تطبيقات التفاضل

قواعد الاشتقاق (مراجعة)

1) مشتقة الثابت :

$$f(x)=k \quad \Rightarrow \quad f'(x)=0$$

Examples :

1) $f(x)=2 \quad \Rightarrow \quad f'(x)=0$

2) $f(x)=\frac{-5}{3} \quad \Rightarrow \quad f'(x)=0$

---

2) متغير مرفوع لأس معين :

$$f(x)=x^n \quad \Rightarrow \quad f'(x)=n\,x^{(n-1)}$$

Examples :

1) $f(x)=x^4 \quad \Rightarrow \quad f'(x)=4x^3$

2) $f(x)=x^{-4} \quad \Rightarrow \quad f'(x)=-4x^{-5}=\frac{-4}{x^5}$

3) $f(x)=\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad f'(x)=\frac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}}=\frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

$y=\sqrt{x}$

$\rightarrow \quad y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

4) $f(x)=\sqrt[5]{x^3}=x^{\frac{3}{5}} \quad \Rightarrow \quad f'(x)=\frac{3}{5}x^{\frac{-2}{5}}=\frac{3}{5\sqrt[5]{x^2}}$

3) متغير مرفوع مضروب بثابت :

$$f(x) = k\,x^n \qquad \Rightarrow \qquad f'(x) = k\,n\,x^{(n-1)}$$

Examples :

1) $f(x) = 4x^3 \qquad \Rightarrow \qquad f'(x) = 12x^2$

2) $f(x) = 5x^{-3} \qquad \Rightarrow \qquad f'(x) = -15x^{-4} = \dfrac{-15}{x^4}$

---

4) مجموع عدة دوال :

$$f(x) = g(x) \pm h(x) \qquad \Rightarrow \qquad f'(x) = g'(x) \pm h'(x)$$

Example :

$$f(x) = x^4 - 3x^2 + \sqrt{x} - x + 9$$

$$\Rightarrow \qquad f'(x) = 4x^3 - 6x + \frac{1}{2\sqrt{x}} - 1 + 0$$

---

5) حاصل ضرب دالتين :

$$f(x) = g(x).h(x) \qquad \Rightarrow \qquad f'(x) = g(x).h'(x) + h(x).g'(x)$$

Example :

$$f(x) = (x+2)(x^2-1)$$

$$\Rightarrow \qquad f'(x) = (x+2)(2x) + (x^2-1)(1)$$

$$= 2x^2 + 4x + x^2 - 1$$

$$= 3x^2 + 4x - 1$$

6) حاصل قسمة دالتين :

$$f(x)=\frac{g(x)}{h(x)} \quad \Rightarrow \quad f'(x)=\frac{h(x).g'(x)-g(x).h'(x)}{[h(x)]^2}$$

Example :

$$f(x)=\frac{x^2-2}{x^2+3}$$

$$\Rightarrow \quad f'(x)=\frac{(x^2+3)(2x)-(x^2-2)(2x)}{(x^2+3)^2}$$

$$=\frac{2x^3+6x-2x^3+4x}{(x^2+3)^2}$$

$$=\frac{10x}{(x^2+3)^2}$$

---

7) قاعدة السلسلة :

$$f(x)=[g(x)]^n \quad \Rightarrow \quad f'(x)=n[g(x)]^{(n-1)}.g'(x)$$

Examples :

1) $f(x)=(x^3-2x+1)^4$

$$\Rightarrow \quad f'(x)=4(x^3-2x+1)^3.(3x^2-2)$$

---

2) $f(x)=(3-x^2)^6$

$$\Rightarrow \quad f'(x)=6(3-x^2)^5.(-2x)$$

---

3) $f(x)=\sqrt{x^5-7} \quad =(x^5-7)^{\frac{1}{2}}$

$$\Rightarrow \quad f'(x)=\frac{1}{2}(x^5-7)^{\frac{-1}{2}}.(5x^4)$$

$$=\frac{5x^4}{2(x^5-7)^{\frac{1}{2}}} \quad =\frac{5x^4}{2\sqrt{x^5-7}}$$

$$y=\sqrt{x^5-7}$$

$$\rightarrow \quad y'=\frac{5x^4}{2\sqrt{x^5-7}}$$

$y=\sqrt{f(x)}$	$y'=\dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$
$y=\sqrt{x^5}$	$y'=\dfrac{5x^4}{2\sqrt{x^5}}$
$y=\sqrt{x^3+1}$	$y'=\dfrac{3x^2}{2\sqrt{x^3+1}}$
$y=\sqrt{x^4+5x}$	
$y=\sqrt{x^3+7x+1}$	
$y=\sqrt{5x^2-6x-3}$	
$y=\sqrt{x^7+x-1}$	
$y=\sqrt{x^4+\sqrt{x}+5x}$	

$\frac{c}{(y)^n}$: c = constant	$\frac{-nc}{(y)^{n+1}} \cdot y'$
$\frac{2}{(x)^5}$	$\frac{-10}{x^6}$
$\frac{-7}{(x)^3}$	$\frac{21}{x^4}$
$\frac{2}{(x^2+1)^3}$	$\frac{-6}{(x^2+1)^4} \cdot (2x)$
$\frac{-5}{(x^7-2)^4}$	$\frac{20}{(x^7-2)^5} \cdot (7x^6)$
$\frac{1}{(x)^8}$	
$\frac{2}{(x)^3}$	
$\frac{-4}{(x)^6}$	
$\frac{5}{(x^3+1)^4}$	
$\frac{-2}{(x^4+8)^6}$	

H.W. جد المشتقة الاولى للدوال التاليـــــة :

1) $f(x)=4x^3+3\sqrt{x}-3x+9$

2) $f(x)=\dfrac{5}{x}+\dfrac{2}{x^3}+\dfrac{3}{x^4}+\dfrac{1}{x^7}$

3) $f(x)=\dfrac{4x-1}{x^2+1}$

4) $f(x)=\dfrac{x^5+6x^2-8}{7}$

5) $f(x)=\dfrac{2}{(x^4+7x+8)^3}$

6) $f(x)=\sqrt{x^5+7x-1}$

---

7) $f(x)=\sqrt[3]{(x^3-5x+2)^4}$

---

8) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[5]{x^2}}$

---

9) $f(x)=x^4+\dfrac{6}{x^5}+\sqrt{x^5+3x+5}$

---

10) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^7+4x+1}}$

---

11) $f(x)=(x^4+\dfrac{2}{x^3})^7+\sqrt[5]{(x^2+5)^3}$

قوانين تحويلات الدوال الدائرية

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$\tan^2 x + 1 = \sec^2 x$

$\cot^2 x + 1 = \csc^2 x$

$\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

$\cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$

$\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$

$\csc x = \dfrac{1}{\sin x}$

$\cot x = \dfrac{1}{\tan x}$

قوانين ضعف الزاوية

$\sin 2x = 2\sin x \cos x$	$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$	
	$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$	$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$
$\sin 6x = 2.\sin 3x.\cos 3x$	$\cos 4x = \cos^2 2x - \sin^2 2x$	
$\sin 8x = 2.\sin 4x.\cos 4x$	$\cos 6x = \cos^2 3x - \sin^2 3x$	
$\sin 10x = 2.\sin 5x.\cos 5x$	$\cos 12x = \cos^2 6x - \sin^2 6x$	
$\sin 14x = 2.\sin 7x.\cos 7x$	$\cos 20x = \cos^2 10x - \sin^2 10x$	
$\sin 4x =$	$\cos 8x =$	
$\sin 12x =$	$\cos 18x =$	
$\sin 16x =$	$\cos 30x =$	
$\sin 20x =$	$\cos 100x =$	

مشتقات الدوال الدائرية

$f(x)$	$f'(x)$
$\sin u$	$\cos u.u'$
$\tan u$	$\sec^2 u.u'$
$\sec u$	$\sec u.\tan u.u'$

$f(x)$	$f'(x)$
$\cos u$	$-\sin u.u'$
$\cot u$	$-\csc^2 u.u'$
$\csc u$	$-\csc u.\cot u.u'$

Examples :

1) $y=\sin 3x \quad \rightarrow \quad y'=\cos 3x.(3)=3.\cos 3x$

2) $y=\tan 5x \quad \rightarrow \quad y'=5.\sec^2 5x$

3) $y=\csc 6x \quad \rightarrow \quad y'=-6.\csc 6x.\cot 6x$

4) $f(x)=\sin x^2 \quad \rightarrow \quad f'(x)=2x.\cos x^2$

5) $f(x)=\sin\sqrt{x} \quad \rightarrow \quad f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}.\cos\sqrt{x}$

6) $f(x)=\sqrt{\sin x} \quad \rightarrow \quad f'(x)=\dfrac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$

7) $f(x)=\sin^3 x=(\sin x)^3 \quad \rightarrow \quad f'(x)=3(\sin x)^2\cos x$

8) $f(x)=\cos^2 5x=(\cos 5x)^2 \quad \rightarrow \quad f'(x)=2(\cos 5x).(-\sin 5x).5$

$=-10.\cos 5x.\sin 5x$

9) $f(x)=\tan^2 x=(\tan x)^2 \quad \rightarrow \quad f'(x)=2(\tan x).\sec^2 x$

10) $f(x)=\sin x.\tan x \quad \rightarrow \quad f'(x)=\sin x.(\sec^2 x)+\tan x.(\cos x)$

H.W. جد المشتقة الاولى للدوال التاليـــــة :

1) $y = \sin 3x + \cos 4x + \tan 5x$

2) $y = \sin^3 x + \cos^4 x + \tan^5 x$

3) $y = \sec^5 2x$

4) $y = \sqrt{\cot 5x}$

5) $y = \sqrt[3]{\sec 3x}$

6) $y = \dfrac{1}{\sqrt[5]{\csc^4 x}}$

7) $y = \sin 3x . \cos 5x$

8) $y = 8 \sin 5x . \cos 5x$

9) $y = 4 \sin^2 5x . \cos^2 5x$

10) $y = \cos^4 7x - \sin^4 7x$

11) $y = \dfrac{\sin 10x}{\cos^2 5x}$

المعدلات الزمنية المرتبطة

يعتبر هذا الموضوع إحدى تطبيقات الاشتقاق الضمني وهو يتعلق بمتغيرات (مسافات ، زوايا ، مساحات ، حجوم ... الخ) تتغير بمرور الزمن يعطى معلومات عن بعضها... ويطلب إيجاد معلومات عن البعض الآخر .

مثـــــال : بالون كروي يعبأ بالهواء فيزداد حجمه و مساحة سطحه وكذلك نصف قطره بمرور الزمن ، فإذا رمزنا لحجم البالون بـ (v) ومساحته السطحية بـ (A) ونصف قطره بـ (r) فزيادة حجمه يكون $(\frac{dv}{dt})$ وزيادة مساحته السطحية تكون $(\frac{dA}{dt})$ وزيادة نصف قطره يكون $(\frac{dr}{dt})$

ملاحظة : إذا كان هناك نقصان بدل الزيادة في متغير معين فتكون إشارة مشتقته سالبة

خطوات حل أسئلة المعدلات الزمنية :

1) المعطيـات : معرفة المعطيات وتحديد مطلوب السؤال وكتابـة كل منهم على شكل رموز أو أعداد (استخدام الرسم التوضيحي إن لزم الأمر)

2) العلاقـــة : حيث نكتب معادلة تعبر عن العلاقة بين المتغيرات والثوابت وذلك مما نحفظه من قوانين رياضية ... مثـل قوانين المساحات , الحجوم , تشابه المثلثين , البعد بين نقطتين , نظرية فيثاغورس وظل الزاوية ... الـخ

3) الاختـــزال : أحياناً نستطيع اختزال المتغيرات في المعادلة السابقة ويتم ذلك بايجاد علاقة أخرى تجمع بين جزء المتغيرات والتعويض عن أحدها بدلالة الآخرى في العلاقة السابقة

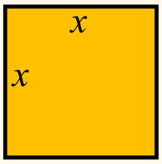
4) الاشتقــاق : حيث نشتق المعادلة بعد اختزالها بالنسبة للزمن (t)

5) التعويـــض : بعض الثوابت تعوض قبل الاشتقاق والبعض الآخر بعد الاشتقاق ، والتي تكون بعد الاشتقاق تذكر في السؤال على شكل (عندما تكون ...) أو (في اللحظة التي تكون فيها ...)

