

RASYONEL SAYILAR

KESİR: $a, b \in \mathbb{Z}$ ve $b \neq 0$ olmak üzere $\frac{a}{b}$ şeklindeki ifadelere kesir denir.

$$\begin{aligned}\frac{a}{b} &\rightarrow pay \\ \frac{a}{b} &\rightarrow \text{kesir çizgisi} \\ \frac{a}{b} &\rightarrow payda\end{aligned}$$

$\frac{4}{6}, -\frac{14}{7}, \frac{5}{15}, -\frac{7}{21}, \frac{0}{9}, 4, -2, \dots$ gibi ifadeler kesir belirtir.

DENK KESİRLER: $\frac{a}{b}$ ile $\frac{c}{d}$ kesirleri için $a.d = b.c$

oluyorsa $\frac{a}{b} \equiv \frac{c}{d}$ denir. Bu denklik $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ olarak da yazılabilir.

$$\frac{2}{4} \equiv \frac{1}{2} \equiv \frac{3}{6} \dots \Rightarrow \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = \frac{3}{6}$$

RASYONEL SAYI: kesirler kümesinde denklik sınıflarını temsil eden her bir elemansa bir rasyonel sayı denir. O halde $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$ ve a ile b aralarında asal olmak üzere $\frac{a}{b}$ şeklindeki her ifadeye bir rasyonel sayı denir.

NOT: i) $\frac{0}{a} = 0$ dır. ($a \neq 0$)

ii) $\frac{a}{0}$ → tanımsız

iii) Payları 1 olan kesirlerin her birine kesir birimi denir.

$\frac{1}{2}$ kesri, $\frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \dots$ kesirlerinin

$\frac{1}{5}$ kesri, $\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \dots$ kesirlerinin birimidir.

$\frac{5}{3}$ kesri, kesir birimi cinsinden $5 \cdot \frac{1}{3}$ şeklinde yazılmıştır.

KESİR ÇEŞİTLERİ:

$\frac{a}{b}$ kesri için,

i) $|a| < |b|$ ise kesir, basit kesirdir.

basit kesir için $-1 < \frac{a}{b} < 1$ eşitsizliği geçerlidir.

$$-\frac{4}{5}, -\frac{1}{4}, 0, \frac{3}{5}, \dots \text{ gibi}$$

ÖRNEK(1)

$a \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $\frac{3a-4}{5a-2}$ bir basit kesir ise a aşağıdakilerden hangisi olamaz?

- A) -2 B) -1 C) 1 D) 2 E) 3

ÇÖZÜM:

Basit kesir kuralından hareketle

$-1 < \frac{3a-4}{5a-2} < 1$ şartına uygun olmayan şıkları arayacağımız

$$\begin{aligned}a = -1 \text{ için } \frac{3a-4}{5a-2} &= \frac{3.(-1)-4}{5.(-1)-2} \\ &= \frac{-7}{-7} = 1 \text{ bulunur.}\end{aligned}$$

bu değer (-1,1) aralığında olmadığından bir basit kesir olamaz.

O halde cevap B şıkları olur.

ÖRNEK(2)

$a \in \mathbb{Z}$ ve $\frac{2a-4}{3a+5}$ kesri bir basit kesir ise a 'nın alamayacağı tam sayı değerleri kaç tanedir?

ÇÖZÜM:

$\frac{2a-4}{3a+5}$ kesri bir basit kesir ise $|2a-4| < |3a+5|$ şartı sağlanmalıdır. a 'nın alamayacağı değerler ise bu eşitsizliğin tersini almayı gerektirir

$|2a-4| \geq |3a+5|$ eşitsizliğini çözersek

(önce her tarafın karesi alınır.)

$$(2a-4)^2 \geq (3a+5)^2$$

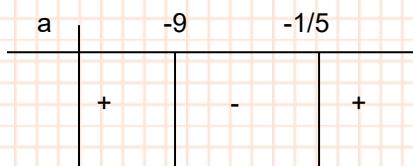
$$4a^2 - 16a + 16 \geq 9a^2 + 30a + 25$$

$$5a^2 + 46a + 9 \leq 0$$

$$(5a+1)(a+9) \leq 0$$

$$5a+1=0, a = -1/5$$

$$a+9=0, a=-9$$



o halde $a = -9, -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1$

a sayısı 9 değer alabilir.

ii) $|a| \geq |b|$ ise kesir, bileşik kesirdir.

bileşik kesirler için; $\frac{a}{b} \geq 1$ veya $\frac{a}{b} \leq -1$ gibi eşerlidir.

$$-\frac{5}{3}, -\frac{7}{2}, -5, 4, \frac{7}{4}, \dots \text{ gibi}$$

ÖRNEK(3)

$\frac{3x+4}{7}$ kesri bileşik kesir ise $x \in \mathbb{Z}$ 'lerin toplamı nedir?

ÇÖZÜM:

$$\left| \frac{3x+4}{7} \right| \geq 1 \text{ olmalı buradan;}$$

$$\frac{3x+4}{7} \geq 1 \text{ ve } \frac{3x+4}{7} \leq -1 \text{ eşitsizlikleri}$$

çözülürse

$$\frac{3x+4}{7} \geq 1 \rightarrow 3x+4 \geq 7 \rightarrow 3x \geq 3 \rightarrow x \geq 1$$

$$\frac{3x+4}{7} \leq -1 \rightarrow 3x+4 \leq -7 \rightarrow x \leq -\frac{11}{3}$$

her iki aralıktaki tam sayı değerlerini toplayalım,

$x \geq 1$ için : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ...

$x \leq -\frac{11}{3}$ için : ... -8, -7, -6, -5, -4

geriye kalan sayılar $1+2+3 = 6$ bulunur.

iii) Bir tam sayı ve bir basit kesirle ifade edilen kesirlere tam sayılı kesir denir. $a \frac{b}{c}$

NOT: $a \frac{b}{c} = a + \frac{b}{c}$ olarak da ifade edilebilir

$$-3\frac{4}{7}, 2\frac{3}{5}, 5\frac{0}{7}, \dots \text{ gibi}$$

DİKKAT!!: $2\frac{1}{2} \neq 2\frac{1}{2}$

SABİT KESİR: $\frac{ax+b}{cx+d}$ kesri $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ şartını

sağlıyorsa sabit kesir adını alır. Sabit kesirde x yerine yazılacak tüm değerler için kesrin değeri değişmez.

$$\diamond \frac{2x+6}{3x+9} \text{ gibi}$$

ÖRNEK(4)

$\frac{5x+a}{2x-3}$ kesri bir sabit kesir ise a=?

ÇÖZÜM:

Kural gereği $\frac{5}{2} = \frac{a}{-3}$ olmalı. Buradan

$$2a=-15$$

$$a=-\frac{15}{2} \text{ olur.}$$

BİLEŞİK KESİRDEN TAMSAYILI KESİRE ÇEVİRME

Pay payda bölünür. Bölüm, tam kısma; kalan, paya ve bölen de payda yazılır.

$$\diamond \quad \frac{25}{4} = 6 \frac{1}{4}$$

$$\diamond \quad -\frac{17}{5} = -3 \frac{2}{5}$$

ÖRNEK(5)

$a,b,c \in Z^+$ ve $\frac{32}{12} = a + \frac{1}{b + \frac{1}{c}}$ ise a+b+c=?

ÇÖZÜM:

İşlemi aşama aşama yapalım.

$$\begin{array}{r} 32 \\ -24 \\ \hline 8 \end{array} \quad \begin{array}{r} 12 \\ | \\ 2 \end{array}$$

$$2 \frac{8}{12} = 2 \frac{2}{3} = 2 \frac{1}{\frac{3}{2}} = 2 \frac{1}{1 \frac{1}{2}}$$

$$2 \frac{1}{1 \frac{1}{2}} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} \\ a=2, b=1, c=2$$

a+b+c=2+1+2=5 bulunur.

TAMSAYILI KESİRDEN BİLEŞİK KESİRE ÇEVİRME

$$a \frac{b}{c} = \frac{a.c + b}{c} \quad \text{ve} \quad -a \frac{b}{c} = -\left(\frac{a.c + b}{c}\right) \text{ dir.}$$

$$\diamond \quad 2 \frac{3}{4} = \frac{2.4 + 3}{4} = \frac{11}{4}$$

$$\diamond \quad -3 \frac{1}{4} = -\frac{13}{4}$$

NOT:

$$a \frac{b}{c} = a + \frac{b}{c} \quad \text{ve} \quad -a \frac{b}{c} = -a - \frac{b}{c}$$

olduğunu unutmayıniz.

