KÜMELER

TANIM: Kümelerin tam bir tanımı yoksa da matematikçiler kümeyi; iyi tanımlanmış nesneler topluluğu olarak kabul ederler.

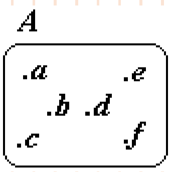
Örneğin ; 'Ülkemizin ırmakları' iyi tanımlanmıştır ve bir küme oluşturur. Çünkü sayıları da isimleri de bellidir. Ancak , 'sınıfımızın başarılı öğrencileri' iyi tanımlanmamıştır. Çünkü bir dersten başarılı olan bir öğrenci , başka bir dersten başarısız olabilir. Bu yüzden de küme oluşturmaz.

KÜMELERİN GÖSTERİMİ

1) Liste Yöntemi: Küme elemanlarını aralarına virgül koyarak küme parantezi arasında yazma yöntemidir.

❖ A={a,b,c,d,e,f}

2) Venn Şeması: Küme elemanlarını kapalı bir geometrik şekil içinde , soluna nokta koyarak belirtme yöntemidir.



3) Ortak Özellik Yöntemi: Kümenin elemanları değil ortak özellikleri belirtilir.

❖ A={x| $-2<x<5$, $x\in Z$}

ELEMAN SAYISI

Bir A kümesinin eleman sayısı s(A) ile gösterilir.

❖ A={a,b,c,d,e,f} $\Rightarrow$ s(A)=6

BOŞ KÜME

Elemanı olmayan kümeye boş küme denir.
ϕ veya {} ile gösterilir.

Uyarı: {ϕ} ifadesi boş kümeyi göstermez.

EVRENSEL KÜME

Üzerinde işlem yapılan tüm kümeleri kapsayan en geniş kümeye denir ve 'E' ile gösterilir.

EŞİT KÜME

Aynı elemanlardan oluşan kümelere eşit kümeler denir.

❖ A={1,2,3,4} ve B={x| $0<x<5$, $x\in N$} ise A=B dir.

DENK KÜME:

Eleman sayıları eşit olan kümelere denir. s(A)=s(B) ise $A\equiv B$ dir.

❖ A={a,b,c} ve B={1,2,3} , s(A)=s(B)=3 olduğundan $A\equiv B$ dir.

AYRIK KÜME :

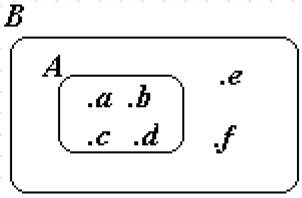
Ortak elemanı olmayan kümelere ayrık kümeler denir. A ve B ayrık kümeler ise $A\cap B=\phi$ dir.

❖ A={1,2,3,4} ve B={a,b,c,d,e} ise A ve B kümeleri ayrık kümelerdir. $A\cap B=\phi$

MATEMATİĞİM

ALT KÜME :

A ve B boş olmayan iki küme olsun. A kümesinin her elemanı , B kümesinin de elemanıysa A kümesi B kümesinin alt kümesidir denir ve A⊂B veya B⊃A ile gösterilir.



$A=\{a,b,c,d\}$
$B=\{a,b,c,d,e,f\}$
$A \subset B$ dir.

ÖZELLİKLER:

1) Her küme kendisinin alt kümesidir. A⊂A
2) Boş küme her kümenin alt kümesidir. $\phi \subset A$
3) A⊂B ve B⊂A ⇔ A=B
4) A⊂B ve B⊂C ⇔ A⊂C
5) s(A)=n ise A kümesinin alt küme sayısı 2^n dir.

ÖZALT KÜME

Bir kümenin kendisinden başka tüm alt kümelerine denir.
s(A)=n ise A'nın özalt küme sayısı $2^n - 1$ dir.

NOT 1 : n elemanlı bir kümenin r elemanlı alt küme sayısı C(n,r) ile hesaplanır.(n≥r)

$$C(n,r)=\binom{n}{r}=\frac{n!}{(n-r)!.r!}$$

- n!=1.2.3.......n
- 0!=1!=1

- $\binom{n}{0}=\binom{n}{n}=1$
- $\binom{n}{1}=\binom{n}{n-1}=n$
- $\binom{n}{p}=\binom{n}{r} \Leftrightarrow$ i) $n=p+r$ ii) $p=r$
- $\binom{n}{r}=\binom{n}{n-r}$
- $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+.....+\binom{n}{n}=2^n$

Pratik Yol-1: Kombinasyon hesabında aşağıdaki pratik hesaplamayı kullanın:

Örneğin $\binom{5}{2}$'i hesaplayalım. Pay'a 5'ten geriye 2 tane sayı, paydaya da 2'den 1'e kadar yazılır.

$$\binom{5}{2}=\frac{5.4}{2.1}=\frac{20}{2}=10$$

Bir örnek daha:

$\binom{6}{3}$ hesaplayalım: Pay'a 6'ten geriye 3 tane sayı, paydaya da 3'ten 1'e kadar yazılır.

$$\binom{6}{3}=\frac{6.5.4}{3.2.1}=20$$ bulunur.

ÖRNEK(1)

Bir kümenin 2 elemanlı alt kümelerinin sayısı 3 elemanlı alt kümelerinin sayısına eşittir. Bu kümenin eleman sayısı 1 arttırılırsa alt küme sayısı ve özalt küme sayısı kaç olur?

ÇÖZÜM:

Bu kümenin eleman sayısı n olsun

$$\binom{n}{2}=\binom{n}{3} \Leftrightarrow \begin{matrix} \text{i) } n=2+3=5 \\ \text{ii) } 2\neq 3 \end{matrix}$$

özelliğini hatırlarsak eleman sayımızın 5 olduğu görülür.
Kümenin eleman sayısını 1 arttırırsak 6 olur. Bu durumda

Alt küme sayısı : $2^6=64$

Öz alt küme sayısı : $2^6-1=64-1=63$ olur.