قوانين المساحات والحجوم

1) الأشكال الثنائية الأبعاد (المسطحة) : *Two - Dimensional Shapes*

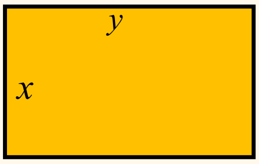
المربـــع (Square) :



$A = x^2$ (المساحة)

$P = 4x$ (المحيط)

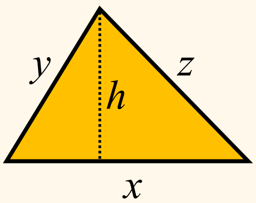
المستطيل (Rectangle) :



$A = x.y$ (المساحة)

$P = 2(x + y)$ (المحيط)

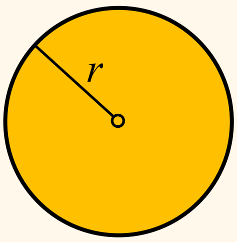
المثـــلث (Triangle) :



$A = \frac{1}{2} x.h$ (المساحة)

$P = x + y + z$ (المحيط)

الدائـــرة (Circle) :

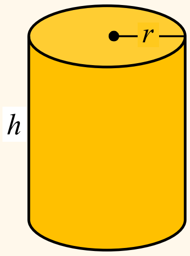


$A = r^2.\pi$ (المساحة)

$P = 2r.\pi$ (المحيط)

2) الأشكال الثلاثية الأبعاد (المجسمة) : Three-Dimensional Shapes

الاسطوانة (Right Circular Cylinder) :



الحجم = مساحة القاعدة × الإرتفاع

$$\boxed{V = \pi . r^2 h}$$

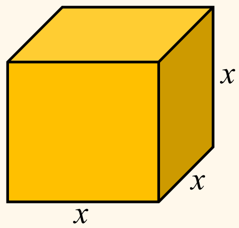
المساحة الجانبية = محيط القاعدة × الإرتفاع

$$A_L = 2\pi . rh$$

المساحة السطحية = المساحة الجانبية + (2 × مساحة القاعدة)

$$A_T = 2\pi . rh + 2\pi . r^2$$

المكعب (Cube) :



الحجم = (طول الضلع)^3

$$\boxed{V = x^3}$$

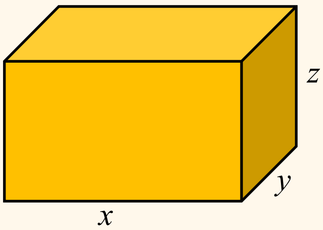
المساحة الجانبية = 4 (طول الضلع)^2

$$A_L = 4x^2$$

المساحة السطحية = 6 (طول الضلع)^2

$$A_T = 6x^2$$

المتوازي السطوح المستطيلة (Parallelepiped) :



الحجم = مساحة القاعدة × الإرتفاع

$$\boxed{V = x.y.z}$$

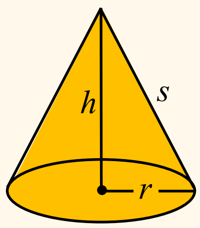
المساحة الجانبية = محيط القاعدة × الإرتفاع

$$A_L = 2(x + y)z$$

المساحة السطحية = المساحة الجانبية + (2 × مساحة القاعدة)

$$A_T = A_L + 2xy$$

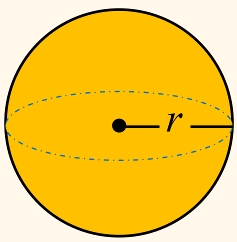
المخروط (Right Circular Cone) :



(الحجم)

$$\boxed{V = \frac{\pi}{3} r^2 . h}$$

الكرة (Sphere) :



(الحجم)

$$\boxed{V = \frac{4}{3} \pi . r^3}$$

(المساحة السطحية)

$$A = 4\pi . r^2$$

مثال : خزان مملوء بالماء على شكل متوازي سطوح مستطيلة قاعدته مربعة طولها $(2m)$ يتسرب منه الماء بمعدل $(0.4 m^3 / h)$ ، جد معدل انخفاض الماء في الخزان عند أي زمن (t)

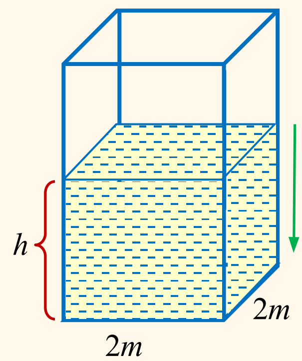
الحل : نفرض حجم الماء في الخزان v = وارتفاعه h =

مساحة القاعدة × الارتفاع

$$v = 2^2 . h = 4h$$

$$\frac{dv}{dt} = 4\frac{dh}{dt}$$

$$\boxed{\frac{dv}{dt} = -0.4}$$



$$-0.4 = 4\frac{dh}{dt}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dh}{dt} = -0.1 \ m/h$$

∴ معدل انخفاض الماء في الخزان = $0.1 \ m/h$

مثال : صفيحة مستطيلة من المعدن مساحتها $(96 cm^2)$ يتمدد طولها بمعدل $(2 cm/s)$ بحيث تبقى مساحتها ثابتة ، جد معدل النقصان في عرضها وذلك عندما يكون عرضها $(8 cm)$

الحل : نفرض طول المستطيل = x

ونفرض عرض المستطيل = y

معدل تغير الطول ($\frac{dx}{dt} = 2 \ cm/s$)

معدل تغير العرض ($\frac{dy}{dt} = ?$)

$$x.y = 96$$

$$x.\frac{dy}{dt} + y.\frac{dx}{dt} = 0$$

$$when \quad y = 8 \quad \Rightarrow \quad x(8) = 96 \quad \Rightarrow \quad x = 12$$

$$12 \ (\frac{dy}{dt}) + 8(2) = 0$$

$$12 \ (\frac{dy}{dt}) = -16$$

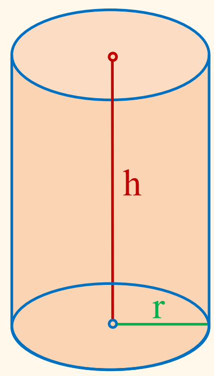
$$\frac{dy}{dt} = \frac{-16}{12} = -\frac{4}{3} \ cm/s$$

∴ معدل النقصان في عرضها = $\frac{4}{3} \ cm/s$

H.W. صفيحة مستطيلة من المعدن مساحتها $(96\,cm^2)$ يتمدد عرضها بمعدل $(2\,cm/s)$ بحيث تبقى مساحتها ثابتة ، جد معدل تغير طولها وذلك عندما يكون طولها $12\,cm$

مثال : اسطوانة دائرية قائمة يزداد ارتفاعها بمعدل $0.5\ cm/s$ بحيث يبقى الحجم ثابتاً ويساوي $320\pi\ cm^3$ ، جد معدل التغير في نصف قطرها عندما يكون الارتفاع $5\ cm$

الحل : نفرض نصف قطره = r وارتفاعه = h وحجم الاسطوانة (ثابت) = v = 320π



$$\frac{dh}{dt} = 0.5\ cm/s$$

$$\frac{dr}{dt} = ?$$

$$v = r^2 h\pi$$

$$r^2 h\pi = 320\pi \quad]\div\pi$$

$$r^2 h = 320$$

$$r^2 . \frac{dh}{dt} + h\ .\ (2r)\frac{dr}{dt} = 0$$

$$when\ \ h = 5 \ \rightarrow\ r^2 \times 5 = 320$$

$$\rightarrow\ r^2 = 64 \ \rightarrow\ r = 8$$

$$(8)^2 .(0.5) + 5.(16)\frac{dr}{dt} = 0$$

$$32 + 80\frac{dr}{dt} = 0$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{-32}{80} = \frac{-2}{5}\ \ cm/s$$

H.W. اسطوانة دائرية قائمة يزداد ارتفاعها بمعدل $3\ cm/s$ بحيث يبقى الحجم ثابتاً ويساوي $180\pi\ cm^3$ ، جد معدل التغير في نصف قطرها عندما يكون الارتفاع $5\ cm$

مثال : سلم طوله $(10m)$ يرتكز بطرفه السفلي على أرض أفقية وطرفه العلوي على حائط رأسي ، فإذا كان طرفه الأسفل ينزلق مبتعداً عن الحائط بمعدل $(2\,m/s)$ عندما يكون الطرف الأسفل على بعد $(8m)$ عن الحائط جد :

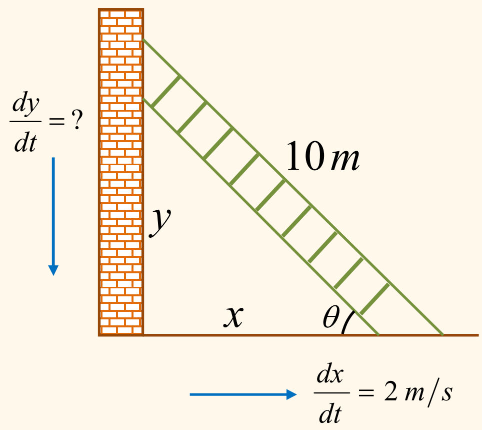
1) معدل انزلاق الطرف العلـــــــوي
2) سرعة تغير الزاوية بين السلم والأرض

المطلوب : 1) $\frac{dy}{dt}$ 2) $\frac{d\theta}{dt}$

الحل : نفرض بعد طرفه الأسفل عن الحائط = x

وبعد طرفه العلـــــوي عن الأرض = y

والزاوية بين السلـــــــم والأرض = θ



$$x^2+y^2=10^2$$

$$2x\frac{dx}{dt}+2y\frac{dy}{dt}=0 \qquad \}\div 2$$

$$x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}=0 \quad .... (1)$$

$When \quad x=8:$

$\Rightarrow \quad x^2+y^2=100$

$\Rightarrow \quad 64+y^2=100$

$\Rightarrow \quad y^2=36 \quad \Rightarrow \quad y=6$

$$8(2)+6\frac{dy}{dt}=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dt}=\frac{-16}{6}=\frac{-8}{3}\,m/s$$

$\therefore$ معدل انزلاق الطرف العلوي = $\frac{8}{3}\,m/s$

$$sin\theta=\frac{y}{10} \quad , \quad cos\theta=\frac{x}{10}$$

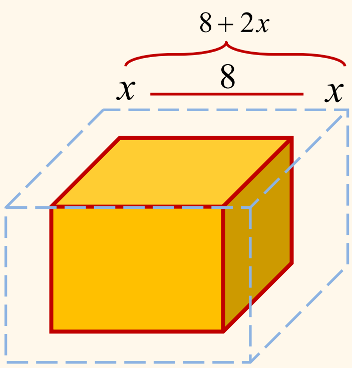
$$cos\theta.\frac{d\theta}{dt}=\frac{1}{10}.\frac{dy}{dt} \quad \to \quad \frac{x}{10}.\frac{d\theta}{dt}=\frac{1}{10}.\frac{dy}{dt}$$

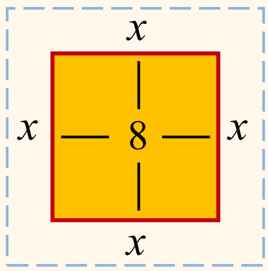
$$x=8 \ , \ \frac{dy}{dt}=\frac{-8}{3} \quad \to \quad \frac{8}{10}.\frac{d\theta}{dt}=\frac{1}{10}.\frac{-8}{3} \quad \to \quad \frac{d\theta}{dt}=\frac{-1}{3}\,rad/sec$$

H.W. سلم طوله $(5m)$ يرتكز بطرفه الأسفل على أرض أفقية وطرفه الأعلى على حائط رأسي ، فإذا كان طرفه الأسفــل ينزلق مبتعداً عن الحائط بمعدل $(0.6\, m/s)$ ، جد سرعة انزلاق طرفه الأعلى على الحائط عندما يكون على بعد $(3m)$ من الأرض

مثال : مكعب صلد طول حرفه $(8cm)$ مغطى بطبقة من الجليد بحيث شكله يبقى مكعباً ، فإذا بدأ الجليد بالذوبان بمعدل $(6\,cm^3/s)$ فجد معدل النقصان بسمك الجليد في اللحظة التي يكون فيها هذا السمك $(1cm)$

الحل : نفرض سمك الجليد $= x$





حجم المكعب الصلد $= v_1 = (8)^3$

حجم المكعب مع الجليد $= v_2 = (8+2x)^3$

حجم الجليد $(v) = v_2 - v_1$

$$v = (8+2x)^3 - (8)^3$$

$$\frac{dv}{dt} = 3(8+2x)^2(2)\frac{dx}{dt} - 0$$

$$-6 = 6(8+2(1))^2\frac{dx}{dt}$$

$$-6 = 600 \times \frac{dx}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = \frac{-6}{600} = \frac{-1}{100} = -0.01\ cm/s$$

$\therefore$ معدل النقصان بسمك الجليد $= 0.01\ cm/s$

H.W. كرة حديدية نصف قطرها $(4cm)$ مغطاة بطبقة من الجليد ، فاذا كان الجليد يذوب بمعدل $(10\,cm^3/s)$ جد معدل النقصان بسمك الجليـد في اللحظة التي يكون فيها سمك الجليد $(2cm)$

