

ORAN - ORANTI

Oran: En az biri sıfırdan farklı aynı cinsten iki çokluğun bölümüne oran denir. Oran birimsizdir.

Orantı: iki ve daha fazla oranın eşitliğine orantı denir.

$$\frac{a}{b} \rightarrow \text{oran} \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \rightarrow \text{orantı}$$

ORANTININ ÖZELLİKLERİ

- 1) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a.d = b.c$
- 2) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ veya $\frac{d}{b} = \frac{c}{a}$
- 3) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{b}{a} = \frac{d}{c}$
- 4) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a \pm b}{b} = \frac{c \pm d}{d}$
 $\Rightarrow \frac{a}{b \pm a} = \frac{c}{d \pm c}$
- 5) $m \neq 0$ ve $n \neq 0$
 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k \Rightarrow \frac{na \pm mc}{nb \pm md} = k$
- 6) $m \neq 0$ ise
 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k \Rightarrow \frac{a.m}{b.m} = \frac{c}{d} = k, \frac{a:m}{b:m} = \frac{c}{d} = k$
- 7) $m \in R, \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} \pm m = \frac{c}{d} \pm m$
- 8) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = k \Rightarrow a:c:e = b:d:f = k$
- 9) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$ ise $\frac{a}{t.b} = \frac{c}{t.d} = \frac{e}{t.f}$
veya $\frac{t.a}{b} = \frac{t.c}{d} = \frac{t.e}{f}$ yazılabilir.

NOT: (sadeleştirme)

işlemlerimizin çoğunda sadeleştirme olduğundan bu konumuzda sadeleştirme tekniklerini öğrenelim. Aşağıda kimlerin sadeleştirilebileceği, kimlerin sadeleştirilemeyeceği açıklanmıştır. Dikkatle inceleyin hata yapmayın

Kimler sadeleşir

$$\frac{a}{b} = \frac{\cancel{c}}{\cancel{d}}, \frac{\cancel{a}}{\cancel{b}} = \frac{c}{d}, \frac{\cancel{a}}{b} = \frac{\cancel{c}}{d}, \frac{a}{\cancel{b}} = \frac{c}{\cancel{d}}$$

Kimler sadeleşmez

$$\frac{\cancel{a}}{b} = \frac{c}{\cancel{d}}, \frac{a}{\cancel{b}} = \frac{\cancel{c}}{d}$$

ÖRNEK (1)

$ax = by = cz = 8$ ve $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{5}{4}$ ise $x + y + z = ?$

ÇÖZÜM:

Önce a, b ve c yi ayrı ayrı bulalım

$$\begin{array}{ccc} ax = by = cz = 8 & & \\ \swarrow & \searrow & \searrow \\ ax = 8 & by = 8 & cz = 8 \\ \frac{\cancel{a}}{\cancel{x}} = \frac{8}{x} & \frac{\cancel{b}}{\cancel{y}} = \frac{8}{y} & \frac{\cancel{c}}{\cancel{z}} = \frac{8}{z} \\ a = \frac{8}{x} & b = \frac{8}{y} & c = \frac{8}{z} \end{array}$$

şimdi bu değerleri $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{5}{4}$ ifadesinde yazalım

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} &= \frac{5}{4} \Rightarrow \frac{1}{\frac{8}{x}} + \frac{1}{\frac{8}{y}} + \frac{1}{\frac{8}{z}} = \frac{5}{4} \\ &\Rightarrow \frac{x}{8} + \frac{y}{8} + \frac{z}{8} = \frac{5}{4} \Rightarrow \frac{x+y+z}{8} = \frac{5}{4} \\ &\Rightarrow x+y+z = 10 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

ÖRNEK(2)

$a, b, c \in \mathbb{Z}^+$ ve $\frac{2a}{3} = \frac{7b}{8} = \frac{2c}{5}$ ise a, b, c yi

sıralayınız.

ÇÖZÜM:

a, b, c pozitif olduğundan $\frac{2a}{3} = \frac{7b}{8} = \frac{2c}{5}$ ifadesini

+1'e eşitleyelim

$\frac{2a}{3} = \frac{7b}{8} = \frac{2c}{5} = 1$ şimdi a, b ve c yi ayrı ayrı

bulalım

$$\frac{2a}{3} = \frac{7b}{8} = \frac{2c}{5} = 1$$

$$\begin{array}{ccc} \frac{2a}{3} \times 1 & \frac{7b}{8} \times 1 & \frac{2c}{5} \times 1 \\ \cancel{2}a = \frac{3}{\cancel{2}} & \cancel{7}b = \frac{8}{\cancel{7}} & \cancel{2}c = \frac{5}{\cancel{2}} \end{array}$$

şimdi bulunan rasyonel değerleri sıralayalım

$$a = \frac{3}{2} = \frac{21}{14} \quad (7) \quad b = \frac{8}{7} = \frac{16}{14} \quad (2) \quad c = \frac{5}{2} = \frac{35}{14} \quad (7)$$

paydaları eşit rasyonel sayılardan payı büyük olan daha büyüktür.

O halde cevap $c > a > b$ olur.

BİR DE SİZ ÇÖZÜN:

ifadeyi +1 yerine +14 seçseydik işimiz daha kolay olurdu. Siz bu soruyu bir de 14'e eşitleyip çözün(sadeleştirme yapmayı unutmayın yoksa iş daha da zorlaşır)

ÖRNEK(3)

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{3}{2} \text{ ise } \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2} = ?$$

ÇÖZÜM:

Önce a ile b arasındaki bağıntıyı bulalım

$$\frac{a+b}{a-b} \times \frac{3}{2} \Rightarrow 2a + 2b = 3a - 3b$$

$$\Rightarrow 2b + 3b = 3a - 2a$$

$$\Rightarrow 5b = a$$

$a=5b$ olduğuna göre a yerine $5b$ azılabilir

$$\begin{aligned} \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2} &= \frac{(5b)^2+b^2}{(5b)^2-b^2} \\ &= \frac{25b^2+b^2}{25b^2-b^2} = \frac{26b^2}{24b^2} = \frac{13}{12} \text{ olur.} \end{aligned}$$

ÖRNEK(4)

$x, y, z \in \mathbb{Z}^+$ $\frac{x}{3} = \frac{y}{5} = \frac{z}{4}$ ve $xy - 15z = 0$ ise

$x + z - y = ?$

ÇÖZÜM:

Oran orantının bu tip sorularında genelde uyguladığımız yöntem orantıyı bir k değişkenine(orantı sabiti) eşitlemektir.

$$\frac{x}{3} = \frac{y}{5} = \frac{z}{4} = k \text{ buradan}$$

$x = 3k$, $y = 5k$, $z = 4k$ bulunur. Şimdi bu değerleri denklemde yerine yazalım

$$xy - 15z = 0 \Rightarrow (3k)(5k) - 15(4k) = 0$$

$$\Rightarrow 15k^2 - 60k = 0$$

$$\Rightarrow 15k(k - 4) = 0$$

$$15k = 0 \rightarrow k = 0 \text{ ve } k - 4 = 0 \rightarrow k = 4$$

$x, y, z \in \mathbb{Z}^+$ olduğundan $k \neq 0$ dır bu yüzden $k = 4$ alınır. Bu aşamadan sonra

1. yol

$$k=4 \text{ için } x = 3k = 3.4 = 12$$

$$y = 5k = 5.4 = 20$$

$$z = 4k = 4.4 = 16$$

$$x + z - y = 12 + 16 - 20 = 8 \text{ olur.}$$

2.yol

$$x + z - y = 3k + 4k - 5k = 7k - 5k = 2k = 2.4 = 8 \text{ olur.}$$

ÖRNEK(5)

$$\frac{1}{3a} = \frac{1}{4b} = \frac{1}{2c} \text{ ve } a + b + c = \frac{13}{6} \text{ ise } c - a = ?$$

ÇÖZÜM:

Önce verilen orantıyı ters çevirip k'ya eşitleyelim

$$\frac{1}{3a} = \frac{1}{4b} = \frac{1}{2c} \Rightarrow 3a = 4b = 2c = k$$

$$\begin{array}{ccc} \cancel{3}a = \frac{k}{\cancel{3}} & \cancel{4}b = \frac{k}{\cancel{4}} & \cancel{2}c = \frac{k}{\cancel{2}} \\ a = \frac{k}{3} & b = \frac{k}{4} & c = \frac{k}{2} \end{array}$$

şimdi verilen bu değerleri denklemde yazıp k'yı bulalım

$$a + b + c = \frac{13}{6} \Rightarrow \frac{k}{3} + \frac{k}{4} + \frac{k}{2} = \frac{13}{6}$$

(4) (3) (6) (2)

$$\Rightarrow \frac{4k}{12} + \frac{3k}{12} + \frac{6k}{12} = \frac{26}{12}$$

$$\Rightarrow \frac{4k + 3k + 6k}{\cancel{12}} = \frac{26}{\cancel{12}}$$

$$\Rightarrow \frac{\cancel{12}k}{\cancel{12}} = \frac{26}{\cancel{12}}$$

$$\Rightarrow k = 2$$

$$c - a = \frac{k}{2} - \frac{k}{3} = \frac{3k - 2k}{6} = \frac{k}{6} = \frac{\cancel{2}}{\cancel{6}} = \frac{1}{3}$$

(3) (2)

ÖRNEK(6)

$$\frac{a}{b} = \frac{x}{y} = \frac{4}{3} \text{ ise aşağıdakilerden hangisi}$$

Yanlıştır?

