

MANTIK

Önerme: Doğru veya yanlış kesin bir yargı bildiren ifadeler **önerme** denir. Önermeler genellikle p,q,r,s gibi küçük harflerle belirtilirler. Bir önermenin doğru veya yanlışlığına bu önermenin **doğruluk değeri** denir.

DOĞRULUK DEĞERLERİ TABLOSU

Bir önerme için

Önerme	Doğruluk Değeri	
p	rakamla	yazıyla
Senin gözün kahverengi	1	Doğru
	0	yanlış

İki önerme için

p	q
1	1
1	0
0	1
0	0

Üç önerme için

p	q	r
1	1	1
1	1	0
1	0	1
1	0	0
0	1	1
0	1	0
0	0	1
0	0	0

Üçten fazla önermenin doğruluk tablosu için girilecek değer sayısı 2^n ile hesaplanır örneğin 4 önerme için $2^4 = 16$ ve 5 önerme için $2^5 = 32$ değer alınır.

Tablo hazırlarken örneğin 3 önerme için $2^3 = 8$ değer vardır. İlk önerme için bunun yarısı 1, yarısı 0 olarak girilir.ikinci önerme için yarısının yarısı 1, kalanlar için aynı sayıda 0 ve 1 ile devam edilir(tabloları inceleyin)

Denk Önerme: Doğruluk değerleri aynı olan önermelere denk(eş değer) önermeler denir. İki önermenin denkliği $p \equiv q$ şeklinde gösterilir.

ÖRNEK(1)

Aşağıdaki önermelerin doğruluk değerlerini bularak denk olanlarını belirtiniz

p: '15+25=40'

q: 'Türkiye'nin hem Asya'da hem de Avrupa'da toprakları vardır'

r: '0 bir tamsayı değildir'

s: ' $-2^2 = 4$ '

t: 'İnsanoğlunun atası maymunlardır'

$p \equiv q \equiv 1$ ve $r \equiv s \equiv t \equiv 0$

BİR ÖNERMENİN OLUMSUZU

Bir önermenin hükmünün olumsuz yapılması ile elde edilen yeni önermeye önermenin olumsuzu(değili) denir. Bir p önermesinin olumsuzu p' ile gösterir.

P: 'Deniz suyu tuzludur'

p' : 'Deniz suyu tuzlu değildir'

Bir önerme ve değili için doğruluk tablosu

p	p'
1	0
0	1

ÖRNEK(2)

Aşağıdaki önermelerin olumsuzlarını (değillerini) bulunuz

p: 'Her asal sayı tektir'

p' : 'Her asal sayı tek değildir'

q: 'Ankara, Türkiye'nin başkentidir.'

q' : 'Ankara, Türkiye'nin başkenti değildir'

s: 'Bütün kadınlar güzeldir'

s' : 'Bütün kadınlar güzel değildir.'

NOT: Bir ifadenin önerme olabilmesi için kesin bir yargı belirtmesi yani kesin doğru veya kesin yanlıştır denilebilmesi gerekir.

Örneğin 'Bu gün nasılsın?', 'Beraber dolaşalım mı?', 'Halılar kirlenmiş yıkamak istiyorum', ' Hadi top oynayalım' gibi ifadeler kesin bir hüküm belirtmediğinden önerme değildir. 'Bu gün hava yağmurlu', 'insanlar yaşamak için yemek zorundadır', ' 2=5 tir', Bilgisayar doğru kullanıldığı takdirde hayatı kolaylaştıran bir teknolojik araçtır', 'Bir saat 60 dakikadır', 'Dünya öküzün boynuzları üzerinde duruyor' gibi ifadeler kesin hüküm belirttiklerinden birer önermedirler.

ÖRNEK(3)

Aşağıdaki ifadelerin önerme olup olmadıklarını belirtin önerme olanların doğruluk değerlerini belirtin

- 'İstanbul Türkiye'nin en kalabalık şehridir'
cevap:önermedir. Doğruluk değeri 1 dir
- '2, en küçük asal sayıdır'
cevap:önermedir. Doğruluk değeri 1 dir
- 'Bütün asal sayılar tektir'
cevap:önermedir. Doğruluk değeri 0 dir
- 'Bu gün işin varmı?'
cevap:önerme değildir.
- ' tek sayılar 2 'ye bölünmezler'
cevap:önermedir. Doğruluk değeri 1 dir
- '0, basit kesir olan yegane tamsayıdır'
cevap:önermedir. Doğruluk değeri 1 dir
- 'Her rasyonel sayı bir tamsayıdır'
cevap:önermedir. Doğruluk değeri 0 dir

BİLEŞİK ÖNERME

Verilen bir önerme her zaman tek bir yargı belirtmeyebilir. Birden fazla yargı belirten önermelerde bir yargıyı diğer yargıya bağlamak için çeşitli bağlaçlar kullanılır. Birden fazla önermenin ve,veya,ise,ancak ve ancak gibi bağlaçlarla birbirine bağlanması ile oluşturulan yeni önermeye **bileşik önerme** denir.

