

## İŞLEM

x ve y ye bağlı bütün tanımlı fonksiyonlar bir işlem belirtir. İşlemi göstermek için +, -, \*, ... gibi işaretler kullanılır.

❖  $A = \{-1, 0, 1\}$ ,  $f: A \times A \rightarrow A$  fonksiyonu  $f(x, y) = x \cdot y$  olsun. Bu fonksiyon A kümesinde tanımlı bir işlemdir. İşlemi \* ile gösterelim

$$x * y = x \cdot y \text{ yazılır.}$$

## ÖRNEK(1)

R'de  $x * y = 3x + y - 5$  olmak üzere \* işlemi tanımlanıyor

- a)  $(2 * 1) = ?$
- b)  $(2 * 5) * 3 = ?$
- c)  $(3 * x) = 6$  ise  $x = ?$
- d)  $(2 * 3) * x = 8$  ise  $x = ?$

## ÇÖZÜM:

$$a) (2 * 1) = 3 \cdot 2 + 1 - 5 = 2$$

$$\begin{aligned} b) (2 * 5) * 3 &= (3 \cdot 2 + 5 - 5) * 3 \\ &= 6 * 3 \\ &= 3 \cdot 6 + 3 - 5 \\ &= 16 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c) (3 * x) &= 6 \rightarrow (3 \cdot 3 + x - 5) = 6 \\ x + 4 &= 6 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d) (2 * 3) * x &= 8 \rightarrow (3 \cdot 2 + 3 - 5) * x = 8 \\ 4 * x &= 8 \\ 3 \cdot 4 + x - 5 &= 8 \\ x + 7 &= 8 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

## ÖRNEK(2)

$$R'de \text{ tanımlı } x \Delta y = \begin{cases} x^y - 2, & x \leq y \text{ ise} \\ x \cdot y + 1, & x > y \text{ ise} \end{cases} \text{ işlemi}$$

veriliyor. buna göre  $(3 \Delta 2) \Delta (2 \Delta 3) = ?$

## ÇÖZÜM:

$$\begin{aligned} (3 \Delta 2) \Delta (2 \Delta 3) &= (3 \cdot 2 + 1) \Delta (2^3 - 2) \\ &= 7 \Delta 6 = 7 \cdot 6 + 1 = 43 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

## ÖRNEK(3)

$$x \Delta y = x^y - 2y^x + y \cdot x \text{ ise } 2 \Delta 3 = ?$$

## ÇÖZÜM:

$$\begin{aligned} 2 \Delta 3 &= 2^3 - 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 2 \\ &= 8 - 18 + 6 \\ &= -4 \end{aligned}$$

## BİR KÜMEDE TANIMLI İŞLEMİN

## ÖZELLİKLERİ:

A kümesinde tanımlı ' $\Delta$ ' ve ' $\circ$ ' işlemlerine göre  $\forall x, y \in A$  için;

- 1)  $x \circ y \in A$  ise ' $\circ$ ' işlemi A da kapalıdır.
- 2)  $x \circ y = y \circ x$  oluyorsa değişme öz. vardır.
- 3)  $x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z$  ise birleşme öz. vardır.
- 4)  $x \circ (y \Delta z) = (x \circ y) \Delta (x \circ z)$  oluyorsa ' $\circ$ ' işleminin ' $\Delta$ ' işlemi üzerine dağılma öz. vardır.
- 5)  $e \in A$  olmak üzere  $x \circ e = e \circ x = x$  oluyorsa e ye ' $\circ$ ' işleminin **etkisiz(birim) elemanı** denir.
- 6) A kümesinde tanımlı ' $\circ$ ' işleminin etkisiz elemanı e olsun.  
 $\forall x, x^{-1} \in A$  olmak üzere  $x \circ x^{-1} = x^{-1} \circ x = e$  oluyorsa  
 $x^{-1}$  'e x'in tersi denir.
- 7)  $\forall x \in A$  için  $x \circ y = y \circ x = y$  oluyorsa y'ye ' $\circ$ ' işleminin **yutan elemanı** denir. (tersi olmayan eleman yutan elemandır.)

