Part I

2014 MATEMATİK-II SINAV SORULARI

1 ARASINAV (12.04.2014)

1. $f(x) = -x^2 + 3$ ile tanımlı f fonksiyonu $\left[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$ aralığında ele alınsın. Bu aralığı dört eşit parçaya bölerek ve her alt aralığın sağ uç noktasını seçerek f nin Riemann toplamını bulunuz. Hesapladığınız alanı grafik üzerinde gösteriniz.

   $\left[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$ aralığının dört eşit alt aralığa bölünmesi ile elde edilen düzgün parçalanma

$$P = \{-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}\}$$

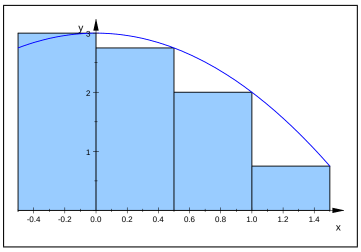
   olur. $1 \le i \le 4$ için alt aralıklar $[x_{i-1}, x_i]$ olmak üzere $\Delta x_i = \frac{1}{4}(\frac{3}{2} - (-\frac{1}{2})) = \frac{1}{2}$ dir.

$x_0 = -\frac{1}{2}$	$x_1 = 0$	$x_2 = \frac{1}{2}$	$x_3 = 1$	$x_4 = \frac{3}{2}$

   $x_i' \in [x_{i-1}, x_i]$ için $x_i' = x_i$ olarak seçelim. O zaman istenen Riemann toplamı

$$\begin{aligned} R &= \sum_{i=1}^{4} f(x_i')\Delta x_i = \sum_{i=1}^{4} f(x_i)\frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4}(-x_i^2 + 3) = \frac{1}{2}\left(4.3 - \sum_{i=1}^{4} x_i^2)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(12 - (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(12 - \left(0^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2\right)\right) \\ &= \frac{17}{4} \end{aligned}$$

   olur.



2. Aşağıdaki belirsiz integralleri hesaplayınız.

   a) $\int x\ln(x+1)dx$ integralini hesaplamak için $u = \ln(x+1)$ ve $dv = xdx$ diyerek kısmi integrasyon yöntemini kullanalım. O zaman

$$\begin{aligned} \int x\ln(x+1)dx &= \frac{x^2}{2}\ln(x+1) - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{x+1}dx \\ &= \frac{x^2}{2}\ln(x+1) - \frac{1}{2}\int \left[x - 1 + \frac{1}{x+1}\right]dx \\ &= \frac{x^2}{2}\ln(x+1) - \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2} - x + \ln(x+1)\right] + C \\ &= \frac{x^2-1}{2}\ln(x+1) - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} + C \end{aligned}$$

   bulunur.

   b) $\int \frac{dx}{(x^2+1)(x+1)^2}$ integralini basit kesirlere ayırma yöntemi ile hesaplayabiliriz.

$$\frac{1}{(x^2+1)(x+1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$$

den

$$
\begin{aligned}
1 &= A(x+1)(x^2+1)+B(x^2+1)+(Cx+D)(x+1)^2 \\
&= (A+C)x^3+(A+B++2C+D)x^2+(A+C+2D)x+A+B+D
\end{aligned}
$$

olur. $x=-1$ yazarsak $B=\frac{1}{2}$ bulunur. $A+C=0$ ve $A+C+2D=0$ olduğundan $D=0$ olur. $A+B+D=1$ den $A=\frac{1}{2}$ ve böylece $C=-\frac{1}{2}$ olur. O zaman

$$
\begin{aligned}
\int \frac{dx}{(x^2+1)(x+1)^2} &= \frac{1}{2}\int\left[\frac{1}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{x}{x^2+1}\right]dx \\
&= \frac{1}{2}\left[\ln(x+1)-\frac{1}{x+1}-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)\right]+K \\
&= \frac{1}{4}\ln\left(\frac{(x+1)^2}{x^2+1}\right)-\frac{1}{2\,(x+1)}+K
\end{aligned}
$$

bulunur.

3. Aşağıdaki belirli integralleri hesaplayınız.

a) $\int_{-1}^{2}\left|x^3-3x^2+2x\right|dx$

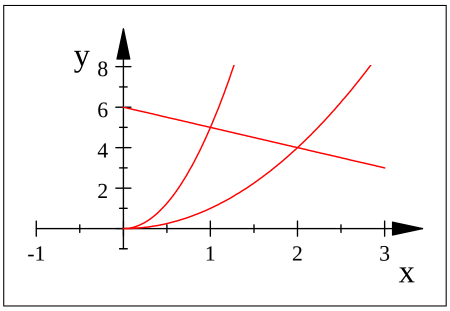
$$
\begin{aligned}
\int_{-1}^{2}\left|x^3-3x^2+2x\right|dx &= \int_{-1}^{2}|x(x-1)(x-2)|\,dx \\
&= \int_{-1}^{0}-(x^3-3x^2+2x)dx+\int_{0}^{1}(x^3-3x^2+2x)dx+\int_{1}^{2}-(x^3-3x^2+2x)dx \\
&= \frac{11}{4}
\end{aligned}
$$

b) $\int_0^1 x^3(1-x^2)^8dx$ integralinde $1-x^2=t$ dönüşümü yapılırsa

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 x^3(1-x^2)^8dx &= \int_1^0 (1-t)t^8\frac{-dt}{2} \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 (t^8-t^9)dt \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{t^9}{9}-\frac{t^{10}}{10}\right)\Bigg|_0^1 \\
&= \frac{1}{180}
\end{aligned}
$$

bulunur.

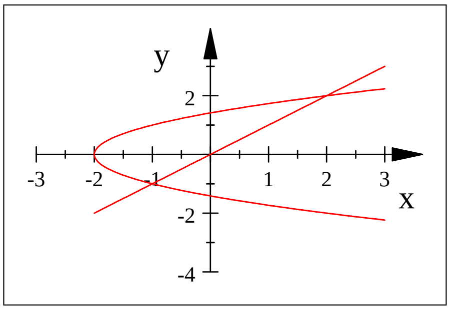
4. Birinci bölgede, $y=x^2$, $y=5x^2$ eğrileri ile $x+y=6$ doğrusu tarafından sınırlanan bölgenin alanını hesaplayınız.



$$
\begin{aligned}
A &= \int_0^1 (5x^2-x^2)dx+\int_1^2(6-x-x^2)dx \\
&= \frac{7}{2}\ \text{br}^2
\end{aligned}
$$

bulunur.

5. $y = x$ ve $x = y^2 - 2$ eğrileri ile sınırlı bölgenin alanını hesaplayınız.$x = y$ ve $x = y^2 - 2$ eğrilerinin kesim noktalarını bulalım. $y^2 - 2 = y$ den $y^2 - y - 2 = 0$ ve buradan da $y_1 = -1$, $y_2 = 2$ bulunur. O zaman kesim noktaları $(-1, -1)$ ve $(2, 2)$ olur.



Bağımsız değişkeni y alarak istenen bölgenin alanı

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^{2} (y - (y^2 - 2))dy = \int_{-1}^{2} (y - y^2 + 2)dy \\ &= \frac{9}{2} \text{ br}^2 \end{aligned}$$

bulunur. Bağımsız değişkeni x alarak bölgenin alanını hesaplamak istersek

$$A = \int_{-2}^{-1} (\sqrt{x+2} - (-\sqrt{x+2}))dx + \int_{-1}^{2} (\sqrt{x+2} - x)dx$$

integralini hesaplamak gerekir.

2 FİNAL (26.05.2014)

1. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız

   a) $\int \sin(\ln x)dx$. $u = \sin(\ln x)$ ve $dv = dx$ diyerek kısmi integrasyon yöntemini kullanalım. O zaman $du = \frac{\cos(\ln x)}{x}dx$ ve $v = x$ olur. Böylece

   $$\int \sin(\ln x)dx = x\sin(\ln x) - \int \cos(\ln x)dx$$

   olur. Burada sağtaraftaki integralde $u = \cos(\ln x)$ ve $dv = dx$ diyerek kısmi integrasyon yöntemini kullanalım. O zaman $du = \frac{-\sin(\ln x)}{x}dx$ ve $v = x$ olur. O zaman

   $$\begin{aligned} \int \sin(\ln x)dx &= x\sin(\ln x) - \int \cos(\ln x)dx \\ &= x\sin(\ln x) - x\cos(\ln x) - \int \sin(\ln x)dx \end{aligned}$$

   olup

   $$\int \sin(\ln x)dx = \frac{x}{2}[\sin(\ln x) - \cos(\ln x)] + C$$

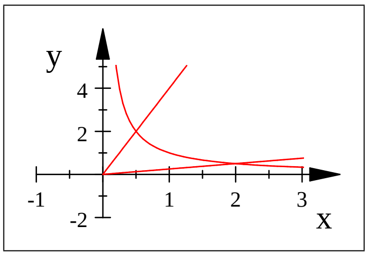
   bulunur.

   b) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{1 + \cos 2x}dx$. $1 + \cos 2x = 2\cos^2 x$ olduğundan

   $$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{1 + \cos 2x}dx &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{2\cos^2 x}dx = \sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}} |\cos x|\, dx \\ &= \sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos x dx = \sqrt{2}\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{2} \end{aligned}$$

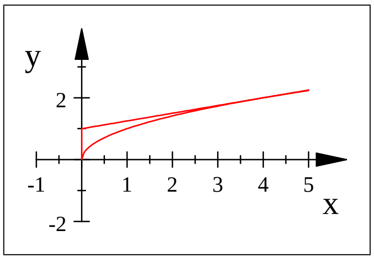
   bulunur.

2. Birinci bölgede $y = 4x$ ve $y = \frac{x}{4}$ doğruları ile $y = \frac{1}{x}$ eğrisi arasında kalan bölgenin alanını bulunuz.



$$\begin{aligned} A &= \int_0^{\frac{1}{2}} (4x - \frac{x}{4})dx + \int_{\frac{1}{2}}^{2} (\frac{1}{x} - \frac{x}{4})dx \\ &= 2x^2 - \frac{x^2}{8}\Big|_0^{\frac{1}{2}} + \ln(x) - \frac{x^2}{8}\Big|_{\frac{1}{2}}^{2} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{32} + \ln 2 - \frac{1}{2} - \ln\frac{1}{2} + \frac{1}{32} \\ &= 2\ln 2 \text{ br}^2 \end{aligned}$$

3. $y = \sqrt{x}$ eğrisi, bu eğriye $(4, 2)$ noktasında teğet olan doğru ve y-ekseni arasında kalan bölgenin y-ekseni etrafında döndürümesi ile oluşan cismin hacmini bulunuz. Önce teğet denklemnini bulalım. $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ olup $(4, 2)$ verilen eğri üzerinde olduğundan teğertin eğimi $m_t = y'(4) = \frac{1}{4}$ olur O zaman teğet denklemi $y - 2 = \frac{1}{4}(x - 4)$ veya $y = \frac{x}{4} + 1$ olur.



Silindirik kabuk yöntemi ile istenen cismin hacmi

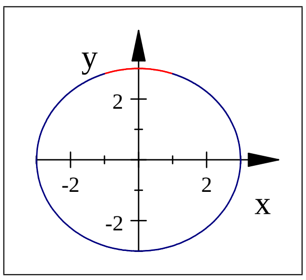
$$V = 2\pi \int_0^4 x(\frac{x}{4} + 1 - \sqrt{x})dx = \frac{16}{15}\pi \text{ br}^3$$

olur. Disk yöntemi le hesaplama yaparsak

$$V = \pi \int_0^1 (y^2)^2 dy + \pi \int_1^2 ((y^2)^2 - (4y - 4)^2)dy = \frac{16}{15}\pi \text{ br}^3$$

bulunur.

