

MODÜLER ARİTMETİK

KALAN SINIFLARI :

Z de tanımlı $\beta = \{(x,y) \mid x \text{ ile } y \text{ nin farkı } 3 \text{ ile tam bölünür}\}$ bağıntısı bir denklik bağıntısıdır.

Buna bağlı kalan sınıfları ;

$$\bar{0} = \{-6, -3, 0, 3, 6, \dots\}$$

$$\bar{1} = \{-5, -2, 1, 4, 7, \dots\}$$

$$\bar{2} = \{-4, -1, 2, 5, 8, \dots\}$$

mod 3 'e göre kalan sınıflarının kümesi

$$Z/3 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$$
 olur.

Aynı kalan sınıfına ait elemanlar birbirine denktir;

$$-6 \equiv 0, -2 \equiv 4, -1 \equiv 8 \text{ gibi}$$

Genel olarak $m \in Z^+$ olmak üzere m modülüne göre kalan sınıfları;

$$Z/m = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \dots, \bar{m-1}\}$$
 dir

ÖZELLİKLER:

$x, y \in Z$ olmak üzere $x \equiv y \pmod{m}$ ise

1) x ve y aynı kalan sınıfına ait elemanlar olup, m ye böülümlerinden kalan da eşittir.

$$\diamond 9 \equiv 2 \pmod{7}$$

2) x ile y nin farkı m ile tam bölünür.

$$x-y=m.k$$

$$\diamond 17 \equiv 3 \pmod{7} \text{ ise } 17-3=14=7k$$

3) $\bar{x} \pm \bar{y} = \overline{x \pm y}$ dir.

$$\diamond Z/7 \text{ de } \bar{4} + \bar{5} \equiv \bar{9} \equiv 2$$

4) $\bar{x} \cdot \bar{y} = \overline{x \cdot y}$ dir.

$$\diamond Z/5 \text{ te } \bar{3} \cdot \bar{4} \equiv \bar{12} \equiv 2$$

5) $a, c, d \in Z$ ve

$$\begin{aligned} a \equiv b \pmod{m} \\ c \equiv d \pmod{m} \end{aligned} \left. \begin{array}{l} \text{ise} \\ \text{ise} \end{array} \right\} \begin{aligned} a+c \equiv b+d \pmod{m} \\ a.c \equiv b.d \pmod{m} \end{aligned}$$

$$\diamond 5 \equiv 1 \pmod{4} \text{ ve } 10 \equiv 2 \pmod{4} \text{ ise}$$

$$5+10 \equiv 1+2 \pmod{4} \text{ ve } 5 \cdot 10 \equiv 1 \cdot 2 \pmod{4}$$

6) $n \in N^+$ için $x^n \equiv y^n \pmod{m}$

$$\diamond 7 \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow 7^2 \equiv 1^2 \pmod{3}$$

7) m bir asal sayı ve x ile m aralarında asal sayılar olmak üzere $x^{m-1} \equiv 1 \pmod{m}$

$$\diamond 4^2 \equiv 1 \pmod{3}$$

$\triangleright x$ ile m aralarında asal değilse 1 elde edilemez. '0' veya tekrar eden sayılar elde edilir.

8) Bir denkliğin herhangi bir tarafına mod'un katları eklenirse denklik bozulmaz

$$x \equiv y + m.k \pmod{m} \text{ veya } x+m.k \equiv y \pmod{m}$$

$$\diamond 7 \equiv 2 \pmod{5} \Rightarrow 7+15 \equiv 2 \pmod{5}$$

9) x, y ve m 'nin ortak böleni a olmak üzere ;

$$\frac{x}{a} \equiv \frac{y}{a} \left(\text{mod } \frac{m}{a} \right) \text{ dır.}$$

