMATİĞİM

ÖRNEK(5)

f: $R - \left\{ \pm\sqrt{\dfrac{1}{a}} \right\} \to R$, f(x)= $\dfrac{(a-1)x^2 - 3}{ax^2 - 1}$

fonksiyonu bir sabit fonksiyon ise a=?

ÇÖZÜM:

1. yol:
aynı dereceli terimlerin katsayıları oranı sabit olacağından ;

$$\frac{a-1}{a} = \frac{-3}{-1} \Rightarrow -a+1 = -3a$$

3a – a = -1

2a = -1 → $a = -\dfrac{1}{2}$ olur.

2.yol:

Bu bir sabit fonksiyon ise x'in tüm değerleri için aynı sonuç çıkmalıdır.
O halde biz de x'e 0 ve 1 değerlerini verir, bulduğumuz sonuçları eşitleyerek a'yı bulabiliriz.(x'e 0 ve 1'den farklı değerler de verebilirsiniz. Biz kolay olsun diye 0 ve 1'i seçtik)

x = 0 için x = 1 için

$$\frac{(a-1).0^2-3}{a.0^2-1} = \frac{(a-1).1^2-3}{a.1^2-1}$$

$$\frac{-3}{-1} = \frac{a-1-3}{a-1}$$

3a – 3 = a – 4

2a = -1

$a = -\frac{1}{2}$ bulunur.

5) BİRİM FONKSİYON:

f:A→A , x→x kuralı ile verilen f(x)=x fonksiyonuna birim fonksiyon denir.(I(x)=x)

ÖRNEK(6)

f:R→R de tanımlı f birim fonksiyonu , $f(x)=(a-3)x^2+(2b+a)x-(3b-c)$ ise a+b+c=?

ÇÖZÜM:

$$f(x) = x$$

$$\underbrace{(a-3)}_{0}x^2+\underbrace{(2b+a)}_{1}x-\underbrace{(3b-c)}_{0} = x$$

a – 3 = 0 2b + a = 1 3b – c = 0

a = 3 → 2b +3 = 1 3.(-1) – c = 0

2b = -2 -3 – c = 0

b = -1 → c = -3

a + b + c = 3 + (-1) + (-3) = -1 bulunur.

EŞİT FONKSİYONLAR:

f: A→B ve g:A→B iki fonksiyon olsun ∀ x∈A için f(x) = g(x) oluyorsa f ve g fonksiyonlarına eşit fonksiyonlar denir. ve f = g şeklinde gösterilir.

ÖRNEK(7)

A={0,2} , B={0,4} kümeleri veriliyor. f:A→B , $f(x)=x^2$ ve g:A→B , g(x)=|2x| ise f = g midir?

ÇÖZÜM:

Eşitliği ispatlamak için tanım kümelerinden alınana elemanları fonksiyonlarda ,işleyip sonuçların eşit olup olmadığına bakarız.

A={0,2} kümesi için;
x = 0 için $f(0) = 0^2 = 0$ ve g(0) = |2.0| = 0
x = 2 için $f(2) = 2^2 = 4$ ve g(2) = |2.2| = 4
görüldüğü gibi tanım kümesinin aynı elamanları aynı sonuçları verdi . o halde f = g dir.

TEK VE ÇİFT FONKSİYON:

f:R→R tanımlı bir fonksiyon için

i) ∀ x∈R için f(–x) = f(x) ise f, çift,
ii) ∀ x∈R için f(–x) = –f(x) ise f, tek tir.

❖ Aşağıdaki fonksiyonları inceleyin

a) $f(x) = x^3+x \rightarrow f(-x) = (-x)^3-x$
$= -x^3-x$
$= -(x^3+x)$
= -f(x) tek

b) $f(x) = 2x^2+4 \rightarrow f(-x) = 2(-x)^2+4$
$= 2x^2+4$
= f(x) , çift

c) $f(x) = 3x^2+2x-1 \rightarrow f(-x) = 3(-x)^2+2(-x)-1$
$= 3x^2-2x-1$
$\neq f(x)$
$\neq -f(x)$ ne tek ne çift

UYARI-3:

i) A(x,y) noktasının y eksenine göre simetriği A(–x,y) noktası olduğundan çift fonksiyonların grafiği y eksenine göre simetriktir.

ii) A(x,y) noktasının orjine göre simetriği A(–x,–y) noktası olduğundan tek fonksiyonların grafiği orjine göre simetriktir.

NOT 3 : s(A)=n ve s(B)=m olmak üzere;

1) A→B ye tanımlı fonksiyon sayısı; m^n dir.

2) A→B ye tanımlı 1-1 fonksiyon sayısı;

$$P(m,n)=\frac{m!}{(m-n)}\ ,\ (m\geq n)\ \text{dir}$$

3) A→A ya tanımlı 1-1 örten fonksiyon sayısı;

$$P(n,n)=\frac{n!}{(n-n)!}=n!\ \text{dir.}$$

4) A da tanımlanan 1-1 örten olmayan fonksiyon sayısı; $n^n - n!$ dir.

5) A→B ye tanımlı sabit fonksiyon sayısı; m dir.

6) A→B ye tanımlı fonksiyon olmayan bağıntı sayısı;

$2^{m.n} - m^n$ dir.

ÖRNEK(8)

A={a,b,c} , B={1,2,3,4} olmak üzere;
s(A)=3 ve s(B)=4

a) A→B tanımlı bağıntılardan $4^3=64$ tanesi fonksiyondur

b) A→B tanımlı 1:1 fonksiyon sayısı

$$P(4,3)=\frac{4!}{(4-3)!}=24 \text{ tür.}$$

c) A→A tanımlı 1:1 ve örten fonksiyon sayısı

$$P(3,3)=\frac{3!}{(3-3)!}=3!=6 \text{ dır.}$$

d) A'da tanımlanan 1:1 ve örten olmayan fonksiyon sayısı $3^3 - 3! = 27 - 6 = 21$ dır

e) A→B tanımlı sabit fonksiyon sayısı 4 tür.

f) A→B tanımlı fonksiyon olmayan bağıntı sayısı $2^{3.2} - 3^2 = 64 - 9 = 59$ dır.