**NOT 1 :** Bir işlemin birim elemanı varsa tek bir tanedir. İşlemin birim elemanı varsa tanım kümesinden rasgele bir eleman seçerek etkisiz eleman bulunabilir.

**ÖRNEK(4)**

$$2x \Delta 3y = 3x - 2y + 5 \text{ ise } 6 \Delta 12 = ?$$

**ÇÖZÜM:**

$$6 \Delta 12 = 3.3 - 2.4 + 5 = 9 - 8 + 5 = 6 \text{ olur.}$$

$$\begin{array}{cc} 2x & 3y \\ \downarrow & \downarrow \\ 3 & 4 \end{array}$$

**ÖRNEK(5)**

R'de tanımlı  $\Delta$  ve  $\Pi$  işlemleri için  
 $x \Pi y = 2(x \Delta y) + x$  ve  $x \Delta y = x + y + x.y$  ise  $2 \Pi 3 = ?$

**ÇÖZÜM:**

$$2 \Pi 3 = 2(2 \Delta 3) + 2 = 2.11 + 2 = 24 \text{ bulunur.}$$

$$\begin{array}{c} 2+3+2.3 \\ =11 \end{array}$$

**ÖRNEK(6)**

$x^2 * y^3 = x + 2y - x^y$  ise  $(9*8)$ 'in alabileceği değerler toplamı nedir?

**ÇÖZÜM:**

$$9 * 8 \Rightarrow 9 * 3 = -3 + 2.2 - (-3)^2 = -8$$

$$\begin{array}{cc} x^2 & y^3 \\ \square \square & \downarrow \\ -3 & 3 \end{array}$$

$$\Rightarrow 9 * 3 = 3 + 2.2 - (3)^2 = -2$$

değerler toplamı =  $(-8) + (-2) = -10$  eder.

**ÖRNEK(7)**

$$\frac{2}{a} \diamond \frac{6}{b} = 2a + ab - b^2 \text{ ise } 4 \diamond 3 = ?$$

**ÇÖZÜM:**

$$4 \diamond 3 = 2. \frac{1}{2} + \frac{1}{2}.2 - 2^2 = 1 + 1 - 4 = -2 \text{ bulunur.}$$

$$\begin{array}{cc} 2 & 6 \\ a & b \end{array}$$

$$\frac{2}{a} = 4 \Rightarrow a = \frac{1}{2} \text{ ve } \frac{6}{b} = 3 \Rightarrow b = 2$$

**ÖRNEK(8)**

R'de tanımlı  $x * y = \max(x.y, x^y)$  ise  $1 * (3 * 2) = ?$

**ÇÖZÜM:**

$$\begin{aligned} 1 * (3 * 2) &= 1 * [\max(3.2, 3^2)] \\ &= 1 * [\max(6, 9)] \quad (\text{büyük değer } 9) \\ &= 1 * 9 \\ &= \max(1.9, 1^9) \\ &= \max(9, 1) \\ &= 9 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

**ÖRNEK(9)**

$(a,b) o (c,d) = (a.d - bc, a.c + b.d)$  olmak üzere;

a)  $(2,1) o (3,2) = ?$

b)  $(1,2) o (x,4) = (y,11)$  ise  $x+y = ?$

**ÇÖZÜM:**

$$(a,b) o (c,d) = (a.d - bc, a.c + b.d)$$

$$\begin{aligned} \text{a) } (2,1) o (3,2) &= (2.2 - 1.3, 2.3 + 1.2) \\ &= (1, 8) \text{ olur.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } (1,2) o (x,4) &= (y,11) \\ (1.4 - 2.x, 1.x + 2.4) &= (y,11) \\ (4 - 2x, x+8) &= (y,11) \end{aligned}$$

ikililerin eşitliğinden faydalanacak olursak

$$\begin{aligned} 4 - 2x &= y \quad \text{ve} \quad x + 8 = 11 \\ 4 - 2.3 &= y \quad \leftarrow x = 3 \\ y &= -2 \end{aligned}$$

sonuç :  $x+y = 3 - 2 = 1$  olur.