❖ $12 \equiv 33 \pmod{21}$ ise

$$\frac{12}{3} \equiv \frac{33}{3} \left(\text{mod } \frac{21}{3} \right)$$

10) $x^n \equiv y \pmod{m}$ ifadesinde x ile m aralarında asal olmak üzere m 'nin asal çarpanlarına ayrılmış hali $m = a^p \cdot b^r \cdot c^s$ olsun

$$t = m \cdot \left(1 - \frac{1}{a}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{b}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{c}\right) \text{ ise}$$

$$x^t \equiv 1 \pmod{m} \text{ dir.}$$

❖ $17^4 \equiv 1 \pmod{12}$

GENEL ÖRNEKLER

ÖRNEK(1)

$$Z/4 \text{ te } (4x+2) \cdot (3x+2) = ?$$

ÇÖZÜM:

(işlem sırasında mutlak değerce 4 ve 4'ten büyük tüm sayıları mod4'e göre eşdeğerleriyle değiştiririz)

$$\begin{aligned} (4x+2) \cdot (3x+2) &= (0x+2)(3x+2) \\ &\quad \downarrow \quad \downarrow \\ &= 2(3x+2) \\ &= \quad \downarrow \quad \downarrow \\ &= 6x+4 \\ &\quad \downarrow \quad \downarrow \\ &= 2 \quad 0 \\ &= 2x \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

ÖRNEK(2)

$x-3 \equiv 7 \pmod{8}$ ise x' in en küçük pozitif tamsayı değeri ile en büyük negatif tamsayı değerinin çarpımı kaçtır?

ÇÖZÜM:

(2. Özelliği kullanırsak)

$$x - 3 - 7 = 8k \rightarrow x = 8k + 10 \quad (k'ya \text{ değer ver})$$

$$k = -1 \text{ için } x = 8 \cdot (-1) + 10 = 2$$

$$k = -2 \text{ için } x = 8 \cdot (-2) + 10 = -6$$

elde edilen bu değerlerin çarpımı $2 \cdot (-6) = -12$ dir.

ÖRNEK(3)

$m > 1$ olmak üzere $18 \equiv 3 \pmod{m}$ denkliğini sağlayan kaç tane $m \in \mathbb{Z}$ vardır.

ÇÖZÜM:

$$18 - 3 = mk \rightarrow 15 = mk$$

$$k = \frac{15}{m} \quad (\text{burada } m, 15'i bölmeli)$$

15'i bölen sayılar 1,3,5,15 dir.

$m > 1$ olduğundan $m = 3, 5, 15$ değerlerini alabilir.
Yani 3 tane m değeri vardır.

ÖRNEK(4)

$(1993)^x \equiv 2 \pmod{5}$ ise x 'in en küçük pozitif değeri kaçtır?

ÇÖZÜM:

$1993 \equiv 3 \pmod{5}$ olduğundan

$$3^x \equiv 2 \pmod{5} \text{ olur.}$$

x 'e değer vererek denkliği sağlayalım

$x=3$ için $3^3 = 27 \equiv 2 \pmod{5}$ olduğundan
cevap $x = 3$ tür.

ÖRNEK(5)

2^{79} 'un 5 ile bölümünden kalan kaçtır?

ÇÖZÜM:

$$2^1 \equiv 2 \pmod{5}$$

$$2^2 \equiv 4 \pmod{5}$$

$$2^3 = 8 \equiv 3 \pmod{5}$$

$$2^4 = 16 \equiv 1 \pmod{5} \rightarrow 2^4 \equiv 1 \pmod{5}$$

$$2^{4 \cdot 19} \equiv 1^{19} \pmod{5}$$

$$2^{76} \equiv 1 \pmod{5}$$

2^{79} 'a ulaşmak için bu denkliği $2^3 \equiv 3 \pmod{5}$
denkliği ile alt alta çarpalım

NOT: Bu tür sorularda 1'i bulana kadar işleme devam edilir. Eğer 1 bulunamıyorsa 1'in tüm kuvvetleri 1 olduğundan istenen kuvvette rahatlıkla ulaşılır. Tekrar eden ama 1 bulunamayan sorularda ise tekrar dizisinin istenen kuvvette karşılık gelen değeri alınır.

ÖRNEK(6)

2^{69} sayısının 6 ile bölümünden kalan sayı nedir.