4. $x^2 + y^2 = 9$ çemberinin $-1 \leq x \leq 1$ ve $y > 0$ şartlarını sağlayan yayının x-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan yüzeyin alanını hesaplayınız. O zaman $y = \sqrt{9 - x^2}$, $-1 \leq x \leq 1$ eğri parçasının x-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan yüzeyin alanını



$$
\begin{aligned}
S &= 2\pi\int_{-1}^{1} y\sqrt{1+(y')^2}dx = 2\pi\int_{-1}^{1}\sqrt{9-x^2}\sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{9-x^2}}\right)^2}dx \\
&= 2\pi\int_{-1}^{1}\sqrt{9-x^2}\sqrt{1+\frac{x^2}{9-x^2}}dx \\
&= 2\pi\int_{-1}^{1}\sqrt{9-x^2}\sqrt{\frac{9}{9-x^2}}dx = 2\pi\int_{-1}^{1}3dx = 12\pi \text{ br}^2
\end{aligned}
$$

bulunur.

5. Aşağıda verilen genelleştirilmiş integrallerin yakınsak olup olmadığını araştırınız. Yakınsak ise değerini hesaplayınız.

a) $\int_1^\infty \frac{1+e^{-2x}}{\sqrt{x}}dx$. Verilen integral bir birinci tip genelleştirilmiş integraldir. $x \geq 1$ için $\frac{1}{\sqrt{x}} \leq \frac{1+e^{-2x}}{\sqrt{x}}$ dir. Diğer taraftan

$$\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{b\to\infty}(2\sqrt{b}-2) = \infty$$

olduğundan $\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}}$ integrali ıraksaktır. O zaman karşılaştırma testi gereği $\int_1^\infty \frac{1+e^{-2x}}{\sqrt{x}}dx$ integrali de ıraksaktır.

b) $\int_0^1 \ln x dx$. Verilen integral bir ikinci tip genelleştirilmiş integraldir.

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \ln x dx &= \lim_{t\to 0^+}\int_t^1 \ln x dx \\
&= \lim_{t\to 0^+}(x\ln x - x)\Big|_t^1 \\
&= \lim_{t\to 0^+}(-1 - t\ln t + t) \\
&= -1
\end{aligned}
$$

bulunur. Burada $\lim_{t\to 0^+} t\ln t = \lim_{t\to 0^+}\frac{\ln t}{\frac{1}{t}} = \lim_{t\to 0^+}\frac{\frac{1}{t}}{-\frac{1}{t^2}} = 0$ olduğuna dikkat ediniz. Bu integral $-\ln x = t$ dönüşümü yapıldığında Γ fonksiyonu yardımıyla da hesaplanabilir. Bu durumda $x = e^{-t}$ ve $dx = -e^{-t}dt$ olacağından

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \ln x dx &= -\int_0^1 -\ln x dx = -\int_\infty^0 t(-e^{-t})dt \\
&= -\int_0^\infty te^{-t}dt = -\Gamma(1) = -1
\end{aligned}
$$

bulunur.

3 BÜTÜNLEME (09.06.2014)

1. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız

a) $\displaystyle\int \arctan 2x dx$. $u = \arctan 2x$ ve $dv = dx$ diyerek kısmi integrasyon yöntemini kullanalım. O zaman $du = \dfrac{2dx}{1+4x^2}$ ve $v = x$ olur. Böylece

$$\int \arctan 2x dx = x\arctan 2x - \int \frac{2xdx}{1+4x^2} = x\arctan 2x - \frac{1}{4}\ln(1+4x^2) + C$$

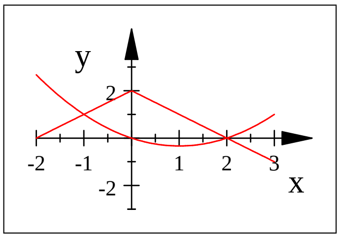
bulunur.

b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x+\cos x}{\sqrt[3]{\sin x-\cos x}}dx$. $\sin x - \cos x = t$ denirse $(\cos x + \sin x)dx = dt$ olur. Ayrıca $x = 0$ için $t = -1$ ve $x = \frac{\pi}{4}$ için $t = 0$ olur. O zaman

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x+\cos x}{\sqrt[3]{\sin x-\cos x}}dx = \int_{-1}^{0}\frac{dt}{\sqrt[3]{t}} = \lim_{s\to 0^-}\int_{-1}^{s}\frac{dt}{\sqrt[3]{t}} = \lim_{s\to 0^-}\frac{3}{2}\left(s^{\frac{2}{3}} - (-1)^{\frac{2}{3}}\right) = -\frac{3}{2}$$

bulunur.

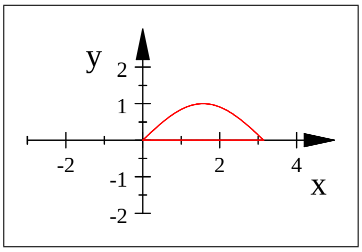
2. $y = 2 - |x|$ ve $y = \dfrac{x^2 - 2x}{3}$ eğrileri arasında kalan bölgenin alanını hesaplayınız. Verilen eğrilerin kesim noktaları $x = -1$ ve $x = 2$ noktalarıdır. Buna göre



$$A = \int_{-1}^{0} \left(2 + x - \frac{x^2 - 2x}{3}\right) dx + \int_{0}^{2} \left(2 - x - \frac{x^2 - 2x}{3}\right) dx = \frac{7}{2} \text{ br}^2$$

bulunur.

3. $y = \sin x$ eğrisinin $[0, \pi]$ aralığında kalan parçası ve x-ekseni arasında kalan bölgenin y-ekseni etrafında döndürümesi ile oluşan cismin hacmini bulunuz.



Silindirik kabuk yöntemi ile istenen cismin hacmi ($u = x$, $dv = \sin x dx$ ile kısmi integrasyon uygulayarak)

$$V = 2\pi \int_0^{\pi} x \sin x dx = 2\pi \left(-x \cos x + \sin x \Big|_0^{\pi} \right) = 2\pi^2 \text{ br}^3$$

bulunur. Disk yöntemi ile istene cismin hacmini bulmak için

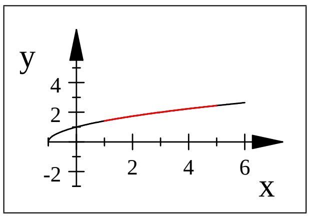
$$V = \pi \int_0^1 (x_{sağ}^2 - x_{sol}^2)\, dy$$

integralini hesaplamak gerekir. Burada $x_{sol} = \arcsin y$ ve $x_{sağ} = \pi - \arcsin y$ olduğuna dikkat etmek gerekir. Bu durumda

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^1 \left((\pi - \arcsin y)^2 - (\arcsin y)^2\right) dy = \pi \int_0^1 \pi(\pi - 2\arcsin y) dy \\ &= \pi^2 \left(\pi - 2\int_0^1 \arcsin y dy\right) = \pi^2 \left(\pi - 2\left(\sqrt{1 - y^2} + y \arcsin y \Big|_0^1\right)\right) = 2\pi^2 \text{ br}^3 \end{aligned}$$

bulunur.

4. $1 \leq x \leq 5$ olmak üzere $y = \sqrt{x+1}$ eğri parçasının x-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan yüzeyin alanını hesaplayınız. $y = \sqrt{x+1}$ ise $y' = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$ olur.



$$\begin{aligned} S &= 2\pi \int_1^5 y\sqrt{1 + (y')^2} dx = 2\pi \int_1^5 \sqrt{x+1}\sqrt{1 + \left(\frac{1}{2\sqrt{x+1}}\right)^2} dx \\ &= 2\pi \int_1^5 \sqrt{x+1}\sqrt{\frac{4x+5}{4(x+1)}} dx = \pi \int_1^5 \sqrt{4x+5} dx \\ &= \pi \frac{2}{3}\frac{(4x+5)^{\frac{3}{2}}}{4}\Bigg|_1^5 = \frac{\pi}{6}(125 - 27) = \frac{49\pi}{3} \text{ br}^2 \end{aligned}$$

bulunur.

5. Aşağıda verilen genelleştirilmiş integrallerin yakınsak olup olmadığını araştırınız.

a) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1-x^3}$. Verilen integral bir ikinci tip genelleştirilmiş integraldir. $f(x) = \frac{1}{1-x^3} = \frac{1}{(1-x)(x^2+x+1)}$ olup limit testi uygulanırsa

$$\lim_{x\to 1^-} (1-x)^p f(x) = \lim_{x\to 1^-} (1-x)\frac{1}{(1-x)(x^2+x+1)} = \frac{1}{3}$$

olur. Yani $p=1$ ve $\gamma = \frac{1}{3}$ olduğundan verilen integral limit testi gereğince ıraksaktır.

b) $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{x+e^x}$. Verilen integral bir birinci tip genelleştirilmiş integraldir. $f(x) = \frac{1}{x+e^x}$ olup limit testi uygulanırsa

$$\lim_{x\to\infty} x^p f(x) = \lim_{x\to\infty} x^2 \frac{1}{x+e^x} = 0$$

olur. Yani $p=2$ ve $\gamma = 0$ olduğundan verilen integral limit testi gereğince yakınsaktır. Yine $x \geq 0$ için $f(x) = \frac{1}{x+e^x} \leq \frac{1}{e^x}$ ve $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{e^x} = \Gamma(1) = 1$ olduğundan karşılaştırma testine görede verilen integralin yakınsak olduğu görülebilir.

Part II

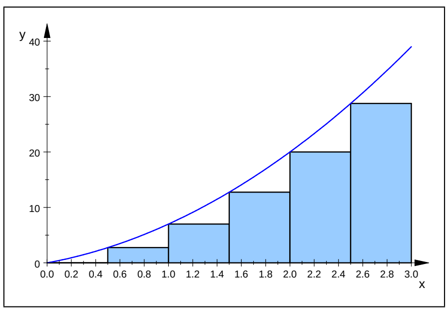
2015 MATEMATİK-II SINAV SORULARI

4 ARASINAV (11.04.2015)

1. $f(x) = 4x + 3x^2$ ile tanımlı f fonksiyonu $[0,3]$ aralığında tanımlansın. Bu aralığı altı eşit parçaya bölerek ve her alt aralığın sol uç noktasını seçerek f nin Riemann toplamını bulunuz. Hesapladığınız alanı grafik üzerinde gösteriniz.

$[0,3]$ aralığının altı eşit parçaya bölünmesinden elde edilen parçalanma $P = \{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3\}$ olur. $1 \leq i \leq 6$ için alt aralıklar $[x_{i-1}, x_i]$ olmak üzere $\Delta x_i = \frac{3-0}{6} = \frac{1}{2}$ olur. Herbir alt aralığın sol uç noktası seçileceğinden $x_i' = x_{i-1} = \frac{i-1}{2}$ olup istenen Riemann toplamı

$$\begin{aligned}
R &= \sum_{i=1}^{6} f(x_i')\Delta x_i = \sum_{i=1}^{6} f(\frac{i-1}{2})\frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{6}\left[4\left(\frac{i-1}{2}\right) + 3\left(\frac{i-1}{2}\right)^2\right] \\
&= \sum_{i=1}^{6}(i-1) + \frac{3}{8}\sum_{i=1}^{6}(i-1)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{5} i + \frac{3}{8}\sum_{i=1}^{5} i^2 = \frac{5.6}{2} + \frac{3}{8}.\frac{5.6.11}{6} = \frac{285}{4}
\end{aligned}$$



2. Aşağıdaki belirsiz integralleri hesaplayınız.

a)
$$\int\left(\frac{e^x}{x}-\frac{e^x}{x^2}\right)dx=\int\frac{e^x}{x}dx-\int\frac{e^x}{x^2}dx$$
Eşitliğin sağ tarafındaki ikinci integrale kısmi integrasyon uygulayalım. $u=e^x$, $dv=\frac{dx}{x^2}$ dersek $du=e^x$ ve $v=-\frac{1}{x}$ olur. O zaman
$$\int\frac{e^x}{x^2}dx=-\frac{e^x}{x}+\int\frac{e^x}{x}dx$$
olduğundan
$$\int\left(\frac{e^x}{x}-\frac{e^x}{x^2}\right)dx=\int\frac{e^x}{x}dx-\int\frac{e^x}{x^2}dx=\int\frac{e^x}{x}dx-\left[-\frac{e^x}{x}+\int\frac{e^x}{x}dx\right]=\frac{e^x}{x}+C$$
bulunur.

