


İŞLEM

x ve y ye bağlı bütün tanımlı fonksiyonlar bir işlem belirtir. İşlemi göstermek için $+, -, *, ..$ gibi işaretler kullanılır.

❖ $A = \{-1, 0, 1\}$, $f: A \times A \rightarrow A$ fonksiyonu $f(x, y) = x \cdot y$ olsun. Bu fonksiyon A kümesinde tanımlı bir işlemidir. İşlemi $*$ ile gösterelim

$$x^*y = x \cdot y \text{ yazılır.}$$

ÖRNEK(1)

R 'de $x^*y = 3x + y - 5$ olmak üzere $*$ işlemi tanımlanıyor

- a) $(2^*1) = ?$
- b) $(2^*5)^*3 = ?$
- c) $(3^*x) = 6$ ise $x = ?$
- d) $(2^*3)^*x = 8$ ise $x = ?$

ÇÖZÜM:

a) $(2^*1) = 3 \cdot 2 + 1 - 5 = 2$

b) $(2^*5)^*3 = (3 \cdot 2 + 5 - 5)^*3$
 $= 6^*3$
 $= 3 \cdot 6 + 3 - 5$
 $= 16$

c) $(3^*x) = 6 \rightarrow (3 \cdot 3 + x - 5) = 6$
 $x + 4 = 6$
 $x = 2$

d) $(2^*3)^*x = 8 \rightarrow (3 \cdot 2 + 3 - 5)^*x = 8$
 $4^*x = 8$
 $3 \cdot 4 + x - 5 = 8$
 $x + 7 = 8$
 $x = 1$

ÖRNEK(2)

R 'de tanımlı $x \Delta y = \begin{cases} x^y - 2, & x \leq y \text{ ise} \\ x \cdot y + 1, & x > y \text{ ise} \end{cases}$ işlemi veriliyor. buna göre $(3 \Delta 2) \Delta (2 \Delta 3) = ?$

ÇÖZÜM:

$$(3 \Delta 2) \Delta (2 \Delta 3) = (3 \cdot 2 + 1) \Delta (2^3 - 2)$$

$$= 7 \Delta 6 = 7 \cdot 6 + 1 = 43 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK(3)

$$x \Delta y = x^y - 2y^x + y \cdot x \text{ ise } 2 \Delta 3 = ?$$

ÇÖZÜM:

$$\begin{aligned} 2 \Delta 3 &= 2^3 - 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 2 \\ &= 8 - 18 + 6 \\ &= -4 \end{aligned}$$

BİR KÜMEDE TANIMLI İŞLEMİN ÖZELLİKLERİ:

A kümesinde tanımlı ' Δ ' ve ' o ' işlemlerine göre $\forall x, y \in A$ için;

- 1) $x \Delta y \in A$ ise ' Δ ' işlemi A da kapalıdır.
- 2) $x \Delta y = y \Delta x$ oluyorsa değişme öz. vardır.
- 3) $x \Delta (y \Delta z) = (x \Delta y) \Delta z$ ise birleşme öz. vardır.
- 4) $x \Delta (y \Delta z) = (x \Delta y) \Delta (x \Delta z)$ oluyorsa ' Δ ' işleminin ' Δ ' işlemi üzerine dağılma öz. vardır.
- 5) $e \in A$ olmak üzere $x \Delta e = e \Delta x = x$ oluyorsa e ye ' Δ ' işleminin **etkisiz(birim) elemanı** denir.
- 6) A kümesinde tanımlı ' o ' işleminin etkisiz elemanı e olsun.
 $\forall x, x^{-1} \in A$ olmak üzere $x \Delta x^{-1} = x^{-1} \Delta x = e$ oluyorsa
 x^{-1} 'e x 'in tersi denir.
- 7) $\forall x \in A$ için $x \Delta y = y \Delta x = y$ oluyorsa y 'ye ' Δ ' işleminin **yutan elemanı** denir. (tersi olmayan eleman yutan elemandır.)

NOT 1 : Bir işlemin birim elemanı varsa tek bir tanedir. İşlemin birim elemanı varsa tanım kümesinden rasgele bir eleman seçerek etkisiz eleman bulunabilir.