ÇÖZÜM:

$$2^1 \equiv 2 \pmod{6}$$

$$2^2 \equiv 4 \pmod{6}$$

$$2^3 \equiv 2 \pmod{6} \quad [2^3 = 8 \equiv 2 \pmod{6}]$$

$$2^4 \equiv 4 \pmod{6}$$

$$[2^4 = 16 \equiv 4 \pmod{6}])$$

.....
gördüğü gibi burada 1 değil tekrar eden bir dizi elde ediliyor. 2'nin tek kuvvetlerinde 2, çift kuvvetlerinde 4 bulunduğu ve 69 tek olduğuna göre cevap 2 dir.

$$2^{69} \equiv 2 \pmod{6}$$

ÖRNEK(7)

$\mathbb{Z}/6$ da $3x-2=1$ denkleminin çözüm kümesini bulun?

ÇÖZÜM:

$$\begin{aligned} 3x-2 &\equiv 1 \pmod{6} \Rightarrow 3x=3+6k \quad (\text{her tarafı } 3'e \text{ böl}) \\ &\Rightarrow x=1+2k \end{aligned}$$

Burada x değeri $0 \leq x \leq 5$ şartını sağlamalıdır.

$k=0$ için $x=1$,

$k=1$ için $x=3$

$k=2$ için $x=5$

$k=3$ için $x=7$ olmaz ($7>5$)

O halde Çözüm= $\{1, 3, 5\}$ olur

ÖRNEK(8)

$(123)^{70}$ 'in birler basamağında hangi rakam vardır?

ÇÖZÜM:

Birler basamağında hangi rakam vardır sorusu bize her zaman $(\text{mod } 10)$ 'u hatırlatmalıdır.

$$(123)^{70} \equiv ? \pmod{10}$$

$123 > 10$ olduğundan önce 123^7 'nin mod 10'a göre değerini bulalım.

$123 : 10 \rightarrow$ kalan 3 tür.

sorumuz $3^{70} \pmod{10}$ sorusuna dönüşür.

$$3 \equiv 3 \pmod{10}$$

$$3^2 \equiv 9 \pmod{10}$$

$$3^3 \equiv 7 \pmod{10}$$

$$3^4 \equiv 1 \pmod{10}$$

$$(3^4)^{17} \equiv 1^{17} \pmod{10}$$

$$3^{68} \equiv 1 \pmod{10}$$

Şimdi bu denklik ile $3^3 \equiv 7 \pmod{10}$ denkliğini alta çarpalım

$$3^{68} \equiv 1 \pmod{10}$$

$$3^2 \equiv 9 \pmod{10}$$

$$\underline{3^{68} \cdot 3^2 \equiv 1 \cdot 9 \pmod{10}}$$

$$3^{70} \equiv 9 \pmod{10}$$

o halde $(123)^{70}$ sayısının birler basamağında 9 bulunur.

ÖRNEK(9)

$Z/5$ te $\bar{3}x + y = \bar{3}$ ve $x + \bar{3}y = \bar{1}$ denklem sistemini sağlayan $x=?$

ÇÖZÜM:**1.yol**

$$\begin{array}{rcl} 2/ \quad \bar{3}x + y = \bar{3} & \rightarrow & x + \bar{2}y = \bar{1} \\ x + \bar{3}y = \bar{1} & + & x + \bar{3}y = \bar{1} \\ \hline \bar{2}x = \bar{2} & & \\ \bar{3} \cdot \bar{2}x = \bar{3} \cdot \bar{2} & \rightarrow & x = \bar{1} \text{ dir.} \end{array}$$

2.yol

Sanki mod sorusu değilmiş gibi çözelim. Yok etme metodunu kullanırsak;

$$\begin{array}{rcl} -3/ 3x + y = 3 & \rightarrow & -9x - 3y = -9 \\ x + 3y = 1 & + & x + 3y = 1 \\ \hline -8x = -8 & & \\ x = 1 & & \end{array}$$

bulunur.(Eğer sonuç 0,1,2,3,4 ten farklı olsaydı sonucu moda uyarlardık)

NOT : Bu tür sorularda normal işlem yapıp daha sonra mod'u devreye sokmak işi kolaylaştırır.