ÖRNEK(4)

Aşağıdaki önermelerin hangi bağlaç ile bağlandığını belirtin

P: 'Derslerine çalışırsan sınavları geçersin'

- ise (\Rightarrow) bağlacı

q : 'Kırtasiyeden kalem ve silgi aldım'

- ve (\wedge) bağlacı

r: ' Bu takım siyah veya koyu lacivert renktedir'

- veya (\vee) bağlacı

s: 'Bir dikdörtgenin kare olması için ancak ve ancak tüm kenarları eşit olmalıdır'

Bağlaç Adı	Sembolü
Ve	\wedge
Veya	\vee
Yada	$\underline{\vee}$
İse	\Rightarrow
Ancak ve ancak	\Leftrightarrow

BAĞLAÇLARIN DOĞRULUK TABLOLARI

p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
1	1	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0
0	0	0	0	0	1	1

Etkinlik p: 'Ali güçlüdür'

q: 'Damla zayıftır'

Önermelerini ve bağlacı ile bağlayalım

'Ali güçlüdür ve Damla zayıftır' bu önerme için aşağıdaki soruların cevaplarını vererek yukarıdaki tablo ile karşılaştıralım

'Ali güçlüdür ve Damla zayıftır' önermesi doğrumudur?

'Ali güçlüdür ve Damla zayıf değildir' önermesi doğrumudur?

'Ali güçlü değil ve Damla zayıftır' önermesi doğrumudur?

'Ali güçlü değil ve Damla zayıf değil' önermesi doğrumudur?

BİLEŞİK ÖNERMELERİN ÖZELLİKLERİ

Tek Kuvvet Özelliği

Bir p önermesi için $p \wedge p$ ve $p \vee p$ önermelerinin doğruluk tablosunun inceleyelim

p	p	$p \wedge p$	$p \vee p$
1	1	1	1
0	0	0	0

$p \wedge p \equiv p$ ve $p \vee p \equiv p$ olduğu görülmektedir.

Değişme Özelliği

İki önermemiz p ve q olsun bu önermeler için $p \wedge q$, $q \wedge p$ ile $p \vee q$, $q \vee p$ bileşik önermelerinin doğruluk tablosunu inceleyelim

p	q	$p \wedge q$	$q \wedge p$	$p \vee q$	$q \vee p$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1
0	1	0	0	1	1
0	0	0	0	0	0

$p \wedge q \equiv q \wedge p$ ve $p \vee q \equiv q \vee p$ olduğu görülmektedir

p	q	$p \vee q$	$q \vee p$	$p \Leftrightarrow q$	$q \Leftrightarrow p$
1	1	0	0	1	1
1	0	1	1	0	0
0	1	1	1	0	0
0	0	0	0	1	1

$p \vee q \equiv q \vee p$ ve $p \Leftrightarrow q \equiv q \Leftrightarrow p$ olduğu görülmektedir

Birleşme Özelliği:

p, q ve r üç önerme olsun

$(p \wedge q) \wedge r$ ve $p \wedge (q \wedge r)$ bileşik önermeleri ile $(p \vee q) \vee r$ ve $p \vee (q \vee r)$ bileşik önermelerinin doğruluk tablolarını inceleyelim

p	q	r	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \wedge r$	$q \wedge r$	$p \wedge (q \wedge r)$
1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	1	0
0	1	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0

$(p \wedge q) \wedge r$ ve $p \wedge (q \wedge r)$ önermelerinin denkliği görülmektedir

p	q	r	$p \vee q$	$(p \vee q) \vee r$	$q \vee r$	$p \vee (q \vee r)$
1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0	1
0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1
0	0	1	0	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0

$(p \vee q) \vee r$ ve $p \vee (q \vee r)$ önermelerinin denkliği görülmektedir.

Dağılma özelliği

p, q ve r üç önerme olsun $p \vee (q \wedge r)$ ve $(p \vee q) \wedge (q \vee r)$ ile olsun $p \wedge (q \vee r)$ ve $(p \wedge q) \vee (q \wedge r)$ bileşik önermelerinin doğruluk tablolarını inceleyiniz

p	q	r	$q \wedge r$	$p \vee (q \wedge r)$	$p \vee q$	$p \vee r$	$(p \vee q) \wedge (q \vee r)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	0	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0

$p \vee (q \wedge r)$ ve $(p \vee q) \wedge (q \vee r)$ önermelerinin denk olduğu görülüyor. Buradan \vee (veya) bağlacının \wedge (ve) bağlacı üzerine soldan dağılma özelliğinin olduğu anlaşılır.

p	q	r	$q \vee r$	$p \wedge (q \vee r)$	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	0	1	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0

0	1	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

$p \wedge (q \vee r)$ ve $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ bileşik önermelerinin denk olduğu görülüyor. Buradan \wedge (ve) bağlacının \vee (veya) bağlacı üzerine soldan dağılma özelliğinin olduğu anlaşılır.