H.W. كرة صلدة نصف قطرها $(3cm)$ مغطاة بطبقة من الجليد فاذا بدأ الجليد بالذوبان بمعدل $(4\,cm^3/s)$ جد معدل النقصان بسمك الجليد في اللحظة التي يكون فيها سمك الجليد $(1cm)$

مثال : مرشح مخروطي قاعدتـــه أفقية ورأسه للأسفـــل ، ارتفاعه $(24\,cm)$ وطول قطـــر قاعدته $(16\,cm)$ ، يصب فيه سائل بمعدل $(5\,cm^3/s)$ بينما يتسرب منه السائل بمعدل $(1\,cm^3/s)$ ، جد معدل تغير عمق السائل في اللحظة التي يكون فيها عمق السائل $(12\,cm)$

$$\boxed{\frac{dv}{dt}=5-1=4\,cm^3/s}$$

الحل : نفرض نصف قطر الماء (r) وارتفاعه (h) وحجمه (v)

$$\tan\theta=\frac{r}{h}\quad,\quad \tan\theta=\frac{\cancel{8}}{\cancel{24}}=\frac{1}{3}$$

$$\frac{r}{h}=\frac{1}{3}\Rightarrow 3r=h\Rightarrow \boxed{r=\frac{h}{3}}\,......(2)$$

$$\boxed{v=\frac{1}{3}\pi r^2h}\,......(1)$$

$$\xrightarrow{(2)\ in\ (1)}\quad v=\frac{1}{3}\pi\left(\frac{h^2}{9}\right)h$$

$$v=\frac{\pi}{27}h^3$$

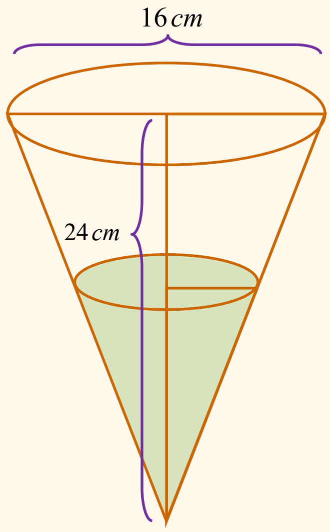
$$\frac{dv}{dt}=\frac{\pi}{\cancel{27}}.\cancel{3}h^2.\frac{dh}{dt}$$

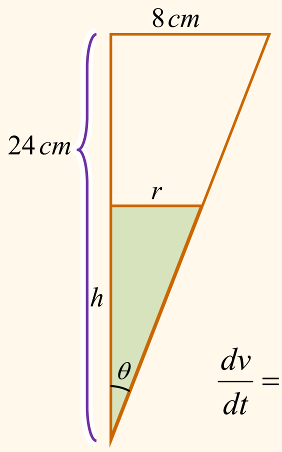
$$4=\frac{\pi}{9}(12)^2\frac{dh}{dt}$$

$$4=\frac{\pi}{9}(144)\frac{dh}{dt}$$

$$4=(16\pi)\frac{dh}{dt}$$

$$\frac{dh}{dt}=\frac{1}{4\pi}\ cm/s$$





$$\frac{dv}{dt}=4$$

$$\frac{dh}{dt}=?\quad when\quad h=12$$

H.W. مرشح مخروطي قاعدتـــه أفقية ورأسه للأسفل ، ارتفاعه $(20cm)$ وطول نصف قطر قاعدته $(10cm)$ ، يصب فيه سائل بمعدل $(5\,cm^3/s)$ بينما يتسرب منه السائل بمعدل $(2\,cm^3/s)$ ، جد معدل تغير عمق السائل في اللحظة التي يكون فيها عمق السائل $(12cm)$

H.W. يراد ملئ خزان على شكل مخروط دائري قائم رأسه إلى الأسفـل ، طول نصف قطر قاعدته يساوي $(5\,m)$ والارتفاع يساوي $(10m)$ ، فإذا كان معدل ملئ الماء $(2\,m^3\,/\,\text{min})$ ، جد سرعة ارتفاع الماء عندما يكون ارتفاع الماء يساوي $(6\,m)$

مثال : لتكن M نقطة متحركة على منحني القطع المكافئ $y^2 = 4x$ بحيث يكون معدل ابتعادها عن النقطة $(7,0)$ يساوي $0.2\ unit/s$ ، جد المعدل الزمني لتغير الإحداثي السيني للنقطة M عندما يكون $x=4$

الحل : لتكن S البعد بين النقطة $M(x,y)$ والنقطة $(7,0)$

$$S = \sqrt{(x-7)^2 + (y-0)^2}$$

$$\boxed{S = \sqrt{x^2 - 14x + 49 + y^2}} \quad ......\ (1)$$

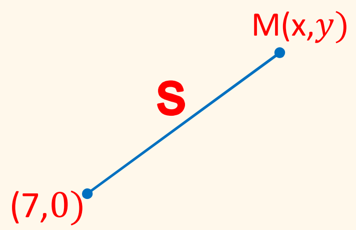
$$\boxed{y^2 = 4x} \quad ......\ (2)$$

بتعويض معادلة (2) في معادلة (1) :

$$S = \sqrt{x^2 - 14x + 49 + 4x}$$

$$= \sqrt{x^2 - 10x + 49}$$

$$\frac{dS}{dt} = \frac{2x-10}{2\sqrt{x^2-10x+49}} \cdot \frac{dx}{dt}$$



$$\because \quad \boxed{\frac{dS}{dt} = 0.2 \quad , \quad x = 4}$$

$$\Rightarrow \quad 0.2 = \frac{8-10}{2\sqrt{16-40+49}} \cdot \frac{dx}{dt}$$

$$\Rightarrow \quad 0.2 = \frac{-2}{2\sqrt{25}} \cdot \frac{dx}{dt}$$

$$\Rightarrow \quad 0.2 = \frac{-2}{10} \cdot \frac{dx}{dt}$$

$$\Rightarrow \quad 0.2 = -0.2 \cdot \frac{dx}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = -1\ unit/s$$

- القطع المكافئ في هذا السؤال مجرد علاقة تربط الـ(x) مع الـ(y)
- عبارة (الابتعاد بين النقطتين) تعني تغير البعد بينهما أي أن العلاقة تكون قانون البعد بين نقطتين :

$$S = \sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2}$$

H.W. لتكـــن M نقطة متحركة على منحني القطع المكافئ $y^2 = 7x$ بحيث يكون معدل ابتعادها عن النقطة $(6,0)$ يســـاوي $3\ unit/s$ ، جد المعدل الزمني لتغيــر الإحداثي السيني للنقطة M عندما يكون $x = 5$

حلول تمارين (2-3)

س1) سلم يستند طرفه الأسفل على أرض أفقية وطرفه الأعلى على حائط رأسي فاذا أنزلق الطرف الأسفل مبتعداً عن الحائط بمعدل (2 m/s) ، فجد معدل انزلاق الطرف العلوي عندما يكون قياس الزاوية بين السلم والأرض تساوي $\frac{\pi}{3}$

الحل :

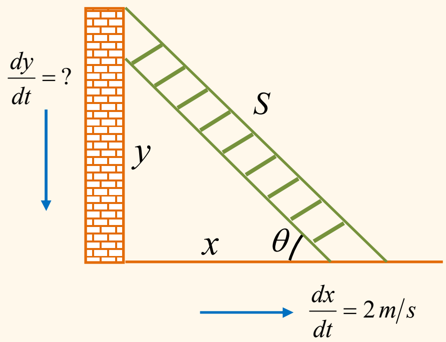
Note

$$\tan\frac{\pi}{3} = \frac{\sin\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}} = \frac{\sqrt{3}/2}{1/2} = \sqrt{3}$$

نفرض بعد طرفه الأسفل عن الحائط = x

نفرض بعد طرفه الأعلى عن الأرض = y

نفرض طول السلم = s



$$x^2 + y^2 = s^2$$

$$2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 0 \qquad]\div 2$$

$$x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} = 0$$

$$\tan\frac{\pi}{3} = \frac{y}{x} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{y}{x} \Rightarrow y = \sqrt{3}\,x$$

$$x(2) + \sqrt{3}\,x\frac{dy}{dt} = 0$$

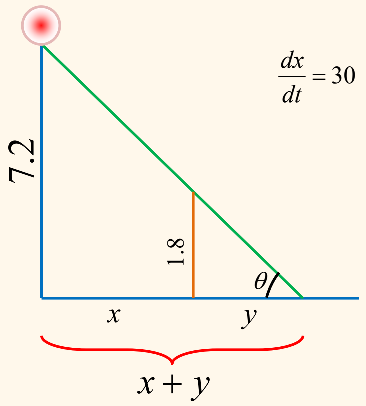
$$x\left[2 + \sqrt{3}\frac{dy}{dt}\right] = 0$$

$$\because\ x \neq 0 \rightarrow 2 + \sqrt{3}\frac{dy}{dt} = 0 \rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{-2}{\sqrt{3}}\ m/s$$

H.W. سلم يستند طرفه الأسفـــل على أرض أفقيــة وطرفه الأعلى على حائط رأسي فاذا أنزلق الطرف الأسفل مبتعداً عن الحائط بمعدل (2 m/s) ، فجد معدل انزلاق الطرف العلوي عندما يكون قياس الزاوية بين السلم والأرض تساوي $\frac{\pi}{4}$

س2) عمود طوله $(7.2m)$ في نهايته مصباح ، يتحرك رجل طوله $(1.8m)$ مبتعداً عن العمود وبسرعة $(30m/\min)$ جد معدل تغير طول ظل الرجل

الحل : نفرض البعد بين الرجل والعمود = x وطول ظل الرجل = y



$$\tan\theta=\frac{7.2}{x+y} \quad , \quad \tan\theta=\frac{1.8}{y}$$

$$\Rightarrow \frac{7.2}{x+y}=\frac{1.8}{y}$$

$$\Rightarrow 7.2y=1.8x+1.8y$$

$$\Rightarrow 5.4y=1.8x \quad]\div(1.8)$$

$$\Rightarrow 3y=x$$

$$\Rightarrow 3\frac{dy}{dt}=\frac{dx}{dt} \quad \Rightarrow 3\frac{dy}{dt}=30 \quad \Rightarrow \frac{dy}{dt}=10m/\min$$

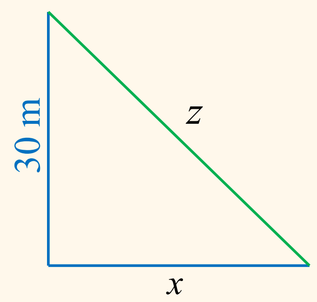
H.W. عمود طوله $(6.4\ m)$ في نهايته مصباح ، يتحرك رجل طوله $(1.6\ m)$ مبتعداً عن العمود وبسرعة $(30\ m/\min)$ جد معدل تغير طول ظل الرجل

H.W. فنار ميناء ارتفاعه $(20m)$ يعلوه مصباح كبير ، تحركت سفينةارتفاعها $(5m)$ مبتعدة عن الفنار بسرعة $(50km/h)$ جد تغير طول ظل السفينة على سطح البحر

مثال : وقف صقر على قمة شجرة ارتفاعها $(30m)$ ، لاحظ على الأرض أرنباً فطار نحوه بسرعة $(80m/s)$ ، جد معدل تغير موقع الأرنب إذا كان بعده عن الشجرة $(40m)$

الحل : نفرض البعد بين الأرنب والشجرة $= x$

ونفرض البعد بين الأرنب والصقر $= z$



$\frac{dz}{dt} = 80 \quad , \quad \frac{dx}{dt} = ?$

$$x^2 + (30)^2 = z^2$$

$$x^2 + 900 = z^2$$

$$2x.\frac{dx}{dt} + 0 = 2z.\frac{dz}{dt} \qquad]\div 2$$

$$x.\frac{dx}{dt} = z.\frac{dz}{dt}$$

$$when \quad x = 40 \rightarrow (40)^2 + 900 = z^2 \rightarrow z = 50$$

$$40.\frac{dx}{dt} = 50 \times 80 \rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{4000}{40} = 100 \ m/s$$

س3) لتكن M نقطة تتحرك على القطع المكافئ $y=x^2$ ، جد إحداثيي النقطة M عندما يكون المعدل الزمني لابتعادها عن النقطة $(0,\frac{3}{2})$ يساوي ثلثي المعدل الزمني لتغير الإحداثي الصادي للنقطة M

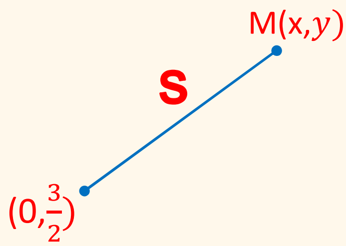
$$\boxed{\frac{dS}{dt}=\frac{2}{3}.\frac{dy}{dt}}$$