ÖRNEK(4)

$$2x \Delta 3y = 3x - 2y + 5 \text{ ise } 6 \Delta 12 = ?$$

ÇÖZÜM:

$$6 \Delta 12 = 3.3 - 2.4 + 5 = 9 - 8 + 5 = 6 \text{ olur.}$$

$$\begin{array}{cc} 2x & 3y \\ \downarrow & \downarrow \\ 3 & 4 \end{array}$$

ÖRNEK(5)

R'de tanımlı Δ ve Π işlemleri için

$$x \Pi y = 2(x\Delta y) + x \text{ ve } x\Delta y = x + y + x.y \text{ ise } 2 \Pi 3 = ?$$

ÇÖZÜM:

$$2 \Pi 3 = 2(2\Delta 3) + 2 = 2.11 + 2 = 24 \text{ bulunur.}$$

$$\begin{array}{c} 2+3+2.3 \\ = 11 \end{array}$$

ÖRNEK(6)

$x^2 * y^3 = x + 2y - x^y$ ise $(9*8)$ 'in alabileceği değerler toplamı nedir?

ÇÖZÜM:

$$9 * 8 \Rightarrow 9 * 3 = -3 + 2.2 - (-3)^2 = -8$$

$$\begin{array}{cc} x^2 & y^3 \\ \square \square & \downarrow \\ -3 & 3 \end{array}$$

$$\Rightarrow 9 * 3 = 3 + 2.2 - (3)^2 = -2$$

değerler toplamı $= (-8) + (-2) = -10$ eder.

ÖRNEK(7)

$$\frac{2}{a} \diamond \frac{6}{b} = 2a + ab - b^2 \text{ ise } 4 \diamond 3 = ?$$

ÇÖZÜM:

$$4 \diamond 3 = 2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot 2 - 2^2 = 1 + 1 - 4 = -2 \text{ bulunur.}$$

$$\begin{array}{cc} 2 & 6 \\ a & b \end{array}$$

$$\frac{2}{a} = 4 \Rightarrow a = \frac{1}{2} \quad \text{ve} \quad \frac{6}{b} = 3 \Rightarrow b = 2$$

ÖRNEK(8)

R'de tanımlı $x^*y = \max(x.y, x^y)$ ise $1^*(3^2) = ?$

ÇÖZÜM:

$$\begin{aligned} 1^*(3^2) &= 1^*[\max(3.2, 3^2)] \\ &= 1^*[\max(6, 9)] \quad (\text{büyük değer } 9) \\ &= 1^*9 \\ &= \max(1.9, 1^9) \\ &= \max(9, 1) \\ &= 9 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

ÖRNEK(9)

$(a,b)o(c,d) = (a.d - bc, a.c + b.d)$ olmak üzere;

a) $(2,1)o(3,2) = ?$

b) $(1,2)o(x,4) = (y,11)$ ise $x+y = ?$

ÇÖZÜM:

$$(a,b)o(c,d) = (a.d - bc, a.c + b.d)$$

$$\begin{aligned} \text{a)} (2,1)o(3,2) &= (2.2 - 1.3, 2.3 + 1.2) \\ &= (1, 8) \text{ olur.} \end{aligned}$$

b) $(1,2)o(x,4) = (y,11)$

$$(1.4 - 2.x, 1.x + 2.4) = (y,11)$$

$$(4 - 2x, x + 8) = (y,11)$$

ikililerin eşitliğinden faydalananacak olursak

$$4 - 2x = y \quad \text{ve} \quad x + 8 = 11$$

$$\begin{array}{l} 4 - 2.3 = y \\ \quad \quad \quad \leftarrow x = 3 \\ \quad \quad \quad y = -2 \end{array}$$

sonuç : $x+y = 3 - 2 = 1$ olur.

ÖRNEK(10)

$$2^{a\Delta b} = \frac{4}{16^{b-a}} \text{ ise } 3\Delta 2=?$$

ÇÖZÜM:

$$2^{a\Delta b} = \frac{4}{16^{b-a}} \rightarrow 2^{3\Delta 2} = \frac{4}{16^{2-3}} = \frac{4}{16^{-1}} = 4 \cdot 16$$

$$2^{3\Delta 2} = 64 = 2^6$$

$3\Delta 2 = 6$ bulunur.

ÖRNEK(11)

R'de tanımlı $x\Delta y = x+y-2xy$ kuralı ile verilen işlemin birim elemanı nedir?