ÖRNEK(10)

$Z/5$ te $\bar{2}x + \bar{3} = \bar{4}$ denklemini çözümüz

ÇÖZÜM:

Bu soruyu pratik yoldan yapalım , normal çözüm uygulayalım

$$2x + 3 = 4 \rightarrow 2x = 4 - 3$$

$$2x = 1$$

$$x = \frac{1}{2} \text{ bu değer } Z/5 \text{ te}$$

olmadığından aşağıdaki işlemleri uygularız

1 ve 6 aynı denklik sınıfında olduklarıdan birbirleri yerine kullanılabilirler.

$$x = \frac{1}{2} \equiv \frac{6}{2} = 3 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK(11)

$(7^{29} + 2^{18} \cdot 3^{29} + 0!)$ sayısının 6 ile bölümünden kalan kaçtır?

ÇÖZÜM:

Her birinin (mod 6)'daki değerini bulalım

$$7^{29} \equiv 1^{29} = 1 \pmod{6} \quad \dots \dots (1)$$

$$2^{18} \cdot 3^{29} = 2^{18} \cdot 3^{18} \cdot 3^{11} = 6^{18} \cdot 3^{11} = 0 \cdot 3^{11} = 0 \pmod{6}$$

2)

$$0! = 1 \quad \dots \dots (3)$$

(1),(2) ve (3) ten;

$$(7^{29} + 2^{18} \cdot 3^{29} + 0!) = 1 + 0 + 1 = 2 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK(12)

$$f: \mathbb{Z}/5 \rightarrow \mathbb{Z}/5, f(x) = 3x - 2 \text{ ise } f^{-1}(x) = ?$$

ÇÖZÜM:

Burada da pratik çözümü kullanırsak

$$f(x) = 3x - 2 \text{ ise } f^{-1}(x) = \frac{x+2}{3} \text{ bulunur. Şimdi bu}$$

değerleri mod 5 e uyarlayalım

$$f^{-1}(x) = \frac{x+2}{3} = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3} \equiv \frac{6}{3}x + \frac{12}{3} = 2x + 4 \text{ olur.}$$

$(1 \equiv 6 \text{ ve } 2 \equiv 12 \pmod{5})$ olduğunu hatırlatalım

ÖRNEK(13)

$$(1999)^{2000} \equiv x \pmod{2000} \text{ ise } x = ?$$

ÇÖZÜM:

$$1999 \equiv -1 \pmod{2000}$$

$$\Rightarrow (-1)^{2000} \equiv 1 \pmod{2000}$$

o halde cevap $x = 1$ dir.

ÖRNEK(14)

$x \in \mathbb{N}$ olmak üzere 7^{4x+7} sayısının 5 ile bölümünden kalan kaçtır?

ÇÖZÜM:

$$x = 0 \text{ için } 7^{4x+7} = 7^7 \equiv 2^7 \pmod{5}$$

$$2^1 \equiv 2 \pmod{5}$$

$$2^2 \equiv 4 \pmod{5}$$

$$2^3 = 8 \equiv 3 \pmod{5}$$

$$2^4 = 16 \equiv 1 \pmod{5} \Rightarrow 2^4 \equiv 1 \pmod{5}$$

$$\underline{2^3 \equiv 3 \pmod{5}}$$

$$2^3 \cdot 2^4 \equiv 3 \cdot 1 \pmod{5}$$

$2^7 \equiv 3 \pmod{5}$ olur.

ÖRNEK(15)

$\mathbb{Z}/5$ te 3^{-22} ifadesi neye eşittir?

