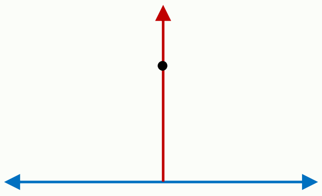
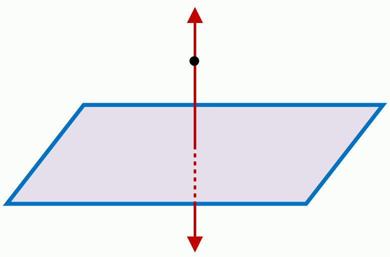
الهندسة الفضائية Space Geometry

بديهيات :

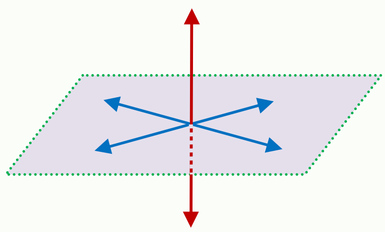
1) في المستوي الواحد يمكن رسم مستقيم وحيد عمودي على مستقيم معلوم من نقطة معلومـة



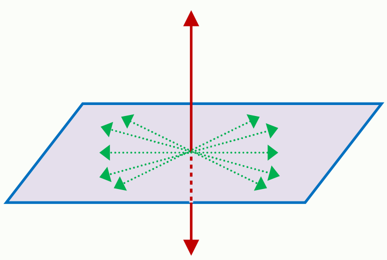
2) يمكن رسم مستقيم وحيد عمودي على مستو معلوم من نقطة معلومـة



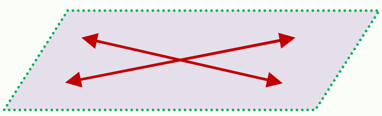
3) المستقيم العمودي على مستقيمين متقاطعين من نقطة تقاطعهما يكون عموديا على مستويهمـا



4) المستقيم العمودي على مستو يكون عموديا على جميع المستقيمات المرسومة من أثره في ذلك المستــوي

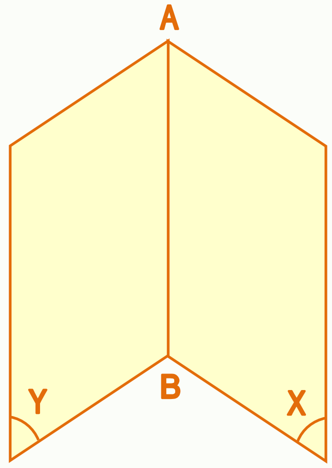


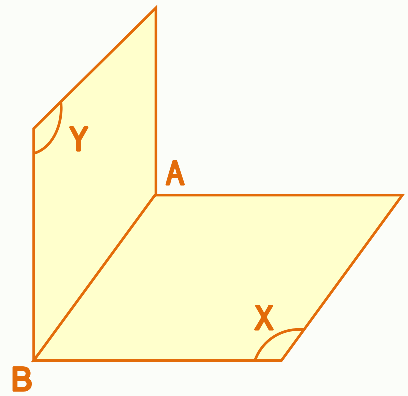
5) لكل مستقيمين متقاطعين يوجد مستو وحيد يحتويهما



الزاوية الزوجية : Dihedral angle

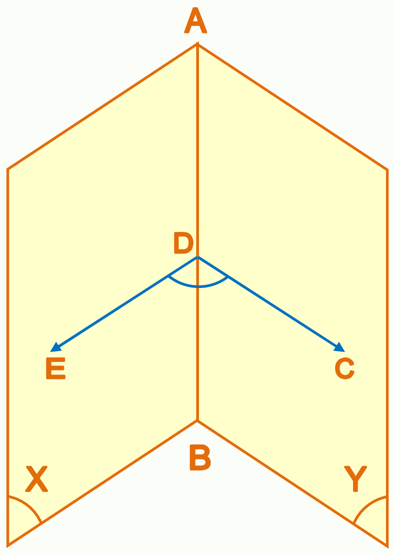
نعلم سابقاً بأن المستويان يتقاطعان بخط مستقيم ، فإذا تقاطع المستوي (X) مع المستوي (Y) فالزاويـــة الناتجة بينهمـــا تسمى بالزاوية الزوجيـــة $(X)-\overleftrightarrow{AB}-(Y)$ والمستقيم الناتج من تقاطعهما يسمى بحرف الزاوية الزوجيـــة





الزاوية العائدة للزاوية الزوجية :

هي الزاوية التي ضلعاها عموديان على حرف الزاوية الزوجية من نقطة تنتمي إليه وكل منهما في أحد وجهي الزاوية الزوجية .



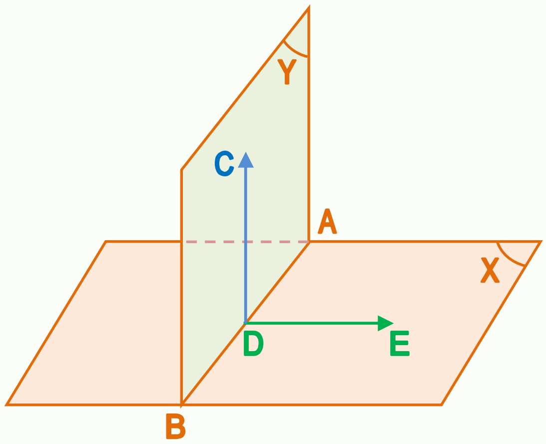
شروط الزاوية العائدة للزاوية الزوجية:

$$\left.\begin{array}{l}\overleftrightarrow{DE}\subset(X)\\ \overleftrightarrow{DC}\subset(Y)\\ \overleftrightarrow{DE}\perp\overleftrightarrow{AB}\\ \overleftrightarrow{DC}\perp\overleftrightarrow{AB}\end{array}\right\}\Rightarrow \sphericalangle CDE \text{ زاوية عائدة}$$

- قياس الزاوية الزوجية يساوي قياس الزاوية العائدة لها وبالعكس
- إذا كانت الزاوية الزوجية قائمة فالمستويان متعامدان وبالعكس

مبرهنة (7) :

إذا تعامد مستويان فالمستقيم المرسوم في أحدهما والعمودي على مستقيم التقاطع يكون عمودياً على المستوي الآخر



المعطيات :

$(Y) \perp (X)$

$(Y) \cap (X) = \overleftrightarrow{AB}$

$\overleftrightarrow{CD} \subset (Y)$

$\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{CD}$ في نقطة D

المطلوب اثباته :

$\overleftrightarrow{CD} \perp (X)$

البرهان :

في (X) نرسم $\overleftrightarrow{DE} \perp \overleftrightarrow{AB}$ (في المستوي الواحد يمكن رسم مستقيم وحيد عمودي على مستقيم معلوم من نقطة معلومة)

$\overleftrightarrow{CD} \perp \overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{CD} \subset (Y)$ (معطى)

$\therefore \measuredangle CDE$ عائدة للزاوية الزوجية $(X) - \overleftrightarrow{AB} - (Y)$ (تعريف الزاوية العائدة)

$\therefore m\measuredangle CDE = 90^\circ$ (قياس الزاوية الزوجية يساوي قياس الزاوية العائدة لها وبالعكس)

$\therefore \overleftrightarrow{CD} \perp \overleftrightarrow{DE}$ (اذا كان قياس الزاوية بين مستقيمين °90 فان المستقيمين متعامدان وبالعكس)