DE MORGAN KURALLARI

p ve q herhangi iki önerme olsun

$(p \vee q)'$ ve $(p' \wedge q')$ bileşik önermeleri ile $(p \wedge q)'$ ve $(p' \vee q')$ bileşik önermelerinin doğruluk tablolarını inceleyiniz

p	q	p'	q'	$(p \wedge q)'$	$(p' \vee q')$
1	1	0	0	0	0
1	0	0	1	1	1
0	1	1	0	1	1
0	0	1	1	1	1

Buradan $(p \vee q)' \equiv (p' \wedge q')$ olduğu görülür

p	q	p'	q'	$(p \vee q)'$	$(p' \wedge q')$
1	1	0	0	0	0
1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	0	0
0	0	1	1	1	1

Buradan $(p \wedge q)' \equiv (p' \vee q')$ olduğu görülür.

Bu denklikler De Morgan Kuralı olarak bilinir.

KOŞULLU ÖNERME

Bir şarta bağlı olarak ifade edilen önermelere koşullu önerme denir.

Örneğin; 'Eve erken gelirse ders çalışırım', 'Ders çalışırsam, başarılı olurum' gibi önermeler koşullu önermelerdir.

Etkinlik: 'Onur eve erken gelirse, ders çalışacak' önermesine bakarak aşağıdaki önermeleri yazalım

p: 'Onur eve erken geldi' q: 'Ders çalıştı' önermeleri yazılabilir. Buradan

➤ Onur'un eve erken geldiğini ve ders çalıştığını varsayarsak Onur'un sözünü tuttuğunu söyleyebilir miyiz?

➤ Onur'un eve erken geldiğini fakat ders çalışmadığını varsayarsak Onur'un sözünü tuttuğunu söyleyebilir miyiz?

➤ Onur eve erken gelmediği halde ders çalışmış olabilir mi? 'olamaz' diyemiyorsak Onur'un sözünü tuttuğunu söyleyebilir miyiz?

➤ Onur'un eve erken gelmediğini bu yüzden de ders çalışmadığını varsayarsak Onur'un sözünü tuttuğunu söyleyebilir miyiz?

Her bir durum için aşağıdaki tabloyu inceleyelim

p	q	p'	$p \Rightarrow q$	$(p' \vee q)$
1	1	0	1	1
1	0	0	0	0
0	1	1	1	1
0	0	1	1	1

Tablodan da anlaşılacağı üzere p önermesi doğru, q önermesi yanlış iken $(p \Rightarrow q)$ önermesi yanlış, diğer durumlarda doğru oluyor. Yine tablodan $(p \Rightarrow q) \equiv (p' \vee q)$ denkleğinin varlığını görebiliyoruz.

KOŞULLU ÖNERMENİN KARŞITI

p ve q önermeleri için $(p \Rightarrow q)$ ve $(q \Rightarrow p)$ önermelerinin doğruluk tablosunu inceleyelim

p	q	$(p \Rightarrow q)$	$(q \Rightarrow p)$
1	1	1	1
1	0	0	1
0	1	1	0
0	0	1	1

$(p \Rightarrow q)$ koşullu önermesinin karşıtı $(q \Rightarrow p)$ önermesidir.

Görüldüğü gibi $(p \Rightarrow q) \not\equiv (q \Rightarrow p)$ dir.

ÖRNEK(5)

$(p \Rightarrow q)$: 'Hava yağmurlu ise pikniğe gidemeyiz'

KOŞULLU ÖNERMENİN TERSİ:

p ve q iki önerme olsun. $(p \Rightarrow q)$ ve $p' \Rightarrow q'$ önermelerinin doğruluk tablosu aşağıda verilmiştir.

p	q	p'	q'	$(p \Rightarrow q)$	$(p' \Rightarrow q')$
1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	1
0	1	1	0	1	0
0	0	1	1	1	1

Görüldüğü gibi $(p \Rightarrow q) \not\equiv p' \Rightarrow q'$ dir

Sonuç: $(p \Rightarrow q)$ önermesi verilsin. $p' \Rightarrow q'$ önermesine $(p \Rightarrow q)$ önermesinin **tersi** denir.

ÖRNEK(6)

$(p \Rightarrow q)$: 'Bu gün hava bulutlu ise yağmur yağacak'

$p' \Rightarrow q'$: 'Bu gün hava bulutlu değilse yağmur yağmayacak'

ÖRNEK(7)

$(p \Rightarrow q)$: 'Çalışırsan başarabilirsin'

$p' \Rightarrow q'$: 'Çalışmazsan başaramazsın'

BİR ÖNERMENİN KARŞIT TERSİ

p ve q iki önerme olsun. $(p \Rightarrow q)$ ve $q' \Rightarrow p'$ önermelerinin doğruluk tablosu aşağıda verilmiştir.

p	q	p'	q'	$(p \Rightarrow q)$	$(q' \Rightarrow p')$
1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1
0	0	1	1	1	1

Görüldüğü gibi $(p \Rightarrow q) \equiv q' \Rightarrow p'$ dir

Sonuç: $(p \Rightarrow q)$ önermesi verilsin. $q' \Rightarrow p'$ önermesine $(p \Rightarrow q)$ önermesinin **Karşit Tersi** denir.

ÖRNEK(8)

$(p \Rightarrow q)$: 'Merve ders çalışır ise Merve sinemaya gitmez!'