ÇÖZÜM:

$$(\text{mod } 5) \text{ e göre } 3^{-22} = \left(\frac{1}{3}\right)^{22} \equiv \left(\frac{6}{3}\right)^{22} = 2^{22}$$

şimdi soru 2^{22} neye eşittir oldu

$$2^1 \equiv 2 \pmod{5}$$

$$2^2 \equiv 4 \pmod{5}$$

$$2^3 = 8 \equiv 3 \pmod{5}$$

$$2^4 = 16 \equiv 1 \pmod{5} \Rightarrow 2^4 \equiv 1 \pmod{5}$$

$$\underline{(2^4)^5 \equiv 1^5 \pmod{5}}$$

$2^{20} \equiv 1 \pmod{5}$ bu satırı

$2^2 \equiv 4 \pmod{5}$ satırı ile taraf tarafa çarpalım

$$\underline{2^{20} \equiv 1 \pmod{5}}$$

$$\underline{2^2 \equiv 4 \pmod{5}}$$

$$2^{20} \cdot 2^2 \equiv 1 \cdot 4 \pmod{5}$$

$2^{22} \equiv 4 \pmod{5}$ bulunur.

ÖRNEK(16)

$Z/6$ da $(x^2 + 2)$ ifadesinin çarpanlarından biri A.Hangisidir?

- A) $x+3$ B) $x-1$ C) $x+4$ D) $x-4$ E) $x+1$

ÇÖZÜM:

$2 \equiv -4 \pmod{6}$ olduğundan

$$(x^2 + 2) \equiv (x^2 - 4)$$

$$(x^2 - 4) = (x - 2)(x + 2)$$

$-2 \equiv 4 \pmod{6}$ olduğundan

$(x^2 + 2) \equiv (x^2 - 4) = (x - 2)(x + 2) \equiv (x + 4)(x + 2)$ olur. Bu durumda da cevap D şıkkıdır.

ÖRNEK(17)

Bugün Salı ise 25 gün sonra hangi gündür?

ÇÖZÜM:

Önce 25'in 7'ye bölümünden kalanı bulalım

$$\begin{array}{r} 25 \\ - 21 \\ \hline 4 \end{array} \quad \left| \begin{array}{c} 7 \\ 3 \end{array} \right.$$

şimdi Salı gününe 0 diyerek 4 e kadar sayalım

(Salı çarş Peş. Cum. C.tesi

0 1 2 3 4

o halde cevap C.tesi' dir.

ÖRNEK(18)

4 günde bir seyahat eden bir işadamı ilk seyahatini p.tesi yapmışsa 6. Seyahatini ne zaman yapar?

ÇÖZÜM:

Once 6. seyahatin toplam kaç gün sonra gerçekleşeceğini bulalım

ilk seyahat yapıldığı için geriye 5 seyahat kalır.

$4.5 = 20$ gün sonra 6.seyahat gerçekleşir.

$$\begin{array}{r} 20 \\ - 14 \\ \hline 6 \end{array} \quad \left| \begin{array}{c} 7 \\ 2 \end{array} \right.$$

ilk seyahat p.tesi gerçekleştiğinden p.tesi'ye 0 diyerek 6'ya kadar sayalım(kalan 6 olduğu için)

(P.tesi	Salı	çarş	Peş.	Cum.	C.tesi	Pazar
0	1	2	3	4	5	6

demek ki 6. seyahat Pazar günü olur.

ÖRNEK(19)

$6^6 + 6^5$ sayısının 5 ile bölümünden kalan kaçtır?

(ÖSS 2002)

ÇÖZÜM:

$6 \equiv 1 \pmod{5}$ olduğundan

$$6^6 + 6^5 \equiv 1^6 + 1^5 \equiv 1 + 1 = 2 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK(20)

$1 < a \leq 10$ olmak üzere,
 $12 - a \equiv 0 \pmod{a}$
 denkliğini sağlayan kaç tane a tam sayısı vardır?
(ÖSS 2002)

ÇÖZÜM:

$$12 - a = ak \text{ olmalıdır } (k \in \mathbb{Z})$$

$$12 = a + ak$$

$$12 = a(1+k)$$

$$1 + k = \frac{12}{a} \quad \text{burada } a \text{'nın } 12 \text{'yi bölmesi}$$

lazım. 12 'nin bölenleri : $\{1,2,3,4,6,12\}$ dir

$1 < a \leq 10$ olduğundan a 'nın alabileceği değerler;

$$\{2,3,4,6\}$$

olacağından cevap 4 olur.