$\therefore \overleftrightarrow{CD} \perp (X)$ (المستقيم العمودي على مستقيمين متقاطعين من نقطة تقاطعهما يكون عمودياً على مستويهما)

و . هـ . م

نتيجة مبرهنة (7) :

إذا تعامد مستويان فالمستقيم المرسوم من نقطة في أحدهما عمودياً على المستوي الآخر يكون محتوى فيه

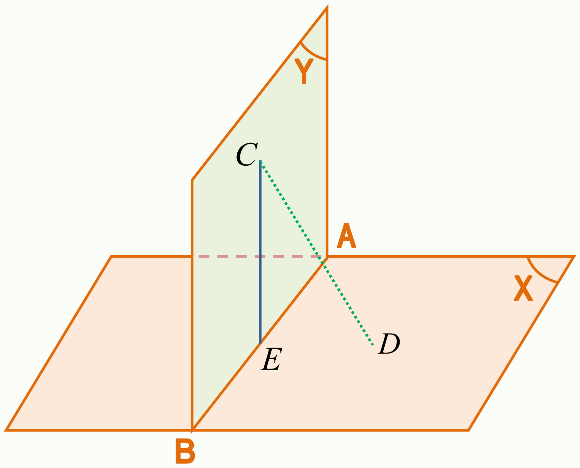
المعطيــــات :

$(Y) \perp (X)$

$(X) \cap (Y) = \overleftrightarrow{AB}$

$C \in (Y)$

$\overleftrightarrow{CD} \perp (X)$



المطلوب اثباته :

$\overleftrightarrow{CD} \subset (Y)$

البرهــــان :

نرسم $\overleftrightarrow{CE} \subset (Y)$ بحيث $\overleftrightarrow{CE} \perp \overleftrightarrow{AB}$ (في المستوي الواحد يمكن رسم مستقيم وحيد عمودي على مستقيم معلوم من نقطة معلومة)

$\because (Y) \perp (X)$ (معطى)

$\therefore \overleftrightarrow{CE} \perp (X)$ (مبرهنة 7)

$\overleftrightarrow{CD} \perp (X)$ (معطى)

$\therefore \overleftrightarrow{CE} = \overleftrightarrow{CD}$ (يمكن رسم مستقيم وحيد عمودي على مستقيم معلوم من نقطة معلومة)

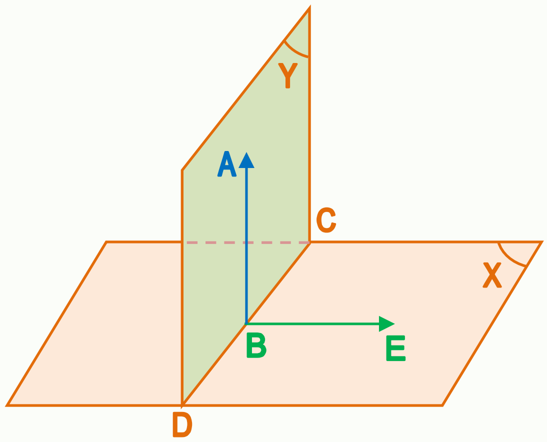
$\therefore \overleftrightarrow{CD} \subset (Y)$

و . هـ . م

مبرهنة (8) :

كل مستوٍ مار بمستقيم عمودي على مستوٍ آخر يكون عمودياً على ذلك المستوي

يتعامد المستويان إذا احتوى أحدهما على مستقيم عمودي على الآخر



المعطيــــات :

$\overleftrightarrow{AB} \perp (X)\ ,\ \overleftrightarrow{AB} \subset (Y)$

$(X) \cap (Y) = \overleftrightarrow{CD}$

المطلوب اثباته :

$(Y) \perp (X)$

البرهـــان :

في (X) نرسم $\overleftrightarrow{BE} \perp \overleftrightarrow{CD}$ (في المستوي الواحد يمكن رسم مستقيم وحيد عمودي على مستقيم معلوم من نقطة معلومة)

$\because \overleftrightarrow{AB} \perp (X)$ (معطى)

$\therefore \overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{CD}\ ,\ \overleftrightarrow{BE}$ (المستقيم العمودي على مستو يكون عمودياً على جميع المستقيمات المرسومة من أثره في ذلك المستوي)

$\because \overleftrightarrow{AB} \subset (Y)$ (معطى)

$\therefore \measuredangle ABE$ عائدة للزاوية الزوجية $(X)-\overleftrightarrow{CD}-(Y)$ (تعريف الزاوية العائدة)

$m\measuredangle ABE = 90^\circ \quad (\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{BE})$

$\therefore m\measuredangle (X)-\overleftrightarrow{CD}-(Y) = 90^\circ$ (قياس الزاوية الزوجية يساوي قياس الزاوية العائدة لها وبالعكس)

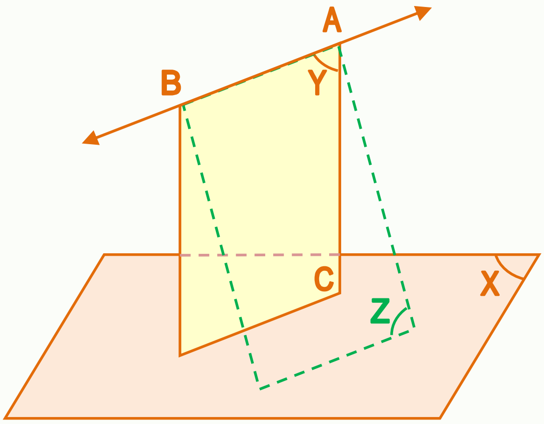
$\therefore (Y) \perp (X)$ (اذا كان قياس الزاوية الزوجية 90° فان المستويين متعامدان وبالعكس)

و.هـ.م

مبرهنة (9) :

من مستقيم غير عمودي على مستوٍ معلوم يوجد مستوٍ وحيد عمودي على المستوي المعلوم

المعطيـــــات :



$\overleftrightarrow{AB}$ غير عمودي على (X)

المطلوب اثباته :

ايجاد مستوٍ وحيد يحوي $\overleftrightarrow{AB}$
ويكون عمودياً على (X)

البرهـــــان :

من نقطة (A) نرسم $\overleftrightarrow{AC} \perp (X)$ (يمكن رسم مستقيم وحيد عمودي على مستوٍ معلوم من نقطة معلومة)

$\because$ $\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{AC}$ متقاطعان

$\therefore$ يوجد مستو وحيد مثل (Y) يحويهما (لكل مستقيمين متقاطعين يوجد مستوٍ وحيد يحتويهما)

$\therefore$ $(Y) \perp (X)$ (مبرهنة 8)

ولبرهنة الوحدانية :

ليكن (Z) مستو أخر يحوي $\overleftrightarrow{AB}$ وعمودي على (X)

$\because$ $\overleftrightarrow{AC} \perp (X)$ (بالبرهان)

