Part I

MATEMATİK-2

1 İNTEGRAL

1.1 Fonksiyonun İlkeli

Dünyadaki bazı olayların matematiksel modelleri genellikle bilinmeyen fonksiyonların türevlerini içeren denklemlerdir. Örneğin, doğum ve ölüm oranları sabit iken nüfus ile nüfustaki değişim oranı doğru orantılıdır. Yani P nüfus, $\frac{dP}{dt}$ de nüfusdaki değişim oranı ise

$$\frac{dP}{dt} = kP \ (k \text{ sabit})$$

olur. Yine Newton'un soğuma yasasına göre T sıcaklığına sahip bir cismin sıcaklık değişim oranı, cismi çevreleyen ortamın sıcaklığı ve T arasındaki fark ile doğru orantılıdır. Yani

$$\frac{dT}{dt} = k(A - T)$$

dir. Burada k sabit, A ise cismi çevreleyen ortamın sıcaklığıdır ki genelde sabit kabul edilir. Bu tip matematiksel modellere diferensiyel denklemler adı verilir. En basit tipteki diferensiyel denklem, f bilinen fonksiyon y ise x'e bağlı bilinmeyen fonksiyon olmak üzere

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

biçimindedir. Böyle bir denklemden y yi bulma işlemi aslında türevi belli olan fonksiyonu bulma işlemidir. Bir fonksiyonu türevinden bulma işlemi diferensiyellemenin tersidir ve ters diferensiyelleme olarak adlandırılır. Türevi $f(x)$ olan fonksiyon $F(x)$ ise yani

$$F'(x) = f(x)$$

ise F ye f nin ters türevi veya ilkeli denir. Türev ile ters türev arasındaki ilişki dikkate alınacak olursa pek çok özel fonksiyonun ters türevini bulabiliriz.

Örneğin

Fonksiyon	İlkel
$f(x)$	$F(x)$
1	x
$2x$	x^2
$\cos x$	$\sin x$
$\frac{1}{x}$	$\ln x$

Bir fonksiyon eğer varsa sadece bir tek türeve sahip olduğu halde, eğer varsa pek çok ilkele sahiptir. Örneğin $f(x) = 3x^2$ fonksiyonu için

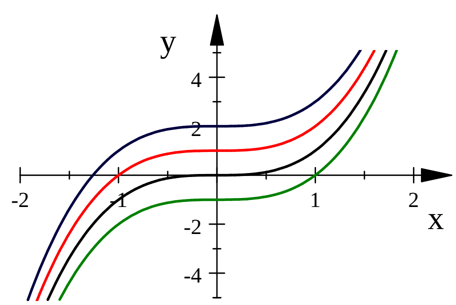
$$G(x) = x^3,\ H(x) = x^3 + 1,\ K(x) = x^3 - 7$$

birer ilkeldirler. Aslında C sabit olmak üzere $F(x) = x^3 + C$ bu fonksiyonun ilkelidir.

Teorem 1 *Eğer I açık aralığındaki her bir x noktasında $F'(x) = f(x)$ ise f nin I üzerindeki her bir G ilkeli $G(x) = F(x) + C$ (C sabit) biçimindedir.*

Bu teoremden de anlaşılacağı gibi bir fonksiyonun iki ilkeli arasındaki fark sabittir. Böylece, bir fonksiyonun ilkellerinin grafikleri birbirlerinin düşey ötelemeleridir.

Örnek 2 *$f(x) = 3x^2$ fonksinunun ilkelleri $F(x) = x^3 + C$ biçimindedir ve bunların grafikleri aşağıdaki gibidir.*



f fonksiyonunun bir özel ters türevi, C ye belirli bir değer atanarak bulunabilir. Örneğin $f(x) = 3x^2$ nin $F(1) = -1$ eşitliğini sağlayan bir ters türevini bulmak istersek $F(x) = x^3 + C$ en genel tes türevinde $F(1) = -1$

eşitliğini sağlayan C değerini buluruz ki bu $C = -2$ dir. Böylece istene ilkel $F(x) = x^3 - 2$ olur.

Bir fonksiyonun türevi için çeşitli gösterimler kullanılmıştır. Bunlardan biri de diferensiyel operatör denilen D operatörüdür. Yani

$$F'(x) = f(x)$$

eşitliği

$$DF(x) = f(x)$$

biçimindede gösterilebilir. Buna göre f fonksiyonunun en genel ters türevi için

$$D^{-1}f(x) = F(x) + C$$

gösterimini kullanabiliriz. D^{-1} e ters diferensiyel operatör denir ve D lineer olduğundan D^{-1} de lineerdir. Yani f ve g fonksiyonlarının ters türevleri F ve G ise a ve b sabit olmak üzere

$$\begin{aligned} D^{-1}\left[af(x) + bg(x)\right] &= aD^{-1}f(x) + bD^{-1}g(x) \\ &= aF(x) + bG(x) + C \end{aligned}$$

olur.

Örnek 3 *$f(x) = 4x^3 + \frac{1}{x} + 3\cos x$ fonksiyonunun en genel ters türevi yukarıdaki düşünce ile bulunabilir.*

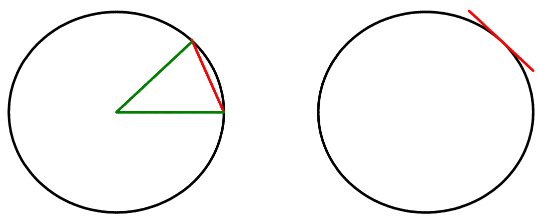
$$\begin{aligned} D^{-1}f(x) &= D^{-1}\left[4x^3 + \frac{1}{x} + 3\cos x\right] \\ &= 4D^{-1}(x^3) + D^{-1}(\frac{1}{x}) + 3D^{-1}(\cos x) \\ &= x^4 + \ln x + 3\sin x + C \end{aligned}$$

İleri kesimlerde integral ile ters türev arasında bir ilişki kuracağız ve integral hesaplamalarında ters türevden sıkça yararlanacağız.

1.2 Temel Alan Hesaplamaları

Kenarları doğrulardan oluşan bölgelerin alanları, dikdörtgenler ve üçgenler kullanılarak hesaplanabilir. Ancak kenarları eğrilerden oluşan bir bölgenin alanını hesaplamak bu kadar kolay değildir. Örneğin r yarıçaplı bir

S dairesinin alanı aşağıdaki şekilde hesaplanmıştır. Dairenin içine köşeleri çember üzerinde bulunan bir n kenarlı düzgün çokgen ile, kenarları çembere teğer olan n kenarlı başka bir düzgün çokgen çizilmiş ve dairenin alanının bu çokgenlerin alanları arasında bir sayı olduğu söylenmiştir. Çokgenlerin kenar sayıları artırıldığında dairenin alanına yaklaşılacağı ifede edilmiştir. İçteki çokgene P_n ve dıştaki çokgene Q_n diyelim.



P_n (tamamlayınız) Q_n (tamamlayınız)

Çokgenlerin alanları sırası ile $A(P_n)$ ve $A(Q_n)$ ise dairenin alanı için

$$A(P_n) < A(S) < A(Q_n)$$

yazılır. Böylece Sıkıştırma teoreminden

$$A(S) = \lim_{n\to\infty} A(P_n) = \lim_{n\to\infty} A(Q_n)$$

olur. Burada

$$\alpha_n = \frac{360°}{n} = \frac{2\pi}{n}$$

olup

$$\begin{aligned} A(P_n) &= nr\cos(\frac{\alpha_n}{2})r\sin(\frac{\alpha_n}{2}) \\ &= \frac{nr^2}{2}\sin(\alpha_n) \\ &= \frac{nr^2}{2}\sin(\frac{2\pi}{n}) \end{aligned}$$

olur. Böylece

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} A(P_n) &= \lim_{n\to\infty} \frac{r^2}{2}\frac{\sin(\frac{2\pi}{n})}{\frac{2\pi}{n}}2\pi \\ &= \pi r^2 \end{aligned}$$

bulunur. Benzer şekilde

$$A(Q_n) = nr^2 \tan(\frac{\pi}{n})$$

olup

$$\lim_{n\to\infty} A(Q_n) = \pi r^2$$

bulunur. O zaman

$$A(S) = \pi r^2$$

dir.

Burada olduğu gibi herhangi bir kapalı C eğrisinin sınırladığı bölgenin alanını çokgenler yardımıyla bulabiliriz. Bu metodu kullanırken bir çok sayının toplamına ihtiyaç duyarız. $a_1, a_2, \cdots, a_n$ sayılarının toplamı kısaca

$$\sum_{i=1}^{n} a_i$$

biçiminde gösterilir. Yani

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

dır. İlk n pozitif tam sayının k yıncı kuvvetlerinin toplamı alan hesaplamalarında sıklıkla karşımıza çıkar.

$$\sum_{i=1}^{n} i^k = 1^k + 2^k + \cdots + n^k$$

ifadesi $k = 1$ için

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$k = 2$ için

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$k = 3$ için

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

olur. Genel halde $f(n)$ derecesi k dan küçük bir polinom olmak üzere

$$\sum_{i=1}^{n} i^k = 1^k + 2^k + \cdots + n^k = \frac{n^{k+1}}{k+1} + \frac{1}{2}n^k + f(n)$$

biçiminde yazılabilir.

Örnek 4 *Aşağıdaki ifadeleri hesaplayınız.*

1. $\sum_{i=1}^{10}(i^2+2i)$

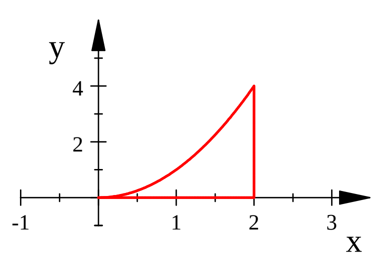
$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{10}(i^2+2i) &= \sum_{i=1}^{10} i^2 + 2\sum_{i=1}^{10} i \\ &= \frac{10.11.21}{6} + 2\frac{10.11}{2} \\ &= 495\end{aligned}$$

2. $\lim_{n\to\infty} \frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3}$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} i^2}{n^3} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} \\ &= \frac{1}{3}\end{aligned}$$

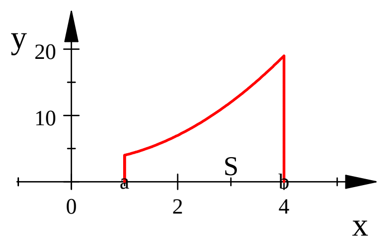
olur.

Örnek 5 *Dairenin alanını hesaplamada olduğu gibi çokgenler metodunu kullanarak şekildeki bölgenin alanı hesaplanabili mi? Bunun için kullanılacak çokgenler nasıl olmalıdır?*



1.3 Grafiklerin Altındaki Alan

f, $[a,b]$ kapalı aralında tanımlı sürekli ve pozitif bir fonksiyon olsun. $y = f(x)$ eğrisi, $x = a$ ve $x = b$ doğruları ve x-ekseni tarafından sınırlanan bölgenin alanını çokgenler metodu ile bulmaya çalışalım. Burada kullanacağımız çokgenler, tabanı x-ekseni üzerinde bulunan dikdörtgenlerin birleşimi olacaktır.



$[a,b]$ aralığını aşağıdaki şekide n eşit parçaya bölelim.

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

olmak üzere $[x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ aralıklarını göz önüne alalım. Bu aralıkların uzunlıkları eşittir ve her birinin uzunluğu

$$\Delta x = x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}$$

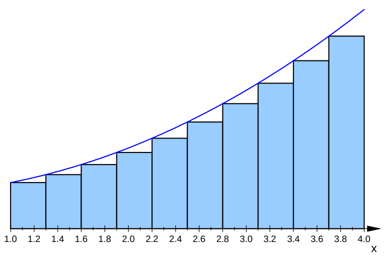
birimdir. Şimdi f nin $[x_{i-1}, x_i]$ aralığında minimum değere ulaştığı nokta x_i^* olsun. O zaman, tabanı Δx ve yüksekliği $f(x_i^*)$ olan dikdörtgenler ve bunların birleşimleri S bölgesi içindedir. Bu dikdörtgenlerin birleşimine P_n diyeceğiz. Bu durumda

$$A(P_n) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$$

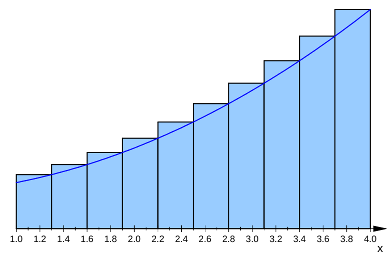
dir. Şimdi de f nin $[x_{i-1}, x_i]$ aralığında maksimum değere ulaştığı nokta $x_i^{\#}$ olsun. O zaman, tabanı Δx ve yüksekliği $f(x_i^{\#})$ olan dikdörtgenlerin birleşimleri S bölgesini kapsar. Bu dikdörtgenlerin birleşimine Q_n diyeceğiz. Bu durumda

$$A(Q_n) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i^{\#})\Delta x$$

olur.



P_n (Dikdörtgenlerin birleşimi)



Q_n (Dikdörtgenlerin birleşimi)

Sonuçta

$$A(P_n) \leq A(S) \leq A(Q_n)$$

veya buna denk olan

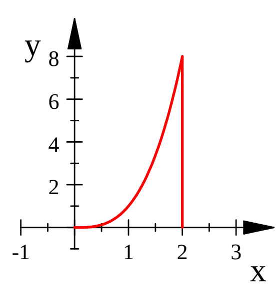
$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x \leq A(S) \leq \sum_{i=1}^{n} f(x_i^{\#})\Delta x$$

eşitsizliği sağlanır. n yi ne kadar büyük seçersek Δx o kadar küçülür ve böylece P_n ve Q_n nin alanları birbirine yaklaşır. Aslında f nin sürekli olması halinde

$$A(S) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^{\#})\Delta x$$

dir ki bu ileride teorem olarak ifade edilecektir.

Örnek 6 *Şekilde* $f(x) = x^3$ *eğrisinin* $[0, 2]$ *aralığındaki parçası verilmiştir. Bölgenin alanını (çokgenler metodunu kullanarak) hesaplayınız.*



$[0, 2]$ *yi* n *tane eşit aralığa bölelim. Her bir alt aralığın boyu*

$$\Delta x = \frac{2}{n}$$

olur. Ayrıca

$$x_0 = 0,\ x_1 = \frac{2}{n},\ x_2 = \frac{4}{n},\ \cdots,\ x_{n-1} = \frac{2(n-1)}{n},\ x_n = 2$$

olur. f fonksiyonu artan olduğundan $[x_{i-1}, x_i]$ alt aralığındaki maksimum değerini aralığın sağ uç noktası olan x_i noktasında, minimum değerini ise sol uç nokta olan x_{i-1} noktasında alır. Böylece

$$\begin{aligned}
A(P_n) &= \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\frac{2}{n} \\
&= \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{2(i-1)}{n}\right)\frac{2}{n} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{2(i-1)}{n}\right)^3\frac{2}{n} \\
&= \frac{16}{n^4}\sum_{i=1}^{n}(i-1)^3 = \frac{16}{n^4}\sum_{i=1}^{n-1} i^3 \\
&= \frac{16}{n^4}\frac{(n-1)^2n^2}{4} = 4\left(\frac{n-1}{n}\right)^2
\end{aligned}$$

olur. Yine

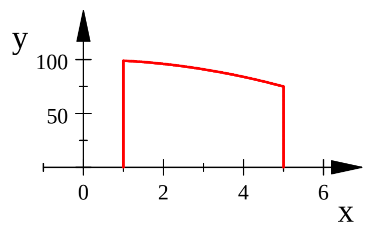
$$\begin{aligned}
A(Q_n) &= \sum_{i=1}^{n} f(x_i^{\#})\Delta x = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\frac{2}{n} \\
&= \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{2i}{n}\right)\frac{2}{n} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{2i}{n}\right)^3\frac{2}{n} \\
&= \frac{16}{n^4}\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{16}{n^4}\frac{n^2(n+1)^2}{4} = 4\left(\frac{n+1}{n}\right)^2
\end{aligned}$$

olur. Böylece

$$\lim_{n\to\infty} A(P_n) = 4 = \lim_{n\to\infty} A(Q_n)$$

olduğundan istenen alan 4 birim karedir.

Örnek 7 *$x = 1$ den $x = 5$ e kadar $f(x) = 100 - x^2$ eğrisi ile x-ekseni arasında kalan bölgenin alanını hesaplayınız.*



$[1,5]$ aralığını n tane eşit aralığa bölelim. Her bir alt aralığın boyu

$$\Delta x = \frac{5-1}{n} = \frac{4}{n}$$

olur. Ayrıca

$$x_0 = 1,\ x_1 = 1 + \frac{4}{n},\ x_2 = 1 + 2\frac{4}{n},\ \cdots,\ x_{n-1} = 1 + (n-1)\frac{4}{n},\ x_n = 5$$

olur. f fonksiyonu azalan olduğundan $[x_{i-1}, x_i]$ alt aralığındaki maksimum değerini aralığın sol uç noktası olan x_{i-1} noktasında, minimum değerini ise sağ uç nokta olan x_i noktasında alır. Böylece

$$\begin{aligned}
A(P_n) &= \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\frac{4}{n} \\
&= \sum_{i=1}^{n} f\left(1 + \frac{4i}{n}\right)\frac{4}{n} = \sum_{i=1}^{n}\left(100 - \left(1 + \frac{4i}{n}\right)^2\right)\frac{4}{n} \\
&= 400 - \frac{4}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(1 + \frac{4i}{n}\right)^2 \\
&= 400 - \frac{4}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(1 + \frac{8i}{n} + \frac{16i^2}{n^2}\right) \\
&= 400 - \frac{4}{n}\left(n + \frac{8}{n}\frac{n(n+1)}{2} + \frac{16}{n^2}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) \\
&= 400 - \frac{124n^2 + 144n + 32}{3n^2}
\end{aligned}$$

olur. Yine

$$\begin{aligned}
A(Q_n) &= \sum_{i=1}^{n} f(x_i^{\#})\Delta x = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\frac{4}{n} \\
&= \sum_{i=1}^{n} f\left(1+\frac{4(i-1)}{n}\right)\frac{4}{n} = \sum_{i=1}^{n}\left(100-\left(1+\frac{4(i-1)}{n}\right)^2\right)\frac{4}{n} \\
&= 400-\frac{4}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(1+\frac{4(i-1)}{n}\right)^2 \\
&= 400-\frac{4}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(1+\frac{8(i-1)}{n}+\frac{16(i-1)^2}{n^2}\right) \\
&= 400-\frac{4}{n}\left(n+\frac{8}{n}\frac{(n-1)n}{2}+\frac{16}{n^2}\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}\right) \\
&= 400-\frac{124n^2-144n+32}{3n^2}
\end{aligned}$$

olur. Böylece

$$\lim_{n\to\infty} A(P_n) = \frac{1076}{3} = \lim_{n\to\infty} A(Q_n)$$

olduğundan istenen alan $\frac{1076}{3}$ *birim karedir.*

1.4 Riemann Toplamı ve Belirli İntegral

Önceki kesimde $[a,b]$ aralığı üzerinde sürekli ve pozitif f fonksiyonunun grafiği altında kalan alanın

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x \leq A(S) \leq \sum_{i=1}^{n} f(x_i^{\#})\Delta x$$

eşitsizliğini sağladığını belirttik. Bu eşitsizliğin sağ ve sol tarafındaki toplamlar $x_i' \in [x_{i-1}, x_i]$ herhangi bir nokta olmak üzere

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i')\Delta x$$

biçimindedir. Bu şekildeki toplamlar belirli integral tanımına taban oluşturur.

Şimdi $[a,b]$ üzerinde tanımlı bir f fonksiyonunu (sürekli ve pozitif olması gerekmez) göz önüne alalım. $[a,b]$ aralığını

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

özelliğini sağlayan noktalar yardımıyla n tane alt aralığa bölelim (aralıkların boyları eşit olmayabilir).

$$P = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$$

kümesine $[a,b]$ aralığının bir parçalanması denir. $[x_{i-1}, x_i]$ alt aralıklarının boyları olan $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ sayılarının en büyüğüne P parçalanmasının normu veya maksimal çapı denir ve $\|P\|$ ile gösterilir. Yani

$$\|P\| = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \cdots, \Delta x_n\}$$

dir. Her bir $[x_{i-1}, x_i]$ alt aralığından seçilen keyfi x'_i noktalarının oluşturduğu

$$S = \{x'_1, x'_2, \cdots, x'_n\}$$

kümesine P parçalanmasının bir seçimi denir. $[a,b]$ aralığının P parçalanması ve S seçimi tarından elde edilen

$$R = \sum_{i=1}^{n} f(x'_i)\Delta x_i$$

toplamına f fonksiyonunun $[a,b]$ aralığında P ve S tarafından elde edilen Riemann toplamı denir (Georg Freidrich Bernhard Riemann). P ve S ye bağlı olarak bir çok Riemann toplamı bulunabilir.

