BAĞINTI

SIRALI İKİLİ

(a,b) şeklindeki ifadeye bir sıralı ikili yada kısaca ikili denir. (a,b) sıralı ikilisinde a'ya birinci bileşen, b'ye ikinci bileşen denir. bir sıralı ikilide bileşenlerin sırası önemlidir.$(a,b)\neq(b,a)$

(a,b,c)'ye de sıralı üçlü denir.

İKİLİLERİN EŞİTLİĞİ

$(a,b)=(x,y) \Rightarrow a=x$ ve $b=y$ olmalı

ÖRNEK(1)

$(2m+n,11)=(10,m+2n) \Rightarrow m+n=?$

ÇÖZÜM:

$$\begin{array}{r} 2m+n = 10 \\ +\quad m+2n = 11 \\ \hline 3(m+n) = 21 \end{array} \rightarrow m+n = 7 \text{ olur.}$$

ÖRNEK(2)

$\left(\frac{1}{a},\frac{3}{b},\frac{5}{c}\right)=(a,b,c) \Rightarrow a.b.c=?$

ÇÖZÜM:

$\frac{1}{a}=a \quad , \quad \frac{3}{b}=b \quad , \quad \frac{5}{c}=c$

$a^2=1 \quad , \quad b^2=3 \quad , \quad c^2=5$

$\sqrt{a^2.b^2.c^2}=\sqrt{1.3.5} \quad \Rightarrow \quad a.b.c=\sqrt{15}$

MATEMATİĞİM

KARTEZYEN ÇARPIM:

$A\neq\phi\neq B$ olmak üzere birinci bileşeni A'dan, ikincisi B'den alınarak elde edilen tüm sıralı ikililere AxB denir.

Uyarı: $AxB\neq BxA$ dır.

❖ A={1,2} , B={a,b,c} ise;
AxB={(1,a),(1,b),(1,c),(2,a),(2,b),(2,c)}
BxA={(a,1),(a,2),(b,1),(b,2),(c,1),(c,2)}

ÖZELLİKLER:

1) $AxB \neq BxA$

2) Ax(BxC) = (AxB)xC

3) $Ax(B\cap C) = (AxB)\cap(AxC)$
$Ax(B\cup C) = (AxB)\cup(AxC)$
$Ax(B \setminus C) = (AxB) \setminus (AxC)$

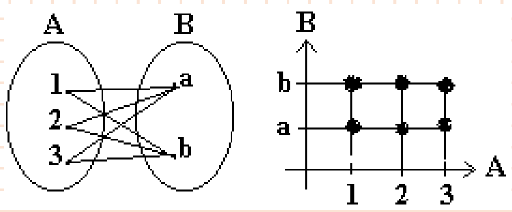
4) s(AxB) = s(BxA) = s(A).s(B)

5) $AxA = A^2$, $AxAxA = A^3$

KARTEZYEN ÇARPIMIN GRAFİĞİ

ÖRNEK(3)

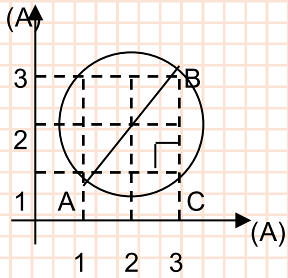
A={1,2,3} , B={a,b} olsun
AxB = {(1,a),(1,b),(2,a),(2,b),(3,a),(3,b)}
AxB'nin grafiği aşağıdaki gibidir.



ÖRNEK(4)

A={1,2,3} kümesi verilsin AxA 'nın tüm noktalarını dışarıda bırakmayan en küçük çemberin yarıçapı kaçtır?

ÇÖZÜM:



oluşan ABC üçgeninin hipotenüsü çemberin çapıdır. Bunu bulup yarısını alarak yarıçapı bulabiliriz.

$$|AB|^2 = |AC|^2 + |BC|^2$$

$$|AB|^2 = 2^2 + 2^2$$

$$|AB|^2 = 4 + 4$$

$$\sqrt{|AB|^2} = \sqrt{8}$$

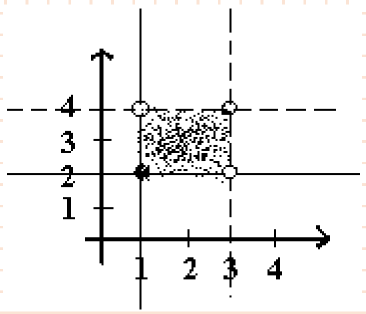
$$|AB| = 2\sqrt{2}$$

çap $2\sqrt{2}$ ise yarıçap $\sqrt{2}$ olur.