$(q' \Rightarrow p')$: 'Merve sinemaya gider ise Merve ders çalışmaz'

ÖRNEK(9)

$(p \Rightarrow q)$: '15 sayısı 5'in katı ise 20 sayısı 5'in katıdır.'

$(q' \Rightarrow p')$: '20 sayısı 5 'in katı değil ise 15 sayısı 5'in katı değildir'

ÖRNEK(10)

p : 'Damla okuldan erken çıktı'

q : 'Damla dedesini ziyaret etti'

Önermelerini kullanarak

- $p \vee q$
- $p \wedge q$
- $(p \Rightarrow q)$
- $(p' \Rightarrow q')$
- $(q' \Rightarrow p')$ önermelerini yazınız

ÇÖZÜM:

- $p \vee q$: 'Damla okuldan erken çıktı veya Damla dedesini ziyaret etti'
- $p \wedge q$: 'Damla okuldan erken çıktı ve Damla dedesini ziyaret etti'
- $(p \Rightarrow q)$: 'Damla okuldan erken çıkar ise Damla dedesini ziyaret eder'
- $(p' \Rightarrow q')$: 'Damla okuldan erken çıkmaz ise Damla dedesini ziyaret etmez'
- $(q' \Rightarrow p')$: 'Damla dedesini ziyaret etmezse Damla okuldan erken çıkmaz'

İki YÖNLÜ KOŞULLU ÖNERME:

p : 'A sayısı 5 in katıdır.'

q : 'A sayısının birler basamağında 0 veya 5 rakamlarından biri vardır'

Şimdi bu iki önerme için $(p \Rightarrow q)$ ve $(q \Rightarrow p)$ önermelerini yazalım

$(p \Rightarrow q)$: 'A sayısı 5'in katı ise A sayısının birler basamağında 0 veya 5 rakamlarından biri vardır.'

$(q \Rightarrow p)$: 'A sayısının birler basamağında 0 veya 5 rakamlarından biri var ise 'A sayısı 5'in katıdır.'

Şimdi bu iki önermeyi ve bağlacıyla birbirine bağlarsak

$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$: "A sayısı 5'in katı ise A sayısının birler basamağında 0 veya 5 rakamlarından biri vardır. ve A sayısının birler basamağında 0 veya 5 rakamlarından biri var ise 'A sayısı 5'in katıdır.'

Bu cümleyi daha anlamlı olarak şöyle de yazabiliriz.

'A sayısı 5'in katıdır ancak ve ancak A sayısının birler basamağında 0 veya 5 rakamlarından biri vardır'

Bu iki önermenin bu şekilde yazılışını çift yönlü ok ile gösterir ve önermeye iki yönlü koşullu önerme deriz.

İki yönlü koşullu önerme \Leftrightarrow sembolü ile gösterilir.

O halde

$p \Leftrightarrow q$: 'A sayısı 5'in katıdır ancak ve ancak A sayısının birler basamağında 0 veya 5 rakamlarından biri vardır'

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$	$p \Leftrightarrow q$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	0	0
0	0	1	1	1	1

Görüldü gibi $p \Leftrightarrow q$ iki yönlü koşullu önermesi p ve q önermelerinin her ikisinin de doğru yada yanlış olması durumunda doğru, diğer durumlarda yanlıştır.

BAĞLAÇLARIN ÖZELLİKLERİNİ KULLANARAK VERİLEN BİLEŞİK ÖNERMELERİ İNDİRGEME

ÖRNEK(11)

Aşağıdaki önermeleri indirgeyiniz

- $[(p \vee q) \wedge (p \Rightarrow q)]$
- $(p' \wedge q) \Rightarrow (p \vee q')$
- $[(p \Rightarrow q) \vee q']'$

ÇÖZÜM:

$$\begin{aligned} \text{a) } [(p \vee q) \wedge (p \Rightarrow q)] &\equiv [(p \vee q) \wedge (p' \vee q)] \\ &\equiv (p \wedge p') \vee q \\ &\equiv 0 \vee q \\ &\equiv q \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } (p' \wedge q) \Rightarrow (p \vee q') &\equiv (p' \wedge q)' \vee (p \vee q') \\ &\equiv (p \vee q') \vee (p \vee q') \\ &\equiv (p \vee q') \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } [(p \Rightarrow q) \vee q']' &\equiv [(p' \vee q) \vee q']' \\ &\equiv [p' \vee (q \vee q')] \\ &\equiv [p' \vee 1]' \\ &\equiv [1]' \\ &\equiv 0 \end{aligned}$$

TOTOLOJİ VE ÇELİŞKİ

Bileşenlerinin tüm doğruluk değerleri için daima doğru olan bileşik önermelere **totoloji(uyuşma)** denir

Örneğin, $(p \vee p')$ bileşik önermesi bir totolojidir

Bileşenlerinin tüm doğruluk değerleri için daima yanlış olan bileşik önermelere **çelişki(çelişme)** denir.