KESİRLERDE GENİŞLETME VE SADELEŞTİRME

Bir kesrin payı ve paydası aynı sayıyla çarpılır yada bölünürse kesrin değeri değişmez.

$$\frac{a}{b} = \frac{a.k}{b.k} = \frac{a \div k}{b \div k}$$

NOT: Bir kesir en sade şekele geldiğinde yeni kesrin pay ve paydası aralarında asal olurlar. a ve b aralarında asal iki sayı ise;

Örneğin; $\frac{a}{b} = \frac{20}{25}$ kesri için $\frac{a}{b} = \frac{4}{5}$ olduğunda a=4 ve b=5 olur.

ÖRNEK(6)

Değeri $\frac{3}{7}$ olan bir kesrin payına 5 ekler, paydasına da yeni payı eklersek kesrin değeri $\frac{4}{11}$ oluyor. Esas kesrin paydası payından kaç fazla idi?

ÇÖZÜM:

Kesrimiz $\frac{3x}{7x}$ olsun. Payına 5 ekler, paydasına da yeni payı eklersek

$$\frac{3x+5}{7x+3x+5} = \frac{4}{11}$$

$$\frac{3x+5}{10x+5} = \frac{4}{11}$$

$$40x+20 = 33x+55$$

$$7x = 35$$

$$x = 5$$

$$\text{o halde kesrimiz } \frac{3x}{7x} = \frac{3.5}{7.5} = \frac{15}{35} \text{ olur}$$

sorumuzun cevabı ise $35-15=20$ dir.

ÖRNEK(7)

$3xy-4 = y+5+x$ ifadesinde x 'in hangi değeri için y bulunamaz?

ÇÖZÜM:

Denklemden y çekilirse

$$3xy-y = y+5+4$$

$$y(3x-1) = y+9 \rightarrow y = \frac{y+9}{3x-1}$$

bir kesrin paydası 0 ise o kesir tanımsız olacaktır $3x-1 \neq 0$ dır. o halde $x = 1/3$ olursa y bulunamaz.

ÖRNEK(8)

$x, y \in \mathbb{R}$ ve $y = \frac{2x-3}{3x+1}$ ifadesinde y 'nin hangi değeri için x bulunamaz?

ÇÖZÜM:

Burada da x 'i çekmeliyiz

$$y = \frac{2x-3}{3x+1}$$

$$3xy+y = 2x-3$$

$$3xy-2x = -3-y$$

$$x(3y-2) = -3-y$$

$$x = \frac{-3-y}{3y-2}$$

y 'nin tanımlı olması için $3y-2 \neq 0$ olmalıdır. o halde $3y-2=0$ olursa y bulunamaz

$$3y-2=0 \rightarrow y=2/3 \text{ olur.}$$

ÖRNEK(9)

5,25 sayısı $3 + \frac{a}{b}$ şeklinde yazılırsa a ve b sayma sayıları için en küçük $a+b$ ne olur?

ÇÖZÜM:

$$5,25 = 5 + 0,25$$

$$= 5 + \frac{25}{100} = 5 + \frac{1}{4}$$

$$= 3+2+\frac{1}{4} = 3+\frac{9}{4}$$

$$a=9 \text{ ve } b=4 \text{ buradan } a+b = 13 \text{ olur.}$$

ÖRNEK(10)

Bir kesrin paydası payının 3 katından 4 eksiktir. Bu kesrin payına 7 ekler paydasından 5 çıkarırsak en küçük pozitif tamsayı elde ediliyor. Esas kesrin pay ve paydasının toplamı nedir?

ÇÖZÜM:

$$\text{Esas kesir} = \frac{x}{3x-4} \text{ olsun}$$

Bu kesrin payına 7 ekler paydasından 5 çıkarırsak;

$$\frac{x+7}{3x-4-5} = \frac{x+7}{3x-9}$$

en küçük pozitif tamsayı 1 olduğundan

$$\frac{x+7}{3x-9} = 1 \rightarrow 3x-9 = x+7$$

$$3x-x = 7+9$$

$$2x = 16$$

$$x=8 \text{ bulunur.}$$

Buradan

$$\frac{x}{3x-4} = \frac{8}{3.8-4} = \frac{8}{20}$$

pay ve paydanın toplamı : $8+20=28$ olur.

RASYONEL SAYILARDA İŞLEMLER

1) TOPLAMA – ÇIKARMA

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{a.d \pm b.c}{b.d}$$

Uyarı: Bir tamsayı ile bir kesir $\frac{a \pm b}{c} = \frac{a.c \pm b}{c}$ veya $\frac{b \pm a}{c} = \frac{b \pm ac}{c}$ şeklinde pratik olarak payda eşitlemeden toplanıp çıkarılabilir.

ÖRNEK(11)

$$\frac{3}{2} - 1 + \frac{2}{5} + \frac{7}{2} = ?$$

ÇÖZÜM:

Önce paydası aynı olanlar arasında işlem yapılır.

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} - 1 + \frac{2}{5} + \frac{7}{2} &= \frac{3+7}{2} - 1 + \frac{2}{5} = 5 - 1 + \frac{2}{5} \\ &= 4 + \frac{2}{5} = \frac{4.5+2}{5} = \frac{22}{5} \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

ÖRNEK(12)

$$1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{5} \right) - \left(\frac{2}{5} - \frac{1}{2} \right) = ?$$

ÇÖZÜM:

Parantezler açılırsa bazı değerlerin sadeleştiği görülür.

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{5} - \frac{2}{5} + \frac{1}{2} &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{2}{5} - \frac{2}{5} \\ &= 1 + \frac{1+1}{2} + \frac{2}{5} - \frac{2}{5} \\ &= 1 + 1 \\ &= 2 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

ÖRNEK(13)

$$\frac{3}{4} + \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = ?$$

ÇÖZÜM:

Payda eşitlenerek başlanır.

$$\begin{aligned} \frac{3}{4} + \frac{2}{3} - \frac{1}{2} &= \frac{9+8-6}{12} \\ (3)(4)(6) &= \frac{11}{12} \text{ dir.} \end{aligned}$$

ÖRNEK(14)

$$\frac{1}{3} - \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3} \right) = ?$$

ÇÖZÜM:

Önce parantezler açılır ki sadeleşenler bulunsun

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{3} &= \frac{1}{3} - \frac{1}{3} - \underbrace{\frac{1}{5}}_{0} + \underbrace{\frac{1}{5}}_{0} - \frac{1}{3} \\ &= -\frac{1}{3} \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

ÖRNEK(15)

$$2003\frac{1}{2} - 2002\frac{1}{3} = ?$$

ÇÖZÜM:

$$\begin{aligned} 2003\frac{1}{2} - 2002\frac{1}{3} &= 2003 + \frac{1}{2} - 2002 - \frac{1}{3} \\ &= 2003 - 2002 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \\ &\quad (3)(2) \\ &= 1 + \frac{3-2}{6} \\ &= 1 + \frac{1}{6} = \frac{7}{6} \end{aligned}$$

ÖRNEK(16)

$$\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{3}{2} - \frac{4}{3} + \dots + \frac{11}{2} - \frac{12}{3} = ?$$

ÇÖZÜM:

Paydası aynı olanlar bir araya getirilirse

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2} + \dots + \frac{11}{2} \right) - \left(\frac{2}{3} + \frac{4}{3} + \dots + \frac{12}{3} \right)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1+3+\dots+11}{2} - \frac{2+4+\dots+12}{3} \\ &= \frac{36}{2} - \frac{42}{3} \\ &= 18 - 14 \\ &= 4 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

NOT: İki rasyonel sayı arasında sonlu sayıda rasyonel sayı vardır. İki rasyonel sayının orta arasındaki sayı; paydalar eşitlendikten sonra paylar toplamının yarısı paya, eşitlenen payda da paydaya yazılarak bulunur.

❖ $\frac{6}{7}$ ile $\frac{4}{3}$ arasasın sayı $\frac{23}{21}$ dir.