ÖRNEK(5)

A={x | 1≤x<3 ve x∈R} ve B={x | 2≤x<4 ve x∈R} olsun. AxB'nin grafiğini çiziniz.

ÇÖZÜM:



BAĞINTI:

A≠ϕ≠B olmak üzere AxB 'nin her bir alt kümesine A'dan B'ye bir bağıntı denir.

❖ A={1,2} , B={a,b} olsun

$$\beta_1 = \{(1,a),(2,b),(2,a)\} \Rightarrow \beta_1 \subset AxB$$

$$\beta_2 = \{(a,1),(a,2),(b,1)\} \Rightarrow \beta_2 \subset BxA$$

$$\beta_3 = \{(a,a),(b,b)\} \Rightarrow \beta_3 \subset BxB$$

$$\beta_4 = \{(1,1),(1,2),(2,2)\} \Rightarrow \beta_4 \subset AxA$$

NOT 1:

i) s(A)=a ve s(B)=b olsun A'dan B'ye tanımlı bağıntı sayısı $2^{a.b}$ dir.

ii) s(AxB)=n ve (n≥r) olmak üzere A'dan B'ye yazılabilecek r elemanlı bağıntı sayısı : C(n,r)

TERS BAĞINTI:

Bir bağıntıya ait ikililerin bileşenlerinin yerleri değiştirilerek ters bağıntı elde edilir.

$\beta = \{(a,1),(a,2),(b,1)\}$ ise

$\beta^{-1} = \{(1,a),(2,a),(1,b)\}$ dir.

BAĞINTININ GRAFİĞİ:

Bağıntının grafiği Kartezyen çarpımın grafiği gibi çizilir.

ÖRNEK(6)

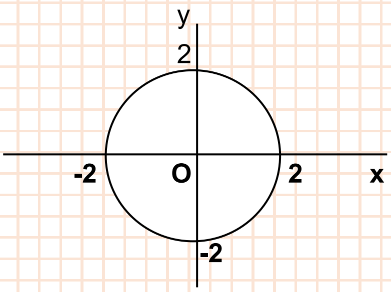
R'de tanımlı $\beta=\{(x,y) \mid x^2+y^2=4\}$ bağıntısının grafiğini çiziniz.

ÇÖZÜM:

Bu bağıntının grafiği , merkezi orjinde ve yarıçapı 2 birim olan çemberdir.

Çember analitiği konusundan merkezcil bir çemberin denkleminin $x^2+y^2=r^2$ olduğunu hatırlayın

$r^2 = 4 \rightarrow r = 2$ olacağından;



BAĞINTININ ÖZELLİKLERİ:

1) YANSIMA ÖZELLİĞİ:

$\forall x \in A$ için $(x,x) \in \beta$ ise β , A da yansıyandır.

NOT 2 :

i) Bir β bağıntısının elemanlarının içinde (x,x) den başka elemanlar varsa bu , bağıntının yansıma özelliğini bozmaz

ii) Ortak özellik yöntemiyle verilen bir bağıntının yansıyan olması için y yerine x yazıldığında ifade doğru olmalıdır.

ÖRNEK(7)

A={a,b,c} kümesi için AxA'da tanımlı aşağıdaki bağıntılardan kaç tanesi yansıyandır.

β_1 :{(a,a),(b,b),(a,b),(c,a)}

β_2 :{(a,b),(b,a),(a,c),(c,c)}

β_3 :{(a,a),(b,b),(c,c),(a,b)}

β_4 :{(a,a),(b,b),(b,c),(c,c)}

ÇÖZÜM:

Bağıntının yansıyan olması için ;

$\forall x \in A$ için $(x,x) \in \beta$ şartının sağlanması lazım yani , (a,a),(b,b),(c,c) elemanlarının bağıntıda olması lazım.

Bu elemanlar β_3 ve β_4 bağıntılarında var. O halde 2 bağıntı yansıyandır denir..