FONKSİYONLARDA DÖRT İŞLEM :

f: A→R ve g:B→R fonksiyonu verilsin (A∩B≠ϕ)

1) f+g : A∩B→R ; (f+g)(x)=f(x)+g(x)
2) f–g : A∩B→R ; (f–g)(x)=f(x)–g(x)
3) f.g : A∩B→R ; (f.g)(x)=f(x).g(x)
4) f/g : A∩B→R ; (f/g)(x)=f(x)/g(x) , (g(x)≠0)
5) c∈R olmak üzere c.f : A→R , (c.f)(x)=c.f(x)

❖ f(x) = 2x+3 ve g(x) = x –2 için

→ f+g = 2x+3+x – 2 = 3x+1
→ f–g = 2x+3 – x +2 = x+5
→ f.g = (2x+3)(x – 2) = $2x^2 - x - 6$

❖ f={(1,2),(3,–2),(4,6),(6,1)}
g={(0,3),(3,4),(5,–6),(6,3)} ise

f ve g' nin tanım kümelerinin kesişimi:{3,6}

f+g = {(3,–2+4),(6,1+3)} = {(3,2),(6,4)}
f–g = {(3,–2–4),(6,1–3)} = {(3,–6),(6,–2)}
2f–g = {(3,2.(–2)–4),(6,2.1–3)} = {(3,–8),(6,–1)}
g+3 = {(0,3+3),(3,4+3),(5,–6+3),(6,3+3)}
= {(0,6),(3,7),(5,–3),(6,6)}

SIRA SİZDE:

ÖRNEK(9)

f:{(2,5),(3,7),(5,9)}ve g:{(3,4),(5,12),(7,3)} fonksiyonları veriliyor.

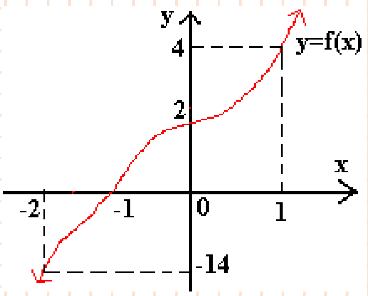
a) f(3)+g(5)=? C:19

b) 2f+g fonksiyonunu bulun
C: 2f+g:{(3,18),(5,30)}

BİR FONKSİYONUN GRAFİĞİ :

Fonksiyonu gerçekleyen (x,y) ikililerinin Analitik düzlemde belirttiği noktalar kümesine denir.

ÖRNEK(10)



Yukarıdaki grafiğe göre; $\dfrac{f(-2)+f(0)}{f^{-1}(4)+f^{-1}(-14)}=?$

ÇÖZÜM:

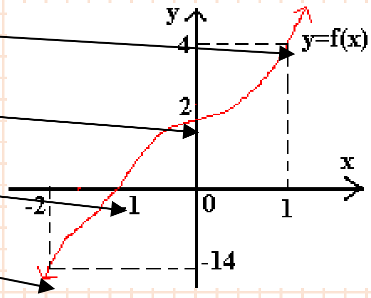
Grafik sorularında ilk önce koordinatı belli olan noktaları belirleyip fonksiyonunu yazmak işinizi kolaylaştıracaktır.

f(1) = 4

f(0) = 2

f(-1) = 0

f(-2) = -14



f(1) = 4 ise $f^{-1}(4)=1$ olur.

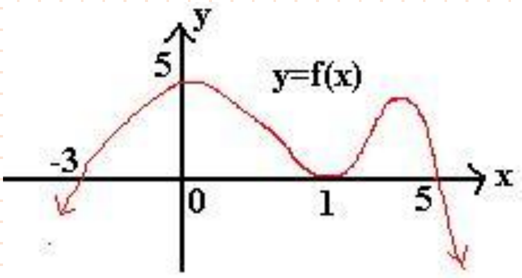
f(-2) = -14 ise $f^{-1}(-14)=-2$ olur.

Şimdi bulunan değerleri soruda yazalım;

$$\frac{f(-2)+f(0)}{f^{-1}(4)+f^{-1}(-14)}=\frac{-14+2}{1-2}=\frac{-12}{-1}=12$$

bulunur.

ÖRNEK(11)

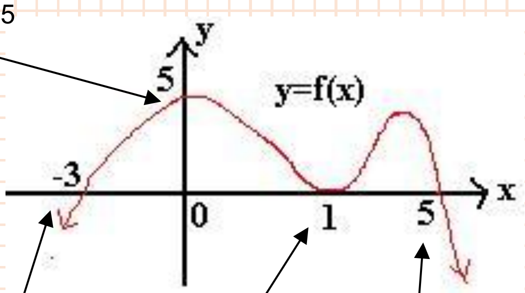


Şekle göre f [f(2x–1)]=5 eşitliğini sağlayan birbirinden farklı x değerlerinin çarpımı kaçtır?