A) $\frac{a}{x} = \frac{b}{y}$ B) $bx = ay$ C) $\frac{x - y}{y} = \frac{1}{3}$

D) $\frac{a^2}{b^2} = \frac{16}{9}$ E) $\frac{x + 2}{y + 2} = \frac{6}{5}$

ÇÖZÜM:

A, B ve C şıkları zaten özelliklerde var.

D şıkkı

$$\frac{a}{b} = \frac{4}{3} \xrightarrow{\text{Her iki tarafın karesi alınırsa}} \frac{a^2}{b^2} = \frac{4^2}{3^2} = \frac{16}{9}$$

doğru

geriye E şıkkı kalıyor ki oran orantıda böyle bir özellik de işlem de yok

o yüzden yanlış olan E şıkkıdır.

ÖRNEK(7)

$$\frac{x + y}{7} = \frac{x - y}{3} = \frac{x \cdot y}{30} \text{ ise } x + y = ?$$

ÇÖZÜM:

Orantıyı k'ya eşitleyelim

$$\frac{x + y}{7} = \frac{x - y}{3} = \frac{x \cdot y}{30} = k \text{ ayrı ayrı k'ya eşitleyelim}$$

$$\frac{x + y}{7} = k, \quad \frac{x - y}{3} = k, \quad \frac{x \cdot y}{30} = k$$

$$x + y = 7k \quad x - y = 3k \quad x \cdot y = 30k$$

$$x + y = 7k$$

$$+ x - y = 3k$$

$$2x = 10k \rightarrow x = 5k \text{ ve } y = 2k$$

$x \cdot y = 30k$ olduğundan

$$5k \cdot 2k = 30k$$

$$10k = 30 \rightarrow x + y = 7k = 7 \cdot 3 = 21 \text{ bulunur.}$$

$$k = 3$$

NOT:

a,b,c sayıları sırasıyla 2,3,4 ile

(doğru)orantılı ise $a = 2k$, $b = 3k$, $c = 4k$

Ters orantılı ise $a = \frac{k}{2}$, $b = \frac{k}{3}$, $c = \frac{k}{4}$ alınır.

(k,oranlı sabiti)

ÖRNEK(8)

Üç küpün ayrıtları 2,3,4 sayılarıyla orantılıdır.

Alanları toplamı 696 cm^2 ise en küçük küpün alanı kaç cm^2 dir?

ÇÖZÜM:

Küplerin ayrıtları a,b,c olsun. Orantı konusunda orantı çeşidi belirtilmediği müddetçe doğru orantı kabul edileceğinden

$a = 2k$, $b = 3k$, $c = 4k$ alınır

(küpün bir ayrıtı x olmak üzere alanı $6x^2$ 'dir)

1. küpün alanı $= 6(2k)^2 = 6.4k^2 = 24k^2$
2. küpün alanı $= 6(3k)^2 = 6.9k^2 = 54k^2$
3. küpün alanı $= 6(4k)^2 = 6.16k^2 = 96k^2$

$$\begin{array}{r} + \\ \hline 174k^2 \end{array}$$

$$\frac{174k^2}{174} = \frac{696}{174} \Rightarrow k^2 = 4 \Rightarrow k = \pm 2$$

alan negatif olamayacağından $k=2$ alınır.

1.küp en küçük küptür ve alanı

$$24k^2 = 24.2^2 = 24.4 = 96 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK(9)

$$\frac{x+y-z}{7} = \frac{x-z}{3} = \frac{y+z}{6} \text{ ise } x:y:z = ?$$

ÇÖZÜM:

orantı yine k'ya eşitlenirse:

$$\frac{x+y-z}{7} = \frac{x-z}{3} = \frac{y+z}{6} = k$$

$$x+y-z = 7k \quad , \quad x-z = 3k \quad , \quad y+z = 6k$$

$$\frac{x-z}{3k} + y = 7k \rightarrow y = 4k$$

$$y+z = 6k \rightarrow 4k+z = 6k \rightarrow z = 2k$$

$$x-z = 3k \rightarrow x-2k = 3k \rightarrow x = 5k$$

o halde $x:y:z = 5:4:2$ bulunur.

ÖRNEK(10)

x,y,z sayıları sırasıyla 1,2,3 ile orantılıdır.

$x^2+y^2+z^2 = 350$ ise $(x-4y+3z)$ ifadesinin pozitif değeri nedir.

ÇÖZÜM:

x,y,z sayıları sırasıyla 1,2,3 ile orantılı ise

$x = k$, $y = 2k$, $z = 3k$ alınır

$$x^2+y^2+z^2 = 350$$

$$(k)^2+(2k)^2+(3k)^2=350$$

$$k^2+4k^2+9k^2 = 350$$

$$\frac{14k^2}{14} = \frac{350}{14}$$

$$k^2 = 25$$

$$k = \pm 5$$

$$x-5y+3z = k-4.(2k)+3(3k)=k-8k+9k = 2k \text{ bulunur.}$$

sonucun pozitif olması istendiğinden

$k = 5$ alınır.

$$2k = 2.5 = 10 \text{ olur.}$$

ÖRNEK(11)

Ali'nin yaşının Bekir'in yaşına oranı 3/5, Bekir'in yaşının Leyla'nın yaşına oranı 25/6 ise Ali'nin yaşının Leyla'nın yaşına oranı nedir?

ÇÖZÜM:

$$\frac{\text{Ali}}{\text{Bekir}} = \frac{3}{5}, \quad \frac{\text{Bekir}}{\text{Leyla}} = \frac{25}{6} \Rightarrow \frac{\text{Ali}}{\text{Leyla}} = ?$$

istenmeyen Bekir olduğundan Bekir'i yok edecek bir işlem yapmalıyız. Bu da yan yana çarpma olur.

$$\frac{\text{Ali}}{\cancel{\text{Bekir}}} \cdot \frac{\cancel{\text{Bekir}}}{\text{Leyla}} = \frac{3}{5} \cdot \frac{25}{6} \Rightarrow \frac{\text{Ali}}{\text{Leyla}} = \frac{5}{2} \text{ olur.}$$

ÖRNEK(12)

$$x:y:z=7:9:12 \quad \text{ise} \quad \frac{y-x}{y} : \frac{z-x}{z} = ?$$

ÇÖZÜM:

$$x:y:z=7:9:12 \Rightarrow \frac{x}{7} = \frac{y}{9} = \frac{z}{12} = k$$

$x = 7k$, $y = 9k$, $z = 12k$ olur. buradan

$$\begin{aligned} \frac{y-x}{y} : \frac{z-x}{z} &= \frac{9k-7k}{9k} : \frac{12k-7k}{12k} \\ &= \frac{2\cancel{k}}{9\cancel{k}} : \frac{5\cancel{k}}{12\cancel{k}} \\ &= \frac{2}{9} : \frac{5}{12} = \frac{8}{15} \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

ÖRNEK(13)

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} \text{ orantısında}$$

$$\frac{a.c.e}{b.d.f} = 64 \text{ ise } \frac{c}{d} = ?$$

ÇÖZÜM:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = k \Rightarrow \frac{a}{b} = k, \frac{c}{d} = k, \frac{e}{f} = k$$

$$\frac{a.c.e}{b.d.f} = 64 \Rightarrow \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f} = 64 \Rightarrow k.k.k = 64$$

$$\Rightarrow k^3 = 64 \Rightarrow \sqrt[3]{k^3} = \sqrt[3]{64} \Rightarrow k = 4$$

o halde $\frac{c}{d} = k = 4$ bulunur.

ÖRNEK(14)

$$\frac{a-2b}{b} = k \text{ ise } \frac{a+b}{a-2b} = ? \quad (k \text{ cinsinden})$$

ÇÖZÜM:

$$\begin{aligned} \frac{a-2b}{b} &= \frac{a}{b} - \frac{2b}{b} = \frac{a}{b} - 2 = k \Rightarrow \frac{a}{b} = k+2 \\ &\Rightarrow a = b(k+2) \end{aligned}$$

a'nın b cinsinden bulduğumuz bu değerini soruda yazalım

$$\frac{a+b}{a-2b} = \frac{b(k+2)+b}{b(k+2)-2b} = \frac{\cancel{b}(k+2+1)}{\cancel{b}(k+2-2)} = \frac{k+3}{k}$$

elde edilir.

ÖRNEK(15)

$$\frac{x+3}{x-3} = \frac{a-b}{a+b} \Rightarrow \frac{a}{b} = ?$$

ÇÖZÜM:

İçler dışlar çarpımı yapmakla başlayalım

$$\frac{x+3}{x-3} \times \frac{a-b}{a+b}$$

$$\cancel{a}x + 3a + bx + \cancel{3b} = \cancel{a}x - 3a - bx + \cancel{3b}$$

$$3a + 3a = -bx - bx$$

$$6a = -2bx$$

$$\frac{a}{b} = \frac{-2x}{6} = \frac{-x}{3} \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK(16)

924 gramlık karışımdaki madde miktarları A,B,C dir.

$$\frac{A}{B} = \frac{3}{5}, \quad \frac{B}{C} = \frac{4}{9} \quad \text{ise} \quad A = ?$$

ÇÖZÜM:

Bu tür sorular oran orantının klasik sorularındandır. İlk yapılacak şey ortak olan değişkenin karşılıarı payda eşitlenir gibi eşitlenir.