ÖRNEK(8)

A={1,2,3,4,5} kümesinde AxA'da tanımlı aşağıdaki bağıntılardan hangisi yansıyandır?

A) $\beta=\{(x,y) \mid x-2y = 2$ ve $x,y \in A\}$
B) $\beta=\{(x,y) \mid x+y/2 = 3$ ve $x,y \in A\}$
C) $\beta=\{(x,y) \mid x-y<0$ ve $x,y \in A\}$
D) $\beta=\{(x,y) \mid x-y=0$ ve $x,y \in A\}$
E) $\beta=\{(x,y) \mid x+y = 2$ ve $x,y \in A\}$

ÇÖZÜM:

D şıkkını incelediğimizde ;

x=1 ve y=1 için $x-y=0 \rightarrow 1-1=0 \rightarrow (1,1)$
x=2 ve y=2 için $x-y=0 \rightarrow 2-2=0 \rightarrow (2,2)$
x=3 ve y=3 için $x-y=0 \rightarrow 3-3=0 \rightarrow (3,3)$
x=4 ve y=4 için $x-y=0 \rightarrow 4-4=0 \rightarrow (4,4)$
x=5 ve y=5 için $x-y=0 \rightarrow 5-5=0 \rightarrow (5,5)$

bağıntının elde edilen elemanlarının;

$\forall x \in A$ için $(x,x) \in \beta$ şartını sağladığı görülür. O halde cevap D şıkkıdır.

2) SİMETRİ ÖZELLİĞİ:

β ,A da tanımlı bir bağıntı olsun.

$\forall (x,y) \in \beta$ için $(y,x) \in \beta$ ise β simetriktir.

NOT 3 :
Ortak özellik yöntemiyle verilen bir bağıntının simetrik olması için x ve y nin yerleri değiştirildiğinde ifadenin doğru olması gerekir.

ÖRNEK(9)

A={x,y,z,t} kümesi için AxA'da tanımlı aşağıdaki bağıntılardan kaç tanesi simetriktir.?

β_1 :{(x,x)(y,y)(x,y),(y,z)(y,x)}

β_2 :{(y,y),(x,z),(z,y),(z,x),(y,z)}

β_3 :{(x,x),(y,y),(z,z),(t,t)}

β_4 :{(x,y),(t,y),(y,t),(y,x)}

ÇÖZÜM:

$\forall (x,y) \in \beta$ için $(y,x) \in \beta$ şartını bağıntılar için kontrol ettiğimizde β_1 bağıntısı hariç diğer bağıntıların simetrik olduğu görülür

β_1 bağıntısı ; $(y,z) \in \beta_1$ iken $(z,y) \notin \beta_1$ olduğu için simetrik değildir.

O halde 3 bağıntı simetriktir.

3) TERS SİMETRİ ÖZELLİĞİ:

β ,A da tanımlı bir bağıntı olsun. $x \neq y$ olmak kaydıyla $\forall (x,y) \in \beta$ için $(y,x) \notin \beta$ ise β ters simetriktir.

NOT 4 :
Bir bağıntıda (x,x) ikililerinin olması ters simetri özelliğini bozmaz
.

UYARI:
Bir bağıntının simetrik olmaması onun ters simetrik olduğunu göstermez. Bir bağıntı hem simetrik hem de ters simetrik özelliklerinden ikisinide taşımayabilir. Yansıma elemanlarından başka elemanı olmayan bağıntı, hem simetrik hem de ters simetriktir.

ÖRNEK(10)

A={1,2,3,4} kümesi için AxA'da tanımlı aşağıdaki bağıntılardan kaç tanesi ters simetriktir.?

β_1 :{(1,1),(1,2),(2,3),(3,4)}

β_2 :{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)}

β_3 :{(1,3),(2,4),(3,4),(4,3)}

β_4 :{(2,2),(2,3),(4,3),(4,1)}

ÇÖZÜM:
$x \neq y$ olmak kaydıyla $\forall (x,y) \in \beta$ için $(y,x) \notin \beta$ şartını sağlayan bağıntılar ; $\beta_1, \beta_2, \beta_4$ tür.

β_3 bağıntısı ise hem (3,4) elemanını hem de bunun simetriği olan (4,3) elemanını içerdiğinden ters simetrik değildir.