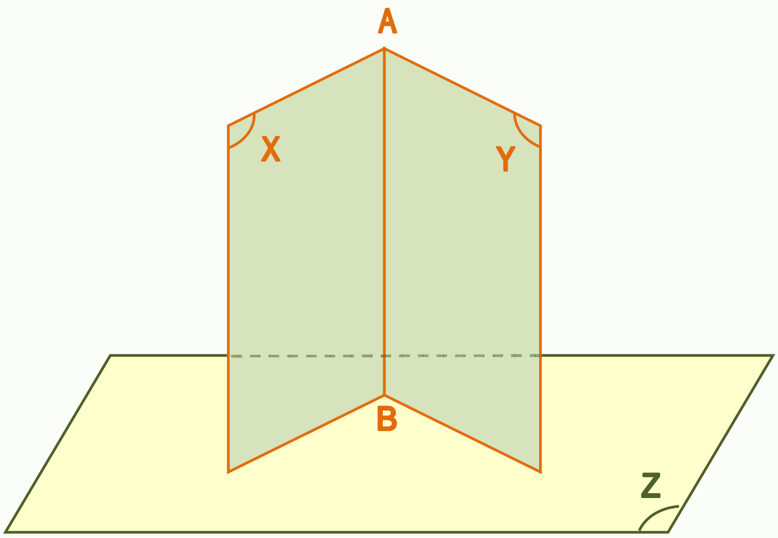
$\therefore$ $\overleftrightarrow{AC} \subset (Z)$ (نتيجة مبرهنة 7)

$\therefore$ $(Y) = (Z)$ (لكل مستقيمين متقاطعين يوجد مستوٍ وحيد يحتويهما)

و.هـ.م

نتيجة مبرهنة (9) :

إذا كان كل مستويين متقاطعين عمودياً على مستوٍ ثالث فإن مستقيم تقاطعهما يكون عمودياً على المستوي الثالث



المعطيـــــات :

$$(X) \cap (Y) = \overleftrightarrow{AB}$$
$$(X) , (Y) \perp (Z)$$

المطلوب اثباته :

$$\overleftrightarrow{AB} \perp (Z)$$

البرهـــــان :

إذا لم يكن $\overleftrightarrow{AB}$ عمودياً على (Z)

لما وجد أكثر من مستوٍ واحد يحوي $\overleftrightarrow{AB}$ ويكون عمودياً على (Z) (مبرهنة 9)

$\therefore \overleftrightarrow{AB} \perp (Z)$

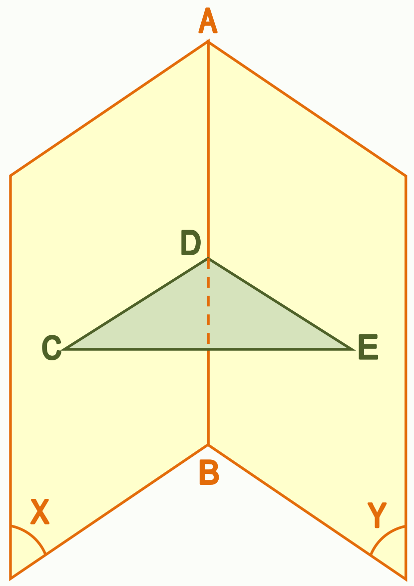
و.هـ.م

تمارين (1 - 6)

س1) برهن أن مستوي الزاوية المستوية العائدة لزاوية زوجية يكون عمودياً على حرفها

المعطيـــــات :

CDE زاوية عائدة للزاوية الزوجية $(X)-\overleftrightarrow{AB}-(Y)$



المطلوب اثباته :

المستوي (CDE) عمودي على $\overleftrightarrow{AB}$

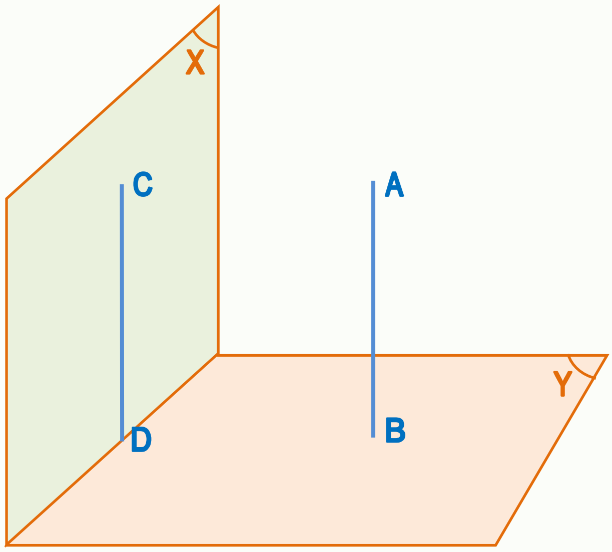
البرهـــــان :

$\left\{ \begin{array}{l} \overleftrightarrow{CD} \perp \overleftrightarrow{AB} \\ \overleftrightarrow{ED} \perp \overleftrightarrow{AB} \end{array} \right.$ (تعريف الزاوية العائدة)

$\therefore$ المستوي (CDE) عمودي على $\overleftrightarrow{AB}$ (المستقيم العمودي على مستقيمين متقاطعين من نقطة تقاطعهما يكون عمودياً على مستويهما)

و.هـ.م

س2) برهن أنه اذا وازى مستقيم مستوياً وكان عمودياً على مستوٍ أخر فان المستويين متعامدان



المعطيـــــات :

$\overleftrightarrow{AB} \parallel (X)$

$\overleftrightarrow{AB} \perp (Y)$

المطلوب اثباته :

$(X) \perp (Y)$

البرهـــــان :

ليكن $C \in (X)$

نرسم $\overleftrightarrow{CD} \perp (Y)$ (يمكن رسم مستقيم وحيد عمودي على مستوٍ معلوم من نقطة معلومة)

$\because \overleftrightarrow{AB} \perp (Y)$ (معطى)

$\therefore \overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ (المستقيمان العموديان على مستوٍ واحد متوازيان)

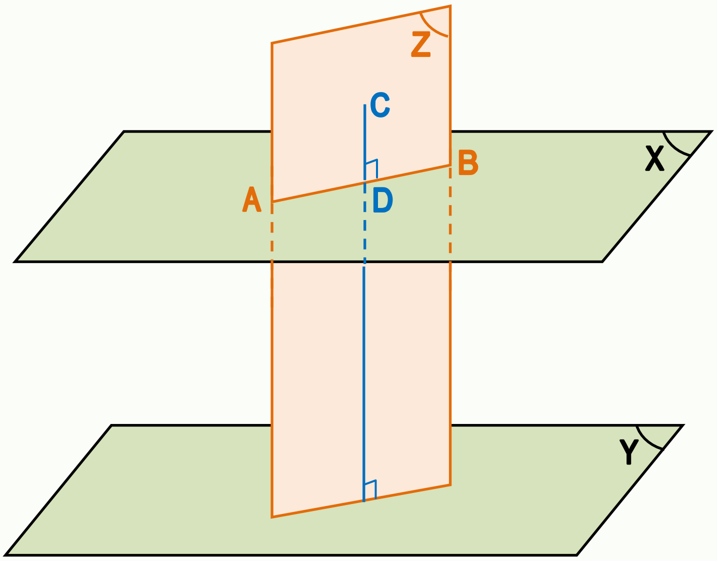
$\because C \in (X)$ (بالبرهـــان)

$\therefore \overleftrightarrow{CD} \subset (X)$ (إذا وازى مستقيم مستوياً فالمستقيم المرسوم من نقط المستوي موازيا للمستقيم المعلوم يكون محتوى في المستوي المعلوم)

$\therefore (X) \perp (Y)$ (مبرهنــة 8)

و.هـ.م

س3) برهن أن المستوي العمودي على أحد مستويين متوازيين يكون عمودياً على الأخر أيضاً



المعطيــــات :

$(X) // (Y)$

$(Z) \perp (X)$

المطلوب اثباته :

$(Z) \perp (Y)$

البرهــــان :