الحل : نفرض البعد بين النقطة $M(x,y)$ والنقطة $(0,\frac{3}{2})$ هــو S :

$$S=\sqrt{(x-0)^2+(y-\frac{3}{2})^2}=\sqrt{x^2+y^2-3y+\frac{9}{4}}=\sqrt{y+y^2-3y+\frac{9}{4}}$$

$$=\sqrt{y^2-2y+\frac{9}{4}}$$

$$\frac{dS}{dt}=\frac{2y-2}{2.\sqrt{y^2-2y+\frac{9}{4}}}.\frac{dy}{dt}\quad=\quad\frac{\cancel{2}(y-1)}{\cancel{2}\sqrt{y^2-2y+\frac{9}{4}}}.\frac{dy}{dt}$$



$$\frac{dS}{dt}=\frac{(y-1)}{\sqrt{y^2-2y+\frac{9}{4}}}.\frac{dy}{dt}$$

$$\boxed{\frac{dS}{dt}=\frac{2}{3}.\frac{dy}{dt}}\Rightarrow\frac{2}{3}.\frac{\cancel{dy}}{\cancel{dt}}=\frac{(y-1)}{\sqrt{y^2-2y+\frac{9}{4}}}.\frac{\cancel{dy}}{\cancel{dt}}\Rightarrow\frac{(2)^2}{(3)^2}=\frac{(y-1)^2}{\left(\sqrt{y^2-2y+\frac{9}{4}}\right)^2}$$

$$\frac{4}{9}=\frac{(y^2-2y+1)}{y^2-2y+\frac{9}{4}}$$

$$9y^2-18y+9=4y^2-8y+9$$

$$5y^2-10y=0$$

$$5y(y-2)=0$$

$either\quad 5y=0\Rightarrow y=0$ (يهمل)

$or\quad \boxed{y=2}\Rightarrow x^2=2\Rightarrow\boxed{x=\pm\sqrt{2}}$

$\therefore$ النقطتان هما : $M(\pm\sqrt{2},2)$

س4) جد النقط التي تنتمي للدائرة $x^2+y^2+4x-8y=108$ والتي عندها يكون المعدل الزمني لتغير x يساوي المعدل الزمني لتغير y بالنسبة للزمن t

الحل :

$$x^2+y^2+4x-8y=108$$

$$2x\frac{dx}{dt}+2y\frac{dy}{dt}+4\frac{dx}{dt}-8\frac{dy}{dt}=0 \qquad \}\div 2$$

$$x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}+2\frac{dx}{dt}-4\frac{dy}{dt}=0 \qquad \because \frac{dx}{dt}=\frac{dy}{dt}$$

$$x\frac{dy}{dt}+y\frac{dy}{dt}+2\frac{dy}{dt}-4\frac{dy}{dt}=0$$

$$\frac{dy}{dt}\,(x+y+2-4)=0$$

$$\frac{dy}{dt}\neq 0 \quad\Rightarrow\quad x+y-2=0 \quad\Rightarrow\quad \boxed{y=2-x} \;\ldots(1)$$

$$x^2+(2-x)^2+4x-8(2-x)=108$$

$$x^2+4-4x+x^2+4x-16+8x-108=0$$

$$2x^2+8x-120=0 \qquad \}\div 2$$

$$x^2+4x-60=0$$

$$(x+10)(x-6)=0$$

$$either \quad x=-10 \xrightarrow{put\ in\ (1)} y=12$$

$$or \quad x=6 \xrightarrow{put\ in\ (1)} y=-4$$

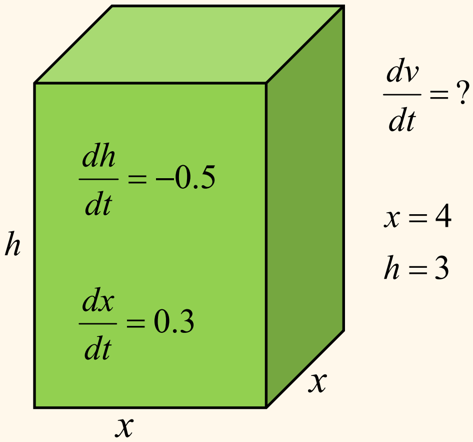
$\therefore$ **النقطتان هما :** $(-10,12)\ ,\ (6,-4)$

H.W. جد نقطة أو أكثر على الدائرة التي معادلتها $x^2+y^2-4x=4$ والتي عندها يكون معدل ازديـــاد x يساوي معدل ازديـــاد y بالنسبة للزمن t

H.W. جد نقطة أو أكثر على الدائرة التي معادلتها $(x-3)^2+y^2=32$ والتي عندها يكون معدل ازديـــاد x يساوي معدل ازديـــاد y بالنسبة للزمن t

س5) متوازي سطوح مستطيلة أبعاده تتغير بحيث تبقى قاعدته مربعة الشكل ، يزداد طول ضلع القاعدة بمعدل $(0.3\,cm/s)$ وارتفاعه يتناقص بمعدل $(0.5\,cm/s)$ ، جد معدل تغيـــر الحجم عندما يكون طول ضلع القاعدة $(4\,cm)$ والارتفاع $(3\,cm)$

الحل : نفرض طول القاعدة $x=$ ونفرض الارتفاع $h=$ ونفرض الحجم $v=$



$$V=x^2h$$

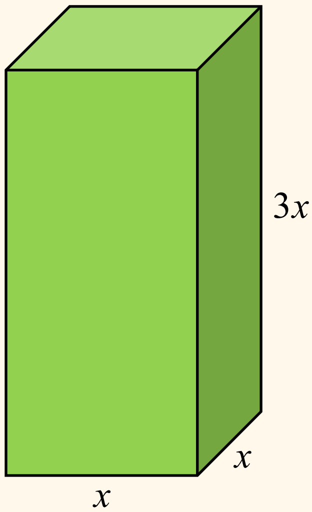
$$\frac{dV}{dt}=x^2\frac{dh}{dt}+h(2x)\frac{dx}{dt}$$

$$=(4)^2(-0.5)+3(8)(0.3)$$

$$=-8+7.2 \qquad =-0.8\ cm^3/s$$

وزاري : متوازي مستطيلات قاعدته مربعة ارتفاعها ثلاثة أمثال طول القاعـــــدة يتمدد بالحرارة ، جد معدل التغير في حجمه ومساحته السطحية في اللحظة التي يكون طول القاعدة $(8\,cm)$ علما أن معدل التغير في طول القاعدة $\frac{1}{4}cm/\sec$

الحل : نفرض طول القاعدة (x) فيكون الارتفاع $(3x)$ والحجم (v) والمساحة السطحية (A)



$$v=(x).(x).(3x)=3x^3$$

$$\frac{dv}{dt}=9x^2.\frac{dx}{dt}=9.(8)^2.(\frac{1}{4})=9\times 64\times\frac{1}{4}=144\,cm^3/\sec$$

المساحة السطحية = 2 (مس القاعدة) + المساحة الجانبية

المساحة السطحية = 2 (مس القاعدة) + (محيط القاعدة)*(الارتفاع)

$$A=2(x^2)+(4x)*(3x)$$
$$A=2x^2+12x^2$$
$$A=14x^2$$

$$\frac{dA}{dt}=28x\frac{dx}{dt}=28x\frac{dx}{dt}=28\times 8\times\frac{1}{4}=56\,cm^2/sec$$

وزاري : متوازي مستطيلات قاعدته مربعة يزداد طول ضلعه بمعدل $(0.4cm/s)$ بحيث الحجم يبقى ثابت ويساوي $(640cm^3)$ في اللحظة التي يكون فيها الارتفاع $(10cm)$ ، جد معدل تغير الارتفاع

الحل : نفرض طول القاعدة = x ونفرض الارتفاع = h ونفرض الحجم = v

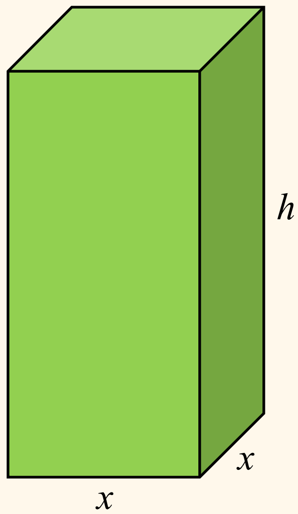
$$x^2.h = 640$$

$$x^2.\frac{dh}{dt} + h.(2x)\frac{dx}{dt} = 0$$

$$when\ h = 10 \quad \rightarrow \quad x^2 \times 10 = 640$$

$$\rightarrow \quad x^2 = 64$$

$$\rightarrow \quad x = 8$$



$$(8)^2.\frac{dh}{dt} + 10.\times 16 \times 0.4 = 0$$

$$64.\frac{dh}{dt} + 64 = 0$$

$$\frac{dh}{dt} = -1\ cm^3/\sec$$

H.W. متوازي سطوح مستطيلة قاعدتـــــه مربعة الشكل يزداد طول ضلع القاعدة بمعدل $(0.5 cm/s)$ بحيث يبقى حجمه دائما مساويا الى $(48 cm^3)$ جد معدل تغير الارتفاع في اللحظة التي يكون فيها الارتفاع $(3cm)$

وزاري : من نقطة ما تحركت سيارتيـــن الأولى باتجاه الشمال بسرعة $(80k/h)$ والثانية باتجاه الشرق وبسرعة $(60k/h)$ جد معدل ابتعاد السيارتيـــن عن بعضهما وذلك بعد $(1/4h)$ من بدأ الحركة

الحل :

نفرض البعد بين نقطة البدأ والسيارة المتجهة شرقاً = x

نفرض البعد بين نقطة البدأ والسيارة المتجهة شمالاً = y

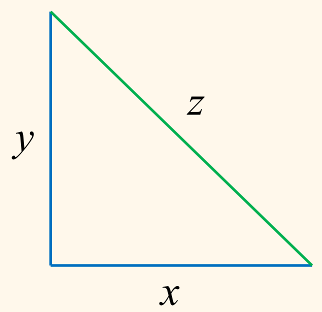
نفرض البعد بين السيارتين = z

$$x = \frac{1}{4} \times 60 = 15 \quad , \quad y = \frac{1}{4} \times 80 = 20$$

$$z^2 = x^2 + y^2 \rightarrow z^2 = 225 + 400 \rightarrow z^2 = 625 \rightarrow z = 25$$

$$z^2 = x^2 + y^2$$

$$2z\frac{dz}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} \quad \Big] \div 2$$



$$z\frac{dz}{dt} = x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}$$

$$25\left(\frac{dz}{dt}\right) = 15(60) + 20(80)$$

$$\boxed{\frac{dy}{dt} = 80 \ , \ \frac{dx}{dt} = 60 \ , \ \frac{dz}{dt} = ?}$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{900 + 1600}{25} = \frac{2500}{25} = 100k/h$$

$\therefore$ معدل ابتعاد السيارتين عن بعضهما $(100k/h)$

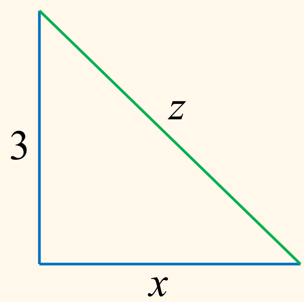
H.W. تحركت سيارتان الأولى باتجاه الشرق بسرعة $(40km/h)$ والثانية باتجاه الشمـال بسرعة $(30km/h)$ ، جد معدل تغـير المسافة بين السيارتين بعد أن تكون الأولى قطعت $(4km)$ والثانية $(3km)$

وزاري : سيارة تسير بسرعة $(30m/s)$ اجتازت اشارة مرورية على ارتفاع $(3m)$ وبعد أن ابتعدت مسافة $(3\sqrt{3}\,m)$ عن قاعدة العمود اصطدمت بسيارة اخرى بسبب عدم الالتزام بقوانين المرور ، جد سرعة تغير المسافة بين السيارة والإشارة الضوئية

الحل :

نفرض البعد بين السيارة وقاعدة العمود = x

نفرض البعد بين السيارة الإشارة الضوئية = z



$$z^2 = x^2 + 3^2$$

$$2z\frac{dz}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 0 \quad \Big] \div 2$$

$$z\frac{dz}{dt} = x\frac{dx}{dt}$$

$$when \quad x = 3\sqrt{3} \rightarrow z^2 = (3\sqrt{3})^2 + (3)^2$$

$$z^2 = 27 + 9 = 36$$

$$z = 6$$

$$6 \times \frac{dz}{dt} = (3\sqrt{3})(30)$$

$$6 \times \frac{dz}{dt} = 90\sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{dt} = \frac{90\sqrt{3}}{6} = 15\sqrt{3} \quad m/s$$