Ortak olan B olduğundan, B'lerin karşısı eşitlenir.

$$\frac{A}{B} = \frac{3.4}{5.4}, \quad \frac{B}{C} = \frac{4.5}{9.5} \Rightarrow \frac{A}{B} = \frac{12}{20}, \quad \frac{B}{C} = \frac{20}{45}$$

oranı sabiti devreye girsin..

$$\Rightarrow A=12k, \quad B=20k, \quad C=45k$$

$$A+B+C=12k+20k+45k=924$$

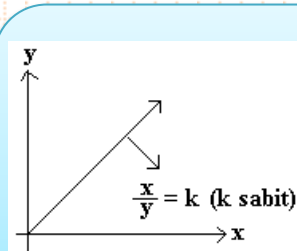
$$\frac{12k}{20k} = \frac{924}{20k} \Rightarrow k = 12$$

sıra A'yı bulmada

$$A = 12k = 12 \cdot 12 = 144 \text{ bulunur.}$$

ORANTI ÇEŞİTLERİ

1) DOĞRU ORANTI:



sabiti denir.)

Bir çokluk artarken diğeri de artıyor, yada biri azalırken diğeri de azalıyorsa bu iki çokluk doğru orantıdır denir. (burada k ya orantı

ÖRNEK(17)

$x+3$ ile $y-1$ doğru orantılıdır. $x=2$ iken $y=3$ ise $x=7$ iken $y=?$

ÇÖZÜM:

Önce orantımızı kuralım

$$\frac{x+3}{y-1} = k \quad \text{şimdi de ilk değerleri yazıp k'yı bulalım}$$

$$\frac{x+3}{y-1} = k \Rightarrow \frac{2+3}{3-1} = k \Rightarrow k = \frac{5}{2}$$

son olarak x'i yerine yazıp y'yi bulalım

$$\frac{x+3}{y-1} = \frac{5}{2} \Rightarrow \frac{7+3}{y-1} = \frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow 5y - 5 = 20$$

$$\Rightarrow 5y = 25$$

$$\Rightarrow y = 5$$

bulunur.

ÖRNEK(18)

Bir üçgenin iç açıları 3,4 ve 5 ile doğru orantılıdır. en büyük dış açı kaç olur?

ÇÖZÜM:

Bir üçgenin iç açıları 180 derecedir. Verilen üçgen açılarını k oranı sabitiyle ifade edelim

Açılar : $3k, 4k, 5k$

Bir üçgenini iç açıları toplamı 180 derece olduğundan

$$3k + 4k + 5k = 12k = 180$$

$$k = 15$$

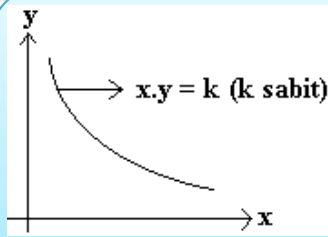
en büyük dış açı en küçük iç açıda olduğundan

küçük açı $3k=3 \cdot 15=45$ ve bu açının dış açısı $180-45 = 135$ tir.

Başımın 10cm^2 sinde 50 saç teli varsa tamamında kaç saç teli var acaba ☺



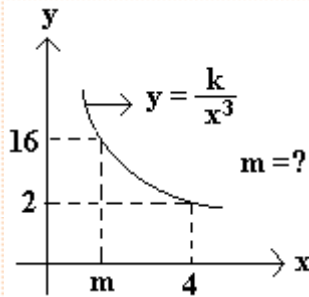
2) TERS ORANTI:



Bir çokluk artarken diğeri azalıyor yada biri azalırken diğeri artıyorsa bu çokluklar ters orantıdır denir.

(burada k ya orantı sabiti denir.)

ÖRNEK(19)



ÇÖZÜM:

Grafik ters orantıya işaret ediyor. Grafik üstündeki noktalar grafiğin denklemini sağlayacağından;

Grafik üstündeki noktalar

$x = 4$ iken $y = 2$ ve $x = m$ iken $y = 16$ dır.

$y = \frac{k}{x^3}$ denkleminde önce bilinen x ve y değerleri

yerine yazılır ve k bulunur.

önce $x = 4$ ve $y = 2$ değerlerini yazalım

$$y = \frac{k}{x^3} \Rightarrow k = y.x^3 = 2.4^3 = 2.64 = 128$$

son olarak

$x=m$ ve $y=16$ değerlerini kullanalım

$$k = y.x^3 \Rightarrow \frac{128}{16} = \frac{16.m^3}{16}$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{m^3} = \sqrt[3]{8}$$

$$\Rightarrow m = 2 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK(20)

$x+1$ ile $2y-3$ ters orantılıdır. $x=3$ iken $y=4$ ise $y=2$ iken $x=?$

ÇÖZÜM:

Yine önce orantıyı yazalım

$$(x+1)(2y-3)=k$$

yine önce bilinen değerlerle başlayalım

$x=3$ için $y=4$ yazalım

$$(x+1)(2y-3)=k \rightarrow (3+1)(2.4-3)=k$$

$$k=4.5=20$$

son olarak

$y = 2$ için x 'i bulalım

$$(x+1)(2y-3)=20 \rightarrow (x+1)(2.2-3)=20$$

$$x+1 = 20$$

$$x = 19 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK(21)

3 işçi bir işi 10 günde yaparsa 5 işçi aynı işi kaç günde yapar?

ÇÖZÜM:

Orantı çeşidini belirlemek bu sorularda çok önemli bu soruda işçi sayısı arttıkça işin bitme süresi azaldığından ters orantı vardır.

3 işçi ——— 10günde

5 işçi ——— x günde

Ters Orantı

$$5x = 30 \rightarrow x = 6 \text{ günde yapar}$$

3) KARIŞIK ORANTI

a sayısı b ile doğru, c ile ters orantılı ise

$$\frac{a}{b} \cdot c = k \text{ yazılır. (k, orantı sabiti)}$$

ÖRNEK(22)

a sayısı b+3 ile doğru, c-1 ile ters orantılıdır. a=5 ve b=3 iken c=7 ise b=8 ve c=12 iken a kaçtır?

ÇÖZÜM:

Orantıyı kuralım

$$\frac{a(c-1)}{(b+3)} = k$$

ilk işlemiz k'yı bulmak

a=5, b=3 ve c=7 için

$$\frac{a(c-1)}{(b+3)} = k \Rightarrow \frac{5(7-1)}{(3+3)} = k \Rightarrow \frac{30}{6} = k \Rightarrow k = 5$$

şimdi de a'yı bulalım

b=8 ve c=12 ise

$$\frac{a(c-1)}{(b+3)} = 5 \Rightarrow \frac{a(12-1)}{(8+3)} = 5 \Rightarrow \frac{11a}{11} = 5$$

a = 5 olur.

4) BİLEŞİK ORANTI:

İçinde ikiden fazla oran bulunan orantılara bileşik orantı denir.

Çözüm yolları

1) Orantıda iş belli ise

$$\frac{İş_1}{İş_2} = \frac{Diğerleri_1}{Diğerleri_2}$$

2) İş belli değilse orantıların çeşidine karar vermeli daha sonrada kim neyle çarpılacak onu belirlemeli

Belirleyici diye yazdığımız sütun ile önce 1.sütunu kapatıp ikinci sütunun orantısına karar verilir.

Aynı işlemi diğer sütun için de yaparız. Yani

2.sütun kapatılıp 1.sütunun orantısına karar verilir

Orantılara karar verdikten sonra yine 1.sütun kapatılıp 2.sütun ile belirleyici sütun arasındaki çarpım çizgilerine karar verilir aynıysa diğer sütun için de yapılır.

Çizgiyi çizmeye binmeyenden başlanır. Çizilenler kendi arasında, çizilmeyenler kendi arasında çarpılır.

Aşağıdaki örnekleri inceleyin

1. örnek

1.sütun	2.sütun	3.sütun
a	b	c
d	e	x
Doğru Or.	Doğru Or.	(belirleyici)

1.sütun	2.sütun	3.sütun
a	b	c
d	e	x
Doğru Or.	Doğru Or.	(belirleyici)

Şimdi ikisini bağlayacağız

önce b ile sonra a ile çarpılması gerektiğinden çizdiğimiz önce b'ye oradan da a'ya gitmeli

1.sütun	2.sütun	3.sütun
a	b	c
d	e	x
Doğru Or.	Doğru Or.	(belirleyici)

İşlemimiz : a.b.x = d.e.c

2.örnek

yukarıdaki yolları izlediğimizde

1.sütun	2.sütun	3.sütun
a	b	c
d	e	x
Ters Or.	Doğru Or.	(belirleyici)

(1.sütundaki d ile x'in çarpılması için x'in ilk çarpıldığı b'den sonra d ile çarpılması gerekir.