ÇARPMA VE BÖLME

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a.c}{b.d} \quad \text{ve} \quad \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a.d}{b.c} \text{ dir.}$$

Uyarı-1: $\frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{b}{a}$ ve $\frac{\frac{a}{b}}{1} = \frac{a}{b}$ olduğuna dikkat edin

2) $\frac{\cancel{2}}{3} = \frac{2}{3}$ payda'daki 5'ler sadeleştir

3) $\frac{5}{\cancel{7}} = \frac{3}{5}$ pay'daki 7'ler sadeleştir.

ÖRNEK(17)

$$\frac{12}{27} \cdot \frac{48}{32} = ?$$

ÇÖZÜM:

$$\begin{aligned}\frac{12}{27} \cdot \frac{48}{32} &= \frac{12.48}{27.32} \\ &= \frac{(3.2.2).(16.3)}{(3.3.3).(2.16)} \text{ sadeleştirilirse} \\ &= \frac{2}{3} \text{ bulunur}\end{aligned}$$

ÖRNEK(18)

$$\frac{3}{4} + \frac{5}{7} \cdot \frac{49}{25} = ?$$

ÇÖZÜM:

$$\begin{aligned}\frac{3}{4} + \frac{5}{7} \cdot \frac{7.7}{5.5} &= \frac{3}{4} + \frac{7}{5} \\ (5)(4) &\\ &= \frac{15+28}{20} = \frac{43}{20} \text{ dir.}\end{aligned}$$

ÖRNEK(19)

$$\frac{a}{3} = \frac{7}{8} \text{ ise } a=?$$

ÇÖZÜM:

$$\begin{aligned}\frac{a.4}{3} &= \frac{7}{8} \\ 32a &= 21 \\ a &= \frac{21}{32}\end{aligned}$$

İŞLEM SIRASI:

- 1) Önce parantez içleri (parantez ve kesir çizgileri işlemin yönünü belirler)
- 2) Üslü ifadeler
- 3) Çarpma – Bölme
- 4) Toplama Çıkarma

ÖRNEK(20)

$$2 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \right) - 3 \div \frac{1}{3} = ?$$

ÇÖZÜM:

Once parantez içleri yapılırsa

$$\begin{aligned}2 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \right) - 3 \cdot \frac{3}{1} \\ (3)(2) \quad (2) \\ &= 2 - \frac{3+2}{6} \cdot \frac{1-2}{4} - 9 \\ &= 2 - \frac{5}{6} \cdot \frac{-1}{4} - 9 \\ &= \frac{5}{24} - 7 = \frac{5-168}{24} = -\frac{163}{24}\end{aligned}$$

ÖRNEK(21)

$$\frac{\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4} \right) \left(\frac{5}{3} - \frac{3}{4} \right)}{\frac{2}{3} \div \frac{4}{9}} = ?$$

ÇÖZÜM:

$$\begin{aligned}\frac{\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4} \right) \left(\frac{5}{3} - \frac{3}{4} \right)}{\frac{2}{3} \cdot \frac{9}{4}} &= \frac{2-3}{4} \cdot \frac{20-9}{12} \\ (2) \quad (4)(3) &\\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{11}{12} \\ &= -\frac{1}{4} \cdot \frac{11}{12} \\ &= -\frac{11}{48} \cdot \frac{2}{3} = -\frac{11}{72} \text{ olur.}\end{aligned}$$

ÖRNEK(22)

$$\left(1 + \frac{2}{3}\right) \cdot \left(1 + \frac{2}{5}\right) \cdot \left(1 + \frac{2}{7}\right) \cdots \left(1 + \frac{2}{15}\right) = ?$$

ÇÖZÜM:

Önce parantez içlerindeki işlemler yapılır.
daha sonra gerekli sadeleştirmeler yapılır.

$$\frac{5}{3} \cdot \frac{7}{5} \cdot \frac{9}{7} \cdots \frac{17}{15} = \frac{17}{3} \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK(23)

$$a = \left[\left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{4}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{18}\right) \right]$$

$$\text{ve } b = \left[\left(1 - \frac{1}{5}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{7}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{19}\right) \right] \text{ ise } a.b = ?$$

ÇÖZÜM:

Önce parantez içleri yapılır. Daha sonra sadeleştirmeler gerçekleştirilir.

$$a = \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{7}{6} \cdots \frac{19}{18} \text{ ve } b = \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{9} \cdots \frac{18}{19}$$

a ve b 'yi iç içe çarparak;

$$a.b = \underbrace{\frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{6}{7} \cdots}_{1} \underbrace{\frac{19}{18} \cdot \frac{18}{19}}_{1}$$

$$a.b = \frac{3}{2} \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK(24)

$$\frac{2000\frac{1}{5}-1998\frac{1}{5}}{2001\frac{3}{7}-1999\frac{3}{7}} = ?$$

ÇÖZÜM:

$$\begin{aligned} \frac{2000\frac{1}{5}-1998\frac{1}{5}}{2001\frac{3}{7}-1999\frac{3}{7}} &= \frac{2000\cancel{\frac{1}{5}}-1998\cancel{\frac{1}{5}}}{2001\cancel{\frac{3}{7}}-1999\cancel{\frac{3}{7}}} \\ &= \frac{2}{2} \\ &= 1 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

ÖRNEK(25)

$$\frac{2}{5-\frac{1}{3}:\frac{2}{3}-\frac{5}{2}} = ?$$

ÇÖZÜM:

$$\frac{2}{5-\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}-\frac{5}{2}} = \frac{2}{5-\frac{1}{2}-\frac{5}{2}} = \frac{2}{5-\frac{6}{2}}$$

$$\frac{2}{5-3} = \frac{2}{2} = 1 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK(26)

$$\frac{4}{3} - \frac{3}{2} + \frac{7}{3} - 10 = ?$$

ÇÖZÜM:

$$\frac{4}{3} - \frac{3}{2} + \frac{7}{3} - 10 = 4 \cdot \frac{2}{3} - \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{7}{3} - 10$$

$$= \frac{8}{3} - \frac{2}{3} + \frac{7}{3} - 10$$

$$= \frac{8-2+7}{3} - 10$$

$$= \frac{13}{3} - 10$$

$$= \frac{13-30}{3} = -\frac{17}{3} \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK(27)

$x, y \in \mathbb{R}$ ve $y \neq 0$ ise $\frac{x}{y} = 5$ sayısı $\frac{x}{y} = 7$ sayısının kaç katıdır?

ÇÖZÜM:

İfadelerin bilinmeyenlerden örülü olması bazen acaba dedirtir kişiye, halbuki somut sayılarla bu işlem nasıl yapılıyorsa bilinmeyenlerle de öyle yapılır. Yani 8 sayısı 2'nin kaç katıdır. Dendiğinde

nasıl 8'i 2'ye böülüyorsak burada da $\frac{x}{5} = \frac{y}{7}$ 'yi $\frac{x}{y} = ?$ 'ye böleriz

$$\begin{aligned}\frac{x}{y} : \frac{x}{y} &= \left(\frac{x}{y} \cdot \frac{1}{5}\right) : \left(\frac{x}{y} \cdot \frac{7}{7}\right) \\ &= \frac{x}{5y} : \frac{7x}{y} \\ &= \frac{x}{5y} \cdot \frac{y}{7x}\end{aligned}$$

(x ve y'ler sadeleşirse)

$$= \frac{1}{35} \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK(28)

Bir x doğal sayısını 0,36 ile bölmek, aslında kaç ile çapmak demektir?

ÇÖZÜM:

$$\begin{aligned}\frac{x}{0,36} &= \frac{x}{\frac{36}{100}} \\ &= x \cdot \frac{100}{36} \\ &= x \cdot \frac{25}{9}\end{aligned}$$

demek ki bir x doğal sayısını 0,36 ile bölmek, aslında $\frac{25}{9}$ ile çapmak demekmiş

ÖRNEK(29)

$$\left(2 - \frac{15}{4}\right) \cdot \left(1 - \frac{15}{5}\right) \cdot \left(2 - \frac{15}{6}\right) \cdots \left(1 - \frac{15}{21}\right) = ?$$

ÇÖZÜM:

Parantez içleri açıldığında benzer sorular gibi sadeleşmenin olmadığı görülür. Burada gizlenen bir 0(sıfır) var. Hangi terim sıfırdır onu bulalım.