ÇÖZÜM:**1.yol**

Birim eleman için $x\Delta e = x$ kuralında e 'yi bulmak gereklidir.

$$x\Delta e = x$$

$$x+e-2xe = x$$

$$e(1-2x) = 0 \rightarrow e = 0 \text{ bulunur.}$$

2.yol

İşlemin tanımlı olduğu kümeden (yutan eleman hariç) bir eleman seçilir

$x = 1$ olsun

$x\Delta e = x$ kuralında

$1\Delta e = 1$ uygulanır.

$1\Delta e = 1$

$$1+e - 2 \cdot 1 \cdot e = 1$$

$$-e = 0$$

$e = 0$ bulunur.

ÖRNEK(12)

R'de tanımlı $x^*y = 2x+2y+xy+2$ ise $*$ işleminin birim elemanı nedir?

ÇÖZÜM:**1.yol**

Aynı şekilde $x^*e = x$ kuralını uygularsak

$$x^*y = 2x+2y+xy+2$$

$$x^*e = x$$

$$2x+2e+xe+2 = x$$

$$2e+xe = -2 - x$$

$$e(2+x) = -(2+x)$$

$$e = -1 \text{ bulunur.}$$

2.yol

bu sefer de $x = 0$ seçelim

$$x^*e = x$$

$$2 \cdot 0 + 2e + 0 \cdot e + 2 = 0$$

$$e = -1 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK(13)

R'de tanımlı $x\Delta y = -2x-2y+xy+a$ işleminin birim elemanı 3 ise $a = ?$

ÇÖZÜM:

$x\Delta e = e$ kuralından hareketle

$$x\Delta e = x$$

$$-2x-2e+xe+a = x$$

$$2e - xe = a - 3x$$

$$e(2-x) = a - 3x$$

$$e = \frac{a - 3x}{2 - x}$$

$e = 3$ olduğundan

$$\frac{a - 3x}{2 - x} = 3 \Rightarrow a - 3x = 6 - 3x \Rightarrow a = 6 \text{ bulunur}$$

ÖRNEK(14)

R' de tanımlı $x\Delta y = xy + x + y$ işleminde yutan eleman nedir?

ÇÖZÜM:

Yutan eleman kuralı $x\Delta m = m$ iken m , yutan eleman idi

Bu kuralı uygularsak;

$$x\Delta y = xy + x + y \rightarrow x\Delta m = xm + x + m = m$$

$$xm = -x$$

$$m = -1 \text{ bulunur.}$$

(yutan elemana aynı zamanda tersi olmayan eleman da denir)

ÖRNEK(15)

R' de tanımlı $x^*y = x.y + 3x + 3y + 6$ ise $*$ işlemine göre hangi elemanın tersi yoktur?

ÇÖZÜM:

Yutan elemanı soruyor.

Kuralımız ; $x\Delta m = m$

$$\begin{aligned} x^*y &= x.y + 3x + 3y + 6 \rightarrow x^*m = x.m + 3x + 3m + 6 = m \\ x.m + 2m &= -6 - 3x \\ m(x+2) &= -3(2+x) \\ m &= \frac{-3(x+2)}{x+2} \\ m &= -3 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

ÖRNEK(16)

R' de tanımlı $x\Delta y = -\frac{x+y+x.y+5}{4}$ işleminde

2'nin tersi nedir?

ÇÖZÜM:

Ters elemanın kuralı $x\Delta x^{-1} = e$ idi

2'nin tersi 2^{-1} olsun

$2\Delta 2^{-1} = e$ olduğundan önce e bulunmalı

İşlem R de tanımlı olduğundan $x = 1$ alıp e yi bulalım

$$1\Delta e = 1 \rightarrow -\frac{1+e+1.e+5}{4} = 1$$

$$-(2e+6) = 4$$

$$-2e - 6 = 4$$

$$2e = -10$$

$$e = -5 \text{ dir.}$$

Şimdi $2\Delta 2^{-1} = -5$ işlemini uygulayalım

$$-\frac{2+2^{-1}+2.2^{-1}+5}{4} = -5$$

$$3.2^{-1} + 7 = 20$$

$$3.2^{-1} = 13$$

$$2^{-1} = \frac{13}{3} \text{ olur.}$$

ÖRNEK(17)

R' de tanımlı $x\Delta y = 3x + 3y - x.y + a$ işleminin birim elemanı varsa $a = ?$

ÇÖZÜM:

Kuralımız belli

$$x\Delta e = x$$

$$3x + 3e - x.e + a = x$$

$$xe - 3e = 2x + a$$

$$e(x - 3) = 2x + a$$

$$e = \frac{2x + a}{x - 3}$$

İşlemenin birim elemanı olduğundan pay, paydaya tam bölmeli

$x - 3 = 0 \rightarrow x = 3$ değerini pay'da yerine yazalım
 $2x + a = 2.3 + a = 0$ olmalı (polinomlardan bu

$$a + 6 = 0 \quad \text{işlemi hatırlayın)}$$

$$a = -6 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK(18)

R' de tanımlı $x\Delta y = x+y+x.y$ işleminde
 $(2\Delta 3^{-1})\Delta 2^{-1} = ?$

ÇÖZÜM:

Öncelikle birim eleman bulunmalı

İşlem R' de tanımlı olduğundan $x=1$ alarak
 $1\Delta e = 1$ işlemini uygulayalım

$$\begin{aligned} 1\Delta e &= 1+e+1.e = 1 \\ 2e &= 0 \rightarrow e = 0 \text{ dır.} \end{aligned}$$

$x\Delta y = x+y+x.y$ işlemi değişme özelliğine sahip olduğundan (x ile y nin yeri değiştiğinde işlem değişmiyorsa değişme öz. Vardır)

$$(2\Delta 3^{-1})\Delta 2^{-1} = \underbrace{(2\Delta 2^{-1})}_{e=\text{etkisiz eleman}} \Delta 3^{-1} = e\Delta 3^{-1} = 3^{-1}$$

demek ki bize sadece 3^{-1} lazım

$$\begin{aligned} 3\Delta 3^{-1} &= e \Rightarrow 3+3^{-1}+3.3^{-1}=0 \\ &\Rightarrow 4.3^{-1}=-3 \\ &\Rightarrow 3^{-1}=\frac{-3}{4} \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

ÖRNEK(19)

R' de tanımlı $x\Delta y = 2x+2y-x.y-2$ işleminde tersi kendine eşit olan sayıların çarpımı kaçtır?

ÇÖZÜM:

Yani $x = x^{-1}$ olan x 'leri arayacağız.

$x\Delta x^{-1} = e$ olduğundan önce e bulunur.

R' den $x=1$ seçelim

$$x\Delta e = x \rightarrow 1\Delta e = 2.1+2e-1.e-2 = 1 \text{ ise } e=1$$

$$x\Delta x^{-1} = 1 \text{ olacak } x\Delta x = 1 \quad 2x+2x-x^2-2=1$$

$$x^2-4x+3=0 \quad x_1.x_2=3 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK(20)

R' de tanımlı $x\Delta y = x+y+x.y-(y\Delta x)$ işlemi değişme özelliği olan bir işlem ise $2\Delta 3=?$

ÇÖZÜM:

Değişme özelliği varsa $x\Delta y = y\Delta x$ olmalıdır

$$\begin{aligned} x\Delta y &= x + y + x.y - (y\Delta x) \\ &\quad \downarrow x\Delta y \\ 2(x\Delta y) &= x + y + x.y \\ x\Delta y &= \frac{x + y + x.y}{2} \\ 2\Delta 3 &= \frac{2+3+2.3}{2} = \frac{11}{2} \text{ olur.} \end{aligned}$$

ÖRNEK(21)

$x\Delta y = 3x+y+2(y\Delta x)$ ise $2\Delta 3=?$

ÇÖZÜM:

Burada değişme özelliği olmadığından önce $x=2$, $y=3$ sonra da $x=3$, $y=2$ yazar alt alta işlem yaparız

$$\begin{aligned} x\Delta y &= 3x+y+2(y\Delta x) \\ x=2, y=3 \rightarrow & \quad 2\Delta 3 = 3.2+3+2(3\Delta 2) \\ & \quad 2\Delta 3 - 2(3\Delta 2) = 9 \quad \dots\dots(1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x=3, y=2 \rightarrow & \quad 3\Delta 2 = 3.3+2+2(2\Delta 3) \\ & \quad 3\Delta 2 - 2(2\Delta 3) = 9 \quad \dots\dots(2) \end{aligned}$$

(1) ve (2) denklemlerini ortak çözerek $(3\Delta 2)$ 'yi yok edip $(2\Delta 3)$ 'ü bulalım

$$\begin{aligned} 2\Delta 3 - 2(3\Delta 2) &= 9 \\ \underline{2/ 3\Delta 2 - 2(2\Delta 3)} &= 9 \\ 2\Delta 3 - 2(3\Delta 2) &= 9 \\ + 2(3\Delta 2) - 4(2\Delta 3) &= 18 \\ -3(2\Delta 3) &= 27 \\ 2\Delta 3 &= -3 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

TABLODA İŞLEMLER

Tablo işlemlerinde etkisiz birim eleman; asıl satır ve asıl sütunun tabloda kesiştiği yerededir.