Örnek 8 $[0,2]$ *aralığında tanımlı* $f(x) = x^2$ *fonksiyonunu göz önüne alalım. Aralığı* 10 *eşit parçaya bölerek bir* P *parçalanması oluşturalım. Bu durumda her bir alt aralığın uzunluğu* $\Delta x_i = \frac{1}{5}$ *olur. Yine*

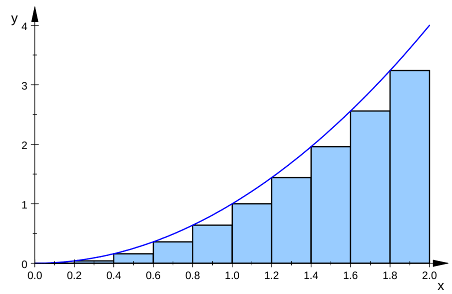
$$P = \left\{0, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \cdots, \frac{9}{5}, 2\right\}$$

olacaktır. Şimdi P *nin farklı üç seçimi için Riemann toplamlarını bulacağız.*

1. x_i' *noktalarını her bir* $[x_{i-1}, x_i]$ *aralığının sol uç noktası olarak seçelim. Yani*

$$x_i' = x_{i-1} = \frac{i-1}{5}$$

olsun. Bu durumda Riemann toplamı



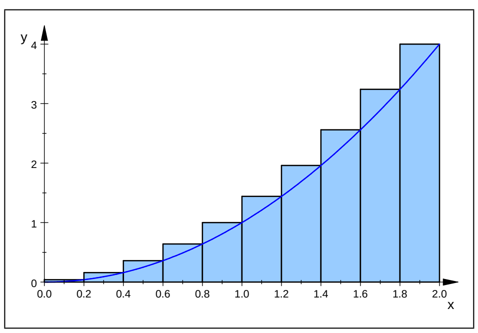
$$\begin{aligned} R_{sol} &= \sum_{i=1}^{10} f(x_i')\Delta x_i = \sum_{i=1}^{10}\left(\frac{i-1}{5}\right)^2 \frac{1}{5} \\ &= \frac{1}{125}\sum_{i=1}^{9} i^2 = \frac{1}{125}\frac{9.10.19}{6} = 2,28 \end{aligned}$$

olur.

2. x_i' *noktalarını her bir* $[x_{i-1}, x_i]$ *aralığının sağ uç noktası olarak seçelim. Yani*

$$x_i' = x_i = \frac{i}{5}$$

olsun. Bu durumda Riemann toplamı



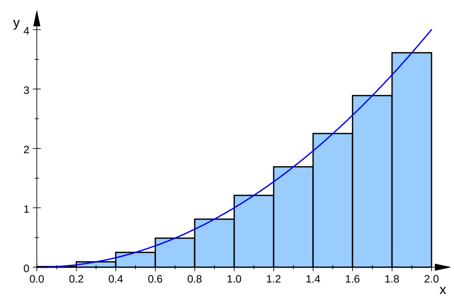
$$
\begin{aligned}
R_{sağ} &= \sum_{i=1}^{10} f(x_i')\Delta x_i = \sum_{i=1}^{10}\left(\frac{i}{5}\right)^2 \frac{1}{5} \\
&= \frac{1}{125}\sum_{i=1}^{10} i^2 = \frac{1}{125}\frac{10.11.21}{6} = 3,08
\end{aligned}
$$

olur.

3. *Şimdi de x_i' noktalarını her bir $[x_{i-1}, x_i]$ aralığının orta noktası olarak seçelim. Yani*

$$x_i' = \frac{x_i + x_{i-1}}{2} = \frac{2i-1}{10}$$

olsun. Bu durumda Riemann toplamı

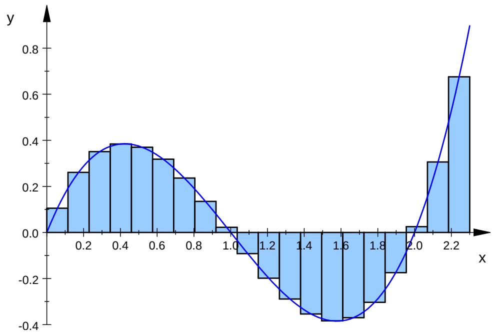


$$R_{orta} = \sum_{i=1}^{10} f(x_i')\Delta x_i = \sum_{i=1}^{10}\left(\frac{2i-1}{10}\right)^2 \frac{1}{5} = 2,66$$

olur.

Uyarı 9 *Riemann toplamı için, her bir $[x_{i-1}, x_i]$ alt aralığında genişliği Δx_i ve yüksekliği $f(x_i')$ olan dikdörtgenler oluşturulmaktadır. Eğer $f(x_i') > 0$ ise dikdörtgenler x-ekseninin üzerinde, $f(x_i') < 0$ ise dikdörtgenler x-ekseninin altındadır. Bu durumda Riemann toplamı, x-ekseninin üzerinde bulunan dikdörtgenlerin alanları toplamı ile x-ekseninin altında bulunan dikdörtgen-*

lerin alanları toplamının farkıdır.



$$R = A_1 + A_3 - A_2$$

Tanım 10 *f, $[a,b]$ aralığında tanımlı bir fonksiyon olsun. Eğer $[a,b]$ aralığının her P parçalanması ve her S seçimi için*

$$\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i')\Delta x_i \tag{1}$$

limti var ve eşitse bu limite f nin a dan b ye kadar belirli integrali denir. Bu durumda f ye $[a,b]$ üzerinde integrallenebilirdir denir.

Burada $\|P\| \to 0$ ifadesi alt aralıkların sayısının $(n \to \infty)$ sonsuza gittiğini ifede etmektedir. Ancak $n \to \infty$ olması $\|P\| \to 0$ olduğu anlamına gelmez. Bununla birlikte parçalanmalar düzgün yapılırsa $n \to \infty$ ile $\|P\| \to 0$ ifedeleri birbirine denktir ki bu durumda (1) ifadesi yerine

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i')\Delta x_i$$

yazılabilir.

Alan hesaplamalarında olduğu gibi (hareket eden bir cismin gittiği yol, eğri uzunluğu, hacim,...) matematik ve uygulamalarında (1) tipindeki limitlerle sık karşılaşırız. Bu nedenle bu tür limitler için özel bir gösterim kullanılır. Bu limit

$$\int_a^b f(x)dx$$

ile gösterilir ve "a dan b ye kadar $f(x)dx$ integrali" şeklinde ifade edilir. Burada $\int$ simgesine intagral işareti (Toplam anlamına gelen "sum" kelimesinin baş harfini temsil eder ve ilk olarak Leibniz kullanmıştır), a ve b ye sırası ile integralin alt ve üst sınırları, $f(x)$ e integrant, x e ise integralin değişkeni denir. dx ise değişkenin ne olduğunu belirtmek için kullanılır. Belirli integral değişkenden bağımsızdır. Yani f, $[a,b]$ de integrallenebilir ise

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du = \cdots$$

olur.

f nin sürekli olması halinde (1) deki limitin her zaman var olduğu ve x_i' nasıl seçilirse seçilsin her zaman aynı değeri verdiği ispatlanabilir. Hatta f, sonlu sayıda kaldırılabilir veya sıçrama süreksizliğine sahip bir fonksiyon olsa bile bu limit mevcuttur. Bu durumda aşağıdaki teoremi ifade edebiliriz.

Teorem 11 *f fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde tanımlı bir fonksiyon olsun. Eğer f sürekli veya sonlu sayıda kaldırılabilir veya sıçrama süreksizliğine sahip bir fonksiyon ise*

$$\int_a^b f(x)dx$$

integrali mevcuttur ve dolayısıyla f, $[a,b]$ de integrallenebilirdir.

Örnek 12 *Riemann toplamlarını kulllanarak*

$$\int_0^b x^2 dx$$

integralini hesaplayınız. Öncelikle $f(x) = x^2$ fonksiyonu $[0,b]$ aralığında sürekli olduğundan yukarıdaki teorem gereği bu aralıkta integrallenebilirdir. Yani aralığın parçalanması ve seçim nasıl yapılırsa yapılsın

$$\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i')\Delta x_i$$

limiti mevcuttur. O zaman $[0,b]$ aralığını eşit uzunlukta n parçaya bölerek P parçalanmasını ve her bir alt aralıktan sağ uç noktayı seçerek bu limiti dolayısıyla integral hesaplayalım. Bu durumda alt aralıkların boyları

$$\Delta x_i = \frac{b}{n}$$

olup

$$x_0 = 0,\ x_1 = \frac{b}{n},\ x_2 = \frac{2b}{n},\ \cdots,\ x_i = \frac{ib}{n},\ \cdots,\ x_n = b$$

olur. $[x_{i-1}, x_i]$ *alt aralıklarından* x'_i *olarak aralıkarın sağ uç noktaları olan* $x_i = \frac{ib}{n}$ *noktalarını seçelim. Böylece*

$$\begin{aligned}
\int_0^b x^2 dx &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x'_i)\Delta x_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (x'_i)^2 \Delta x_i \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{ib}{n}\right)^2 \frac{b}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{b^3}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i^2 \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{b^3}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{b^3}{3}
\end{aligned}$$

bulunur.

Örnek 13 $f(x) = x^3 - 6x$ *fonksiyonunu ve* $[0, 3]$ *aralığını göz önüne alalım.*

a) *Bu aralığı* $n = 6$ *olacak şekilde düzgün parçalanmaya ayırıp, her bir alt aralığın sağ uç noktasını seçerek Riemann toplamını bulunuz.*

b) $\int_0^3 (x^3 - 6x)dx$ *integralini hesaplayınız.*

a) $[0, 3]$ *aralığını* $n = 6$ *olacak şekilde düzgün parçalanmaya ayırdığımızda her bir alt aralığın uzunluğu* $\Delta x_i = \frac{3-0}{6} = \frac{1}{2}$ *olur. Yine*

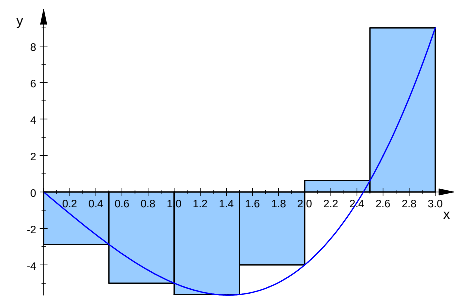
$$\begin{aligned}
P &= \{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\} \\
& \left\{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3\right\}
\end{aligned}$$

olacaktır. Her bir $[x_{i-1}, x_i]$ *alt aralığının sağ uç noktasını seçerek oluş-*

turulan Riemann toplamı

$$\begin{aligned}
R &= \sum_{i=1}^{6} f(x_i')\Delta x_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{6} f\left(\frac{i}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{6}\left[\left(\frac{i}{2}\right)^3 - 6\left(\frac{i}{2}\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{8}\sum_{i=1}^{6} i^3 - 3\sum_{i=1}^{6} i\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{8}\frac{6^2.7^2}{4} - 3\frac{6.7}{2}\right] \\
&= -\frac{63}{16}
\end{aligned}$$

olur.



b) $f(x) = x^3 - 6x$ *fonksiyonu* $[0,3]$ *aralığında sürekli olduğundan yukarıdaki teorem gereği bu aralıkta integrallenebilirdir. Yani aralığın parçalanması ve seçim nasıl yapılırsa yapılsın*

$$\lim_{\|P\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i')\Delta x_i$$

limiti mevcuttur. O zaman $[0,3]$ *aralığını eşit uzunlukta* n *parçaya bölerek* P *parçalanmasını ve her bir alt aralıktan sağ uç noktayı seçerek bu limiti dolayısıyla integral hesaplayalım. Bu durumda alt aralıkların boyları*

$$\Delta x_i = \frac{3}{n}$$

olup

$$x_0 = 0,\ x_1 = \frac{3}{n},\ x_2 = \frac{6}{n},\ \cdots,\ x_i = \frac{3i}{n},\ \cdots,\ x_n = 3$$

olur. $[x_{i-1}, x_i]$ *alt aralıklarından* x_i' *olarak aralıkarın sağ uç noktaları olan* $x_i = \frac{3i}{n}$ *noktalarını seçelim. Böylece*

$$\begin{aligned}
\int_0^3 (x^3 - 6x)dx &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i')\Delta x_i \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left[\left(\frac{3i}{n}\right)^3 - 6\left(\frac{3i}{n}\right)\right]\frac{3}{n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n}\left(\frac{27}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^3 - \frac{18}{n}\sum_{i=1}^{n} i\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n}\left(\frac{27}{n^3}\frac{n^2(n+1)^2}{4} - \frac{18}{n}\frac{n(n+1)}{2}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{81n^2(n+1)^2}{4n^4} - \frac{27n(n+1)}{n^2}\right) \\
&= -\frac{27}{4}
\end{aligned}$$

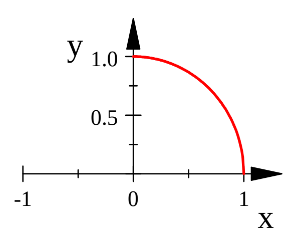
bulunur.

Örnek 14 *Aşağıdaki integralleri alan gibi yorumlayarak hesaplayınız.*

a) $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$

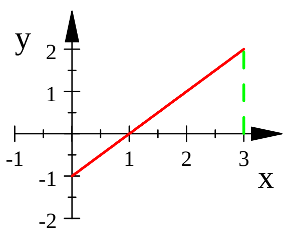
- *Verilen integral geometrik olarak birim çember tarafınan sınırlanan bölgenin alanının dörtte birine karşılık geldiğinden*

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx = \frac{\pi}{4}$$



olur.

b) $\int_0^3 (x-1)dx$



$$\begin{aligned}\int_0^3 (x-1)dx &= \textit{Üst üçgenin alanı-Alt üçgenin alanı} \\ &= 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}\end{aligned}$$

olur.

1.5 Belirli İntegralin Özellikleri

$\int_a^b f(x)dx$ belirli integralinin tanımında açıkça belirtlmese de $a < b$ olduğu varsayılmıştır. Ancak $a > b$ de olsa Riemann toplamının limiti olarak yapılan tanım anlamlıdır. Eğer a ile b nin yerlerini değiştirirsek alt aralıkların boyları $\frac{b-a}{n}$ yerine $\frac{a-b}{n}$ olur. Bu yüzden

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$$

dir. $a = b$ ise $\Delta x = 0$ olacağından

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

olur. Benzer düşüncelerle belirli integralin aşağıdaki özellikleri sağladığı gösterilebilir. f ve g fonksiyonları $[a, b]$ aralığında integrallenebilir ve k bir sabit olsun. O zaman

1. Sabitle çarpım:
$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

2. Toplam-Fark:
$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

3. Toplanabilirlik:
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

4. Maksimum-Minimum: her $x \in [a, b]$ için $m \leq f(x) \leq M$ ise
$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

5. Baskınlık: her $x \in [a, b]$ için $g(x) \leq f(x)$ ise
$$\int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)dx$$
dir. Özel olarak $x \in [a, b]$ için $f(x) \geq 0$ ise
$$\int_a^b f(x)dx \geq 0$$
dır.

6.
$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx$$
Her $x \in [a, b]$ için
$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$$
olduğundan baskınlık ve sabit le çarpım özellikleri gereği
$$-\int_a^b |f(x)|\, dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b |f(x)|\, dx$$
olur. O zaman
$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx$$
elde edilir.

Örnek 15 *Maksimum-Minimum ile ilgili eşitsizliği göz önüne alarak* $\int_0^2 e^{-x^2}dx$ *integrali için bir alt ve bir üst sınır bulunuz. Aynı soruyu* $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\cos x}dx$ *integrali için cevaplayınız.*

$f(x) = e^{-x^2}$ *fonksiyonunun* $[0, 2]$ *aralığındaki mutlak minimum ve mutlak maksimum değerleri sırası ile* $m = e^{-2}$ *ve* $M = 1$ *olduğundan*

$$e^{-2}(2-0) \leq \int_0^2 e^{-x^2}dx \leq 1(2-0)$$

veya

$$\frac{2}{e^2} \leq \int_0^2 e^{-x^2}dx \leq 2$$

elde edilir. Yine $g(x) = \sqrt{1+\cos x}$ *fonksiyonunun* $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ *aralığındaki mutlak minimum ve mutlak maksimum değerleri sırası ile* $m = 1$ *ve* $M = \sqrt{2}$ *olduğundan*

$$\frac{\pi}{2} \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\cos x}dx \leq \frac{\sqrt{2}\pi}{2}$$

olur.

Örnek 16 $\int_0^2 \sqrt{x^3+1}dx$ *integraline alt ve üst sınır bulunuz.*

Örnek 17 $\int_0^1 f(x)dx = 2,\ \int_0^4 f(t)dt = -6,\ \int_3^4 f(z)dz = 1$ *ise* $\int_1^3 f(x)dx$ *integralinin değeri nedir? Belirli integralin toplanabilirlik özelliğinden*

$$\int_0^4 f(t)dt = \int_0^1 f(x)dx + \int_1^3 f(x)dx + \int_3^4 f(z)dz$$

yazılabilir. O zaman

$$-6 = 2 + \int_1^3 f(x)dx + 1$$

olup

$$\int_1^3 f(x)dx = -9$$

bulunur.

Örnek 18 *Hangi* a *ve* b *reel sayıları için* $\int_a^b (x - x^2)dx$ *integrali en büyük değere sahiptir?*

1.6 Belirli İntegrallerin Hesaplanması

Tanımdan görüleceği üzere belirli integral Riemann toplamlarının limiti olarak hesaplanmaktadır. Ancak bunun genellikle uzun ve zor olduğu açıktır. Bu kesimde f fonksiyonun $[a, b]$ aralığı üzerinde bir F ilkelinin bilinmesi halinde, $\int_a^b f(x)dx$ integralinin hesaplanmasında daha kolay ve kullanışlı bir yöntem geliştireceğiz. (f nin $[a, b]$ üzerindeki belirli integrali ile ilkeli arasındaki bu ilişkiyi Newton ve Leibniz ortaya çıkarmıştır).

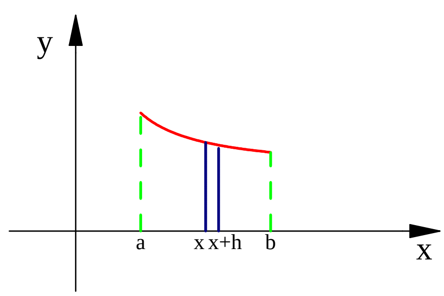
Şimdi

$$\int_a^b f(x)dx$$

integralini hesaplamak için

$$A(x) = \int_a^x f(t)dt$$

ile tanımlı $A(x)$ fonksiyonunu göz önüne alalım. Eğer f pozitif ve sürekli bir fonksiyon ve $x > a$ ise $A(x)$ fonksiyonu, $y = f(t)$ eğirisi altında $[a, x]$ aralığı üzerindeki bölgenin alanıdır. Böylece x artarken $A(x)$ de artar. Şekilden de görüleceği üzere x, h kadar artırıldığı zaman $A(x)$ alanı, $A(x + h) - A(x)$ kadar artar (ince şeridin alanı).



Diğer taraftan bu şeridin alanı yaklaşık olarak, genişliği h birim yüksekliği $f(x)$ birim olan dikdörtgenin alanı kadardır ki h ne kadar küçük olursa yaklaşıklık o kadar iyi olur. Buna göre

$$A(x + h) - A(x) \cong f(x)h$$

olup

$$\frac{A(x + h) - A(x)}{h} \cong f(x)$$

veya buradan

$$A'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{A(x+h) - A(x)}{h} = f(x)$$

elde edilir. Bu ise bize A fonksiyonunun f nin bir ilkeli olduğunu gösterir. Şimdi F fonksiyonu f nin bir başka ilkeli ise

$$A(x) = F(x) + C$$

olacak şekilde C sabiti vardır. Ayrıca

$$A(a) = \int_a^a f(x)dx = 0$$

ve

$$A(b) = \int_a^b f(x)dx$$

olduğundan

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= A(b) - A(a)\\ &= [F(b) + C] - [F(a) + C]\\ &= F(b) - F(a)\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan da anlaşılacağı üzere f nin herhangi bir ilkelinin bilimesi halinde $\int_a^b f(x)dx$ integrali kolaylıkla hesaplanabilmektedir. f pozitif olmasa bile yukarıda bahsedilen işlemlerin doğru olduğu gerçeği Kalkülüsün Temel Teoreminin ikinci kısmında ifade edilecektir.

Şimdi Kalkülüsün Temel Teoreminin ispatında kullanacağımız fonksiyonun ortalama değeri kavramını tanımlayalım. Öncelikle aşağıdaki örneği inceleyelim.