Örneğin, $(p \wedge p')$ bileşik önermesi bir çelişkidir

ÖRNEK(12)

$(p \wedge 1) \wedge [(0 \vee p) \wedge (p \wedge p')]$ önermesinin bir totoloji mi yoksa çelişki mi olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM:

$$\begin{aligned}
 & (p \wedge 1) \wedge [(0 \vee p) \wedge (p \wedge p')] \\
 & \quad \swarrow \quad \searrow \quad \swarrow \quad \searrow \\
 & \equiv 0 \wedge [p \wedge 0] \\
 & \equiv 0 \wedge 0 \\
 & \equiv 0
 \end{aligned}$$

o halde bu önerme bir çelişkidir.

ÖRNEK(13)

$p \equiv 1, q \equiv 0, r \equiv 1$ olmak üzere

- a) $(p \wedge q) \vee (p' \vee q)$
- b) $(p \vee r) \vee (q' \vee r')$
- c) $(p \Rightarrow r) \wedge (q \vee p)$
- d) $(q \Leftrightarrow p)' \wedge r'$

bileşik önermelerinin sonucu nedir?

ÇÖZÜM:

- a) $(1 \wedge 0) \vee (1' \vee 0) \equiv 0 \vee (0 \vee 0)$
 $\equiv 0 \vee 0 \equiv 0$
- b) $(1 \vee 1) \vee (0' \vee 1') \equiv 0 \vee (1 \vee 0)$

$$0 \vee 1 \equiv 1$$

- c) $(1 \Rightarrow 1) \wedge (0 \vee 1) \equiv 0 \wedge 1 \equiv 0$

- d) $(0 \Leftrightarrow 1)' \wedge 1' \equiv 0' \wedge 0 \equiv 1 \wedge 0 \equiv 0$

ÖRNEK(14)

$(p \wedge r') \wedge (r \vee q') \equiv 1$ olduğuna göre p,q ve r nin doğruluk değerleri nedir?

ÇÖZÜM:

$1 \wedge 1 \equiv 1$ olacağından,

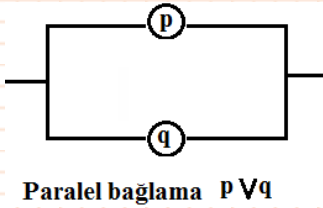
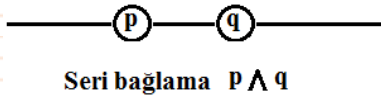
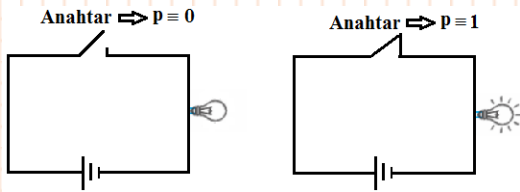
$(p \wedge r') \equiv 1$ ve $(r \vee q') \equiv 1$ olmalı

$(p \wedge r') \equiv (1 \wedge 0') \equiv 1 \Rightarrow p \equiv 1$ ve $r \equiv 0$

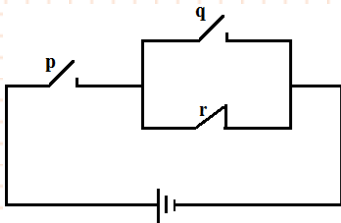
$(r \vee q') \equiv (0 \vee q') \equiv 1 \Rightarrow q' \equiv 1 \Rightarrow q \equiv 0$

BİLEŞİK ÖNERMELERİN ELEKTRİK DEVRELERİNE UYGULANIŞI

Bir elektrik devresinde anahtar açık ise akım geçmeyeceğinden ampul yanmaz, bu durum doğruluk değeri 1 olan bir önerme ile gösterilir. Eğer elektrik devresinde anahtar kapalı ise akım geçer ve ampul yanar, bu durum doğruluk değeri 0 olan bir önerme ile gösterilir.

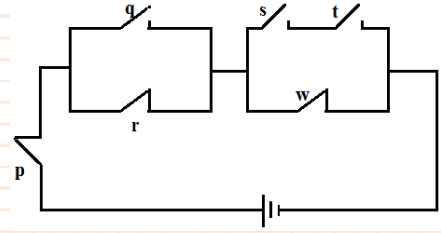


ÖRNEK(15)



Yukarıdaki elektrik devresinin bileşik önerme ile ifadesi $p \wedge (q \vee r)$ şeklinde yazılır

Buna göre;



Elektrik devresinin denklemini yazarak akımın geçip geçmeyeceğini bulalım.

ÇÖZÜM:

Verilen örnekleme göre elektrik devresinin denklemini

$p \wedge (q \vee r) \wedge [(s \wedge t) \vee w]$ şeklinde olur.

Verilen elektrik devresinde önermelerin doğruluk değerleri

$p \equiv 1, q \equiv 0, r \equiv 1, s \equiv 0, t \equiv 0, w \equiv 1$

olacağından,

$$1 \wedge (0 \vee 1) \wedge [(0 \wedge 0) \vee 1]$$

$$\equiv 1 \wedge 1 \wedge [0 \vee 1]$$

$$\equiv 1 \wedge 1$$

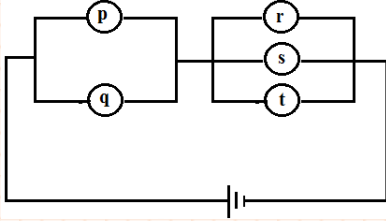
$$\equiv 1 \text{ ve akım geçer}$$

ÖRNEK(16)

$(p \vee q) \wedge (r \vee s \vee t)$ bileşik önermesiyle verilen elektrik devresini çizelim.