ÖRNEK(2)

5 elemanlı bir kümenin 3 elemanlı alt küme sayısı kaçtır?

ÇÖZÜM:

$$C(5,3)=\binom{5}{3}=\frac{5!}{(5-3)!.3!}=\frac{5!}{2!.3!}=\frac{120}{2.6}=10$$

veya pratik yol-1 den :

$$\binom{5}{3}=\frac{5.4.3}{3.2.1}=10 \text{ bulunur.}$$

Pratik yol-2:

Kümelerin bulunur-bulunmaz soruları için kolay uygulanabilir aşağıdaki yöntem çok işinize yarayacak;
n elemanlı bir kümenin r elemanlı alt kümeleri için

C(n,r)= $\binom{n}{r}$ şablonu yazılır ve ;

Bulunur derken hem n den hem r den, bulunmaz derken de sadece n den istenen kadar eksiltme yapılır.

ÖRNEK(3)

A={1,2,3,4,5,6} kümesinin 4 elemanlı alt kümelerinin kaç tanesinde;

a) 1 ve 3 birlikte bulunur?
b) 1 ve 3 bulunmaz?
c) 2 bulunur 3 bulunmaz?
d) 1 veya 3 bulunur?
e) 1 veya 3 bulunmaz

ÇÖZÜM:

Şablonumuz : $\begin{matrix} n\rightarrow \\ r\rightarrow \end{matrix}\binom{6}{4}$

a) 1 ve 3 birlikte bulunur?

→hem n'den, hem de r'den 2 sayı eksiltilir.

$$\begin{matrix} n\rightarrow \\ r\rightarrow \end{matrix}\binom{6}{4}=\binom{6-2}{4-2}=\binom{4}{2}=\frac{4.3}{2.1}=6$$

b) 1 ve 3 bulunmaz?

→ sadece n'den eksiltilir.

$$\begin{matrix} n\rightarrow \\ r\rightarrow \end{matrix}\binom{6}{4}=\binom{6-2}{4}=\binom{4}{4}=1$$

MATEMATİĞİM

c) 2 bulunur 3 bulunmaz?

→ önce 2 bulunur için hem n'den, hem r'den bir eksiltilir.

$$\begin{matrix} n \rightarrow \\ r \rightarrow \end{matrix}\binom{6}{4}=\binom{6-1}{4-1}=\binom{5}{3}$$

sonra da 3 bulunmaz için sadece r'den bir eksiltilir.

$$\begin{matrix} n \rightarrow \\ r \rightarrow \end{matrix}\binom{5}{3}=\binom{5-1}{3}=\binom{4}{3}=4$$ bulunur.

d) 1 veya 3 bulunur?

→1 ve 3 için tüm 4 elemanlı alt kümeler düşünüldüğünde aşağıdaki durumlar gözlenir;

(1 bulunur) , (3 bulunur),

(1 ve 3 bulunur) , (1 ve 3 bulunmaz)

bu dört durumdan istenmeyen (1 ve 3 bulunmaz) durumudur. O halde tüm 4 elemanlı alt kümelerden (1 ve 3 bulunmaz) durumunu çıkarsak amacımıza ulaşmış oluruz.

Sonuç : (tüm 4 elemanlılar)- (1 ve 3 bulunmaz)

$$\binom{6}{4}-\binom{6-2}{4}=\binom{6}{4}-\binom{4}{4}=15-1=14$$

e) 1 veya 3 bulunmaz

→d şıkkındaki mantığın bir benzerini bu şık için de düşünürsek;

(tüm 4 elemanlılar)- (1 ve 3 bulunur)

$$\binom{6}{4}-\binom{6-2}{4-2}=\binom{6}{4}-\binom{4}{2}=15-6=9$$

ÖRNEK(4)

5 elemanlı bir kümenin en çok 2 elemanlı alt küme sayısı kaçtır?

ÇÖZÜM:

En çok 2 elemanlı demek 2,1,0 elemanlı alt kümeler demek,

$$\binom{5}{0}+\binom{5}{1}+\binom{5}{2}=1+5+10=16$$ olur.

ÖRNEK(5)

6 elemanlı bir kümenin en az 4 elemanlı alt küme sayısı kaçtır?

ÇÖZÜM:

En az 4 elemanlı demek 4,5,6 elemanlı alt kümeler demek,

$$\binom{6}{4}+\binom{6}{5}+\binom{6}{6}=15+6+1=22$$ bulunur.

ÖRNEK(6)

6 elemanlı bir kümenin 4 ten az elemanlı alt küme sayısı kaçtır?

ÇÖZÜM:

4'ten az demek 3,2,1,0 elemanlı alt kümeler demek

$$\binom{6}{3}+\binom{6}{2}+\binom{6}{1}+\binom{6}{0}=20+15+6+1=42$$

bulunur.

MATEMATİĞİM

Pratik yol-3:

Kümelerin tüm alt kümeleri için bulunur-bulunmaz sorularına da bir pratiğimiz var.
n elemanlı bir kümenin tüm alt kümeleri için

2^n şablonu yazılır ve ;

Bulunur derken de, bulunmaz derken de sadece n den istenen kadar eksiltme yapılır.

ÖRNEK(7)

A={a,b,c,d,e} kümesinin alt kümelerinin kaç tanesinde;

a) a bulunur?
b) a ve b bulunmaz?
c) a veya b bulunmaz?
d) a bulunur, b bulunmaz?

ÇÖZÜM:

Şablonumuz : 2^5 olur.

a) a bulunur?

$\rightarrow$ bir eleman eksiltilir. $2^{5-1}=2^4=16$

b) a ve b bulunmaz?

$\rightarrow$ iki eleman eksiltilir. $2^{5-2}=2^3=8$

c) a veya b bulunmaz?