İşlemimiz : d.b.x = a.e.c

ÖRNEK(23)

Eş güçte 8 işçi 30 metre kanalı 15 günde tamir ediyor. Buna göre aynı nitelikteki 12 işçi 45 metre kanalı kaç günde tamir eder?

ÇÖZÜM:

8 işçi	30 m	15 günde
12 işçi	45 m	x günde

yapılan iş belli olduğundan orantı çeşitlerini bulmaya dahi gerek yoktur. Direk çözüme geçeriz.

$$\frac{İş_1}{İş_2} = \frac{Diğerleri_1}{Diğerleri_2} \Rightarrow \frac{30}{45} = \frac{8.15}{12.x}$$

(artık sadeleştirmeyi öğrendiğimize göre siz sadeleştirmeye başlayın biz cevabı yazalım ☺)
Cevap x =15 bulunur.

ÖRNEK(24)

k tane işçinin 12 saat çalışmasıyla 20 günde bitirilebilen bir iş, işçi sayısı artırılarak ve günde 10 saat çalışarak 10 günde bitiriliyor. Buna göre k aşağıdakilerden hangisi olabilir?

- A) 11 B) 10 C) 9 D) 8 E) 7

(ÖSYS-2000)

ÇÖZÜM:

K işçi	1 işi	12 sa	20 günde
H işçi	1 işi	10 sa	10 günde

$$\frac{İş_1}{İş_2} = \frac{Diğerleri_1}{Diğerleri_2} \Rightarrow \frac{1}{1} = \frac{k.12.20}{h.10.10}$$

$$h = \frac{12k}{5}$$

h bir tamsayı olduğundan k'nın 5 ile bölünmesi yani 5'in katı olması gerek. Şıkların içinde bir tek B şıkkı 5 ile tam bölünür.

Cevap B şıkkıdır.

5) DÖRDÜNCÜ ORANTILI:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{x} \text{ orantısında elde edilen x'e}$$

dördüncü orantılı denir.

ÖRNEK(25)

4,3 ve 8 sayılarının dördüncü orantılısı kaçtır?

ÇÖZÜM:

Kural uygulanırsa

$$\frac{4}{3} = \frac{8^2}{x} \Rightarrow x = 6 \text{ bulunur}$$

ÖRNEK(26)

3 kadın 8 günde 6 halı dokursa , 4 kadın 15 günde kaç halı dokur

ÇÖZÜM:

3 kadın 8 günde 6 halı

4 kadın 15 günde x halı

yapılan iş halı dokuma olduğundan

$$\frac{İş_1}{İş_2} = \frac{Diğerleri_1}{Diğerleri_2} \Rightarrow \frac{6}{x} = \frac{3.8}{4.15} \text{ sadeleştirmeler}$$

yapıldığında x = 15 bulunur.

ÖRNEK(27)

8 traktör 10 dönüm tarlayı günde 5 saat çalışarak
6 günde sürüyor. 7 traktör 21 dönüm tarlayı günde
8 saat çalışarak kaç günde sürer?

ÇÖZÜM:

8 traktör	10 dön.tar.	5 sa	6 günde
7 traktör	21 dön.tar.	8 sa	x günde

yapılan iş tarla sürme işi olduğundan

$$\frac{İş_1}{İş_2} = \frac{Diğerleri_1}{Diğerleri_2} \Rightarrow \frac{10}{21} = \frac{8.5.6}{7.8.x}$$

sadeleştirmeleri yaparsak $x = 9$ buluruz.

ÖRNEK(28)

Üç kişi bir miktar cevizi kendi aralarında 3,4 ve 8 sayılarıyla orantılı olacak biçimde paylaşıyorlar. En çok ceviz alan kişi 56 ceviz aldığına göre en az ceviz alan kaç ceviz almıştır?

ÇÖZÜM:

Sadece 'orantılıdır' diyorsa bu doğru orantı demektir.

Kişiler a,b,c olsun

$$a = 3k, \quad b = 4k, \quad c = 8k$$

en çok ceviz alan c olduğundan

$$c = 8k = 56 \Rightarrow k = 7 \text{ olur.}$$

En az ceviz alan da a olduğundan

$$a = 3k = 3.7 = 21 \text{ ceviz almıştır}$$

ÖRNEK(29)

$$\frac{x}{y} = \frac{z}{t} = \frac{2}{5} \Rightarrow \frac{3x+2z}{6y+16} = 0,2 \quad \text{ise } t=?$$

ÇÖZÜM:

Bu soruda $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k \Rightarrow \frac{na \pm mc}{nb \pm md} = k$ özeliğini kullanacağız. Yalnız ufak bir sorunumuz var oda paydadaki katsayılar paya uymuyor.. uyduracağız

$$\frac{3x+2z}{6y+16} = 0,2 \Rightarrow \frac{3x+2z}{2(3y+8)} = 0,2$$

$$\Rightarrow \frac{3x+2z}{3y+8} = 2.(0,2) = 0,4 = \frac{4}{10}$$

$$\Rightarrow \frac{3x+2z}{3y+8} = \frac{2}{5} \text{ şimdi oldu}$$

x, 3 ile çarpılmış, y'de 3 ile çarpılmış

z, 2 ile çarpılmış t'de 2 ile çarpılmalı ki orantı sabiti bozulmasın. Yani şöyle olmalı

$$\frac{3x+2z}{3y+8} = \frac{2}{5} \Rightarrow \frac{3x+2z}{3y+2t} = \frac{2}{5}$$

bakın 8 yerine 2t gelmeliydi...eşitleyelim.

$$2t = 8$$

$$t = 4 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK(30)

8,10,15 yaşlarındaki üç kardeşe yaşları ile orantılı olarak harçlık veren bir baba 99 milyon para dağıtıyorsa ortanca kardeş kaç lira alır?

ÇÖZÜM:

$$\text{Küçük} : 8k$$

$$\text{Ortanca} : 10k$$

$$+ \text{Büyük} : 15k$$

$$\text{kardeşler} : 33k \rightarrow 33k = 99 \rightarrow k = 3$$

$$\text{Ortanca} : 10k = 10.3 = 30 \text{ almıştır.}$$

ÖRNEK(31)

12,18 ve 20 yaşlarındaki üç kardeşe bir miktar para yaşları ile ters orantılı olarak paylaştırılacaktır. En küçük ile en büyük kardeşin aldıkları paraların toplamı 12 000 ise ortancanın aldığı para kaç liradır?

ÇÖZÜM:

Orantı sabitimiz her zamanki gibi k olsun

Kardeşler

$$\text{Küçük : } \frac{k}{12}$$

$$\text{Ortanca : } \frac{k}{18} \quad \frac{k}{12} + \frac{k}{20} = 12000$$

(5) (3)

$$\text{Büyük : } \frac{k}{20} \quad \frac{8k}{60} = 12000^{1500}$$

$$k = 60.1500 = 90000$$

$$\text{Ortanca : } \frac{k}{18} = \frac{90000}{18} = 5000 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK(32)

a, b, c ∈ Z⁺ olmak üzere; $\frac{2}{3a} = \frac{3}{5b} = \frac{1}{2c}$ ise

a+b+c aşağıdakilerden hangisi olabilir?

A) 25 B) 38 C) 45 D) 63 E) 106

ÇÖZÜM:

(özelliklerimizi kullanalım. Orantıyı ters çevir)

$$\frac{2}{3a} = \frac{3}{5b} = \frac{1}{2c} \Rightarrow \frac{3a}{2} = \frac{5b}{3} = \frac{2c}{1} = k$$

$$\frac{3a}{2} = k \Rightarrow a = \frac{2k}{3} \quad a,b,c \text{ birer tamsayı iseler}$$

$$\frac{5b}{3} = k \Rightarrow b = \frac{3k}{5} \quad \text{paydada 3,5,2 kalmamalı}$$

$$\frac{2c}{1} = k \Rightarrow c = \frac{k}{2} \quad \text{yani k; 3,5,2 ile bölünmeli}$$

(k sayısı 3,5,2'nin bir katıdır.)

o halde Okek(3,5,2)=30 olduğundan k=30 seçilir(bu tutmazsa sırayla 30,60,90 .. deneriz)

$$\begin{aligned} a &= \frac{2k}{3} = \frac{2.30}{3} = 20 \\ b &= \frac{3k}{5} = \frac{3.30}{5} = 18 \\ c &= \frac{k}{2} = \frac{30}{2} = 15 \end{aligned} \rightarrow 20+18+15=53$$

tutmadı..e o zaman 60'ı deneyelim .k, iki katına çıktığında(yani 60 olduğunda) toplam da iki katına çıkar yani 53.2=106 olur ki bu da E şıkkını işaret eder.

ÖRNEK(33)

$$\frac{a+b+c}{8} = \frac{a-c}{4} = \frac{b+c}{3} \quad \text{ise a:b:c=?}$$

ÇÖZÜM:

$$\frac{a+b+c}{8} = \frac{a-c}{4} = \frac{b+c}{3} = k$$

$$a+b+c = 8k$$

$$b+c = 3k$$

$$a-c = 4k$$

şimdi denklemleri kullanarak a,b,c'leri k cinsinden bulalım

$$a + \underbrace{b+c}_{3k} = 8k \rightarrow a=5k$$

$$a-c = 4k \rightarrow 5k-c = 4k \rightarrow c = k$$

$$b+c = 3k \rightarrow b+k=3k \rightarrow b = 2k$$

o halde a:b:c=5:2:1 bulunur.