- II. Yol
$$\int\left(\frac{e^x}{x}-\frac{e^x}{x^2}\right)dx=\int\frac{xe^x-e^x}{x^2}dx=\int d\left(\frac{e^x}{x}\right)=\frac{e^x}{x}+C$$

b) Verilen integrant bir rasyonel fonksiyondur. Polinom bölmesi yapıldığında
$$\int\frac{x^4}{x^4-1}dx=\int\left(1+\frac{1}{x^4-1}\right)dx=x+\int\frac{dx}{x^4-1}$$
olur. İkinci taraftaki integral basit kesirlere ayrılarak hesaplanır. İntegrantın basit kesirlere ayrımı
$$\frac{1}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{Cx+D}{x^2+1}$$
olcağından payda eşitleme ile
$$1=A(x+1)(x^2+1)+B(x-1)(x^2+1)+(Cx+D)(x^2-1)$$
olur. Burada $x=1$ yazıldığında $A=\frac{1}{4}$, $x=-1$ yazıldığında $B=-\frac{1}{4}$ olur. $x=0$ yazıldığında $A-B-D=1$ eşitliğinden $D=-\frac{1}{2}$ olur. Yine $x=2$ yazıldığında $15A+5B+6C+3D=1$ den $C=0$ olur.O zaman
$$\begin{aligned}\int\frac{dx}{x^4-1}&=\frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}-\frac{2}{x^2+1}\right)dx\\&=\frac{1}{4}\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)-\frac{1}{2}\arctan x\end{aligned}$$
olacağından
$$\int\frac{x^4}{x^4-1}dx=x+\frac{1}{4}\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)-\frac{1}{2}\arctan x+C$$
bulunur.

3. Aşağıdaki limit ve belirli integrali hesaplayınız.

a) Verilen limit yeniden düzenlendiğinde $0/0$ belirsizliğine sahip olduğu görülmektedir. O zaman L'Hopital uygulayarak
$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{1}{x-\sin x}\int_0^{x^3}\sqrt{2+t^4}dt&=\lim_{x\to0}\frac{\int_0^{x^3}\sqrt{2+t^4}dt}{x-\sin x}\\&=\lim_{x\to0}\frac{3x^2\sqrt{2+x^{12}}}{1-\cos x}\\&=3\sqrt{2}\lim_{x\to0}\frac{x^2}{1-\cos x}\\&=3\sqrt{2}\lim_{x\to0}\frac{2x}{\sin x}=6\sqrt{2}\end{aligned}$$
bulunur.

b) Verilen integral simetrik aralıkta çift fonksiyonun integralidir. O zaman

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left|\cos^3 x\right| dx = 2\int_0^{\pi} \left|\cos^3 x\right| dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x dx - 2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos^3 x dx$$

olur. İkinci integralde $x = \pi - t$ dönüşümü yaparsak

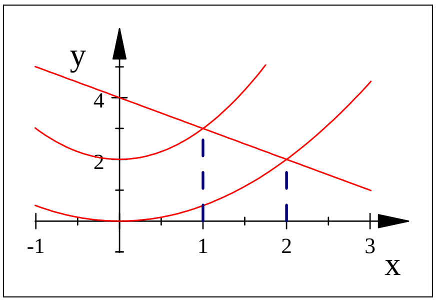
$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos^3 x dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} -\cos^3(\pi - t) dt = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 t dt$$

olur. O zaman

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \left|\cos^3 x\right| dx &= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x dx = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 x)\cos x dx \\ &= 4\left(\sin x - \frac{\sin^3 x}{3}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{8}{3} \end{aligned}$$

bulunur.

4. Birinci bölgede, $y = \frac{1}{2}x^2$, $y = x^2 + 2$ eğrileri ile $x + y = 4$ doğrusu tarafından sınırlanan bölgenin alanını hesaplayınız. Bahsedilen bölge şekilde verilmiştir.



O zaman bölgenin alanı

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 (x^2 + 2 - \frac{x^2}{2}) dx + \int_1^2 (4 - x - \frac{x^2}{2}) dx \\ &= \frac{13}{6} + \frac{4}{3} = \frac{7}{2} \text{ br}^2 \end{aligned}$$

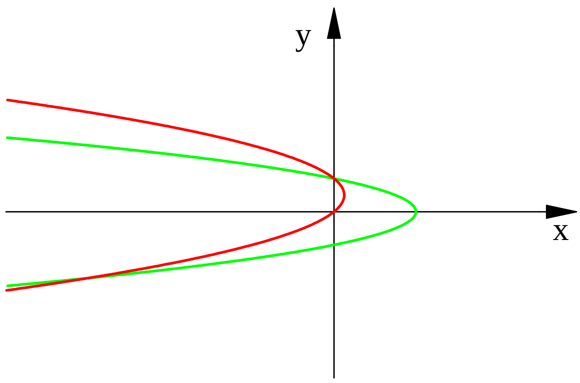
olur.

5. $x = 2 - 2y^2$ ve $x = y - y^2$ eğrileri ile sınırlı bölgenin alanını hesaplayınız. Verilen eğrilerin kesim noktalarının ordinatları

$$2 - 2y^2 = y - y^2 \text{ veya } y^2 + y - 2 = 0$$

eşitliğinden $y = 1$ ve $y = -2$ olarak bulunur. O zaman istenen alan

$$A = \int_{-2}^{1} (2 - 2y^2 - y + y^2) dy = \frac{9}{2} \text{ br}^2$$



5 FİNAL (01.06.2015)

1. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

   a) Kısmi integrasyon yöntemini dikkate alark $u = (\ln x)^2$ ve $dv = dx$ dersek $du = \frac{2\ln x}{x}dx$ ve $v = x$ olur O zaman
   $$\int (\ln x)^2 dx = x(\ln x)^2 - \int 2\ln x dx$$
   olur. Yine bir Kısmi integrasyon işlemi ile
   $$\int (\ln x)^2 dx = x(\ln x)^2 - 2x\ln x + 2x + C$$
   bulunur.

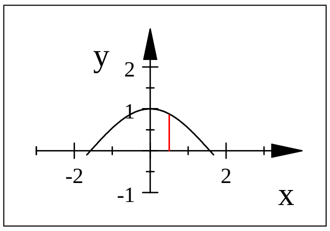
   b) Aşağıda ikinci satırda bulunan ilk integral simetrik bir aralıkta tek fonksiyonun integrali olduğundan değeri sıfırdır. İkinci integralde ise simetrik bir aralıkta çift fonksiyonun integralinin özelliği göz önüne alınmıştır.
   $$\begin{aligned}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \arcsin x dx &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}} \arcsin x dx \\ &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx - \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= -2\int_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx\end{aligned}$$
   Bu son integralde $u = \arcsin x$ ve $dv = \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$ ile kısmi integrasyon metodu kullanılırsa $du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ ve $v = -\sqrt{1-x^2}$ olur O zaman
   $$\begin{aligned}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \arcsin x dx &= -2\int_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx = -2\left(-\sqrt{1-x^2}\arcsin x + \int dx\right)\Big|_0^{\frac{1}{2}} \\ &= -2\left(-\sqrt{1-x^2}\arcsin x + x\right)\Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{6}\sqrt{3}\pi - 1\end{aligned}$$

2. Aşağıdaki integrallerin yakınsaklık durumunu inceleyiniz.

   a) $\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{\sqrt{1-x}} dx$ integrali ikinci tip bir genelleştirilmiş integraldir. $x = 1$ noktasında integrantın sınırsızlığı mevcuttur. İkinci tip genelleştirilmiş integraller için limit testini göz önüne alırsak
   $$\lim_{x\to 1^-} (1-x)^p f(x) = \gamma$$
   limitinde $p \geq 1$ ve $\gamma \neq 0$ ise integral ıraksak, $p < 1$ ve γ sonlu ise integral yakınsaktır. O zaman $p = \frac{3}{4}$ alırsak
   $$\lim_{x\to 1^-} (1-x)^{\frac{3}{4}} \frac{\ln(1-x)}{\sqrt{1-x}} = \lim_{x\to 1^-} (1-x)^{\frac{1}{4}} \ln(1-x) = 0$$
   olacağından verilen integral yakınsaktır.

   b) $\int_1^\infty \frac{x}{x^4+1} dx$ integrali birinci tip bir genelleştirilmiş integraldir. Birinci tip genelleştirilmiş integraller için limit testini göz önüne alırsak
   $$\lim_{x\to\infty} x^p f(x) = \gamma$$
   limitinde $p \leq 1$ ve $\gamma \neq 0$ ise integral ıraksak, $p > 1$ ve γ sonlu ise integral yakınsaktır. O zaman $p = 3$ alırsak
   $$\lim_{x\to\infty} x^3 \frac{x}{x^4+1} = 1$$
   olacağından verilen integral yakınsaktır.

3. Bir cismin tabanı $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ aralığında $y = \cos x$ eğrisi ile x-ekseni ile sınırlanmıştır. Cismin x-eksenine dik düzlemlerle ara kesitleri eşkenar üçgenler olduğuna göre cismin hacmini hesaplayınız.

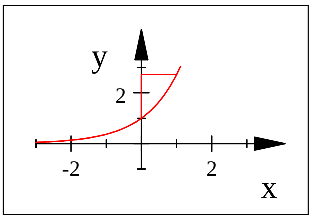


Cismin x-eksenine dik bir düzlemle herhengi bir $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ noktasından alınan kesiti, bir kenarı $\cos x$ br uzunluğunda olan bir eşkenar üçgen olur. O zaman bu eşkenar üçgenin alanı $A(x) = \frac{\sqrt{3}}{4}\cos^2 x$ olacağından cismin hacmi

$$V = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} A(x)dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{3}}{4}\cos^2 x dx = \frac{\sqrt{3}}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2x)dx = \frac{\sqrt{3}\pi}{8} \text{ br}^3$$

bulunur.

4. $y = e^x$ eğrisi, $y = e$ doğrusu ve y-ekseni arasınnda kalan bölgenin x-ekseni etrafında döndürülmesi ile oluşan cismin hacmini hesaplayınız.



Cismin hacmi Disk ve Kabuk yöntetemleri ile hesaplanabilir.

Disk Yöntemi ile

$$V = \pi\int_0^1 (e^2 - (e^x)^2)dx = \frac{\pi}{2}\left(e^2+1\right) \text{ br}^3$$

Kabuk yöntemi ile de

$$V = 2\pi\int_1^e y\ln y dy = \frac{\pi}{2}\left(e^2+1\right) \text{ br}^3$$

olarak bulunur.

5. $f(x) = \frac{x^3}{12} + \frac{1}{x}$ eğrisinin $1 \leq x \leq 4$ arasında kalan parçasının uzunluğunu hesaplayınız.