$\rightarrow$ (tüm alt kümeler)-(a ve b bulunur.)
$2^5-2^{5-1}=2^5-2^4=32-16=16$

d) a bulunur, b bulunmaz?

$\rightarrow$a bulunur: $2^{5-1}=2^4$
b bulunmaz : $2^{4-1}=2^3=8$ olur.

SIRA SİZDE:

ÖRNEK(8)

A={a,b,c,d,e,f} kümesinin alt kümelerinin kaç tanesinde

a) a bulunur, b bulunmaz ? 16

b) a ve b bulunur? 16

c) a ve b bulunmaz? 16

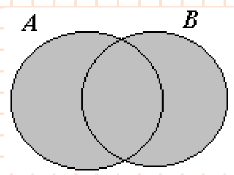
d) a veya b bulunur? 48

e) a veya b bulunmaz? 48

f) a ve b bulunur, c bulunmaz? 8

KÜMELERDE İŞLEMLER

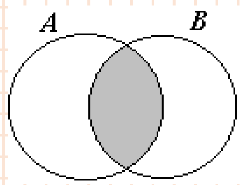
BİRLEŞİM:



A ve B kümelerinin elemanlarının tümünün oluşturduğu kümeye denir ve $A \cup B$ ile gösterilir.

$A \cup B=\{x \mid x \in A \text{ veya } x \in B\}$

KÜMELERDE KESİŞİM:



A ve B kümelerinin ortak elemanlarından oluşan kümeye denir ve $A \cap B$ ile gösterilir.

$A \cap B=\{x \mid x \in A \text{ ve } x \in B\}$

MATEMATİĞİM

ÖRNEK(9)

$A=\{a,b,c,d\}$ ve $B=\{c,d,e,f\}$ ise

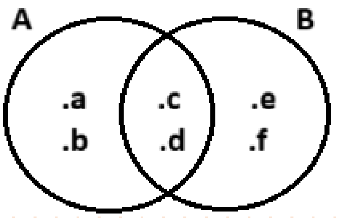
a) $A\cap B=?$ $\rightarrow$ $A\cap B=\{c,d\}$

b) $A\cup B=?$ $\rightarrow$ $A\cup B=\{a,b,c,d,e,f\}$

ÇÖZÜM:

$A\cap B$ ortak eleman demektir. Ortak elemanlar c ve d dir: $A\cap B=\{c,d\}$

$A\cup B$ ortak olanlarla olmayanların hepsi demektir. $A\cup B=\{a,b,c,d,e,f\}$



ÖRNEK(10)

$A=\{x \mid 2<x<8$ ve $x\in Z\}$ ve $B=\{x \mid -3<x<5$ ve $x\in Z\}$ ise ;

a) $A\cap B=?$ $\rightarrow$ $A\cap B=\{x \mid 2<x<5$ ve $x\in Z\}$

b) $A\cup B=?$ $\rightarrow$ $A\cup B=\{x \mid -3<x<8\}$ ve $\in Z\}$

c) $A\setminus B=?$ $\rightarrow$ $A\setminus B=\{x \mid 5\leq x<8\}$ ve $\in Z\}$

ÇÖZÜM:

Küme elemanları tamsayı olduğundan tek tek yazılabilir.

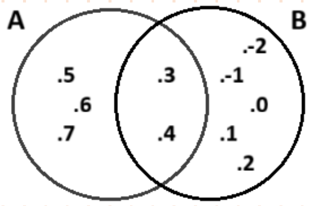
$A=\{3,4,5,6,7\}$ ve $B=\{-2,-1,0,1,2,3,4\}$

Şimdi istenenleri bulabiliriz.

a) $A\cap B = \{3,4\}$

b) $A\cup B = \{-2,-1,0,1,2,3,4,5,6,7\}$

c) $A\setminus B = \{5,6,7\}$



NOT 2 : Kesişimde; alt sınırın en büyüğü ve üst sınırın en küçüğü alınır.
Birleşimde; alt sınırın en küçüğü ve üst sınırın en büyüğü alınır.

ÖRNEK(11)

$A=\{x \mid 2<x<8$ ve $x\in R\}$ ve $B=\{x \mid -3<x<5$ ve $x\in R\}$ ise ;

a) $A\cap B=?$

b) $A\cup B=?$

c) $A\setminus B=?$

ÇÖZÜM:

Bu sefer elemanlar reel sayı olduğundan tek tek yazılamazlar. Notumuzu dikkate alırsak;

a) $A\cap B=\{x \mid 2<x<5$ ve $x\in R\}$

b) $A\cup B=\{x \mid -3<x<8\}$ ve $x\in R\}$

c) $A\setminus B=\{x \mid 5\leq x<8\}$ ve $x\in R\}$

KESİŞİM VE BİRLEŞİM İLE İLGİLİ ÖZELLİKLER:

1) $\left.\begin{array}{l} A\cup B=B\cup A \\ A\cap B=B\cap A \end{array}\right\}$ Değişme özelliği

2) $\left.\begin{array}{l} (A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C) \\ (A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C) \end{array}\right\}$ Birleşme öz.

3) $\left.\begin{array}{l} A\cup A=A \\ A\cap A=A \end{array}\right\}$ Tek Kuvvet öz.

4) $\left.\begin{array}{l} A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C) \\ A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C) \end{array}\right\}$ Dağılma öz.

5) $A\cup\phi=A$, $A\cap\phi=\phi$, $A\cup E=E$, $A\cap E=A$,

6) $s(A\cup B) = s(A) + s(B) - s(A\cap B)$

$s(A\cup B) = s(A\setminus B) + s(B\setminus A) + s(A\cap B)$

7) $s(A\cup B\cup C) = s(A)+s(B)+s(C)-s(A\cap B)-s(A\cap C) - s(B\cap C) +s(A\cap B\cap C)$

NOT: Ave B ayrık ise $s(A\cup B) = s(A) + s(B)$

ÖRNEK(12)

s(A\B)=10 , s(B\A)=8 ve A∩B nin özalt küme sayısı 63 ise s(A∪B)=?