ÖRNEK(34)

$x, y, z \in \mathbb{R}^-$ olmak üzere; $\frac{1}{4x} = \frac{2}{5y} = \frac{4}{3z}$ ise

x, y, z 'nin sıralanışı?

ÇÖZÜM:

x, y, z negatif olduğu için orantıyı -1 'e eşitleyip x, y, z 'yi çekelim

$$\frac{1}{4x} = \frac{2}{5y} = \frac{4}{3z} = -1$$

$$\frac{1}{4x} = -1 \Rightarrow x = -\frac{1}{4}$$

$$\frac{2}{5y} = -1 \Rightarrow y = -\frac{2}{5}$$

$$\frac{4}{3z} = -1 \Rightarrow z = -\frac{4}{3}$$

kesirleri sıralamak için paylarını eşitleyelim

$$x = -\frac{1}{4} \quad (4) \quad , \quad y = -\frac{2}{5} \quad (2) \quad , \quad z = -\frac{4}{3} \quad (1)$$

$$x = -\frac{4}{16} \quad , \quad y = -\frac{4}{10} \quad , \quad z = -\frac{4}{3}$$

Bu kesirler pozitif olsaydılar paydası küçük olan daha büyük olurdu $z > y > x$

Ancak bu kesirler negatif olduklarından

$$z < y < x \text{ olur.}$$

KURAL;

D , Doğru orantı --- T, Ters orantı 'yı gösterebilirsin

x ile y D , y ile z D $\Rightarrow x$ ile z D

x ile y T , y ile z T $\Rightarrow x$ ile z D

x ile y D , y ile z T $\Rightarrow x$ ile z T

x ile y T , y ile z D $\Rightarrow x$ ile z T

ilişkisi vardır.

ÖRNEK(35)

$\frac{a}{b} = 9$, $\frac{b}{c} = 4$, $c.d = 12$, $d.e = 8$ olduğuna

göre aşağıdakilerden hangisi Doğrudur?

- A) a ile d doğru orantılıdır
- B) a ile e ters orantılıdır.
- C) c ile e ters orantılıdır.
- D) b ile e doğru orantılıdır.
- E) b ile d doğru orantılıdır.

ÇÖZÜM:

B ile c doğru , c ile d ters \rightarrow b ile d ters

B ile d ters , d ile e ters \rightarrow b ile e doğru

O halde cevap D şıkkıdır.

ORTALAMA ÇEŞİTLERİ

1) ARİTMETİK ORTA

n tane sayının aritmetik ortası;

$$A.O = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

$$\text{Ö.O.2S.A.O} = \frac{a+b}{2}$$

2) GEOMETRİK ORTA

n tane sayının geometrik ortası

$$G.O = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}$$

$$\text{Ö.O.2S.G.O} = \sqrt{a \cdot b}$$

(iki sayının geometrik ortalamasına özel olarak 'orta orantı' denir)

3) HARMONİK ORTA

n tane sayının harmonik ortası;

$$H.O = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}}$$

$$\text{Ö.O.2S.H.O} = \frac{2 \cdot a \cdot b}{a+b}$$

$$\text{NOT: } (G.O)^2 = (A.O)(H.O)$$

NOT: iki sayının herhangi iki ortalaması eşit ise bu iki sayı da eşittir.

ÖRNEK(36)

x,y ∈ R olmak üzere ;

$(x^2 + y^2 + 25)$ ile $(6x - 10y - 9)$ sayılarının aritmetik ortası geometrik ortasına eşitse $x+y=?$

ÇÖZÜM:

$$x^2 + y^2 + 25 = 6x - 10y - 9$$

$$\underbrace{x^2 - 6x + 9}_{(x-3)^2} + \underbrace{y^2 + 10y + 25}_{(y+5)^2} = 0$$

$$(x-3)^2 + (y+5)^2 = 0$$

iki sayının kareleri toplamı sıfır ise bu sayılar ya zıt işaretli veya ikisi de sıfır olmalı. birinden biri negatif olamayacağına göre (çift kuvvet) ikisi de sıfırdır.

$$x-3 = 0 \rightarrow x = 3, \quad y+5 = 0 \rightarrow y = -5$$

o halde $x+y = 3-5 = -2$ olur.

NOT: iki sayının aritmetik ortası, geometrik ortasından daima büyük veya eşittir.

isp:

$$(a-b)^2 \geq 0 \Rightarrow (a-b)^2 + 4ab \geq 4ab$$

$$\Rightarrow (a+b)^2 \geq 4ab$$

$$\Rightarrow \frac{(a+b)^2}{4} \geq ab$$

$$\Rightarrow \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

ÖRNEK(37)

$\frac{x^2 + 5}{2x}$ ifadesinin en küçük değeri kaçtır?

ÇÖZÜM:

İfadeyi iki sayının aritmetik ortası şeklinde göstermeye çalışalım

$$\frac{x^2 + 5}{2x} \Rightarrow \frac{\frac{x^2}{x} + \frac{5}{x}}{2} \Rightarrow \frac{x + \frac{5}{x}}{2}$$

şimdi elde edilen ifade x ve $\frac{5}{x}$ 'in aritmetik ortasına dönüştü

$$\frac{x + \frac{5}{x}}{2} \geq \sqrt{x \cdot \frac{5}{x}}$$

$$\frac{x + \frac{5}{x}}{2} \geq \sqrt{5}$$

o halde en küçük değer $\sqrt{5}$ olur.

GENEL ÖRNEKLER

ÖRNEK(38)

a ve b sıfırdan farklı pozitif sayılardır.

$$a + \frac{1}{3b} = 2, b + \frac{1}{3a} = 3 \text{ ise } \frac{b^2 - a^2}{a^2} = ?$$

ÇÖZÜM:

$$a + \frac{1}{3b} = 2 \Rightarrow \frac{3ab + 1}{3b} = 2 \Rightarrow 3ab + 1 = 6b$$

$$b + \frac{1}{3a} = 3 \Rightarrow \frac{3ab + 1}{3a} = 3 \Rightarrow 3ab + 1 = 9a$$

$$a + \frac{1}{3b} = 2 \rightarrow \frac{3ab + 1}{3a} = 2 \rightarrow 3ab + 1 = 6b$$

$$b + \frac{1}{3a} = 3 \rightarrow \frac{3ab + 1}{3b} = 3 \rightarrow 3ab + 1 = 9a$$

$$9a = 6b \rightarrow 3a = 2b$$

bu eşitliği sağlaması için a=2 ve b=3 seçilirse

$$\frac{b^2 - a^2}{a^2} = \frac{3^2 - 2^2}{2^2} = \frac{9 - 4}{4} = \frac{5}{4} \text{ bulunur}$$

ÖRNEK(39)

İki sayının geometrik ortası a, x ile bu iki sayının geometrik ortası b ise x nedir?

ÇÖZÜM:

Sayılarımız m ve n olsun

$$\sqrt{m \cdot n} = a \Rightarrow m \cdot n = a^2$$

$$\sqrt[3]{x \cdot m \cdot n} = b \Rightarrow \left(\sqrt[3]{x \cdot a^2} \right)^3 = b^3 \Rightarrow x \cdot a^2 = b^3$$

$$\Rightarrow x = \frac{b^3}{a^2} \text{ dir.}$$

ÖRNEK(40)

30 kişilik bir sınıfın $\frac{3}{5}$ 'i kızdır. Kız öğrencilerin matematik dersi not ortalaması 6, erkek öğrencilerin matematik dersi not ortalaması 8 dir. Bu sınıfın matematik dersi not ortalaması nedir?

ÇÖZÜM:

$$\text{Kız öğrenciler : } 30 \cdot \frac{3}{5} = 18 \text{ kişi}$$

$$\text{Erkek öğrenciler : } 30 - 18 = 12 \text{ kişi}$$

$$\text{Kız Not Ort.} = \frac{\text{Kız Not Top.}}{\text{Kız öğr. sayısı}}$$

$$6 = \frac{\text{Kız. Not Top.}}{18} \Rightarrow \text{Kız. Not Top.} = 108$$

$$\text{Erkek Not Ort.} = \frac{\text{Erkek Not Top.}}{\text{Erkek öğr. sayısı}}$$

$$8 = \frac{\text{Erkek Not Top.}}{12} \Rightarrow \text{Erkek Not Top.} = 96$$

$$\text{Sınıf Not Ort.} = \frac{\text{Erkek Not Top.} + \text{Kız Not Top.}}{\text{Tüm Öğr. Sayısı}}$$

$$= \frac{96 + 108}{30} = \frac{204}{30} = 6,8 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK(41)

3 ve 7 yaşlarında iki kardeş bir miktar parayı küçüğü yaşı ile doğru, büyüğü yaşı ile ters orantılı olarak bölüşüyorlar. Payları oranı kaçtır?