$y = f(x)$, $a \leq x \leq b$ eğri parçasının uzunluğu $l = \int_a^b \sqrt{1+(y')^2}dx$ ile hesaplanmaktadır. $f(x) = \frac{x^3}{12} + \frac{1}{x}$ için

$$1 + (f'(x))^2 = 1 + \left(\frac{x^2}{4} - \frac{1}{x^2}\right)^2 = \left(\frac{x^2}{4} + \frac{1}{x^2}\right)^2$$

olduğundan

$$l = \int_1^4 \left(\frac{x^2}{4} + \frac{1}{x^2}\right)dx = 6 \text{ br.}$$

a) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{n}\right)^n$ limitinin değerini hesaplayınız.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x = e^2 \ (\lambda = 2)$$

b) Genel terimi $a_n = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \cdots + \dfrac{1}{2n}$ olan dizinin yakınsak olduğunu gösteriniz.
Verilen dizinin monoton ve sınırlı olduğunu gösterelim. Her n pozitif tam sayısı için

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} > 0$$

olduğundan (a_n) dizisi monoton artandır. Diğer taraftan

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n} \leq a_n \leq \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1} < 1$$

olduğundan (a_n) dizisi sınırlıdır. Dolayısıyla yakınsaktır.

6 BÜTÜNLEME (22.06.2015)

1. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

a) $\displaystyle\int \frac{x^2+15}{(x-3)(x^2-2x-3)}dx$

$$\frac{x^2+15}{(x-3)(x^2-2x-3)} = \frac{x^2+15}{(x-3)^2(x+1)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{(x-3)^2} + \frac{C}{x+1}$$

den $A=0$, $B=6$ ve $C=1$ bulunur. Böylece

$$\int \frac{x^2+15}{(x-3)(x^2-2x-3)}dx = \int \left(\frac{6}{(x-3)^2} + \frac{1}{x+1}\right)dx = -\frac{6}{x-3} + \ln(x+1) + C$$

elde edilir.

b) $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \ln\left(\tfrac{1-x}{1+x}\right)\sin^4 x dx$ integralinin integrasyon aralığı simetriktir. $f(x) = \ln\left(\tfrac{1-x}{1+x}\right)\sin^4 x$ dersek $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ için

$$f(-x) = \ln\left(\tfrac{1+x}{1-x}\right)\sin^4(-x) = -\ln\left(\tfrac{1-x}{1+x}\right)\sin^4 x = -f(x)$$

olduğundan integrant bir tek fonksiyondur. O zaman

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \ln\left(\tfrac{1-x}{1+x}\right)\sin^4 x dx = 0$$

bulunur.

2. Aşağıdaki integrallerin yakınsaklık durumunu inceleyiniz. Yakınsak olanların değerini hesaplayınız.

a)

$$\begin{aligned}\int_0^\infty xe^{-x^2}dx &= \lim_{t\to\infty}\int_0^t xe^{-x^2}dx = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{2}\int_0^t 2xe^{-x^2}dx \\ &= \lim_{t\to\infty}\left(-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right)\Bigg|_0^t = \lim_{t\to\infty}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-t^2}\right) = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

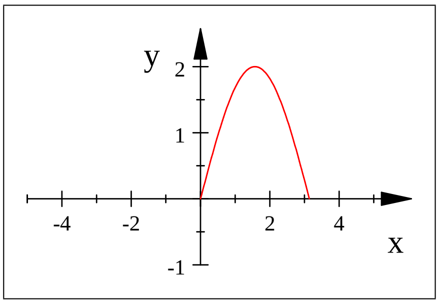
bulunur. Yani integral yakınsaktır.

b)

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{\arctan x}{x^2+1}dx &= \lim_{t\to\infty}\int_0^t \frac{\arctan x}{x^2+1}dx = \lim_{t\to\infty}\frac{(\arctan x)^2}{2}\Bigg|_0^t \\ &= \lim_{t\to\infty}\frac{(\arctan t)^2}{2} = \frac{1}{8}\pi^2\end{aligned}$$

bulunur. Yani integral yakınsaktır.

3. $y = 2\sin x$, $0 \leq x \leq \pi$ eğri parçası ve x-ekseni arasında kalan bölgenin y-ekseni etrafında döndürülmesi ile oluşan cismin hacmini hesaplayınız.

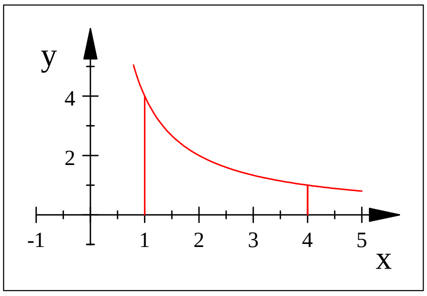


Silindirik kabuk yöntemi göz önüne alınarak bir kısmi intagrasyon işlemi ile

$$V = 2\pi \int_0^\pi x2 \sin x dx = 4\pi^2 \text{ br}^3$$

bulunur.

4. $y = \dfrac{4}{x}$ eğrisi ile, $x = 1, x = 4$ ve $y = 0$ doğruları arasında kalan bölgenin x-ekseni etrafında döndürülmesi ile oluşan cismin hacmini hesaplayınız.

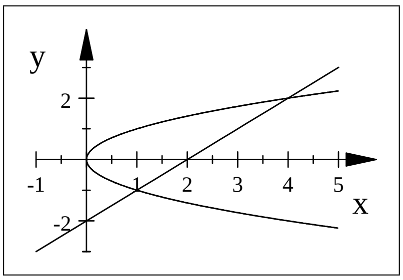


Disk yöntemi göz önüne alınarak

$$V = \pi \int_1^4 \left(\frac{4}{x}\right)^2 dx = 16\pi \left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_1^4 = 12\pi \text{ br}^3$$

bulunur.

5. Üstten x-ekseni, alttan $x = y^2$ eğrisi ve $y = x - 2$ doğrusuyla sınırlı bölgenin alanını hesaplayınız.



$$A = \int_0^1 (0 - (-\sqrt{x}))dx + \int_1^2 (0 - (x - 2))dx = \frac{7}{6}$$

veya

$$A = \int_{-1}^0 ((y + 2) - y^2)dy = \frac{7}{6}$$

bulunur.

6. $a_1 = \sqrt{2}$ ve $n \geq 1$ için $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$ bağıntısını sağlayan (a_n) dizisinin yakınsak olduğunu gösterip limitini hesaplayınız. Verilen dizinin önce yakınsak olduğunu gösterelim. Bunun için sınırlı ve monoton

olduğunu göstermek yeterlidir. Her n pozitif tam sayısı için $a_n > 0$ olduğu açıktır. Yani dizi alttan sınırlıdır. Şimdi

$$\begin{aligned} a_1 &= \sqrt{2} < 2 \\ a_2 &= \sqrt{2+a_1} < \sqrt{2+2} = 2 \\ a_3 &= \sqrt{2+a_2} < \sqrt{2+2} = 2 \\ &\vdots \\ a_n &= \sqrt{2+a_{n-1}} < \sqrt{2+2} = 2 \end{aligned}$$

olduğundan dizinin bütün terimleri 2 den küçüktür. Yani dizi üstten de sınırlıdır. Şimdi her n pozitif tamsayısı için

$$a_{n+1} - a_n = \sqrt{2+a_n} - a_n = \frac{2 + a_n - a_n^2}{\sqrt{2+a_n} + a_n} = \frac{(2-a_n)(1+a_n)}{\sqrt{2+a_n} + a_n} > 0$$

olduğundan $a_{n+1} > a_n$ olur. Yani verilen dizi monoton artandır. O halde dizi monoton ve sınırlı olduğundan yakınsaktır. Dolayısıyla $a_n \to x$ olacak şekilde bir x reel sayısı vardır. O zaman $a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}$ eşitliğinden $n \to \infty$ için limit alınırsa $x = \sqrt{2+x}$ veya $x^2 - x - 2 = 0$ bulunur. Buradan dizinin terimlerinin negatif olmadığı dikkate alınarak $\lim_{n\to\infty} a_n = x = 2$ bulunur.

Part III
2016 MATEMATİK-II SINAV SORULARI

7 ARASINAV (02.04.2016)

1. $f(x) = 4x - x^3$ fonksiyonu $[0,1]$ aralığı üzerinde göz önüne alınsın. Bu aralığı n eşit parçaya ayırıp, her bir alt aralığın sağ uç noktasını seçerek f nin R_n Riemann toplamını bulunuz. Ayrıca $\lim_{n\to\infty} R_n$ limitini hesaplayınız.

   $[0,1]$ aralığı n eşit parçaya ayrıldığında parçalanma $P = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \cdots \frac{i}{n}, \cdots, 1\}$ olup her bir alt aralığın uzunluğu $\Delta x_i = \frac{1}{n}$ olur. Yine her bir $[x_{i-1}, x_i]$ alt aralığının sağ uç noktası $x_i = \frac{i}{n}$ dir. O zaman istenen Riemann toplamı

$$\begin{aligned} R_n &= \sum_{i=1}^{n} f(x_i')\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} f(\frac{i}{n})\frac{1}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{4i}{n} - \left(\frac{i}{n}\right)^3\right) \\ &= \frac{4}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i - \frac{1}{n^4}\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{4}{n^2}\frac{n(n+1)}{2} - \frac{1}{n^4}\frac{n^2(n+1)^2}{4} \\ &= 2\frac{n(n+1)}{n^2} - \frac{1}{4}\frac{n^2(n+1)^2}{n^4} \end{aligned}$$

   olarak bulunur. Sonuç olarak

$$\lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty}\left(2\frac{n(n+1)}{n^2} - \frac{1}{4}\frac{n^2(n+1)^2}{n^4}\right) = \frac{7}{4}$$

   olur.

2. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

   a) Kısmi integrasyon metodunu dikkate alıp $u = (\arcsin x)^2$ ve $dv = dx$ denirse $du = \frac{2\arcsin x dx}{\sqrt{1-x^2}}$ ve $v = x$ olacağından

$$\int (\arcsin x)^2 dx = x(\arcsin x)^2 - 2\int \frac{x \arcsin x dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

   olur. Yine ikinci intagralde de $u = \arcsin x$ ve $dv = \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}}$ denirse $du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ ve $v = -\sqrt{1-x^2}$ olur. O zaman

$$\begin{aligned} \int (\arcsin x)^2 dx &= x(\arcsin x)^2 - 2\int \frac{x \arcsin x dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= x(\arcsin x)^2 - 2\left(-\sqrt{1-x^2}\arcsin x - \int -dx\right) \\ &= x(\arcsin x)^2 - 2\left(-\sqrt{1-x^2}\arcsin x + x\right) + C \\ &= x(\arcsin x)^2 + 2\sqrt{1-x^2}\arcsin x - 2x + C \end{aligned}$$

bulunur.

b) Basit kesirlere ayırma ile integrasyon yöntemi kullanılacaktır. Ozaman

$$\frac{1}{x^3-x^2+x-1} = \frac{1}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

den

$$1 = A(x^2+1) + (Bx+C)(x-1)$$

olur. O zaman $x=1$ yazıldığında $A=\frac{1}{2}$ bulunur. Yine $x=0$ yazıldığında $C=-\frac{1}{2}$ bulunur. Yine $x=2$ yazıldığında da $B=-\frac{1}{2}$ bulunur. Böylece

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{x^3-x^2+x-1} &= \int \frac{dx}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{x+1}{x^2+1}\right) dx \\
&= \frac{1}{2}\ln(x-1) - \frac{1}{2}\int \frac{x+1}{x^2+1} dx \\
&= \frac{1}{2}\ln(x-1) - \frac{1}{4}\int \frac{2x}{x^2+1} dx - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+1} \\
&= \frac{1}{2}\ln(x-1) - \frac{1}{4}\ln(x^2+1) - \frac{1}{2}\arctan x + C
\end{aligned}$$

olarak hesaplanır.

3. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız

a) İntegrant tanjant ile sekantın kuvvetlerinin çarpımıdır. $\sec x = t$ denirse $\tan x \sec x dx = dt$ olacağından

$$\begin{aligned}
\int \tan^3 x \sec x dx &= \int \tan^2 x \tan x \sec x dx \\
&= \int (\sec^2 x - 1) \tan x \sec x dx \\
&= \int (t^2-1) dt = \frac{t^3}{3} - t + C \\
&= \frac{\sec^3 x}{3} - \sec x + C
\end{aligned}$$

bulunur.

b) İntegrant bir irrasyonel fonksiyondur. İlk olarak kök içinin türevi pay kısmında oluşturularak işlem yapılır.

$$\begin{aligned}
\int \frac{3x+2}{\sqrt{3-2x-x^2}} dx &= -\frac{3}{2}\int \frac{-2x-\frac{4}{3}}{\sqrt{3-2x-x^2}} dx \\
&= -\frac{3}{2}\int \frac{-2x-2}{\sqrt{3-2x-x^2}} dx - \int \frac{dx}{\sqrt{3-2x-x^2}}
\end{aligned}$$

Burada ilk integralde $3-2x-x^2=t$ dönüşümü yapılır. İkinci integral ise $3-2x-x^2 = 4-(x+1)^2$ şeklinde yazılarak

$$\begin{aligned}
\int \frac{3x+2}{\sqrt{3-2x-x^2}} dx &= -\frac{3}{2}\int \frac{-2x-\frac{4}{3}}{\sqrt{3-2x-x^2}} dx \\
&= -\frac{3}{2}\int \frac{-2x-2}{\sqrt{3-2x-x^2}} dx - \int \frac{dx}{\sqrt{3-2x-x^2}} \\
&= -\frac{3}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} - \int \frac{dx}{\sqrt{4-(x+1)^2}} \\
&= -3\sqrt{t} - \arcsin(\frac{x+1}{2}) + C \\
&= -3\sqrt{3-2x-x^2} - \arcsin(\frac{x+1}{2}) + C
\end{aligned}$$

olarak hesaplanır.

c) İntegrantta $1-\cos 2x = 2\sin^2 x$ yazarak

$$\begin{aligned}
\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\cos 2x}dx &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2\sin^2 x}dx = \sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\sin x|\, dx \\
&= 2\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin x|\, dx = 2\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx \\
&= 2\sqrt{2}(-\cos\frac{\pi}{2} + \cos 0) = 2\sqrt{2}
\end{aligned}$$

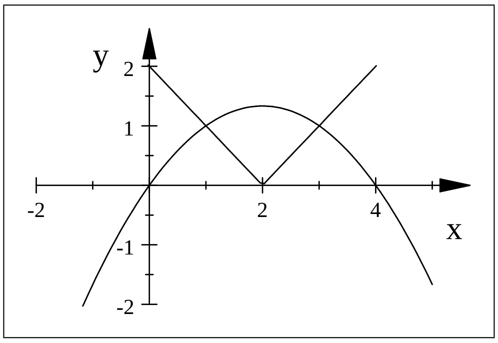
bulunur.

4. $y = |x-2|$ ve $y = \dfrac{4x-x^2}{3}$ eğrileri ile sınırlı bölgenin alanını hesaplayınız.

$x > 2$ için $y = x-2$ doğrusu ile $y = \dfrac{4x-x^2}{3}$ eğrinin kesm noktası $x = 3$ olur. Yine $x < 2$ için $y = 2-x$ doğrusu ile $y = \dfrac{4x-x^2}{3}$ eğrinin kesm noktası $x = 1$ olur. O zaman istenen bölgenin alanı

$$\begin{aligned}
A &= \int_1^2 [(\frac{4x-x^2}{3}) - (2-x)]dx + \int_2^3 [(\frac{4x-x^2}{3}) - (x-2)]dx \\
&= \frac{13}{9}\text{br}^2
\end{aligned}$$

bulunur.



8 FİNAL (24.05.2016)

1. $2x = 4-y^2$ ve $2x = y^2-4$ parabolleri arasında kalan bölgenin $x = -3$ doğrusu etrafında döndürülmesi ile elde edilen cismin hacmini hesaplayınız.

2. Aşağıdaki integrallerin yakınsaklık durumunu inceleyiniz. Yakınsak olanların değerini bulunuz.

   (a) $\int_0^1 \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

   (b) $\int_0^\infty e^{-x^2}dx$

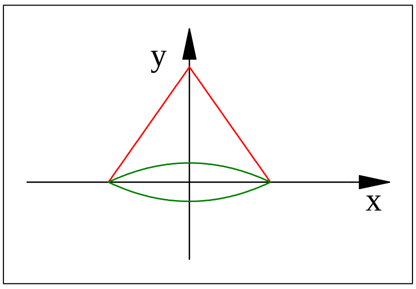
3. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

   (a) $\int \dfrac{dx}{x^3+x}$

   (b) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \dfrac{dx}{1+4\sin^2 x}$

   (c)$\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x dx$

4. Yandaki şekilde verilen taban yarıçapı r olan ve yüksekliği h birim olan dairesel koninin yüzey alanının $S = \pi r\sqrt{r^2+h^2}$ br^2 olduğunu gösteriniz.



9 BÜTÜNLEME (14.06.2016)

1. Aşağıda verilen integralleri hesaplayınız.

   - $$\frac{1}{x^3+1} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1}$$

     eşitliğinden $(A+B)x^2 + (B+C-A)x + A + C = 1$ yazılabilir. Buradan $A = \frac{1}{3}, B = -\frac{1}{3}$ ve $C = \frac{2}{3}$ bulunur. O zaman

     $$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{x^3+1} &= \frac{1}{3}\int \left(\frac{1}{x+1} + \frac{2-x}{x^2-x+1}\right) dx \\
&= \frac{1}{3}\ln(x+1) - \frac{1}{6}\int \frac{2x-4}{x^2-x+1} dx \\
&= \frac{1}{3}\ln(x+1) - \frac{1}{6}\ln(x^2-x+1) + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2-x+1} \\
&= \frac{1}{3}\ln(x+1) - \frac{1}{6}\ln(x^2-x+1) + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} \\
&= \frac{1}{3}\ln(x+1) - \frac{1}{6}\ln(x^2-x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}) + C
\end{aligned}$$

     bulunur.

   - $\tan\frac{x}{2} = t$ dönüşümü uygulanırsa $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ ve $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$ olduğundan

     $$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{2+\cos x} &= \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{2+\frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{2dt}{3+t^2} \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan(\frac{t}{\sqrt{3}}) + C \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan(\frac{\tan\frac{x}{2}}{\sqrt{3}}) + C
\end{aligned}$$

     bulunur.

2. Aşağıdaki integrallerin değerlerini bulunuz.

   - $e^x - 1 = t^2$ dönüşümü ile

     $$\begin{aligned}
\int_0^{\ln 5} \frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3} dx &= \int_0^2 \frac{2t^2 dt}{t^2+4} = 2\int_0^2 \left(1 - \frac{4}{t^2+4}\right) dt \\
&= 2(t - 2\arctan\frac{t}{2})\Big|_0^2 = 2(2-\frac{\pi}{2}) = 4-\pi
\end{aligned}$$

     bulunur.

   - $$\begin{aligned}
\int_0^2 x|1-x^2|dx &= \int_0^1 x(1-x^2)dx + \int_1^2 x(x^2-1)dx \\
&= \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\Big|_0^1 + \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\Big|_1^2 \\
&= \frac{1}{4} + \frac{9}{4} = \frac{5}{2}
\end{aligned}$$

     bulunur.

- Verilen integral bir ikinci tip genelleştirilmiş integraldir. $x = 1$ noktasında integrant sonsuz süreksizliğe sahiptir. O zaman integral

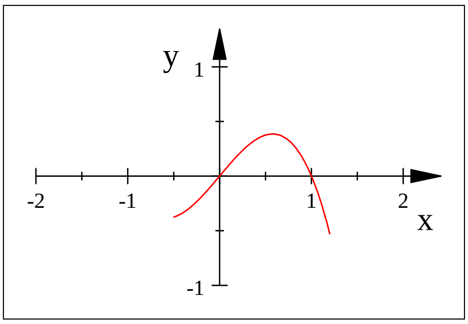
$$\int_0^2 \frac{xdx}{(x^2-1)^3} = \int_0^1 \frac{xdx}{(x^2-1)^3} + \int_1^2 \frac{xdx}{(x^2-1)^3}$$

biçiminde ikiye ayrılmalıdır. Şimdi sağ taraftaki ilk integrali dikkate alalım.

$$\lim_{x\to 1^-} (1-x)^3 \frac{x}{(x^2-1)^3} = -\frac{1}{8}$$

olduğundan ikinci tip genelleştirilmiş integraller için limit testi gereği sağ taraftaki ilk integral ıraksaktır. Dolayısıyla verilen integralde ıraksak olacağından bir reel sayıya karşılık gelmez.

3. Birinci bölgede $y = x - x^3$ eğrisi ile x ekseni arasında kalan bölgenin y ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmini bulunuz.



Silindirik kabuk yöntemi ile belirtilen cismin hacmi kolaylıkla hesaplanabilir.

$$V = 2\pi \int_0^1 x(x - x^3)dx = \frac{4\pi}{15} \text{ br}^3$$

bulunur.

4. $y = \frac{2}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}}$ eğrisinin $x = 0$ ve $x = 2$ apsisli noktaları arasında kalan parçasının uzunluğunu bulunuz.
Belirtilen eğri parçasının uzunluğu

$$l = \int_0^2 \sqrt{1 + (y')^2}dx$$

biçiminde hesaplanır. O zaman $y' = 2x(x^2+1)^{\frac{1}{2}}$ olduğundan

$$l = \int_0^2 \sqrt{1 + 4x^2(x^2+1)}dx = \int_0^2 (2x^2+1)dx = \frac{2}{3}x^3 + x\Big|_0^2 = \frac{22}{3}\text{br}$$

bulunur.

5. Genel terimi $a_n = \frac{2^n}{n!}$ olan dizinin yakınsak olup olmadığını araştırınız.
Her n pozitif tam sayısı için $a_n \geq 0$ olduğu görülmektedir. Ayrıca her n pozitif tam sayısı için

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2^n}{n!} = \frac{2.2.2\cdots 2}{1.2.3\cdots n} \\ &\leq 2.1.\frac{2}{3}.\frac{2}{3}\cdots\frac{2}{3} \\ &= 2(\frac{2}{3})^{n-2} \\ &= \frac{9}{2}(\frac{2}{3})^n \end{aligned}$$

olur. Yani her n pozitif tam sayısı için $0 \leq a_n \leq \frac{9}{2}(\frac{2}{3})^n$ olduğundan sıkıştırma teoremi gereği $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ olur. Dolayısıyla (a_n) dizisi 0 a yakınsar.

Part IV
2017 MATEMATİK-II SINAV SORULARI

10 ARASINAV (08.04.2017)

1. $f(x) = x^3 - 6x$ fonksiyonunu ve $[0,3]$ aralığını göz önüne alalım. $[0,3]$ aralığını altı eşit parçaya ayırıp herbir alt aralığın sağ uç noktasını seçerek bu parçalanmaya karşılık gelen R_n Riemann toplamını bulunuz.

2. Aşağıdaki limit ve türevi hesaplayınız.

   (a) $\lim_{n\to\infty} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{n}{n^2+i^2}$

   (b) $\lim_{x\to 1} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = 2$ ve $y = \int_0^{f(x)} \cos(t^2)dt$ ise $y'(1) = ?$

3. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

   (a) $\int \tan^8 x \sec^4 x dx$

   (b) $\int \dfrac{x^5+1}{x^3(x+2)} dx$

4. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

   (a) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (1-x^3)\tan^2 x dx$

   (b) $\int_{-1}^{2} \left|x - x^2\right| dx$

5. $f(1) = \frac{4\sqrt{2}}{9}$, $f'(x) = \sqrt{1+x^3}$ olmak üzere $\int_0^1 x f(x) dx$ integralini hesaplayınız.