İfade açılmaya devam edildiğinde;

$$\left(2 - \frac{15}{4}\right) \cdot \left(1 - \frac{15}{5}\right) \cdot \left(2 - \frac{15}{6}\right) \cdots \underbrace{\left(1 - \frac{15}{15}\right)}_0 \cdots = 0$$

çarpım durumundaki sayılarından biri sıfır ise sonuç da sıfırdır. O halde cevap 0(sıfır) olur.

ÖRNEK(30)

$$\frac{\frac{3}{5} - \frac{2}{3} + \frac{1}{8}}{\frac{3}{4} - \left(\frac{20}{3} - \frac{1}{2} - \frac{26}{5}\right) + \frac{4}{5}} = ?$$

ÇÖZÜM:

Bu denli kalabalık sorularda hep bir püf noktası vardır. Ve aslında hep te kolay olurlar o püf nokta bulununca .Sorunun içine direk girmektense önce o püf noktasını bulmak zaman kaybını önleyecektir. Aksi halde payda eşitleme yoluyla bu soruyu çözmeye çalışmak deveye hendeke atlatmaktan beterdir...

$$\frac{\frac{3}{5} - \frac{2}{3} + \frac{1}{8}}{\frac{3}{4} - \frac{20}{3} + \frac{1}{2} + \frac{26}{5} + \frac{4}{5}} = \frac{\frac{3}{5} - \frac{2}{3} + \frac{1}{8}}{\frac{6+4}{8} - \frac{20}{3} + \frac{26+4}{5}}$$

(2) (4)

$$= \frac{\frac{3}{5} - \frac{2}{3} + \frac{1}{8}}{\frac{10}{8} - \frac{20}{3} + \frac{30}{5}} = \frac{\cancel{\frac{3}{5} - \frac{2}{3} + \frac{1}{8}}}{\cancel{10} \left(\frac{1}{8} - \frac{2}{3} + \frac{3}{5} \right)} = \frac{1}{10}$$

(Burada pay'daki kesirlerin paydalarına bakarak payda'daki kesirleri düzenlediğimize dikkat edin)

ÖRNEK(31)

$$\frac{\frac{5}{2} - \frac{12}{5} - \frac{6}{7}}{\frac{5}{3} - \frac{8}{7} - \frac{4}{5}} = ?$$

(!!Üstteki 2, alttaki 3 paydalarını 6 da eșle)

ÇÖZÜM:

Üstteki soruda yaptığımız açıklama burada da geçerli önce püf nokta bulunmalı
Üstteki 2, alttaki 3 paydalarını 6 da eşleyip ortak paranteze alalım

$$\begin{aligned} & \frac{\frac{5}{2} - \frac{12}{7} - \frac{6}{5}}{\frac{5}{3} - \frac{8}{7} - \frac{4}{5}} = \frac{\frac{15}{6} - \frac{12}{7} - \frac{6}{5}}{\frac{10}{6} - \frac{8}{7} - \frac{4}{5}} \\ (3) & \quad = \frac{3 \left(\frac{5}{6} - \frac{4}{7} - \frac{2}{5} \right)}{2 \left(\frac{5}{6} - \frac{4}{7} - \frac{2}{5} \right)} \\ (2) & \quad = \frac{3}{2} \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

ÖRNEK(32)

$a = \frac{2}{3} - \frac{4}{5} + \frac{1}{7}$ ise $\frac{5}{3} + \frac{1}{5} - \frac{6}{7}$ nin a cinsinden
değeri nedir?

ÇÖZÜM:

$$\frac{5}{3} + \frac{1}{5} - \frac{6}{7} \text{ ifadesini düzenleyelim}$$

$$\frac{5}{3} = 1 + \frac{2}{3}, \quad \frac{1}{5} = +1 - \frac{4}{5}, \quad -\frac{6}{7} = -1 + \frac{1}{7}$$

$$\begin{aligned} & = 1 + \frac{2}{3} + 1 - \frac{4}{5} - 1 + \frac{1}{7} \\ & = 1 + \underbrace{\frac{2}{3} - \frac{4}{5} + \frac{1}{7}}_a \\ & = a + 1 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

ÖRNEK(33)

x pozitif bir ondalık sayı ve $x + \frac{3}{25}$ bir tamsayı ise
 x 'in virgülüden sonrası kaçtır?

ÇÖZÜM:

İfadeyi 1'e eşitlersek

$$x + \frac{3}{25} = 1 \rightarrow x = 1 - \frac{3}{25}$$

$$x = \frac{22}{25}$$

(4)

$$x = \frac{88}{100} = 0,88$$

O halde cevap 88 olur.

ÖRNEK(34)

$A = \frac{33}{26} \cdot \frac{105}{34}$ ise $\frac{51}{35} \cdot \frac{39}{22}$ nin A cinsinden değeri nedir?

ÇÖZÜM:

$\frac{51}{35} \cdot \frac{39}{22}$ ifadesine x der ve A ile çarparsak;

$$x = \frac{51}{35} \cdot \frac{39}{22} \rightarrow A \cdot x = \frac{33}{26} \cdot \frac{105}{34} \cdot \frac{51}{35} \cdot \frac{39}{22}$$

şimdi gereli sadeleştirmeleri yapıp sonuca ulaşalım

$$A \cdot x = \frac{81}{8}$$

$$x = \frac{81}{8 \cdot A}$$

ÖRNEK(35)

$$\frac{172 + \frac{22}{17}}{174 - \frac{12}{17}} = ?$$

ÇÖZÜM:

Bu soruda payda eşitlemek hem zahmetli hem de sağılsız bir çözüm olur. Burada da bir püf nokta aranmalıdır.

İfadede yer alan kesirleri düzenlersek

$$\frac{172 + \frac{22}{17}}{174 - \frac{12}{17}} = \frac{172 + 2 - \frac{12}{17}}{174 - \frac{12}{17}}$$

$$= \frac{174 - \frac{12}{17}}{174 - \frac{12}{17}} = 1 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK(36)

$$\frac{3}{a} + \frac{5}{b} + \frac{11}{c} = x \text{ ve}$$

$$\frac{5a+3}{a} + \frac{7b+5}{b} + \frac{10c+11}{c} = 13 \text{ ise } x \text{ kaçtır?}$$

ÇÖZÜM:

$$\frac{5a+3}{a} + \frac{7b+5}{b} + \frac{10c+11}{c} = 13 \quad \text{ifadesini}\newline \text{düzenlemekle işe başyalalım}$$

$$\frac{5a}{a} + \frac{3}{a} + \frac{7b}{b} + \frac{5}{b} + \frac{10c}{c} + \frac{11}{c} = 13$$

$$5 + \frac{3}{a} + 7 + \frac{5}{b} + 10 + \frac{11}{c} = 13$$

$$22 + \frac{3}{a} + \frac{5}{b} + \frac{11}{c} = 13$$

$$\underbrace{\frac{3}{a} + \frac{5}{b} + \frac{11}{c}}_x = 13 - 22$$

$$x = -9 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK(37)

$A = \frac{4}{7} + \frac{3}{8} - \frac{7}{15}$ ve $B = \frac{3}{7} + \frac{5}{8} - \frac{8}{15}$ ise A'nın B cinsinden değeri nedir?

ÇÖZÜM:

İfadeleri alt alta toplarsak

$$\begin{array}{rcl} A & = & \frac{4}{7} + \frac{3}{8} - \frac{7}{15} \\ + & B & = \frac{3}{7} + \frac{5}{8} - \frac{8}{15} \\ \hline A+B & = & \frac{7}{7} + \frac{8}{8} - \frac{15}{15} \\ & & \underbrace{}_{1+1-1} \end{array}$$

$A+B = 1 \rightarrow A = 1 - B$ bulunur.

ÖRNEK(38)

x ve y doğal sayı olmak üzere; $x = \frac{3y-8}{y}$ ise y 'nin alabileceği değerler toplamı nedir?

ÇÖZÜM:

İfade paydalarına parçalanırsa;

$$x = \frac{3y}{y} - \frac{8}{y}$$

$$x = 3 - \frac{8}{y}$$

burada y 'ye 8'i bölen ve aynı zamanda x 'i doğal sayı yapan değerler verilmeli

8'in doğal sayı bölenleri $\{1, 2, 4, 8\}$ dir. bunlarda 1 ve 2 ifadeyi negatif yapar geriye 4 ve 8 yani iki sayı kalır.

Buradan $4+8=12$ olur.