ÇÖZÜM:

s(A∩B)=n olsun
A∩B 'nin özalt küme sayısı 63 ise

$$2^n - 1 = 63$$

$$2^n = 64 = 2^6$$ → n =6 dır.

s(A∪B) = s(A\B) + s(B\A) + s(A∩B)
= 10 + 8 + 6
= 24 elde edilir.

ÖRNEK(13)

A={x| 3≤x<12} ve B={x|–1<x≤8} ise (A∩B) kümesi Aşağıdakilerden hangisidir?

A) x > 1 veya x ≥ 8 B) 1< x <1
C) 1< x ≤ 8 D) 3 ≤ x ≤ 12 E) 3 ≤ x ≤ 8

ÇÖZÜM:

x ile ilgili herhangi bir bilgi verilmediğinden reel sayı kabul ederiz. Yine notumuzu hatırlayacak olursak; (alt sınırın en büyüğü , üst sınırın en küçüğü)
(A∩B) = { 3 ≤ x ≤ 8 } olur.

Yani cevap E şıkkıdır.

MATEMATİĞİM

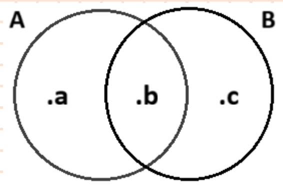
ÖRNEK(14)

[A∩(A∩B/)]∪(A∩B)=?

A) A∩B B) A C) E D) B E) A∪B

ÇÖZÜM:

1.yol:



şekildeki gibi her boşluğa bir eleman yerleştirdikten sonra kümeleri bulalım

$$[A\cap(A\cap B^{/})]\cup(A\cap B)$$

$$=[\underbrace{(A\cap A)}_{A}\cap B^{/})]\cup(A\cap B)$$

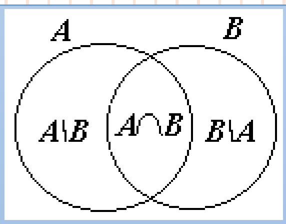
$$=\underbrace{[\underbrace{A\cap B^{/}}_{a}]\cup(\underbrace{A\cap B}_{b})}_{\underbrace{\{a,b\}}_{A}}$$

= A bulunur.

2.yol:

[A∩(A∩B/)]∪(A∩B)= [(A∩A)∩B/)]∪(A∩B)
= [A∩ B/]∪(A∩B)
= [A ∩ (B/∪B)]
= [A ∩ E]
= A

İKİ KÜMENİN FARKI



A ve B aynı evrensel kümenin iki alt kümesi olsun. A da olup B de olmayan elemanların oluşturduğu kümeye A fark B denir ve (A\B) veya (A–B) ile gösterilir.

$A=\{x \mid x \in A \text{ ve } x \notin B\}$

FARK İŞLEMİNİN ÖZELLİKLERİ

1) $E \setminus A = E \cap A' = A'$, $A \setminus E = \phi$

2) $A \setminus B = A \cap B'$

3) $A \subset B$ ise $A \setminus B = \phi$

4) $(A \setminus B)' = A' \cup B$

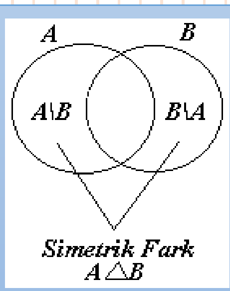
5) $(A \setminus B) \cup B = (A \cup B)$

6) $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$

7) $(A \setminus B) = A \setminus (A \cap B)$

8) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$
$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$

SİMETRİK FARK



$(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ kümesine simetrik fark denir ve $A \Delta B$ ile gösterilir.

KUVVET KÜMESİ

Bir kümenin tüm alt kümelerinin kümesine kuvvet kümesi denir.

❖ A={a,b,c} için
A nın kuvvet kümesi ={{},{a},{b},{c},{a,b},
{a,c},{b,c}, {a,b,c}}

ÖRNEK(16)

A={1,2,3,4,5} ve B={4,5,6,7,8} olsun buna göre;

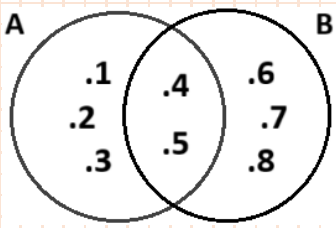
a) A\B=? **b)** B\A=? **c)** A∆B=?

ÇÖZÜM:

A\B={1,2,3}

B\A={6,7,8}

A∆B={1,2,3,6,7,8}



TÜMLEME

$A \subset E$ olmak üzere E kümesinin A kümesinde olmayan elemanlarının oluşturduğu kümeye A kümesinin tümleyeni denir ve A' veya $\overline{A}$ ile gösterilir.

$A' = \{x \mid x \in E \text{ ve } x \notin A\}$ dır.

TÜMLEME İŞLEMİNİN ÖZELLİKLERİ

1) $E' = \phi$

2) $\phi' = E$

3) $(A')' = A$

4) $A \subset B \Leftrightarrow B' \subset A'$

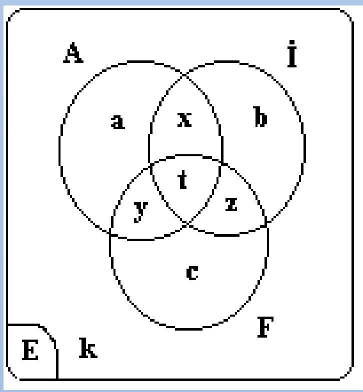
5) $s(A) + s(A') = s(E)$

6) $A \cap A' = \phi$, $A \cup A' = E$

7) $\left.\begin{array}{l}(A \cup B)' = A' \cap B' \\ (A \cap B)' = A' \cup B'\end{array}\right\}$ De Morgan Kuralı

