

ARDIŞIK SAYILAR

Belli bir kurala göre ard arda sıralanan sayılara ardışık sayılar denir.

❖ $n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere;

Ardışık sayılar

$$\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, n, n+1, \dots$$

Ardışık Çift sayılar:

$$\dots, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \dots, (2n+2)$$

Ardışık tek sayılar:

$$\dots, -3, -1, 1, 3, 5, 7, \dots, (2n-1), (2n+1)$$

n^2 genel terimli ardışık sayılar:

$$0, 1, 4, 9, 16, 25, \dots, n^2, (n+1)^2$$

n^3 genel terimli ardışık sayılar:

$$\dots, -27, -8, -1, 0, 1, 8, 27, \dots, n^3, (n+1)^3$$

Aralarında 3'er sayı fark olan arda. Sayılar:

$$\dots, -9, -6, -3, 0, 3, 6, 9, 12, \dots, 3n, (3n+3), \dots$$

ÖRNEK(1)

Ardışık 6 çift sayının toplam t ise bu sayılardan en büyüğünün a cinsinden değerini bulun.

ÇÖZÜM :

ilk çift sayıya n dersek

$$n + (n+2) + (n+4) + (n+6) + (n+8) + (n+10) = t$$

$$6n + 30 = t$$

$$6n = t - 30$$

$$n = \frac{t-30}{6} = \frac{t}{6} - 5$$

$$n+10 = \frac{t}{6} + 5 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK(2)

Ardışık 15 pozitif tamsayının toplamı 2085 ise bu sayıların en küçüğü kaçtır.

(ÖYS-95)

ÇÖZÜM 1:

$$n + (n+1) + (n+2) + \dots + (n+14) = 2085$$

$$15n + \frac{14 \cdot 15}{2} = 2085$$

$$n = 132$$

ÇÖZÜM 2: sayı adedi tek ise sayıların toplamı sayı adedine bölünerek ortanca sayı bulunur.

$$2085 : 15 = 139 \text{ (ortadaki sayı yani 8.sayı)}$$

$$\text{en küçüğü ise } 139 - 7 = \mathbf{132} \text{ olur.}$$

Terim: Bir ifade de artı (+) veya eksi(-) işaretleriyle birbirlerinden ayrılan, tek başına, çarpan halinde, bir parantez içinde. Bir kesir yada bir kök altında bulunan çokluklardan her birine terim denir.

$$\text{❖ } 3-x^3 + 2x^2y - (2x+y) + \frac{x^2-1}{y+1} - \sqrt[3]{1-x^2} \text{ ifadesinde}$$

$$3, x^3, 2x^2y, (2x+y), -\frac{x^2-1}{y+1}, \sqrt[3]{1-x^2} \text{ birer}$$

terimdirler

ARDIŞIK SAYILARIN SONLU TOPLAMLARI

HİKAYE

Bu konunun iyi anlaşılması için size gerçek bir hikaye anlatayım

Zamanın birinde GAUS adında bir çocuk varmış. Bu çocuk daha küçükken zeki olduğu her halinden belliymiş. Bir gün okulda hocaları sınıfa bir soru sormuş

- Çocuklar ben size dört işlemi öğrettim mi? (hep bir ağızdan)
- -Eveet
- Peki o zaman tahtaya yazacağım şu işlemi bakalım önce kim bitirecek!

(ve soruyu tahtaya yazar)

$$1+2+3+4+\dots+100$$

- Evet çocuklar tahtaya yazdığım sorunun cevabını bulmanızı istiyorum. (.. der ve masasına oturum gazetesini okumaya koyulur ve içinden 'nasıl olsa soruyu çözmeleri uzun sürer ben gazetemi bitiririm bu arada' der. Fakat GAUS'un zekasını hesap edemez. Bir süre sonra ..)

GAUS: arkadaşlarım baştan başladı

toplama becerimiz aynı olduğuna göre benim soruyu daha hızlı çözebilmem için başka bir yol bulmam lazım. Acaba bir baştan, bir de sondan tolasam ne olur.

(.. der ve dediğini yapar. Matematik için doğal, kendisi için çok ilginç bir durumla karşılaşır.)

GAUS: Allah Allah, hep aynı sonuç çıkıyor

1+2+3+.....	98+99+100
101	
101	
101	

GAUS: Demek ki toplamları 101 eden 50 sayı çifti var. O halde cevap

$$101.50=5050 \text{ dir.}$$

(hemen cevabı hocaya götürür. Hoca önce inanmak istemez. 'Git bi daha kontrol et. Arkadaşların daha 3 sayı toplamışken sen nasıl 100 sayıyı topladın' diye de azarlamaya kalkar.