ÖRNEK(39)

$$\frac{2a}{3} + \frac{3b}{4} + \frac{c}{6} = 5 \text{ ise } \frac{4a}{15} + \frac{3b}{10} + \frac{c}{15} = ?$$

ÇÖZÜM:

$\frac{4a}{15} + \frac{3b}{10} + \frac{c}{15}$ ifadesini $\frac{1}{5}$ parantezine alalım;

$$\frac{1}{5} \left(\frac{4a}{3} + \frac{3b}{2} + \frac{c}{3} \right)$$

$\frac{2a}{3} + \frac{3b}{4} + \frac{c}{6} = 5$ ifadesinin her iki tarafını 2 ile çarpalım;

$$2 \left(\frac{2a}{3} + \frac{3b}{4} + \frac{c}{6} \right) = 2.5$$

$$\frac{4a}{3} + \frac{3b}{2} + \frac{c}{3} = 10$$

Şimdi bulunan bu değeri

$$\frac{1}{5} \left(\frac{4a}{3} + \frac{3b}{2} + \frac{c}{3} \right) \text{ ifadesinde yerine yazalım}$$

$$\frac{1}{5} \cdot 10 = \frac{10}{5} = 2 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK(40)

$$\left[\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \right) \cdot \frac{1}{4} \right] : \frac{5}{6} = ?$$

(ÖSS 2002)

ÇÖZÜM:

$$\left[\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \right) \cdot \frac{1}{4} \right] : \frac{5}{6} = \frac{1}{24} : \frac{5}{6}$$

$$= \frac{1}{24} \cdot \frac{6}{5} \text{ (sadeleştirirsek)}$$

$$= \frac{1}{20} \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK(41)

$$\left(\frac{3}{1 - \frac{3}{4}} + \frac{\frac{3}{4} - 1}{3} \right) \div \frac{1}{12} = ?$$

(ÖSS-2000)

ÇÖZÜM:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{3}{1 - \frac{3}{4}} + \frac{\frac{3}{4} - 1}{3} \right) \div \frac{1}{12} = \left(\frac{3}{\frac{1}{4}} + \frac{-\frac{1}{4}}{3} \right) \cdot 12 \\ & = \left(3 \cdot \frac{4}{1} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \right) \cdot 12 \\ & = \left(12 - \frac{1}{12} \right) \cdot 12 = \left(\frac{144 - 1}{12} \right) \cdot 12 = 143 \end{aligned}$$

bulunur.

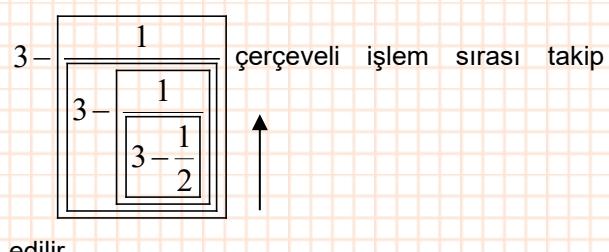
**MERDİVENLİ(ZİNCİR -BASAMAK)
KESİRLER:**

Önce kesir çizgileri belirlenir. Paydaki ve paydadaki kesirler uçlardan kesir çizgisine doğru işleme tabii tutulur.

ÖRNEK(42)

$$3 - \frac{1}{3 - \frac{1}{3 - \frac{1}{2}}} = ?$$

ÇÖZÜM:

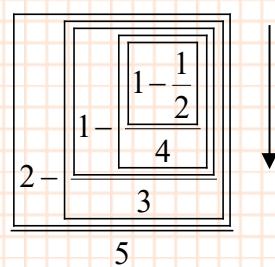


$$\begin{aligned} 3 - \frac{1}{3 - \frac{1}{3 - \frac{1}{2}}} &= 3 - \frac{1}{3 - \frac{1}{\frac{5}{2}}} \rightarrow \frac{2}{5} \\ &= 3 - \frac{1}{3 - \frac{2}{5}} \rightarrow \frac{13}{5} \\ &= 3 - \frac{1}{\frac{13}{5}} \rightarrow \frac{5}{13} \\ &= 3 - \frac{5}{13} = \frac{39 - 5}{13} = \frac{34}{13} \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

ÖRNEK(43)

$$2 - \frac{1 - \frac{1}{2}}{\frac{3}{5}} = ?$$

ÇÖZÜM:



çerceveli işlem sırası takip edilir.

$$\begin{aligned} 2 - \frac{1 - \frac{1}{2}}{\frac{3}{5}} &= 2 - \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{5}} = 2 - \frac{1}{\frac{6}{5}} = \frac{5}{6} \\ &= 2 - \frac{1 - \frac{1}{8}}{\frac{5}{6}} = 2 - \frac{\frac{7}{8}}{\frac{5}{6}} = 2 - \frac{21}{20} = \frac{41}{120} \end{aligned}$$

ÖRNEK(44)

$$\frac{a - \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{4}}} = 3 \text{ ise } a=?$$

ÇÖZÜM:

$$\begin{aligned} \frac{a - \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{4}}} = 3 &\rightarrow \frac{a - \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{3}} = 3 \rightarrow \frac{2a - 1}{1 - \frac{4}{3}} = 3 \rightarrow \\ \frac{2a - 1}{-\frac{1}{3}} = 3 &\rightarrow \frac{2a - 1}{2} = 3 \left(-\frac{1}{3} \right) \rightarrow \frac{2a - 1}{2} = -1 \\ 2a - 1 = -2 &\rightarrow a = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

ÖRNEK(45)

$$\left(\frac{1 - \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{2}}} \right)^{-1} : \left(2 - \frac{3}{4} \right) = ?$$

ÇÖZÜM:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1 - \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{2}}} \right)^{-1} : \left(2 - \frac{3}{4} \right) &= \left(\frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} \right)^{-1} : \left(\frac{5}{4} \right) \\ &= \left(\frac{\frac{1}{2}}{1 - 2} \right)^{-1} \cdot \left(\frac{4}{5} \right) \\ &= \left(-\frac{1}{2} \right)^{-1} \cdot \left(\frac{4}{5} \right) = -2 \cdot \left(\frac{4}{5} \right) = -\frac{8}{5} \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

ÖRNEK(46)

$$3 + \frac{a}{3 + \frac{a}{3 + \frac{a}{...}}} = 5 \text{ ise } a=?$$

ÇÖZÜM:

Sonsuza giden kesirlerde eşitliğin sonsuz tarafı aynı düzende gidiyorsa, ifadenin tamamına benzeyen ilk kısma eşitliğin sağındaki değer atanır.

$$3 + \frac{a}{3 + \frac{a}{3 + \frac{a}{...}}} = 5 \rightarrow 3 + \frac{a}{\boxed{3 + \frac{a}{3 + \frac{a}{...}}}} = 5$$

(çerçeve içine alınmış ifade ile ifadenin tamamının aynı okunduğuuna dikkat edelim)

$$\rightarrow 3 + \frac{a}{5} = 5 \quad \rightarrow \frac{a}{5} = 2$$

$\rightarrow a = 10$ bulunur.

ÖRNEK(47)

$$7 - \frac{16}{6 - \frac{8}{5 - \frac{x}{3}}} = 3 \text{ ise } x=?$$

ÇÖZÜM:

Bu tür soruları merdivenli kesir mantığı yerine aşağıdaki gibi çözmek daha kolaydır.

$$7 - \frac{16}{6 - \frac{8}{5 - \frac{x}{3}}} = 3 \rightarrow 7 - \frac{16}{\boxed{6 - \frac{8}{5 - \frac{x}{3}}}} = 3$$

4 olmalıdır

$$\rightarrow \frac{16}{\boxed{6 - \frac{8}{5 - \frac{x}{3}}}} = 4 \rightarrow 6 - \frac{8}{\boxed{5 - \frac{x}{3}}} = 4$$

2 olmalıdır

$$\rightarrow \frac{8}{\boxed{5 - \frac{x}{3}}} = 2 \rightarrow 5 - \frac{x}{3} = 4 \rightarrow \frac{x}{3} = 1$$

4 olmalıdır

$x = 3$ bulunur.