NOT 5:
Yansıyan bağıntı elemanları hem simetrik- hem de ters simetrik olan yegane elemanlardır. Bu yüzden yansıyan bağıntı elemanlarının bulunduğu bağıntılar simetri ve ters simetri özelliğini bozmazlar.

4) GEÇİŞME ÖZELLİĞİ:

β ,A da tanımlı bir bağıntı olsun.

$(x,y) \in \beta$ ve $(y,z) \in \beta$ iken $(x,z) \in \beta$ oluyorsa β bağıntısı geçişkendir denir.

ÖRNEK(11) A={a,b,c,d} kümesinde tanımlı aşağıdaki bağıntıların kaç tanesi geçişkendir.?

β_1 : {(a,a),(a,b),(b,a),(c,c)}

β_2 : {(a,a),(a,b),(b,a),(b,c)}

β_3 :{(b,b),(a,c),(c,b),(a,b)}

β_4 :{(c,c),(a,c),(b,c),(c,a)}

ÇÖZÜM:

β_1 bağıntısı geçişken değil ; (b,a) $\in \beta_1$ ve (a,b)$\in$ β_1 iken (b,b) $\notin \beta_1$ dır.

β_2 bağıntısı geçişken değil; (a,b) $\in \beta_2$ ve (b,c)$\in$ β_2 iken (a,c) $\notin \beta_2$ dır.

β_3 bağıntısı geçişkendir ; (a,c) $\in \beta_3$ ve (c,b) $\in \beta_3$ iken (a,b) $\in \beta_3$ dır.

β_4 bağıntısı geçişken değil; (a,c) $\in \beta_4$ ve (c,a)$\in$ β_4 iken (a,a) $\notin \beta_4$ dır.

Bu durumda sadece bir tanesi geçişkendir.

NOT 6 :

Kartezyen çarpımın grafiğinde y=x doğrusuna köşegen denir. grafiği verilen bir bağıntının;

i) Yansıyan olması için köşegen üzerindeki noktaların tamamı bağıntıya ait olmalıdır.

ii) Simetrik olması için grafik köşegene göre simetrik olmalıdır.

iii) Ters simetrik olması için köşegen üzerindeki noktalar hariç , köşegene göre simetrik hiçbir noktası olmamalıdır.

NOT 7 :

s(A)=n olmak üzere;

i) A da tanımlı bağıntı sayısı: 2^{n^2} dir.

ii) A da tanımlı tüm yansıyan bağıntıların sayısı:

2^{n^2-n} tanedir.

iii) A da tanımlı yansıyan olmayan bağıntı sayısı:

$2^{n^2} - 2^{n^2-n}$ dir.

iv) A da tanımlı simetrik bağıntı sayısı: $2^{\frac{n(n+1)}{2}}$

v) A da tanımlı simetrik olmayan bağıntı sayısı:

$2^{n^2} - 2^{\frac{n(n+1)}{2}}$ dir.

ÖZEL BAĞINTILAR:

1) DENKLİK BAĞINTISI:

β, A da tanımlı bir bağıntı olsun. Eğer β'nın yansıma, simetri ve geçişme özellikleri varsa β, A da bir denklik bağıntısıdır denir.

❖ A={a,b,c} kümesi için

β={(a,a),(b,b),(c,c),(a.b),(b,a)} bağıntısı bir denklik bağıntısıdır.

2) SIRALAMA BAĞINTISI:

β, A da tanımlı bir bağıntı olsun. Eğer β'nın yansıma, ters simetri ve geçişme özellikleri varsa β, A da bir sıralama bağıntısıdır denir

❖ A={a,b,c} kümesi için

β={(a,a),(b,b),(c,c),(a.b),(b,c),(a,c)} bağıntısı bir sıralama bağıntısıdır.

GENEL ÖRNEKLER

ÖRNEK(12)

A ⊂B ve s(B)=3.s(A) ve s(A).s(A∪B)=12 ise A dan A ya tanımlanan kaç tane bağıntı vardır?