11 FİNAL (30.05.2017)

1. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

   a)

$$\begin{aligned}
\int \frac{2x^3-4x^2-x-3}{x^2-2x-3}dx &= \int \left(2x + \frac{5x-3}{x^2-2x-3}\right)dx \\
&= \int \left(2x + \frac{5x-3}{(x-2)(x+1)}\right)dx \\
&= \int \left(2x + \frac{2}{x+1} + \frac{3}{x-3}\right)dx \\
&= x^2 + 2\ln(x+1) + 3\ln(x-3) + C
\end{aligned}$$

   b) Verilen integral 2. tip genelleştirilmiş integraldir.

$$\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^3} = \int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^3} + \int_1^2 \frac{dx}{(x-1)^3}$$

   eşitliğinin sağ tarafındaki ilk integrali dikkate alalım.

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^3} = \lim_{t\to 1^-} \int_0^t \frac{dx}{(x-1)^3} = \lim_{t\to 1^-} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2(t-1)^2}\right) = -\infty$$

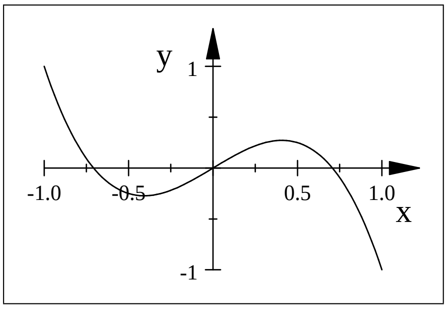
   olduğundan bu integral ıraksaktır. Dolayısıyla verilen integralde ıraksaktır. Böylece her hangi bir reel sayıya karşılık gelmez.

2. a ve b reel sayıları $(1-a)b = 1$ eşitliğini sağlayan pozitif reel sayılardır. Buna göre birinci bölgede $y = ax - bx^3$ eğrisi ile x-ekseni arasında kalan bölgenin maksimum alanını hesaplayınız.

   a ve b nin pozitif olması halinde $y = ax - bx^3$ eğrisinin grafiği aşağıdaki gibidir. Eğrinin x-eksenini kestiği noktalar 0 ve $\pm\sqrt{\frac{a}{b}}$ dir. O zaman bahsi geçen bölgenin alanı

$$A(a,b) = \int_0^{\sqrt{\frac{a}{b}}} (ax - bx^3)dx = \frac{a^2}{4b}$$

olur. Buna göre $(1-a)b = 1$ olduğundan $A(a) = \frac{a^2-a^3}{4}$ olur. $A(a)$ fonksiyonunun $0 < a < 1$ (b nin pozitif olması için $a < 1$ olmalıdır) için maksimum değeri sorulmaktadır. O zaman $A'(a) = \frac{2a-3a^2}{4} = 0$ dan $a = 0$ veya $a = \frac{2}{3}$ bulunur. Belirtilen aralıkta tek kritik nokta $a = \frac{2}{3}$ ve $A''(\frac{2}{3}) = -\frac{1}{2} < 0$ olduğundan bu nokta maksimum noktadır. O zaman istenen maksimum alan $A(\frac{2}{3}) = \frac{1}{27}$ br^2 olur.



3. Birinci bölgede $y = \cos x$ eğrisi ile koordinat eksenleri arasında kalan bölge R olsun. R nin x-ekseni etrafında döndürülmesi ile oluşan cismin hacmi V_x ve R nin y-ekseni etrafında döndürülmesi ile oluşan cismin hacmi V_y ise $V_x + V_y$ toplamını hesaplayınız.

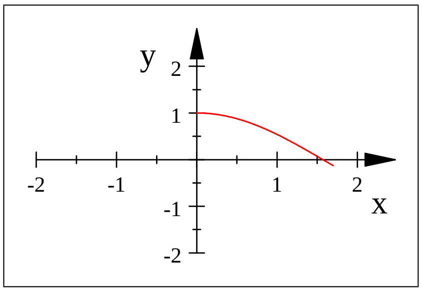
   R bölgesi şekilde gösterilmiştir. Buna göre Disk yöntemi ile

$$V_x = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2x}{2} dx = \frac{\pi^2}{4} \text{ br}^3$$

   olur. Yine Silindirik kabuk yöntemi dikkate alınırsa (kısmi integrasyonla)

$$V_y = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx = \pi^2 - 2\pi \text{ br}^3$$

   bulunur. O zaman $V_x + V_y = \frac{\pi^2}{4} + \pi^2 - 2\pi = \frac{5\pi^2}{4} - 2\pi$ bulunur.



4. r br yarıçaplı çemberin çevre uzunluğunun $2\pi r$ br olduğunu gösteriniz.

   Merkezi orijinde bulunan r yarıçaplı çemberin denklemi $x^2 + y^2 = r^2$ dir. Buradan $y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$ olur. O zaman çemberin çevre uzunluğu l ise

$$\begin{aligned} \frac{l}{2} &= \int_{-r}^{r} \sqrt{1+(y')^2} dx = \int_{-r}^{r} \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} dx \\ &= r \int_{-r}^{r} \frac{dx}{\sqrt{r^2 - x^2}} = 2r \arcsin(\frac{x}{r}) \mid_0^r = \pi r \end{aligned}$$

   olur. O zaman $l = 2\pi r$ br bulunur.

5. $y = \dfrac{1}{x}$ eğrisi altında, $x = 1$ doğrusunun sağında ve x-ekseninin üzerinde kalan bölgenin x-ekseni etrafında döndürülmesi ile oluşan cismin yüzey alanını hesaplayınız.

   Bahsedilen cismin yüzey alanı aşağıdaki integral yardımıyla hesaplanabilir:

$$\int_1^{\infty} f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = \int_1^{\infty} \frac{1}{x}\sqrt{1 + \frac{1}{x^4}} dx = \int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x^4+1}}{x^3} dx.$$

   Bu integral 1. tip genelleştirilmiş integraldir. $x \geq 1$ için $\dfrac{1}{x} \leq \dfrac{\sqrt{x^4+1}}{x^3}$ olup $\int_1^{\infty} \dfrac{dx}{x} = \infty$ olduğundan $\int_1^{\infty} \dfrac{\sqrt{x^4+1}}{x^3} dx = \infty$ olur.

12 BÜTÜNLEME (20.06.2017)

1. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

   a) $\displaystyle\int \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx$ b) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{-\ln x}dx$

2. $x = y^2 + 1$ ve $x = 3 - |y|$ eğrileri tarafından sınırlanan bölgenin alanını hesaplayınız.

3. Bir cismin tabanı $y = \sin x$ eğrisinin $[0, \pi]$ arasında kalan parçası ile x-ekseni tarafından sınırlandırılmıştır. Cismin x-eksenine dik düzlemlerle ara kesitleri karedir. Cismin hacmini hesaplayınız.

4. $y = \sqrt{1-x^2}$ eğrisi $y = x$ doğrusu ve x-ekseni tarafından sınırlanan bölgenin x-ekseni etrafında döndürülmesi ile oluşan cismin hacmini hesaplayınız.

Part V
2018 MATEMATİK-II SINAV SORULARI

13 ARASINAV (08.04.2018)

1. Aşağıdaki soruları cevaplandırınız.

   (a) $f(x) = 2x - x^2$ fonksiyonunu $[1, 3]$ aralığında göz önüne alalım. Aralığı altı eşit parçaya ayırıp, her bir alt aralıktan sağ uç noktayı seçerek f nin Riemann toplamını bulunuz. Bu Riemann toplamını grafik üzerinde gösteriniz.

   $[1, 3]$ aralığı 6 eşit parçaya ayrıldığında her bir alt aralığın uzunluğu $\Delta x_i = \frac{3-1}{6} = \frac{1}{3}$ olur. Bu durumda parçalanma $P = \{x_0, x_1, \cdots x_6\} = \{1, 1+\frac{1}{3}, \cdots, 3\}$ olup her bir $[x_{i-1}, x_i]$ alt aralığının sağ uç noktası $x_i = 1 + \frac{i}{3}$ dür. O zaman istenen Riemann toplamı

$$\begin{aligned}
R &= \sum_{i=1}^{6} f(x_i')\Delta x_i = \sum_{i=1}^{6} f(1+\frac{i}{3})\frac{1}{3} = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{6}\left(2\left(1+\frac{i}{3}\right) - \left(1+\frac{i}{3}\right)^2\right) \\
&= \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{6}\left(\left(1+\frac{i}{3}\right)\left(1-\frac{i}{3}\right)\right) = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{6}\left(1-\left(\frac{i}{3}\right)^2\right) \\
&= \frac{1}{3}\left(6 - \frac{1}{9}\sum_{i=1}^{6} i^2\right) = \frac{1}{3}\left(6 - \frac{1}{9}\frac{6.7.13}{6}\right) = -\frac{37}{27}
\end{aligned}$$

   olarak bulunur.

   (b)

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{4n^2-i^2}} &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{n}{\sqrt{4n^2-i^2}}\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{4n^2-i^2}{n^2}}}\frac{1}{n}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{4-(\frac{i}{n})^2}}\frac{1}{n}\right) = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \arcsin\frac{x}{2}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{6}
\end{aligned}$$

   bulunur.

2. Aşağıdaki lintegralleri hesaplayınız.

   (a)

$$\int_0^2 x\,\|x\|\,dx = \int_0^1 x\,\|x\|\,dx + \int_1^2 x\,\|x\|\,dx = \int_0^1 0dx + \int_1^2 xdx = 0 + \frac{x^2}{2}\Big|_1^2 = \frac{3}{2}$$

(b)

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{2}(x+3)\sqrt{4-x^2}dx &= \int_{-2}^{2}x\sqrt{4-x^2}dx+\int_{-2}^{2}3\sqrt{4-x^2}dx\\ &= 0+2\int_{0}^{2}3\sqrt{4-x^2}dx=6\int_{0}^{2}\sqrt{4-x^2}dx=6\pi\end{aligned}$$

3. $f(0)=f(\pi)=\dfrac{1}{\pi}$ ve $f'(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ olsun. Bu durumda $\displaystyle\int_0^\pi xf(x)dx$ integralini hesaplayınız.

$u=f(x)$ ve $dv=xdx$ alarak kısmi integrasyon uygulayalım. O zaman $du=f'(x)dx$ ve $v=\dfrac{x^2}{2}$ olacağından

$$\begin{aligned}\int_0^\pi xf(x)dx &= \frac{x^2}{2}f(x)\Big|_0^\pi-\int_0^\pi\frac{x^2}{2}f'(x)dx\\ &= \frac{\pi}{2}-\int_0^\pi\frac{x^2}{2}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\int_0^\pi x\sin xdx\\ &= \frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\left[-x\cos x|_0^\pi-\int_0^\pi-\cos xdx\right]\\ &= \frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\left[\pi+\sin x|_0^\pi\right]=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}=0\end{aligned}$$

bulunur.

4. Aşağıdaki lintegralleri hesaplayınız.

(a) İntegrantta $1-\sin 2x=(\sin x-\cos x)^2$ yazarak

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin 2x}dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{(\sin x-\cos x)^2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\sin x-\cos x|\,dx\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos x-\sin x)dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin x-\cos x)dx\\ &= (\sin x+\cos x)|_0^{\frac{\pi}{4}}+(-\cos x-\sin x)|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\\ &= (\sqrt{2}-1)+(-1+\sqrt{2})=2(\sqrt{2}-1)\end{aligned}$$

bulunur.