مبرهنة رول : Rolle's Theorem

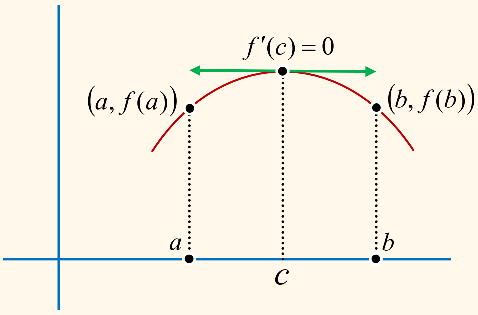
مراجعة :

1) النقاط التي تقع على خط أفقي واحد يكون إحداثيها الصادي متساوياً
2) المستقيم الذي يوازي محور السينات ميله (صفر)
3) ميل المماس يمثل المشتقة الأولى للمنحني عند نقطة التماس

المفهوم الهندسي لمبرهنة رول :

إذا كان لدينا نقطتان على خط أفقي واحد $(a, f(a))$ و $(b, f(b))$ فالمنحني الذي يصل بين النقطتين يحوي على الأقل نقطةحرجة واحدة مثل (c) بحيث أن مماسها يوازي محور السينات (ميله صفر)

شروط مبرهنة رول :



إذا كانت الدالة f :

1) مستمرة في الفترة المغلقة $[a,b]$
2) قابلة للاشتقاق في الفترة المفتوحة (a,b)
3) $f(a)=f(b)$

فانه يوجد على الأقل قيمة واحدة (c) حيث $c \in (a,b)$ وتحقق $f'(c)=0$

الدالة الكثيرة الحدود (متعددة الحدود) :

هي الدالة التي خالية من الكسور والجذور والأسس السالبة كالدوال التربيعية والتكعيبية ومن الأمثلة عليها :

1) $f(x)=7x+8$
2) $f(x)=5x^2-3x+2$
3) $f(x)=x^3$

الفترة المغلقـة : هي الفترة التي تشمل النهايتين وما بينهما :

الفترة المفتوحة : هي الفترة التي لا تشمل النهايتين :

مثال : بين أن الدالة $f(x)=x^2-4x+7$ تحقق شروط مبرهنة رول ضمن الفترة $[1,3]$ ؟
ثم جد قيمة (c) الممكنة

الحل : 1) الدالة مستمرة على الفترة المغلقة $[1,3]$ لأنها كثيرة الحدود

2) الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة $(1,3)$ لأنها كثيرة الحدود

3)

$$\left.\begin{array}{llll} f(1) & =(1)^2-4(1)+7 & =1-4+7 & =4 \\ f(3) & =(3)^2-4(3)+7 & =9-12+7 & =4 \end{array}\right\rangle \quad f(1)=f(3)$$

$\therefore$ الدالة ضمن الفترة المعطاة تحقق مبرهنة رول

$$f'(x)=2x-4$$

$$f'(c)=2c-4=0 \quad \Rightarrow \quad 2c=4$$

$$\Rightarrow \quad c=2 \in (1,3)$$

H.W. بين أن الدالة $f(x)=(2-x)^2$ تحقق شروط مبرهنة رول ضمن الفترة $[0,4]$ ؟
ثم جد قيمة (c) الممكنة

H.W. بين أن الدالة $f(x)=x^4-8x^2+7$ تحقق شروط مبرهنة رول ضمن الفترة $[-1,1]$
ثم جد قيمة (c) الممكنة

مثال : بين أن الدالـــة $f(x)=3x+\frac{3}{x}$ تحقق شروط مبرهنة رول ضمن الفتــرة $[\frac{1}{3},3]$ ؟
ثم جد قيمة (c) الممكنة

الحل : 1) الدالة مستمرة على الفترة المغلقة $[\frac{1}{3},3]$ لأن $0\notin[\frac{1}{3},3]$

2) الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة $(\frac{1}{3},3)$ لأن $0\notin(\frac{1}{3},3)$

3)
$$\left.\begin{aligned} f(\tfrac{1}{3}) &= 3(\tfrac{1}{3})+\frac{3}{1/3}=1+9=10 \\ f(2) &= 3(3)+\frac{3}{3}=9+1=10 \end{aligned}\right\rangle \quad f(\tfrac{1}{3})=f(3)$$

$\therefore$ الدالة ضمن الفترة المعطاة تحقق مبرهنة رول

$$f'(x)=3-\frac{3}{x^2}$$
$$f'(c)=3-\frac{3}{c^2}$$
$$f'(c)=0 \quad\Rightarrow\quad 3-\frac{3}{c^2}=0$$

$$3=\frac{3}{c^2} \quad\Rightarrow\quad c^2=1$$
$$either \quad c=\boxed{1}\in(\tfrac{1}{3},3)$$
$$or \quad c=-1\notin(\tfrac{1}{3},3)$$

H.W. بين أن الدالـــــة $f(x)=5x+\frac{5}{x}$ تحقق شروط مبرهنة رول ضمن الفتـــرة $[\frac{1}{5},5]$ ؟
ثم جد قيمة (c) الممكنة

حلول تمارين (3-3)

س1) أوجد قيمة (c) التي تعينها مبرهنة رول في كل مما يأتي :

a) $f(x)=x^3-9x \quad , \quad x\in[-3,3]$

1) الدالة مستمرة على الفترة المغلقة $[-3,3]$ لأنها كثيرة الحدود

2) الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة $(-3,3)$ لأنها كثيرة الحدود

3)

$$f(3)=(3)^3-9(3)=27-27=0$$
$$f(-3)=(-3)^3-9(-3)=-27+27=0$$
$$f(-3)=f(3)=0$$

∴ الدالة ضمن الفترة المعطاة تحقق مبرهنة رول

$$f'(x)=3x^2-9$$
$$f'(c)=3c^2-9$$

Note $\sqrt{3}\approx 1.7$

$$f'(c)=0 \Rightarrow 3c^2-9=0 \Rightarrow c^2=3 \Rightarrow c=\pm\sqrt{3}\in(-3,3)$$

---

b) $f(x)=2x+\frac{2}{x} \quad , \quad x\in[\frac{1}{2},2]$

1) الدالة مستمرة على الفترة المغلقة $[\frac{1}{2},2]$ لأن $0\notin[\frac{1}{2},2]$

2) الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة $(\frac{1}{2},2)$ لأن $0\notin(\frac{1}{2},2)$

3)

$$f(\frac{1}{2})=2(\frac{1}{2})+\frac{2}{1/2}=1+4=5$$
$$f(2)=2(2)+\frac{2}{2}=4+1=5$$
$$f(\frac{1}{2})=f(2)=5$$

∴ الدالة ضمن الفترة المعطاة تحقق مبرهنة رول

$$f'(x)=2-\frac{2}{x^2}$$
$$f'(c)=2-\frac{2}{c^2}$$
$$f'(c)=0 \Rightarrow 2-\frac{2}{c^2}=0$$

$$2=\frac{2}{c^2} \Rightarrow c^2=1$$

$$either \quad c=\boxed{1}\in(\frac{1}{2},2)$$
$$or \quad c=-1\notin(\frac{1}{2},2)$$

c) $f(x)=(x^2-3)^2 \quad , \quad x\in[-1,1]$

1) الدالة مستمرة على الفترة المغلقة $[-1,1]$ لأنها كثيرة الحدود

2) الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة $(-1,1)$ لأنها كثيرة الحدود

3)

$$\left.\begin{aligned} f(-1)&=(1-3)^2=(-2)^2=4\\ f(1)&=(1-3)^2=(-2)^2=4 \end{aligned}\right\rangle \quad f(-1)=f(1)=4$$

∴ الدالة ضمن الفترة المعطاة تحقق مبرهنة رول

$$f'(x)=2(x^2-3)(2x)=4x(x^2-3)=4c(c^2-3)$$

$$f'(c)=0 \quad \Rightarrow \quad 4c(c^2-3)=0$$

$$either \quad 4c=0 \quad \Rightarrow \quad c=\boxed{0}\in(-1,1)$$

$$or \quad c^2=3 \quad \Rightarrow \quad c=\sqrt{3}\notin(-1,1)$$

$$c=-\sqrt{3}\notin(-1,1)$$

س6) بين أن كل دالة من الدوال التالية تحقق مبرهنة رول على الفترة المعطاة أزاء كل منها ، ثم جد قيمة (c) :

a) $f(x)=(x-1)^4 \quad , \quad [-1,3]$

1) الدالة مستمرة على الفترة المغلقة $[-1,3]$ لأنها كثيرة الحدود

2) الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة $(-1,3)$ لأنها كثيرة الحدود

3)

$$\left.\begin{aligned} f(-1)&=(-1-1)^4=(-2)^4=16\\ f(3)&=(3-1)^4=(2)^4=16 \end{aligned}\right\rangle \quad \therefore f(-1)=f(3)$$

∴ الدالة ضمن الفترة المعطاة تحقق مبرهنة رول

$$f'(x)=4(x-1)^3$$

$$f'(c)=0$$

$$4(c-1)^3=0 \quad]\div 4$$

$$(c-1)^3=0 \quad \Rightarrow \quad c-1=0 \quad \Rightarrow \quad c=\boxed{1}\in(-1,3)$$

b) $h(x)=x^3-x \quad , \quad x\in[-1,1]$

الحل :

1) الدالة مستمرة على الفترة المغلقة $[-1,1]$ لأنها كثيرة الحدود

2) الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة $(-1,1)$ لأنها كثيرة الحدود

3)

$$h(-1)=(-1)^3-(-1)=-1+1=0$$

$$h(1)=(1)^3-1=1-1=0$$

$$\therefore h(-1)=h(1)$$

$\therefore$ الدالة ضمن الفترة المعطاة تحقق مبرهنة رول

$$h'(x)=3x^2-1$$

$$h'(c)=3c^2-1=0 \quad \Rightarrow \quad c^2=\frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad c=\boxed{\pm\frac{1}{\sqrt{3}}}\in(-1,1)$$

---

c) $g(x)=x^2-3x \quad , \quad [-1,4]$

الحل :

1) الدالة مستمرة على الفترة المغلقة $[-1,4]$ لأنها كثيرة الحدود

2) الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة $(-1,4)$ لأنها كثيرة الحدود

3)

$$g(-1)=(-1)^2-3(-1)=1+3=4$$

$$g(4)=(4)^2-3(4)=16-12=4 \qquad \therefore g(-1)=g(4)$$

$\therefore$ الدالة ضمن الفترة المعطاة تحقق مبرهنة رول

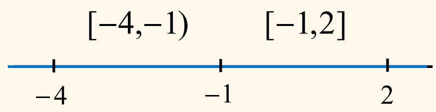
$$g'(x)=2x-3$$

$$g'(c)=2c-3=0 \quad \Rightarrow \quad c=\boxed{\frac{3}{2}}\in(-1,4)$$

مثال : بين أن الدالة تحقق شروط مبرهنة رول ثم جد قيمة (c) الممكنة :

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1 & , \quad x\in[-1,2] \\ -1 & , \quad x\in[-4,-1) \end{cases}$$

الحل :



$$\left.\begin{array}{l} L_1=\lim\limits_{x\to -1^+}(x^2+1)=2 \\ L_2=\lim\limits_{x\to -1^-}(-1)=-1 \end{array}\right\rangle \quad L_1\neq L_2$$

الدالة ليست مستمرة على الفترة المغلقة $[-4,2]$ $\Leftarrow$ الدالة لاتحقق شروط مبرهنة رول

مثال : بين أن الدالة $f(x)=7$ تحقق شروط مبرهنة رول في الفترة $[-2,5]$ ثم جد قيمة (c)

الحل : 1) الدالة مستمرة على الفترة المغلقة $[-2,5]$ لأنها دالة ثابتة

2) الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة $(-2,5)$ لأنها دالة ثابتة

3) $f(-2)=f(5)=7$

$\therefore$ الدالة تحقق مبرهنة رول ، وقيمة (c) يمكن أن تكون أي قيمة ضمن الفترة $(-2,5)$

H.W. بين أن الدالة $f(x)=k$ تحقق شروط مبرهنة رول في الفترة $[a,b]$ ثم جد قيمة (c)

---

4) $f(x)=\sin x \quad , \quad x\in[0,\pi]$

الحل : 1) دالة الـ $(\sin)$ مستمرة على الفترة المغلقة $[0,\pi]$

2) دالة الـ $(\sin)$ قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة $(0,\pi)$

3)

$$\begin{array}{lll} f(0) & =\sin 0 & =0 \\ f(\pi) & =\sin\pi & =0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad f(0)=f(\pi)$$