## ÖRNEK(10)

$$2^{a\Delta b} = \frac{4}{16^{b-a}} \text{ ise } 3\Delta 2 = ?$$

ÇÖZÜM:

$$2^{a\Delta b} = \frac{4}{16^{b-a}} \rightarrow 2^{3\Delta 2} = \frac{4}{16^{2-3}} = \frac{4}{16^{-1}} = 4 \cdot 16$$

$$2^{3\Delta 2} = 64 = 2^6$$

$$3\Delta 2 = 6 \text{ bulunur.}$$

## ÖRNEK(11)

R'de tanımlı  $x\Delta y = x+y-2xy$  kuralı ile verilen işlemin birim elemanı nedir?

ÇÖZÜM:

## 1.yol

Birim eleman için  $x\Delta e = x$  kuralında e'yi bulmak gerekir.

$$x\Delta e = x$$

$$x+e-2xe = x$$

$$e(1-2x) = 0 \rightarrow e = 0 \text{ bulunur.}$$

## 2.yol

işlemin tanımlı olduğu kümeden (yutan eleman hariç) bir eleman seçilir

$$x = 1 \text{ olsun}$$

$$x\Delta e = x \text{ kuralında}$$

$$1\Delta e = 1 \text{ uygulanır.}$$

$$1\Delta e = 1$$

$$1+e-2 \cdot 1 \cdot e = 1$$

$$-e = 0$$

$$e = 0 \text{ bulunur.}$$

## ÖRNEK(12)

R'de tanımlı  $x*y = 2x+2y+xy+2$  ise \* işleminin birim elemanı nedir?

ÇÖZÜM:

## 1.yol

Aynı şekilde  $x*e = x$  kuralını uygularsak

$$x*y = 2x+2y+xy+2$$

$$x*e = x$$

$$2x+2e+xe+2 = x$$

$$2e+xe = -2-x$$

$$e(2+x) = -(2+x)$$

$$e = -1 \text{ bulunur.}$$

## 2.yol

bu sefer de  $x = 0$  seçelim

$$x*e = x$$

$$2 \cdot 0 + 2e + 0 \cdot e + 2 = 0$$

$$e = -1 \text{ bulunur.}$$

## ÖRNEK(13)

R'de tanımlı  $x\Delta y = -2x-2y+xy+a$  işleminin birim elemanı 3 ise  $a = ?$

ÇÖZÜM:

$x\Delta e = e$  kuralından hareketle

$$x\Delta e = e$$

$$-2x-2e+xe+a = e$$

$$2e - xe = a - 3x$$

$$e(2-x) = a - 3x$$

$$e = \frac{a-3x}{2-x}$$

$$e = 3 \text{ olduğundan}$$

$$\frac{a-3x}{2-x} = 3 \Rightarrow a-3x = 6-3x \Rightarrow a = 6 \text{ bulunur}$$

## ÖRNEK(14)

R'de tanımlı  $x\Delta y = xy + x + y$  işleminde yutan eleman nedir?

## ÇÖZÜM:

Yutan eleman kuralı  $x\Delta m = m$  iken m, yutan eleman idi

Bu kuralı uygularsak;

$$x\Delta y = xy + x + y \rightarrow x\Delta m = xm + x + m = m$$

$$xm = -x$$

$$m = -1 \text{ bulunur.}$$

(yutan elemana aynı zamanda tersi olmayan eleman da denir)

## ÖRNEK(15)

R'de tanımlı  $x*y = x.y + 3x + 3y + 6$  ise \* işlemine göre hangi elemanın tersi yoktur?

## ÇÖZÜM:

Yutan elemanı soruyor.

Kuralımız ;  $x\Delta m = m$

$$x*y = x.y + 3x + 3y + 6 \rightarrow x*m = x.m + 3x + 3m + 6 = m$$

$$x.m + 2m = -6 - 3x$$

$$m(x+2) = -3(2+x)$$

$$m = \frac{-3(x+2)}{x+2}$$

$$m = -3 \text{ bulunur.}$$

## ÖRNEK(16)

R'de tanımlı  $x\Delta y = -\frac{x+y+x.y+5}{4}$  işleminde

2'nin tersi nedir?