(b) $\tan\frac{x}{2}=t$ dönüşümü yaparsak $dx=\frac{2dt}{1+t^2}$ ve $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$ olacağından

$$\int\frac{\cos x}{2-\cos x}dx=\int\frac{\frac{1-t^2}{1+t^2}}{2-\frac{1-t^2}{1+t^2}}\frac{2dt}{1+t^2}=\int\frac{1-t^2}{1+3t^2}\frac{2dt}{1+t^2}=\int\frac{-2t^2+2}{(3t^2+1)(t^2+1)}dt$$

bulunur. Burada basit kesirlere ayırma yöntemini kullanacağız.

$$\frac{-2t^2+2}{(3t^2+1)(t^2+1)}=\frac{At+B}{3t^2+1}+\frac{Ct+D}{t^2+1}$$

den

$$\begin{aligned}-2t^2+2 &= (At+B)(t^2+1)+(Ct+D)(3t^2+1)\\ &= (A+3C)t^3+(B+3D)t^2+(A+C)t+B+D\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $A+3C=0$ ve $A+C=0$ dan $A=C=0$ bulunur. $B+3D=-2$ ve $B+D=2$ den de $B=4$ ve $D=-2$ bulunur. O zaman

$$\begin{aligned}
\int \frac{\cos x}{2-\cos x}dx &= \int \frac{\frac{1-t^2}{1+t^2}}{2-\frac{1-t^2}{1+t^2}}\frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{1-t^2}{1+3t^2}\frac{2dt}{1+t^2} \\
&= \int \frac{-2t^2+2}{(3t^2+1)(t^2+1)}dt = \int \left(\frac{4}{3t^2+1}-\frac{2}{t^2+1}\right)dt \\
&= \frac{4}{3}\int \frac{dt}{t^2+\frac{1}{3}} - 2\int \frac{dt}{t^2+1} \\
&= \frac{4}{3}\sqrt{3}\arctan(\sqrt{3}t) - 2\arctan(t) + K \\
&= \frac{4\sqrt{3}}{3}\arctan(\sqrt{3}\tan\frac{x}{2}) - x + K
\end{aligned}$$

elde edilir.

14 FİNAL (30.05.2018)

1. Aşağıdaki lintegrallerin yakınsak olup olmadığını araştırınız.

   - $\int\limits_0^2 \frac{dx}{8-x^3}$. Verilen integral ikinci tip genelleştirilmiş integraldir. 2 noktasında integrant sonsuz süreksizliğe sahiptir. İkinci tip genelleştirilmiş integraller için limit testini kullanalım.

     $$\lim_{x\to 2^-}(2-x)^p f(x) = \gamma$$

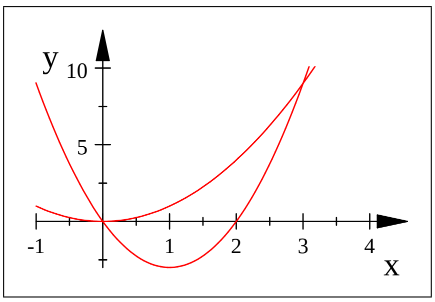
     limitinde $p=1$ alırsak

     $$\lim_{x\to 2^-}(2-x)f(x) = \lim_{x\to 2^-}\frac{2-x}{8-x^3} = \frac{1}{12}$$

     olduğundan verilen integral ıraksaktır.

   - $\int\limits_1^\infty \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}dx$. Verilen integral birinci tip genelleştirlimiş integraldir. $x\geq 1$ için $0\leq \frac{1}{x}\leq \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}$ olup $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x}$ integrali ıraksak olduğundan karşılaştırma testine göre verilen integral de ıraksaktır.

2. Birinci bölgede $y=x^2$ ve $y=3x^2-6x$ eğrileri ile x-ekseni arasında kalan bölgenin alanını hesaplayınız. Bölge şekilde çizilmiştir.



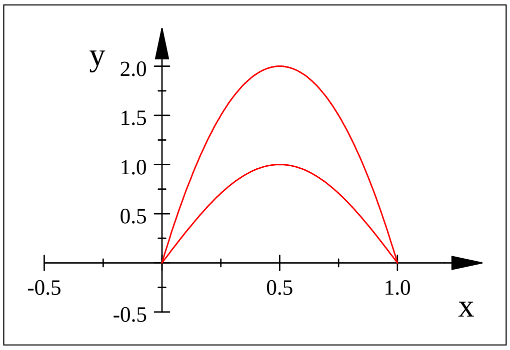
İstenen alan A ise

$$\begin{aligned}
A &= \int_0^2 x^2dx + \int_2^3 (x^2-(3x^2-6x))dx \\
&= \frac{8}{3}+\frac{7}{3} = 5 \text{ br}^2
\end{aligned}$$

olur.

3. $y = \sin \pi x$ ve $y = 8x - 8x^2$ eğrileri ile sınırlı bölgenin y-ekseni etrafında döndürülmesi ile oluşan cismin hacmini hesaplayınız.

   Bölge şekilde çizilmiştir.



   Silindirik kabuk yöntemi ile belirtilen cismin hacmi bulunabilir. O zaman hacim V ise

$$V = 2\pi \int_0^1 x(8x - 8x^2 - \sin \pi x)dx = \frac{2}{3}(2\pi - 3) \text{ br}^3$$

   bulunur.

4. $y = \dfrac{2}{3}\sqrt{(x^2+1)^3}$ eğrisinin $x = 0$ ve $x = 2$ apsisli noktaları arasında kalan parçasının uzunluğunu hesaplayınız.

   İstenen uzunluk l olsun. Ozaman $y' = \frac{d}{dx}(\frac{2}{3}\sqrt{(x^2+1)^3}) = 2x\frac{(x^2+1)^2}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$ olduğundan

$$\begin{aligned} l &= \int_0^2 \sqrt{1+(y')^2}dx = \int_0^2 \sqrt{1 + \frac{4x^2\left(x^2+1\right)^4}{\left(x^2+1\right)^3}}dx \\ &= \int_0^2 \sqrt{1+4x^2\left(x^2+1\right)}dx \\ &= \int_0^2 \sqrt{\left(2x^2+1\right)^2}dx \\ &= \int_0^2 \left(2x^2+1\right)dx \\ &= \frac{22}{3} \text{ br} \end{aligned}$$

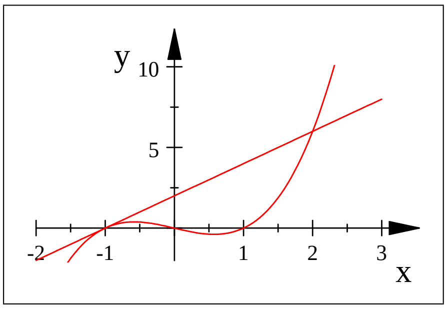
   bulunur.

15 BÜTÜNLEME (21.06.2018)

1. $y = x^3 - x$ eğrisi ile bu eğriye $x = -1$ apsisli noktada teğet olan doğru arasında kalan bölgenin alanını hesaplayınız.

   $y = x^3 - x$ eğrisine $x = -1$ apsisli noktada çizilen teğetin eğimi $m_T = y'(-1) = 3(-1)^2 - 1 = 2$ olur. O zaman $y(-1) = 0$ olduğundan teğetin denklemi $y = 2x + 2$ dir. Teğet ile eğrinin kesim noktaları $x^3 - x = 2x + 2$ denkleminden $x = -1$ ve $x = 2$ olarak bulunur. O zaman istenen bölgenin alanı

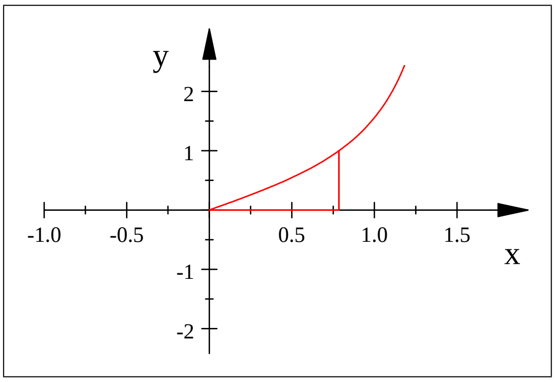
$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^2 [(2x+2) - (x^3 - x)]dx \\ &= \int_{-1}^2 (-x^3 + 30 + 2x)dx \\ &= \frac{357}{4} \text{ br}^2 \text{ dir.} \end{aligned}$$



2. Bir cismin tabanı $y = \tan x$ eğrisi ile $x = \dfrac{\pi}{4}$ ve $y = 0$ doğruları tarafından sınırlanmıştır. x-eksenine dik olan paralel kesitler karedir. Cismin hacmini hesaplayınız.

   Cismin x-eksenine dik olan paralel kesitleri kare olduğuna göre x notasından çizilen kesitin alanı $A(x) = \tan^2 x$ olur. O zaman cismin hacmi

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} A(x)dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x dx \\ &= (\tan x - x)|_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= 1 - \frac{\pi}{4} \text{ br}^3 \text{ olur.} \end{aligned}$$



3. $y = \ln(\sin x)$ eğrisinin $x = \dfrac{\pi}{3}$ ve $x = \dfrac{2\pi}{3}$ apsisli noktaları arasında kalan parçasının uzunluğunu hesaplayınız.

   $y' = \cot x$ olduğundan, istenen eğri parçasının uzunluğu

$$\begin{aligned} l &= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \sqrt{1 + (y')^2} dx \\ &= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \sqrt{1 + \cot^2 x} dx \\ &= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{1}{|\sin x|} dx \\ &= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{dx}{\sin x} \ \left(\tan \frac{x}{2} = t \text{ dönüşümü ile} \right) \\ &= \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| \Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \\ &= \ln 3 \text{ br olur.} \end{aligned}$$

4. $y = \dfrac{x^5}{5} + \dfrac{1}{12x^3}$, $1 \leq x \leq 2$, olarak verilen eğri parçasının x-ekseni etrafında döndürülmesiyle meydana gelen yüzeyin alanını hesaplayınız.

$y' = x^4 - \frac{1}{4x^4}$ olduğundan istenen cismin yüzey alanı

$$\begin{aligned}
S &= 2\pi \int_1^2 |y| \sqrt{1+(y')^2}dx \\
&= 2\pi \int_1^2 \left| \frac{x^5}{5} + \frac{1}{12x^3} \right| \sqrt{1+\left(x^4 - \frac{1}{4x^4}\right)^2} dx \\
&= 2\pi \int_1^2 \left(\frac{x^5}{5} + \frac{1}{12x^3} \right) \sqrt{x^8 + \frac{1}{2} + \frac{1}{16x^8}} dx \\
&= 2\pi \int_1^2 \left(\frac{x^5}{5} + \frac{1}{12x^3} \right) \sqrt{\left(x^4 + \frac{1}{4x^4}\right)^2} dx \\
&= 2\pi \int_1^2 \left(\frac{x^5}{5} + \frac{1}{12x^3} \right) \left(x^4 + \frac{1}{4x^4}\right) dx \\
&= 2\pi \int_1^2 \left(\frac{x^9}{5} + \frac{2x}{15} + \frac{1}{48x^7} \right) dx \\
&= \frac{1057\,967}{25\,600}\pi \text{ br}^2 \text{ olur.}
\end{aligned}$$

Part VI

2019 MATEMATİK-II SINAV SORULARI

16 ARASINAV (06.04.2019)

1. Aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

(a) Verilen limitte $\frac{0}{0}$ belirsizliği vardır. O zaman L'Hopital kullanılarak

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \int_0^x \frac{\arcsin t}{x^2} dt &= \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} \int_0^x \arcsin t dt \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x \arcsin t dt}{x^2} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{2x} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

bulunur.

(b) Verilen limiti bir Riemann toplamının limiti olduğu farkına vararak hesaplayabiliriz. O zaman

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2+i^2}} &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{i}{n}\right)^2}} \frac{1}{n} \\
&= \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln(x+\sqrt{x^2+1})\Big|_0^1 = \ln(1+\sqrt{2})
\end{aligned}$$

bulunur.