(GAUS ısrar edince hoca çözüm e bakmak zorunda kalır ve bakar ki GAUS doğru çözmüştür.)

-Nasıl yaptın evladım söyle bakayım !!

(GAUS birazda ukalaca)

-Çok kolay hocam İLK TERİM İLE SON TERİMİ TOPLADIM, TERİM SAYISININ YARISI İLE ÇARPTIM.

-Aferin evladım. Ben de size bunu öğretecektim. Hadi yazın bakalım formül:

$$(\text{İlk Terim} + \text{Son Terim}) \cdot \left(\frac{\text{Terim Sayısı}}{2} \right)$$

(Aslında hoca bu formülü bilmiyordu. GAUS zekasıyla bir formül bulmuştu)

Evet gençler bu hikaye ardışık sayıların toplamı hususunda bize oldukça faydalı olacaktır. Biz de bu yöntemle terim sayısını bildiğimiz bir çok soruyu pratik olarak çözebiliriz.

$$A.S.S.T = (\text{İlk terim} + \text{Son terim}) \cdot \left(\frac{\text{Terim Sayısı}}{2} \right)$$

$$\text{Terim Sayısı} = \left(\frac{\text{Son terim} - \text{İlk terim}}{\text{Ortak fark}} \right) + 1$$

İki formülün birleşimi:

$$T = \frac{(\text{Sonterim} + \text{İlkerim}) \cdot (\text{Sonterim} - \text{İlkerim} + \text{fark})}{2 \cdot \text{fark}}$$

ÖRNEK(3)

17+19+.....+87 toplamını bulun.

ÇÖZÜM :

$$\text{Terim sayısı} = \frac{87-17}{2} + 1 = 36$$

$$\text{GAUS formülü} = (17+87) \cdot (36/2) = 1872$$

ÖRNEK(4)

44+48+52+.....+88 toplamında kaç terim vardır.

ÇÖZÜM :

$$\text{Terim sayısı} = \frac{88-44}{4} + 1 = 12$$

ÖRNEK(5)

102 ile 353 arasında bulunan ve 5 ile kalansız bölünebilen sayıların toplamı kaçtır?

(ÖYS-96)

ÇÖZÜM :

Önce sayıları yazalım

$$105+110+....+350$$

$$\text{Terim sayısı} = \frac{350-105}{5} + 1 = 49$$

$$\text{GAUS formülü} = (105+350) \cdot (49/2) = 11375$$

ÖRNEK(6)

a,b,c ardışık tek sayılar olmak üzere $\frac{a+c}{b}$

ifadesinin değeri nedir?

ÇÖZÜM :

a=1, b=3, c=5 olsun

$$\frac{1+5}{3} = 2 \text{ olur.}$$

ÖRNEK(7)

Ardışık beş doğal sayının toplamı 85 ise ortadaki sayı kaçtır?

ÇÖZÜM :

$$85:5=17 \text{ (ortanca sayı)}$$

ÖRNEK(8)

x,y,z ardışık tek sayıları için $x<y<z$ ise

$$\frac{(x-z)^2(z-y)}{x-y} \text{ işleminin sonucu nedir?}$$

ÇÖZÜM :

$$x=1 \ y=3 \ z=5 \text{ olsun}$$

$$\frac{(1-5)^2(5-3)}{1-3} = \frac{16 \cdot 2}{-2} = -16$$

ÖRNEK(9)

Ardışık 6 tek doğal sayıdan küçüğün büyüğe oranı $3/5$ ise küçük sayı kaçtır?

ÇÖZÜM :

Sayılarımız

$$n, (n+2), (n+4), (n+6), (n+8), (n+10) \text{ olsun}$$

$$\frac{n}{n+10} = \frac{3}{5} \rightarrow 5n = 3n + 30$$

$$2n = 30$$

$$n=15 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK(6)

Ardışık üç doğal sayıdan küçüğün iki katı ile büyüğün dört katının toplamı 50 ise ortanca say kaçtır?

ÇÖZÜM :

Sayılarımız $n, (n+1), (n+2)$ olsun

$$2n+4(n+2)=50$$

$$2n+4n+8=50$$

$$6n = 42$$

$$n = 7$$

ortanca sayı $n+1$ olduğundan $7+1=8$ olur.