## ÇÖZÜM:

Ters elemanın kuralı  $x\Delta x^{-1} = e$  idi

2'nin tersi  $2^{-1}$  olsun

$2\Delta 2^{-1} = e$  olduğundan önce e bulunmalı

işlem R de tanımlı olduğundan  $x = 1$  alıp e yi bulalım

$$1\Delta e = 1 \rightarrow -\frac{1+e+1.e+5}{4} = 1$$

$$-(2e+6) = 4$$

$$-2e - 6 = 4$$

$$2e = -10$$

$$e = -5 \text{ dir.}$$

şimdi  $2\Delta 2^{-1} = -5$  işlemini uygulayalım

$$-\frac{2+2^{-1}+2.2^{-1}+5}{4} = -5$$

$$3.2^{-1} + 7 = 20$$

$$3.2^{-1} = 13$$

$$2^{-1} = \frac{13}{3} \text{ olur.}$$

## ÖRNEK(17)

R'de tanımlı  $x\Delta y = 3x + 3y - x.y + a$  işleminin birim elemanı varsa  $a = ?$

## ÇÖZÜM:

Kuralımız belli

$$x\Delta e = x$$

$$3x + 3e - x.e + a = x$$

$$xe - 3e = 2x + a$$

$$e(x - 3) = 2x + a$$

$$e = \frac{2x + a}{x - 3}$$

işlemin birim elemanı olduğundan pay , paydaya tam bölünmeli

$x - 3 = 0 \rightarrow x = 3$  değerini pay'da yerine yazalım

$2x + a = 2.3 + a = 0$  olmalı (polinomlardan bu

$a + 6 = 0$  işlemini hatırlayın)

$a = -6$  bulunur.

## ÖRNEK(18)

R'de tanımlı  $x\Delta y = x + y + x \cdot y$  işleminde  
 $(2\Delta 3^{-1})\Delta 2^{-1} = ?$

**ÇÖZÜM:**

Öncelikle birim eleman bulunmalı

İşlem R'de tanımlı olduğundan  $x=1$  alarak  
 $1\Delta e = 1$  işlemini uygulayalım

$$1\Delta e = 1 + e + 1 \cdot e = 1$$

$$2e = 0 \rightarrow e = 0 \text{ dır.}$$

$x\Delta y = x + y + x \cdot y$  işlemi değişme özelliğine sahip  
 olduğundan (x ile y nin yeri değiştiğinde işlem  
 değişmiyorsa değişme öz. Vardır)

$$(2\Delta 3^{-1})\Delta 2^{-1} = \underbrace{(2\Delta 2^{-1})}_{e=\text{etkisiz eleman}} \Delta 3^{-1} = e\Delta 3^{-1} = 3^{-1}$$

demek ki bize sadece  $3^{-1}$  lazım

$$3\Delta 3^{-1} = e \Rightarrow 3 + 3^{-1} + 3 \cdot 3^{-1} = 0$$

$$\Rightarrow 4 \cdot 3^{-1} = -3$$

$$\Rightarrow 3^{-1} = -\frac{3}{4} \text{ bulunur.}$$

**ÖRNEK(19)**

R'de tanımlı  $x\Delta y = 2x + 2y - x \cdot y - 2$  işleminde tersi  
 kendine eşit olan sayıların çarpımı kaçtır?

**ÇÖZÜM:**

Yani  $x = x^{-1}$  olan x'leri arayacağız.

$x\Delta x^{-1} = e$  olduğundan önce e bulunur.