ÖRNEK(48)

$$1 - \frac{1 - \frac{x}{3}}{5} = \frac{3}{5} \text{ ise } x=?$$

ÇÖZÜM:

$$1 - \frac{1 - \frac{x}{3}}{5} = \frac{3}{5} \rightarrow 1 - \frac{3}{5} = \frac{1 - \frac{x}{3}}{5}$$

2 olmalıdır.

$$\rightarrow \frac{2}{5} = \boxed{\frac{1 - \frac{x}{3}}{5}} \rightarrow 1 - \frac{1 - \frac{x}{3}}{3} = 2$$

-3 olmalıdır.

$$1 - 2 = \frac{1 - \frac{x}{3}}{3} \rightarrow \boxed{\frac{1 - \frac{x}{3}}{3}} = -1$$

$$1 - \frac{x}{3} = -3 \rightarrow 1 + 3 = \frac{x}{3} \rightarrow \frac{x}{3} = 4$$

$x=12$ bulunur.

ÖRNEK(49)

$$7 + \frac{18}{7 + \frac{18}{7 + \frac{18}{...}}} = ?$$

ÇÖZÜM:

İfadeyi önce x 'e eşitleyelim. Daha sonra bu tür kesirler için öğrendiğimiz yöntemini uygulayalım

$$7 + \frac{18}{7 + \frac{18}{7 + \frac{18}{7 + \frac{18}{...}}}} = x \rightarrow 7 + \boxed{7 + \frac{18}{7 + \frac{18}{7 + \frac{18}{7 + \frac{18}{...}}}}} = x$$

$\underbrace{\quad}_{x \text{ olsun}}$

$$7 + \frac{18}{x} = x \text{ her iki tarafı } x \text{ ile çarparsa}$$

$$7x + 18 = x^2 \text{ buradan;}$$

$$x^2 - 7x - 18 = 0 \text{ denklemi çözülürse}$$

$$\begin{array}{c} x \cancel{x} - 9 \\ x \cancel{x} + 2 \end{array}$$

$$(x-9)(x+2)=0$$

$$\downarrow \quad \downarrow$$

$$x-9=0 \quad x+2=0$$

$$x=9 \quad x=-2 \text{ bulunur.}$$

İfadenin tamamı pozitif olduğundan sonucun negatif çıkması mümkün değil.

O halde cevap 9 olur.

ÖRNEK(50) A

$$x + 3 + \frac{9}{x + \frac{9}{x + \frac{9}{...}}} = 12 \text{ ise } x=?$$

ÇÖZÜM:

$$x + 3 + \frac{9}{x + \frac{9}{x + \frac{9}{...}}} = 12 \text{ ifadeyi düzenlersek}$$

$$x + \frac{9}{x + \frac{9}{x + \frac{9}{...}}} = 12 - 3 = 9$$

$$x + \boxed{x + \frac{9}{x + \frac{9}{x + \frac{9}{...}}}} = 9 \rightarrow x + \frac{9}{9} = 9$$

$\underbrace{\quad}_{9 \text{ olmalıdır.}}$

$$x+1=9$$

$$x=8 \text{ olur.}$$

ÖRNEK(51)

$$3 - \frac{1 + \frac{1 + \dots}{2}}{2} = ?$$

ÇÖZÜM:

$$3 - \frac{1 + \frac{1 + \dots}{2}}{2} = ? \text{ ifade düzenli bir görüntü arzetmediğinden önce bu ifadeyi düzenlemeliyiz}$$

$$3 - \frac{1 + \frac{1 + \dots}{2}}{2} = x \rightarrow$$

$$1 - \frac{1 + \frac{1 + \dots}{2}}{2} = x - 2$$

$x-2$ olmalı

$$1 + \frac{1 + \frac{1 + \dots}{2}}{2} = x - 2 \rightarrow$$

$$1 - \frac{1 + \frac{x-2}{2}}{2} = x - 2$$

$$3 - x = \frac{1 + \frac{x-2}{2}}{2} \rightarrow 6 - 2x = 1 + \frac{x-2}{2}$$

her iki taraf 2 ile çarpılırsa

$$12 - 4x = 2 + x - 2$$

$$5x = 12$$

$$x = \frac{12}{5} \text{ bulunur.}$$

RASYONEL SAYILARDA SIRALAMA

- 1)** Paydaları eşit olan pozitif iki rasyonel sayıdan payı küçük olan daha küçüktür.

$$\frac{4}{9} < \frac{5}{9} < \frac{9}{9}$$

- 2)** Payları eşit olan iki pozitif rasyonel sayıdan paydası büyük olan daha küçüktür.

$$\frac{17}{8} < \frac{17}{4} < \frac{17}{2}$$

- 3)** $\frac{a}{b}$ ve $\frac{c}{d}$ iki pozitif kesir olsunlar

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} > 1 \text{ ise } \frac{a}{b} > \frac{c}{d} \text{ dir.}$$

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = 1 \text{ ise } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ dir.}$$

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} < 1 \text{ ise } \frac{a}{b} < \frac{c}{d} \text{ dir.}$$

❖ $\frac{5}{4}$ ve $\frac{8}{7}$ için $\frac{5}{4} \div \frac{8}{7} = \frac{35}{32} > 1 \Rightarrow \frac{5}{4} > \frac{8}{7}$ dir.

- 4)** İki rasyonel sayı pay paydaaya bölünderek karşılaştırılabilir. Bu iki ondalık sayıdan tam kısım büyük olan daha büyük, eşit ise virgülünden sonraki sayılarla bakılır. İlk farklı sayı için büyük sayımı içeren sayı diğerinden büyüktür.

❖ 5,123 ile 2,98 için $5 > 2$ ol.dan $5,123 > 2,98$

❖ 2,234 ile 2,235 için $4 < 5$ ol.dan $2,234 < 2,235$

- 5)** pay ve paydası eşit olmayan iki kesir; ya pay, yada paydaları eşitlenerek 1 ve 2.ci kurala uygun hale getirilip sıralanır.

$$\frac{2}{3} \text{ ile } \frac{4}{7} \text{ için } \frac{2 \cdot 2}{3 \cdot 2} = \frac{4}{6} > \frac{4}{7}$$

- 6)** Pay ve paydası arasındaki fark eşit olan pozitif kesirlerin ; pay ve paydasındaki sayılar büyündükçe basit kesirler için değer artar, bileşik kesirler için değer azalır.

$$\frac{5}{6} < \frac{8}{9} < \frac{14}{15} \quad \text{ve} \quad \frac{10}{7} < \frac{8}{5} < \frac{6}{3} \text{ dir.}$$

- 7)** Negatif sayılar karşılaştırılırken önce pozitifmiş gibi karar verilir, sonra da yönler ters çevrilir.

$$-\frac{3}{4} \text{ ile } -\frac{2}{4} \text{ için } \frac{3}{4} > \frac{2}{4} \Rightarrow -\frac{3}{4} < -\frac{2}{4}$$

ÖRNEK(1)

$$a = \frac{2}{5}, b = \frac{3}{4}, c = \frac{4}{5} \text{ ise } a, b, c' \text{ yi sırala}$$

ÇÖZÜM:

Paydaları eşitlersek

$$a = \frac{2}{5}, b = \frac{3}{4}, c = \frac{4}{5} \\ (4) \quad (5) \quad (4)$$

$$a = \frac{8}{20}, b = \frac{15}{20}, c = \frac{16}{20}$$

paydaları eşit olan pozitif rasyonel sayıların payı büyük olan daha büyüktür.

$c > b > a$ olur.