ÇOK KARŞILAŞILAN ÖZEL TOPLAMLAR:

- ◆ $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n.(n+1)}{2}$
- ◆ $2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n.(n+1)$
- ◆ $1 + 3 + 5 + \dots + 2n-1 = n^2$
- ◆ $1 + r + r^2 + r^3 + \dots + r^{n-1} = \frac{1-r^n}{1-r}$
- ◆ $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n.(n+1).(2n+1)}{6}$

ÖRNEK(7)

$$6+8+10+\dots+70=?$$

ÇÖZÜM :

$$2+4+6+8+\dots+70=n.(n+1)$$



$$2n=70 \rightarrow n=35$$

$$2+4+6+8+\dots+70=35.36=1260$$

$$6+8+\dots+70 = 1260 - (2+4) = 1254$$

ÖRNEK(8)

$$11+13+15+\dots+63=?$$

ÇÖZÜM :

$$1+3+5+7+9+11+13+\dots+63= n^2$$

$$2n-1=63 \rightarrow n=32$$

$$1+3+5+7+9+11+13+\dots+63=32^2 = 1024$$

$$11+13+\dots+63=1024 - (1+3+5+7+9) = 999$$

NOT: Bu tür toplamlarda eğer temel formülden eksik olan kısım çok ise iki ayrı formül kullanmak gerekir ki bu da işimizi zorlaştırır. Bu yüzden bu tür sorularda en iyisi GAUS'un formülünü kullanmaktır.

ÖRNEK(9)

$$14+17+20+\dots+71=?$$

ÇÖZÜM :

$$\text{Terim sayısı} = \frac{71-14}{3} + 1 = 20$$

$$\text{GAUS formülü} = (14+71)(20/2) = 850$$

ÖRNEK(10)

$2.4 + 3.6 + 4.8 + \dots + 15.30$ toplamında 1.ci terimler 2'şer arttırılır, 2.ci terimler 2'şer azaltılırsa toplam nasıl değişir

ÇÖZÜM :

İstenen toplamı yazıp alt alta çıkaralım

$$4.2 + 5.4 + 6.6 + \dots + 17.28$$

$$2.4 + 3.6 + 4.8 + \dots + 15.30$$

$$0 + 2 + 4 + \dots + 26$$

bu toplamı hesaplırsak

$$2n=26 \rightarrow n=13$$

çift sayıların toplam formülünden

$$n.(n+1)=13.14 = 182 \text{ artar.}$$

ÖRNEK(11)

x, y ardışık iki çift tamsayı, $x > y$ ve $x^2 - y^2 = 28$
ise $x = ?$

ÇÖZÜM 1 :

$x = n$ ve $y = n-2$ seçilirse

$$n^2 - (n-2)^2 = 28$$

$$n^2 - (n^2 - 4n + 4) = 28$$

$$n^2 - n^2 + 4n - 4 = 28$$

$$4n = 32$$

$$n = 8$$

$x = n = 8$ olur.

ÇÖZÜM 2:

$$x^2 - y^2 = 28 \rightarrow (x-y).(x+y)=28 \text{ (iki kare farkı)}$$

$$2.(x+y) = 28$$

$$x+y=14$$

o halde sayılarımız 8 ve 6 dir. Cevap $x = 8$ olur.

ÖRNEK(12)

$(2n+5)$ ve $(3n-2)$ ardışık iki tamsayıdır. Buna göre n 'nin alabileceği değerler çarpımı kaç olur?

ÇÖZÜM :

Ardışık iki tamsayı arasındaki fark 1 dir. Kimin büyük olduğu belli olmadığından;

$$(3n-2)-(2n+5) = 1$$

veya

$$(2n+5)-(3n-2) = 1 \text{ denklemleri çözülür.}$$

$$(3n-2)-(2n+5) = 1$$

$$3n-2-2n-5 = 1$$

$$n = 8$$

$$(2n+5)-(3n-2) = 1$$

$$2n+5-3n+2 = 1$$

$$-n = -6 \rightarrow n = 6$$

o halde cevap $8.6=48$ olur.

ÖRNEK(13)

"Bir sayının oranlarının (bölenlerinin) toplam faktörleri öbür sayının yarısını veriyorsa bu iki sayı kardeş sayıdır?

Buna göre aşağıdaki hangi iki sayı kardeşdir?

A) 180–380

B) 75–152

C) 160–174

D) 220–284

E) 115–184

ÇÖZÜM :

$$220=1+2+4+71+142$$

$$284=1+2+4+5+10+11+20+22+44+55+110$$

o halde cevap D şıkkıdır.

ÖRNEK(14)

7 farklı sayının toplamı 105 ise en büyüğü en az kaçtır?