$A=\{1,2,3,4\}$ kümesinde tanımlı '*' işlemi için

Asıl satır →

*	1	2	3	4
1	4	1	2	3
2	1	2	3	4
3	2	3	4	1
4	3	4	1	2

↑
Asıl sütun

Yukarıdaki işlemin birim elemanı $e=2$ dir.

$$1^*2 = 1, 2^*2 = 2, 3^*2 = 3, 4^*2 = 4$$

Tablo işlemlerinde herhangi bir işlemin sonucu ilk değeri asıl sütündan, ikinci değeri asıl satıldan alınarak kesiştirildiğinde ulaşılan değerdir.

*	1	2	3	4
1	4	1	2	3
2	1	2	3	4
3	2	3	4	1
4	3	4	1	2

$$2^*3=3$$

Ters eleman için ; tersi alınacak eleman asıl sütundan bulunup elemanın bulunduğu satırda birim eleman aranır. Birim elemandan yukarı çıktılığında ulaşılan son eleman istenen ters elemandır.

*	1	2	3	4
1	4	1	2	3
2	1	2	3	4
3	2	3	4	1
4	3	4	1	2

$$3^{-1} = 1 \text{ dir.}$$

Tablolu işlemlerin değişme özelliğinin varlığını araştırmak için esas köşegen çizilir ve tablo bu köşegenden katlanır. Eğer aynı elemanlar çakışıysa değişme özelliği vardır denir.

*	1	2	3	4
1	4	1	2	3
2	1	2	3	4
3	2	3	4	1
4	3	4	1	2

esas köşegen

Yutan eleman için, bir işlemde tüm satır ve tüm sütun aynı elemandan oluşuyorsa o eleman yutan elemandır.

*	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	2	3	4
3	3	3	3	4
4	4	4	4	4

Yukarıdaki işlemin yutan elemanı $m = 4$ tür.

$$1^*4 = 4, 2^*4 = 4, 3^*4 = 4, 4^*4 = 4$$

ÖRNEK(22)

$A = \{a, b, c, d\}$ kümesinde tanımlı ' Δ ' işlemi,

Δ	a	b	c	d
a	b	c	d	a
b	c	d	a	b
c	d	a	b	c
d	a	b	c	d

şeklinde veriliyor.

- a) Δ işleminin etkisiz elemanı nedir?
- b) $(a\Delta b)\Delta c = ?$
- c) $(a^{-1}\Delta b)\Delta c^{-1} = ?$
- d) $(a\Delta x) = b^{-1}$ ise $x = ?$
- e) $(a\Delta x)^{-1} = c$ ise $x = ?$
- f) Tersi kendine eşit olan elemanların kümesi nedir?

ÇÖZÜM:

Δ	a	b	c	d
a	b	c	d	a
b	c	d	a	b
c	d	a	b	c
d	a	b	c	d

Δ işleminin değişme özelliğinin olduğuna dikkat edelim

- a) etkisiz eleman $e = d$ dir.
- b) $(a\Delta b)\Delta c = c\Delta b = b$
- c) $a^{-1} = c$ ve $c^{-1} = a$ olduğundan

$$(a^{-1}\Delta b)\Delta c^{-1} = (c\Delta b)\Delta a$$

$$= a\Delta a$$

$$= b$$
 bulunur.
- d) $(a\Delta x) = b^{-1}$ işleminin her iki tarafına soldan a^{-1} elemanı işlersek

$$\begin{array}{l|l}
a^{-1}\Delta(a\Delta x) = a^{-1}\Delta b^{-1} & a^{-1} = c \\
\underbrace{(a^{-1}\Delta a)}_d \Delta x = \underbrace{a^{-1}\Delta b^{-1}}_{c\Delta b} & b^{-1} = b
\end{array}$$

$$d\Delta x = a$$

x

$x = a$ bulunur.