R'den  $x=1$  seçelim

$$x\Delta e = x \rightarrow 1\Delta e = 2 \cdot 1 + 2e - 1 \cdot e - 2 = 1 \text{ ise } e=1$$

$$x\Delta x^{-1} = 1 \text{ olacak } x\Delta x = 1 \quad 2x + 2x - x^2 - 2 = 1$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0 \quad x_1 \cdot x_2 = 3 \text{ bulunur.}$$

**ÖRNEK(20)**

R'de tanımlı  $x\Delta y = x + y + x \cdot y - (y\Delta x)$  işlemi  
 değişme özelliği olan bir işlem ise  $2\Delta 3 = ?$

**ÇÖZÜM:**

Değişme özelliği varsa  $x\Delta y = y\Delta x$  olmalıdır

$$x\Delta y = x + y + x \cdot y - \underbrace{(y\Delta x)}_{x\Delta y}$$

$$2(x\Delta y) = x + y + x \cdot y$$

$$x\Delta y = \frac{x + y + x \cdot y}{2}$$

$$2\Delta 3 = \frac{2 + 3 + 2 \cdot 3}{2} = \frac{11}{2} \text{ olur.}$$

**ÖRNEK(21)**

$x\Delta y = 3x + y + 2(y\Delta x)$  ise  $2\Delta 3 = ?$

**ÇÖZÜM:**

Burada değişme özeliği olmadığından önce  $x=2$  ,  
 $y=3$  sonra da  $x=3$  ,  $y=2$  yazar alt alta işlem yaparız

$$x\Delta y = 3x + y + 2(y\Delta x)$$

$$x=2, y=3 \rightarrow \begin{aligned} 2\Delta 3 &= 3 \cdot 2 + 3 + 2(3\Delta 2) \\ 2\Delta 3 - 2(3\Delta 2) &= 9 \quad \dots\dots(1) \end{aligned}$$

$$x=3, y=2 \rightarrow \begin{aligned} 3\Delta 2 &= 3 \cdot 3 + 2 + 2(2\Delta 3) \\ 3\Delta 2 - 2(2\Delta 3) &= 9 \quad \dots\dots(2) \end{aligned}$$

(1) ve (2) denklemlerini ortak çözerek  $(3\Delta 2)$ 'yi yok  
 edip  $(2\Delta 3)$ 'ü bulalım

$$\begin{aligned} 2\Delta 3 - 2(3\Delta 2) &= 9 \\ \underline{2/ \quad 3\Delta 2 - 2(2\Delta 3) = 9} & \\ 2\Delta 3 - 2(3\Delta 2) &= 9 \\ + \quad 2(3\Delta 2) - 4(2\Delta 3) &= 18 \\ \hline -3(2\Delta 3) &= 27 \\ 2\Delta 3 &= -3 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

## TABLODA İŞLEMLER

Tablo işlemlerinde etkisiz birim eleman; asıl satır ve asıl sütunun tabloda kesiştiği yerdedir.

$A=\{1,2,3,4\}$  kümesinde tanımlı  $*$  işlemi için

Asıl satır  $\rightarrow$

*	1	2	3	4
1	4	1	2	3
2	1	2	3	4
3	2	3	4	1
4	3	4	1	2

Asıl sütun

Yukarıdaki işlemin birim elemanı  $e=2$  dir.

$$1*2 = 1, 2*2 = 2, 3*2 = 3, 4*2 = 4$$

Tablo işlemlerinde herhangi bir işlemin sonucu ilk değeri asıl sütundan, ikinci değeri asıl satırdan alınarak kesiştirildiğinde ulaşılan değerdir.

*	1	2	3	4
1	4	1	2	3
2	1	2	3	4
3	2	3	4	1
4	3	4	1	2

$$2*3=3$$

Ters eleman için ; tersi alınacak eleman asıl sütundan bulunup elemanın bulunduğu satırda birim eleman aranır. Birim elemandan yukarı çıkıldığında ulaşılan son eleman istenen ters elemandır.

*	1	2	3	4
1	4	1	2	3
2	1	2	3	4
3	2	3	4	1
4	3	4	1	2

$$3^{-1} = 1 \text{ dir.}$$

Tablolu işlemlerin değişme özelliğinin varlığını araştırmak için esas köşegen çizilir ve tablo bu köşegenden katlanır. Eğer aynı elemanlar çakışıyorsa değişme özelliği vardır denir.