$\therefore$ الدالة ضمن الفترة المعطاة تحقق مبرهنة رول

$$f'(x)=\cos x \quad\to\quad f'(c)=\cos c$$

$$f'(c)=0 \quad\to\quad \cos c=0$$

$$either \quad \boxed{c=\frac{\pi}{2}}\in(0,\pi) \qquad or \qquad c=\frac{3\pi}{2}\notin(0,\pi)$$

$Q6)\ d)\quad f(x)=\cos 2x+2\cos x \qquad , \qquad [0,2\pi]$

الحل :

1) الدالة مستمرة على الفترة المغلقة $[0,2\pi]$

2) الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة $(0,2\pi)$

3)
$$f(0)=\cos 0+2\cos 0=1+2(1)=3$$
$$f(2\pi)=\cos(4\pi)+2\cos(2\pi)=1+2(1)=3 \qquad \therefore f(0)=f(2\pi)$$

$\therefore$ الدالة ضمن الفترة المعطاة تحقق مبرهنة رول

$$f'(x)=-2\sin 2x-2\sin x$$
$$f'(c)=-2\sin 2c-2\sin c$$
$$f'(c)=0 \Rightarrow -2\sin 2c-2\sin c=0 \quad]\div(-2)$$
$$\Rightarrow \sin 2c+\sin c=0$$
$$\Rightarrow 2\sin c\cos c+\sin c=0$$
$$\Rightarrow \sin c(2\cos c+1)=0$$

$$either \quad \sin c=0 \Rightarrow c=\begin{cases} 0 & \notin (0,2\pi) \\ \boxed{\pi} & \in (0,2\pi) \\ 2\pi & \notin (0,2\pi) \end{cases}$$

$\theta=\pi-\alpha$ $(-\ +)$	$\theta=\alpha$ $(+\ +)$
$(-\ -)$ $\theta=\pi+\alpha$	$(+\ -)$ $\theta=2\pi-\alpha$

$$or \quad 2\cos c+1=0 \Rightarrow \cos c=-\frac{1}{2} \rightarrow \alpha=\frac{\pi}{3}$$

دالة الـ $(\cos)$ تكون سالبة في الربع الثاني والثالث :

في الربع الثاني $\Rightarrow c=\pi-\dfrac{\pi}{3}=\boxed{\dfrac{2\pi}{3}} \in (0,2\pi)$

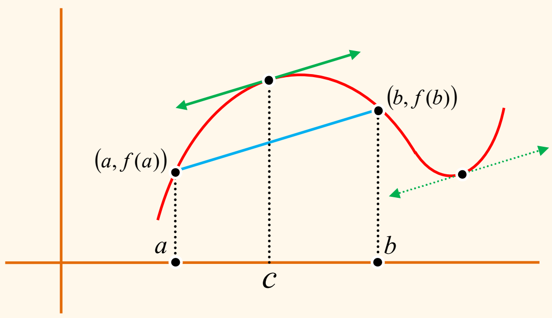
في الربع الثالث $\Rightarrow c=\pi+\dfrac{\pi}{3}=\boxed{\dfrac{4\pi}{3}} \in (0,2\pi)$

مبرهنة القيمة المتوسطة

MVT
The Mean Value Theorem

المفهوم الهندسي لمبرهنة القيمة المتوسطة :

إذا كان لدينا نقطتان $(a, f(a))$ و $(b, f(b))$ فالمنحني الذي يصل بين النقطتين يحوي على الأقل نقطة واحدة مثل (c) مماسها يوازي المستقيم الذي يصل بين النقطتين (الوتر)



مبرهنة القيمة المتوسطة:

إذا كانت الدالة f :

1) مستمرة في الفترة المغلقة $[a,b]$

2) قابلة للاشتقاق في الفترة المفتوحة (a,b)

فانه يوجد على الأقل قيمة واحدة (c) حيث $c \in (a,b)$ وتحقق :

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

ميل المماس = ميل الوتر

مثال : برهن أن الدالة $f(x)=x^2-5x+3$ تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة على الفترة $[-1,5]$ ثم أوجد قيمة (c)

الحل :

1) الدالة مستمرة على الفترة المغلقة $[-1,5]$ لأنها كثيرة الحدود

2) الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة $(-1,5)$ لأنها كثيرة الحدود

$\therefore$ الدالة ضمن الفترة المعطاة تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة

$f'(x)=2x-5 \quad \Rightarrow \quad f'(c)= 2c-5$ ميل المماس

$$f(-1)=(-1)^2-5(-1)+3=1+5+3=9$$
$$f(5)=(5)^2-5(5)+3=25-25+3=3$$

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f(5)-f(-1)}{(5)-(-1)}=\frac{3-9}{5+1}=\frac{-6}{6}= -1$$ ميل الوتر

ميل المماس = ميل الوتر

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$2c-5=-1$$

$$\Rightarrow \quad 2c=4$$

$$\Rightarrow \quad c=2\in(-1,5)$$

H.W. برهن أن الدوال الآتية تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة ثم أوجد قيمة (c):

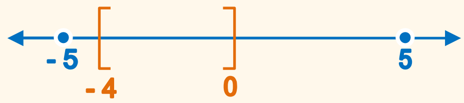
1) $f(x)=x^2-6x+4 \quad , \quad x\in[-1,7]$

2) $f(x)=8-x-x^2 \quad , \quad x\in[-1,3]$

مثال : برهن أن الدالة $f(x)=\sqrt{25-x^2}$ تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة في الفترة $[-4,0]$ ثم جد قيمة (c):

الحل :

1) $f(x)=\sqrt{25-x^2} \rightarrow 25-x^2 \geq 0$
$\rightarrow 25 \geq x^2$
$\rightarrow 5 \geq x \geq -5$



أوسع مجال للدالة هي الفترة المغلقة $[-5,5]$

$\therefore$ الدالة مستمرة على الفترة المغلقة $[-5,5]$

فتكون مستمرة على الفترة المغلقة $[-4,0]$ لأنها محتواة كليا في مجال الدالة

2) $f'(x)=\dfrac{-2x}{2\sqrt{25-x^2}}=\dfrac{-x}{\sqrt{25-x^2}} \rightarrow 25-x^2>0$
$\rightarrow 25>x^2$
$\rightarrow 5>x>-5$

أوسع مجال للمشتقة هي الفترة المفتوحة $(-5,5)$

$\therefore$ الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة $(-5,5)$

فتكون قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة $(-4,0)$ لأنها محتواة كليا في مجال المشتقة

$\therefore$ الدالة ضمن الفترة المعطاة تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة

$$f'(x)=\frac{-x}{\sqrt{25-x^2}} \quad \Rightarrow \quad f'(c)=\boxed{\frac{-c}{\sqrt{25-c^2}}}$$ ميل المماس

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f(0)-f(-4)}{0-(-4)}=\frac{\sqrt{25}-\sqrt{9}}{0+4}=\frac{2}{4}=\boxed{\frac{1}{2}}$$ ميل الوتـــر

ميل المماس = ميل الوتر

$$\frac{-c}{\sqrt{25-c^2}}=\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{25-c^2}=-2c \quad \Rightarrow \quad 25-c^2=4c^2$$

$$\Rightarrow \quad 5c^2=25 \quad \Rightarrow \quad c^2=5 \quad \Rightarrow \quad c=\pm\sqrt{5}$$

$either \quad c=\sqrt{5} \notin (-4,0)$

$or \quad c=-\sqrt{5} \in (-4,0)$

مثال : إذا كانت $f(x)=x^3-4x^2$ ، $f:[0,b]\to R$ وكانت f تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة عند $c=\frac{2}{3}$ فجد قيمة (b)

الحل :

$f'(x)=3x^2-8x$

$f'(c)=f'(\frac{2}{3})=3(\frac{4}{9})-8(\frac{2}{3})=\frac{4}{3}-\frac{16}{3}=-\frac{12}{3}=-4$

$f(b)=b^3-4b^2 \quad , \quad f(0)=(0)^3-4(0)=0$

$$\frac{f(b)-f(0)}{b-0}=\frac{b^3-4b^2-0}{b-0}=\frac{b(b^2-4b)}{b}=b^2-4b$$

$$\because \quad f'(c)=\frac{f(b)-f(0)}{b-0} \Rightarrow b^2-4b=-4$$

$$\Rightarrow b^2-4b+4=0$$

$$\Rightarrow (b-2)(b-2)=0 \Rightarrow \boxed{b=2}$$

H.W. إذا كانت $f(x)=x^2-2x+5$ ، وكانت f تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة عند $(c=3)$ على الفترة $[0,a]$ فجد قيمة $a\in R$

مثال : إذا كانت $f(x)=ax^2-4x+5$ دالة تحقق شروط مبرهنة رول على الفترة $[-1,b]$
وكانت $c=2\in(-1,b)$ فجد قيمة $a,b\in R$

$$f(-1)=f(b)$$

الحل :

$$f(x)=ax^2-4x+5$$
$$f'(x)=2ax-4$$

$$\because\ f'(c)=0 \rightarrow f'(2)=0$$
$$\rightarrow 2a(2)-4=0$$
$$\rightarrow 4a-4=0 \rightarrow \boxed{a=1}$$

$$f(x)=x^2-4x+5$$

$$f(-1)=1+4+5=10$$

$$f(b)=b^2-4b+5$$

$$\because\ f(b)=f(-1) \rightarrow b^2-4b+5=10$$
$$\rightarrow b^2-4b-5=0$$
$$\rightarrow (b-5)(b+1)=0$$

$either\ \boxed{b=5}$

$or\quad b=-1$ (تهمل لأن الفترة $[-1,b]$)

H.W. إذا كانت $f(x)=x^2-ax+5$ دالة تحقق شروط مبرهنة رول على الفترة $[-1,b]$
وكانت $c=2\in(-1,b)$ فجد قيمة $a,b\in R$

وزاري 2023 : إذا كانت $f(x) = 2x + \frac{h}{x}$ دالة تحقق شروط مبرهنة رول على الفترة $[\frac{1}{2}, k]$ وكانت $c = 1$ تنتمي للفترة $(\frac{1}{2}, k)$ فجد قيمة $h, k \in R$

الحل :

$$f'(x) = 2 - \frac{h}{x^2}$$

$$\because \ f'(c) = 0 \ \rightarrow \ f'(1) = 0 \ \rightarrow \ 2 - \frac{h}{1} = 0 \ \rightarrow \ \boxed{h = 2}$$

$$f(x) = 2x + \frac{2}{x}$$

$$f(\frac{1}{2}) = 2(\frac{1}{2}) + \frac{2}{\frac{1}{2}} = 1 + 4 = 5$$

$$f(k) = 2k + \frac{2}{k}$$

$$\because \ f(k) = f(\frac{1}{2}) \ \rightarrow \ 2k + \frac{2}{k} = 5$$

$$\rightarrow \ 2k^2 + 2 = 5k$$

$$\rightarrow \ 2k^2 - 5k + 2 = 0$$

$$\rightarrow \ (2k - 1)(k - 2) = 0$$

either $2k = 1 \ \rightarrow \ k = \frac{1}{2}$ (تهمل لأن الفترة $[\frac{1}{2}, k]$)

or $\boxed{k = 2}$

س7) اختبر امكانية تطبيق مبرهنة القيمة المتوسطة على الفترة المعطاة أزاءها مع ذكر السبب وإن تحققت المبرهنة ، جد قيمة (c) الممكنـــة :

a) $f(x)=x^3-x-1 \quad , \quad [-1,2]$

الحل : 1) الدالة مستمرة على الفترة المغلقة $[-1,2]$ لأنها كثيرة الحدود

2) الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة $(-1,2)$ لأنها كثيرة الحدود

$\therefore$ الدالة ضمن الفترة المعطاة تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة

$$f(a)=(-1)^3-(-1)-1=-1+1-1=-1$$
$$f(b)=(2)^3-(2)-1=8-2-1=5$$
$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{5-(-1)}{2-(-1)}=\frac{6}{3}=2$$
ميل الوتر

$$f'(x)=3x^2-1$$
$$f'(c)=3c^2-1$$
ميل المماس

ميـــل المماس = ميـــل الوتـــر

$$3c^2-1=2 \quad \Rightarrow \quad 3c^2=3 \quad \Rightarrow \quad c^2=1$$
$$either \quad c=\boxed{1} \in(-1,2)$$
$$or \quad c=-1 \notin(-1,2)$$

---

b) $h(x)=x^2-4x+5 \quad , \quad [-1,5]$

الحل : 1) الدالة مستمرة على الفترة المغلقة $[-1,5]$ لأنها كثيرة الحدود

2) الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة $(-1,5)$ لأنها كثيرة الحدود