8) $A' \cap E = A'$, $A' \cup E = E$

NOT : Almanca , İngilizce ve Fransızca bilen bir topluluk için



Üçünü bilen : t

- Hiç birini bilmeyen : k
- En az birini bilen : a,b,c,x,y,z,t
- En az ikisini bilen : x,y,z,t
- En fazla birini bilen : a,b,c,k
- En fazla ikisini bilen: a,b,c,x,y,z,k
- En fazla üçünü bilen : a,b,c,x,y,z,t,k
- En az birini bilmeyen : a,b,c,x,y,z,k
- En az ikisini bilmeyen: a,b,c,k
- Sadece bir dil bilen : a,b,c
- Sadece iki dil bilen : x,y,z
- Alm. bilip İng. bilmeyen : a,y
- Alm. veya İng. Bilip Fransızca bilmeyen: a,x,b
- Alm. bilip İng. veya Frans. Bilmeyen : a

GENEL ÖRNEKLER

ÖRNEK(17)

A={a,b,{a},d,{a,b,c},e} kümesi veriliyor. Aşağıdakilerden hangisi A'nın bir elemanı değildir?

A) a B) b C) c D) d E) e

ÇÖZÜM:

a,b,d ve e elemandır, c değildir. Cevap C şıkkı

ÖRNEK(18)

A={a,b,{a},d,{a,b,c},e} kümesi veriliyor. Aşağıdakilerden hangisi A'nın hem elemanı hem de altkümesidir?

A) {a} B){b} C){a,b,c} D){a,b} E) {a,e}

ÇÖZÜM:

a tek başına bir eleman iken {a} bir alt kümedir.
{a} ise yine tek başına bir elemandır. O yüzden cevap A şıkkıdır.

ÖRNEK(19)

A={a,b,{a},d,{a,b,c},e} kümesi veriliyor. Bu kümenin eleman sayısı kaçtır?

ÇÖZÜM:

Küme parantezi içinde virgülle birbirinden ayrılan her terim bir eleman olduğundan s(A)=6 dır.

ÖRNEK(20)

E evrensel kümesinde tanımlı A ve B kümeleri için;

$s(A)+s(B')=17$
$s(B)+s(A')=15$ ise $s(E)=?$

ÇÖZÜM:

$$\begin{array}{r} s(A)+s(B')=17 \\ +\ \underline{s(B)+s(A')=15} \end{array}$$

$$\underbrace{s(A)+s(A')}_{s(E)}+\underbrace{s(B')+s(B)}_{s(E)}=17+15$$

$2.s(E) = 32$
$s(E) = 16$

MATEMATİĞİM

ÖRNEK(21)

E evrensel kümesinde tanımlı A ve B kümeleri için;

$s(A) + s(B) + s(A')=24$ ve $s(E)=18$ ise $s(B')=?$

ÇÖZÜM:

$$\underbrace{s(A)+s(A')}_{s(E)=18}+s(B)=24 \rightarrow s(B)=6$$

$s(B) + s(B') = s(E) \rightarrow 6 + s(B') = 18$
$\rightarrow s(B') = 12$ bulunur.

ÖRNEK(22)

A={1,2,3,4,5,6,7} kümesinin alt kümelerinin kaç tanesinde en az bir tane tek sayı bulunur?

ÇÖZÜM:

En az bir tane tek sayı olsun istiyorsak, içinde hiç tek sayı olmayan {yani çift elemanlılar} alt kümeleri tüm alt kümelerden çıkarırız. Böylece kalan alt kümelerde en az bir tek sayı bulunmuş olur.
s(A) = 7 ve Ç={2,4,6} → s(Ç) = 3 olmak üzere

{tüm alt kümeler} – {sadece çift elemanlılar}

$2^7 - 2^3 = 128 - 8 = 120$ tanesinde en az bir tek sayı vardır.

ÖRNEK(23)

Boş olmayan A ve B kümelerinde s(A)=5x–1 , s(B)=3x–1 dir. A ile B nin alt kümelerinin sayıları oranı 64 ise alt kümelerinin sayıları çarpımı kaçtır?

ÇÖZÜM:

A kümesinin alt küme sayısı : 2^{5x-1}

B kümesinin alt küme sayısı : 2^{3x-1}

A ile B nin alt kümelerinin sayıları oranı:

$$\frac{2^{5x-1}}{2^{3x-1}} = 64 \Rightarrow 2^{5x-1-3x+1} = 2^6$$

2x = 6

x = 3

A kümesinin alt küme sayısı: $2^{5x-1} = 2^{5.3-1} = 2^{14}$

B kümesinin alt küme sayısı : $2^{3x-1} = 2^{3.3-1} = 2^8$

alt kümelerinin sayıları çarpımı:

$2^{14}.2^8 = 2^{14+8} = 2^{22}$ bulunur.

MATEMATİĞİM

ÖRNEK(24)

A∪B={x : |x–2| ≤ 3 ve x∈Z} , A∩B={1,2,3} ve A\B={–1,5} ise B kümesini bulun

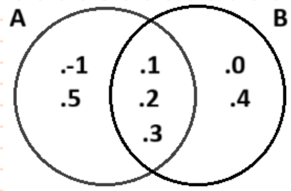
ÇÖZÜM:

A∪B → |x–2| ≤ 3 → - 3 ≤ x-2 ≤ 3

→ -1 ≤ x ≤ 5

→ {-1,0,1,2,3,4,5}

şekil üzerinde gösterecek olursak;



o halde B ={0,1,2,3,4} olur

ÖRNEK(25)

A={x | 40 ≤ x ≤ 169 , x∈Z} veriliyor A'nın kaç elemanı 4 ve 7 ile bölünür?

ÇÖZÜM:

Bir sayının 4 ve 7 ile bölünmesi demek 4 ve 7 nin okek'i ile bölünmesi demektir.