ÖRNEK(21)

x iki basamaklı bir doğal sayı ;

$$x \equiv 2 \pmod{3}$$

$$x \equiv 2 \pmod{5}$$

olduğuna göre x 'in en büyük ve en küçük değerlerinin toplamı kaçtır?

(ÖSS-2001)

ÇÖZÜM:

$$x \equiv 2 \pmod{3} \rightarrow x - 2 = 3k$$

$$x \equiv 2 \pmod{5} \rightarrow x - 2 = 5m$$

buradan $x - 2$ 'nin hem 3 hem de 5'in katı yani 15'in katı olduğunu söyleyebiliriz.

$$x - 2 = 15n \text{ ise } x = 15n + 2 \text{ dir}$$

$$n = 1 \text{ için } x = 15 \cdot 1 + 2 = 17$$

$$n = 6 \text{ için } x = 15 \cdot 6 + 2 = 92 \text{ olur}$$

bu değerlerin toplamı da $17 + 92 = 109$ olur.

ÖRNEK(22)

23^{23} sayısının birler basamağındaki sayı kaçtır?

(ÖSS-2001)

ÇÖZÜM:

'Birler basamağındaki rakam nedir' sorusu $(\text{mod } 10)$ kullanımını gerektirir. Yani soru aslında $23^{23} \equiv ? \pmod{10}$

şeklindedir. Taban 10'dan büyük olduğundan önce tabanı mod 10'a çevirelim

$$23 \equiv 3 \pmod{10} \text{ olduğundan sorumuz}$$

$$3^{23} \equiv ? \pmod{10} \text{ şeklinde denecektir.}$$

$$3^1 \equiv 3 \pmod{10}$$

$$3^2 \equiv 9 \pmod{10}$$

$$3^3 \equiv 7 \pmod{10}$$

$$3^4 \equiv 1 \pmod{10}$$

$$(3^4)^5 \equiv 1^5 \pmod{10} \rightarrow 3^{20} \equiv 1 \pmod{10}$$

$$\underline{3^3 \equiv 7 \pmod{10}}$$

$$3^{20} \cdot 3^3 \equiv 7 \cdot 1 \pmod{10}$$

$$3^{23} \equiv 7 \pmod{10}$$

bulunur. O halde 23^{23} sayısının birler basamağında 7 sayısı vardır.

ÖRNEK(23)

3^{73} 'ün 5 ile bölümünden kalan kaçtır?

(ÖSS-2000)

ÇÖZÜM:

Sorumuz, $3^{73} \equiv ? \pmod{5}$ anlamına geldiğinden

$$3^1 \equiv 3 \pmod{5}$$

$$3^2 \equiv 4 \pmod{5}$$

$$3^3 \equiv 2 \pmod{5}$$

$$3^4 \equiv 1 \pmod{5}$$

$$(3^4)^{18} \equiv 1^{18} \pmod{5} \rightarrow 3^{72} \equiv 1 \pmod{5}$$

$$\underline{3^1 \equiv 3 \pmod{5}}$$

$$3^{72} \cdot 3^1 \equiv 1 \cdot 3 \pmod{5}$$

$$3^{73} \equiv 3 \pmod{5}$$

o halde cevap 3 olur.

ÖRNEK(24)

$(127)^9$ sayısının 7 ile bölümünden kalan kaçtır?

(ÖSS-98)

ÇÖZÜM:

Taban 7'den büyük olduğundan önce tabanı mod 7 'ye çevirelim

$$127 \equiv 1 \pmod{7}$$

$(127)^9 \equiv (1)^9 \equiv 1 \pmod{7}$ bulunur.

o halde cevabımız 1 dir.

MATEMATİK SİSTEMLERİ

Bir küme ile bu küme üzerinde bir yada daha çok işleme sistem denir. Örneğin $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ bir sistem oluşturur.