*	1	2	3	4
1	4	1	2	3
2	1	2	3	4
3	2	3	4	1
4	3	4	1	2

esas köşegen

Yutan eleman için, bir işlemde tüm satır ve tüm sütun aynı elemandan oluşuyorsa o eleman yutan elemandır.

*	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	2	3	4
3	3	3	3	4
4	4	4	4	4

Yukarıdaki işlemin yutan elemanı  $m = 4$  tür.

$$1*4 = 4, 2*4 = 4, 3*4 = 4, 4*4 = 4$$

## ÖRNEK(22)

$A=\{a,b,c,d\}$  kümesinde tanımlı ' $\Delta$ ' işlemi,

$\Delta$	a	b	c	d
a	b	c	d	a
b	c	d	a	b
c	d	a	b	c
d	a	b	c	d

şeklinde veriliyor.

- $\Delta$  işleminin etkisiz elemanı nedir?
- $(a\Delta b) \Delta c = ?$
- $(a^{-1} \Delta b) \Delta c^{-1} = ?$
- $(a\Delta x) = b^{-1}$  ise  $x = ?$
- $(a\Delta x)^{-1} = c$  ise  $x = ?$
- Tersi kendine eşit olan elemanların kümesi nedir?

## ÇÖZÜM:

$\Delta$	a	b	c	d
a	b	c	d	a
b	c	d	a	b
c	d	a	b	c
d	a	b	c	d

$\Delta$  işleminin değişme özelliğinin olduğuna dikkat edelim

- etkisiz eleman  $e = d$  dir.
- $(a\Delta b) \Delta c = c\Delta c = b$   
c
- $a^{-1} = c$  ve  $c^{-1} = a$  olduğundan  
 $(a^{-1} \Delta b) \Delta c^{-1} = (c\Delta b) \Delta a$   
 $= a\Delta a$   
 $= b$  bulunur.
- $(a\Delta x) = b^{-1}$  işleminin her iki tarafına soldan  $a^{-1}$  elemanı işlersek

$$\begin{array}{l|l} a^{-1} \Delta (a\Delta x) = a^{-1} \Delta b^{-1} & a^{-1} = c \\ \underbrace{(a^{-1} \Delta a)}_d \Delta x = \underbrace{a^{-1} \Delta b^{-1}}_{c\Delta b} & b^{-1} = b \end{array}$$

$$\frac{d\Delta x}{x} = a$$

$$x = a \text{ bulunur.}$$

- e)  $(a\Delta x)^{-1} = c$  işleminde her iki tarafın tersi alınır.

$$\underbrace{\left((a\Delta x)^{-1}\right)^{-1}}_{a\Delta x} = c^{-1}_a$$

$a\Delta x = a$  oluyorsa  $x$  etkisiz eleman demektir. O halde  $x = d$  dir.

- f)  $a^{-1} = c$  ,  $b^{-1} = b$  ,  $c^{-1} = a$  ve  $d^{-1} = d$

o halde tersi kendisine eşit olan elemanlar  $b$  ve  $d$  dir.  $\{b,d\}$

## ÖRNEK(23)

$A=\{1,2,3,4,5\}$  kümesinde tanımlı ' $*$ ' işlemi,

*	1	2	3	4	5
1	4	5	1	2	3
2	5	1	2	3	4
3	1	2	3	4	5
4	2	3	4	5	1
5	3	4	5	1	2

ve  $xoy = x*4*y$  şeklinde tanımlı ikinci bir ' $o$ ' işlemi veriliyor. ' $o$ ' işleminin etkisiz elemanı nedir?

## ÇÖZÜM:

' $o$ ' işleminin etkisiz elemanı  $e$  olsun  
 $xoe = x$  kuralı uygulanırsa ( $y$  yerine  $e$  yazalım)

$$xoy = x*4*y \rightarrow xoe = x*(4*e) = x$$

işlemin sonucu  $x$  olduğuna göre  $(4*e)$  etkisiz eleman olmalı

\* işleminin etkisiz elemanı 3 olduğundan  
 $4*e = 3$  ise  
 $e = 2$  dir.