ليكن $(Z) \cap (X) = \overleftrightarrow{AB}$ (يتقاطع المستويان بخط مستقيم)

لتكن $C \in (Z)$ في (Z) نرسم $\overleftrightarrow{CD} \perp \overleftrightarrow{AB}$ (في المستوي الواحد يمكن رسم مستقيم وحيد عمودي على مستقيم معلوم من نقطة معلومة)

$\because (Z) \perp (X)$ (معطى)

$\therefore \overleftrightarrow{CD} \perp (X)$ (مبرهنة 7)

$\because (X) // (Y)$ (معطى)

$\therefore \overleftrightarrow{CD} \perp (Y)$ (المستقيم العمودي على أحد مستويين متوازيين يكون عمودياً على الأخر)

$\therefore (Z) \perp (Y)$ (مبرهنة 8)

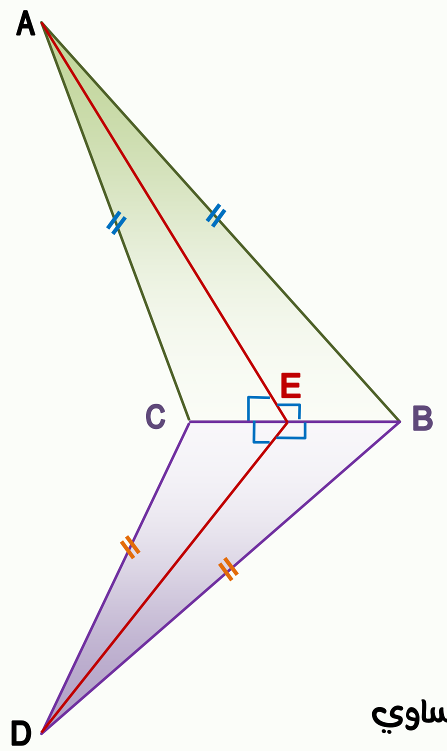
و . هـ . م

س4) A,B,C,D أربع نقـــاط ليست في مستـــوٍ واحد بحيث $AB = AC$, $E \in \overleftrightarrow{BC}$ فإذا كانت $\sphericalangle AED$ زاوية عائدة للزاويـــة الزوجية $A - \overline{BC} - D$ برهن أن $CD = BD$

المعطيـــــات :

A,B,C,D أربع نقاط ليست في مستوٍ واحد بحيث $AB = AC$, $E \in \overleftrightarrow{BC}$

$\sphericalangle AED$ زاوية عائدة للزاوية الزوجية $A - \overline{BC} - D$



المطلوب اثباته :

$CD = BD$

البرهـــــان :

في المثلث ABC :

$AB = AC$ (معطى)

$\because \overline{AE} \perp \overline{BC}$ (تعريف الزاوية العائدة)

$\therefore E$ منتصف $\overline{BC}$ (العمود المرسوم من رأس مثلث متساوي الساقين على القاعدة ينصفها)

في المثلثين BED , CED :

$\overline{DE}$ (مشترك)

$AB = AC$ (بالبرهان)

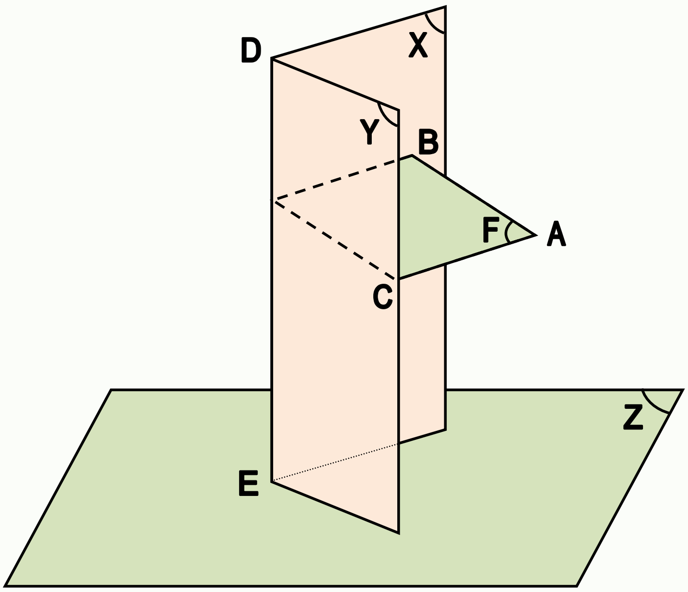
$m\sphericalangle CED = m\sphericalangle BED = 90^\circ$ (تعريف الزاوية العائدة)

$\therefore$ يتطابق المثلثان (لتساوي ضلعين والزاوية المحصورة بينهما)

وينتج $CD = BD$

و.هـ.م

س5) برهن أنه إذا وازى كل من مستقيمين متقاطعين مستوياً معلوماً وكانا عمودين على مستويين متقاطعين فإن مستقيم تقاطع المستويين المتقاطعين يكون عمودياً على المستوي المعلوم



المعطيـــــات :

$\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{AC} \parallel (Z)$

$\overleftrightarrow{AB} \perp (X)$, $\overleftrightarrow{AC} \perp (Y)$

$(X) \cap (Y) = \overleftrightarrow{DE}$

المطلوب اثباته :

$\overleftrightarrow{DE} \perp (Z)$

البرهـــــان :

نرسم المستوي (F) بحيث $\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{AC} \subset (F)$ (لكل مستقيمين متقاطعين يوجد مستوٍ وحيد يحويهما)

$\therefore (F) \parallel (Z)$ (إذا وازى كل من مستقيمين متقاطعين مستوياً فإن مستويهما يوازي ذلك المستوي)

$\because \overleftrightarrow{AB} \perp (X)$ (معطى)

$\therefore (F) \parallel (X)$ (مبرهنة 8)

$\because \overleftrightarrow{AC} \perp (Y)$ (معطى)

$\therefore (F) \parallel (Y)$ (مبرهنة 8)

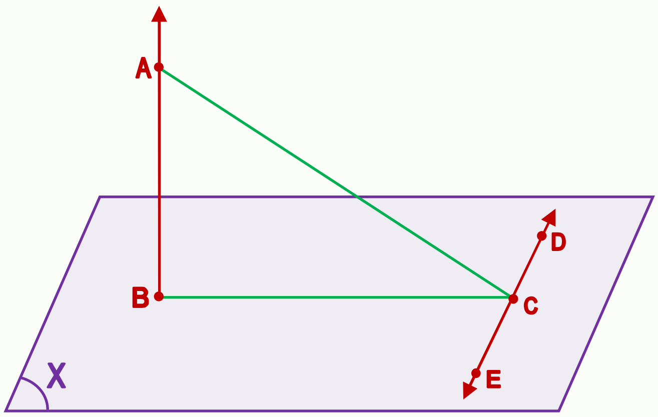
$\therefore \overleftrightarrow{DE} \perp (F)$ (نتيجة مبرهنة 9)

$\therefore \overleftrightarrow{DE} \perp (Z)$ (المستقيم العمودي على أحد مستويين متوازين يكون عمودياً على الأخر)

و.هـ.م

مبرهنة الأعمدة الثلاثة

إذا رسم من نقطة لا تنتمي الى مستوٍ معلوم مستقيمان أحدهما عمودي على المستوي والأخر عمودي على مستقيم معلوم في المستوي ، فالمستقيـــم الواصل بين أثري العمودين يكون عمودياً على المستقيم المعلوم في المستوي