ÇÖZÜM:

Daha önce de dediğimiz gibi koordinatı belli olan noktaları tespit edelim.

f(0) = 5



F(-3) = 0 f(1) = 0 f(5) = 0

f(0) = 5 ise $f\,[\underbrace{f(2x-1)}_{0}]=5$ buradan ;

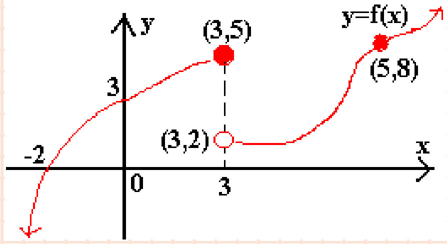
f(-3) = 0 , f(1) = 0 , f(5) = 0 ise $f\,(\underbrace{2x-1}_{-3,\ 1,\ 5}) = 0$

olur. Buradan ;

2x -1 = -3 , 2x – 1 = 1 , 2x -1 = 5
2x = -2 2x = 2 2x = 6
x = -1 x = 1 x = 3

x'lerin çarpımı :- 1 .1.3 = - 3 olur.

ÖRNEK(12)

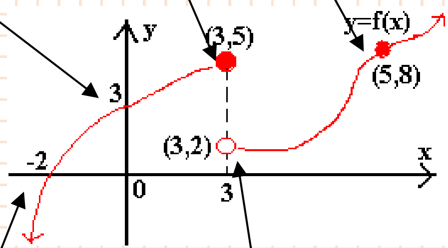


Yukarıdaki şekle göre (fofofof)(–2)=?

ÇÖZÜM:

Yine koordinatı belli olan noktaları yazmakla başlayalım.

f(0) = 3 f(3) = 5 f(5) = 8



f(-2) = 0 tanımlı değil

$$(fofofof)(-2) = (fofof)(\underbrace{f(-2)}_{0}) = (fof)(\underbrace{f(0)}_{3})$$

$$= f(\underbrace{f(3)}_{5}) = f(5) = 8$$ bulunur.

BİR FONKSİYONUN TERSİ:

f:A→B tanımlı 1-1 ve örten bir fonksiyon olsun
f:A→B , f(x) = y ise f^{-1}:B→A , $f^{-1}(y)$= x olur. Burada , f^{-1} fonksiyonuna f'in ters fonksiyonu denir.

y = f(x) → x = $f^{-1}(y)$

TEMEL KURAL:

Fonksiyon y ye eşitlenip x çekilir. Fonksiyonun tersi alındığında tanım ve değer kümeleri yer değiştirdiğinden daha sonrada x yerine y = $f^{-1}(x)$, y yerine de x yazılarak fonksiyonun tersi elde edilir.

ÖRNEK(13)

f(x)=2x+3 ise $f^{-1}(x)$=?

ÇÖZÜM:

önce fonksiyonu y'ye eşitleyelim ve x'i buradan çekelim.

2x+3 = y → 2x = y – 3

$$\rightarrow x = \frac{y-3}{2}$$

$$x \leftrightarrow y$$

$$\rightarrow y = \frac{x-3}{2}$$

o halde fonksiyonunu tersi $f^{-1}(x)=\mathbf{\frac{x-3}{2}}$ olur.

PRATİK KURAL:

☞ f:R→R , f(x)=ax+b ⇒ $f^{-1}(x)=\frac{x-b}{a}$

☞ f:R→R , $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ ⇒ $f^{-1}(x)=\frac{-dx+b}{cx-a}$

☞ y=f(x)'in grafiği ile y=$f^{-1}(x)$'in grafiği y=x doğrusuna göre simetriktir.

☞ $f^{-1}(a)=b \Rightarrow f(b)=a$ dır.

❖ $f(x)=\frac{2x+5}{3x-7} \Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{7x+5}{3x-2}$

❖ $f(x)=\frac{2x}{3x+4} \Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{-4x}{3x-2}$

ÖRNEK(14)

f(x) = 3x-2 fonksiyonu veriliyor. Buna göre **$f^{-1}(7)$** kaçtır?

ÇÖZÜM:

1.yol

önce fonksiyonun tersini bulalım

(pratik yol kullanılırsa) $\mathbf{f^{-1}}(x) = \frac{x+2}{3}$ ve

$\mathbf{f^{-1}}(7) = \frac{7+2}{3} = \frac{9}{3} = 3$ bulunur.

2.yol

y = f(x) → x = $f^{-1}(y)$ olduğundan ters fonksiyon 7'ye eşitlenir

f(x) = 3x-2 = 7 → 3x = 7+2=9 → x = 3 bulunur.

ÖRNEK(15)

$f(x) = 2x^2+3$ fonksiyonu veriliyor. $f^{-1}(11)$ 'in negatif değeri kaçtır?

ÇÖZÜM:

Yukarıdaki soruda kullanılan 2.yolu kullanırsak;

$f(x) = 2x^2+3 = 11 \rightarrow 2x^2 = 11-3$

$\rightarrow 2x^2 = 8$

$\rightarrow x^2 = 4$

$\rightarrow x = \mp 2$ olur.

Negatif değer istendiğinden cevap – 2 dir.

ÖRNEK(16)

$f(x) = x^2+2x+3$ ise $f^{-1}(x)$ =? (*tamkare den fayd.)

ÇÖZÜM:

İkinci dereceden fonksiyonların tersini almak için tamkareden faydalanırız.

$f(x) = x^2+2x+3 = y \rightarrow x^2+2x+1 = y-2$

$\rightarrow (x+1)^2 = y-2$

$\rightarrow \sqrt{(x+1)^2} = \sqrt{y-2}$

$\rightarrow |x+1| = \sqrt{y-2}$

$\rightarrow x+1 = \mp\sqrt{y-2}$

$\rightarrow x = \mp\sqrt{y-2}-1$

$x \leftrightarrow y$

$\rightarrow f^{-1}(x) = \mp\sqrt{x-2}-1$

ÖRNEK(17)

R–{1}' de tanımlı $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-1}$ fonksiyonu 1:1 ve örten ise değer kümesi nedir?

ÇÖZÜM:

Bir fonksiyon 1:1 ve örten ise tersi de bir fonksiyondur.