ÖRNEK(2)

$$\frac{3}{23}, \frac{4}{17}, \frac{6}{43} \text{ sayılarını sıralayın}$$

ÇÖZÜM:

Payları eşitlemek burada daha kolaydır.

$$\frac{3}{23}, \frac{4}{17}, \frac{6}{43} \xrightarrow{(4), (3), (2)} \frac{3}{23}, \frac{4}{17}, \frac{6}{43} \\ \rightarrow \frac{12}{92}, \frac{12}{51}, \frac{12}{86}$$

payları eşit olan pozitif rasyonel sayıların paydası küçük olan daha büyüktür.

$$\frac{12}{51} > \frac{12}{86} > \frac{12}{92}$$

ÖRNEK(3)

$$\frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6} \text{ sayılarını sıralayın}$$

ÇÖZÜM:

Pay ve paydası arasında ortak fark olduğundan

$$\frac{3}{4} < \frac{4}{5} < \frac{5}{6} \text{ olur.}$$

ÖRNEK(4)

$$\frac{7}{10}, \frac{12}{15}, \frac{17}{20} \text{ sayılarını sıralayın}$$

ÇÖZÜM:

Pay ve paydası arasında ortak fark olduğundan

$$\frac{7}{10} < \frac{12}{15} < \frac{17}{20} \text{ olur.}$$

ÖRNEK(5)

$\frac{5}{2}, \frac{7}{4}, \frac{8}{5}$ sayılarını sıralayın

ÇÖZÜM:

Pay ve paydası arasında ortak fark olduğundan

$$\frac{5}{2} > \frac{7}{4} > \frac{8}{5} \text{ olur. (Bileşik kesir)}$$

ÖRNEK(6)

$\frac{3}{4}, \frac{5}{7}, \frac{7}{10}$ sayılarını sıralayın

ÇÖZÜM:

Bu soruyu pay-payda eşitleme veya ortak fark kurallarından birini kullanarak yapabiliriz. Hangisi size kolay gelirse onu uygulayın. Biz burada örnek olsun diye farkları eşitleme yöntemiyle çözeceğiz.

$$\frac{3}{4}, \frac{5}{7}, \frac{7}{10} \rightarrow \frac{18}{24}, \frac{15}{21}, \frac{14}{20}$$

(6) (3) (2)

ortak farklar eşitlendi. Şimdi sıralamaya geçebiliriz.

$$\frac{18}{24} > \frac{15}{21} > \frac{14}{20} \text{ olur.}$$

ÖRNEK(7)

$\frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{7}{9}$ sayılarını sıralayın

ÇÖZÜM:

Bu soruya da ortak farktan çözelim

$$\begin{aligned} \frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{7}{9} &\rightarrow \frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{7}{9} \\ (2) &\quad (2) \\ \frac{4}{6}, \frac{8}{10}, \frac{7}{9} \end{aligned}$$

şimdi sıralayabiliriz.

$$\frac{8}{10} > \frac{7}{9} > \frac{4}{6} \text{ olur.}$$

ÖRNEK(8)

$x \in \mathbb{R}^-$ olmak üzere;

$$a = \frac{x}{3}, b = \frac{x}{4}, c = \frac{2x}{5} \quad a, b, c \text{ sayılarını sıralayın}$$

ÇÖZÜM:

Paylarını eşitlersek

$$\begin{aligned} a &= \frac{x}{3}, b = \frac{x}{4}, c = \frac{2x}{5} \\ (2) &\quad (2) \\ a &= \frac{2x}{3}, b = \frac{2x}{4}, c = \frac{2x}{5} \end{aligned}$$

x negatif olduğundan kesirler de negatiftir. Negatif rasyonel sayılar önce pozitifmiş gibi sıralanıp daha sonra yönleri değiştirilir.

Paylar eşit olduğundan paydası küçük olan daha büyükter.

$$a > b > c$$

Ancak sayılar negatif olduğu için asıl sıralama
 $a < b < c$ olur.

ÖRNEK(9)

$x < y < 0$ olmak üzere

$$a = \frac{x}{3}, b = \frac{x}{y}, c = \frac{y}{3} \quad \text{ise} \quad a, b, c \quad \text{sayılarını}$$

sıralayın

ÇÖZÜM:

$x = -2, y = -1$ olsun

$$a = \frac{-2}{3}, b = \frac{-2}{-1}, c = \frac{-1}{3}$$

$$a = \frac{-2}{3}, b = 2, c = \frac{-1}{3}$$

b pozitif olduğundan en büyuktur.
o halde $b > c > a$ olur.

ÖRNEK(10)

$$\frac{2x}{3} = \frac{3y}{4} = \frac{4z}{5} = k \quad \text{ve} \quad k \in \mathbb{Z}^- \quad \text{ise} \quad x, y, z \quad \text{'yi sıralayın.}$$

ÇÖZÜM:

$k = -1$ seçelim

$$\frac{2x}{3} = \frac{3y}{4} = \frac{4z}{5} = -1$$

$$\frac{2x}{3} = -1 \rightarrow x = -\frac{3}{2}$$

$$\frac{3y}{4} = -1 \rightarrow y = -\frac{4}{3}$$

$$\frac{4z}{5} = -1 \rightarrow z = -\frac{5}{4}$$

pay-payda arasında orta fark olan pozitif bileşik kesirler sayı değeri büyündükçe kesirler küçülür.

$x > y > z$

fakat bu kesirler negatif olduklarından

$x < y < z$ olur.

ÖRNEK(11)

$x < y < 0$ ve $a = \frac{x-y}{y}$ ise aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

- A) $0 < a$ B) $a < -3$ C) $-2 < a < 0$
 D) $-1 < a < 0$ E) $-2 < a < +1$

ÇÖZÜM:

$$a = \frac{x-y}{y} \rightarrow a = \frac{x}{y} - \frac{y}{y} \rightarrow a = \frac{x}{y} - 1$$

x , mutlak değerce y 'den büyük olduğundan $\frac{x}{y}$ pozitif bir bileşik kesirdir. Yani !'den büyütür. Bu durumda $\frac{x}{y} - 1 > 0$ olur.

O halde cevap A şıkları olur.

ÖRNEK(12)

$a < 0 < b$ olmak üzere $k = \frac{b-a}{a}$ gerçek sayısı veriliyor. Buna göre k sayısı aşağıdakilerden hangisi olabilir?

- A) $-\frac{4}{3}$ B) $-\frac{2}{3}$ C) -1 D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{4}{3}$

ÇÖZÜM:

$$k = \frac{b}{a} - \frac{a}{a} = \frac{b}{a} - 1$$

a ve b zıt işaretli olduklarından $\frac{b}{a}$ negatiftir.

O yüzden $\frac{b}{a} - 1 < -1$ dir. yani cevap A şıkları olur.

ÖRNEK(13)

$x \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$a = \frac{x+2}{x+10}, b = \frac{x+6}{x+9}, c = \frac{x+8}{x+11}$$

ise a, b, c sayılarını sıralayın

ÇÖZÜM:

$x=0$ olsun

$$a = \frac{2}{10}, b = \frac{6}{9}, c = \frac{8}{11} \text{ elde edilir.}$$

B ve c 'yi ortak farktan sıralarsak $b < c$ olur.

A ve b yi de 3.sıralama özelliğinden sıralarsak

$$\frac{b}{a} = \frac{\frac{6}{9}}{\frac{2}{10}} = \frac{60}{18} > 1 \text{ olduğundan } b > a \text{ dır.}$$

sonuç olarak

$a < b < c$ olur.

ÖRNEK(14)

$x, y, z \in \mathbb{Z}^+$, $2x=3y$ ve $5y=3z$ ise x, y, z sayılarını sıralayın.

ÇÖZÜM:

Ortak olan y 'ye her iki eşitliğin karşısındaki 2 ve 3 'ün bir katı olan 6'yı versek

$y=6$ için $x=9$ ve $z=10$ olur. Bu durumda

$y < x < z$ bulunur.

ÖRNEK(15)

$x < 0$ olmak üzere

$$a = \frac{x}{0,2}, b = \frac{x}{0,3}, c = \frac{x}{0,4} \quad \text{ise} \quad a, b, c$$

sayılarını sıralayın

ÇÖZÜM:

Sayılar pozitif olsaydalar paylar eşit olduğundan paydası küçük olan daha büyük olurdu yani $a > b > c$
Fakat sayılar negatif olduğundan sıralama;

$a < b < c$ olur.