24 saatlik gün boyunca T sıcaklığı $T = f(t)$ $(0 \leq t \leq 24)$ fonksiyonu ile verilsin. Gün içi ortalama sıcaklığı nasıl belirleriz? Örneğin sıcaklık ortalaması $\overline{T}$ ise bunu yaklaşık olarak saat başlarındaki sıcaklıkların aritmetik ortalaması olarak tanımlayabiliriz. Yani $t_i = i$ saat başlarını göstermek üzere

$$\overline{T} \cong \frac{1}{24} \sum_{i=1}^{24} f(t_i)$$

diyebiliriz. Eğer günü 24 saatlik aralıklar yeine n tane eşit alt aralıklara bölersek daha iyi bir ortalama elde edebiliriz. Bu durumda

$$\overline{T} \cong \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(t_i)$$

olur. n nekadar büyük olursa gerçek ortalama sıcaklık o kadar iyi bulunur. Sonuçta gerçek orlama sıcaklığı, n yi sınırsız olarak büyüterek

$$\overline{T} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(t_i)$$

şeklinde bulabiliriz. Sağ taraf bir Riemann toplamını hatırlatmaktadır. $a = 0$ ve $b = 24$ olmak üzere $\Delta t_i = \frac{b-a}{n}$ dersek

$$\begin{aligned}
\overline{T} &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{b-a}\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\frac{b-a}{n} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{b-a}\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta t_i \\
&= \frac{1}{b-a}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta t_i \\
&= \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt \\
&= \frac{1}{24}\int_0^{24} f(t)dt
\end{aligned}$$

olur. Burada olduğu gibi $[a, b]$ aralığında integrallenebilen bir fonksiyonun ortlama değeri aşağıdaki şekilde tanımlanır.

Tanım 19 *f, $[a, b]$ üzerinde integrallenebilir olsun. O zaman $y = f(x)$ in $[a, b]$ deki ortalama değeri*

$$\overline{y} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

şeklinde tanımlanır.

Örnek 20 *$f(x) = x^2$ fonksiyonunun $[0,2]$ deki ortalama değeri*

$$\overline{y} = \frac{1}{2}\int_0^2 x^2 dx = \frac{4}{3}$$

olur.

Uyarı 21 *f fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde sürekli ve bu aralıktaki ortalama değeri $\overline{y}$ ise*

$$f(\overline{x}) = \overline{y} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \tag{2}$$

olacak şekilde en az bir $\overline{x} \in [a,b]$ vardır. Çünkü f, $[a,b]$ de sürekli olduğundan bu aralıkta maksimum ve minimum değerlerini alır. Bunlar sırası ile M ve m ise $m = f(c)$ ve $M = f(d)$ olacak şekile $c,d \in [a,b]$ vardır. Ayrıca $m \leq f(x) \leq M$ olduğundan

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

veya

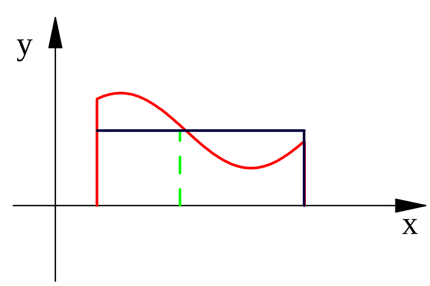
$$f(c) \leq \overline{y} \leq f(d)$$

olur. f sürekli olduğundan Aradeğer Teoremi gereği $\overline{y} = f(\overline{x})$ olacak şekilde en az bir $\overline{x} \in [a,b]$ vardır.

Uyarı 22 *(2) de verilen eşitlik*

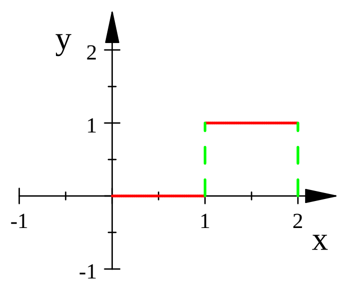
$$\int_a^b f(x)dx = f(\overline{x})(b-a)$$

biçiminde yazılabilir. Eğer f pozitif değerli ise bu eşitlik, $y = f(x)$ eğrisi altında kalan alanın, $b-a$ tabanlı $f(\overline{x})$ yükseklikli dikdörtgenin alanına eşit olduğunu belirtir.



Uyarı 23 *f fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde sürekli olmayan integrallenebilir bir fonksiyon ise f nin bu aralıkta $\overline{y}$ ortalama değeri vardır, ancak $\overline{y} = f(\overline{x})$ olacak şekilde bir $\overline{x} \in [a,b]$ noktası bulunmayabilir.*

Örnek 24 *$\int_0^2 \lfloor x \rfloor\, dx$ integralini hesaplayınız. Buradan $f(x) = \lfloor x \rfloor$ fonksiyonunun $[0,2]$ aralığındaki $\overline{y}$ ortalama değerini bulunuz. $[0,2]$ aralığında $f(\overline{x}) = \overline{y}$ eşitliğini sağlayan bir $\overline{x}$ noktası var mıdır?*



Şekildeki alanı göz önüne alırsak

$$\int_0^2 \lfloor x \rfloor\, dx = 1$$

elde edilir. O zaman

$$\begin{aligned} \overline{y} &= \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^2 \lfloor x \rfloor\, dx = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

bulunur. Dikkat edilecek olursa $[0,2]$ aralığında $f(\overline{x}) = \lfloor \overline{x} \rfloor = \overline{y} = \frac{1}{2}$ eşitliğini sağlayan bir $\overline{x}$ noktası mevcut değildir.

Teorem 25 (Kalkülüsün Temel Teoremi, 1. Kısım) *Eğer f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli ise*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

ile tanımlı F fonksiyonu (a,b) de türevlenebilirdir ve türevi $f(x)$ dir; yani

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$$

olur.

Ispat. İlk olarak türev tanımını doğrudan F fonksiyonuna uygulayalım. $x \in (a,b)$ için

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt\right] \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt \end{aligned}$$

olur. Ortalama değer kavramı dikkate alınacak olursa f sürekli olduğundan

$$\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt = f(\overline{x})$$

olacak şekilde $\overline{x} \in [x, x+h]$ vardır. Üstelik $h \to 0$ için $\overline{x} \to x$ olur. Böylece f sürekli olduğundan

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt \\ &= \lim_{\overline{x}\to x} f(\overline{x}) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

bulunur. ■

Örnek 26 *Aşağıdaki verilenlere göre* $\dfrac{dy}{dx}$ *türevini hesaplayınız.*

1. $y = \int_a^x (t^3+1)dt$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\int_a^x (t^3+1)dt = x^3+1$$

olur.

2. $y = \int_x^5 t\sin t dt$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\int_x^5 t\sin t dt = -\frac{d}{dx}\int_5^x t\sin t dt = -x\sin x$$

olur.

3. $y=\int_1^{x^2}\cos t dt$. *Burada* $F(x)=\int_1^x \cos t dt$ *ve* $g(x)=x^2$ *dersek* $y=F\circ g$ *olur. O zaman zincir kuralından*

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{dF(g(x))}{dx}=F'(g(x))g'(x)\\ &= \cos(g(x))g'(x)\\ &= 2x\cos x^2\end{aligned}$$

olur.

4. $y=\int_x^{x^2}\sin(t^2)dt$

$$\frac{dy}{dx}=2x\sin x^4-\sin x^2$$

olur.

Örnek 27 $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x \frac{t^2}{t^4+1}dt$ *limitini hesaplayınız.*

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x \frac{t^2}{t^4+1}dt &= \lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \frac{t^2}{t^4+1}dt}{x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{x^4+1}}{1}=0\end{aligned}$$

olur.

Örnek 28 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin x^4}\int\limits_0^x \sin\left(t^2\right)dt$ *limitini hesaplayınız.*

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x^4}\int\limits_0^x \sin\left(t^2\right)dt &= \lim_{x\to 0}\frac{x\int\limits_0^x \sin\left(t^2\right)dt}{\sin x^4}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\int\limits_0^x \sin\left(t^2\right)dt}{x^3}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x^2}{3x^2}=\frac{1}{3}\end{aligned}$$

olur.

Teorem 29 (Kalkülüsün Temel Teoremi, 2. Kısım) *Eğer f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sürekli ve F de f nin bu aralıktaki herhangi bir ilkeli ise*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

dır.

Ispat. Temel Teoremin birinci kısmında

$$G(x) = \int_a^x f(t)dt$$

ile tanımlı G fonksiyonunun, f nin bir ilkeli olduğu belirtilmiştir. Bu durumda F ve G nin her ikisi de ilkel olduklarından

$$F(x) = G(x) + C$$

olacak şekilde C sabiti vardır. O zaman

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= [G(b) + C] - [G(a) + C] \\ &= G(b) - G(a) \\ &= \int_a^b f(t)dt - \int_a^a f(t)dt \\ &= \int_a^b f(t)dt \end{aligned}$$

bulunur. ■

Uyarı 30 *$F(b)-F(a)$ ifadesini alışılmış gösterimle $F(x)|_a^b$ biçiminde göstereceğiz. Yani*

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$$

dir. Bu teoreme göre $\int_a^b f(x)dx$ integralini hesaplamak için f nin bu aralıkta bir ilkelinin bulunması yeterlidir.

Örnek 31 *Aşağıdaki integralleri, integrantın bir ilkelini bularak hesaplayınız.*

1. $\int_{-1}^{2}(4-2x+3x^2)dx$

$$\int_{-1}^{2}(4-2x+3x^2)dx = (4x-x^2+x^3)\big|_{-1}^{2} = 18$$

2. $\int_0^{\pi}\sin x\cos x dx$

$$\int_0^{\pi}\sin x\cos x dx = \left.\frac{\sin^2 x}{2}\right|_0^{\pi} = 0$$

3. $\int_1^3 e^{2x}dx$

$$\int_1^3 e^{2x}dx = \left.\frac{e^{2x}}{2}\right|_1^3 = \frac{1}{2}(e^6-e^2)$$

olur.

Uyarı 32 *Kalkülüsün Temel Teoreminden türev ve integral arasında aşağıdaki ilişkileri çıkarabiliriz.*

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$$

eşitliği, önce f fonksiyonunu integre eder sonra sonucun türevini alırsanız yine f yi elde edersiniz demektedir. Benzer şekilde

$$\int_a^x F'(x)dx = F(x) - F(a)$$

eşitliği ise, önce F fonksiyonunu türevini alır sonra sonucu integre ederseniz F yi bir sabit farkıyla elde edersiniz demektedir.

Belirli integral hesaplamalarında bir fonksiyonun ilkeli ile sıkça karşılaşırız. Bu nedenle bir fonksiyonun ilkelini göstermede uygun bir gösterime ihtiyaç duyarız. Bu bölümün ilk kesiminde f fonksiyonunun ilkelini ters diferensiyel operatör yardımıyla $D^{-1}f(x)$ biçiminde göstermiştik. Ancak Kalkülüsün Temel Teoreminde ilkel ile belirli integral arasındaki ilişkiden dolayı, f nin ilkelini göstermek için geleneksel olarak Belirsiz integral diye adlandırılan

$$\int f(x)dx$$

gösterimi kullanılır. Dolayısıyla

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

ifadesi

$$F'(x) = f(x)$$

anlamına gelecektir.

Belirli ve Belirsiz integral arasındaki ayrıma dikkat edilmelidir. Belirli integral bir sayı, belirsiz integral ise bir fonksiyon ailesidir. Bunlar arasınadaki ilişki ise Kalkülüsün Temel Teoreminden

$$\int_a^b f(x)dx = \int f(x)dx \bigg|_a^b$$

şeklinde yazılabilir. Burada f nin sürekli olması gerektiğine dikkat ediniz.

Bir fonksiyonun türevi ve ilkel arasındaki ilişki dikkate alınacak olursa aşağıdaki belirsiz integraller tablosu oluşturulabilir. İntegral hesaplamalarında bunlardan sıkça yararlanılır.

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \ (n \neq -1) \qquad \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C \qquad \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C \qquad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) + C \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) + C$$

Yine ters diferensiel operatörün lineer olduğu göz önüne alınırsa a ve b reel sabitler olmak üzere

$$\int [af(x) + bg(x)]\, dx = a \int f(x)dx + b \int g(x)dx$$

yazılabilir.

Örnek 33 *Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.*

1. $\int(10x^2 - 2\sec^2 x)dx$

$$\begin{aligned}\int(10x^2 - 2\sec^2 x)dx &= 10\int x^2dx - 2\int \sec^2 xdx \\ &= \frac{10}{3}x^3 - 2\tan x + C\end{aligned}$$

2. $\int_0^3 (x^3 - 6x)dx$

$$\int_0^3 (x^3 - 6x)dx = \left(\frac{x^4}{4} - 3x^2\right)\Bigg|_0^3 = -\frac{27}{4}$$

3. $\int_0^2 \left(2x^3 - 6x + \dfrac{3}{1+x^2}\right) dx$

$$\begin{aligned}\int_0^2 \left(2x^3 - 6x + \frac{3}{1+x^2}\right) dx &= \left(\frac{x^4}{2} - 3x^2 + 3\arctan x\right)\Bigg|_0^2 \\ &= 3\arctan 2 - 4\end{aligned}$$

4. $\int \left(x - \sqrt{x}\right) dx$

$$\int \left(x - \sqrt{x}\right) dx = \frac{x^2}{2} - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C$$

5. $\int_{-1}^3 |x|\, dx$

$$\begin{aligned}\int_{-1}^3 |x|\, dx &= \int_{-1}^0 |x|\, dx + \int_0^3 |x|\, dx \\ &= -\int_{-1}^0 xdx + \int_0^3 xdx \\ &= -\frac{x^2}{2}\Bigg|_{-1}^0 + \frac{x^2}{2}\Bigg|_0^3 \\ &= 5\end{aligned}$$

6. $\int_0^2 |x-\sqrt{x}|\,dx$

$$\begin{aligned}\int_0^2 \left|x-\sqrt{x}\right| dx &= \int_0^1 \left|x-\sqrt{x}\right| dx + \int_1^2 \left|x-\sqrt{x}\right| dx \\ &= \int_0^1 \left(\sqrt{x}-x\right) dx + \int_1^2 \left(x-\sqrt{x}\right) dx \\ &= \left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)\Bigg|_1^2 \\ &= \frac{7-4\sqrt{2}}{3}\end{aligned}$$

1.6.1 Ek Sorular

Örnek 34 *Aşağıda verilen fonksiyonların belirtilen aralıklardaki ortalama değerini bulunuz.*

1. $f(x)=x^4,\ [0,2]$
2. $f(x)=\sqrt{x},\ [1,4]$
3. $f(x)=\sin 2x,\ \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

Örnek 35 *Kalkülüsün Temel Teoremini kullanarak verilen fonksiyonların türevini hesaplayınız.*

1. $f(x)=\int_{-1}^{x}(t^2+1)^{17}dt$
2. $f(x)=\int_{x}^{10}(t+\frac{1}{t})dt$
3. $f(x)=\int_{0}^{x^2}\sqrt{1+t^3}dt$
4. $f(x)=\int_{1}^{\sin x}(t^2+2)^3dt$
5. $f\left(x\right)=\int\limits_{2x}^{3x+1}\sin\left(t^4\right)dt$

Örnek 36

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\bigg|_{-1}^{1} = -2$$

hesaplaması doğru mudur? Bu durum Kalkülüsün Temel Teoremi ile çelişir mi? Neden? İntegrantın grafiğini çiziniz ve bu durumu yorumlayınız.

Örnek 37

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{2i}{n^2}$$

limitini hesaplayınız.

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{2i}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n^2} \sum_{i=1}^{n} i = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} = 1$$

bulunur. Aynı limit belirli integral yardımıyla da hesaplanabilir.

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{2i}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{2i}{n} \frac{1}{n}$$

ifadesinin sağ tarafı $[0,1]$ aralığı üzerinde $f(x) = 2x$ fonksiyonunun bir Riemann toplamının limitidir. (Aralığı n eşit parçaya bölüp, her bir alt aralıktan sağ uç noktayı seçerek elde edilen Riemann toplamı olduğunu görünüz). O zaman

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{2i}{n^2} &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{2i}{n} \frac{1}{n} \\ &= \int_{0}^{1} 2x dx = 1 \end{aligned}$$

bulunur.

Örnek 38

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{n^2}{(n+i)^3}$$

limitini hesaplayınız. Bu limit belirli integral yardımıyla da hesaplanabilir.

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{n^2}{(n+i)^3} &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{n^3}{(n+i)^3} \frac{1}{n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\left(1+\frac{i}{n}\right)^3} \frac{1}{n} \end{aligned}$$

ifadesinin sağ tarafı $[0,1]$ *aralığı üzerinde*

$$f(x)=\frac{1}{(1+x)^3}$$

fonksiyonunun bir Riemann toplamının limitidir. (Aralığı n *eşit parçaya bölüp, her bir alt aralıktan sağ uç noktayı seçerek elde edilen Riemann toplamı olduğunu görünüz). O zaman*

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{n^2}{(n+i)^3} &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\left(1+\frac{i}{n}\right)^3}\frac{1}{n}\\ &= \int_0^1\frac{dx}{(1+x)^3}=\frac{3}{8}\end{aligned}$$

bulunur.

Örnek 39

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\sin\left(\frac{\pi i}{n}\right)$$

limitini hesaplayınız.

Örnek 40 *Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.*

1. $\int_{-1}^{0}(2x-e^x)dx=e^{-1}-2$
2. $\int_1^4\dfrac{dx}{\sqrt{x}}=2$
3. $\int_1^2\dfrac{x^2+1}{\sqrt{x}}dx=\frac{18\sqrt{2}-12}{5}$
4. $\int_0^{\frac{1}{2}}\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{\pi}{6}$
5. $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{1+\cos^2 x}{\cos^2 x}dx=\frac{\pi}{4}+1$
6. $\int_{-1}^{2}\left|x-x^2\right|dx=\frac{11}{6}$

Örnek 41 $f(t)=\int_1^{t^2}\frac{\sqrt{1+u^4}}{u}du$ *ve* $F(x)=\int_1^x f(x)dx$ *ise* $F''(2)$ *yi hesaplayınız.*

Örnek 42 $[-2,2]$ *aralığında* $f(x)=\sqrt{4-x^2}$ *fonksiyonunun ortalam değerini bulunuz. (Belirli integrali alan gibi yorumlayarak hesaplayınız)*

Örnek 43 $\int_0^x f(t)dt = x\cos\pi x$ *ise* $f(4)$ *nedir?*

Örnek 44 f *türevlenebilen bir fonksiyon,* $f'\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=4$ *ve*

$$y=\int\limits_0^{\sin x} f(t)\,dt$$

ise $y'+y''$ *toplamının* $x=\frac{\pi}{4}$ *noktasındaki değerini bulunuz.*

Örnek 45 $\int_a^b (2+x-x^2)\,dx$ *integralini maksimum yapan* a *ve* b *reel değerleri nedir?*

Örnek 46 $\int_1^2 (1-x^3)dx$ *integralini belirli integral tanımını kullanarak hesaplayınız.*

2 İntegralleme Teknikleri

Bu bölümde integral hesaplama yöntemleri üzerinde duracağız. Bunlar sırası ile Değişken Değiştirme Yöntemi (Yerine Koyma Yöntemi), Kısmi İntegrasyon, Bazı İndireme Bağıntıları, Trigonometrik İntegraller, Basit Kesirlere Ayırma ve İrrasyonel Fonksiyonların İntegrali şeklinde ifade edilebilir.

Kalkülüsün Temel Teoremi $\int_a^b f(x)dx$ belirli integralini hesaplamak için $f(x)$ in hergangi bir $F(x)$ ilkelinin bulnmasının yereli olduğunu söylemektedir. Aranan ilkeli bulmak için daha çok deneme-yanılma ile veya "hangi fonksiyonun türeni $f(x)$ dir" düşüncesini dikkate alarak işlem yaptık. Ancak bu ilkel bulma veya belirsiz integral hesaplama düşüncesi genellikle yetersiz kalmaktadır. Bu nedenle daha karmaşık fonksiyonların integralini hesplamada çeşitli yöntemler geliştirilmiştir. Bu kesimde bu yöntemler üzerinde duracağız. Fakat burada bahsedilen yöntemlerinde yeresiz kaldığı durmların var olduğunu belirtilmelidir. Örneğin basit görünüşlü

$$\int e^{-x^2}dx,\ \int \frac{\sin x}{x}dx,\ \int \sqrt{1+x^4}dx \text{ veya } \int \frac{dx}{\ln x}$$

gibi integraller burada belirtilecek olan yöntemler ile bilinen cebirsel ve transandant fonksiyonların sonlu toplamları biçiminde hesaplanamazlar. Buradan da anlaşılacağı gibi integralleme işlemi diferensiyelleme gibi basit bir işleme indirgenemez.