$f(x)=\dfrac{2x+1}{x-1} \rightarrow f^{-1}(x)=\dfrac{x+1}{x+2}$

$f^{-1}(x)$ 'in fonksiyon olabilmesi için ifadeyi tanımsız yapan değer olmamalıdır. Buradan $f^{-1}(x)$ 'in tanım kümesi R – {-2} olmalıdır.(-2, paydayı sıfır yapar)

$f^{-1}(x)$ 'in tanım kümesi f(x)'in değer kümesi olduğundan cevap : R – {-2} olur.

MATEMATİĞİM

UYARI-4:

$f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ fonksiyonu

R–{paydanın kökü}→R-{limit} için 1-1 ve örtendir.(Bir fonksiyonun tersinin olabilmesi için 1-1 ve örten olması gerekir.)

ÖRNEK(18)

f:R–{a}→R–{2} de tanımlı $f(x)=\dfrac{bx+4}{3x-2}$ için a.b=?

ÇÖZÜM:

$$R-\underbrace{\{\text{paydanın kökü}\}}_{\substack{3x-2=0\\ 3x=2\\ x=\frac{2}{3}}} \rightarrow R-\underbrace{\{\text{limit}\}}_{\lim\left(\frac{bx+4}{3x-2}\right)=\frac{b}{3}}$$

$a=\dfrac{2}{3}$ ve $\dfrac{b}{3}=2 \rightarrow$ b=6

buradan a.b = $\dfrac{2}{3}.6=4$ olur.

BİLEŞKE FONKSİYON:

$f:A\to B$ ve $g:B\to C$ olmak üzere $gof:A\to C$, $(gof)(x)=g(f(x))$ biçiminde tanımlanan gof fonksiyonuna f ile g nin bileşke fonksiyonu denir.

ÖRNEK(19)

$f:R\to R$, $f(x)=3x-2$ ve $g:R\to R$, $g(x)=2x+5$ ise fog ve gof'u bulun

ÇÖZÜM:

$(fog)(x) = f(g(x))=f(2x+5)=3(2x+5)-2$
$=6x+15-2$
$=6x+13$

$(gof)(x) = g(f(x))=g(3x-2) = 2(3x-2)+5$
$=6x-4+5$
$=6x+1$ bulunur

NOT 4 :

Bileşke işlemlerinde sağdan sola doğru işlem yapılır.

BİLEŞKE İŞLEMİNİN ÖZELLİKLERİ:

1) $fog \neq gof$
2) $fo(goh) = (fog)oh$
3) $fof^{-1} = f^{-1}of = I$, ($I(x)=x$ birim fonksiyon)
4) $(f^{-1})^{-1} = f$
5) f ve g fonksiyonları 1-1 ve örten ise; $(fog)^{-1} = g^{-1}of^{-1}$ dir.
6) $foI = Iof = f$

ÖRNEK(20)

$f(x)=\dfrac{2x+3}{x-2}$, $g(x)=x^2-3$ ise $(gof)(3)$, $(fog)(2)$, $(fof)(1)$ değerlerini bulunuz.

ÇÖZÜM:

Değer istenen sorularda bileşke fonksiyon alınmadan da işlem yapılabilir.

→ $(gof)(3) = g(f(3)) = g\left(\dfrac{2.3+3}{3-2}\right)=g(9)$

$g(9) = 9^2 - 3 = 78$

$(gof)(3) = 78$

→ $(fog)(2)=f(g(2))=f(2^2-3)$

$f(1)=\dfrac{2.1+3}{1-2}=-5$

$(fog)(2) = -5$

→ $(fof)(1) = f(f(1))= f\left(\dfrac{2.1+3}{1-2}\right)=f(-5)$

$f(-5)=\dfrac{2.(-5)+3}{-5-2}=1$

$(fof)(1) = 1$ olur.

ÖRNEK(21)

$f(x)=2x-3$ ve $(gof)(x)=5x+3$ ise $g(x)=?$

ÇÖZÜM:

$(gof)(x) = 5x+3$ → $g(f(x)) = 5x+3$

$g(2x-3) = 5x+3$

şimdi (2x-3)'ün tersini alıp son elde edilen ifadede x gördüğümüz yere yazalım

$$(2x-3)^{-1}=\frac{x+3}{2}$$

$$g\left(2.\frac{x+3}{2}-3\right)=5.\frac{x+3}{2}+3$$

$$g(x)=\frac{5x+15+6}{2}=\frac{5x+21}{2} \text{ olur.}$$

(yaptığımız işlem ,gof fonksiyonuna sağdan f^{-1} fonksiyonunun işlemekten ibarettir.

$(gof)o\,f^{-1} = g(fo\,f^{-1}) = goI = g$

ÖRNEK(22)

$f^{-1}(x+3) = 2x+7$ ve
$g(2x-3)= x+5$ ise $(fog)(5)=?$

ÇÖZÜM:

$f^{-1}(x+3) = 2x+7$ ise $f(2x+7) = x+3$ (iç ve dış yer değiştirince fonksiyon tersine döner)

$(fog)(5) = f(g(5)) = f(9) = 4$ olur.

$$g(\underbrace{2x-3}_{5}) = g(5) = x+5 = 4+5 = 9$$

$$2x-3=5 \quad 2x=8 \quad x=4$$

$$f(\underbrace{2x+7}_{9}) = f(9) = x+3 = 1+3 = 4$$

$$2x+7=9 \quad 2x=2 \quad x=1$$

ÖRNEK(23)

$f(x)=x^2+2x$, $(fog)(x)=x^2+6x+8$ olduğuna göre $g(x)$ aşağıdakilerden hangisi olabilir?