المبرهنة

$\overline{AB} \perp (X)$ *on* B : $\overline{ED} \subset (X)$

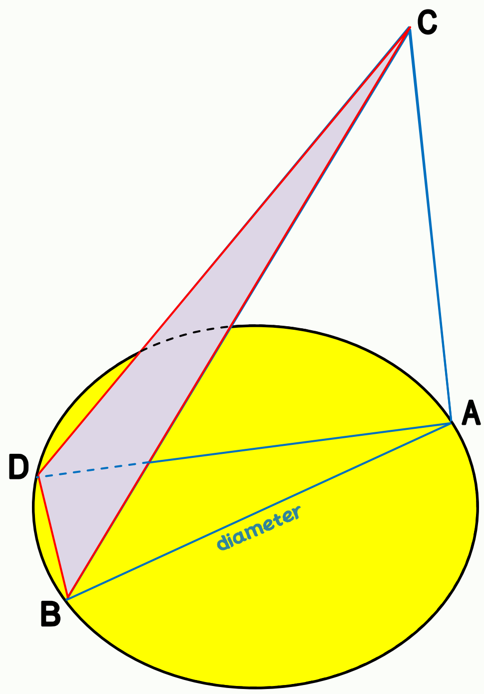
$\overline{BC} \perp \overline{ED} \Rightarrow \overline{AC} \perp \overline{ED}$

النتيجة

$\overline{AB} \perp (X)$ *on* B : $\overline{ED} \subset (X)$

$\overline{AC} \perp \overline{ED} \Rightarrow \overline{BC} \perp \overline{ED}$

س6) دائرة قطرها $\overline{AB}$ ، $\overline{AC}$ عمودي على مستويها ، D نقطة تنتمي للدائرة ، برهن أن المستوي (CDA) عمودي على المستوي (CDB)



المعطيـــــات :

دائرة قطرها $\overline{AB}$

$\overline{AC}$ عمودي على مستويها

D نقطة تنتمي للدائرة

المطلوب اثباته :

$(CDA) \perp (CDB)$

البرهـــــان :

$\because$ $\overline{AB}$ قطر للدائرة (معطى)

$\therefore$ $\sphericalangle ADB = 90^\circ$ (الزاوية المحيطية المرسومة في نصف دائرة تكون قائمة)

$\because$ $\overline{AC} \perp (ADB)$ (معطى)

$\overline{AD} \perp \overline{DB}$ (بالبرهان)

$\therefore$ $\overline{CD} \perp \overline{DB}$ (مبرهنة الأعمدة الثلاثة)

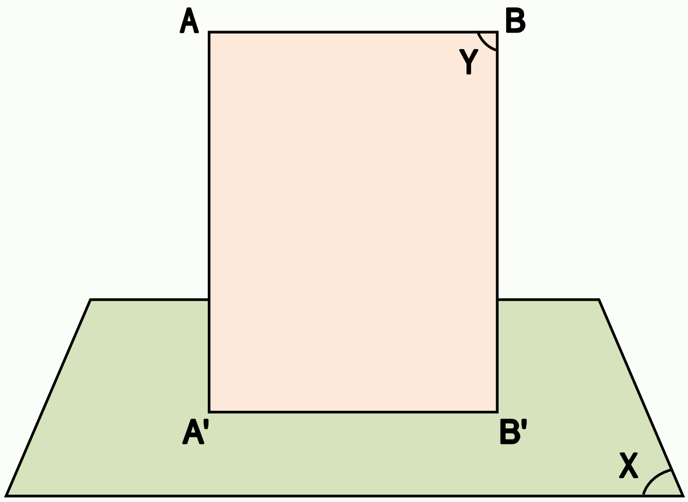
$\therefore$ $\overline{DB} \perp (CDA)$ (المستقيم العمودي على مستقيمين متقاطعين من نقطة تقاطعهما يكون عمودياً على مستويهما)

$\therefore$ $(CDA) \perp (CDB)$ (مبرهنة 8)

و.هـ.م

تمارين (2 - 6)

س1) برهن أن طول قطعة المستقيم الموازي لمستوٍ معلوم يساوي طول مسقطه على المستوي المعلوم ويوازيه



المعطيـــــات :

$\overline{A'B'}$ هو مسقط $\overline{AB}$ على (X)

$\overline{AB} // (X)$

المطلوب اثباته :

$\overline{AB} // \overline{A'B'}$

$AB = A'B'$

البرهـــــان :

$\because$ $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ عمودان على (X) (تعريف المسقط)

$\therefore$ $\overline{AA'}$ // $\overline{BB'}$ (المستقيمان العموديان على مستوٍ واحد متوازيان)

نعين المستوي (Y) بالمستقيمين المتوازيين $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ (لكل مستقيمين متوازيين يوجد مستوٍ وحيد يحويهما)

$\because$ $\overline{AB} // (X)$ (معطى)

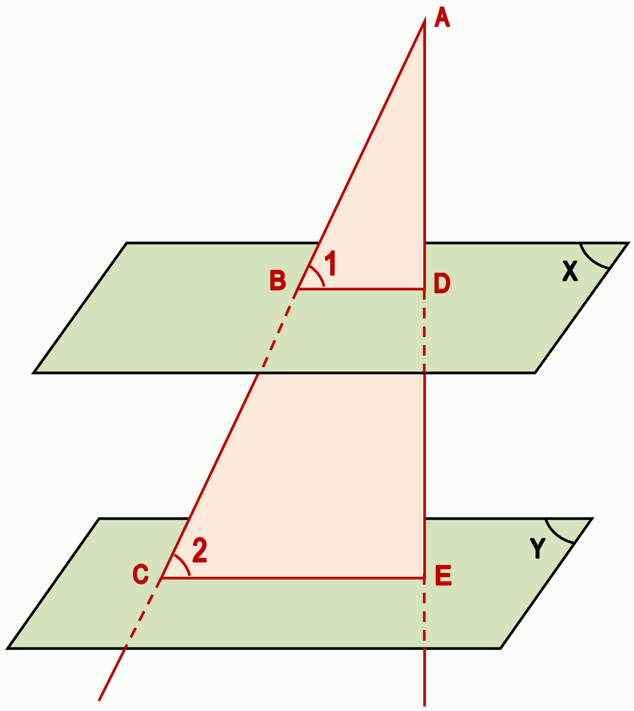
$\therefore$ $\overline{A'B'}$ // $\overline{AB}$ (إذا وازى مستقيم مستوياً فانه يوازي جميع المستقيمات الناتجة من تقاطع هذا المستوي مع المستويات التي تحوي هذا المستقيم)

فيكون $ABB'A'$ متوازي أضلاع (لتوازي كل ضلعين متقابلين فيه)

$\therefore$ $AB = A'B'$ (كل ضلعين متقابلين في المتساوي أضلاع متساويين في الطول)

و . هـ . م

س2) برهن أنه قطع مستويـــان متوازيـــان بمستقيـــم فإن ميله على أحدهمـــا يساوي ميله على الأخـــر



المعطيـــــات :

$(X) \,//\, (Y)$

$\overline{AC}$ يقطع (X) في نقطة B

$\overline{AC}$ يقطع (Y) في نقطة C

$\sphericalangle 1$ زاوية ميل $\overline{AB}$ على (X)

$\sphericalangle 2$ زاوية ميل $\overline{AC}$ على (Y)

المطلوب اثباته :

$m\sphericalangle 2 = m\sphericalangle 1$

البرهـــــان :

نرسم $\overline{AD} \perp (X)$ (يمكن رسم مستقيم وحيد عمودي على مستوٍ معلوم من نقطة معلومة)