ÇÖZÜM:

Verilen denkleme göre elektrik devresi



Şeklinde olur.

AÇIK ÖNERMELER

İçinde en az bir değişken bulunan ve bu değişkenin alabileceği farklı değerler için doğru veya yanlış bir ifade elde edilen önermelere açık önerme denir. Değişken x ise açık önerme $p(x)$; x ve y ise açık önerme $p(x,y)$ şeklinde gösterilir. Açık önermeyi doğru yapan değerlerin kümesine açık önermenin doğruluk kümesi denir.

ÖRNEK(17)

$P(x)$: 'x in matematik dersi 5 tir' önermesi verilsin. Bu önermeyi aşağıdaki bilgilere göre tablo hazırlayarak gösterelim

x	$P(x)$ in doğruluk değeri
Ahmet'in notu 3	0
Ömer Ali'nin notu 5	1
Damla'nın notu 5	1
Veli'nin notu 4	0

ÖRNEK(18)

$P(x,y)$: ' $2x-3y>0$, $x,y \in Z$ ' açık önermesine göre aşağıdaki şıkların doğruluk değerlerini bulunuz

- a) $P(2,3)$
- b) $P(4,-2)$
- c) $P(5,0)$

ÇÖZÜM:

a) $x=2$ ve $y=3$ için $2x-3y=2.2-3.3=4-9=-5<0$ dir.
O halde $P(2,3) \equiv 0$ dir

b) $x=4$ ve $y=-2$ için $2x-3y=2.4-3.(-2)=8+6=14>0$ dir.
O halde $P(4,-2) \equiv 1$ dir.

c) $x=5$ ve $y=0$ için $2x-3y=2.5-3.0=10>0$ dir.
O halde $P(5,0) \equiv 1$ dir

ÖRNEK(19)

P : ' $x: x^2-3<6$ ve $x \in Z$ ' önermesinin doğruluk kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM:

$$x^2-3<6 \Rightarrow x^2<9 \Rightarrow \sqrt{x^2} < \sqrt{9} \Rightarrow |x| < 3$$

$$\Rightarrow -3 < x < 3$$

O halde $P(x)$ in doğruluk kümesi

$\{-2,-1,0,1,2\}$ dir.

Her (\forall) ve En az bir (\exists) Niceleyicileri

Her (\forall) niceleyicisi bütün anlamını taşır. Buna **evrensel niceleyici** de denir.

En az bir (\exists) niceleyicisi bazı anlamına gelir. Buna **varlıksal niceleyici** de denir.

$$\begin{aligned} \diamond (\forall x, P(x))' &\equiv (\exists x, P(x)) \\ (\exists x, P(x))' &\equiv (\forall x, P(x)) \text{ dır.} \end{aligned}$$

ÖRNEK(20)

$$\begin{aligned} (\forall x \in \mathbb{R}, x + 2 > 0)' &\equiv (\exists x \in \mathbb{R}, x + 2 \leq 0) \\ (\exists x \in \mathbb{R}, x^2 - 4 < 0)' &\equiv (\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - 4 \geq 0) \end{aligned}$$

ÖRNEK(21)

Aşağıdaki önermeleri niceleyici semboller kullanarak yazınız ve olumsuzlarını belirtiniz.

- Her x tamsayısı için $2x$ bir çift sayıdır.
- Bazı x reel sayıları için $x(x+2)>0$ dır.
- En az bir x reel sayısı için $2x-3=0$ dır

ÇÖZÜM:

- $\forall x \in \mathbb{Z}, 2x$ çifttir.
Olumsuz $\rightarrow \exists x \in \mathbb{Z}, 2x$ çift değildir.
- $\exists x \in \mathbb{R}, x(x+2) > 0$,
Olumsuz $\rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, x(x+2) \leq 0$
- $\exists x \in \mathbb{R}, 2x-3=0$,
Olumsuz $\rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, 2x-3 \neq 0$

İSPAT YÖNTEMLERİ

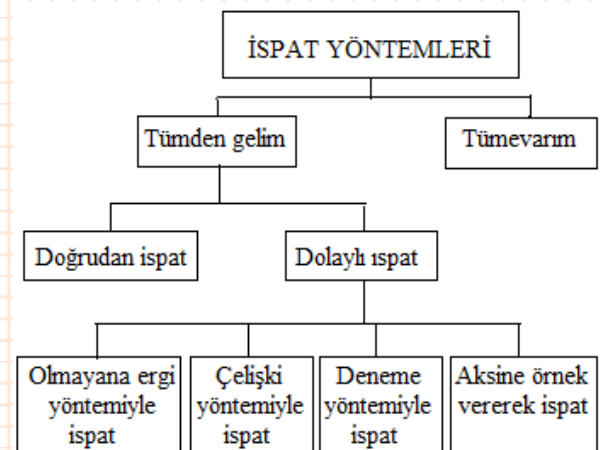
Tanım: Bir kavramı açıklayan, özelliklerini belirten ifadelerle tanım denir. Tanımın temel kavramlarla ve daha önce kabul edilmiş ifadelerle çelişmemesi, tutarlı olması gerekir. Tanım yapıldıktan sonra yanımı yapılan kavram hakkında şüphe edilecek bir şey kalmamalıdır.