A) x^2+x B) x^2-2 C) x^2+2 D) $x-2$ E) $x+2$

ÇÖZÜM:

$(fog)(x)=x^2+6x+8 \rightarrow f(g(x)) = x^2+6x+8$
(f'de x yerine g(x) yazalım)
$\rightarrow (g(x))^2+2g(x)= x^2+6x+8$
(her tarafa 1 ekleyelim)
$\rightarrow (g(x))^2+2g(x)+1= x^2+6x+8+1$
$\rightarrow (g(x)+1)^2 = (x+3)^2$
$\rightarrow \sqrt{(g(x)+1)^2} = \sqrt{(x+3)^2}$
$\rightarrow |g(x)+1| = |x+3|$

$g(x)+1 = x+3$ ve $g(x)+1 = -x-3$
$g(x) = x+2$ $g(x) = -x-4$

o halde cevap E şıkkıdır.

SIRA SİZDE :

ÖRNEK(24)

$f:R\rightarrow R$, $f(x)=2x+4$ ve
$g:R\rightarrow R$, $g(x)=3x-5$ ise fog ve gof'u bulun

(C: $(fog)(x)=6x-6$ ve $(gof)(x)=6x+19$)

ÖRNEK(25)

$f(x)=5x-2$, $g(x)=2x^2+1$ ise $(gof)(2)$, $(fog)(2)$, $(fof)(1)$ değerlerini bulunuz.

(C: 129,43,13)

MATEMATİĞİM

PERMÜTASYON FONKSİYON:

A sonlu bir küme olsun. $A\rightarrow A$ ya tanımlı 1-1 ve örten her fonksiyona A nın bir permütasyonu denir.

- A={1,2,3} kümesinde tanımlı f={(1,2),(2,3),(3,1)} fonksiyonu 1-1 ve örten olduğundan A nın bir permütasyonudur ve $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ şeklinde gösterilir.

NOT 5 :
i) Permütasyon fonksiyonda üst satır tanım kümesi, alt satır da değer kümesidir.
ii) fog işlemi yapılırken g den f ye gidilir.

ÖRNEK(26)

A={a,b,c,d} kümesinde

$$f=\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & c & a & d \end{pmatrix} \quad g=\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ c & b & a & d \end{pmatrix}$$

permütasyonları veriliyor buna göre;

a) fog =?
b) gof =?
c)foh = g eşitliğini sağlayan h permütasyonunu bulunuz.

ÇÖZÜM: a)

(fog)(a) = f(g(a)) = f(c) = a
(fog)(b) = f(g(b)) = f(b) = c
(fog)(c) = f(g(c)) = f(a) = b
(fog)(d) = f(g(d)) = f(d) = d

o halde $fog=\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a & c & b & d \end{pmatrix}$

b)
(gof)(a) = g(f(a)) = g(b) = b
(gof)(b) = g(f(b)) = g(c) = a
(gof)(c) = g(f(c)) = g(a) = c
(gof)(d) = g(f(d)) = g(d) = d

o halde $gof=\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & a & c & d \end{pmatrix}$

c)
foh = g ifadesinde her iki tarafa soldan f^{-1} işleyelim

f^{-1}o(foh) = f^{-1} o g
(f^{-1} of)oh = f^{-1} o g
Ioh = f^{-1} o g
h = f^{-1} o g

şimdi bize f^{-1} fonksiyonu lazım

$$f=\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & c & a & d \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} f(a) &= b \to f^{-1}(b) = a \\ f(b) &= c \to f^{-1}(c) = b \\ f(c) &= a \to f^{-1}(a) = c \\ f(d) &= d \to f^{-1}(d) = d \end{aligned}\right\} f^{-1}=\begin{pmatrix} b & c & a & d \\ a & b & c & d \end{pmatrix}$$

$$f^{-1}=\begin{pmatrix} b & c & a & d \\ a & b & c & d \end{pmatrix} \Leftrightarrow f^{-1}=\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ c & a & b & d \end{pmatrix}$$

$$f^{-1}og=\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ c & a & b & d \end{pmatrix} o \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ c & b & a & d \end{pmatrix}$$

h = (f^{-1} og)(a) = f^{-1} (g(a)) = f^{-1} (c) = b
h = (f^{-1} og)(b) = f^{-1} (g(b)) = f^{-1} (b) = a
h = (f^{-1} og)(c) = f^{-1} (g(c)) = f^{-1} (a) = c
h = (f^{-1} og)(d) = f^{-1} (g(d)) = f^{-1} (d) = d

o halde $h=\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & a & c & d \end{pmatrix}$ olur.

ÖRNEK(27)

A={a,b,c,d} kümesinde

$$f=\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & c & a & d \end{pmatrix} \quad g=\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ c & b & a & d \end{pmatrix}$$

permütasyonları veriliyor buna göre;

a) fog =?
b) gof =?
c) foh = g eşitliğini sağlayan h permütasyonunu bulunuz.

ÇÖZÜM:

a) $fog=\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a & c & b & d \end{pmatrix}$

b) $gof=\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & a & c & d \end{pmatrix}$

c) $h=\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & a & c & d \end{pmatrix}$

GENEL ÖRNEKLER

ÖRNEK(28)

Bir f fonksiyonu , f(x)=f(x+1)–4 bağıntısını sağlamaktadır. f(2)=5 ise f(4)=?

ÇÖZÜM:

1.yol

x = 2 için f(2)=f(3)–4 → 5 = f(3) – 4 →f(3) = 9
x = 3 için f(3)=f(4)–4 → 9 = f(4) – 4 →f(4)= 13
Bulunur.

2.yol.

x = 2 için → f(2)=f(3)–4
x = 3 için → + f(3)=f(4)–4 (f(3)'ler gider)
f(2) = f(4) – 8
5 = f(4) – 8
f(4) = 13 bulunur.

(bu yol örneğin f(2) verilip f(20) gibi büyük değer sorulunca daha pratiktir.)