ÖRNEK(16)

$$\frac{123}{124}, \frac{135}{137}, \frac{142}{145} \text{ sayılarını sıralayın}$$

ÇÖZÜM:

Pay ve paydadaki değerler büyük olduğundan pay veya payda eşitleme zor olur. En mantıklı yol farkları eşitemektir.

$$\frac{123}{124}, \frac{135}{137}, \frac{142}{145} \rightarrow \frac{738}{744}, \frac{405}{411}, \frac{284}{290}$$

(6) (3) (2)

ortak fark eşitlendi o halde sıralama

$$\frac{738}{744} > \frac{405}{411} > \frac{284}{290} \text{ olur.}$$

ÖRNEK(17)

$$\left. \begin{array}{l} a+b = \frac{1}{3} \\ a+c = \frac{1}{4} \\ b+c = \frac{1}{6} \end{array} \right\} \text{ise } a,b,c'yi \text{ sıralayın}$$

ÇÖZÜM 1:

İfadeleri alt alta toplayıp $a+b+c$ 'yi bulur, daha sonra tek tek denklemlerden faydalananarak a,b,c 'yi buluruz. Sonrası kolay;

$$\left. \begin{array}{l} a+b = \frac{1}{3} \\ a+c = \frac{1}{4} \\ b+c = \frac{1}{6} \end{array} \right\} 2(a+b+c) = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6}$$

$$2(a+b+c) = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} \\ (4)(3)(2)$$

$$2(a+b+c) = \frac{4+3+2}{12} = \frac{9}{12}$$

$$(a+b+c) = \frac{9}{24} = \frac{3}{8} \text{ bundan sonra } a,b,c \text{ tek tek}$$

bulunur.

$$a+b+c = \frac{3}{8} \rightarrow c = \frac{1}{24}$$

$$a+b+c = \frac{3}{8} \rightarrow a = \frac{5}{24}$$

$$a+c+b = \frac{3}{8} \rightarrow b = \frac{3}{24}$$

o halde $a>b>c$ olur.

ÇÖZÜM 2:

Gördüğü gibi 1 çözüm oldukça uzun. Şimdi göstereceğimiz yol oldukça pratik;

$a+b$, $a+c$, $b+c$ ifadeleri birer kesirdir ve sıralanabilir

$\frac{1}{3} > \frac{1}{4} > \frac{1}{6}$ olduğundan $a+b > a+c > b+c$ dir. bu

eşitsizlikler ikişer ikişer ele alınırsa

$$\left. \begin{array}{l} a+b > a+c \rightarrow b > c \\ a+c > b+c \rightarrow a > b \end{array} \right\} a > b > c \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK(18)

$$x < 0, a = \frac{x}{10}, b = \frac{x}{11}, c = \frac{x}{12} \quad \text{ise}$$

Aşağıdakilerden Hangisi Doğrudur? (88-öys)

- A) $c < a < b$ B) $b < a < c$ C) $b < c < a$
 D) $a < c < b$ E) $a < b < c$

ÇÖZÜM:

Pozitif kesirler için paylar eşit olduğunda paydası küçük olan daha büyütür. Önce pozitifmiş gibi sıralayalım

$$a > b > c$$

kesirler $x < 0$ dan dolayı negatif olduğundan

$a < b < c$ olur. Yani cevap E şıkı olur.

ARADA OLMA:

a ve b rasyonel ise a ve b arasında
 $a < \frac{a+b}{2} < b$ olacak şekilde bir $\frac{a+b}{2}$ sayısı vardır.

ÖRNEK(19)

$\frac{2}{17}$ ile $\frac{10}{17}$ sayıları arasına eşit aralıkta 3 sayı yazılacak. İkinci sayı ne olur?

ÇÖZÜM:

$\frac{2}{17} < a < b < c < \frac{10}{17}$ şeklinde düşünürsek $\frac{10}{17}$ kesri ile $\frac{2}{17}$ kesri arasında 4 aralık var. Bu aralık uzunluğunu bulalım.

$$\frac{\frac{10}{17} - \frac{2}{17}}{4} = \frac{2}{17}$$

o halde b için iki aralık gerekeceğinden $2 \cdot \frac{2}{17} = \frac{4}{17}$ bunu $\frac{2}{17}$ 'ye eklersek;

$$b = \frac{2}{17} + \frac{4}{17} = \frac{6}{17}$$
 olur

ÖRNEK(20)

$\frac{5}{6}$ ile $\frac{8}{5}$ sayıları arasına eşit aralıkta 2 sayı yazılacak . ikinci sayı ne olur?

ÇÖZÜM:

$\frac{5}{6} < a < b < \frac{8}{5}$ şeklinde düşünürsek $\frac{5}{6}$ kesri ile $\frac{8}{5}$ kesri arasında 3 aralık var. Bu aralık uzunluğunu bulalım.

$$\frac{\frac{8}{5} - \frac{5}{6}}{3} = \frac{\frac{23}{30}}{3} = \frac{23}{90}$$

o halde b için iki aralık gerekeceğinden

$$2 \cdot \frac{23}{90} = \frac{46}{90}$$

bunu $\frac{5}{6}$ 'ye eklersek $\frac{5}{6} + \frac{46}{90} = \frac{121}{90}$

(15) bulunur.

ÖRNEK(21)

$\frac{2}{7} < x < \frac{3}{7}$ ise x aşağıdakilerden hangisi olabilir?

- A) $\frac{1}{14}$ B) $\frac{5}{14}$ C) $\frac{5}{6}$ D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{1}{12}$

(ÖSS 2002)

ÇÖZÜM:

Bu tür sorularda önce şıklardaki paydalara bakılır ve sorudaki paydalar benzetilerek bakılır.

Önce paydayı 14'e genişletelim

$$\frac{2}{7} < x < \frac{3}{7} \rightarrow \frac{4}{14} < x < \frac{6}{14}$$

(2) (2) görüldüğü gibi B

şıkları x için alınabilir bir değerdir. O halde cevap B şıkları olur.

ÖRNEK(22)

$$n \in \mathbb{Z}^+ \text{ olmak üzere } x = \frac{2n-1}{4} \text{ sayısı } \frac{5}{2} \text{ ile } \frac{17}{3}$$

arasında ise n'nin alacağı kaç değer vardır?

ÇÖZÜM:

$$\frac{5}{2} < \frac{2n-1}{4} < \frac{17}{3} \text{ olur. Bu eşitsizlik çözülür.}$$

Önce her tarafı 4 ile çarpalım

$$4 \cdot \frac{5}{2} < 4 \cdot \frac{2n-1}{4} < 4 \cdot \frac{17}{3}$$

$$10 < 2n-1 < \frac{68}{3}$$

$$10+1 < 2n-1+1 < \frac{68}{3} + 1$$

$$11 < 2n < \frac{71}{3} \quad (\text{her taraf } 2\text{'ye bölünür.})$$

$$\frac{11}{2} < n < \frac{71}{6}$$

o halde n=6,7,8,9,10,11 değerlerini alır. Yani n, 6 değer alır.

ÖRNEK(23)

$$\frac{7}{6} \text{ ile } \frac{5}{3} \text{ arasındaki sayıları } \frac{x}{12} \text{ diye yazarsak}$$

kaç tane x tamsayısı elde edilebilir?

ÇÖZÜM:

$$\frac{7}{6} < \frac{x}{12} < \frac{5}{3} \rightarrow \frac{14}{12} < \frac{x}{12} < \frac{20}{12}$$

(2) (4)
burada x için $14 < x < 20$ aralığı geçerli olur.
Buradan x=15,16,17,18,19 değerlerini alabilir. O halde x'in 5 değeri vardır.

ÖRNEK(24)

$$\frac{1}{2} < a < b < \frac{11}{4} \text{ sıralamasında birbirini izleyen}$$

sayılar arasındaki farklar eşittir. Buna göre a+b=?

(ÖSS 2003)

ÇÖZÜM:

Ortak farkın sabit olduğu sayı dizilerinde baştan ve sondan eşit uzaklıktaki sayıların toplamı eşittir(bu bilgi ardışık sayılar konusunda da verilmiştir)

$$\frac{1}{2} < a < b < \frac{11}{4}$$

--	--	--	--

$$a+b = \frac{1}{2} + \frac{11}{4} \rightarrow a+b = \frac{2+11}{4} = \frac{13}{4} \text{ olur.}$$

ÖRNEK(25)

$\frac{7}{5} < x < \frac{5}{3}$ olacak şekilde her iki kesre eşit uzaklıktaki x kesri kaçtır?

ÇÖZÜM:

$$x = \frac{\frac{7}{5} + \frac{5}{3}}{2}$$

$$x = \frac{\frac{21+25}{15}}{2}$$

$$x = \frac{46}{15} \cdot \frac{1}{2} \quad \text{ve} \quad x = \frac{23}{15} \text{ bulunur.}$$

KONUMUZ BİTTİ. ŞİMDİ TESTLERE
GEÇEBİLİRСİNİZ

DİLERSENİZ KONU ANLATIMINI BİR DE
YOUTUBE KANALIMIZDAN VİDEO OLARAK
DA İZLEYEBİLİRСİNİZ

Youtube kanalımız: **CEBİR HOCAM**

Başarılar diliyorum
İbrahim Halil BABAOĞLU
Matematik Öğretmeni