## ÖRNEK(24)

$A=\{1,2,3,4,5\}$  kümesinde tanımlı ' $\Delta$ ' işlemi aşağıdaki gibi veriliyor

$\Delta$	1	2	3	4	5
1	4	5	1	2	3
2	5	1	2	3	4
3	1	2	3	4	5
4	2	3	4	5	1
5	3	4	5	1	2

$x^{-1}$ ,  $x$ 'in tersi ve  $x^2 = x \Delta x$  ise

a)  $(2^{-1} \Delta 2^2) \Delta (3^4 \Delta 5) = ?$

b)  $(2 \Delta a)^{-1} = 5$  ise  $a = ?$

## ÇÖZÜM:

İşlemin etkisiz elemanı : 3 tür.

a)  $2^{-1} = 4$  ,  $2^2 = 2 \Delta 2 = 1$

$$3^4 = 3 \underset{3}{\Delta} 3 \underset{3}{\Delta} 3 \underset{3}{\Delta} 3 = 3 \Delta 3 = 3$$

$$(2^{-1} \Delta 2^2) \Delta (3^4 \Delta 5) = (4 \Delta 1) \Delta (3 \Delta 5) \\ = 2 \Delta 5 = 4 \text{ bulunur.}$$

b)  $(2 \Delta a)^{-1} = 5$  işleminin her iki tarafının tersi alınır.

$$\left( (2 \Delta a)^{-1} \right)^{-1} = 5^{-1} \\ 2 \Delta a = 1$$

2, hangi sayıyla işleme girerse 1 bulunur diyerek tablodan  $2 \Delta 2 = 1$  işlemi takip edilerek  $a=2$  bulunur.

## ÖRNEK(25)

$A=\{1,2,3,4,5\}$  kümesinde tanımlı ' $*$ ' işlemi tabloda verilmiştir.

*	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5
2	2	2	3	4	5
3	3	3	3	4	5
4	4	4	4	4	5
5	5	5	5	5	5

'\*' işleminin birim ve yutan elemanlarını bulun?

## ÇÖZÜM:

*	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5
2	2	2	3	4	5
3	3	3	3	4	5
4	4	4	4	4	5
5	5	5	5	5	5

1,2,3,4,5 elemanlarının tablo içinde satır ve sütun olarak kesiştiği yer 1 olduğundan etkisiz eleman 1 dir.

*	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5
2	2	2	3	4	5
3	3	3	3	4	5
4	4	4	4	4	5
5	5	5	5	5	5

komple bir satır ve komple bir sütun 5 olduğundan yutan eleman da 5 tir.



## ÖRNEK(26)

Dik koordinat düzleminin noktaları üzerinde bir 'Δ' işlemi

$$(a,b) \Delta (c,d) = (a.c+b.d, a.d-b.c)$$

şeklinde tanımlanıyor.

Buna göre  $(x,y) \Delta (1,-1) = (3,5)$  eşitliğini sağlayan  $(x,y)$  ikilisi aşağıdakilerden hangisidir?

- A)  $(-3,5)$       B)  $(3,5)$       C)  $(1,-4)$   
D)  $(-1,-4)$       E)  $(-1,0)$

(ÖSS 2003)

## ÇÖZÜM:

$a \rightarrow x$  ,  $b \rightarrow y$  ,  $c \rightarrow 1$  ,  $d \rightarrow -1$   
eşlemesi yapılırsa

$$(a,b) \Delta (c,d) = (a.c + b.d , a.d - b.c)$$

$$(x,y) \Delta (1,-1) = (x.1 + y.(-1) , x.(-1) - y.1)$$

$$(3,5) = (x - y , -x - y)$$

$$\begin{array}{r} x - y = 3 \\ -x - y = 5 \\ \hline -2y = 8 \rightarrow y = -4 \text{ ve} \end{array}$$

$$x - y = 3 \rightarrow x - (-4) = 3$$

$$x = -1 \text{ bulunur.}$$

o halde doğru cevap  $(-1, -4)$  yani D şıkkıdır.