Aksiyom: Doğruluğu ispat edilemeyen, önceden kabul edilmiş önermelere aksiyom denir. Bir bilim dalına ait olan aksiyomların birbiriyle çelişmemesi ve bağımsız olması gerekir yani birbirinden türetilmemelidirler.

Teorem : Doğruluğu ispatlanabilen henüz ispatlanmamış önermelere teorem denir. p bir doğru önerme iken $p \Rightarrow q$ koşullu önermesine teorem denir. Burada p ye hipotez(varsayım), q ya da hüküm(yargı) denir. Bir teoremde hem hipotez hem de hüküm birer doğru önermedir.

Örneğin, ABC üçgeni bir eşkenar üçgen ise $s(A)=s(B)=s(C)=60^\circ$ önermesi bir teoremdir.

İSPAT YÖNTEMLERİ ŞEMASI



Tümdengelim Yöntemi:

Bir teoremi önce doğruluğu kabul edilip buna giden yolları ispat etme yöntemidir. Düşüncenin genelden özele, bütünden parçaya doğru gelişen bir yöntemle oluşturulmasıdır. Bu yöntemde önce temel düşünce ortaya konur, sonra örnekler, yardımcı düşüncelerle temel yargı beslenip desteklenir.

Örneğin:

“Bütün balıklar denizde yaşar.”,
 “Hamsi bir balıktır.”
 ‘ O halde, hamsi de denizde yaşar’

Tümevarım Yöntemi:

Doğru olan önemelerden istenen asıl önermeye ulaşma yöntemidir. Düşüncenin özelden genele, parçadan bütüne doğru gelişen bir yöntemle oluşturulmasıdır. Bu yöntemde önce örnekler, yardımcı düşünceler ortaya konur, giderek konuyla ilgili temel yargı oluşturulur.

ÖRNEK(22)

‘Ahmet çocuktur ve söz dinlemiyor’,
 ‘Ali çocuktur ve söz dinlemiyor’
 ‘Ayşe çocuktur ve söz dinlemiyor’
 ‘O halde bütün çocuklar söz dinlemez’

1.Doğrudan İspat Yöntemi

Teoremde hipotezin doğru olduğu kabul edilerek hükmün de doğru olduğunun gösterilmesi ile yapılan ispat yöntemidir.

Aşağıdaki teoremin ispatını doğrudan ispat yöntemi ile yapalım

ÖRNEK(23)

Teorem: x ve y tek sayılar ise $x+y$ çifttir.

Hipotez: x ve y tek sayılardır

Hüküm: $x+y$ çift sayıdır.

İspat: $x=2n+1$ ve $y=2m+1$ olsun ($m,n \in \mathbb{Z}$)

$x+y= 2n+1+2m+1=2(m+n)+2=2(m+n+1)$

m ve n birer tamsayı olduğundan $2(m+n+1)$ de çifttir.

2. Dolaylı İspat Yöntemleri:

a) Olmayana Ergi Yöntemi: Bir teoremin doğrudan ispatı yerine, teoremin karşıt tersinin ispatlanması yöntemine denir.

$(p \Rightarrow q) \equiv q' \Rightarrow p'$ olduğundan q' önermesi doğru iken p' önermesinin de doğru olduğunu ispatlarsak $(p \Rightarrow q)$ önermesinin doğruluğunu ispatlamış oluruz.

ÖRNEK(24)

Teorem: Çift doğal sayının karesi yine bir çift doğal sayıdır.

İspat:

p : ‘ a çift doğal sayıdır.

q : ‘ a^2 çift doğal sayıdır.

p' : ‘ a çift doğal sayı değildir.’

q' : ‘ a^2 çift doğal sayı değildir.’

q' doğru olsun yani ‘ a^2 çift doğal sayı değildir.’ Bu durumda a^2 tek doğal sayı olur

a^2 tek doğal sayı ise a da renktir. O halde a çift doğal sayı değildir. Bu durumda p' doğru olur.

Sonuç olarak $q' \Rightarrow p'$ önermesinin doğruluğunu ispatladık. O halde $(p \Rightarrow q)$ önermesi de doğrudur. İspat tamamlandı.

b) Çelişki Yöntemiyle İspat:

$(p \Rightarrow q)$ teoreminde q nun bir an için yanlış olduğunu kabul ederek doğru olduğunu bildiğimiz p ile çelişen bir duru elde edersek q nun yanlış olmayacağı anlaşılır. Bu yöntem çelişki yöntemi ile ispat denir.

ÖRNEK(25)

Teorem: $\frac{15}{4}$ sayısı bir tamsayı değildir.