- e) $(a\Delta x)^{-1} = c$ işleminde her iki tarafın tersi alınır.

$$\underbrace{\left((a\Delta x)^{-1}\right)^{-1}}_{a\Delta x} = c^{-1}$$

$a\Delta x = a$ oluyorsa x etkisiz eleman demektir. O halde $x = d$ dir.

$$f) a^{-1} = c, b^{-1} = b, c^{-1} = a \text{ ve } d^{-1} = d$$

o halde tersi kendisine eşit olan elemanlar b ve d dir. $\{b, d\}$

ÖRNEK(23)

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ kümesinde tanımlı '*' işlemi,

*	1	2	3	4	5
1	4	5	1	2	3
2	5	1	2	3	4
3	1	2	3	4	5
4	2	3	4	5	1
5	3	4	5	1	2

ve $xoy = x * 4 * y$ şeklinde tanımlı ikinci bir 'o' işlemi veriliyor. 'o' işleminin etkisiz elemanı nedir?

ÇÖZÜM:

'o' işleminin etkisiz elemanı e olsun
 $xoe = x$ kuralı uygulanırsa (y yerine e yazalım)

$$xoy = x * 4 * y \rightarrow xoe = x * (4 * e) = x$$

$\overbrace{\text{işlemin sonucu } x \text{ olduğuna}}^{\uparrow}$
göre $(4 * e)$ etkisiz eleman olmalı

* işleminin etkisiz elemanı 3 olduğundan

$$4 * e = 3 \text{ ise}$$

$e = 2$ dir.

ÖRNEK(24)

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ kümesinde tanımlı ' Δ ' işlemi aşağıdaki gibi veriliyor

Δ	1	2	3	4	5
1	4	5	1	2	3
2	5	1	2	3	4
3	1	2	3	4	5
4	2	3	4	5	1
5	3	4	5	1	2

x^{-1} , x 'in tersi ve $x^2 = x\Delta x$ ise

- a) $(2^{-1}\Delta 2^2)\Delta(3^4\Delta 5) = ?$
- b) $(2\Delta a)^{-1} = 5$ ise $a = ?$

ÇÖZÜM:

İşlemin etkisiz elemanı : 3 tür.

a) $2^{-1} = 4$, $2^2 = 2\Delta 2 = 1$

$$3^4 = 3\Delta 3 \Delta 3\Delta 3 = 3\Delta 3 = 3$$

3 3

$$(2^{-1}\Delta 2^2)\Delta(3^4\Delta 5) = (4\Delta 1)\Delta(3\Delta 5)$$

$$= 2\Delta 5 = 4 \text{ bulunur.}$$

b) $(2\Delta a)^{-1} = 5$ işleminin her iki tarafının tersi alınır.

$$\left((2\Delta a)^{-1}\right)^{-1} = 5^{-1}$$

$$2\Delta a = 1$$

2, hangi sayıyla işleme girerse 1 bulunur diyerek tablodan $2\Delta 2 = 1$ işlemi takip edilerek $a=2$ bulunur.

ÖRNEK(25)

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ kümesinde tanımlı '*' işlemi tabloda verilmiştir.

*	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5
2	2	2	3	4	5
3	3	3	3	4	5
4	4	4	4	4	5
5	5	5	5	5	5

'*' işleminin birim ve yutan elemanlarını bulun?

ÇÖZÜM:

*	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5
2	2	2	3	4	5
3	3	3	3	4	5
4	4	4	4	4	5
5	5	5	5	5	5

1,2,3,4,5 elemanlarının tablo içinde satır ve sütun olarak kesiştiği yer 1 olduğundan etkisiz eleman 1 dir.

*	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5
2	2	2	3	4	5
3	3	3	3	4	5
4	4	4	4	4	5
5	5	5	5	5	5

komple bir satır ve komple bir sütun 5 olduğundan yutan eleman da 5 tır.

ÖRNEK(26)

Dik koordinat düzleminin noktaları üzerinde bir ' Δ ' işlemi

(a,b) Δ (c,d)=(a.c+b.d,a.d-b.c)
şeklinde tanımlanıyor.
Buna göre (x,y) Δ (1,-1)=(3,5) eşitliğini sağlayan (x,y) ikilisi aşağıdakilerden hangisidir?