2.1 Değişken Değiştirme Yöntemi

Bu yöntem integral hesaplama yöntemleri içinde en sık kullanılan yöntemdir. Bileşke fonksiyonun türevinde kullanılan Zincir Kuralına dayanan bu yöntem

$$\int f(g(x))g'(x)dx$$

tipindeki integraller için kullanılır. Burada $g(x) = t$ denirse (değişken değişimi yapılırsa) $g'(x)dx = dt$ olduğundan

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(t)dt$$

integraline dönüşür. Bu integral ilkine göre daha basit ve sadedir. Burada dikket edilmesi gereken şey değişken seçimidir. Eğer değişken uygun biçimde seçilmezse integral daha da karmaşık hale gelebilir. Ayrıca integral yeni deişkene bağlı hesaplanacağından sonuçta tekrar eski değişkene dönülmelidir.

Örnek 47 *$\int(2x+1)^9dx$ integralini $2x+1 = t$ dönüşümü yaparak hesaplayabiliriz. O zaman $2dx = dt$ olacağından*

$$\begin{aligned}\int(2x+1)^9dx &= \int \frac{1}{2}t^9\,dt \\ &= \frac{t^{10}}{20} + C \\ &= \frac{(2x+1)^{10}}{20} + C\end{aligned}$$

olur.

Örnek 48 *Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.*

1. $\int x^3\cos(x^4+1)dx = \frac{\sin\left(x^4+1\right)}{4} + C$
2. $\int \frac{(1+\ln x)^4}{x}dx = \frac{(1+\ln x)^5}{5} + C$
3. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$
4. $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx = 2e^{\sqrt{x}} + C$

5. $\int \tan x dx = -\ln(\cos x) + C$

6. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$

7. $\int \dfrac{xdx}{\sqrt{1 - 4x^2}} = -\frac{1}{4}\sqrt{1 - 4x^2} + C$

8. $\int \dfrac{x^2}{(x-2)^5} dx = -\frac{1}{(x-2)^4}\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}\right) + C$

9. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \ln\left(x + \sqrt{a^2 + x^2}\right) + C$

10. $\int \dfrac{\sin x \cos x}{\sqrt{1 + \sin^2 x}} dx = \sqrt{1 + \sin^2 x} + C$

11. $\int \dfrac{dx}{(2 + \tan x)\sin^2 x}$. *İntegrali hesaplamak için* $\cot x = t$ *dönüşümü uygulayalım. O zaman*

$$-\frac{dx}{\sin^2 x} = dt$$

olur. Böylece

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{(2 + \tan x)\sin^2 x} &= -\int \frac{dt}{2 + \frac{1}{t}} \\
&= -\int \frac{tdt}{2t + 1} \\
&= -\frac{1}{2}\int \left(1 - \frac{\frac{1}{2}}{t + \frac{1}{2}}\right) dt \\
&= -\frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{2}\ln\left(t + \frac{1}{2}\right)\right) + C \\
&= -\frac{\cot x}{2} + \frac{1}{4}\ln\left(\frac{1}{2} + \cot x\right) + C
\end{aligned}$$

olur.

Bu örneklerden de anlaşılacağı gibi her bir integrale kendine has bir değişken değiştirmesi uygulanmaktadır. Fakat bazı özel tipte olan integraller için Trigonometrik Değişken Değiştirme (Trigonometrik Yerine Koyma) adı verilen yöntem kullanılmaktadır.

$$\sqrt{a^2-x^2},\ \sqrt{x^2-a^2} \text{ veya } \sqrt{a^2+x^2}$$

gibi cebirsel ifadelerden birini içeren integraller için bu cebirsel ifadeleri kökten kurtaran bir trigonometrik değişken değişikliği yapılabilir.

Cebirsel ifade	Değişken	Özdeşlik
$\sqrt{a^2-x^2}$	$x=a\sin t$	$1-\sin^2 t=\cos^2 t$
$\sqrt{x^2-a^2}$	$x=a\sec t$	$\sec^2 t-1=\tan^2 t$
$\sqrt{a^2+x^2}$	$x=a\tan t$	$1+\tan^2 t=\sec^2 t$

Örnek 49 $\int \frac{x+8}{\sqrt{9-x^2}}dx$ *integralini hesaplayınız. İntegrant* $\sqrt{a^2-x^2}$ *şeklinde bir cebirsel ifadeyi içermektedir. Bu nedenle* $x=3\sin t$ *değişimi yapılabilir. O zaman* $dx=3\cos t dt$ *olacağından integral*

$$\begin{aligned}\int \frac{x+8}{\sqrt{9-x^2}}dx &= \int \frac{3\sin t+8}{\sqrt{9-9\sin^2 t}}3\cos t dt\\ &= \int (3\sin t+8)dt\\ &= -3\cos t+8t+C\end{aligned}$$

olur. Burada $x=3\sin t$ *eşitliğinden* $t=\arcsin\frac{x}{3}$ *olup*

$$\int \frac{x+8}{\sqrt{9-x^2}}dx=-3\cos(\arcsin\frac{x}{3})+8\arcsin\frac{x}{3}+C$$

bulunur. Ancak genellikle $\cos(\arcsin\frac{x}{3})$ *ifadesi daha sade biçimde yazılır. Bunun için sinüsü* $\frac{x}{3}$ *olan açının kosinüsü hesaplanır. Bu ise* $\frac{\sqrt{9-x^2}}{3}$ *olduğundan*

$$\int \frac{x+8}{\sqrt{9-x^2}}=-\sqrt{9-x^2}+8\arcsin\frac{x}{3}+C$$

olarak bulunur.

Örnek 50 *Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.*

1. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-9}}$

2. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+4}}$

3. $\int \frac{dx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$

4. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$

5. $\int \frac{dx}{x\sqrt{4x^2-1}}$

6. $\int \sqrt{9-4x^2}dx$

7. $\int \frac{\sqrt{x^2-25}}{x}dx$

Eğer integrant trigonometrik fonksiyonların rasyonel ifadesi şeklinde ise bazen Yarım Açı Yöntemi denilen değişken değişikliği yapılabilir. Bu yöntemde

$$\tan\frac{x}{2} = t$$

dönüşümü yapılarak $\sin x$, $\cos x$ ve dx ifadeleri hesaplanır. Bu durumda

$$x = 2\arctan t$$

olacağından

$$dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

olur. Yine

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$$

ve

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

olur.

Örnek 51 $\int \dfrac{1+\sin x}{(1+\cos x)\sin x}dx$ *integralini hesaplayınız.* $\tan\frac{x}{2}=t$ *dönüşümünün uygulanması ile integral*

$$\begin{aligned}
\int \frac{1+\sin x}{(1+\cos x)\sin x}dx &= \int \frac{1+\frac{2t}{1+t^2}}{\left(1+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2t}{1+t^2}}\frac{2dt}{1+t^2} \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{t^2+2t+1}{t}dt \\
&= \frac{1}{2}\int \left(t+2+\frac{1}{t}\right)dt \\
&= \frac{1}{2}(\frac{t^2}{2}+2t+\ln|t|+C \\
&= \frac{1}{4}\tan^2\frac{x}{2}+2\tan\frac{x}{2}+\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C
\end{aligned}$$

şeklinde hesaplanır.

Örnek 52 *Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.*

1. $\int \dfrac{dx}{5+3\cos x}$
2. $\int \dfrac{dx}{\sin x}$

Örnek 53 $\int \dfrac{dx}{2+\sin x-\cos x}$ *integralini hesaplayınız.* $\tan\frac{x}{2}=t$ *dönüşümünün* *uygulanması ile integral*

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{2+\sin x-\cos x} &= \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{2+\frac{2t}{1+t^2}-\frac{1-t^2}{1+t^2}} \\
&= \int \frac{2dt}{2+2t^2+2t-1+t^2} \\
&= \int \frac{2dt}{3t^2+2t+1} \\
&= \frac{2}{3}\int \frac{dt}{t^2+\frac{2}{3}t+\frac{1}{3}} \\
&= \frac{2}{3}\int \frac{dt}{\left(t+\frac{1}{3}\right)^2+\frac{2}{9}} \\
&= \frac{2}{3}\frac{3}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{t+\frac{1}{3}}{\frac{\sqrt{2}}{3}}\right)+C \\
&= \sqrt{2}\arctan\left(\frac{3t+1}{\sqrt{2}}\right)+C \\
&= \sqrt{2}\arctan\left(\frac{3\tan\frac{x}{2}+1}{\sqrt{2}}\right)+C
\end{aligned}$$

Uyarı 54 *Eğer bir belirli integral değişken değiştirme yöntemi ile hesaplanacaksa ve tekrar eski değişkene dönülmek istenmiyorsa integrasyon sınırlarını da değiştirmek gerekir. Buna göre $g(x)=t$ dönüşümü yapıldığında*

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)dt$$

yazılır.

Örnek 55 $\int_{-1}^{1} 3x^2\sqrt{x^3+1}dx$ *integralini hesaplayınız. İntegrali hesaplamak için iki seçeneğimiz var.*

- $x^3+1=t$ *dönüşümü yaparsak* $3x^2dx=dt$ *olur. Ayrıca* $x=-1$ *için*

$t = 0$ ve $x = 1$ için $t = 2$ olacağından

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} 3x^2\sqrt{x^3+1}dx &= \int_0^2 \sqrt{t}dt \\
&= \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\Big|_0^2 \\
&= \frac{4\sqrt{2}}{3}
\end{aligned}$$

bulunur.

- *İntegrali belirsiz integral olarak hesaplarız. Eski değişkene dönüp sınırları yazarız. $x^3 + 1 = t$ dönüşümü yaparsak $3x^2dx = dt$ olur. Böylece*

$$\begin{aligned}
\int 3x^2\sqrt{x^3+1}dx &= \int \sqrt{t}dt \\
&= \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} + C \\
&= \frac{2}{3}(x^3+1)^{\frac{3}{2}} + C
\end{aligned}$$

bulunur. O zaman

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} 3x^2\sqrt{x^3+1}dx &= \int 3x^2\sqrt{x^3+1}dx\Big|_{-1}^{1} \\
&= \frac{2}{3}(x^3+1)^{\frac{3}{2}}\Big|_{-1}^{1} \\
&= \frac{4\sqrt{2}}{3}
\end{aligned}$$

olur.

Örnek 56 *Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.*

1. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos x}{1+\sin^2 x}dx$

2. $\int_0^{\frac{1}{2}} \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

3. $\int_0^a x\sqrt{a^2-x^2}dx$

Örnek 57 $\int_e^{e^4} \dfrac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$ *integralini hesaplayınız.* $\ln x = t$ *dönüşümü yaparsak* $\frac{dx}{x} = dt$ *olur. Ayrıca* $x = e$ *için* $t = 1$ *ve* $x = e^4$ *için* $t = 4$ *olacağından*

$$\int_e^{e^4} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}} = \int_1^4 \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{t}\Big|_1^4 = 2$$

bulunur.

Uyarı 58 *Simetrik bir aralık üzerinde tanımlı fonksiyonların integrali için aşağıdaki bilgiler kullanılabilir.* f *fonksiyonu* $[-a, a]$ *aralığında tanımlı sürekli bir fonksiyon olsun.*

- f *çift fonksiyonsa*

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$$

- f *tek fonksiyonsa*

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$$

dır.

Bu eşitlikleri görmek için aşağıdaki yol izlenebilir. Belirli integralin toplanabilirlik özelliğini kullanarak integrali iki parçaya ayıralım ve ilkine $x = -t$ *dönüşümü uygulayalım. O zaman*

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{a} f(x)dx &= \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_0^a f(x)dx \\ &= \int_a^0 -f(-t)dt + \int_0^a f(x)dx \\ &= \int_0^a f(-t)dt + \int_0^a f(x)dx\end{aligned}$$

olur. Şimdi eğer f *çift fonksiyon ise* $f(-t) = f(t)$ *olacağından (belirli integralin değişkenden bağımsız olduğunu hatırlayarak)*

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$$

bulunur. Eğer f tek fonksiyon ise $f(-t) = -f(t)$ olacağından

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$$

bulunur.

Örnek 59 *Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.*

1. $\int_{-2}^{2} \sqrt{4-x^2}dx = 2\pi$

2. $\int_{-1}^{1} \dfrac{x^3}{1+x^4}dx = 0$

3. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{x^2 \sin x}{1+x^6}dx = 0$

2.1.1 Ek Sorular

Örnek 60 *Aşağıdaki belirsiz integralleri hesaplayınız.*

1. $\int \dfrac{x^4}{1+x^{10}}dx$

2. $\int \dfrac{dx}{25+x^2}$

3. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{16-x^2}}$

4. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{3-2x-x^2}}$

5. $\int \dfrac{\sqrt[4]{x+1}+2}{\sqrt[6]{x+1}}dx$

6. $\int xe^{x^2}dx$

7. $\int \dfrac{(1+\sqrt{x})^4}{\sqrt{x}}dx$

8. $\int \dfrac{\sin 2x}{\sqrt{1-\sin^4 x}}dx$

9. $\int \dfrac{dx}{1+e^x}$

10. $\int \dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}dx$

11. $\int \tan^2 x dx$

12. $\int \dfrac{\sin x}{2-\sin^2 x}dx$

13. $\int \sqrt{1+\cos x}dx$

Örnek 61 *Aşağıdaki belirli integralleri hesaplayınız.*

1. $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \tan^3 x dx$

2. $\int_0^4 \dfrac{x}{\sqrt{1+2x}}dx$

3. $\int_0^2 x \lfloor x \rfloor dx$

4. $\int_0^2 x \left|1-x^2\right| dx$

5. $\int_0^1 x^2(1-x)^{10}dx$

6. $\int_1^e \dfrac{\sin(\ln x)}{x}dx$

Örnek 62 $\int_{-2}^{2}(x+3)\sqrt{4-x^2}dx$ *integralini iki integralin toplamı biçiminde yazarak ve integrallerden birini alan olarak yorumlayarak hesaplayınız.*

Örnek 63 $\int_0^1 x\sqrt{1-x^4}dx$ *integralini değişken değişikliği yaparak ve çıkan integrali alan olarak yorumlayarak hesaplayınız.*

Örnek 64 *f sürekli ve $\int_0^4 f(x)dx = 10$ ise $\int_0^2 f(2x)dx$ integralini hesaplayınız.*

Örnek 65 *f sürekli ve $\int_0^9 f(x)dx = 4$ ise $\int_0^3 xf(x^2)dx$ integralini hesaplayınız.*

Örnek 66 *f sürekli bir fonksiyon olmak üzere*

$$\int_0^a \frac{f(x)dx}{f(x)+f(a-x)}$$

integralini hesaplayınız. Bundan yararlanarak

$$\int_0^1 \frac{x^3}{3x^2-3x+1}dx$$

ve

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt[3]{\sin^2 x}}{\sqrt[3]{\sin^2 x}+\sqrt[3]{\cos^2 x}}dx$$

integrallerini hesaplaynız.

Örnek 67 *Aşağıdaki her iki durum için $f(4)$ ü hesaplayınız*

1. $\int_0^{x^2} f(t)dt = x\cos \pi x$
2. $\int_0^{f(x)} t^2 dt = x\cos \pi x$

2.2 Kısmi İntegrasyon

Kısmi integrasyon $\int f(x)g(x)dx$ formundaki integralleri basitleştiren bir tekniktir. f türevlenebilen ve g integre edilebilen fonksiyonlar olduğunda kullanışlıdır.

$$\int x\cos x dx \text{ ve } \int x^2 e^x dx$$

integralleri bu türdendir. Bilndiği gibi f ve g türevlenebilen fonksiyonlar ise türevin çarpım kuralı

$$\frac{d}{dx}\left[f(x)g(x)\right] = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

olduğunu söyler. Belirsiz integraller cinsinden bu eşitlik

$$\begin{aligned}\int \frac{d}{dx}\left[f(x)g(x)\right]dx &= \int \left[f'(x)g(x)+f(x)g'(x)\right]dx \\ &= \int f'(x)g(x)dx + \int f(x)g'(x)dx\end{aligned}$$

halini alır. Buradan terimleri yeniden düzenleyerek

$$\int f(x)g'(x)dx = \int \frac{d}{dx}\left[f(x)g(x)\right]dx - \int f'(x)g(x)dx$$

formülünü elde ederiz. Bu ise bizi kısmi integrasyon formülüne götürür:

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx.$$

Bu formül diferensiyel formda yazıldığında daha kolay hatırlanabilir. $u = f(x)$ ve $v = g(x)$ olsun. O zaman kısmi integrasyon formülü

$$\int udv = uv - \int vdu$$

şeklinde yazılabilir. Bu formül $\int vdu$ integrali $\int udv$ integralinden daha kolay olması durumunda kullanışlıdır.

Örnek 68 *$\int x\sin xdx$ integralini hesaplayınız. $u = x$ ve $dv = \sin xdx$ denirse $du = dx$ ve $v = -\cos x$ olacağından*

$$\begin{aligned}\int x\sin xdx &= -x\cos x - \int -\cos xdx \\ &= -x\cos x + \sin x + C\end{aligned}$$

olur. Aslında, burada $dv = \sin xdx$ eşitliğinden v yi bulmak için bir belirsiz integral hesaplanmaktadır. Dolayısıyla

$$\int dv = \int \sin xdx \Rightarrow v = -\cos x + C_1$$

olur. Bu durumda

$$\begin{aligned}\int x\sin xdx &= x(-\cos x + C_1) - \int (-\cos x + C_1)dx \\ &= -x\cos x + xC_1 + \sin x - xC_1 + C \\ &= -x\cos x + \sin x + C\end{aligned}$$

bulunur. Bu ise bize v yi bulmak için alınana belirsiz integralde C_1 sabitinin alınıp alınmamasının sonucu değiştirmeyeceğini göstermektedir.

Verilen bir integrale Kısmi integrasyon formülünü uygulamak için integrant u ve dv gibi (dv kısmı dx diferensiyelini içerecek şekilde) iki çarpana ayrılır. Bunun için kesin bir yöntem olmasa da genel strateji kolaylıkla integrallenebilen en karmaşık çarpanı dv olarak seçmektir. Aşağıda integrantın bazı özel durumları için bu ayrımın nasıl yapıması gerektiğine dair bir yol verilmektedir.

1. Eğer integrant bir polinom ile üstel fonksiyonun çarpımı ise polinoma u, geri kalan kısma dv,

2. Eğer integrant bir polinom ile trigonometrik fonksiyonun çarpımı ise polinoma u, geri kalan kısma dv,

3. Eğer integrant bir polinom ile logaritmik fonksiyonun çarpımı ise logaritmik fonksiyona u, geri kalan kısma dv,

4. Eğer integrant sadece bir fonksiyondan ibaretse fonksiyona u, $dx = dv$ demek yarar sağlar.

Bazı durumlarda integrali hesaplamak için kısmi integrasyon yöntemini birkaç kez uygulamak gerekir. Bazen ise hesabı istenen integral karşımıza çıkabilir. Bu durumda bu integrali eşitliğin soluna atıp işleme devam etmek gerekir.

Örnek 69 *Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.*

1. $\int xe^{3x}dx = \frac{1}{9}e^{3x}(3x-1)+C$

   $u = x$ ve $dv = e^{3x}dx$ denirse $du = dx$ ve $v = \frac{e^{3x}}{3}$ olur. O zaman

$$\begin{aligned}\int xe^{3x}dx &= \frac{x}{3}e^{3x} - \int \frac{e^{3x}}{3}dx \\ &= \frac{x}{3}e^{3x} - \frac{e^{3x}}{9} + C \\ &= \frac{1}{9}e^{3x}(3x-1)+C\end{aligned}$$

   bulunur.

2. $\int \frac{x}{\cos^2 x}dx = x\tan x + \ln\cos x + C$

$u = x$ ve $dv = \frac{dx}{\cos^2 x}$ denirse $du = dx$ ve $v = \tan x$ olur. O zaman

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{\cos^2 x}dx &= x\tan x - \int \tan x dx \\ &= x\tan x + \ln\cos x + C\end{aligned}$$

bulunur.

3. $\int x^5 \ln x dx = \frac{1}{6}x^6 \ln x - \frac{1}{36}x^6 + C$

$u = \ln x$ ve $dv = x^5 dx$ denirse $du = \frac{dx}{x}$ ve $v = \frac{x^6}{6}$ olur. O zaman

$$\begin{aligned}\int x^5 \ln x dx &= \frac{x^6}{6}\ln x - \int \frac{x^5}{6}dx \\ &= \frac{x^6}{6}\ln x - \frac{x^6}{36} + C\end{aligned}$$

bulunur.