ÖRNEK(29)

g(x)=2x–1 ve (fog)(x)=4x–1 ise $f^{-1}(-5)$=?

ÇÖZÜM:

(fog)(x)=4x–1 → f(g(x)) = 4x–1
→ f(2x-1) = 4x-1

$$f^{-1}(\underbrace{4x\text{-}1}_{-5}) = f^{-1}(-5) = 2x - 1 = 2.(-1) - 1 = -3$$

$$4x-1=-5$$
$$4x=-4$$
$$x=-1$$

bulunur.

ÖRNEK(30)

f(x)=2^x olduğuna göre , f(2x+2) nin f(x) türünden eşiti nedir?

ÇÖZÜM:

Önce istenen fonksiyon bulunur.
f(2x+2) = 2^{2x+2}
Buradan 2^x çekilir.
f(2x+2) = 2^{2x+2} → $2^2.2^{2x}$=f(2x+2)

$$\rightarrow f(2x+2) = 4.\Big(\underbrace{2^x}_{f(x)}\Big)^2$$

→ f(2x+2) = $4f^2(x)$ bulunur.

ÖRNEK(31)

R→R ye f(x)=ax+b , $g(x) = \dfrac{x+3}{6}$ fonksiyonları veriliyor. (gof)(x)=x ise a+b=?

ÇÖZÜM:

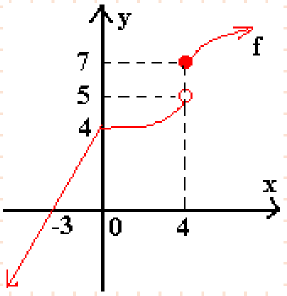
(gof)(x)=x ise gof fonksiyonu birim fonksiyondur. (I(x) = x olduğunu hatırlayın)

fog = I ise $fof^{-1} = I$ olduğundan g fonksiyonu f nin tersi olmalıdır. yani g^{-1}=f dir.

g^{-1}(x) = 6x – 3 = f(x) = ax+b
buradan a = 6 ve b = -3 çıkar.

O halde a+b = 6+(–3) = 3 olur

ÖRNEK(32)



Grafik R→R–[5,7) de tanımlı f fonksiyonuna aittir.
$f^{-1}(0)+f(0)+f(4)=?$

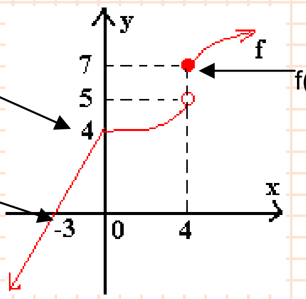
ÇÖZÜM:

Önce koordinatları belli olan noktalara bakalım

f(0) = 4

f(4) = 7

f(-3) = 0



f(-3) = 0 ise $f^{-1}(0) = -3$ tür.

. $f^{-1}(0)+f(0)+f(4) = -3+4+7 = 8$ olur.

ÖRNEK(33)

R→R de tanımlı f(x)=x+4 ve $g(x)=x^2-4x$ fonksiyonları veriliyor.

(fog)(a)=9 denklemini sağlayan a değerlerinden biri aşağıdakilerden hangisidir?

A) –3 B) –2 C) –1 D) 1 E) 2

ÇÖZÜM:

$(fog)(a)=9 \rightarrow f(g(a)) = 9$
$\rightarrow f(a^2-4a) = 9$
$\rightarrow a^2-4a+4 = 9$
$\rightarrow (a-2)^2 = 3^2$
$\rightarrow |a-2| = 3$

a – 2 = 3 ve a – 2 = - 3
a = 5 a = - 1

cevap C şıkkıdır.

ÖRNEK(34)

$$f(x)=\begin{cases} x+2 \ , \ x>3 \ \text{ise} \\ ax \ , \ x\le 3 \ \text{ise} \end{cases} \quad \text{ve}$$

$$g(x)=\begin{cases} x-1 \ , \ x\ge 1 \ \text{ise} \\ 2x-3 \ , \ x<1 \ \text{ise} \end{cases} \quad \text{fonksiyonları}$$

veriliyor. (fog)(0)=6 ise a=?

ÇÖZÜM:

(fog)(0)=6 ise $f\left(\underbrace{g(0)}_{-3}\right) = 6 \rightarrow f(-3) = 6$

g fonksiyonunda 0 < 1 olduğundan 2x – 3 kullanılır.
g(0) = 2.0 – 3 = - 3 tür.
f fonksiyonunda $-3 \le 3$ olduğundan ax kullanılır.
f(-3) = 6
a.(-3) = 6 ve a = -2 bulunur.

ÖRNEK(35)

Birinci dereceden f(x) fonksiyonu için f(f(x))=3.f(x)+1 olduğuna göre f(4)=?

ÇÖZÜM:

f(x) = 4 dersek $f\left(\underbrace{f(x)}_{4}\right) = 3.\underbrace{f(x)}_{4}+1$

f(4) = 3.4+1=13 eder.

ÖRNEK(36)

Tanımlı olduğu değerler için $x.f(x) = 2x+1$, $(g^{-1}of)(x) = x+2$ ise $g(x)$ aşağıdakilerden hangisidir?

A) $2x-3$ B) $\frac{x-3}{2}$ C) $2x+3$

D) $\frac{x+3}{2}$ E) $\frac{2x-3}{x-2}$

ÇÖZÜM:

$x.f(x) = 2x+1 \rightarrow f(x) = \frac{2x+1}{x}$

$(g^{-1}of)(x) = x+2 \rightarrow g(x+2) = f(x)$ (iç $\leftrightarrow$ dış)

$$\rightarrow g(\underset{x-2}{\underset{\downarrow}{x}}+2) = \frac{2\overset{x-2}{\overset{\uparrow}{x}}+1}{\underset{x-2}{\underset{\downarrow}{x}}}$$

$$\rightarrow g(x-2+2) = \frac{2(x-2)+1}{x-2}$$

$$\rightarrow g(x) = \frac{2x-3}{x-2} \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK(37)

$f(x)+f(x-2) = 4x+6$ ise $f(x)=?$

ÇÖZÜM:

Toplam birinci dereceden olduğundan f(x) de birinci derecedendir.