## ÖRNEK(27)

Z tamsayılar kümesi üzerinde \* işlemi,

$$a * b = a + b + 3$$

biçiminde tanımlanmıştır.

Bu işleme göre, 2 nin tersi kaçtır?

(ÖSS 2002)

## ÇÖZÜM:

Önce birim eleman bulunmalı  
(e:birim eleman)

$$\begin{aligned} a * e &= a \\ a + e + 3 &= a \\ e &= -3 \text{ olur.} \end{aligned}$$

2'nin tersi  $2^{-1}$  ise ;

$$2 * 2^{-1} = e = -3 \text{ olmalı}$$

$$2 + 2^{-1} + 3 = -3$$

$$2^{-1} = -8 \text{ bulunur.}$$

## ÖRNEK(28)

Pozitif tamsayılar kümesinde \* ve Δ işlemleri ;

$$x * y = x^y$$

$$x \Delta y = x + y \text{ şeklinde tanımlanıyor.}$$

$$a * (a \Delta 1) = 81 \text{ ise } a = ?$$

(ÖSS-2001)

## ÇÖZÜM:

Önce  $a \Delta 1$  işlemini bulalım

$$a \Delta 1 = a + 1 \text{ yerine yazalım}$$

$$a * (a \Delta 1) = 81 \rightarrow a * (a + 1) = 81$$

şimdi \* işlem, n, uygulayalım

$$a * (a + 1) = 81$$

$$a^{a+1} = 81$$

$$a=3 \text{ olursa } 3^{3+1} = 3^4 = 81 \text{ olduğundan } a = 3 \text{ tür.}$$

## ÖRNEK(29)

$R$ 'de tanımlı  $*$  işlemi

$$a * b = \begin{cases} a + b ; a > b \text{ ise} \\ a - b ; a \leq b \text{ ise} \end{cases} \text{ şeklinde}$$

tanımlanıyor. Buna göre ;  $(1*1)*(2*1)=?$   
(ÖSS-2000)

## ÇÖZÜM:

$$1*1 \rightarrow 1 \leq 1 \text{ olduğundan } 1*1 = 1-1 = 0 \text{ dır}$$

$$2*1 \rightarrow 2 > 1 \text{ olduğundan } 2*1 = 2+1 = 3 \text{ tür.}$$

$$(1*1)*(2*1) = 0 * 3 \rightarrow 0 \leq 3 \text{ olduğundan} \\ 0 * 3 = 0 - 3 = -3 \text{ olur.}$$

## ÖRNEK(30)

$R$ 'de her  $a, b$  için

$a \Delta b = a + b - 2ab$  işlemi tanımlanmıştır. Buna göre  
5'in  $\Delta$  işlemine göre tersi kaçtır?

(ÖSS-97)

## ÇÖZÜM:

Önce birim eleman bulunur.

(birim eleman  $e$  olsun)

$$a \Delta e = a \text{ kuralı uygulanırsa}$$

$$a \Delta e = a + e - 2ae = a$$

$$e(1-2a) = 0$$

$$e = \frac{0}{1-2a} = 0 \text{ bulunur.}$$

5'in tersi  $5^{-1}$  olsun

$$5 \Delta 5^{-1} = e = 0$$

$$5 + 5^{-1} - 2 \cdot 5 \cdot 5^{-1} = 0$$

$$5^{-1} - 10 \cdot 5^{-1} = -5$$

$$-9 \cdot 5^{-1} = -5$$

$$5^{-1} = \frac{-5}{-9} = \frac{5}{9} \text{ olur.}$$

**KONUMUZ BİTTİ. ŞİMDİ TESTLERE  
GEÇEBİLİRSİNİZ**

**DİLERSENİZ KONU ANLATIMINI BİR DE  
YOUTUBE KANALIMIZDAN VIDEO OLARAK  
DA İZLEYEBİLİRSİNİZ**

Youtube kanalımız: **CEBİR HOCAM**

Başarılar diliyorum  
İbrahim Halil BABAOĞLU  
Matematik Öğretmeni