4. $\int \sin(\ln x)dx = \frac{1}{2}x\sin(\ln x) - \frac{1}{2}x\cos(\ln x) + C$

$u = \sin(\ln x)$ ve $dv = dx$ denirse $du = \frac{\cos(\ln x)}{x}dx$ ve $v = x$ olur. O zaman

$$\int \sin(\ln x)dx = x\sin(\ln x) - \int \cos(\ln x)dx$$

bulunur. Şimdi de sağ taraftaki integrale kısmi integrasyon uygulayalım. Bunun için $u = \cos(\ln x)$ ve $dv = dx$ denirse $du = \frac{-\sin(\ln x)}{x}dx$ ve $v = x$ olur. Böylece

$$\begin{aligned}\int \sin(\ln x)dx &= x\sin(\ln x) - \int \cos(\ln x)dx \\ &= x\sin(\ln x) - \left[x\cos(\ln x) + \int \sin(\ln x)dx\right] \\ &= x\sin(\ln x) - x\cos(\ln x) - \int \sin(\ln x)dx\end{aligned}$$

olup son integral eşitliğin sol tarafına atılır ve katsayıya bölünürse

$$\int \sin(\ln x)dx = \frac{x}{2}\left[\sin(\ln x) - \cos(\ln x)\right] + C$$

bulunur.

5. $\int x^2 e^x dx = e^x\left(x^2-2x+2\right)+C$

6. $\int e^{ax}\cos bx dx = \frac{a(\cos bx)e^{ax}+be^{ax}\sin bx}{a^2+b^2}+C$

$u=e^{ax}$ *ve* $dv=\cos bx dx$ *denirse* $du=ae^{ax}dx$ *ve* $v=\frac{\sin bx}{b}$ *olur. O zaman*

$$\int e^{ax}\cos bx dx = \frac{e^{ax}\sin bx}{b}-\frac{a}{b}\int e^{ax}\sin bx dx$$

bulunur. Şimdi de sağ taraftaki integrale kısmi integrasyon uygulayalım. Bunun için $u=e^{ax}$ *ve* $dv=\sin bx dx$ *denirse* $du=ae^{ax}dx$ *ve* $v=-\frac{\cos bx}{b}$ *olur. Böylece*

$$\begin{aligned}\int e^{ax}\cos bx dx &= \frac{e^{ax}\sin bx}{b}-\frac{a}{b}\int e^{ax}\sin bx dx\\ &= \frac{e^{ax}\sin bx}{b}-\frac{a}{b}\left[-\frac{e^{ax}\cos bx}{b}+\frac{a}{b}\int e^{ax}\cos bx dx\right]\\ &= \frac{e^{ax}\sin bx}{b}+\frac{ae^{ax}\cos bx}{b^2}-\frac{a^2}{b^2}\int e^{ax}\cos bx dx\end{aligned}$$

olup son integral eşitliğin sol tarafına atılırsa

$$\left(1+\frac{a^2}{b^2}\right)\int e^{ax}\cos bx dx = \frac{e^{ax}\sin bx}{b}+\frac{ae^{ax}\cos bx}{b^2}$$

veya

$$\int e^{ax}\cos bx dx = \frac{be^{ax}\sin bx}{a^2+b^2}+\frac{ae^{ax}\cos bx}{a^2+b^2}+C$$

bulunur.

7. $\int \ln x dx = x\left(\ln x-1\right)+C$

8. $\int \arctan x dx = x\arctan x-\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)+C$

$u=\arctan x$ *ve* $dv=dx$ *denirse* $du=\frac{dx}{1+x^2}$ *ve* $v=x$ *olur. O zaman*

$$\begin{aligned}\int \arctan x dx &= x\arctan x-\int\frac{xdx}{1+x^2}\\ &= x\arctan x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C\end{aligned}$$

bulunur.

9. $\int x\arcsin x dx = \frac{1}{4}x\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{4}\arcsin x + \frac{1}{2}x^2\arcsin x + C$

$u = \arcsin x$ ve $dv = xdx$ denirse $du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ ve $v = \frac{x^2}{2}$ olur. O zaman

$$\begin{aligned}\int x\arcsin x dx &= \frac{x^2}{2}\arcsin x - \frac{1}{2}\int\frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= \frac{x^2}{2}\arcsin x - \frac{1}{2}\int\frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}}\end{aligned}$$

bulunur. Son integralde $x = \sin t$ dönüşümü uygulanırsa $dx = \cos t dt$ olur. Böylece

$$\begin{aligned}\int x\arcsin x dx &= \frac{x^2}{2}\arcsin x - \frac{1}{2}\int\frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= \frac{x^2}{2}\arcsin x - \frac{1}{2}\left[\int\frac{\sin^2 t\cos t dt}{\sqrt{1-\sin^2 t}}\right] \\ &= \frac{x^2}{2}\arcsin x - \frac{1}{2}\left[\int\sin^2 t dt\right] \\ &= \frac{x^2}{2}\arcsin x - \frac{1}{2}\left[\int\frac{1-\cos 2t}{2}dt\right] \\ &= \frac{x^2}{2}\arcsin x - \frac{1}{4}\left[t - \frac{\sin 2t}{2}\right] + C \\ &= \frac{x^2}{2}\arcsin x - \frac{1}{4}\left[\arcsin x - \frac{\sin 2\arcsin x}{2}\right] + C \\ &= \frac{2x^2-1}{4}\arcsin x + \frac{1}{4}x\sqrt{1-x^2} + C\end{aligned}$$

bulunur.

10. $\int x^2\cos x dx = x^2\sin x - 2\sin x + 2x\cos x + C$

Uyarı 70 *f' ve g' fonksiyonlarının her ikisininde $[a,b]$ aralığında sürekli olması halinde Kısmi integrasyon formülü belirli integraller içinde kullanılabilir. Bu durumda*

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

eşitliğini dikkate almak gerekir.

Örnek 71 *$\int_0^4 xe^{-x}dx$ integralini hesaplayınız. $u = x$, $dv = e^{-x}dx$ denirse $du = dx$ ve $v = -e^{-x}$ olur. O zaman*

$$\begin{aligned}\int_0^4 xe^{-x}dx &= -xe^{-x}\Big|_0^4 - \int_0^4 -e^{-x}dx \\ &= \left(-xe^{-x} - e^{-x}\right)\Big|_0^4 \\ &= -5e^{-4} + 1\end{aligned}$$

olur.

Örnek 72 *Aşağdaki integralleri hesaplayınız.*

1. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} x \tan^2 x dx$

2. $\int_0^1 (x^2 + x)e^x dx$

3. $\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x dx$

Kısmi integrasyon yöntemi ile yüksek dereceden bazı ifadelerin integrali daha düşük dereceden bir ifedenin integraline dönüştürülebilir. Bu yöntemle elde edilen bağıntılara indirgeme bağıntıları denir.

Örnek 73 *$\int \cos^n x dx$ integrali için bir indirgeme formülü bulunuz. $\cos^n x = \cos^{n-1} x \cos x$ olarak düşünüp*

$$u = \cos^{n-1} x \text{ ve } dv = \cos x dx$$

diyelim. O zaman

$$du = -(n-1)\cos^{n-2} x \sin x dx \text{ ve } v = \sin x$$

olur. Böylece

$$\begin{aligned}\int \cos^n x dx &= \cos^{n-1} x \sin x + (n-1)\int \cos^{n-2} x \sin^2 x dx \\ &= \cos^{n-1} x \sin x + (n-1)\int \cos^{n-2} x(1 - \cos^2 x)dx \\ &= \cos^{n-1} x \sin x + (n-1)\int \cos^{n-2} x dx - (n-1)\int \cos^n x dx\end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$\int \cos^n x dx = \frac{1}{n}\cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x dx$$

elde edilir.

Örnek 74 *$\int \cos^3 x dx$ integralini hesaplayınız.*

Örnek 75 *Aşağıdaki integraller için bir indirgeme formülü bulunuz.*

1. *$\int \frac{dx}{\sin^n x}$. $u = \frac{1}{\sin^{n-2} x}$ ve $dv = \frac{dx}{\sin^2 x}$ diyerek kısmi integrasyon uygulayalım. O zaman*

$$du = -\frac{(n-2)\cos x}{\sin^{n-1} x}dx \text{ ve } v = -\frac{\cos x}{\sin x}$$

olur. Böylece

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sin^n x} &= -\frac{\cos x}{\sin^{n-1} x} - (n-2)\int \frac{\cos^2 x}{\sin^n x}dx \\
&= -\frac{\cos x}{\sin^{n-1} x} - (n-2)\int \frac{1-\sin^2 x}{\sin^n x}dx \\
&= -\frac{\cos x}{\sin^{n-1} x} - (n-2)\int \frac{dx}{\sin^n x} + (n-2)\int \frac{dx}{\sin^{n-2} x}
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$(n-1)\int \frac{dx}{\sin^n x} = -\frac{\cos x}{\sin^{n-1} x} + (n-2)\int \frac{dx}{\sin^{n-2} x}$$

veya

$$\int \frac{dx}{\sin^n x} = -\frac{\cos x}{(n-1)\sin^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{dx}{\sin^{n-2} x}$$

indirgeme bağıntısı elde edilir.

2. *$\int \tan^n x dx$*

$$\begin{aligned}
\int \tan^n x dx &= \int \tan^{n-2} x \tan^2 x dx \\
&= \int \tan^{n-2} x(\tan^2 x + 1 - 1)dx \\
&= \int \tan^{n-2} x(\tan^2 x + 1)dx - \int \tan^{n-2} x dx \\
&= \frac{\tan^{n-1} x}{n-1} - \int \tan^{n-2} x dx
\end{aligned}$$

indirgeme bağıntısı elde edilir.

3. $\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^n}$. *Burada öncelikle* $\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{n-1}}$ *integraline* $u = \frac{1}{(a^2+x^2)^{n-1}}$ *ve* $dv = dx$ *diyerek kısmi integrasyon uygulayalım. O zaman*

$$du = -\frac{2(n-1)x}{(a^2+x^2)^n}dx \text{ ve } v = x$$

olur. Böylece

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{n-1}} &= \frac{x}{(a^2+x^2)^{n-1}} + \int \frac{2(n-1)x^2}{(a^2+x^2)^n}dx \\
&= \frac{x}{(a^2+x^2)^{n-1}} + \int \frac{2(n-1)(x^2+a^2-a^2)}{(a^2+x^2)^n}dx \\
&= \frac{x}{(a^2+x^2)^{n-1}} + \int \frac{2(n-1)\,dx}{(a^2+x^2)^{n-1}} - \int \frac{2a^2(n-1)\,dx}{(a^2+x^2)^n}
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan hesaplamak istediğimiz integral yanlız bırakılırsa

$$\int \frac{2a^2(n-1)\,dx}{(a^2+x^2)^n} = \frac{x}{(a^2+x^2)^{n-1}} + (2n-3)\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{n-1}}$$

veya

$$\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^n} = \frac{x}{2a^2(n-1)(a^2+x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2a^2(n-1)}\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{n-1}}$$

indirgeme bağıntısı elde edilir.

2.2.1 Ek Sorular

Örnek 76 *Aşağıdaki integralleri hesaplayınız*

1. $\int \frac{xe^x}{(x+1)^2}dx$ ($u = xe^x$ *ve* $dv = \frac{dx}{(x+1)^2}$)
2. $\int \sqrt{x^2+a^2}dx$
3. $\int x\ln(x^2+1)dx$
4. $\int \arctan\sqrt{x}dx$
5. $\int \frac{dx}{(1+x^2)^2}$
6. $\int \frac{dx}{(4x^2+4x+2)^2}$

7. $\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})dx$

8. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} x\csc^2 x dx$

9. $\int_1^4 e^{\sqrt{x}}dx$

10. $\int \sin^2 x dx$

Örnek 77 *Aşağıdaki integraller için bir indirgeme formülü bulunuz.*

1. $\int \sin^n x dx$

2. $\int \frac{dx}{\cos^n x}$

3. $\int (\ln x)^n dx$

Örnek 78 *Aşağıdaki eşitliği doğrulayınız.*

$$\int_a^b \left(\int_x^b f(t)dt\right) dx = \int_a^b (x-a)f(x)dx.$$

Bundan yararlanarak aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

1. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x dx$

2. $\int_0^1 xe^x dx$

3. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (2x-\pi)\cos x dx$

2.3 Trigonometrik İntegraller

Bu integraller altı temel trigonometrik fonksiyonun cebirsel birleşimlerini içerem integrallerdir. Bunları ilke olarak her zaman sinüs ve kosinüs cinsinden ifade edebiliriz, ancak

$$\int \sec^2 x dx = \tan x + C$$

integralinde olduğu gibi başka fonksiyonlarla çalışmak daha basit olabilir.

2.3.1 Sünüs ve Kosinüsün Kuvvetlerinin Çarpımı

m ve n negatif olmayan tam sayılar olmak üzere

$$\int \sin^m x \cos^n x dx$$

şeklindeki integrali göz önüne alalım. m ve n nin durumlarına göre uygun değişken değişikliğini iki duruma ayırabiliriz.

- m tek ise $\cos x = t$, n tek ise $\sin x = t$ dönüşümü uygulanır. (Her ikisininde tek olması durumunda yüksek dereceli olana dönüşüm uygulamak integralin hesaplanmasını kolaylaştırır)

- m ve n nin her ikiside çift ise integral

  $$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

  ve

  $$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

  eşitlikleri yardımıyla $\cos 2x$ in kuvvetleri cinsinden yazılabilir.

Örnek 79 *$\int \sin^3 x \cos^2 x dx$ integralini hesaplayınız.* $\cos x = t$ *dönüşümü ile*

$$\begin{aligned}
\int \sin^3 x \cos^2 x dx &= \int \sin^2 x \cos^2 x \sin x dx \\
&= \int (1-\cos^2 x)\cos^2 x \sin x dx \\
&= \int (1-\cos^2 x)\cos^2 x \sin x dx \\
&= \int (t^2-1)t^2 dt \\
&= \frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3} + C \\
&= \frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^3 x}{3} + C
\end{aligned}$$

bulunur.

Örnek 80 $\int \cos^5 x dx$ *integralini hesaplayınız.*

$$\begin{aligned}
\int \cos^5 x dx &= \int \cos^4 x \cos x dx \\
&= \int \left(1-\sin^2 x\right)^2 \cos x dx \\
&= \int \left(1-t^2\right)^2 dt \\
&= \int \left(1-2t^2+t^4\right) dt \\
&= t-\frac{2}{3}t^3+\frac{1}{5}t^5+C \\
&= \sin x-\frac{2}{3}\sin^3 x+\frac{1}{5}\sin^5 x+C
\end{aligned}$$

bulunur.

Örnek 81 $\int \sin^2 x \cos^4 x dx$ *integralini hesaplayınız.*

$$\begin{aligned}
\int \sin^2 x \cos^4 x dx &= \int \frac{1-\cos 2x}{2}\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 dx \\
&= \frac{1}{8}\int (1-\cos^2 2x)(1+\cos 2x) dx \\
&= \frac{1}{8}\int (1+\cos 2x-\cos^2 2x-\cos^3 2x) dx \\
&= \frac{1}{8}\left(x+\frac{\sin 2x}{2}-\int \cos^2 2x dx-\int \cos^3 2x dx\right) \\
&= \frac{1}{8}\left(x+\frac{\sin 2x}{2}-\int \frac{1+\cos 4x}{2} dx-\int (1-\sin^2 2x)\cos 2x dx\right) \\
&= \frac{1}{8}\left(x+\frac{\sin 2x}{2}-\frac{x}{2}+-\frac{\sin 4x}{8}-\frac{1}{2}\int (1-t^2) dt\right) \\
&= \frac{1}{8}\left(x+\frac{\sin 2x}{2}-\frac{x}{2}+-\frac{\sin 4x}{8}-\frac{1}{2}(\sin 2x-\frac{\sin^3 2x}{3}\right)+C \\
&= \frac{1}{16}\left(x-\frac{\sin 4x}{4}+\frac{\sin^3 2x}{3}\right)+C
\end{aligned}$$

2.3.2 Kareköklerden Kurtulmak

Bazı trigonometrik özdeşliklerden yararlanarak kareköklü trigonometrik integralleri basitçe hesaplayabiliriz.

Örnek 82 *$\int \sqrt{1+\cos 4x}dx$ integralini hesaplamak için $1+\cos 4x = 2\cos^2 2x$ eşitliğinden yaralanabiliriz. O zaman*

$$\begin{aligned}\int \sqrt{1+\cos 4x}dx &= \int \sqrt{2}\cos 2x dx \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x + C\end{aligned}$$

olur.

Burada eğer belirli integral hesaplanacaksa $\sqrt{1+\cos 4x} = \sqrt{2}\left|\cos 2x\right|$ yazılmalıdır.

Örnek 83 *$\int_0^\pi \sqrt{1+\cos 2x}dx$ integralini hesaplayınız.*

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \sqrt{1+\cos 2x}dx &= \int_0^\pi \sqrt{2\cos^2 x}dx \\ &= \sqrt{2}\int_0^\pi \left|\cos x\right| dx \\ &= \sqrt{2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi -\cos x dx\right) \\ &= 2\sqrt{2}\end{aligned}$$

Örnek 84 *$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\sin 2x}dx$ integralini hesaplayınız. $1+\sin 2x = (\sin x + \cos x)^2$ olduğu dikkate alınırsa*

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\sin 2x}dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(\sin x+\cos x)^2}dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left|\sin x+\cos x\right| dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x+\cos x)dx \\ &= 2\end{aligned}$$

bulunur.

Örnek 85 *$\int \sqrt{1-\sin 4x}dx$ integralini hesaplayınız.*

2.3.3 Tanjant ve Sekantın Kuvvetlerinin Çarpımı

m ve n negatif olmayan tam sayılar olmak üzere

$$\int \tan^m x \sec^n x dx$$

şeklindeki integrali göz önüne alalım. Bu tip integraller m ve n nin durumlarına farklı yollardan hesaplanır.

- n çift ise $\tan x = t$ dönüşümü yapılır ve

  $$\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$$

  özdeşliğinden yararlanılır.

- m tek ise $\sec x = t$ dönüşümü yapılır ve

  $$\tan^2 x = \sec^2 x - 1$$

  özdeşliğinden yararlanılır.

- m çift n tek ise

  $$\tan^2 x = \sec^2 x - 1$$

  özdeşliği ile integral sekantın tek kuvvetleri cinsinsinden yazılabilr.

Örnek 86 $\int \tan^3 x \sec^4 x dx$ *integralini hesaplayınız.* $\tan x = t$ *dönüşümü ile*

$$\begin{aligned}
\int \tan^3 x \sec^4 x dx &= \int \tan^3 x \sec^2 x \sec^2 x dx \\
&= \int \tan^3 x (1 + \tan^2 x) \sec^2 x dx \\
&= \int t^3 (1 + t^2) dt \\
&= \frac{t^4}{4} + \frac{t^6}{6} + C \\
&= \frac{\tan^4 x}{4} + \frac{\tan^6 x}{6} + C
\end{aligned}$$

bulunur.

Örnek 87 *Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.*

1. $\int \tan^4 x dx$

2. $\int \tan^5 x \sec^3 x dx$. *Bu integralde* $\sec x = t$ *dönüşümü uygularsak* $\sec x \tan x dx = dt$ *olacağından*

$$\begin{aligned}
\int \tan^5 x \sec^3 x dx &= \int \tan^4 x \sec^2 x \sec x \tan x dx \\
&= \int (\sec^2 x - 1)^2 \sec^2 x \sec x \tan x dx \\
&= \int (t^2 - 1)^2 t^2 dt \\
&= \frac{1}{7}t^7 - \frac{2}{5}t^5 + \frac{1}{3}t^3 + C \\
&= \frac{1}{7}\sec^7 x - \frac{2}{5}\sec^5 x + \frac{1}{3}\sec^3 x + C
\end{aligned}$$

bulunur.

3. $\int \sec x dx$. *İntegrant* $\sec x + \tan x$ *ile çarpılır-bölünür ve* $\sec x + \tan x = t$ *denirse* $\sec x(\sec x + \tan x)dx = dt$ *olacağından*

$$\begin{aligned}
\int \sec x dx &= \int \frac{\sec x(\sec x + \tan x)}{\sec x + \tan x} dx \\
&= \int \frac{dt}{t} \\
&= \ln t + C \\
&= \ln(\sec x + \tan x) + C
\end{aligned}$$

bulunur.

4. $\int \tan^2 x \sec x dx$

$$\begin{aligned}
\int \tan^2 x \sec x dx &= \int (\sec^2 x - 1) \sec x dx \\
&= \int \sec^3 x dx - \int \sec x dx
\end{aligned}$$

olur. Burada önce

$$\int \sec^3 x dx$$

integraline kısmi integrasyon uygulayalım. $\sec x = u$ *ve* $\sec^2 x dx = dv$ *dersek* $du = \sec x \tan x dx$ *ve* $v = \tan x$ *olur. O zaman*

$$\int \sec^3 x dx = \sec x \tan x - \int \sec x \tan^2 x dx$$

olur. Bu eşitlik yukarıda yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
\int \tan^2 x \sec x dx &= \int \sec^3 x dx - \int \sec x dx \\
&= \sec x \tan x - \int \sec x \tan^2 x dx - \int \sec x dx
\end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned}
2 \int \tan^2 x \sec x dx &= \sec x \tan x - \int \sec x dx \\
&= \sec x \tan x - \ln(\sec x + \tan x)
\end{aligned}$$

den

$$\int \tan^2 x \sec x dx = \frac{1}{2} \sec x \tan x - \frac{1}{2} \ln(\sec x + \tan x) + C$$

elde edilir.