$\therefore$ $\overline{AD} \perp (Y)$ في E (المستقيم العمودي على أحد مستويين متوازيين يكون عمودياً على الأخر)

$\therefore$ $\overline{DB}$ هو مسقط $\overline{AB}$ على (X)

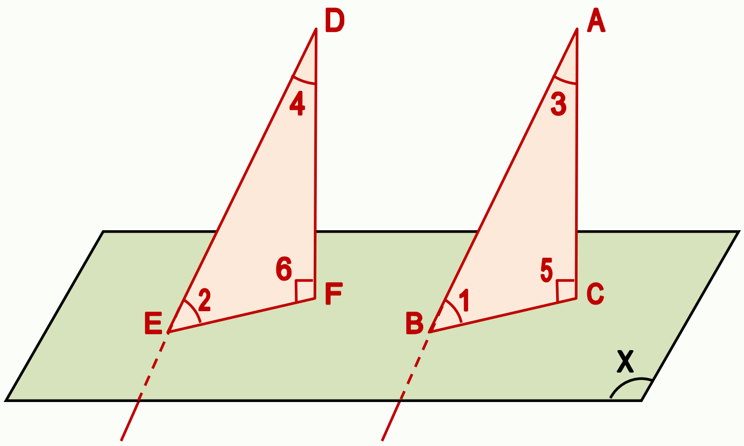
$\therefore$ $\overline{EC}$ هو مسقط $\overline{AC}$ على (Y)

(تعريف مسقط قطعة مستقيم)

$\therefore$ $m\sphericalangle 2 = m\sphericalangle 1$ (متناظرة)

و.هـ.م

س3) برهن على أن للمستقيمات المتوازية المائلة على مستوٍ الميل نفسه



المعطيـــات :

$\overline{AB} // \overline{DE}$

$1 \sphericalangle$ زاوية ميل $\overline{AB}$ على (X)

$2 \sphericalangle$ زاوية ميل $\overline{DE}$ على (X)

المطلوب اثباته :

$m\sphericalangle 1 = m\sphericalangle 2$

البرهـــان :

$\because$ $1 \sphericalangle$ ، $2 \sphericalangle$ هما زاويتي ميل $\overline{AB}, \overline{DE}$ على (X) (معطى)

$\therefore$ $\overline{BC}$ هو مسقط $\overline{AB}$ على (X)
$\overline{EF}$ هو مسقط $\overline{DF}$ على (Y)
(زاوية ميل مستقيم على مستوي هي الزاوية المحددة بالمائل ومسقطه على المستوي)

$\because$ $\overline{AC} \perp (X)$, $\overline{DF} \perp (X)$ (تعريف مسقط قطعة مستقيم)

$\therefore$ $\overline{AC} \perp \overline{BC}$, $\overline{DF} \perp \overline{EF}$ (المستقيم العمودي على مستوٍ يكون عمودياً على جميع المستقيمات المرسومة من أثره في ذلك المستوي)

$\therefore$ $m\sphericalangle 5 = m\sphericalangle 6$ (قوائم)

$\overline{AB} // \overline{DE}$ (معطى)

$\overline{AC} // \overline{DF}$ (المستقيمان العموديان على مستوٍ واحد متوازيان)

$\therefore$ $m\sphericalangle 3 = m\sphericalangle 4$ (إذا وازا ضلعا زاوية ضلعي زاوية أخرى تساوى قياسهما)

$\therefore$ $m\sphericalangle 1 = m\sphericalangle 2$ (مجموع زوايا المثلث $180°$)

و.هـ.م

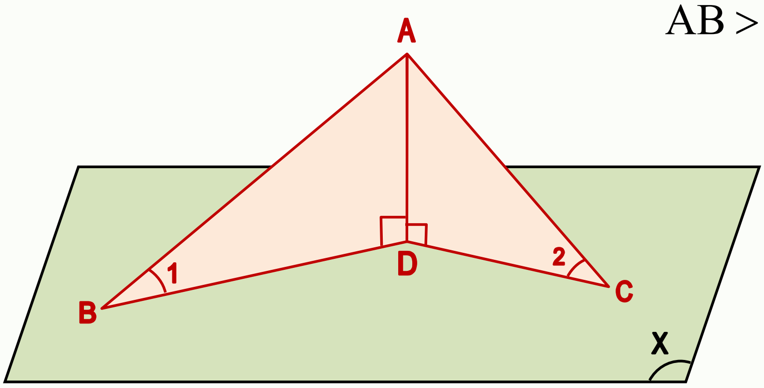
س4) برهن على أنه إذا رسم مائلان مختلفان في الطول من نقطة لا تنتمي الى مستوٍ معلوم فإن أطولهما تكون زاوية ميله على المستوي أصغر من زاوية ميل الآخر عليه

المعطيـــــات :

$\overline{AB}$, $\overline{AC}$ مائلان على (X) ، $AB > AC$

$\sphericalangle 1$ زاوية ميل $\overline{AB}$ على (X)

$\sphericalangle 2$ زاوية ميل $\overline{AC}$ على (X)



المطلوب اثباته :

$m\sphericalangle 1 = m\sphericalangle 2$

البرهـــــان :

نرسم $\overline{AD} \perp (X)$ (يمكن رسم مستقيم وحيد عمودي على مستوٍ معلوم من نقطة معلومة)

$\therefore$ $\overline{BD}$ هو مسقط $\overline{AB}$ على (X)
$\overline{CD}$ هو مسقط $\overline{AC}$ على (X) (تعريف مسقط قطعة مستقيم)

$\because AB > AC$ (معطى)

$\frac{1}{AB} < \frac{1}{AC}$ (خواص التباين)

$\frac{AD}{AB} < \frac{AD}{AC}$

$\therefore \sin\sphericalangle 1 = \sin\sphericalangle 2$

$\therefore m\sphericalangle 1 = m\sphericalangle 2$

و.هـ.م

س5) برهن على أنه إذا رسم مائلان مختلفان في الطول من نقطة لا تنتمي الى مستوٍ معلوم فأصغرهما ميلاً هو الأطول

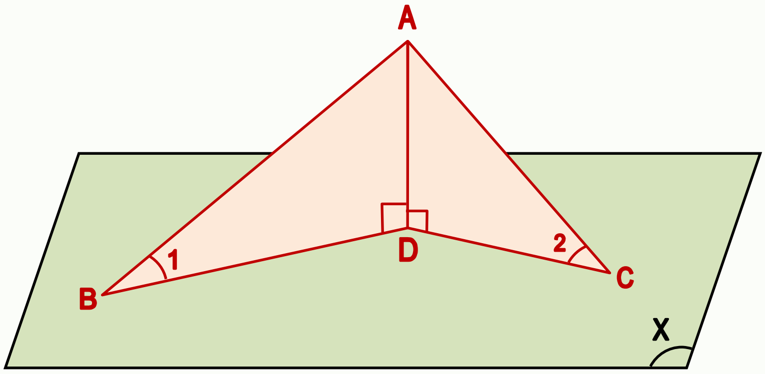
المعطيـــــات :

$\overline{AB}$, $\overline{AC}$ مائلان على (X) ،

$\sphericalangle 1$ زاوية ميل $\overline{AB}$ على (X)

$\sphericalangle 2$ زاوية ميل $\overline{AC}$ على (X)

$m\sphericalangle 1 = m\sphericalangle 2$



المطلوب اثباته :