$f(x) = ax+b$ olsun

$f(x)+f(x-2) = 4x+6$

$(ax+b) +[a(x-2)+b] = 4x+6$

$ax+b+ax-2a+b = 4x+6$

$2ax+2b-2a = 4x+6$

$2a = 4$ ve $2b-2a = 6$

$\underline{a = 2}$ $\quad 2b-2.2 = 6$

$2b = 10 \rightarrow \underline{b = 5}$

o halde $f(x) = 2x+5$ olur.

ÖRNEK(38)

$f(x.y)=f(x).f(y)$, $(x \geq y)$ olmak üzere $f(3)=5$ ise $f(27)=?$

ÇÖZÜM:

$f(27)=f(9.3) = \underbrace{f(9)}_{f(3.3)=f(3).f(3)}.f(3)$

$= f(3).f(3).f(3)$

$= 5.5.5$

$= 125$ olur.

ÖRNEK(39)

$f(x)=ax-3$, $g(x)=2x-b$ ve $(fog)(x)=x$ ise $a+b=?$

ÇÖZÜM:

$(fog)(x)=x$ ise fog fonksiyonu birim fonksiyondur. Bu durumda f, g'nin tersidir.

$f^{-1}=g \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x+3}{a}$ ve $g(x) = 2x-b$

$\frac{x+3}{a} = 2x-b$

$x+3 = 2ax-ab$

$2a = 1$ ve $-ab = 3$

$a = \frac{1}{2}$ $\quad -\frac{1}{2}b = 3$

$b = -6$

o halde $a+b = \frac{1}{2}+(-6) = \frac{1-12}{2} = -\frac{11}{2}$ bulunur.

ÖRNEK(40)

f(x+1)=x.f(x) ve f(1)=2 ise f(9)=?

ÇÖZÜM:

f(x+1)=x.f(x)

x =1 için f(1+1)= 1.f(1) → f(2)= 1.f(1)

x =2 için f(2+1)= 1.f(1) → f(3)= 2.f(2)

x =3 için f(3+1)= 1.f(1) → f(4)= 3.f(3)

....

x =8 için f(8+1)= 1.f(1) → f(9)= 8.f(8)

x

alt alta çarptığımızda f(9) = f(1)1.2….8.

f(2),f(3)…f(8) gider. f(9) = 2.8! bulunur.

ÖRNEK(41)

f(x^2+2x+7)=x–1 ise f^{-1}(x)=?

ÇÖZÜM:

f(x^2+2x+7)=x–1 ise $f^{-1}\left(\underset{x+1}{\underset{\downarrow}{x}} - 1\right) = \underset{x+1}{\underset{\downarrow}{x}}^2 + 2\underset{x+1}{\underset{\downarrow}{x}} + 7$

$$f^{-1}(x+1-1) = (x+1)^2 + 2(x+1) + 7$$

$$f^{-1}(x) = x^2 + 2x + 1 + 2x + 2 + 7$$

$f^{-1}(x) = x^2 + 4x + 10$ bulunur.

ÖRNEK(42)

$\left(fog^{-1}\right)^{-1}$(x) = 2x+4 ve f(x)=x–2 ise g(x)=?

ÇÖZÜM:

$$\left(fog^{-1}\right)^{-1} = \left(g^{-1}\right)^{-1} of^{-1} = gof^{-1}$$

(gof^{-1})(x) = 2x+4 f^{-1}(x) = x+2

g (f^{-1}(x)) = 2x+4

$$g\left(\underset{x-2}{\underset{\downarrow}{x}} + 2\right) = 2\underset{x-2}{\underset{\downarrow}{x}} + 4$$

g(x) = 2(x-2)+4 = 2x – 4 +4

g(x) = 2x bulunur.

ÖRNEK(43)

f:R–{2}→R–{3} ve $f(x) = \dfrac{ax-4}{3x-b}$ ise ve f ‘nin tersi varsa (a,b)=?

ÇÖZÜM:

1.yol

UYARI-4 gereği f(x) in paydasının kökü 2 ve f(x) in limiti 3 olmalıdır.

3x – b = 0 → 3.2 – b = 0 → b = 6

limf(x) = $\dfrac{a}{3}$=3 → a = 9

o halde (a,b) = (9,6) olur.

2.yol

(limit bilmeyenler için)

f(x)’in paydasını sıfır yapan 2’dir.

$f^{-1}(x)$ ’in paydasını sıfır yapan 3’tür.

3x – b = 0 → 3.2 – b = 0 → b = 6

$f^{-1}(x) = \dfrac{bx-4}{3x-a}$ olduğundan ;

3x – a = 0 → 3.3 – a = 0 → a = 9

buradan (a,b) = (9,6) bulunur.

ÖRNEK(44)

$f(x)=\frac{x}{x+1}$ ise f(x–1)'in f(x) türünden değeri nedir?