5. $\int \tan^3 x dx$

2.3.4 Sinüs ve Kosinüsün Çarpımları

$$\int \sin ax \sin bx dx, \int \sin ax \cos bx dx \text{ ve } \int \cos ax \cos bx dx$$

tipindeki integraller aşağıdaki bağıntılar yardımıyla hesaplanır.

$$\begin{aligned}
\sin ax \sin bx &= \frac{1}{2}[\cos(a-b)x - \cos(a+b)x] \\
\sin ax \cos bx &= \frac{1}{2}[\sin(a+b)x + \sin(a-b)x] \\
\cos ax \cos bx &= \frac{1}{2}[\cos(a+b)x + \cos(a-b)x]
\end{aligned}$$

Örnek 88 *Aşağıdaji integralleri hesaplayınız.*

1. $\int \sin 3x \sin 5x dx$
2. $\int \sin 4x \cos 3x dx$

$$\begin{aligned}\int \sin 4x \cos 3x dx &= \int \frac{1}{2}[\sin 7x + \sin x]dx \\ &= -\frac{\cos 7x}{14} - \frac{\cos x}{2} + C\end{aligned}$$

3. $\int \cos 5x \cos 4x dx$

2.3.5 Ek Sorular

Örnek 89 *Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.*

1. $\int \sin^4 x \cos^3 x dx$
2. $\int \cot^5 x \csc^4 x dx$
3. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x} dx$
4. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^4 x}$
5. $\int \frac{dx}{(\sin x + \cos x)^2}$
6. $\int \sqrt{\frac{\sin x}{\cos^5 x}} dx$
7. $\int \sqrt{1 - \cos 4x} dx$
8. $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{1 + \sin x} dx$
9. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sqrt{1 - \cos 2x} dx$
10. $\int \sin^2 x \cos 3x dx$
11. $\int \cos^3 x \sin 2x dx$

Örnek 90 $\int x^3\sqrt{1 - x^2}dx$ *integralini (a) kısmi integrasyonla, (b) bir trigonometrik değişken değiştirmesi ile, (c) bir başka değişken değiştirmesi ile hesaplayınız.*

2.4 Rasyonel Fonksiyonların Basit Kesirlere Ayırma İle İntegrasyonu

Hatırlanacağı gibi bir rasyonel fonksiyon, iki polinomun oranı şeklinde yazılan fonksiyonlardır. Bu kesimde bir rasyonel fonksiyonun integralinin nasıl hesaplanacağını göreceğiz. Bunun için rasyonel fonksiyonları daha basit kesirlerin toplamı olarak yazacağız.

Öncelikle $g(x) = \frac{2}{x+5}$ ve $h(x) = \frac{3}{x+1}$ rasyonel fonksiyonlarını göz önüne alalım. Bu iki fonksiyonun toplamı

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) + h(x) \\ &= \frac{2}{x+5} + \frac{3}{x+1} \\ &= \frac{5x+17}{(x+5)(x+1)} \\ &= \frac{5x+17}{x^2+6x+5} \end{aligned} \tag{3}$$

şeklinde bir rasyonel fonksiyonu verir. Şimdi f fonksiyonunun integralini hesaplama problemi ile karşılaştığımızı düşünelim. Buradan da görüleceği üzere

$$\begin{aligned} \int \frac{5x+17}{x^2+6x+5} dx &= \int \left(\frac{2}{x+5} + \frac{3}{x+1} \right) dx \\ &= \int \frac{2}{x+5} dx + \int \frac{3}{x+1} dx \\ &= 2 \ln |x+5| + 3 \ln |x+1| + C \end{aligned}$$

olur. Bu örnek bazı $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ rasyonel fonksiyonlarının integrali için bir yol göstermektedir. Bu yöntem (3) de gösterilen işlemi tersine çevirmekten oluşur.

$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ biçiminde bir rasyonel fonksiyonu göz önüne alalım. $P(x)$ ve $Q(x)$ polinomlarının dereceleri sırası ile m ve n olsun ve bunların ortak çarpanı olmasın. Eğer $m < n$ ise $f(x)$ rasyonel fonksiyonuna bir Has rasyonel fonksiyon (**Has kesir**) denir. Eğer $m \geq n$ ise $f(x)$ rasyonel fonksiyonu (polinom bölmesi yapılarak) bir has kesir ile bir polinomun toplamı olarak yazılabilir. Yani $K(x)$ bir polinom ve $\frac{R(x)}{Q(x)}$ de has kesir olmak üzere

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = K(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

olur. O zaman $f(x)$ in integralinin hesaplanması için $\frac{R(x)}{Q(x)}$ has kesirinin integralinin hesaplanması yeterlidir.

Bilindiği gibi katsayıları reel olan bir polinom, **lineer çarpanlar** $(ax+b)$ ile **kuadratik çarpanların** ($b^2-4ac<0$ olmak üzere ax^2+bx+c) çarpımı olarak yazılabilmektedir. Dolayısıyla $\frac{R(x)}{Q(x)}$ has kesirinde $Q(x)$ polinomu bu şekilde çarpanlara ayrıldığında bu has kesirin integrallenmesi $k \geq 1$ olmak üzere

$$\frac{A}{(ax+b)^k} \text{ ve } \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^k} \tag{4}$$

tipinde **Basit kesir** adı verilen kesirlerin integrallenmesine indirgenir. Şimdi (4) tipindeki fonksiyonların integrali ile ilgili bir kaç örnek verelim.

Örnek 91 *Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.*

1. $\int \frac{3}{x+2}dx$

$$\int \frac{3}{x+2}dx = 3\ln(x+2) + C$$

2. $\int \frac{5}{(x+3)^4}dx$

$$\int \frac{5}{(x+3)^4}dx = -\frac{5}{3(x+3)^3} + C$$

3. $\int \frac{dx}{x^2+4x+8}$

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x^2+4x+8} &= \int \frac{dx}{(x+2)^2+4} \\ &= \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x+2}{2}\right) + C\end{aligned}$$

4. $\int \frac{2x+5}{x^2+4x+13}dx$. *İlk olarak, paydadaki kuadratiğin türevini pay kısmında oluşturalım.*

$$\begin{aligned}\int \frac{2x+5}{x^2+4x+13}dx &= \int \frac{2x+4+1}{x^2+4x+13}dx \\ &= \int \frac{2x+4}{x^2+4x+13}dx + \int \frac{dx}{x^2+4x+13} \\ &= \ln(x^2+4x+13) + \int \frac{dx}{(x+2)^2+9} \\ &= \ln(x^2+4x+13) + \frac{1}{3}\arctan\left(\frac{x+2}{3}\right) + C\end{aligned}$$

5. $\int \frac{2x+5}{(x^2+6x+10)^2}dx$. *İlk olarak, paydadaki kuadratiğin türevini pay kısmında oluşturalım.*

$$\begin{aligned} \int \frac{2x+5}{(x^2+6x+10)^2}dx &= \int \frac{2x+6-1}{(x^2+6x+10)^2}dx \\ &= \int \frac{2x+6}{(x^2+6x+10)^2}dx - \int \frac{dx}{(x^2+6x+10)^2} \\ &= I_1 - I_2. \end{aligned}$$

Burada ilk integralde $x^2+6x+10=t$ *dönüşümü yapılırsa*

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \frac{2x+6}{(x^2+6x+10)^2}dx = \int \frac{dt}{t^2} \\ &= -\frac{1}{t} + C_1 = -\frac{1}{x^2+6x+10} + C_1 \end{aligned}$$

olur. İkinci integral ise $x+3=t$ *dönüşümü ile*

$$\begin{aligned} I_2 &= \int \frac{dx}{(x^2+6x+10)^2} = \int \frac{dx}{((x+3)^2+1)^2} \\ &= \int \frac{dt}{(t^2+1)^2} \end{aligned}$$

halini alır. Bu son integral ise daha önce aşağıdaki şekilde hesaplanmıştı. $\int \frac{dt}{t^2+1}$ *integraline kısmi integrasyon uygulanırsa* ($u = \frac{1}{t^2+1}$, $dv = dt$)

$$\begin{aligned} \int \frac{dt}{t^2+1} &= \frac{t}{t^2+1} + 2\int \frac{t^2}{(t^2+1)^2}dt \\ &= \frac{t}{t^2+1} + 2\int \frac{dt}{t^2+1} - 2\int \frac{dt}{(t^2+1)^2} \end{aligned}$$

ve buradan

$$\begin{aligned} \int \frac{dt}{(t^2+1)^2} &= \frac{t}{2(t^2+1)} + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+1} \\ &= \frac{t}{2(t^2+1)} + \frac{1}{2}\arctan t + C_2 \end{aligned}$$

bulunur. Sonuç olarak

$$\begin{aligned} I_1 - I_2 &= -\frac{1}{x^2+6x+10} - \frac{x+3}{2(x^2+6x+10)} - \frac{1}{2}\arctan(x+3) + C \\ &= \frac{-x-5}{2(x^2+6x+10)} - \frac{1}{2}\arctan(x+3) + C \end{aligned}$$

bulunur.

Şimdi $\frac{R(x)}{Q(x)}$ has kesirinin basit kesirlere ayrılması ile ilgili dikkat edilmesi gereken durumları inceleyelim.

2.4.1 Farklı Lineer Çarpanlar

Eğer $Q(x)$ paydası

$$(a_1x+b_1)(a_2x+b_2)\cdots(a_nx+b_n)$$

şeklinde n tane farklı lineer çarpandan oluşuyorsa has kesirin basit kesirlere ayrımı, $A_1, A_2, \cdots A_n$ reel sabitler olmak üzere

$$\frac{R(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{a_1x+b_1} + \frac{A_2}{a_2x+b_2} + \cdots + \frac{A_n}{a_nx+b_n}$$

şeklindedir. Yani herbir lineer çarpan için bir basit kesir yazılır.

Örnek 92 $\int \frac{2x+1}{(x-1)(x+3)}dx$ *integralini hesaplayalım.*

$$\frac{2x+1}{(x-1)(x+3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+3}$$

yazımından

$$\frac{2x+1}{(x-1)(x+3)} = \frac{A(x+3)+B(x-1)}{(x-1)(x+3)}$$

olur. O zaman $(A+B)x+3A-B = 2x+1$ *eşitliğinden*

$$\begin{aligned} A+B &= 2 \\ 3A-B &= 1 \end{aligned}$$

olup $A = \frac{3}{4}$ *ve* $B = \frac{5}{4}$ *bulunur. O zaman*

$$\begin{aligned}\int \frac{2x+1}{(x-1)(x+3)}dx &= \int \left(\frac{3/4}{x-1} + \frac{5/4}{x+3}\right) dx \\ &= \frac{3}{4}\ln|x-1| + \frac{5}{4}\ln|x+3| + C\end{aligned}$$

bulunur.

Uyarı 93 *$Q(x)$ polinomu n tane farklı lineer çarpandan oluşması halinde has kesiri basit kesirlere ayırmanın kolay bir yolu vardır. Örneğin,*

$$\frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}$$

özdeşliğinde her iki yan $(x-1)$ ile çarpıldığında

$$\frac{x^2+1}{(x-2)(x-3)} = A + \frac{B(x-1)}{x-2} + \frac{C(x-1)}{x-3}$$

olur. Bu son ifadede $x = 1$ koyarsak $A = \frac{1^2+1}{(1-2)(1-3)} = 1$ olur. Benzer şekilde

$$\frac{x^2+1}{(x-1)(x-3)} = \frac{A(x-2)}{x-1} + B + \frac{C(x-2)}{x-3}$$

de $x = 2$ yazılırsa $B = -5$ bulunur. Yine $C = 5$ olur. Aslında A sayısı $\frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)}$ has kesirinin paydasındaki $(x-1)$ çarpanını kapatıp $x = 1$ yazmakla bulunabilir. Yani

$$\begin{aligned}A &= \frac{1^2+1}{\underbrace{[(x-1)]}_{Kapat}(1-2)(1-3)} = 1, \\ B &= \frac{2^2+1}{(2-1)\underbrace{[(x-2)]}_{Kapat}(2-3)} = -5, \\ C &= \frac{3^2+1}{(3-1)(3-2)\underbrace{[(x-3)]}_{Kapat}} = 5\end{aligned}$$

olur. O zaman

$$\frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{1}{x-1} - \frac{5}{x-2} + \frac{5}{x-3}$$

bulunur. Bu yöntem ile basit kesirlerin sabitlerini bulma işlemine Kapatma yöntemi vaya Heaviside yöntemi denir.

Örnek 94 *Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.*

1. $\int \frac{x-4}{x^3+3x^2-10x}dx$

$$\begin{aligned}\frac{x-4}{x^3+3x^2-10x} &= \frac{x-4}{x(x+5)(x-2)} \\ &= \frac{A}{x}+\frac{B}{x+5}+\frac{C}{x-2}\end{aligned}$$

de Kapatma yöntemiyle $A=\frac{2}{5}$, $B=-\frac{9}{35}$ *ve* $C=-\frac{1}{7}$ *olur. O zaman*

$$\begin{aligned}\int \frac{x-4}{x^3+3x^2-10x}dx &= \int \left(\frac{2}{5x}-\frac{9}{35(x+5)}-\frac{1}{7(x-2)}\right)dx \\ &= \frac{2}{5}\ln|x|-\frac{9}{35}\ln|x+5|-\frac{1}{7}\ln|x-2|+C_1\end{aligned}$$

bulunur.

2. $\int \frac{x^2+4x+1}{(x^2-1)(x+3)}dx$

$$\begin{aligned}\frac{x^2+4x+1}{(x^2-1)(x+3)} &= \frac{x^2+4x+1}{(x-1)(x+1)(x+3)} \\ &= \frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x+3}\end{aligned}$$

de Kapatma yöntemiyle $A=\frac{3}{4}$, $B=\frac{1}{2}$ *ve* $C=-\frac{1}{4}$ *olur. O zaman*

$$\int \frac{x^2+4x+1}{(x^2-1)(x+3)}dx = \frac{3}{4}\ln|x-1|+\frac{1}{2}\ln|x+1|-\frac{1}{4}\ln|x+3|+C_1$$

bulunur.

3. $\int \frac{xdx}{(x+1)(x+2)(x+3)}$

2.4.2 Tekrarlı Lineer Çarpanlar

Eğer $Q(x)$ paydası a ve b reel sayılar olmak üzere tekrarlı $(ax+b)^n$ lineer çarpanını içeriyorsa has kesirin basit kesirlere ayrımı, $A_1, A_2, \cdots A_n$ reel sabitler olmak üzere

$$\frac{R(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{ax+b}+\frac{A_2}{(ax+b)^2}+\cdots+\frac{A_n}{(ax+b)^n}$$

şeklindedir. Yani $ax+b$ lineer çarpanının herbir kuvveti için bir basit kesir yazılır.

Örnek 95 $\int \frac{x^2+2x+4}{(x+1)^3}dx$ *integralini hesaplayalım.*

$$\frac{x^2+2x+4}{(x+1)^3} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{(x+1)^3}$$

yazımından payda eşitleme ile

$$\begin{aligned} x^2+2x+4 &= A(x+1)^2 + B(x+1) + C \\ &= Ax^2 + (2A+B)x + A + B + C \end{aligned}$$

olur. O zaman

$$\begin{aligned} A &= 1 \\ 2A+B &= 2 \\ A+B+C &= 4 \end{aligned}$$

eşitliklerinden $A=1$*,* $B=0$ *ve* $C=3$ *olarak bulunur. Böylece*

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2+2x+4}{(x+1)^3}dx &= \int \left(\frac{1}{x+1} + \frac{3}{(x+1)^3} \right) dx \\ &= \ln|x+1| - \frac{3}{2(x+1)^2} + C_1 \end{aligned}$$

olur.

Uyarı 96 $Q(x)$ *polinomu tekrarlı lineer çarpandan oluşması halinde has kesiri basit kesirlere ayırmanın kolay bir yolu vardır. Örneğin*

$$\frac{x^2+2x+4}{(x+1)^3} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{(x+1)^3}$$

ifadesinden payda eşitleme ile

$$x^2+2x+4 = A(x+1)^2 + B(x+1) + C \tag{5}$$

yazılır. Burada $x=-1$ *yazıldığında* $C=3$ *bulunur. (5) eşitliğinden türev alırsak*

$$2x+2 = 2A(x+1) + B$$

olup $x=-1$ *yazılırsa* $B=0$ *ve yine türev alarak*

$$2 = 2A$$

dan $A=1$ *bulunur.*

Örnek 97 *Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.*

1. $\int \frac{x-1}{(x+1)^3}dx$

$$\frac{x-1}{(x+1)^3} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{(x+1)^3}$$

ifadesinden payda eşitleme ile

$$x-1 = A(x+1)^2 + B(x+1) + C$$

yazılır. Burada $x=-1$ yazıldığında $C=-2$ bulunur. Türev alırsak

$$1 = 2A(x+1) + B$$

olup $x=-1$ yazılırsa $B=1$ ve yine türev alarak

$$0 = 2A$$

dan $A=0$ bulunur. O zaman

$$\begin{aligned}\int \frac{x-1}{(x+1)^3}dx &= \int \left(\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{2}{(x+1)^3}\right)dx \\ &= -\frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} + C_1 = -\frac{x}{(x+1)^2} + C_1\end{aligned}$$

olur.

2. $\int \frac{x^2}{(x+2)^3}dx$

$$\frac{x^2}{(x+2)^3} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x+2)^2} + \frac{C}{(x+2)^3}$$

ifadesinden payda eşitleme ile

$$x^2 = A(x+2)^2 + B(x+2) + C$$

yazılır. Burada $x=-2$ yazıldığında $C=4$ bulunur. Türev alırsak

$$2x = 2A(x+2) + B$$

olup $x=-2$ yazılırsa $B=-4$ ve yine türev alarak

$$2 = 2A$$

dan $A=1$ bulunur. O zaman

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{(x+2)^3}dx &= \int \left(\frac{1}{x+2} - \frac{4}{(x+2)^2} + \frac{4}{(x+2)^3}\right)dx \\ &= \ln|x+2| + \frac{4}{x+2} - \frac{2}{(x+2)^2} + C_1\end{aligned}$$

bulunur.

2.4.3 Lineer Çarpan ile Tekrarlı Lineer Çarpan

Örnek 98 $\int \frac{6x-1}{x^3(2x-1)}dx$ *integralini hesaplayalım. Yukarıdaki açıklamalar dikkate alındığında intagrant*

$$\frac{6x-1}{x^3(2x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{2x-1}$$

şeklinde basit kesirlere ayrılabilir. Buradan

$$\begin{aligned} 6x-1 &= Ax^2(2x-1) + Bx(2x-1) + C(2x-1) + Dx^3 \\ &= (2A+D)x^3 + (-A+2B)x^2 + (-B+2C)x - C \end{aligned}$$

olur. Bu eşitlikte $x=0$ alınırsa $C=1$ ve $x=\frac{1}{2}$ alındığında $D=16$ bulunur. Yine x^3 ve x^2 nin katsayıları dikkate alınırsa $A=-8$ ve $B=-4$ olur. O zaman

$$\begin{aligned} \int \frac{6x-1}{x^3(2x+1)}dx &= \int \left(-\frac{8}{x} - \frac{4}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{16}{2x-1}\right)dx \\ &= -8\ln|x| + \frac{4}{x} - \frac{1}{2x^2} + 8\ln|2x-1| + C_1 \end{aligned}$$

elde edilir.

Örnek 99 *Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.*

1. $\int \frac{3x+5}{x^3-x^2-x+1}dx$

$$\frac{3x+5}{x^3-x^2-x+1} = \frac{3x+5}{(x+1)(x-1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}$$

ifadesinde payda eşitlemeyle

$$3x+5 = A(x-1)^2 + B(x^2-1) + C(x+1)$$

özdeşliği elde edilir. Burada $x=-1$ yazılırsa $A=\frac{1}{2}$ ve $x=1$ yazılırsa $C=4$ bulunur. Yine x^2 nin katsayısı dikkate alındığında $A+B=0$ dan $B=-\frac{1}{2}$ bulunur. O zaman

$$\begin{aligned} \int \frac{3x+5}{x^3-x^2-x+1}dx &= \int \left(\frac{1}{2(x+1)} - \frac{1}{2(x-1)} + \frac{4}{(x-1)^2}\right)dx \\ &= \frac{1}{2}\ln|x+1| - \frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{4}{x-1} + C_1 \end{aligned}$$

bulunur.