$AB > AC$

البرهـــــان :

$\because$ $\sphericalangle 1$ ، $\sphericalangle 2$ هما زاويتي ميل $\overline{AB}, \overline{AC}$ على (X) (معطى)

$\therefore$ $\overline{BD}$ هو مسقط $\overline{AB}$ على (X)
$\overline{CD}$ هو مسقط $\overline{AC}$ على (X) (تعريف مسقط قطعة مستقيم)

نرسم $\overline{AD} \perp (X)$ (يمكن رسم مستقيم وحيد عمودي على مستوٍ معلوم من نقطة معلومة)

$\therefore$ $\overline{AD} \perp \overline{BD}, \overline{CD}$ (المستقيم العمودي على مستوٍ يكون عمودياً على جميع المستقيمات المرسومة من أثره في ذلك المستوي)

$\because$ $m\sphericalangle 1 = m\sphericalangle 2$ (معطى)

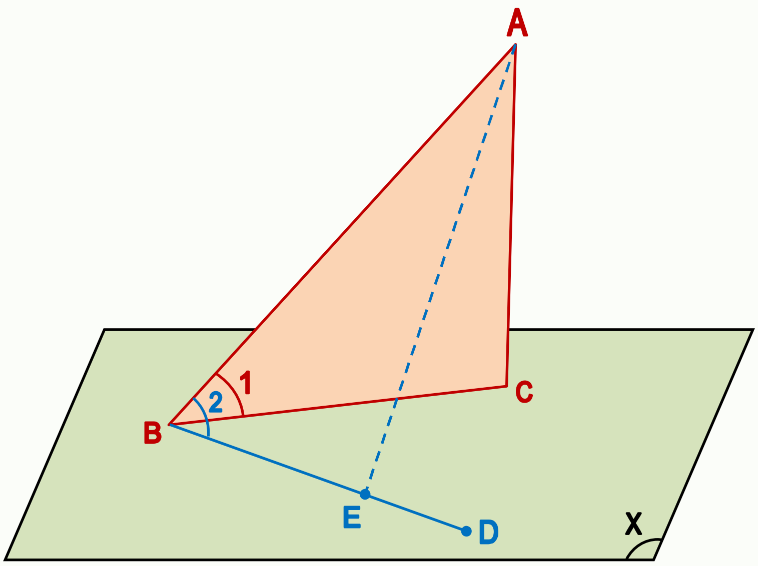
$\therefore$ $\sin\sphericalangle 1 = \sin\sphericalangle 2$

$\frac{AD}{AC} < \frac{AD}{AB} \leftarrow \frac{1}{AC} < \frac{1}{AB} \leftarrow AB > AC$ (خواص التباين)

و . هـ . م

س6) برهن على أن الميل بين المستقيم ومسقطه على مستوٍ أصغر من الزاوية المحصورة بين المستقيم نفسه وأي مستقيم آخر مرسوم من موقعه ضمن ذلك المستوي

المعطيــــات :



$\overline{BC}$ هو مسقط $\overline{AB}$ على (X)

$\overleftrightarrow{BD} \subset (X)$

$\sphericalangle 1$ هي زاوية ميل $\overline{AB}$ على (X)

$\sphericalangle 2$ هي زاوية ABD

المطلوب اثباته :

$m\sphericalangle 1 = m\sphericalangle 2$

البرهــــان :

لتكن $E \in \overline{BD}$ بحيث $BC = BE$

نصل $\overline{AE}$

$\because \overleftrightarrow{AC} \perp (X)$ (تعريف المسقط)

$\therefore AC < AE$ (العمود هو أقصر مسافة بين نقطة ومستوي)

$BC = BE$ (بالبرهان)

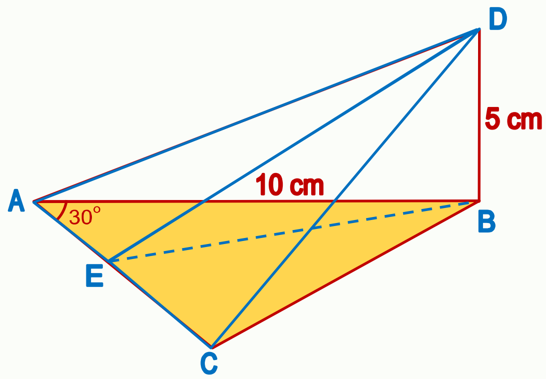
$AB = AB$ (مشترك)

$\therefore m\sphericalangle 1 = m\sphericalangle 2$ (إذا ساوى ضلعا مثلث ضلعي مثلث آخر واختلف الضلعان الآخران فأصغرهما يقابل أصغر الزاويتين)

و.هـ.م

مثال 1 / في ΔABC : $\overline{BD} \perp (ABC)$ ، $m\sphericalangle BAC = 30^\circ$ ، $AB = 10cm \ , \ BD = 5cm$

جد قياس الزاوية الزوجية $(D)-\overline{AC}-(B)$



المعطيــــات :

$\overline{BD} \perp (ABC)$ ، $m\sphericalangle BAC = 30^\circ$

$AB = 10cm \ , \ BD = 5cm$

المطلوب اثباته :

ايجاد قياس الزاوية الزوجية $(D)-\overline{AC}-(B)$

البرهــــان :

في المستوي (ABC):

نرسم $\overline{BE} \perp \overline{AC}$ في نقطة E (في المستوي الواحد يمكن رسم مستقيم وحيد عمودي على مستقيم معلوم من نقطة معلومة)

$\because \overline{BD} \perp (ABC)$ (معطى)

$\therefore \overline{DE} \perp \overline{AC}$ (مبرهنة الأعمدة الثلاثة)

فيكون $\sphericalangle DBE$ زاوية عائدة للزاوية الزوجية (تعريف الزاوية العائدة)

$\therefore \overline{DB} \perp \overline{BE}$ (المستقيم العمودي على مستوٍ يكون عمودياً على جميع المستقيمات المرسومة من أثره في ذلك المستوي)

$\Leftarrow$ ΔDBE قائم الزاوية في B

في ΔBEA قائم الزاوية في E :

$$\sin 30^\circ = \frac{BE}{BA} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{BE}{10} \Rightarrow BE = 5cm$$

في ΔDBE قائم الزاوية في B :

$$\tan(BED) = \frac{5}{5} = 1 \quad \Rightarrow \quad m\sphericalangle BED = 45^\circ$$

$\therefore$ قياس الزاوية الزوجية $(D)-\overline{AC}-(B) = 45^\circ$ (قياس الزاوية الزوجية هي قياس الزاوية العائدة لها وبالعكس)

و . هـ . م

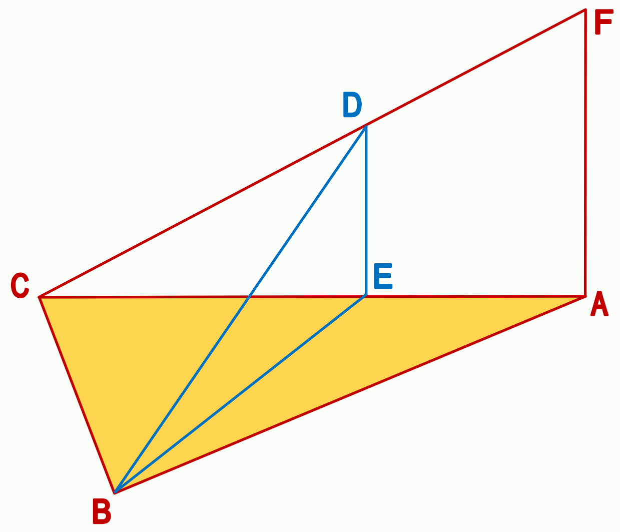
مثال 2 / ليكن ΔABC حيث :