Okek(4,7)=28 olduğundan aradığımız sayılar 28 ile bölünmeli, diğer bir değişle 28'in katı olmalı;

Sayılarımız 28.kat şeklinde ise kat'a değer verip 40 ≤ x ≤ 169 aralığına giren sayıları küme içine alırız

Kat = 2,3,4,5,6 için bulunan 56,84,112,140,168 sayıları aradığımız elemanlardır. O halde

{56,84,112,140,168} → 5 tane eleman

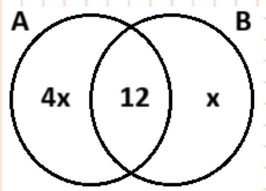
hem 4 hem de 7'ye bölünür.

ÖRNEK(26)

Bir toplulukta Arapça ve Farsça bilenlerin sayısı 12 , Arapça veya farsça bilenlerin sayısı 32 dir. Sadece Arapça bilenler, Farsça bilip Arapça bilmeyenlerin 4 katı ise Arapça bilen kaç kişidir?

ÇÖZÜM:

Böyle soruları şekil üzerine yerleştirip çözmek daha kolaydır.



4x+12+x = 32 → 5x = 20 → x = 4
s(A) = 4x+12 = 4.4+12 = 28 bulunur.

ÖRNEK(27)

Bir kümenin en çok 2 elemanlı alt kümelerinin sayısı 29 ise bu kümenin 3 elemanlı alt kümeleri kaç tanedir?

ÇÖZÜM:

Bu kümenin eleman sayısı n olsun
En çok 2 elemanlıların sayısı;

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}=1+n+\frac{n(n-1)}{2.1}=29$$

$$\Rightarrow \frac{n^2-n+2n}{2}=29-1$$

$$\Rightarrow \frac{n^2+n}{2}=28$$

$$\Rightarrow n^2+n=56$$

$$\Rightarrow n^2+n-56=0$$

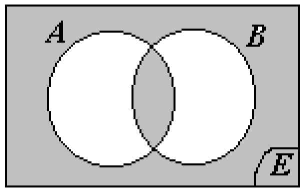
$$\Rightarrow (n+8)(n-7)=0$$

n = -8 ve n = 7 bulunur

bir kümenin eleman sayısı negatif olamayacağından bu kümenin eleman sayısı 7 olur. Bu kümenin 3 elemanlı alt küme sayısı ise

$$\binom{7}{3}=\frac{7.6.5}{3.2.1}=35 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK(28)



Şekildeki taralı bölge A.H ile ifade edilir?

A) (A∪B)∪B

B) E\(A∪B)

C) (A∩B)∪E

D) (A∩B)∪(A/∩B/)

E) (A/∪B/)∩(A∩B)

ÇÖZÜM:

Taralı kısım (A∩B) ile (A∪B)/ 'nin birleşimidir

(A∩B)∪(A∪B)/ → (A∩B)∪(A/∩B/)

bu durumda doğru cevap D şıkkıdır.

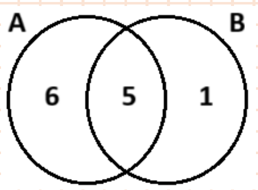
MATEMATİĞİM

ÖRNEK(29)

A ve B kümeleri için $A\not\subset B$, $B\not\subset A$, $s(A\cup B)=12$, $s(A\cap B)=5$ olduğuna göre A kümesinde en çok kaç eleman olabilir?

ÇÖZÜM:

Şekil üzerinde düşünelim.



Bu kısmı en az seçmeliyiz ki A büyüsün. Bu kısım 0 elemanlı seçilirse B, A'nın alt kümesi olur ki bu duruma soruda izin verilmiyor. ($B\not\subset A$)

O halde s(A) = 11 olur.

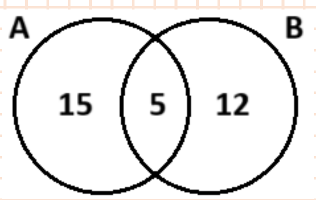
$s(A\setminus B)=15$, $s(B\setminus A)=12$ ve $A\cap B$'nin alt küme sayısı 32 ise $s(A\cup B)=?$

ÇÖZÜM:

$A\cap B$ kümesinin eleman sayısı n olsun

$A\cap B$'nin alt küme sayısı $32=2^n$ → =5 olur.

Şimdi bilgileri şekil üzerine taşıyalım.



bu durumda $s(A\cup B)$= 15+5+12 = 32 olur.

ÖRNEK(30)

A={1,2,3,4,5} kümesinin alt kümelerinin kaç tanesinde 2 veya 4 bulunur?

ÇÖZÜM:

Tüm alt kümeleri 2 ve 4 için düşündüğümüzde karşımıza aşağıdaki tablo çıkar;

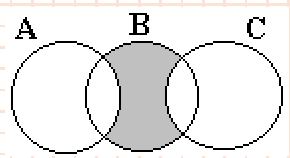
- 2 vardır
- 4 vardır
- 2ve 4 vardır
- 2 ve 4 yoktur

bunların dışında bir durum söz konusu olamaz. İlk üç durum zaten 2 veya 4 bulunurun açılımıdır. İstenmeyen durum 2 veya 4 bulunmazdır. Biz de 2 veya 4 bulunmazı tüm durumlardan çıkarır ve isteneni buluruz.

{2 veya 4 bulunur} = {Tüm alt kümeler} – {2 ve 4 bulunmaz}

= $2^5-2^3=32-8=24$ olur.

ÖRNEK(31)



Taralı Bölge aşağıdakilerden hangisi ile gösterilir?

A) $B\setminus(A\cup B)$ B) $C\setminus(A\cup B)$ C) $B\setminus(A\cup C)$
D) $C\setminus(A\cup C)$ E) $A\setminus(A\cup C)$

ÇÖZÜM:

Şekilde A ve C kümelerinin boş, sadece B nin ortak olmayan kısmının dolu olduğu görülüyor. Yani bir nevi B den A ve C çıkarılmış, yani;

$B\setminus(A\cup C)$ olur.

