DP geliştirmek için şu dört adım izlenir.

1. Optimal çözümün yapısının karakteristiği ortaya çıkarılmalı.
2. Özyinelemeli olarak çözümün değerini tanımlamalı
3. Alttan-üste (bottom-up) mantığı ile bir optimal çözümün değerini hesaplamalı
4. Hesaplanan bilgilerden optimal çözüm elde edilir.

DP ile Matris Zinciri Probleminin Çözümü

1. Adım: Optimal parantezlemenin yapısı.

$$A_{i\ldots j} = A_i A_{i+1} \cdots A_j \quad , \quad i \le j$$

$A_i \ldots A_j$ çarpımı için şu şekilde bir parantezleme olur.

$$(A_i A_{i+1} A_{i+2} \cdots A_k)(A_{k+1} \cdots A_j)$$

$1 \le i \le k < j \le n$ olmak üzere

2. Adım. Özyinelemeli bir çözüm

$m[i,j]$ değeri $A_{i\ldots j}$ çarpımı hesaplamak için gereken minimum skalar çarpım sayısı olsun.

$$m[i,j] = \begin{cases} 0 & i = j \text{ ise} \\ \min\limits_{i \le k < j} \{ m[i,k] + m[k+1] + p_{i-1} p_k p_j \} & \text{aksi halde} \end{cases}$$

A_i matrisinin boyutu $p_{i-1} \times p_i$ dir.

3. Adım: m[i,j] hesaplamak için saf bir recursive (özyinelemeli) alg. yazabiliriz. Fakat bunun çalışma zamanı üsteldir. Optimal maliyeti bottom-up şeklinde hesaplayacağız.

```
MATRIX-CHAIN-ORDER(p)
n = p.length − 1
let m[1..n, 1..n] and s[1..n − 1, 2..n] be new tables
for i = 1 to n
    m[i, i] = 0
for l = 2 to n          // l is the chain length
    for i = 1 to n − l + 1
        j = i + l − 1
        m[i, j] = ∞
        for k = i to j − 1
            q = m[i, k] + m[k + 1, j] + p_{i−1} p_k p_j
            if q < m[i, j]
                m[i, j] = q
                s[i, j] = k
return m and s
```

min[i,j]

$$p = [\underbrace{p_0, p_1}_{A_1}, p_2, \ldots, p_{n-1}, p_n]$$

(A_2 = p_1, p_2; A_n = p_{n-1}, p_n)

$p = [30, 35, 15, 5, 10, 20, 25]$

Ex:

matrix	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
dim.	30x35	35x15	15x5	5x10	10x20	20x25
	p_0 p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6

m	1	2	3	4	5	6
1	0	15125	7875			15125
2		0	2625	4375	7125	
3			0	750	2500	
4				0	1000	3500
5					0	5000
6						0

$l=3$

$l=2$

for $l=2$ for $i=1$ $j=2$ for $k=1$

$q = m[1,1] + m[2,2] + p_0 p_1 p_2$

$q = 0 + 0 + 30 \cdot 35 \cdot 15 = 15125$

$m[1,2] = 15125$

$i=2$ $j=3$ $k=2$

$q = m[2,2] + m[3,3] + p_1 p_2 p_3$

$q = 0 + 0 + 35 \cdot 15 \cdot 5 = 2625$

$i=3$ için devam

$l=3$ için $i=1$ $j=3$ $m[1,3] = \infty$

$k=1$ den 2 ye kadar

$$m[1,3] = \min_{1 \le k < 3} \begin{cases} \overbrace{\underbrace{m[1,1]}_{0} + \underbrace{m[2,3]}_{2625} + p_0 p_1 p_3}^{A_1 \cdot (A_2 A_3)} = 7875 \rightarrow \min \\ \underbrace{\underbrace{m[1,2]}_{15125} + \underbrace{m[3,3]}_{0} + p_0 p_2 p_3}_{(A_1 A_2) A_3} = 17375 \end{cases}$$

$A_2 A_3 A_4 A_5$

$$\underset{\;i\;\;\;j}{m[2,5]} = \min_{2 \le k < 5} \begin{cases} m[2,\underset{k}{2}] + m[\underset{k+1}{3},5] + p_1 p_2 p_5 = 13000 \\ m[2,3] + m[4,5] + p_1 p_3 p_5 = 7125 \rightarrow \min \\ m[2,4] + m[5,5] + p_1 p_4 p_5 = 11375 \end{cases}$$

4. Adım Optimal parentezlemeyi bulmak:
matris zincirinin nereden bölüneceği
s tablosunda saklanıyor.

s	2	3	4	5	6
1	1	1	3	3	3
2		2	3	3	3
3			3	3	3
4				4	5
5					5

optimal çözüm: $(A_1(A_2A_3))((A_4A_5)A_6)$

optimal değer: 15125