$\overline{AF} \perp (ABC)$

$\overline{BD} \perp \overline{CF}$

$\overline{BE} \perp \overline{CA}$

برهن أن : $\overline{ED} \perp \overline{CF}$, $\overline{BE} \perp (CAF)$



المعطيـــــات :

$\overline{AF} \perp (ABC)$

$\overline{BD} \perp \overline{CF}$

$\overline{BE} \perp \overline{CA}$

المطلوب اثباته :

$\overline{ED} \perp \overline{CF}$, $\overline{BE} \perp (CAF)$

البرهـــــان :

$\because \overline{AF} \perp (ABC)$ (معطى)

$\therefore (CAF) \perp (ABC)$ (مبرهنة 8)

$\because \overline{BE} \perp \overline{CA}$ (معطى)

$\therefore \overline{BE} \perp (CAF)$ (مبرهنة 7)

$\because \overline{BD} \perp \overline{CF}$ (معطى)

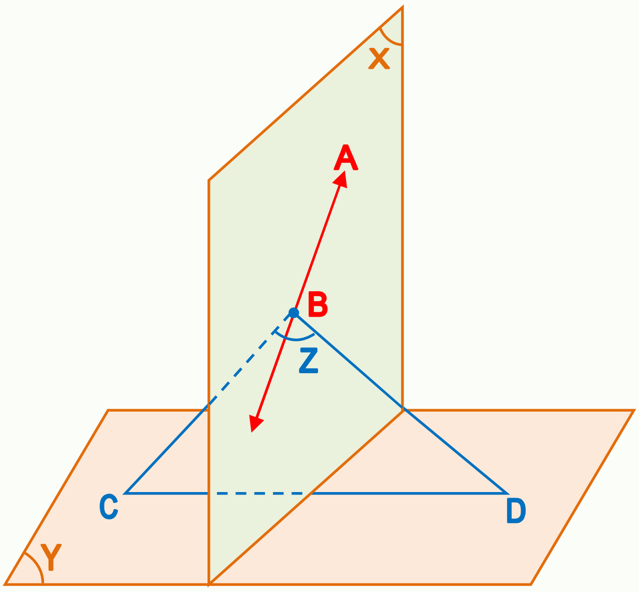
$\therefore \overline{ED} \perp \overline{CF}$ (نتيجة مبرهنة الأعمدة الثلاثة)

و . هـ . م

مثال 3 / $(X),(Y)$ مستويان متعامدان : $\overleftrightarrow{AB} \subset (X)$

$\overleftrightarrow{BC},\overleftrightarrow{BD}$ عموديان على $\overleftrightarrow{AB}$ ويقطعان (Y) في C,D على الترتيب

برهن أن : $\overleftrightarrow{CD} \perp (X)$



المعطيـــــات :

$(X)\perp(Y)$ ، $\overleftrightarrow{AB} \subset (X)$

$\overleftrightarrow{BC},\overleftrightarrow{BD}$ عموديان على $\overleftrightarrow{AB}$

ويقطعان (Y) في C,D على الترتيب

المطلوب اثباته :

$\overleftrightarrow{CD} \perp (X)$

البرهـــــان :

ليكن (Z) مستوي المستقيمين المتقاطعين $\overleftrightarrow{BC},\overleftrightarrow{BD}$ (لكل مستقيمين متقاطعين يوجد مستوٍ وحيد يحويهما)

$\because \overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{BC},\overleftrightarrow{BD}$ (معطى)

$\therefore \overline{AB} \perp (Z)$ (المستقيم العمودي على مستقيمين متقاطعين من نقطة تقاطعهما يكون عمودياً على مستويهما)

$\because \overline{AB} \subset (X)$ (معطى)

$\therefore (X) \perp (Z)$ (مبرهنة 8)

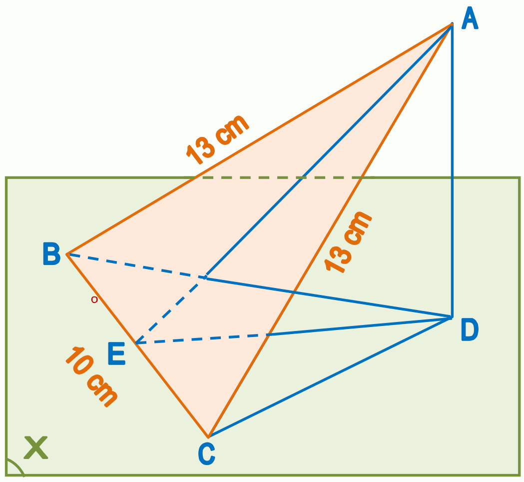
$\therefore (X) \perp (Y)$ (معطى)

كذلك $(Z)\cap(Y)=\overleftrightarrow{CD}$ (لأنه محتوى في كليهما)

$\therefore \overline{CD} \perp (X)$ (نتيجة مبرهنة 9)

و . هـ . م

مثال 5 / ABC مثلث ، $\overline{BC} \subset (X)$ والزاوية الزوجية بين مستوي المثلث (ABC) والمستوي (X) قياسها (60°) فإذا كان $AB = AC = 13cm, BC = 10cm$ جد مسقط المثلث ABC على (X) ثم جد مساحة مسقط المثلث ABC على (X)



المعطيــــات :

ΔABC ، $\overline{BC} \subset (X)$

قياس $(ABC) - \overline{BC} - (X) = 60^{o}$

$AB = AC = 13cm, BC = 10cm$

المطلوب اثباته :

ايجاد مسقط ΔABC على (X)

ايجاد مساحة مسقط ΔABC على (X)

البرهــــان :

نرسم $\overline{AD} \perp (X)$ في D (يمكن رسم مستقيم وحيد عمودي على مستقيم معلوم من نقطة معلومة)

$\overline{CD}$ مسقط $\overline{AC}$
$\overline{BD}$ مسقط $\overline{AB}$ (تعريف مسقط قطعة مستقيم)
$\overline{BC}$ مسقط نفسه على (X)

$\therefore$ ΔBCD مسقط ΔABC على (X)

في (ABC) نرسم $\overline{AE} \perp \overline{BC}$ في E (في المستوي الواحد يمكن رسم مستقيم وحيد عمودي على مستقيم معلوم من نقطة معلومة)

$\because$ $AC = AB$ (معطى)

$\therefore$ $EC = BE = 5cm$ (العمود النازل من رأس مثلث متساوي الساقين على القاعدة ينصفها)

$\therefore$ $\overline{ED} \perp \overline{BC}$ (نتيجة مبرهنة الأعمدة الثلاثة)

$\therefore$ $\sphericalangle DEA$ زاوية عائدة للزاوية الزوجية $\overline{BC}$ (تعريف الزاوية العائدة)

لكن قياس الزاوية الزوجية $\overline{BC} = 60^{o}$ (معطى)

في ΔAEB قائم الزاوية في E : $AE = \sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} = 12cm$

في ΔAED قائم الزاوية في D : $\cos 60^{o} = \frac{ED}{AE} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{ED}{12} \Rightarrow ED = 6cm$

مساحة المثلث BCD = $\frac{1}{2} * 10 * 6 = 30 \ cm^{2}$

و . هـ . م