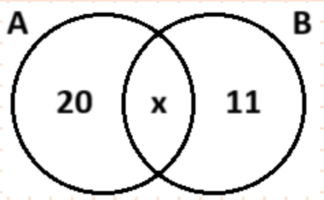
Doğru cevap C şıkkıdır.

ÖRNEK(32)

s(A\B)=20 , s(B\A)=11 ve s(A∪B)=33 ise s(A∩B)=?

ÇÖZÜM:

Bu sorularda en güzeli şekil üzerinde çözmektir. Verileri şekil üzerine yerleştirirsek ;



s(A∪B)=33 → 20 + x + 11 = 33
→ x + 31 = 33
→ x = 2 bulunur.

ÖRNEK(33)

Bir kümenin 5 elemanlı alt kümelerinin sayısı, 3 elemanlı alt kümelerinin sayısına eşittir. Bu kümenin eleman sayısı 2 arttırılırsa 2 elemanlı alt küme sayısı kaç olur?

ÇÖZÜM:

Kümemizin eleman sayısı n olsun

$$\binom{n}{5}=\binom{n}{3} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} \text{i) } n=5+3=8 \\ \text{ii) } 5\neq 3 \end{array}$$

özelliğini hatırlarsak eleman sayımızın 8 olduğu görülür.Bu kümenin eleman sayısı 2 arttırılırsa 8+2=10 olur.

10 elemanlı bir kümenin 2 elemanlı alt küme sayısı

$\binom{10}{2}=\frac{10.9}{2.1}=45$ bulunur.

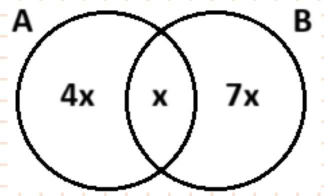
MATEMATİĞİM

ÖRNEK(34)

s(A\B)=4.s(A∩B) , 8.s(A)=5.s(B) ve s(A∪B)=36 ise (A∩B)'nin alt küme sayısı kaçtır?

ÇÖZÜM:

Verileri şekil üzerine yerleştirirsek;



8x-x=7x

8.s(A)=5.s(B) →8.(5x) = 5.s(B)
→40x = 5.s(B)
→ s(B) = 8x

s(A∪B)=36 → 4x+x+7x = 36
→12x = 36
→ x = 3

s(A∩B)=3 ise alt küme sayısı $2^3=8$ olur.

ÖRNEK(35)

A∪B={1,2,3,4,5,6} ve
A∪C ={3,5,7,8} ise A∪(B∩C) kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM:

A∪(B∩C) ifadesine dağılma özelliğini uygularsak ;

A∪(B∩C) = (A∪B) ∩ (A∪C)
= {1,2,3,4,5,6} ∩ {3,5,7,8}
= {3,5} bulunur.

ÖRNEK(36)

Bir sınıfın 30 kişilik öğrencisinin 18'i erkek, 12'si bayandır. Öğrencilerin 10 kişisi mavi gözlüdür. Mavi gözlü olmayan erkek sayısı mavi gözlü bayan sayısının 3 katıdır. Mavi gözlü olmayan erkek sayısı kaçtır?

ÇÖZÜM:

Bu sorularda da tablo çizmek en iyisidir.
Verileri tabloya yerleştirirsek;

	Mavi gözlü	Mavi gözlü olmayan	Toplam
Erkek		3x	18
Bayan	x	**12-x**	12
Toplam	10	**20**	30

3x+12-x = 20 → 2x = 8 →x = 4
Mavi gözlü olmayan erkek sayısı 3x =3.4 =12 dir.

ÖRNEK(37)

A={a,b,c,d,e,f} kümesinin alt kümelerinden kaç tanesinde b ve c birlikte bulunur?

ÇÖZÜM:

Pratik yol-3'ü hatırlayalım;

Şablonumuz : 2^6

Cevabımız : $2^{6-2} = 2^4 = 16$ olur.

ÖRNEK(38)

A={a,b,c,d,e,f} kümesinin 4 elemanlı alt kümelerinden kaç tanesinde a ve b bulunup e ve f bulunmaz?

ÇÖZÜM:

Pratik yo-2'yi hatırlayalım

Şablonumuz : $\binom{6}{4}$

a ve b bulunur : $\binom{6-2}{4-2} = \binom{4}{2}$

e ve f bulunmaz : $\binom{4-2}{2} = \binom{2}{2} = 1$ olur.

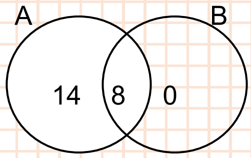
MATEMATİĞİM

ÖRNEK(39)

s(A)=22 , s(B)=8 , (A∩B)≠ϕ dir. (A∪B) kümesinin eleman sayısı en az a, en çok b ise a+b=?

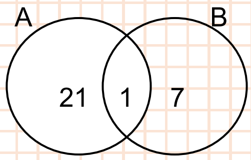
ÇÖZÜM:

(A∪B) 'nin en az olması için (A∩B) en çok olmalıdır.



Bu durumda a = s(A∪B)=14+8+0 =22 olur.

(A∪B) 'nin en çok olması için (A∩B) en az olmalıdır.((A∩B)≠ϕ)



Bu durumda b = s(A∪B)=21+1+7 = 29 olur.

Sonuç : a + b = 22+29 = 51 bulunur

ÖRNEK(40)

{1,2}⊂A⊂{1,2,3,4,5} ise kaç tane A kümesi yazılabilir?

ÇÖZÜM:

A kümesi en çok {1,2,3,4,5} elemanlarını, en az {1,2} elemanlarını içereceğinden {1,2,3,4,5} kümesinin içinde {1,2} elemanları bulunana alt kümelerini buluruz. (pratik yol-3)

cevap : $2^5 \Rightarrow 2^{5-2} = 2^3 = 8$ olur.