İspat: $\frac{15}{4}$ sayısı bir tamsayı olsun. Bu durumda

15 in 4 e tam bölünmesi gerekir. Yani 15 sayısı 4'ün katı olmalıdır.

A kümesi 4 ün katı olan bir küme olsun. 15 sayısı 4 ün katı ise $15 \in A$ olmalıdır.

$A = \{ \dots -4, 0, 4, 8, 12, 16, 20, \dots \}$ dir. Görüldüğü gibi 15 sayısı bu kümenin bir elemanı değildir.

O halde $\frac{15}{4}$ sayısı bir tamsayı değildir.

c) Deneme Yöntemi ile İspat:

Verilen bir önermede değişkene farklı değerler verilerek önermenin doğruluğunu kontrol etmeye deneme yoluyla ispat denir. Çoktan seçmeli sınavlarda çözümü uzun süren yada yeteri kadar bilgiye sahip olunmayan soruların doğru cevap şıkları öğrenciler tarafından çoğunlukla bu yöntem kullanılarak bulunur.

ÖRNEK(26)

$\frac{(a^3 + 1) \cdot (a^3 - 1)}{a^4 + a^2 + 1} = 3$ ifadesinde a kaçtır?

- A) -1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 3

ÇÖZÜM:

Sorunun cevabını deneme yoluyla bulalım.

$$A) a = -1 \text{ ise } \frac{((-1)^3 + 1) \cdot ((-1)^3 - 1)}{(-1)^4 + (-1)^2 + 1} = 0$$

olduğundan A şıkkı doğru cevap değildir

$$B) a = 0 \text{ ise } \frac{(0^3 + 1) \cdot (0^3 - 1)}{0^4 + 0^2 + 1} = -1 \text{ olduğundan}$$

B şıkkı doğru cevap değildir

$$C) a = 1 \text{ ise } \frac{((1)^3 + 1) \cdot ((1)^3 - 1)}{(1)^4 + (1)^2 + 1} = 0 \text{ olduğundan}$$

C şıkkı doğru cevap değildir

$$D) a = 2 \text{ ise } \frac{(2^3 + 1) \cdot (2^3 - 1)}{2^4 + 2^2 + 1} = 3 \text{ olduğundan D}$$

şıkkı doğru cevaptır

$$E) a = 3 \text{ ise } \frac{(3^3 + 1) \cdot (3^3 - 1)}{3^4 + 3^2 + 1} = 8 \text{ olduğundan E}$$

şıkkı doğru cevap değildir.

d) Aksine Örnek Vererek İspat:

Bir önermenin yanlışlığının, aksine örnek vererek ispatlanmasına denir.

ÖRNEK(27)

'Kanadı olan her canlı uçar' önermesinin yanlışlığını Aksine Örnek Vererek İspat yöntemini kullanarak bulalım

Aksine örnek: 'Devekuşunun da kanadı var ama devekuşu uçamaz' o halde kanadı olan her kuş uçamaz

ÖRNEK(28)

'Tüm çift sayılar 4'ün katıdır.' önermesinin yanlışlığını Aksine Örnek Vererek İspat yöntemini kullanarak bulalım

Aksine örnek ' 2 sayısı çifttir ama 4'e bölünmez'.
O halde tüm çift sayılar 4'ün katı değildir.

BİLEŞİK ÖNERMELERİN EXCEL PROGRAMINDA UYGULAMALARI

Bilgisayar, günümüz insanın neredeyse olmaz olmazı haline gelmiştir. Günlük hayatta sık sık kullanılan bilgisayar için konumuzun kullanım alanlarını göstermek bir gereklilik halini almıştır. Bu yüzden bu konuyu buraya alıyorum.

- Bir EXCEL sayfası açıp p önermesi için doğruluk değerlerini yazalım. C hüresine de =DEĞİL(A2) yazıp aşağı sürükleyelim

	A	B	C
1	p		p'
2	DOĞRU	1	YANLIŞ
3	YANLIŞ	0	DOĞRU

- p ve q önermelerinin alabileceği doğruluk değerlerini yazalım ve c2 hüresine =YADA(A2;B2) formülünü yazarak sürükleyelim

	A	B	C
1	p	q	p ∨ q
2	1	1	DOĞRU
3	1	0	DOĞRU
4	0	1	DOĞRU
5	0	0	YANLIŞ

- p ve q önermelerinin alabileceği doğruluk değerlerini yazalım ve C2 hüresine =VE(A2;B2) formülünü yazarak sürükleyelim

	A	B	C
1	p	q	p ∧ q
2	1	1	DOĞRU
3	1	0	YANLIŞ
4	0	1	YANLIŞ
5	0	0	YANLIŞ

KONUMUZ BİTTİ. ŞİMDİ TESTLERE GEÇEBİLİRSİNİZ

DİLERSENİZ KONU ANLATIMINI BİR DE YOUTUBE KANALIMIZDAN VİDEO OLARAK DA İZLEYEBİLİRSİNİZ

Youtube kanalımız: CEBİR HOCAM

**Başarılar diliyorum
İbrahim Halil BABAOĞLU
Matematik Öğretmeni**