ÇÖZÜM:

S(A) = x olsun , s(B) = 3x olur.
A ⊂B olduğundan (A∪B) ≡ B olur.

s(A).s(A∪B)=12
s(A).s(B)=12
x.3x = 12
$3x^2 = 12$
$x^2 = 4 \rightarrow x = 2$

Bu durumda s(A) = 2 dir
A dan A ya tanımlanan bağıntı sayısı :

$2^{2.2} = 2^4 = 16$ dır.

ÖRNEK(13)

A={a,b,c,d} , B={1,2} ise AxB de tanımlı en çok 2 elemanlı kaç bağıntı vardır?

ÇÖZÜM:

Önce AxB 'nin eleman sayısını bulalım
s(AxB) = s(A). s(B) = 4.2 = 8
o halde 8 elemanlı bir kümenin en çok 2 elemanlı alt küme sayısı;

$\binom{8}{0}+\binom{8}{1}+\binom{8}{2}=1+8+\frac{8.7}{2.1}=37$ bulunur.

ÖRNEK(14)

s(AxB)=36 ve A∩B=ϕ ise s(A∪B) aşağıdakilerden hangisi olamaz?

A) 20 B) 15 C) 13 D) 12 E) 10

ÇÖZÜM:

s(AxB)=36 ise s(A).s(B) = 36 dır.
A∩B=ϕ olduğundan s(A∪B)= s(A)+s(B) dir

s(A).s(B) = 36	s(A)+s(B)
2.18 = 36	2+18 = 20
3.12 = 36	3+12 = 15
4.9 = 36	4+9 = 13
6.6 =36	6+6 =12

A,B,C,D şıkları oluyor fakat E şıkkı bulunamıyor.

Yani cevap E şıkkıdır.

MATEMATİĞİM

ÖRNEK(15)

Doğal sayılarda tanımlı β={(x,y)| 3x+y=8} bağıntısı kaç elemanlıdır?

ÇÖZÜM:

İşimiz değer vermek;

3x + y = 8
3.0 + 8 = 8
3.1 + 5 = 8
3.2 + 2 = 8
3.3 +(-1) = 8 (y, -1 olmaz)

o halde sadece 3 elemanlıdır.

ÖRNEK(16)

s(A)=3 ise A da tanımlı bağıntı, yansıyan ve simetrik bağıntı sayılarını bulun?

ÇÖZÜM:

i) A da tanımlı bağıntı sayısı: $2^{(n^2)} = 2^{(3^2)} = 2^9$ dir.

ii) A da tanımlı tüm yansıyan bağıntıların sayısı:

$2^{n^2-n} = 2^{3^2-3} = 2^6$ tanedir.

iii) A da tanımlı simetrik bağıntı sayısı:

$2^{\frac{n(n+1)}{2}} = 2^{\frac{3(3+1)}{2}} = 2^6$ dır.

ÖRNEK(17)

R^+ da her a,b için $\beta(a,b)=\dfrac{3a+b}{b}$ bağıntısı tanımlanmıştır. Buna göre $\beta(2,3)=\beta(4,m)$ eşitliğinde m sayısı kaçtır?

(ÖSS_98)

ÇÖZÜM:

Verilen değerleri yerine yazarsak

$\beta(a,b)=\dfrac{3a+b}{b} \rightarrow \beta(2,3)=\beta(4,m)$

$$\frac{3.2+3}{3} = \frac{3.4+m}{m}$$

$$3 = \frac{12+m}{m}$$

3m = m+12

2m = 12

m = 6 olur.

ÖRNEK(18)

A,B,C kümeleri için $A\cap B=\{a,b\}$ ve $C=\{0,1,2,3\}$ olduğuna göre $(AxC)\cap(BxC)$ kümesinin eleman sayısı kaçtır?

(ÖSS-97)

ÇÖZÜM:

$(AxC)\cap(BxC) = (A\cap B)xC$

$s((A\cap B)xC) = s(A\cap B).s(C)$

= 2.4

= 8 dir.

KONUMUZ BİTTİ. ŞİMDİ TESTLERE GEÇEBİLİRSİNİZ

DİLERSENİZ KONU ANLATIMINI BİR DE YOUTUBE KANALIMIZDAN VİDEO OLARAK DA İZLEYEBİLİRSİNİZ

Youtube kanalımız: CEBİR HOCAM

Başarılar diliyorum

İbrahim Halil BABAOĞLU

Matematik Öğretmeni