GURUP

Boş olmayan bir A kümesi ile bu küme üzerinde tanımlı bir Δ işlemi verilsin

- 1) A , Δ işlemine göre kapalı,
- 2) A 'da Δ işleminin birleşme özelliği
- 3) A 'da Δ işleminin birim elemanı
- 4) A 'da Δ işleminde her elemanın tersi varsa (A, Δ) sistemine bir grup denir.

Bu gurubun değişme özelliği varsa (A, Δ) sistemi bir değişimeli gurup veya bir Abeliyen grup olur.

ÖRNEK (25)

(A, Δ) sistemi gurup olsun $a, b, c \in A$ için

$$a \Delta x \Delta b = c \text{ ise } x = ?$$

ÇÖZÜM:

Sistem bir grup olduğundan birim eleman ve ters elemanı vardır.(birim eleman e olsun)

$$a \Delta x \Delta b = c \Rightarrow a^{-1} \Delta a \Delta x \Delta b = a^{-1} \Delta c$$

$$e \Delta x \Delta b = a^{-1} \Delta c$$

$$x \Delta b \Delta b^{-1} = a^{-1} \Delta c \Delta b^{-1}$$

$$x \Delta e = a^{-1} \Delta c \Delta b^{-1}$$

$$x = a^{-1} \Delta c \Delta b^{-1}$$

bulunur.

UYARI:(A, Δ) sistemi gurup ise $\forall x, y \in A$ için

- 1) $(a\Delta y)^{-1} = y^{-1}\Delta x^{-1}$ dir
- 2) bir gurubun işlem tablosunda her bir satırda veya bir sütunda bir eleman yalnız bir defa bulunur.

ÖRNEK (26)

$Z/6 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ kümesi üzerinde '+' işleminin tablosu aşağıdaki gibidir. Bu tabloyu inceleyelim. Tablodaki verilerin kapalılık, birleşme, değişme, birim eleman ve ters eleman için durumunu gözlemleyelim

+	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	0
2	2	3	4	5	0	1
3	3	4	5	0	1	2
4	4	5	0	1	2	3
5	5	0	1	2	3	4

(Z/6, +) sistemi değişmeli gurup

A kümesinde '+' işleminin birim '0' elemanı var.
 A kümesi '+' işlemine göre kapalı,
 A kümesinde '+' işleminin birleşme özelliği var,
 A kümesinde '+' işleminde her elemanın tersi var.
 A kümesinde '+' işleminin değişme özelliği var

ÖRNEK (27)

$A = \{a, b, c, d\}$ olmak üzere (A, Δ) sistemi değişmeli guruptur. Δ işleminin birim elemanı a ve c'nin tersi d ise ;

Δ	a	b	c	d
a			2	
b	1			
c				
d			3	

1=? 2=? 3=?

ÇÖZÜM:

Verilen bilgilere göre tabloyu oluşturursak

Δ	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	c	d	b	a
d	d	c	a	b

O halde $1 = b$, $2 = c$, $3 = a$ olur.**ÖRNEK (28)**

*Z/6'da karekökü olmayan sayıların kümesi nedir?

ÇÖZÜM:

x	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5
2	0	2	4	0	2	4
3	0	3	0	3	0	3
4	0	4	2	0	4	2
5	0	5	4	3	2	1

Esas köşegendeki sayıların karekökü vardır.

Yani $\{0, 1, 3, 4\}$ sayılarının kökü vardır. $\{2, 5\}$
 Sayılarının karekökleri yoktur

**KONUMUZ BİTTİ. ŞİMDİ TESTLERE
GEÇEBİLİRİSİNİZ**

**DİLESİNİZ KONU ANLATIMINI BİR DE
YOUTUBE KANALIMIZDAN VİDEO OLARAK
DA İZLEYEBİLİRİSİNİZ**

Youtube kanalımız: **CEBİR HOCAM**

Başarılılar diliyorum
 İbrahim Halil BABAOĞLU
 Matematik Öğretmeni