$\therefore$ الدالة ضمن الفترة المعطاة تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة

$$h(a)=(-1)^2-4(-1)+5=10$$
$$h(b)=(5)^2-4(5)+5=10$$
$$\frac{h(b)-h(a)}{b-a}=\frac{10-10}{5-(-1)}=0$$
ميل الوتر

$$h'(x)=2x-4$$
$$h'(c)=2c-4$$
ميل المماس

ميـــل المماس = ميـــل الوتـــر

$$\Rightarrow \quad 2c-4=0$$
$$\Rightarrow \quad c=\boxed{2} \in(-1,5)$$

c) $g(x)=\dfrac{4}{x+2} \quad , \quad [-1,2]$

الحل :

1) الدالة مستمرة على الفترة المغلقة $[-1,2]$ لأن $-2 \notin [-1,2]$

2) الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة $(-1,2)$ لأن $-2 \notin (-1,2)$

$\therefore$ الدالة ضمن الفترة المعطاة تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة

$$g(a)=\frac{4}{-1+2}=\frac{4}{1}=4$$

$$g(b)=\frac{4}{2+2}=\frac{4}{4}=1$$

$$g'(x)=\frac{-4}{(x+2)^2}$$

$$g'(c)=\boxed{\frac{-4}{(c+2)^2}}$$ ميل المماس

$$\frac{g(b)-g(a)}{b-a}=\frac{1-4}{2-(-1)}=\boxed{-1}$$ ميل الوتر

$$g'(c)=\frac{g(b)-g(a)}{b-a} \Rightarrow \frac{-4}{(c+2)^2}=-1 \Rightarrow -(c+2)^2=-4$$

$$\Rightarrow (c+2)^2=4 \Rightarrow c^2+4c+\cancel{4}-\cancel{4}=0 \Rightarrow c(c+4)=0$$

$$either \quad c=-4 \notin(-1,2)$$
$$or \quad c=\boxed{0} \in(-1,2)$$

---

d) $B(x)=\sqrt[3]{(x+1)^2} \quad , \quad [-2,7]$

الحل :

$$B(x)=(x+1)^{\frac{2}{3}}$$

$$B'(x)=\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{-1}{3}}=\frac{2}{3\sqrt[3]{x+1}}$$

$\because$ الدالة غير قابلة للاشتقاق عند $x=-1$ ونعلم أن $-1\in(-2,7)$

$\therefore$ الدالة ضمن الفترة المعطاة لا تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة

التقريب باستخـــدام ..
مبرهنة القيمة المتوسطة

APPROXIMATION BY USING THE MEAN VALUE THEOREM

القيمة المفترضة = a

القيمة المعطاة = b

$$h = b - a$$

$$f(a+h) \approx f(a) + h.f'(a)$$

التغـــير التقريـــبي = $h.f'(a)$

مثال : إذا كانت $f(x) = x^3 + 3x^2 + 4x + 5$ فجد بصورة تقريبية وباستخدام مبرهنة القيمة المتوسطة $f(1.002)$

الحل :

$b = 1.002$

$a = 1$

$h = b - a = 0.002$

$f(a) = 1 + 3 + 4 + 5 = 13$

$f'(x) = 3x^2 + 6x + 4$

$f'(a) = 3 + 6 + 4 = 13$

$f(a+h) \approx f(a) + h\,f'(a)$

$f(1.002) \approx 13 + (0.002)(13) \quad = 13 + 0.026 \quad = 13.026$

مثال : جد بصورة تقريبية وباستخدام مبرهنة القيمة المتوسطة : $\sqrt[5]{(0.98)^3}+(0.98)^4+3$

الحل :

$f(x)=\sqrt[5]{x^3}+x^4+3$

$f(a)=\sqrt[5]{(1)^3}+(1)^4+3=1+1+3=5$

$b=0.98$

$a=1$

$h=b-a=-0.02$

$f'(x)=\frac{3}{5}x^{\frac{-2}{5}}+4x^3$

$f'(a)=\frac{3}{5}(1)^{-\frac{2}{5}}+4(1)^3=\frac{3}{5}+4=4.6$

$f(a+h)\approx f(a)+h\,f'(a)$

$\sqrt[5]{(0.98)^3}+(0.98)^4+3 \approx 5+(-0.02)(4.6) \quad =5-0.092 \quad =4.908$

مثال : جد بصورة تقريبية وباستخدام مبرهنة القيمة المتوسطة : $\sqrt{17}+\sqrt[4]{17}$

الحل :

$b=17$

$a=16$

$h=b-a=1$

$f(x)=\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}$

$f(a)=\sqrt{16}+\sqrt[4]{16}=2+4=6$

$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{4}x^{\frac{-3}{4}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{4x^{\frac{3}{4}}}$

$f'(a)=\frac{1}{2\sqrt{16}}+\frac{1}{4(16)^{\frac{3}{4}}}=\frac{1}{2(4)}+\frac{1}{4(2^4)^{\frac{3}{4}}}$

$=\frac{1}{8}+\frac{1}{32}=\frac{5}{32}=0.15$

$f(a+h)\approx f(a)+h\,f'(a)$

$\sqrt{17}+\sqrt[4]{17}\approx 6+(1)(0.15) \quad =6.15$

H.W. جد بصورة تقريبية وباستخدام مبرهنة القيمة المتوسطة : $\sqrt{80}-\sqrt[4]{80}$

H.W. جد بصورة تقريبية وباستخدام مبرهنة القيمة المتوسطة : $\frac{1}{\sqrt[3]{28}}$

مثال : جد بصورة تقريبية وباستخدام مبرهنة القيمة المتوسطة : $\sqrt[3]{7.8}$

الحل :

$b = 7.8$
$a = 8$
$h = b - a = -0.2$

$f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$

$f(a) = \sqrt[3]{8} = 2$

$f'(x) = \frac{1}{3} x^{\frac{-2}{3}} = \frac{1}{3(x)^{\frac{2}{3}}}$

$f'(a) = \frac{1}{3(2^3)^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{3(2)^2} = \frac{1}{12} = 0.08$

$f(a+h) \approx f(a) + h\, f'(a)$

$\sqrt[3]{7.8} \approx 2 + (-0.2)(0.08) \quad = 2.000 - 0.016 \quad = 1.984$

مثال : جد بصورة تقريبية وباستخدام مبرهنة القيمة المتوسطة : $\sqrt[3]{-9}$

الحل :

$\sqrt[3]{-9} = -\sqrt[3]{9}$

$f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$

$b = 9$
$a = 8$
$h = 9 - 8 = 1$

$f(a) = \sqrt[3]{8} = 2$

$f'(x) = \frac{1}{3} x^{\frac{-2}{3}} = \frac{1}{3(x)^{\frac{2}{3}}}$

$f'(a) = \frac{1}{3(2^3)^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{3(2)^2} = \frac{1}{12} = 0.083$

$f(a+h) \approx f(a) + h\, f'(a)$

$\sqrt[3]{9} \approx 2 + (1)(0.083) \quad = 2.000 + 0.083 \quad = 2.083$

$\therefore \quad \sqrt[3]{-9} \approx -2.083$

حلول تمارين (3-3)

س2) جد تقريباً لكل مما يأتي باستخدام مبرهنة القيمة المتوسطة أو نتيجتها:

a) $\sqrt{63}+\sqrt[3]{63}$

$b = 63$
$a = 64$
$h = b - a = -1$

$$f(x)=\sqrt{x}+\sqrt[3]{x} \quad =\sqrt{x}+x^{\frac{1}{3}}$$

$$f(a)=\sqrt{64}+\sqrt[3]{64}=8+4=12$$

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{3}x^{\frac{-2}{3}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}}$$

$$f'(a)=\frac{1}{2\sqrt{64}}+\frac{1}{3(64)^{\frac{2}{3}}} \quad =\frac{1}{2(8)}+\frac{1}{3(4^3)^{\frac{2}{3}}}$$

$$=\frac{1}{16}+\frac{1}{3(16)} \quad =\frac{1}{16}+\frac{1}{48} \quad =\frac{4}{48} \quad =\frac{1}{12} \approx 0.083$$

$$f(a+h)\approx f(a)+h\,f'(a)$$

$$\sqrt{63}+\sqrt[3]{63}\approx 12+(-1)(0.083) \quad =12-0.083 = \quad 11.917$$

---

b) $(1.04)^3+3(1.04)^4$

$b = 1.04$
$a = 1$
$h = b - a = 0.04$

$$f(x)=x^3+3x^4$$

$$f(a)=1^3+3(1)^4=1+3=4$$

$$f'(x)=3x^2+12x^3$$

$$f'(a)=3(1)^2+12(1)^3=3+12=15$$

$$f(a+h)\approx f(a)+h\,f'(a)$$

$$(1.04)^3+3(1.04)^4\approx 4+(0.04)(15) \quad =4+0.6 \quad =4.6$$

c) $\frac{1}{\sqrt[3]{9}}$

$f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x}} \quad =x^{\frac{-1}{3}}$

$b=9$
$a=8$
$h=b-a=1$

$f(a)=\frac{1}{\sqrt[3]{8}}=\frac{1}{2}=0.5$

$f'(x)=\frac{-1}{3}x^{\frac{-4}{3}}=\frac{-1}{3x^{\frac{4}{3}}}$

$f'(a)=\frac{-1}{3(8)^{\frac{4}{3}}}=\frac{-1}{3(2^3)^{\frac{4}{3}}}=\frac{-1}{3(2)^4}=\frac{-1}{48}=-0.02$

$f(a+h)\approx f(a)+h\,f'(a)$

$\frac{1}{\sqrt[3]{9}}\approx 0.5+(1)(-0.02) \quad =0.5-0.02 \quad =0.48$

---

d) $\frac{1}{101}$

$f(x)=\frac{1}{x}$

$b=101$
$a=100$
$h=b-a=1$

$f(a)=\frac{1}{100}=0.01$

$f'(x)=\frac{-1}{x^2}$

$f'(a)=\frac{-1}{100^2}=-0.0001$

$f(a+h)\approx f(a)+h\,f'(a)$

$\frac{1}{101}\approx 0.01+(1)(-0.0001) \quad =0.01-0.0001 \quad =0.0099$

e) $\sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{0.50}$

$b = 0.50$
$a = 0.49$
$h = b - a = 0.01$

$f(x) = \sqrt{x}$

$f(a) = \sqrt{0.49} = 0.7$

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$f'(a) = \frac{1}{2\sqrt{0.49}} = \frac{1}{2(0.7)} = \frac{1}{1.4} = 0.71$

$f(a+h) \approx f(a) + h\, f'(a)$

$\sqrt{\frac{1}{2}} \approx 0.7 + (0.01)(0.71) \quad = 0.7 + 0.0071 \quad = 0.7071$

مثال : جد بصورة تقريبية وباستخدام مبرهنة القيمة المتوسطة : $\sqrt[3]{0.12}$

$b = 0.120$
$a = 0.125$
$h = b - a = -0.005$

$f(x) = \sqrt[3]{x} \quad = x^{\frac{1}{3}}$

$f(a) = \sqrt[3]{0.125} = 0.5$

$f'(x) = \frac{1}{3} x^{\frac{-2}{3}} = \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}}$

$f'(a) \quad = \frac{1}{3(0.125)^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{3\left((0.5)^3\right)^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{3(0.5)^2} = \frac{1}{0.75}$

$= \frac{100}{75} = \frac{4}{3} = 1.33$

$f(a+h) \approx f(a) + h\, f'(a)$

$\sqrt[3]{0.12} \approx 0.5 + (-0.005)(1.33) \quad = 0.5 - 0.0066 \quad = 0.4934$

وزاري : جد بصورة تقريبية وباستخدام مبرهنة القيمة المتوسطة : $(15.6)^{\frac{-1}{4}}$

الحل :

$$f(x)=(x)^{\frac{-1}{4}}$$

$$b=15.6$$
$$a=16$$
$$h=b-a=\boxed{-0.4}$$

$$f(a)=(16)^{\frac{-1}{4}}=\frac{1}{(16)^{\frac{1}{4}}}=\frac{1}{(2^4)^{\frac{1}{4}}}=\frac{1}{2}=\boxed{0.5}$$

$$f'(x)=\frac{-1}{4}\,(x)^{\frac{-5}{4}}=\frac{-1}{4(x)^{\frac{5}{4}}}$$

$$f'(a)=\frac{-1}{4(16)^{\frac{5}{4}}}=\frac{-1}{4(2^4)^{\frac{5}{4}}}=\frac{-1}{4(2)^5}=\frac{-1}{128}=\boxed{-0.008}$$

$$f(a+h)\approx f(a)+h\,f'(a)$$

$$(15.6)^{\frac{-1}{4}}\approx 0.5+(-0.008)(-0.4)\quad =0.5+0.0032=0.5032$$

H.W. جد بصورة تقريبية وباستخدام مبرهنة القيمة المتوسطة : $\sqrt{15^{-1}}$

H.W. جد بصورة تقريبية حسب نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة $\sqrt[5]{(31)^{-1}}$