2. $\int \frac{xdx}{(x+1)^2(x+2)^2}$

3. $\int \frac{dx}{x(x+1)^2}$

$$\frac{1}{x(x+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}$$

ifadesinde payda eşitlemeyle

$$1 = A(x+1)^2 + Bx(x+1) + Cx$$

özdeşliği elde edilir. Burada $x = 0$ *yazılırsa* $A = 1$ *ve* $x = -1$ *yazılırsa* $C = -1$ *bulunur. Yine* x^2 *nin katsayısı dikkate alındığında* $A + B = 0$ *dan* $B = -1$ *bulunur. O zaman*

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x(x+1)^2} &= \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} \right) dx \\ &= \ln|x| - \ln|x+1| + \frac{1}{x+1} + C_1 \end{aligned}$$

bulunur.

4. $\int \frac{dx}{(x^2-1)^2}$

2.4.4 Kuadratik Çarpan

Eğer has kesirin $Q(x)$ paydasında ($b^2 - 4ac < 0$ olmak üzere)

$$ax^2 + bx + c$$

şeklinde kuardaratik çarpan varsa bu çarpan için basit kesir, A, B reel sabitler olmak üzere

$$\frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c}$$

şeklindedir. Her farklı kuadratik çarpan için A ve B farklı alınarak bir basit kesir yazılır. Tekrarlı kuadratik çarpan için ise tekrarlı lineer çarpanda olduğu gibi işlem yapılır.

Örnek 100 $\int \frac{x+3}{x^4+9x^2} dx$ *integralini hesaplayalım. Payda* $x^4+9x^2 = x^2(x^2+9)$ *şeklinde bir tekrarlı lineer çarpan ile bir kuadratik çarpanın çarpımıdır. O zaman integrant*

$$\frac{x+3}{x^4+9x^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{x^2+9}$$

biçiminde basit kesirlere ayrılır. Buradan

$$\begin{aligned} x+3 &= A(x^3+9x)+B(x^2+9)+(Cx+D)x^2 \\ &= (A+C)x^3+(B+D)x^2+9Ax+9B \end{aligned}$$

olup $x=0$ *yazılırsa* $B=\frac{1}{3}$ *bulunur. Yine* $A=\frac{1}{9}$, $C=-\frac{1}{9}$ *ve* $D=-\frac{1}{3}$ *olur. O zaman*

$$\begin{aligned} \int \frac{x+3}{x^4+9x^2}dx &= \int \left(\frac{1}{9x}+\frac{1}{3x^2}-\frac{x+3}{9(x^2+9)}\right)dx \\ &= \frac{1}{9}\ln|x|-\frac{1}{3x}-\frac{1}{9}\int \frac{x+3}{x^2+9}dx \\ &= \frac{1}{9}\ln|x|-\frac{1}{3x}-\frac{1}{18}\int \frac{2x+6}{x^2+9}dx \\ &= \frac{1}{9}\ln|x|-\frac{1}{3x}-\frac{1}{18}\int \frac{2x}{x^2+9}dx-\frac{1}{3}\int \frac{dx}{x^2+9} \\ &= \frac{1}{9}\ln|x|-\frac{1}{3x}-\frac{1}{18}\ln(x^2+9)-\frac{1}{9}\arctan\frac{x}{3}+C_1 \\ &= \frac{1}{18}\ln(\frac{x^2}{x^2+9})-\frac{1}{3x}-\frac{1}{9}\arctan\frac{x}{3}+C_1 \end{aligned}$$

bulunur.

Örnek 101 $\int \frac{4x}{(x^2+1)(x^2+2x+3)}dx$ *integralini hesaplayalım. Payda farklı iki kuadratik çarpanın çarpımıdır. O zaman integrant*

$$\frac{4x}{(x^2+1)(x^2+2x+3)}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{Cx+D}{x^2+2x+3}$$

biçiminde basit kesirlere ayrılır. Buradan

$$\begin{aligned} 4x &= (Ax+B)(x^2+2x+3)+(Cx+D)(x^2+1) \\ &= (A+C)x^3+(2A+B+D)x^2+(3A+2B+C)x+3B+D \end{aligned}$$

den

$$\begin{aligned} A+C &= 0 \\ 2A+B+D &= 0 \\ 3A+2B+C &= 4 \\ 3B+D &= 0 \end{aligned}$$

bulunur. Denklemlerin çözümü $A=1$, $B=1$, $C=-1$ ve $D=-3$ değerlerini verir. O zaman

$$
\begin{aligned}
\int \frac{4x dx}{(x^2+1)(x^2+2x+3)} &= \int \left(\frac{x+1}{x^2+1} - \frac{x+3}{x^2+2x+3} \right) dx \\
&= \int \frac{x+1}{x^2+1} dx - \int \frac{x+3}{x^2+2x+3} dx \\
&= \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+1} dx + \int \frac{1}{x^2+1} dx - \frac{1}{2} \int \frac{2x+2+4}{x^2+2x+3} dx \\
&= \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{(2x+2)dx}{x^2+2x+3} - 2 \int \frac{dx}{x^2+2x+3} \\
&= \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + \arctan x - \frac{1}{2} \ln(x^2+2x+3) - 2 \int \frac{dx}{(x+1)^2+2} \\
&= \frac{1}{2} \ln \left(\frac{x^2+1}{x^2+2x+3} \right) + \arctan x - \sqrt{2} \arctan(\frac{x+1}{\sqrt{2}}) + C_1
\end{aligned}
$$

bulunur.

Örnek 102 $\int \frac{x^2}{(x^2+1)^2} dx$ *integralini hesaplayalım. Payda da bir tekrarlı kuadratik çarpan vardır. O zaman integrant*

$$
\frac{x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{(x^2+1)^2}
$$

biçiminde basit kesirlere ayrılır. Buradan

$$
\begin{aligned}
x^2 &= (Ax+B)(x^2+1) + Cx + D \\
&= Ax^3 + Bx^2 + (A+C)x + B + D
\end{aligned}
$$

ve böylece $A=0$, $B=1, C=0$ ve $D=-1$ bulunur. O zaman

$$
\begin{aligned}
\int \frac{x^2}{(x^2+1)^2} dx &= \int \left(\frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{(x^2+1)^2} \right) dx \\
&= \int \frac{dx}{x^2+1} - \int \frac{dx}{(x^2+1)^2} \\
&= \arctan x - \frac{x}{2(x^2+1)} - \frac{1}{2} \arctan x + C_1 \\
&= -\frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2} \arctan x + C_1
\end{aligned}
$$

bulunur.

Örnek 103 *Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.*

1. $\int \frac{-2x+4}{(x^2+1)(x-1)^2}dx$
2. $\int \frac{2x^3-4x^2-x-3}{x^2-2x-3}dx$
3. $\int \frac{dx}{x(x^2+1)^2}$
4. $\int \frac{x^2}{x^4-1}dx$
5. $\int \frac{x^2-x+2}{x^3-1}dx$
6. $\int \frac{dx}{x^2+x+1}$
7. $\int \frac{dx}{x^3+1}$
8. $\int \frac{dx}{x^4+1}$

2.4.5 İntegrantı Rasyonel Hale Getirerek İntegralleme

Bazı cebirsel ve transandant fonksiyonlar uygun bir değişken değişimi ile rasyonel hale dönüştürülebilir. Böylece yukarıda belirtilen yollar ile integralleme yapılabilir.

Örnek 104 $\int \frac{dx}{x\sqrt{x+1}}$ *integralinde* $x+1=t^2$ *dönüşümü yapılırsa*

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x\sqrt{x+1}} &= \int \frac{2dt}{t^2-1} \\ &= \int \left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)dt \\ &= \ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C \\ &= \ln\left|\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\right|+C\end{aligned}$$

olur.

$P(x)$ bir polinom, a, b, c, d reel sayılar ve n bir pozitif tam sayı olmak üzere olmak üzere

$$\int P(x) \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} dx$$

tipindeki integraller

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^n$$

dönüşümü yardımıyla bir rasyonel fonksiyonun integraline dönüştürülebilir.

Örnek 105 *$\int \sqrt{\frac{x}{2-x}} dx$ integralini hesaplayalım. $\frac{x}{2-x} = t^2$ denirse $x = \frac{2t^2}{1+t^2}$ olur. Ozaman $dx = \frac{4t}{(1+t^2)^2} dt$ olacağından*

$$\int \sqrt{\frac{x}{2-x}} dx = \int \frac{4t^2}{(1+t^2)^2} dt$$

olur. Bu son integral bir rasyonel fonksiyonun integralidir ve basit kesirler yardımıyla hesaplanabilir. Ancak biz burada hem farklı bir yol öğrenmek ve hemde integrali daha kolay hesaplamak için $t = \tan u$ dönüşümü yapalım. O zaman $dt = \sec^2 u du$ olup

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{\frac{x}{2-x}} dx &= \int \frac{4t^2}{(t^2+1)^2} dt \\
&= \int \frac{4\tan^2 u}{(1+\tan^2 u)^2} \sec^2 u du \\
&= 4 \int \frac{\tan^2 u}{\sec^2 u} du \\
&= 4 \int \sin^2 u du \\
&= 2 \int (1-\cos 2u) du \\
&= 2u - \sin 2u + C \\
&= 2\arctan t - 2\sin(\arctan t)\cos(\arctan t) + C \\
&= 2\arctan t - \frac{2t}{1+t^2} + C \\
&= 2\arctan \sqrt{\frac{x}{2-x}} - \frac{2\sqrt{\frac{x}{2-x}}}{1+\frac{x}{2-x}} + C \\
&= 2\arctan \sqrt{\frac{x}{2-x}} - \sqrt{2x-x^2} + C
\end{aligned}$$

bulunur.

Örnek 106 *Aşağıdaki integralleri uygun bir değişken değişimi ile rasyonal hale getirerek hesaplayınız.*

1. $\int \sqrt{1+e^x}dx$

$$1+e^x = t^2$$

denirse $e^x dx = 2tdt$ *yani* $dx = \frac{2tdt}{t^2-1}$ *olur. O zama*

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{1+e^x}dx &= \int \frac{2t^2}{t^2-1}dt = \int \left(2+\frac{2}{t^2-1}\right)dt \\
&= \int \left(2+\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)dt \\
&= 2t + \ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C \\
&= 2\sqrt{1+e^x} + \ln\left|\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}\right| + C
\end{aligned}$$

bulunur.

2. $\int \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt[3]{x+1}}dx$

$$x+1 = t^6$$

denirse $dx = 6t^5 dt$ *olur. O zaman*

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt[3]{x+1}}dx &= \int \frac{t^3+1}{t^2}6t^5dt \\
&= 6\int (t^6+t^3)dt \\
&= 6\left(\frac{t^7}{7}+\frac{t^4}{4}\right)+C \\
&= 6\left(\frac{(x+1)^{\frac{7}{6}}}{7}+\frac{(x+1)^{\frac{2}{3}}}{4}\right)+C
\end{aligned}$$

bulunur.

3. $\int \frac{xdx}{x-\sqrt[3]{x^4}}$

$$x = t^3$$

denirse $dx = 3t^2dt$ *olur. O zaman*

$$\begin{aligned}
\int \frac{xdx}{x-\sqrt[3]{x^4}} &= \int \frac{3t^5dt}{t^3-t^4} \\
&= 3\int \frac{t^2}{1-t}dt \\
&= -3\int \left(t+1+\frac{1}{t-1}\right)dt \\
&= -3\left(\frac{t^2}{2}+t+\ln|t-1|\right)+C \\
&= -3\left(\frac{x^{\frac{2}{3}}}{2}+x^{\frac{1}{3}}+\ln\left|x^{\frac{1}{3}}-1\right|\right)+C
\end{aligned}$$

bulunur.

4. $\int \frac{e^{3x}-e^x}{e^{2x}+1}dx$

$$e^x = t$$

dönüşümü ile

$$\begin{aligned}
\int \frac{e^{3x}-e^x}{e^{2x}+1}dx &= \int \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}e^xdx \\
&= \int \frac{t^2-1}{t^2+1}dt \\
&= \int \left(1-\frac{2}{t^2+1}\right)dt \\
&= t-2\arctan t+C \\
&= e^x-2\arctan e^x+C
\end{aligned}$$

bulunur.

5. $\int \frac{dx}{\cos x}$

$$\tan\frac{x}{2} = t$$

dönüşümü ile

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\cos x} &= \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{1-t^2}{1+t^2}} \\
&= \int \frac{2dt}{1-t^2} \\
&= \int \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t} \right) dt \\
&= \ln \left| \frac{t+1}{t-1} \right| + C \\
&= \ln \left| \frac{\tan \frac{x}{2} + 1}{\tan \frac{x}{2} - 1} \right| + C
\end{aligned}$$

bulunur.

6. $\int \frac{\cos x dx}{1-\sin^3 x}$
7. $\int \frac{dx}{\cos^2 x - \sin 2x}$
8. $\int \frac{\cos x dx}{\cos^3 x + \sin^3 x}$
9. $\int \frac{dx}{1+\sin^2 x}$

2.4.6 Ek Sorular

Örnek 107 *Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.*

1. $\int \frac{4x^2-3x-4}{x^3+x^2-2x} dx$
2. $\int \frac{x^3-4x-1}{x(x-1)^3} dx$
3. $\int \frac{5x^3-3x^2+2x-1}{x^4+x^2} dx$
4. $\int \frac{x^3}{x^2+1} dx$
5. $\int \frac{x^3+x^2+2x+1}{(x^2+1)(x^2+2)} dx$
6. $\int \frac{dx}{x(x^4+1)}$

7. $\int \frac{x^4}{x^2-1}dx$

Örnek 108 *Aşağıdaki integralleri rasyonal hale getirerek hesaplayınız.*

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$
2. $\int \frac{1+\ln x}{x(3+2\ln x)^2}dx$
3. $\int \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}dx$
4. $\int x \arctan x dx$
5. $\int x^2 \ln(1+x)dx$
6. $\int \frac{dx}{2+\sin x+\cos x}$
7. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x+9}}$
8. $\int \frac{\sqrt{x+1}}{x}dx$
9. $\int \frac{dx}{\sin x \cos^3 x}$
10. $\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{2+x^2}dx$. *Verilen integralde* $x = \tan t$ *dönüşümü uygularsak* $dx = \sec^2 t dt$ *olur. O zaman*

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{2+x^2}dx &= \int \frac{\sqrt{1+\tan^2 t}}{2+\tan^2 t}\sec^2 t dt \\
&= \int \frac{\sec^3 t}{1+\sec^2 t}dt \\
&= \int \frac{dt}{\cos t(1+\cos^2 t)} \\
&= \int \frac{\cos t dt}{\cos^2 t(1+\cos^2 t)} \\
&= \int \frac{\cos t dt}{(1-\sin^2 t)(2-\sin^2 t)}
\end{aligned}$$

olur. Son integralde $\sin t = u$ *dönüşümü yaparsak*

$$\int \frac{\cos t dt}{(1-\sin^2 t)(2-\sin^2 t)} = \int \frac{du}{(1-u^2)(2-u^2)}$$

olur. Bu integral ise basit kesirlere ayırma ile hesaplanabilir.

$$\frac{1}{(1-u^2)(2-u^2)} = \frac{A}{1-u} + \frac{B}{1+u} + \frac{C}{\sqrt{2}-u} + \frac{D}{\sqrt{2}+u}$$

dan $A = B = \frac{1}{2}$, $C = D = -\frac{\sqrt{2}}{4}$ *bulunur. O zaman*

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{2+x^2} &= \int \frac{\cos t dt}{(1-\sin^2 t)(2-\sin^2 t)} \\
&= \int \frac{du}{(1-u^2)(2-u^2)} \\
&= \int \left(\frac{\frac{1}{2}}{1-u} + \frac{\frac{1}{2}}{1+u} + \frac{-\frac{\sqrt{2}}{4}}{\sqrt{2}-u} + \frac{-\frac{\sqrt{2}}{4}}{\sqrt{2}+u} \right) du \\
&= -\frac{1}{2}\ln(1-u) + \frac{1}{2}\ln(1+u) + \frac{\sqrt{2}}{4}\ln(\sqrt{2}-u) - \frac{\sqrt{2}}{4}\ln(\sqrt{2}+u) + C \\
&= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+u}{1-u}\right) + \frac{\sqrt{2}}{4}\ln\left(\frac{\sqrt{2}-u}{\sqrt{2}+u}\right) + C \\
&= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\sin t}{1-\sin t}\right) + \frac{\sqrt{2}}{4}\ln\left(\frac{\sqrt{2}-\sin t}{\sqrt{2}+\sin t}\right) + C \\
&= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\sin(\arctan x)}{1-\sin(\arctan x)}\right) + \frac{\sqrt{2}}{4}\ln\left(\frac{\sqrt{2}-\sin(\arctan x)}{\sqrt{2}+\sin(\arctan x)}\right) + C \\
&= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{1-\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}\right) + \frac{\sqrt{2}}{4}\ln\left(\frac{\sqrt{2}-\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{2}+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}\right) + C \\
&= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}-x}\right) + \frac{\sqrt{2}}{4}\ln\left(\frac{\sqrt{2}\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{2}\sqrt{x^2+1}+x}\right) + C
\end{aligned}$$

bulunur.

2.5 Bazı İrrasyonel Fonksiyonların İntegrali

Bu kesimde bazı irrasyonel fonksiyonlarının integralinin hesaplanmasında kullanılan yöntemler üzerinde duracağız.

2.5.1 $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ integralinin hesabı

a, b ve c reel sabitlerinin durumlarına göre ax^2+bx+c ifadesi k^2-u^2 veya $u^2 \pm k^2$ haline dönüştürülebilir. Bu durumda

$$\begin{aligned}
\int \frac{du}{\sqrt{k^2-u^2}} &= \arcsin \frac{u}{k} + C \text{ veya} \\
\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm k^2}} &= \ln(u+\sqrt{u^2 \pm k^2}) + C
\end{aligned}$$

eşitliklerinden yararlanılarak integral hesaplanır.

Örnek 109 $\int \frac{dx}{\sqrt{3+2x-x^2}}$ *integralini hesaplayalım.* $x-1=u$ *dönüşümü ile*

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sqrt{3+2x-x^2}} &= \int \frac{dx}{\sqrt{4-(x-1)^2}} \\
&= \int \frac{du}{\sqrt{4-u^2}} \\
&= \arcsin \frac{u}{2} + C \\
&= \arcsin \frac{x-1}{2} + C
\end{aligned}$$

bulunur.

Örnek 110 $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+4x+3}}$ *integralini hesaplayalım.* $2x+1=u$ *dönüşümü ile*

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+4x+3}} &= \int \frac{dx}{\sqrt{(2x+1)^2+2}} \\
&= \frac{1}{2} \int \frac{du}{\sqrt{u^2+2}} \\
&= \frac{1}{2} \ln(u+\sqrt{u^2+2}) + C \\
&= \frac{1}{2} \ln(2x+1+\sqrt{4x^2+4x+3}) + C
\end{aligned}$$

bulunur.

2.5.2 $\int \frac{mx+n}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$ integralinin hesabı

Bu tip integrallerde yapılacak ilk iş, kök içinin türevini integrantın pay kısmında oluşturmaktır. Burada önce x in katsayısının oluşturulmasına dikkat edilmelidir. Daha sonra yukarıdaki teknik kullanılarak integral hesaplanabilir.

Örnek 111 $\int \frac{3x+2}{\sqrt{x^2+4x+1}}dx$ *integralini hesaplayalım.*

$$\begin{aligned}
\int \frac{3x+2}{\sqrt{x^2+4x+1}}dx &= \frac{1}{2}\int \frac{6x+4}{\sqrt{x^2+4x+1}}dx \\
&= \frac{3}{2}\int \frac{2x+\frac{4}{3}+4-4}{\sqrt{x^2+4x+1}}dx \\
&= \frac{3}{2}\int \frac{(2x+4)dx}{\sqrt{x^2+4x+1}} - 4\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+1}}
\end{aligned}$$

olur. İk integral $x^2+4x+1=t$ dönüşümü ile hesaplanabilir. İkincisinde ise yukarıdaki teknik kullanılır. Ozaman

$$\begin{aligned}
\int \frac{3x+2}{\sqrt{x^2+4x+1}}dx &= \frac{3}{2}\int \frac{(2x+4)dx}{\sqrt{x^2+4x+1}} - 4\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+1}} \\
&= 3\sqrt{x^2+4x+1} - 4\int \frac{dx}{\sqrt{(x+2)^2-3}} \\
&= 3\sqrt{x^2+4x+1} - 4\ln(x+2+\sqrt{x^2+4x+1}) + C
\end{aligned}$$

bulunur.

2.5.3 $\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$ integralinin hesabı

P_n, n. dereceden bir polinom olmak üzere bu tip integraller için özel bir hesaplama yöntemi vardır. Böyle bir integral Q_{n-1}, $n-1$. dereceden bir polinom ve λ bir sabit olmak üzere daima

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + \lambda\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} \tag{6}$$

biçiminde yazılabilir. Q_{n-1} polinomu ile λ sabitinin bulunması durmunda integral kulaylıkla hesaplanabilir. (6) eşitliğinin her iki yanının türevi alınarak Q_{n-1} polinomu ile λ sabiti bulunabilir.