- A) (-3,5) B) (3,5) C) (1,-4)
D) (-1,-4) E) (-1,0)

(ÖSS 2003)

ÇÖZÜM:

$a \rightarrow x$, $b \rightarrow y$, $c \rightarrow 1$, $d \rightarrow -1$
eşlemesi yapılrsa

$$\begin{aligned} (a,b) \Delta (c,d) &= (a.c + b.d, a.d - b.c) \\ (x,y) \Delta (1,-1) &= (x.1 + y.(-1), x.(-1) - y.1) \\ (3,5) &= (x - y, -x - y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x - y &= 3 \\ -x - y &= 5 \\ -2y &= 8 \Rightarrow y = -4 \text{ ve} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x - y &= 3 \Rightarrow x - (-4) = 3 \\ x &= -1 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

o halde doğru cevap (-1, -4) yani D şöyledir.

ÖRNEK(27)

\mathbb{Z} tamsayılar kümesi üzerinde * işlemi,
 $a * b = a + b + 3$
biçiminde tanımlanmıştır.
Bu işleme göre, 2 nin tersi kaçtır?

(ÖSS 2002)

ÇÖZÜM:

Once birim eleman bulunmalı
(e:birim eleman)

$$\begin{aligned} a * e &= a \\ a + e + 3 &= a \\ e &= -3 \text{ olur.} \end{aligned}$$

2'nin tersi 2^{-1} ise ;

$$\begin{aligned} 2 * 2^{-1} &= e = -3 \text{ olmalı} \\ 2 + 2^{-1} + 3 &= -3 \\ 2^{-1} &= -8 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

ÖRNEK(28)

Pozitif tamsayılar kümesinde * ve Δ işlemleri ;

$$\begin{aligned} x * y &= x^y \\ x \Delta y &= x + y \text{ şeklinde tanımlanıyor.} \\ a * (a \Delta 1) &= 81 \text{ ise } a = ? \end{aligned}$$

(ÖSS-2001)

ÇÖZÜM:

Once $a \Delta 1$ işlemini bulalım
 $a \Delta 1 = a + 1$ yerine yazalım

$$a * (a \Delta 1) = 81 \Rightarrow a * (a + 1) = 81$$

şimdi * işlem, n, uygulayalım
 $a * (a + 1) = 81$
 $a^{a+1} = 81$
a=3 olursa $3^{3+1} = 3^4 = 81$ olduğundan a = 3 tür.

ÖRNEK(29)

R' de tanımlı * işlemi

$$a * b = \begin{cases} a + b; & a > b \text{ ise} \\ a - b; & a \leq b \text{ ise} \end{cases} \text{ şeklinde}$$

tanımlanıyor. Buna göre ; $(1*1)*(2*1)=?$
(ÖSS-2000)

ÇÖZÜM:

$1*1 \rightarrow 1 \leq 1$ olduğundan $1*1 = 1-1 = 0$ dır
 $2*1 \rightarrow 2 > 1$ olduğundan $2*1 = 2+1 = 3$ tür.

$$(1*1)*(2*1) = 0 * 3 \rightarrow 0 \leq 3 \text{ olduğundan} \\ 0 * 3 = 0 - 3 = -3 \text{ olur.}$$

ÖRNEK(30)

R' de her a,b için
 $a\Delta b=a+b-2ab$ işlemi tanımlanmıştır. Buna göre
 5 'in Δ işlemine göre tersi kaçtır?
(ÖSS-97)

ÇÖZÜM:

Önce birim eleman bulunur.
(birim eleman e olsun)
 $a\Delta e = a$ kuralı uygulanırsa
 $a\Delta e = a+e - 2ae = a$
 $e(1-2a) = 0$
 $e = \frac{0}{1-2a} = 0$ bulunur.

5 'in tersi 5^{-1} olsun

$$5\Delta 5^{-1} = e = 0$$

$$5 + 5^{-1} - 2 \cdot 5 \cdot 5^{-1} = 0$$

$$5^{-1} - 10 \cdot 5^{-1} = -5$$

$$-9 \cdot 5^{-1} = -5$$

$$5^{-1} = \frac{-5}{-9} = \frac{5}{9} \text{ olur.}$$

**KONUMUZ BİTTİ. ŞİMDİ TESTLERE
GEÇEBİLİRİRSİNİZ**

**DİLERSENİZ KONU ANLATIMINI BİR DE
YOUTUBE KANALIMIZDAN VİDEO OLARAK
DA İZLEYEBİLİRİRSİNİZ**

Youtube kanalımız: CEBİR HOCAM

Başarılar diliyorum

İbrahim Halil BABAOĞLU

Matematik Öğretmeni