ÇÖZÜM:

Orantı sabitimiz k olsun

$$\text{Küçük} = 3k, \quad \text{Büyük} = \frac{k}{7}$$

$$\text{Payları oranı : } \frac{3k}{\frac{k}{7}} = \frac{3\cancel{k} \cdot 7}{\cancel{k}} = 21 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK(42)

15 kişinin yaş ortalaması 22 dir. Üç sene sonra kaç olur?

ÇÖZÜM:

Üç sene sonra herkes 3 yaş büyüyeceğinden ortalama 3 yaş artar $22+3= 25$ olur.

ÖRNEK(43)

5 ve 7 ile orantılı olan pozitif iki sayının kareleri toplamı 296 ise bu sayıların farkının mutlak değeri kaçtır?

ÇÖZÜM:

Sayılarımız x ve y olsun

$$\begin{cases} x = 5k \\ y = 7k \end{cases} \Rightarrow (5k)^2 + (7k)^2 = 296$$

$$\Rightarrow 25k^2 + 49k^2 = 296$$

$$\Rightarrow \frac{74k^2}{74} = \frac{296}{74}$$

$$\Rightarrow k^2 = 4$$

$$\Rightarrow k = \pm 2$$

sayılar pozitif olduğundan $k=2$ alınır.

$$x = 5k = 5 \cdot 2 = 10$$

$$y = 7k = 7 \cdot 2 = 14$$

$$|x - y| = |10 - 14| = |-4| = 4 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK(44)

Üç erkek işçi günde A,B,C lira , üç kadın işçi günde X,Y,Z lira almaktadır. Bir günde erkeklerin aldığı ücret kadınların aldığı ücrete eşittir.

A:B:C=2:4:6 ve X:Y:Z=7:8:9 olduğuna göre aşağıdakilerden hangisi Doğrudur?

- A) A=X B) C<Z C) B>Z
D) Y<A E) B=Y

ÇÖZÜM:

Erkekler için orantı sabitimiz k

Kadınlar için orantı sabitimiz m olsun

$$A:B:C=2:4:6 \rightarrow A = 2k, B = 4k, C = 6k$$

$$\begin{array}{c} + \\ \hline A+B+C = 12k \end{array}$$

$$X:Y:Z=7:8:9 \rightarrow X = 7m, Y = 8m, Z = 9m$$

$$\begin{array}{c} + \\ \hline X+Y+Z = 24m \end{array}$$

Bunlar eşit olduğundan $12k = 24m \rightarrow k = 2m$

Aradaki bağlantıyı kurmak için erkeklerin orantı sabitini de m ye çevirelim

$$A = 2k = 2 \cdot 2m = 4m$$

$$B = 4k = 4 \cdot 2m = 8m$$

$$C = 6k = 6 \cdot 2m = 12m$$

Görüldüğü gibi B = 8m ve Y = 8m olduğundan

B = Y dir. Doğru şık E şıkkıdır.

ÖRNEK(45)

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{2}{3}, a+3c-4e=10 \text{ ve } b=4f \text{ ise } d$$

kaçtır?

ÇÖZÜM:

Önce $a+3c-4e=10$ denkleminin sol tarafını

Verilen orantıdan (orantı özelliklerinin 5.si kullanarak) buluruz

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{\overbrace{a+3c-4e}^{10}}{\underbrace{b+3d-4f}_{4f}} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{10}{3d} \times \frac{2}{3} \Rightarrow 6d = 30 \Rightarrow d = 5 \text{ olur.}$$

ÖRNEK(46)

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = 5 \text{ tir. } 2a-3c+e=7 \text{ ve } f-3d=5 \text{ ise } b=?$$

ÇÖZÜM:

Aynı şekilde;

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = 5 \Rightarrow \frac{\overbrace{2a-3c+e}^7}{\underbrace{2b-3d+f}_5} = 5$$

$$\Rightarrow \frac{7}{2b+5} \times 5$$

$$\Rightarrow 10b+25 = 7$$

$$\Rightarrow 10b = 7-25$$

$$\Rightarrow \frac{10b}{10} = \frac{-18}{10}$$

$$\Rightarrow b = \frac{-9}{5} \text{ elde edilir.}$$

ÖRNEK(47)

$$\frac{x}{y} = \frac{z}{t} = k \text{ ve } \frac{2x + mz}{6y - 6t} = \frac{k}{3} \text{ ise } m=?$$

ÇÖZÜM:

Sorumuz orantının 5. özelliğine benziyor. Ancak paydayı biraz düzenlemeliyiz.

$$\frac{2x + mz}{6y - 6t} = \frac{k}{3} \Rightarrow \frac{2x + mz}{\cancel{3}(2y - 2t)} = \frac{k}{\cancel{3}}$$

$$\Rightarrow \frac{2x + mz}{2y - 2t} = k \text{ şimdi oldu}$$

dikkat edildiyse orantı sabiti yine k yani bozulmamış. Orantının beşinci özelliği gereği pay ve paydadaki katsayılar aynı olmalı. o halde

$$\frac{2x + mz}{2y - 2t} = k \Rightarrow \frac{2x + -2z}{2y - 2t} = k$$

olursa $m = -2$ olur.

ÖRNEK(48)

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k \quad \frac{3a - 2}{3b + 5d} = k \text{ ise } c=?$$

ÇÖZÜM:

Yine 5. özellik..

$$\frac{3a - 2}{3b + 5d} = k \Rightarrow \frac{3a + 5c}{3b + 5d} = k \text{ olmalı ki orantı}$$

sabiti bozulmasın

$$\text{bu durumda } 5c = -2 \rightarrow c = -\frac{2}{5} \text{ bulunur.}$$

NOT:

A ve b doğru orantılı iki çokluk olsun

$$\frac{a}{b}$$

$$2a \rightarrow 2b \text{ (a, 2 ile çarpılırsa b de çarpılır)}$$

$$\frac{a}{3} \rightarrow \frac{b}{3} \text{ (a, 3 ile bölünürse b de bölünür)}$$

A ve b ters orantılı iki çokluk olsun

$$\frac{a}{b}$$

$$2a \rightarrow \frac{b}{2} \text{ (a, 2 ile çarpılırsa b 2'ye bölünür)}$$

$$\frac{a}{3} \rightarrow 3b \text{ (a, 3 ile bölünürse b 3 ile çarpılır)}$$

ÖRNEK(49)

x işçi günde y saat çalışarak bir işi 2 günde bitiriyor. işçi sayısı 2 kat artırılır, çalışma süresi üçte birine inerse iş kaç günde biter?

ÇÖZÜM:**1.yol**

İşçi sayısı (x) ile işin bitme süresi ters orantılıdır.

$$\frac{x}{2 \text{ gün}}$$

$$2x \rightarrow \frac{2}{2} = 1$$

çalışma süresi (y) ile işin bitme süresi ters orantılıdır.

$$\frac{y}{1 \text{ gün}}$$

$$\frac{y}{3} \rightarrow 3.1=3 \text{ gün bulunur.}$$

2.yol

Normal bileşik orantı kuralı

$$\begin{array}{ccc} x \text{ işçi} & \text{günde } y \text{ saat} & 2 \text{ gün} \\ 2x \text{ işçi} & \text{günde } y/3 \text{ saat} & ? \text{ gün} \end{array}$$

Ters Or. Ters Or.

$$2x \cdot \frac{y}{3} \cdot ? = x \cdot y \cdot 2$$

$$? = 3 \text{ gün bulunur.}$$

ÖRNEK(50)

$x, y, z \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere ,

$3xy = 5yz = 7zx$ ise x, y, z sayıları hangi sayılarla orantılı olur?

ÇÖZÜM:

Orantının her tarafını xyz ile bölelim (9. özellik)

$$\frac{3\cancel{xy}}{\cancel{xy}z} = \frac{5\cancel{yz}}{x\cancel{yz}} = \frac{7\cancel{zx}}{\cancel{xy}z}$$

$$\frac{3}{z} = \frac{5}{x} = \frac{7}{y} \text{ şimdi de ters çevirelim (3. özellik)}$$

$$\frac{x}{5} = \frac{y}{7} = \frac{z}{3} \text{ bulunur. o halde } x:y:z = 5:7:3 \text{ olur.}$$

ÖRNEK(51)

a, b, c pozitif tam sayılar $2a=3b$ ve $5b=3c$ ise $a+b+c$ nin en küçük değeri nedir?

ÇÖZÜM:

Bu eşitlikleri orantıya çevirip ,ortak olanların karşılarını eşitleyelim

$$2a = 3b \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{3.3}{2.3} = \frac{9}{6} \text{ (b 'ler ortak)}$$

$$5b = 3c \Rightarrow \frac{b}{c} = \frac{3.2}{5.2} = \frac{6}{10}$$

bu durumda k sabitini de kullanırsak

$$a = 9k, \quad b = 6k, \quad c = 10k \text{ bulunur.}$$

$a+b+c$ nin en küçük olması isteniyorsa k 'yı en küçük seçeriz.

$k = +1$ seçersek (pozitif olduklarından)

$$a = 9k = 9, \quad b = 6k = 6, \quad c = 10k = 10$$

sonuç $a+b+c = 9+6+10 = 25$ elde edilir.