(95–öss)

ÇÖZÜM:

Önce f(x-1)'i bulalım.

f fonksiyonunda x yerine x-1 yazarsak

$$f(x-1)=\frac{x-1}{x-1+1}=\frac{x-1}{x}$$

şimdi f fonksiyonunda x'i çekeriz

$f(x)=\frac{x}{x+1}$ → xf(x)+f(x) = x

→ x – xf(x) = f(x)

→ x(1-f(x)) = f(x)

→ $x=\frac{f(x)}{1-f(x)}$

son olarak x'in f(x) cinsinden değerini f(x-1)' de yazarız;

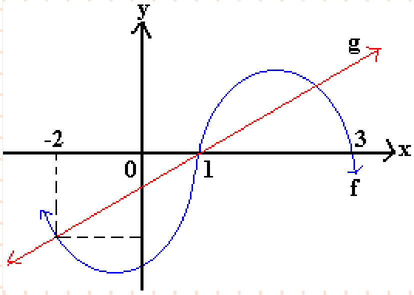
$$f(x-1)=\frac{\frac{f(x)}{1-f(x)}-1}{\frac{f(x)}{1-f(x)}}=\frac{\frac{f(x)-1+f(x)}{1-f(x)}}{\frac{f(x)}{1-f(x)}}$$

$$f(x-1)=\frac{2f(x)-1}{1-f(x)}\,.\,\frac{1-f(x)}{f(x)}$$

$f(x-1)=\frac{2f(x)-1}{f(x)}$ elde edilir.

MATEMATİĞİM

ÖRNEK(45)



Verilen grafikte g(x)=ax–1 ise f(–2)+f(3)=?

ÇÖZÜM:

x=-2 , x=1 noktalarına karşılık gelen y değerleri her iki fonksiyonda da aynıdır. Yani
f(-2) = g(-2) , f(1) = g(1) dır.

(1,0) noktası g fonksiyonunun üzerinde olduğundan denklemini sağlar.

(1,0) → g(1)=a–1=0 → a = 1 olur.
O halde g(x) = x-1 dir.

f(-2) = g(-2) = – 2 – 1 = – 3 ve

zaten f(3) = 0 dır.

sonuç : f(–2)+f(3)= -3+0 = -3 olur.

ÖRNEK(46)

$f(x^2+3x-2)=2x^2+6x-5$ ise f(x)=? (*dönüşüm uyg.)

ÇÖZÜM:

$f(x^2+3x-2)=2x^2+6x-5$

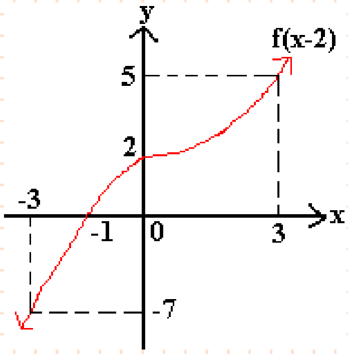
→ $f(\underbrace{x^2+3x-2}_{t})=2(\underbrace{x^2+3x-2}_{t})-1$

→ f(t) = 2t – 1 (t → x yazarsak)

→ f(x) = 2x – 1 bulunur.

NOT 6 : f(t)=t ise f(x)=x tir

ÖRNEK(47)



Yukarıdaki grafiğe göre; $\dfrac{f^{-1}(-7)-f^{-1}(5)}{f(-2)+f(-3)}=?$

ÇÖZÜM:

f(x – 2) = y olsun

x= –3 için y= –7 dır →f(–3–2)= –7

f(–5)= –7 ise $f^{-1}(-7)=-5$

x= 3 için y=5 tir f(3–2)=5 → f(1)=5

ise $f^{-1}(5)=1$ dir.

x=0 için y= 2 dir. f(0–2)=2 → f(–2)=2

x= –1 için y=0 dır. → f(–1–2)=0→f(–3)=0

Sonuç: $\dfrac{f^{-1}(-7)-f^{-1}(5)}{f(-2)+f(-3)}=\dfrac{-5-1}{2+0}=$ **–3** bulunur.

ÖRNEK(48)

$f(x)=|x-2|-|x|$ olduğuna göre

f(–1)+f(0)+f(1) toplamı kaçtır?

(ÖSS 2003)

ÇÖZÜM:

$f(x)=|x-2|-|x|$ veriliyor.

x = -1 için

$f(-1)=|-1-2|-|-1|=|-3|-|-1|=3-1=2$

x = 0 için

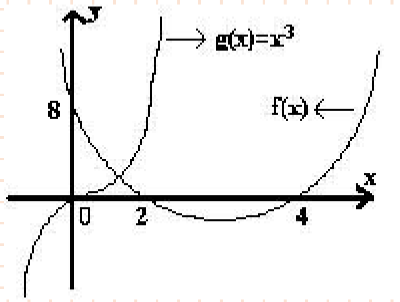
$f(0)=|0-2|-|0|=|-2|-|0|=2$

x = 1 için

$f(1)=|1-2|-|1|=|-1|-|1|=1-1=0$

o halde f(–1)+f(0)+f(1) = 2+2+0 = 4 olur.

ÖRNEK(49)



Yukardaki şekilde f(x) fonksiyonu ile $g(x)=x^3$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Buna göre; $(fog^{-1}of)(0)=?$

(ÖSS-2000)

ÇÖZÜM:

$(fog^{-1}of)(0)=f\left(g^{-1}\left(\underbrace{f(0)}_{8}\right)\right)$

$=f\left(\underbrace{g^{-1}(8)}_{2}\right)$

= f(2) = 0 bulunur.

$$\left(g(x)=x^3\rightarrow g^{-1}(\underbrace{x^3}_{\substack{8\\x=2\,\text{dir}}})=x\rightarrow g^{-1}(8)=2\right)$$

KONUMUZ BİTTİ. ŞİMDİ TESTLERE GEÇEBİLİRSİNİZ

DİLERSENİZ KONU ANLATIMINI BİR DE YOUTUBE KANALIMIZDAN VİDEO OLARAK DA İZLEYEBİLİRSİNİZ

Youtube kanalımız: CEBİR HOCAM

Başarılar diliyorum
İbrahim Halil BABAOĞLU
Matematik Öğretmeni