ÇÖZÜM :

En büyüğü en az veya en küçüğü en çok sorularında sayılar mümkün ise ardışık seçilir.(sayılar farklı olmak kaydıyla)

Ardışık 7 sayının ortancasının bulunma yönteminden
 $105:7= 15$ (ortanca sayı yani 4cü sayı)

o halde büyük sayı $15+3=18$ olur.

ÖRNEK(15)

4 sayının toplamı 56 ise en küçüğü en fazla kaçtır?

ÇÖZÜM-1:

Sayılar ardışık seçilemediğinden ardışık olması için mümkün olan en küçük sayı, toplama eklenerek ardışık olması sağlanır. Çıkarılan bu sayı büyük olana eklenir

$$n+(n+1)+(n+2)+(n+3)=58 \text{ (2 ekledik)}$$

$$4n+6=58$$

$$4n=52$$

$$n=13$$

sayımız 13 çıkar.

ÇÖZÜM -2:

Önce $56:4=14$ elde edilir.

14,14,14,14 şeklinde sayılar yazıldıktan sonra eksilt ekle yöntemiyle istenen bulunmaya çalışılır.

13,14,14,15 (soruda farklı demediği için bazıları aynı seçilebilir.)

cevap 13 olur.

ÖRNEK(16)

4 farklı sayının toplamı 56 ise en küçüğü en fazla kaçtır?

ÇÖZÜM -1:

Sayılar ardışık seçilemediğinden ardışık olması için mümkün olan en küçük sayı, toplamdan çıkarılır ardışık olması sağlanır.

$$n+(n+1)+(n+2)+(n+3)=54 \text{ (2 çıkardık)}$$

$$4n+6=54$$

$$4n=48$$

$$n=12$$

sayımız 12 çıkar.

ÇÖZÜM 2:

$$56:4=14$$

14,14,14,14 şeklinde sayılar yazıldıktan sonra eksilt-ekle yöntemiyle istenen bulunmaya çalışılır.

13,14,14,15 (soruda farklı dediği için sayıları tekrar değiştiririz.)

12,13,15,16 cevap 12 olur.

ÖRNEK(17)

Bir a doğal sayısı $n+3$ ile bölündüğünde farklı kalanların toplamı 55 ise n kaçtır?

ÇÖZÜM :

Kalan bölenden küçük olacağından

$$\text{Kalanlar: } 0+1+2+3+\dots+(n+2) = 55$$

$$\text{(Formülden)} \rightarrow \frac{(n+2)(n+3)}{2} = 55$$

$$(n+2)(n+3)=110$$

$(n+2)$ ve $(n+3)$ ardışık olduğundan çarpımları 110 eden ardışık iki sayı bulunur. Bunlar 10 ve 11 dir

$$n+2=10 \text{ ve } n=8 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK(18)

1 den $(2n-1)$ 'e kadar olan ardışık tek sayıların toplamı a, 10'dan büyük olup $(2n)$ kadar olan çift sayıların toplamı b ve $b-a=70$ ise n kaçtır?

ÇÖZÜM :

$$1+3+5+\dots+(2n-1)=a \rightarrow n^2 = a$$

$$12+14+\dots+2n = b$$

$$2+4+6+8+10+12+\dots+2n=n(n+1)$$

$$12+14+\dots+2n = n(n+1)-(2+4+6+8+10)$$

$$b = n^2 + n - 30$$

$$b-a = (n^2 + n - 30) - n^2 = 70$$

$$n-30 = 70 \rightarrow n = 100 \text{ bulunur.}$$

**KONUMUZ BİTTİ. ŞİMDİ TESTLERE
GEÇEBİLİRSİNİZ**

**DİLERSENİZ KONU ANLATIMINI BİR DE
YOUTUBE KANALIMIZDAN VİDEO OLARAK
DA İZLEYEBİLİRSİNİZ**

Youtube kanalımız: **CEBİR HOCAM**

Başarılar diliyorum
İbrahim Halil BABAOĞLU
Matematik Öğretmeni

ÖRNEK(19)

x çift bir sayı ve 1 den $(x+1)$ 'e kadar olan tek doğal sayıların toplamı a , 2 den $(x-2)$ ' ye kadar olan çift doğal sayıların toplamı da b olsun. Buna göre 1 den x 'e kadar olan doğal sayıların toplamı kaç olur?

ÇÖZÜM :

$$1+3+5+\dots+(x-3)+(x-1)+(x+1) = a$$

$$2+4+6+\dots+(x-4)+(x-2)=b$$

bu iki denklem alt alta toplanırsa

$$1+2+3+4+\dots+(x-2)+(x-1)+(x+1) = a+b$$

$$1+2+3+4+\dots+(x-2)+(x-1)+x = a+b-1 \text{ bulunur.}$$