ÖRNEK(52)

a ve b pozitif tamsayılarıdır.

$$a + \frac{1}{b} = 3 \text{ ve } b + \frac{1}{a} = 1 \text{ ise } \frac{a^2 + b^2}{b^2} = ?$$

ÇÖZÜM:

$$a + \frac{1}{b} = 3 \rightarrow \frac{ab + 1}{b} = 3 \rightarrow \overbrace{ab + 1} = 3b$$

$$b + \frac{1}{a} = 1 \rightarrow \frac{ab + 1}{a} = 1 \rightarrow \overbrace{ab + 1} = \hat{a}$$

$a = 3b$ değerini yerine yazalım

$$\frac{a^2 + b^2}{b^2} = \frac{(3b)^2 + b^2}{b^2} = \frac{9b^2 + b^2}{b^2} = \frac{10b^2}{b^2} = 10$$

bulunur.

ÖRNEK(53)

a, b, c sayıları sırasıyla 3 ve m ile doğru, n ile ters orantılıdır. c sayısı a ve b 'nin orta orantılısı ise m ile n arasında aşağıdaki bağıntıların hangisi vardır?

- A) $n^2=3m$ B) $m=3n$ C) $3mn^2=1$
D) $m.n=3$ E) $n^2=m$

ÇÖZÜM:

Orantı sabitemiz k olsun

$$a = 3k, \quad b = mk, \quad c = \frac{k}{n}$$

c sayısı a ve b 'nin orta orantılısı ise $c = \sqrt{ab}$

şimdi değerleri yerine yazalım

$$c = \sqrt{ab} \Rightarrow \frac{k}{n} = \sqrt{3k.mk} \Rightarrow \left(\frac{k}{n}\right)^2 = \left(\sqrt{3k.mk}\right)^2$$

$$\frac{k^2}{n^2} = 3mk^2 \Rightarrow 3mn^2 = 1 \text{ olur.}$$

O halde cevap C şıkkı olur.

ÖRNEK(54)

a sayısı (b+1) ile doğru orantılı iken (b²+2) ile ters orantılıdır. a=11 için b=2 ise b=3 için a=?

ÇÖZÜM:

Orantıyı kuracak olursak;

$$\frac{a}{b+1} \cdot (b^2 + 2) = k \text{ olsun}$$

a = 11 ve b = 2 için

$$\frac{11}{2+1} \cdot (2^2 + 2) = k \Rightarrow k = \frac{66}{3} = 22$$

b = 3 için a'yı bulalım

$$\frac{a}{3+1} \cdot (3^2 + 2) = 22 \Rightarrow \frac{11a}{4} = 22^2$$

$$\Rightarrow a = 8 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK(55)

Bir tüccar 3 tanesini a liraya aldığı yumurtaların 5 tanesini b liraya satıyor. Satış fiyatı alış fiyatının iki katı olduğuna göre a/b oranı nedir?

ÇÖZÜM:

3 tanesi a liraya alınmışsa bir tanesi $\frac{a}{3}$ liradır.

5 tanesi b liraya satılıyorsa tanesi $\frac{b}{5}$ liraya satılıyor demektir.

Satış fiyatı alış fiyatının iki katıymış yani;

$$\left(\frac{b}{5}\right) = 2\left(\frac{a}{3}\right)$$

$$\frac{b}{5} \times \frac{2a}{3}$$

$$10a = 3b$$

$$\frac{a}{b} = \frac{3}{10} \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK(56)

$$\frac{3x - 2y}{2} = \frac{x + 3y}{3} \text{ eşitliğinde x ve y negatif}$$

tamsayılardır. x+y toplamının alabileceği en büyük değer nedir?

ÇÖZÜM:

$$\frac{3x - 2y}{2} \times \frac{x + 3y}{3} \Rightarrow 9x - 6y = 2x + 6y$$

$$\Rightarrow 9x - 2x = 6y + 6y$$

$$\Rightarrow 7x = 12y$$

7 ve 12 sadeleşmediklerinden eşitliğin sağlanması için x=-12 ve y = -7 seçilebilir.

O halde x+y = -12-7 = -19 bulunur.

ÖRNEK(57)

Bir öğrenci kampındaki kızların sayısının erkeklerin sayısına oranı 7/11 dir. Kampa 3 erkek daha gelince bu oran 5/8 oluyor. Son durumda bu kamptaki öğrenci sayısı nedir?

ÇÖZÜM:

$$\frac{\text{kız}}{\text{erkek}} = \frac{7k}{11k} \rightarrow \text{kız} = 7k, \text{ erkek} = 11k \text{ olsun}$$

kampa 3 erkek gelince erkekler 11k+3 olur. Yeni

$$\text{oran ise } \frac{\text{kız}}{\text{erkek}} = \frac{7k}{11k+3} \times \frac{5}{8}$$

$$56k = 55k + 15$$

$$56k - 55k = 15$$

$$k = 15$$

son durumdaki öğrenci sayısı :

$$7k + 11k + 3 = 18k + 3 = 18 \cdot 15 + 3$$

$$= 273 \text{ kişi vardır.}$$

ÖRNEK(58)

Farklı iki mumdan uzun olanı 3 saat, kısa olanı 5 saat yanabiliyor. Aynı anda yakılan bu mumların boyları 2 saat sonra eşit olduğuna göre yanmadan önceki boyları oranı kaçtır?

ÇÖZÜM:

Mum soruları kalıp sorulardandır. O yüzden adım adım çözelim ki iyi kavransın

Mumların boyları

Uzun olan: x

Kısa olan : y olsun

Önce 1 saatte yanan kısımlar bulunur

Uzun olan 3 saatte yanıyorsa 1 saatte $\frac{x}{3}$ 'ü yantar.

Kısa olan 5 saatte yanıyorsa 1 saatte $\frac{y}{5}$ 'i yantar.

2 saat sonra yanan kısım

uzun olan 2. $\frac{x}{3} = \frac{2x}{3}$ yantar

kısa olan 2. $\frac{y}{5} = \frac{2y}{5}$ yantar

2 saat sonra kalan kısım

uzun olan $x - \frac{2x}{3} = \frac{x}{3}$ kalır

kısa olan $y - \frac{2y}{5} = \frac{3y}{5}$ kalır

2 saat sonra boylar eşit demek, yanan değil kalan kısımlar eşitlenecek demektir. Bu yüzden;

$$\frac{x}{3} = \frac{3y}{5} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{9}{5} \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK(59)

Bir y değişkeni x^2+1 ile doğru , $4x-1$ ile ters orantılı olarak değişmektedir. $x=3$ iken $y=10$ ise $x=1$ iken $y=?$

ÇÖZÜM:

Orantımız $\frac{y}{x^2+1}(4x-1) = k$ olur.

$x=3$ ve $y = 10$ için

$$\frac{y}{x^2+1}(4x-1) = k \Rightarrow \frac{10}{3^2+1}(4.3-1) = k$$

$$\Rightarrow \frac{10}{10}(12-1) = k$$

$$\Rightarrow k = 11$$

$x = 1$ iken y' yi bulalım

$$\frac{y}{x^2+1}(4x-1) = 11 \Rightarrow \frac{y}{1^2+1}(4.1-1) = 11$$

$$\Rightarrow \frac{y}{2}.3 = 11$$

$$\Rightarrow y = \frac{22}{3} \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK(60)

42 cm 'lik bir çubuk, birinci parça 2 ile , ikinci parça 3 ile doğru, üçüncü parça 4 ile ters orantılı olacak biçimde üç parçaya bölünüyor. Üçüncü parçanın uzunluğu kaç cm dir?

ÇÖZÜM:

Birinci parça = $2k$

İkinci parça = $3k$

Üçüncü parça = $\frac{k}{4}$

$$2k + 3k + \frac{k}{4} = 42 \Rightarrow \frac{21k}{4} = 42 \Rightarrow k = 8$$

üçüncü parça $\frac{k}{4} = \frac{8}{4} = 2$ bulunur.

ÖRNEK(61)

x, y den 6 fazla, z den 3 eksiktir. z-x ile z-y nin orta orantısı kaçtır?

ÇÖZÜM:

$$x = y + 6 \rightarrow x - y = 6 \quad \text{denklemleri toplayıp}$$

$$x = z - 3 \rightarrow z - x = 3 \quad z-y'yi bulalım$$

$$\begin{array}{r} + \quad \underline{\hspace{2cm}} \\ z - y = 9 \end{array}$$

z-x ile z-y nin orta orantısı $= \sqrt{3 \cdot 9} = 3\sqrt{3}$ olur.

ÖRNEK(62)

x tane kız, y tane erkek öğrencinin bulunduğu bir sınıfta, kızların not ortalaması 40, erkeklerin not ortalaması 50 dir. Sınıfın not ortalaması 47 olduğuna göre sınıfta en az kaç öğrenci vardır?