2. yol:

{1,2}⊂A⊂{1,2,3,4,5} tipindeki sorularda farklı bir şart verilmemişse soldaki küme elemanlarını sağdan silip kalanların alt kümesini bulun

soldakini sağdan silersek {3,4,5} kalır

alt kümeleri de $2^3 = 8$ olur.

ÖRNEK(41)

Kesişimleri boş küme olmayan M ve N kümeleri için ,

s(N)=4s(M)

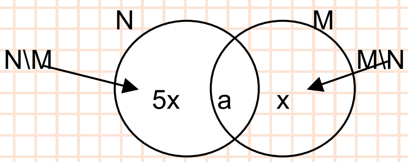
s(N\M)=5s(M\N)

olduğuna göre , N kümesi en az kaç elemanlıdır?

(ÖSS 2003)

ÇÖZÜM:

Bilgileri şekil üzerine yerleştirirsek;



s(N)=4s(M) → 5x +a = 4.(a+x)

→ 5x+a = 4a + 4x

→ x = 3a

s(N) = 5x+a = 5.3a+a = 16a olur.

M∩N boştan farklı olduğundan a'ya minimum 1 verirsek

s(N) = 16a =16.1 = 16 bulunur.

ÖRNEK(42)

A={1,2,3,4,5,6,7,8} kümesinin dört elemanlı alt kümelerinin kaç tanesinde 2 bulunur, ama 4 bulunmaz?

(ÖSS 2002)

ÇÖZÜM:

Pratik yol-2'yi hatırlayalım

Şablonumuz: $\binom{8}{4}$

2 bulunur → $\binom{8-1}{4-1} = \binom{7}{3}$

4 bulunmaz→ $\binom{7-1}{3} = \binom{6}{3} = \frac{6.5.4}{3.2.1} = 20$ olur.

MATEMATİĞİM

ÖRNEK(43)

Pozitif tamsayılardan oluşan

A={x | x < 100 , x = 2n, n∈Z⁺}

B={x | x < 151 , x = 3n, n∈Z⁺} kümeleri veriliyor.

buna göre A∪B kümesinin eleman sayısı kaçtır?

(ÖSS-2001)

ÇÖZÜM:

s(A∪B) = s(A) + s(B) – s(A∩B) formülünü hatırlayalım;

Önce A ve B kümelerinin elemanlarını bulalım

A = {2,4,6,…..98} (2'nin katı sayılar)

B = {3,6,9,…..150} (3'ün katı sayılar)

Şimdi de (A∩B) kümesini bulalım.

(A∩B) kümesi ortak elemanlardan oluştuğu için hem 2'nin hem de 3'ün katı olmalı

(A kümesinin 100'den sonra elemanı olmadığından x < 100 için 6'nın katlarına bakarız)

(A∩B)= {6,12,18,…..96}

son olarak eleman sayılarını ardışık sayılardan öğrendiğimiz terim sayısı formülünü kullanarak bulalım ;

$$s(A)=\frac{98-2}{2}+1=49$$

$$s(B)=\frac{150-3}{3}+1=50$$

$$s(A\cap B)=\frac{96-6}{6}+1=16$$

$s(A\cup B) = s(A) + s(B) - s(A\cap B)$
$= 49 + 50 - 16 = 83$ bulunur.

2.yol:
Şimdiki çözüm daha çok hoşunuza gidecek.(daha kısa ya ☺)

$$\begin{array}{r|l} 99 & 2 \\ \underline{-\ 98} & 49 \\ 1 & \end{array} \rightarrow s(A) = 49$$

$$\begin{array}{r|l} 150 & 3 \\ \underline{-150} & 50 \\ 0 & \end{array} \rightarrow s(B) = 50$$

$$\begin{array}{r|l} 99 & 6 \\ \underline{-\ 96} & 16 \\ 3 & \end{array} \rightarrow s(A\cap B) = 16$$

sayıları 99 ve 150 almamızın sebebi sınırların < (yani dahil değil) olmasıdır.

$s(A\cup B) = s(A) + s(B) - s(A\cap B)$
$= 49 + 50 - 16$
$= 83$ bulunur.

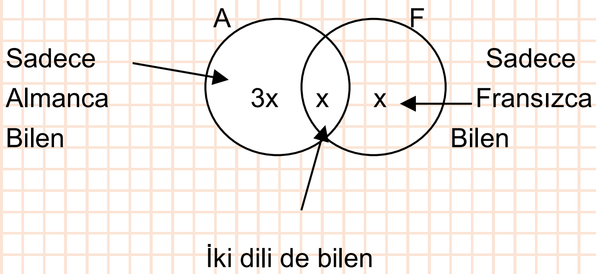
ÖRNEK(44)

Bir sınıfta Almanca veya Fransızca dillerinden en az birini bilen 40 öğrenci vardır. Almanca bilenlerin sayısı Fransızca bilenlerin sayısının 2 katı, her iki dili bilenlerin sayısının ise 4 katıdır.

Buna göre , sınıfta Almanca bilenlerin sayısı kaçtır? **(ÖSS-2000)**

ÇÖZÜM:

(En az birini bilen dediği için dışarıda eleman olmaz)
Bilgilerden hareketle aşağıdaki şekli oluşturduk



En az birini bilenler 40 kişi olduğundan;

$$3x + x + x = 40$$
$$5x = 40$$
$$x = 8$$

Almanca bilenler : $4x = 4.8 = 32$ kişidir.

KONUMUZ BİTTİ. ŞİMDİ TESTLERE GEÇEBİLİRSİNİZ

DİLERSENİZ KONU ANLATIMINI BİR DE YOUTUBE KANALIMIZDAN VİDEO OLARAK DA İZLEYEBİLİRSİNİZ

Youtube kanalımız: CEBİR HOCAM

Başarılar diliyorum
İbrahim Halil BABAOĞLU
Matematik Öğretmeni