ت ع) س11) إذا كانت $f(x)=\sqrt[5]{31x+1}$ جد باستخدام مبرهنة القيمة المتوسطة القيمة التقريبية إلى $f(1.01)$

الحل :

$b=1.01$

$a=1$

$h=b-a=0.01$

$$f(x)=\sqrt[5]{31x+1}=(31x+1)^{\frac{1}{5}}$$

$$f(a)=\sqrt[5]{31+1}=\sqrt[5]{32}=2$$

$$f'(x)=\frac{1}{5}(31x+1)^{\frac{-4}{5}}(31)=\frac{31}{5(31x+1)^{\frac{4}{5}}}$$

$$f'(a)=\frac{31}{5(32)^{\frac{4}{5}}}=\frac{31}{5(2^5)^{\frac{4}{5}}}=\frac{31}{5(2)^4}=\frac{31}{80}=0.38$$

$$f(a+h)\approx f(a)+h\,f'(a)$$

$$f(1.01)\approx 2+(0.01)(0.38)=2+0.0038=2.0038$$

وزاري : إذا كانت $f(x)=\sqrt[3]{2x+6}$ جد باستخدام مبرهنة القيمة المتوسطة القيمة التقريبية إلى $f(1.02)$

الحل :

$b=1.02$

$a=1$

$h=b-a=0.02$

$$f(x)=\sqrt[3]{2x+6}=(2x+6)^{\frac{1}{3}}$$

$$f(a)=\sqrt[3]{2+6}=\sqrt[3]{8}=2$$

$$f'(x)=\frac{1}{3}(2x+6)^{\frac{-2}{3}}(2)=\frac{2}{3(2x+6)^{\frac{2}{3}}}$$

$$f'(a)=\frac{2}{3(8)^{\frac{2}{3}}}=\frac{2}{3(2^3)^{\frac{2}{3}}}=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}=0.166$$

$$f(a+h)\approx f(a)+h\,f'(a)$$

$$f(1.02)\approx 2+(0.02)(0.166)=2+0.00332=2.00332$$

H.W. إذا كانت $f(x)=\sqrt[5]{5x^2+12}$ جد القيمة التقريبية إلى $f(1.97)$ باستخدام مبرهنة القيمة المتوسطة

H.W. إذا كانت $f(x)=\sqrt[3]{3x+24}$ جد قيمة $f(1.002)$ بصورة تقريبية باستخدام التفاضلات

مثال : مكعب طول حرفه $(9.98\,cm)$ جد حجمه بصورة تقريبية باستخدام مبرهنة القيمة المتوسطة

الحل : نفرض طول ضلع المكعب = x

$v = f(x) = x^3$

$b = 9.98$

$a = 10$

$h = b - a = -0.02$

$f(a) = (10)^3 = 1000$

$f'(x) = 3x^2$

$f'(a) = 3(10)^2 = 300$

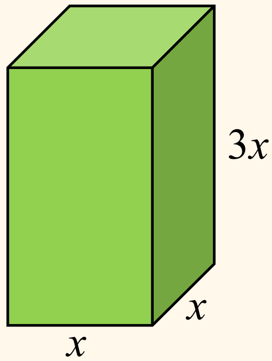
$f(a+h) \approx f(a) + h\,f'(a)$

$f(9.98) \approx 1000 + (-0.02)(300) \quad = 1000 - 6 \quad = 994\ cm^3$

ت ع) س9) متوازي سطوح مستطيلة قاعدته مربعة وارتفاعه ثلاثة أمثال طول قاعدته ، جد الحجم التقريبي له عندما يكون طول قاعدته $(2.97\ cm)$

الحل : نفرض طول ضلع المكعب = x

$$v = f(x)$$
$$= (x).(x).(3x) = 3x^3$$



$$b = 2.97$$
$$a = 3$$
$$h = b - a = -0.03$$

$$f(a) = 3(3)^3 = 81$$

$$f'(x) = 9x^2$$
$$f'(a) = 9(3)^2 = 81$$

$$f(a+h) \approx f(a) + h\,f'(a)$$
$$f(2.97) \approx 81 + (-0.03)(81)$$
$$v = 81 - 2.43 = 78.57\ cm^3$$

ت ع) س10) مخروط دائري قائم حجمه $(210)\pi\,cm^3$ جد القيمة التقريبية لنصف قطر قاعدته إذا كان ارتفاعه $(10)cm$

الحل :

$$\left.\begin{aligned} v &= \frac{\pi}{3} r^2 . h \\ v &= 210\pi \end{aligned}\right\rangle \frac{\cancel{\pi}}{3} r^2 . h = 210\cancel{\pi} \Rightarrow r^2(10) = 630 \Rightarrow r^2 = 63 \Rightarrow r = \sqrt{63}$$

$$b = 63$$
$$a = 64$$
$$h = b - a = -1$$

$$f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f(a) = \sqrt{64} = 8$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(a) = \frac{1}{2\sqrt{64}} = \frac{1}{16} = 0.06$$

$$f(a+h) \approx f(a) + h\,f'(a)$$

$$r \approx 8 + (-1)(0.06) = 8 - 0.06 = 7.94\ cm$$

H.W. جد بصورة تقريبية باستخدام التفاضلات المساحة السطحية لمكعب طول ضلعه $(1.99cm)$

س4) كرة حجمها $(84\pi\ cm^3)$ جد طول نصف قطرها بصورة تقريبية باستخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة

الحل: نفرض طول نصف قطر الكرة = r وحجمه = v

$$\left.\begin{array}{l} v=\frac{4}{3}r^3\pi \\ 84\pi=\frac{4}{3}r^3\pi \end{array}\right\rangle \Rightarrow 21=\frac{1}{3}r^3 \Rightarrow r^3=63 \Rightarrow r=\sqrt[3]{63}$$

$b=63$

$a=64=4^3$

$h=b-a=-1$

$$f(x)=\sqrt[3]{x}=x^{\frac{1}{3}} \rightarrow f(a)=\sqrt[3]{64}=4$$

$$f'(x)=\frac{1}{3}x^{\frac{-2}{3}}=\frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}}$$

$$f'(a)=\frac{1}{3(64)^{\frac{2}{3}}}=\frac{1}{3(4^3)^{\frac{2}{3}}}=\frac{1}{3(4)^2}=\frac{1}{48}\approx 0.02$$

$$f(a+h)\approx f(a)+h\,f'(a)$$

$$r\approx 4+(-1)(0.02)=4-0.02=3.98\ cm$$

H.W. كرة حجمها $(\frac{260\pi}{3}\ cm^3)$ جد طول نصف قطرها بصورة تقريبية باستخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة

س5) مخروط دائري قائم ارتفاعه يساوي طول قطر قاعدته فإذا كان ارتفاعه يساوي (2.98 cm) فجد حجمه بصورة تقريبية باستخدام مبرهنة القيمة المتوسطة

الحل : نفرض ارتفاع الكرة = h ، ونصف قطر الكرة = r

$$\boxed{h = 2r} \quad \Rightarrow \quad \boxed{r = \frac{h}{2}}$$

$$v = \frac{\pi}{3} r^2 h$$

$$v = \frac{\pi}{3}\left(\frac{h^2}{4}\right)h = \frac{\pi}{12}h^3 = \frac{\pi}{12}(2.98)^3$$

$$b = 2.98$$
$$a = 3$$
$$h = b - a = -0.02$$

$$f(x) = \frac{\pi}{12}x^3$$

$$f(a) = \frac{\pi}{12}(3)^3 = \frac{9}{4}\pi = 2.25\pi$$

$$f'(x) = \frac{\pi}{4}x^2$$

$$f'(a) = \frac{\pi}{4}(3)^2 = \frac{9}{4}\pi = 2.25\pi$$

$$f(a+h) \approx f(a) + h\, f'(a)$$

$$f(2.98) \approx 2.25\pi + (-0.02)(2.25\pi) = 2.25\pi - 0.045\pi = 2.205\pi \quad cm^3$$

التغير التقريبي

التغير التقريبي هو جزء من قانون التقريب $h.f'(a)$ ويستخدم غالبا في حالات الطلاء بمادة معينة ، أحيانا يذكر في السؤال بشكل مباشر وأحيانا نستنتجه من كلمة الطلاء (طلاء + تقريب = تغير تقريبي)

مثال : لتكن $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$ فإذا تغيرت x من 8 إلى 8.06 فما مقدار التغير التقريبي للدالة ؟

الحل : التغير التقريبي $h.f'(a)$

$b = 8.06$

$a = 8 = 2^3$

$h = b - a = 0.06$

$$f'(x)=\frac{2}{3}x^{\frac{-1}{3}}=\frac{2}{3x^{\frac{1}{3}}}$$

$$f'(a)=\frac{2}{3(8)^{\frac{1}{3}}}=\frac{2}{3(2^3)^{\frac{1}{3}}}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

$$h.f'(a)\approx(0.06)(\frac{1}{3})\quad=0.02$$

مثال : لتكن $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$ فإذا تغيرت x من 125 إلى 125.06 فما مقدار التغير التقريبي للدالة ؟

الحل : التغير التقريبي $h.f'(a)$

$b = 125.06$

$a = 125$

$h = b - a = 0.06$

$$f'(x)=\frac{2}{3}x^{\frac{-1}{3}}=\frac{2}{3x^{\frac{1}{3}}}$$

$$f'(a)=\frac{2}{3(125)^{\frac{1}{3}}}=\frac{2}{3(5^3)^{\frac{1}{3}}}=\frac{2}{15}=0.13$$

$$h.f'(a)\approx(0.06)(0.13)\quad=0.0078$$

س 2023 : لتكن $f(x)=x^{\frac{2}{3}}$ فإذا تغـــيرت x من (8) إلى (7.8) فما مقدار التغير التقريبي للدالـة ؟

الحل : التغـــير التقريـــبي $h.f'(a)$

$b=7.8$
$a=8$
$h=b-a=-0.2$

$$f'(x)=\frac{2}{3}x^{\frac{-1}{3}}=\frac{2}{3x^{\frac{1}{3}}}$$

$$f'(a)=\frac{2}{3(8)^{\frac{1}{3}}}=\frac{2}{3(2^3)^{\frac{1}{3}}}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}=0.33$$

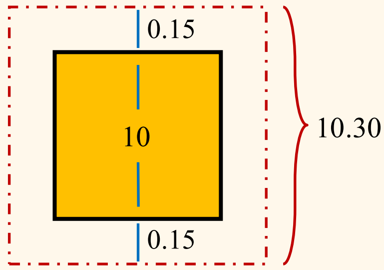
$$h.f'(a)\approx(-0.2)(0.33)\quad=-0.066$$

H.W. إذا تغيرت x من 32 إلى 32.06 ، جد مقدار التغير التقريبي للدالـة $f(x)=\sqrt[5]{x}$

مثال : يــراد طلاء مكعب طول ضلعه $(10cm)$ فإذا كان سمك الطلاء $(0.15cm)$ ، جد حجم الطلاء بصورة تقريبيــة وباستخدام مبرهنة القيمة المتوسطــة

الحل : نلاحظ بأن طول ضلع المكعب يزداد من $(10cm)$ إلى $(10.3cm)$

$\therefore$ المطلوب هو التغــير التقريــبي $h.f'(a)$



$b = 10.3$

$a = 10$

$h = b - a = 0.3$

$v = f(x) = x^3$

$f'(x) = 3x^2$

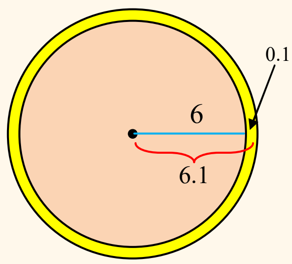
$f'(a) = 3(10)^2 = 300$

$h.f'(a) \approx (0.3)(300) = 90\ cm^3$

س3) كرة نصف قطرهـــا $(6cm)$ طليت بطلاء سمكه $(0.1cm)$ جد قيمة الطلاء بصورة تقريبية باستخدام مبرهنة القيمة المتوسطة

الحل : نلاحظ بأن نصف قطر الكرة يزداد من $6cm$ إلى $6.1cm$

$\therefore$ المطلوب هو التغــير التقريــبي $h.f'(a) =$



$b = 6.1$

$a = 6$

$h = b - a = 0.1$

$v = f(x) = \frac{4}{3}x^3\pi$

$f'(x) = 4x^2\pi$

$f'(a) = 4(6)^2\pi = 144\pi$

$h.f'(a) \approx (0.1)(144\pi) = 14.4\pi\ cm^3$