ÇÖZÜM:

$$\text{Kız Not Ort.} = \frac{\text{Kız Not Top.}}{\text{Kız öğr. sayısı}}$$

$$40 = \frac{\text{Kız. Not Top.}}{x} \Rightarrow \text{Kız. Not Top.} = 40x$$

$$\text{Erkek Not Ort.} = \frac{\text{Erkek Not Top.}}{\text{Erkek öğr. sayısı}}$$

$$50 = \frac{\text{Erkek Not Top.}}{y} \Rightarrow \text{Erkek Not Top.} = 50y$$

$$\text{Sınıf Not Ort.} = \frac{\text{Erkek Not Top} + \text{Kız Not Top}}{\text{Tüm Öğr. Sayısı}}$$

$$47 \times \frac{50y + 40x}{x + y}$$

$$47x + 47y = 40x + 50y$$

$$47x - 40x = 50y - 47y$$

$$7x = 3y$$

7 ve 3 sadeleşemez olduklarından x=3 ve y=7 alınırsa en küçük değerler elde edilir.

O halde sınıfta en az : $x+y=3+7=10$ kişi vardır.

8 kişi 6 parça işi günde 4 saat çalışarak 12 günde bitirebilmektedir. Aynı nitelikte 18 parça işi 2 kişi günde 8 saat çalışarak kaç günde bitirir?

ÇÖZÜM:

$$\begin{array}{ccccccc} 8 \text{ kişi} & 6 \text{ parça iş} & \text{günde 4 saat} & 12 \text{ gün} \\ 2 \text{ kişi} & 18 \text{ parça iş} & \text{günde 8 saat} & x \text{ gün} \end{array}$$

yapılan iş belli olduğundan pratik yöntemimizi kullanabiliriz.

$$\frac{İş_1}{İş_2} = \frac{Diğerleri_1}{Diğerleri_2} \Rightarrow \frac{6}{18} = \frac{8 \cdot 4 \cdot 12}{2 \cdot 8 \cdot x}$$

gerekli sadeleştirmeler yapılsa

$$x = 72 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK(63)

a ve b gibi iki sayının aritmetik ortalaması 6, geometrik ortalaması 4 olduğuna göre $a^2+b^2=?$

ÇÖZÜM:

a ve b'nin aritmetik ortalaması :

$$\frac{a+b}{2} = 6 \rightarrow a+b = 12$$

a ve b'nin geometrik ortalaması :

$$\sqrt{a \cdot b} = 4 \rightarrow a \cdot b = 4^2 = 16$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{Çarpanlara Ayırma özdeşliklerinden} \\ a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab \end{array} \right)$$

$$a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$$

$$= 12^2 - 2 \cdot 16$$

$$= 144 - 32$$

$$= 112 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK(64)

Bir makinede arka arkaya birbirini çeviren x,y,z dişli çarkların diş sayıları toplamı 74 tür. x , 20 kez dönünceye kadar y, 25 kez, z 'de 30 kez dönmektedir. x çarkında kaç dişli vardır?

ÇÖZÜM:

Diş sayısı ile dönme sayısı ters orantılıdır. Diş sayısı ne kadar çoksa , çark o kadar büyüktür ve yavaş döner

O halde orantıyı kuralım

Diş sayıları:

$$x = \frac{k}{20} , \quad y = \frac{k}{25} , \quad z = \frac{k}{30}$$

Diş sayıları toplamı:

$$\frac{k}{20} + \frac{k}{25} + \frac{k}{30} = 74 \Rightarrow \frac{15k + 12k + 10k}{300} = 74$$

$$(15) (12) (10)$$

$$\Rightarrow \frac{37k}{300} = 74^2 \Rightarrow k = 600$$

şimdi x çarkındaki dişli sayısını bulalım

$$x = \frac{k}{20} = \frac{600}{20} = 30 \text{ diş vardır.}$$

ÖRNEK(65)

Matematik sınavlarından 2 ve 5 alan bir öğrenci üçüncü sınavdan kaç olmalı ki not ortalaması 4 olsun?

ÇÖZÜM:

Üçüncü sınavdan x almış olsun.

$$\text{Bu üç sınavın ortalaması : } \frac{2+5+x}{3} = 4$$

$$\frac{7+x}{3} \times 4 \Rightarrow x+7=12 \Rightarrow x=5$$

almalı ki ortalaması 4 düşsün.

ÖRNEK(66)

Tek tür mal üreten bir atölyede makinelerden biri a saatte b birim mal üretiyor.

Aynı süre içinde bu makinenin c katı mal üreten başka bir makine , b birim malı kaç saatte üretir?

(ÖSS 2003)

ÇÖZÜM:

Birinci makine a saatte b birim üretirken ikincisi a saatte b.c adet mal ürettiyormuş.

İkinci makine: $\begin{array}{cc} bc \text{ malı} & a \text{ saatte} \\ b \text{ malı} & x \text{ saatte} \end{array}$

Doğru Orantı

$$x \cdot bc = a \cdot b$$

$$x = \frac{a}{c} \text{ saatte üretir}$$

ÖRNEK(67)

Bir guruptaki kız sporcuların yaş ortalaması 15, erkek sporcuların yaş ortalaması 24 tür.

Kızların sayısı erkeklerin sayısının 2 katı olduğuna göre , bu gurubun yaş ortalaması kaçtır?

(ÖSS 2003)

ÇÖZÜM:

Kızlar : 2x kişi olsun

Erkekler : x kişi olur.

$$\text{Kız Yaş Ort.} = \frac{\text{Kız Yaş Top.}}{\text{Kız ögr. sayısı}}$$

$$15 = \frac{\text{Kız. Yaş Top.}}{2x} \Rightarrow \text{Kız. Yaş Top.} = 30x$$

$$\text{Erkek Yaş Ort.} = \frac{\text{Erkek Yaş Top.}}{\text{Erkek ögr. sayısı}}$$

$$24 = \frac{\text{Erkek Yaş Top.}}{x} \Rightarrow \text{Erkek Yaş Top.} = 24x$$

$$\text{Grup Yaş Ort.} = \frac{\text{Erkek Yaş Top} + \text{Kız Yaş Top}}{\text{Tüm Ögr. Sayısı}}$$

$$= \frac{24x + 30x}{x + 2x} = \frac{54x}{3x} = 18 \text{ yaş olur.}$$

ÖRNEK(68)

Bir sınıfta matematik sınavından aldığı puan 2,3 ve 4 olan öğrencilerden 8 kişilik bir gurup oluşturulmuştur. Gurupta bu üç puandan her birini alan en az bir öğrenci bulunmaktadır ve gurubun puan ortalaması $25/8$ dir.

Bu gurupta puanı 3 olan en çok kaç öğrenci bulunabilir?

(ÖSS 2003)

ÇÖZÜM:

Sınıfta : 2 alan x kişi → notları toplamı :2x

3 alan y kişi → notları toplamı :3y

4 alan z kişi → notları toplamı :4z

$$\text{Sınıfın Not Ort.} = \frac{\text{Tüm Notların Toplamı}}{\text{Öğrenci Sayısı}}$$

$$\frac{25}{8} = \frac{2x + 3y + 4z}{8}$$

$$2x + 3y + 4z = 25$$

3 alan en çok olaksa diğerlerini en az seçeriz .
yani x ve z küçük olacak

x=1 ve z=2 seçersek

$$2x + 3y + 4z = 25$$

$$2.1 + 3y + 4.2 = 25$$

$$3y + 10 = 25$$

$$3y = 15$$

$$y = 5 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK(69)

a tanesi b TL den satılan kalemlerden c tane satın alınarak d TL ödeniyor. Buna göre ,
aşağıdakilerden hangisi her zaman doğrudur?

A) $ab=cd$ B) $ac=bd$ C) $ad=bc$

D) $a^2b=cd^2$ E) $a^2d=bc^2$

(ÖSS 2002)

ÇÖZÜM:

a tanesi b lira ise bir tanesi $\frac{b}{a}$ liradır.

Bir tanesi $\frac{b}{a}$ lira ise c tanesi c. $\frac{b}{a}$ olur. Buda d liraya eşitmiş. O halde

$$\frac{c.b}{a} = d \rightarrow b.c = a.d \text{ olur.}$$

Doğru cevap C şıkkı olur.

ÖRNEK(70)

$a - \frac{1}{b} = 3$ **ve** $b - \frac{1}{a} = 12$ olduğuna göre

$$\frac{b-a}{b} = ?$$

(ÖSS-2000)

ÇÖZÜM:

$$a - \frac{1}{b} = 3 \rightarrow \frac{ab-1}{b} = 3 \rightarrow \underline{ab-1} = \underline{3b}$$

$$b - \frac{1}{a} = 12 \rightarrow \frac{ab-1}{a} = 12 \rightarrow \underline{ab-1} = \underline{12a}$$

$$3b=12a$$

$b=4a$ bu değeri soruda yerine yazalım,

$$\frac{b-a}{b} = \frac{4a-a}{4a} = \frac{3a}{4a} = \frac{3}{4}$$

elde edilir.

**KONUMUZ BİTTİ. ŞİMDİ TESTLERE
GEÇEBİLİRSİNİZ**

**DİLERSENİZ KONU ANLATIMINI BİR DE
YOUTUBE KANALIMIZDAN VİDEO OLARAK
DA İZLEYEBİLİRSİNİZ**

Youtube kanalımız: CEBİR HOCAM

**Başarılar diliyorum
İbrahim Halil BABAOĞLU
Matematik Öğretmeni**