2. Aşağıdaki lintegralleri hesaplayınız.

(a) Önce integrantı e^{-x} ile genişletip sonra $e^{-x} = t$ dönüşümü yapalım. O zaman $-e^{-x}dx = dt$ olacağından

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{e^{3x}-e^{x}} &= \int \frac{e^{-x}dx}{e^{2x}-1} = -\int \frac{dt}{\frac{1}{t^2}-1} \\
&= \int \frac{t^2 dt}{t^2-1} = \int \left(1-\frac{1}{t^2-1}\right) dt \\
&= t-\int \frac{dt}{(t-1)(t+1)} = t-\frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right) dt \\
&= t-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C = e^{-x}-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1}\right| + C
\end{aligned}$$

bulunur.

(b) Önce integrantın paydasını $\cos^3 x$ parantezine alıp $\tan x + 1 = t$ dönüşümü uygularsak

$$\int \frac{\cos x dx}{(\sin x+\cos x)^3} = \int \frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{(\tan x+1)^3} = \int \frac{dt}{t^3} = -\frac{1}{2t^2}+C = -\frac{1}{2(\tan x+1)^2}+C$$

bulunur.

3. $(0,2)$ noktasından geçen ve ikinci basamaktan sürekli türevelenebilen $y = f(x)$ fonksiyonunun $\frac{\pi}{2}$ apsisli noktasındaki teğetinin eğimi 3 dür. Ayrıca

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin x dx = 4$$

olduğu biliniyor. Bu durumda

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f''(x)\sin x dx$$

integralini hesaplayınız.

Verilen bilgilere göre $f(0) = 2$ ve $f'(\frac{\pi}{2}) = 3$ dir. O zaman istenen integralde $u = \sin x$ ve $dv = f''(x)dx$ diyerek kısmi integrasyon uygularsak $du = \cos x$ ve $v = f'(x)$ olur. Böylece

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} f''(x)\sin x dx &= f'(x)\sin x|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(x)\cos x dx \\
&= f'(\frac{\pi}{2}) - \int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(x)\cos x dx
\end{aligned}$$

olur. Şimdi de son integralde $u = \cos x$ ve $dv = f'(x)dx$ diyerek kısmi integrasyon uygulayalım. O zaman $du = -\sin x dx$ ve $v = f(x)$ olur. Böylece

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} f''(x)\sin x dx &= f'(\frac{\pi}{2}) - \int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(x)\cos x dx \\
&= f'(\frac{\pi}{2}) - \left[f(x)\cos x|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin x dx \right] \\
&= f'(\frac{\pi}{2}) + f(0) - \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin x dx = 3+2-4 = 1
\end{aligned}$$

bulunur.

4. Aşağıdaki lintegralleri hesaplayınız.

(a) $1+\cos 2x = 2\cos^2 x$ olduğundan

$$\int_0^{\pi} x\sqrt{1+\cos 2x}dx = \int_0^{\pi} x\sqrt{2\cos^2 x}dx = \sqrt{2}\int_0^{\pi} x\left|\cos x\right|dx = \sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos xdx - \sqrt{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x\cos xdx$$

olur. Böylece $\int x\cos xdx$ integrali için kısmi integrasyon uygulayarak $(u=x, dv=\cos xdx)$

$$\int x\cos xdx = x\sin x - \int \sin xdx = x\sin x + \cos x + C$$

olur. O zaman

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} x\sqrt{1+\cos 2x}dx &= \sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos xdx - \sqrt{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x\cos xdx \\ &= \sqrt{2}\left[(x\sin x+\cos x)|_0^{\frac{\pi}{2}} - (x\sin x+\cos x)|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right] \\ &= \sqrt{2}\left[\frac{\pi}{2} - 1 - (-1 - \frac{\pi}{2})\right] = \sqrt{2}\pi\end{aligned}$$

bulunur.

(b)

$$\int_0^{2} x^2\left|1-x\right|^5 dx = \int_0^{1} x^2(1-x)^5dx + \int_1^{2} x^2(x-1)^5dx$$

olur. İlk integralde $1-x=t$ ve ikinci integralde ise $x-1=t$ dönüşümü uygularsak

$$\begin{aligned}\int_0^{2} x^2\left|1-x\right|^5 dx &= \int_0^{1}(1-t)^2t^5dt + \int_0^{1}(t+1)^2t^5dt \\ &= \int_0^{1} t^5(2t^2+2)dt = \frac{t^8}{4} + \frac{t^6}{3}\bigg|_0^1 = \frac{7}{12}\end{aligned}$$

bulunur.

17 FİNAL (10.06.2019)

1. Aşağıdaki lintegralleri hesaplayınız.

(a) Verilen integral ikinci tip bir genelleştirilmiş integraldir. $x=0$ noktası integrantın sonsuz süreksisliğe sahip olduğu noktadır. O zaman aşaıdaki has integralde $u=\ln x$ ve $dv=\frac{dx}{\sqrt{x}}$ diyerek kısmi integrasyon kullanırsak $du=\frac{dx}{x}$ ve $v=2\sqrt{x}$ olacağından

$$\begin{aligned}\int_0^{1}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx &= \lim_{t\to 0^+}\int_t^{1}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx = \lim_{t\to 0^+}\left\{2\sqrt{x}\ln x\big|_t^1 - \int_t^{1}\frac{2\sqrt{x}}{x}dx\right\} \\ &= \lim_{t\to 0^+}\left\{2\sqrt{x}\ln x - 4\sqrt{x}\right\}\big|_t^1 = \lim_{t\to 0^+}\left\{-4 - 2\sqrt{t}\ln t + 2\sqrt{t}\right\} = -4\end{aligned}$$

bulunur.

(b) Verilen integralbir has integraldir. O zaman $\sec x + \tan x = t$ dönüşümü dikkate alınarak

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\cos x} = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec xdx = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sec x(\sec x+\tan x)}{\sec x+\tan x}dx = \ln\left|\sec x+\tan x\right||_0^{\frac{\pi}{4}} = \ln(\sqrt{2}+1)$$

bulunur.

(c) Verilen integral birinci tip bir genelleştirilmiş integraldir. $x \geq 1$ için $\sqrt{e^x+1} \geq 1$ olduğu dikkate alınırsa

$$\int_1^\infty \frac{\sqrt{e^x+1}}{x} dx \geq \int_1^\infty \frac{dx}{x} = \lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{dx}{x} = \lim_{t\to\infty} \ln t = \infty$$

olur.

2. $y = 5x^2 - x^3$ eğrisi ile bu eğriye $x = 3$ apsisli noktasından çizilen teğet doğrusu arasında kalan bölenin alanını hesaplayınız.

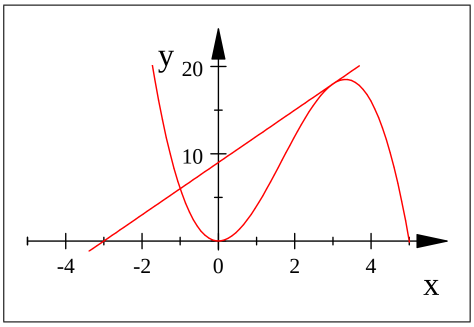
Önce bahsi geçen teğetin denklemini bulalım. $y' = 10x - 3x^2$ olup $m_T = y'(3) = 3$ olur. O zaman teğetin denklemi

$$y - y(3) = m_T(x-3)$$

den

$$y = 3x + 9$$

olur.Bölge şekilde çizilmiştir. Eğriile teğetin kesim noktaları $x = -1$ ve $x = 3$ olacağından istenen alan

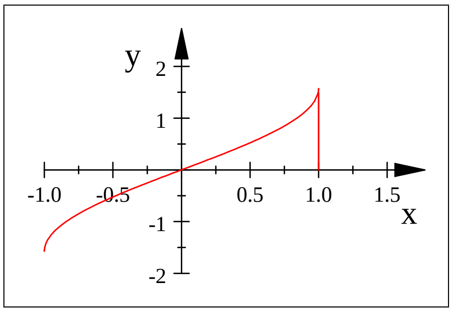


$$A = \int_{-1}^{3} \left[(3x+9) - (5x^2 - x^3)\right] dx = \frac{64}{3} \text{ br}^2$$

bulunur.

3. $y = \arcsin x$ eğrisi ile $x = 1$ ve $y = 0$ doğruları arasında kalan bölge R olsun. R nin x-ekseni etrafında döndürülmesi ile oluşan cismin hacmi V_x, R nin y-ekseni etrafında döndürülmesi ile oluşan cismin hacmi V_y ise $V_x + V_y$ toplamını hesaplayınız.

Bölge şekilde çizilmiştir.



Buna göre V_x hacmi Kabuk yöntemi ile (kısmi integrasyon kullanılarak)

$$V_x = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} y(1-\sin y)dy = 2\pi \left\{\frac{y^2}{2} + y\cos y - \sin y\right\}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\pi(\frac{\pi^2}{8} - 1) \text{ br}^2$$

bulunur. Aynı V_x hacmi Disk yöntemi dikkate alınarak

$$V_x = \pi \int_0^1 (\arcsin x)^2 dx$$

eşitliği ile hesaplanabilir. Diğer taraftan V_y hacmi ise Disk yöntemi ile

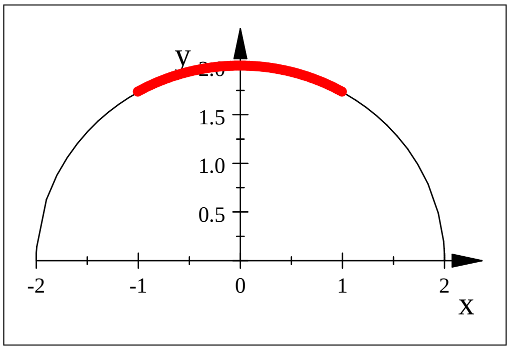
$$V_y = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1^2 - \sin^2 y)dy = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 y dy = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2y}{2} dy = \frac{\pi^2}{4} \text{ br}^3$$

bulunur. Aynı V_y hacmi Kabuk yöntemi dikkate alınarak

$$V_y = 2\pi \int_0^1 x \arcsin x dx$$

eşitliği ile hesaplanabilir.

4. $y = \sqrt{4 - x^2}$ eğrisinin $x = -1$ ve $x = 1$ apsisli noktaları arasında kalan parçasının uzunluğunu hesaplayınız. İstenen eğri parçasının uzunluğu



$$l = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + (y')^2} dx = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + \frac{x^2}{4 - x^2}} dx = \int_{-1}^{1} \frac{2}{\sqrt{4 - x^2}} dx = 4 \arcsin \frac{x}{2}\Big|_0^1 = \frac{2\pi}{3} \text{ br}$$

bulunur.

18 BÜTÜNLEME (04.07.2019)

1. Aşağıdaki lintegralleri hesaplayınız.

(a) $\int\limits_{-1}^{2} x^{-2} dx$ **(b)** $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx$

2. $y = \sqrt{x}$ ve $y = 1 + \sqrt{x}$ eğrileri ile $x = 0$ ve $y = 2$ doğruları tarafından sınırlanan bölenin alanını hesaplayınız.

3. Bir cismin tabanı birinci bölgede koordinat eksenleri ile $y = 1 - \sin x$ eğrisi tarafından sınırlanmıştır. x-eksenine dik olan paralel kesitler yarım dairelerdir. Cismin hacmini hesaplayınız.

4. $y = x^3 - x$ eğrisi ile $y = -x - 1$ ve $x = 0$ doğruları tarafından sınırlanan bölge y-ekseni etrafında döndürülüyor oluşan cismin hacmini hesaplayınız.

5. $y = \sin x$, $0 \leq x \leq \pi$, eğri parçasının x-ekseni etrafında döndürülmesi ile oluşan cismin yüzey alanını hesaplayınız.