Örnek 112 $\int \frac{2x^2-3x}{\sqrt{x^2-2x+5}}dx$ *integralini hesaplayalım. Yukarıdaki düşünce ile*

$$\int \frac{2x^2-3x}{\sqrt{x^2-2x+5}}dx = (Ax+B)\sqrt{x^2-2x+5} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x+5}}$$

yazılır. Türev alma işlemi ile

$$\begin{aligned}
\frac{2x^2-3x}{\sqrt{x^2-2x+5}} &= A\sqrt{x^2-2x+5} + \frac{(Ax+B)(x-1)}{\sqrt{x^2-2x+5}} + \frac{\lambda}{\sqrt{x^2-2x+5}} \\
&= \frac{A(x^2-2x+5)+(Ax+B)(x-1)+\lambda}{\sqrt{x^2-2x+5}} \\
&= \frac{2Ax^2+(-3A+B)x+5A-B+\lambda}{\sqrt{x^2-2x+5}}
\end{aligned}$$

bulunur. Buradan $2A=2$, $-3A+B=-3$ *ve* $5A-B+\lambda=0$ *dan* $A=1$, $B=0$ *ve* $\lambda=-5$ *bulunur. Ozaman*

$$\begin{aligned}
\int \frac{2x^2-3x}{\sqrt{x^2-2x+5}}dx &= x\sqrt{x^2-2x+5} - 5\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x+5}} \\
&= x\sqrt{x^2-2x+5} - 5\int \frac{dx}{\sqrt{(x-1)^2+4}} \\
&= x\sqrt{x^2-2x+5} - 5\ln(x-1+\sqrt{x^2-2x+5}) + C
\end{aligned}$$

bulunur.

2.5.4 Ek Sorular

Örnek 113 *Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.*

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x+3}}$ *integralini hesaplayalım.* $x-1=u$ *dönüşümü ile*

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x+3}} &= \int \frac{dx}{\sqrt{(x-1)^2+2}} \\
&= \int \frac{du}{\sqrt{u^2+2}} \\
&= \ln\left(u+\sqrt{u^2+2}\right) + C \\
&= \ln\left((x-1)+\sqrt{x^2-2x+3}\right) + C
\end{aligned}$$

2. $\int \frac{x+3}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx$ *integralini hesaplayalım.*

$$\begin{aligned}
\int \frac{x+3}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx &= \frac{1}{2}\int \frac{2x+6}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{2x+2+4}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx + 2\int \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx + 2\int \frac{1}{\sqrt{(x+1)^2+1}}dx
\end{aligned}$$

ilk integralde $x^2+2x+2=t$ *ve ikinci interalde* $x+1=u$ *dönüşümleri yapılırsa*

$$\int \frac{x+3}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx = \sqrt{x^2+2x+2}+2\ln\left((x+1)+\sqrt{(x+1)^2+1}\right)+C$$

3. $\int \frac{x^4+4x^2}{\sqrt{x^2+1}}dx$ *integralini hesaplayalım.*

$$\int \frac{x^4+4x^2}{\sqrt{x^2+1}}dx = \left(Ax^3+Bx^2+Cx+D\right)\sqrt{x^2+1}+\lambda\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx$$

biçiminde yazıldığını biliyoruz. Türev alınırsa

$$\begin{aligned}
\frac{x^4+4x^2}{\sqrt{x^2+1}} &= \left(3Ax^2+2Bx+C\right)\sqrt{x^2+1}+\left(Ax^3+Bx^2+Cx+D\right)\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+\lambda\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \\
&= \frac{4Ax^4+3Bx^3+(3A+2C)x^2+(2B+D)x+C+\lambda}{\sqrt{x^2+1}}
\end{aligned}$$

bulunur. Buradan $A=\frac{1}{4}$, $B=0$, $C=\frac{13}{8}$, $D=0$ *ve* $\lambda=-\frac{13}{8}$ *bulunur. Buna göre*

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^4+4x^2}{\sqrt{x^2+1}}dx &= \left(\frac{1}{4}x^3+\frac{13}{8}x\right)\sqrt{x^2+1}-\frac{13}{8}\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx \\
&= \left(\frac{1}{4}x^3+\frac{13}{8}x\right)\sqrt{x^2+1}-\frac{13}{8}\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+C_1
\end{aligned}$$

4. $\int \frac{1-x}{\sqrt{8+2x-x^2}}dx$ *integralini hesaplayalım.*

$$\begin{aligned}\int \frac{1-x}{\sqrt{8+2x-x^2}}dx &= \frac{1}{2}\int \frac{2-2x}{\sqrt{8+2x-x^2}}dx \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{t}}dt = \sqrt{t}+C \\ &= \sqrt{8+2x-x^2}+C\end{aligned}$$

5. $\int \frac{x+1}{\sqrt{2x-x^2}}dx$ *integralini hesaplayalım.*

$$\begin{aligned}\int \frac{x+1}{\sqrt{2x-x^2}}dx &= -\frac{1}{2}\int \frac{-2x-2}{\sqrt{2x-x^2}}dx \\ &= -\frac{1}{2}\int \frac{2-2x-4}{\sqrt{2x-x^2}}dx \\ &= -\frac{1}{2}\int \frac{2-2x}{\sqrt{2x-x^2}}dx + 2\int \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}dx \\ &= -\sqrt{2x-x^2} + 2\int \frac{1}{\sqrt{1-1+2x-x^2}}dx \\ &= -\sqrt{2x-x^2} + 2\int \frac{1}{\sqrt{1-(x-1)^2}}dx \\ &= -\sqrt{2x-x^2} + 2\arcsin(x-1) + C\end{aligned}$$

6. $\int \frac{x^4-2}{\sqrt{x^2+1}}dx$

2.6 Bölüm Sonu Problemler

Örnek 114 $\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\arcsin x dx$ *belirli integralini hesaplayınız.*

Örnek 115 $\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^4}}$ *belirsiz integralini hesaplayınız.*

Örnek 116 $\int \cos x \sin^2 x \ln(\sin x)\, dx$ *belirsiz integralini hesaplayınız.*

Örnek 117 $\displaystyle\int \frac{dx}{2+\cos x}$ *belirsiz integralini hesaplayınız.*

Örnek 118 $\displaystyle\int x\sqrt{x^2+2x+4}dx$ *belirsiz integralini hesaplayınız.*

Örnek 119 $f\,'(x)=\frac{\cos x}{x}$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=6$ *ve* $f\left(\frac{3\pi}{2}\right)=2$ *ise* $\int\limits_{\pi/2}^{3\pi/2} f(x)\,dx$ *integralini hesaplayınız.*

Örnek 120 $\int \frac{1}{x}\sqrt{9x^2-16}dx$ *integralini hesaplayınız.*

Örnek 121 *Aşağıdaki integralini hesaplayınız.*

1. $\int \dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}dx$
2. $\int_{-1}^{3}\left|x^3-3x^2+2x\right|dx$
3. $\int_0^{\pi}\frac{dx}{1+4\sin^2 x}$
4. $\int_0^1\sqrt{\frac{x}{2-x}}dx$
5. $\int_0^1 x^2(1-x)^8dx$
6. $\int_0^1 x^3(1-x^2)^8dx$
7. $\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}dx$
8. $\int_{-1}^{1}\ln(x+\sqrt{1+x^2})dx$

Örnek 122

$$f(x)=\begin{cases}|x-2| & , \quad -2\le x\le 1\\ \\ |x| & , \quad 1<x\le 2\end{cases}$$

ise

$$\int_{-2}^{2} f(x)dx=?$$

Örnek 123 $\int_{\frac{1}{2}}^{x^2} f(t)dt=x^{\frac{1}{x}}$ *ise* $f(1)=?$

Örnek 124 $\int_0^{x^2} f(t)dt = x\cos\pi x$ *ise* $f(4) = ?$

Örnek 125 $\int_0^{f(x)} t^2 dt = x\cos\pi x$ *ise* $f(4) = ?$

Örnek 126 *Sürekli türeve sahip* f *fonksiyonu için* $f(0) = \frac{1}{2}$ *ve* $f(1) = e$ *olduğuna göre*

$$\int_0^1 \frac{f'(x) - f(x)}{e^x} dx = ?$$

Örnek 127

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e-1}{n} \ln\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{k(e-1)}{n}\right)\right) = ?$$

Örnek 128

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} \int_{x^2}^{x^3} \frac{\sin t}{t} dt = ?$$

Örnek 129

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_2^{2+h} \frac{dt}{\ln t} = ?$$

Örnek 130 $\frac{d}{dx}\int_0^{\ln x} f(t)dt = 1$ *ise* $f(2) = ?$

Örnek 131 *Aşağıdaki integralleri hesaplayınız*

1. $\int_0^1 \frac{dx}{x^3+1}$
2. $\int_0^1 \frac{dx}{(x^2+1)(x+1)^2}$
3. $\int \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{1+x}} dx$
4. $\int \frac{2x\ln x}{(1+x^2)^2} dx$
5. $\int \frac{\cos x}{2-\cos x} dx$
6. $\int \frac{(x+1)e^{-x}}{x^2} dx$
7. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \ln(\sec x + \tan x) dx$

Örnek 132 *Türevi kendisinin iki katına eşit olan pozitif bir f fonksiyonu için $f(0)=1$ olduğu biliniyor. $f(x)$ nedir bulunuz.*

Örnek 133 *Her noktasındaki eğimi, o noktanın apsisi ile ordinatı çarpımına eşit olan ve $(0,2)$ noktasından geçen eğrinin denklemimi bulunuz.*

Örnek 134 $f(x)=\frac{xe^x}{(x+1)^2}$ *fonksiyonunun* $[0,1]$ *aralığındaki ortalama değerini bulunuz. Bu aralıkta f altındaki görüntüsü f nin ortalama değerine eşit olan bir nokta var mıdır? Neden?*

Örnek 135 *Aşağıdaki fonksiyonlarn* $[-3,3]$ *aralığındaki ortalama değerini bulunuz. Bu aralıkta f altındaki görüntüsü f nin ortalama değerine eşit olan bir nokta var mıdır?*

1. $f(x)=\begin{cases} -x^2 & , \quad -3\le x<0 \\ \\ x^2+1 & , \quad 0\le x\le 3 \end{cases}$

2. $f(x)=\begin{cases} -x^2 & , \quad -3\le x<0 \\ \frac{1}{2} & , \quad x=0 \\ x^2+1 & , \quad 0< x\le 3 \end{cases}$

Örnek 136 *n bir doğal sayı olmak üzere* $\int_0^n \lfloor x\rfloor\, dx$ *integralini hesaplayınız.*

Örnek 137 $f(x)=\int_0^x \frac{\sin t}{t}dt$ *olsun. (f Elektirik mühendisliğinde önemli bir fonksiyondur ve kısaca* $\mathrm{Si}\,x$ *ile gösterilir.)*

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$$

limitini hesaplayınız.

Örnek 138 $f(x)=\int_{\frac{1}{x}}^{x}\sqrt{1+t^4}dt$ *ile verilen eğrinin $x=1$ apsisli noktasındaki teğetinin denklemini bulunuz.*

Örnek 139 $\int \frac{\cos x}{(\sin x+\cos x)^3}dx$ *integralini hesaplayınız.*

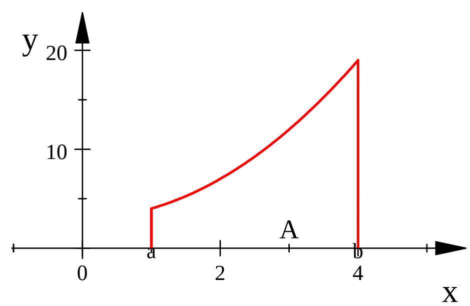
Örnek 140 $\int_{-1}^{2}\lfloor x\rfloor\cos^2 x dx$ *integralini hesaplayınız.*

3 BELİRLİ İNTEGRALLERİN UYGULAMALARI

3.1 Alan Hesabı

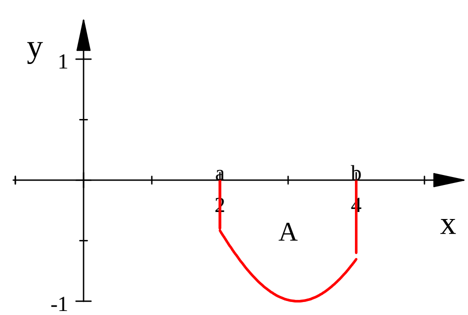
3.1.1 Eğri Altındaki Alan

Bu kesimde belirli integral yardımıyla eğriler tarafından sınırlanan bölgelerin alanını hesaplayacağız. Belirli integral tanımından da hatırlanacağı gibi eğer f fonksiyonu $[a, b]$ aralığı üzerinde sürekli ve pozitif ise $\int_a^b f(x)dx$ belirli integrali aralık üzerinde f nin grafiği altında kalan alanı vermektedir.



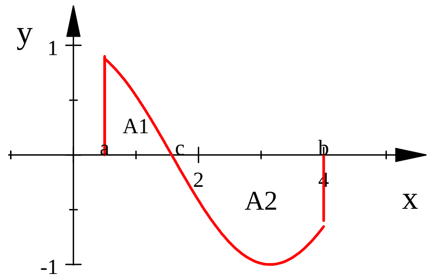
$$A = \int_a^b f(x)dx$$

Eğer f fonksiyonu $[a, b]$ aralığı üzerinde negatif ise aralık üzerinde f nin grafiği ile x-ekseni arasında kalan bölgenin alanı $\int_a^b -f(x)dx$ ile hesaplanır.



$$A = \int_a^b -f(x)dx$$

Eğer f fonksiyonu $[a, b]$ aralığı üzerinde pozitif ve negatif değerlerden her ikisini de alıyorsa, aralık üzerinde f nin grafiği ile x-ekseni arasında kalan alan, f nin pozitif olduğu bölgedeki alan ile negatif olduğu bölgedeki alanın toplamı olur.



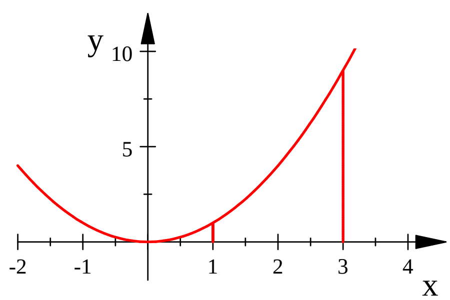
$$A = A1 + A2 = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b -f(x)dx$$

Sonuç olarak $y = f(x)$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sürekli ise, aralık üzerinde f nin grafiği ve x-ekseni tarafından sınırlanan bölgenin toplam alanı kısaca

$$A = \int_a^b |f(x)|\, dx$$

eşitliği ile hesaplanır.

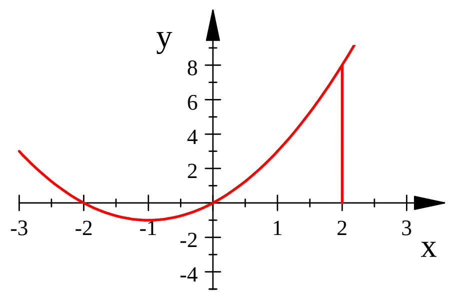
Örnek 141 *$f(x) = x^2$ eğrisi $x = 1$ ve $x = 3$ doğruları ve x-ekseni tarafından sınırlanan bölgenin alanı*



$$A = \int_1^3 x^2 dx = \frac{26}{3}\ br^2$$

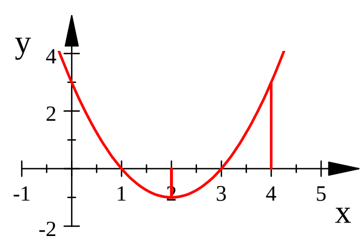
olur.

Örnek 142 $[-2, 2]$ *aralığında $f(x) = x^2 + 2x$ eğrisi ile x-ekseni tarafından* *sınırlanan toplam alanı bulunuz.*



$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^{2} \left| x^2 + 2x \right| dx \\ &= \int_{-2}^{0} -(x^2 + 2x)dx + \int_{0}^{2} (x^2 + 2x)dx \\ &= 8 \ br^2 \end{aligned}$$

Örnek 143 *$f(x) = x^2 - 4x + 3$ eğrisi, $x = 2$ ve $x = 4$ doğruları ile x-ekseni arasında kalan bölgenin alanını hesaplayınız.*



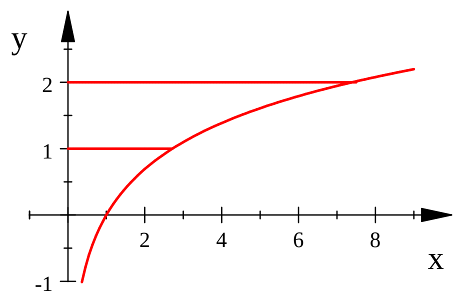
$$\begin{aligned} A &= \int_{2}^{4} \left| x^2 - 4x + 3 \right| dx \\ &= \int_{2}^{3} -(x^2 - 4x + 3)dx + \int_{2}^{4} (x^2 - 4x + 3)dx \\ &= 2 \ br^2. \end{aligned}$$

Uyarı 144 *Benzer düşünce ile $x = u(y)$ eğrisi, $y = c$ ve $y = d$ doğruları ile y-ekseni tarafından sınırlanan bölgenin alanı*

$$A = \int_{c}^{d} |u(y)| \, dy$$

şeklinde hesaplanır.

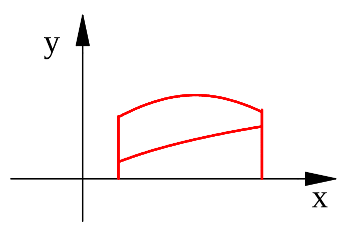
Örnek 145 *$y=\ln x$ eğrisi, $y=1$ ve $y=2$ doğruları ile y-ekseni tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.*



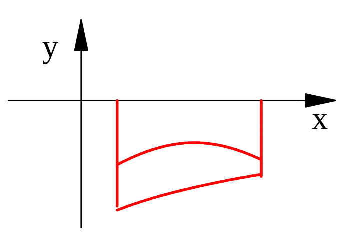
$$A=\int_1^2 e^y dy = e\,(e-1)\ \ br^2.$$

3.1.2 İki Eğri Tarafından Sınırlanan Alan

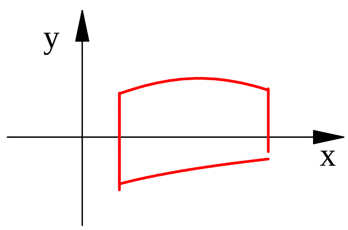
f ve g fonksiyonları $[a,b]$ aralığındaki her x için $f(x)\geq g(x)$ eşitsizliğini sağlayan sürekli fonksiyonlar olmak üzere $y=f(x), y=g(x)$ eğrileri ile $x=a$ ve $x=b$ doğruları tarafıdan sınırlalan bölgenin alanı aşağıdaki şekilde hesaplanır.



$A=\int_a^b f(x)dx-\int_a^b g(x)dx$



$A=\int_a^b -g(x)dx-\int_a^b -f(x)dx$



$A = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b -g(x)dx$

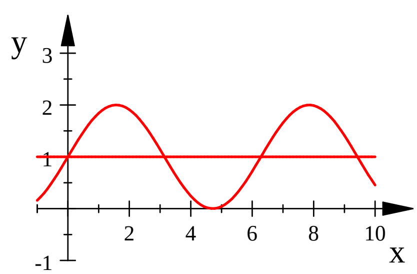
olur. Her durumda da belirtilen bölgenin alanı

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

eşitliği ile hesaplanır. Yani üstteki eğriden alttaki eğrinin çıkarılması ile

$$y_{\ddot{u}st} - y_{alt} = f(x) - g(x)$$

elde edilen farkın $[a, b]$ üzerindeki integrali istenen bölgenin alanını vermektedir. Ancak f ve g nin grafikleri $[a, b]$ aralığında birbirlerini kesiyorlarsa bu formül geçerli olmaz. Bu durumda f ve g nin kesişme noktaları dikkate alınarak, bu noktalar arasında $y_{\ddot{u}st} - y_{alt}$ farkı oluşturulmalıdır.



$$A = \int_a^{c_1} [f(x) - g(x)]dx + \int_{c_1}^{c_2} [g(x) - f(x)]dx + \int_{c_2}^{b} [f(x) - g(x)]dx$$

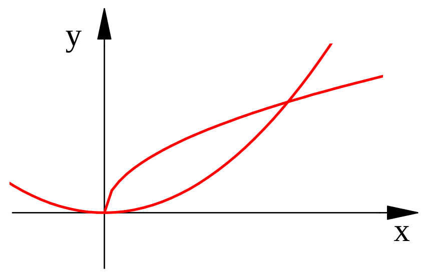
Sonuç olarak $y = f(x)$ ve $y = g(x)$ fonksiyonları $[a, b]$ aralığında sürekli ise, aralık üzerinde f ve g nin grafikleri tarafından sınırlanan bölgenin toplam alanı kısaca

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx$$

eşitliği ile hesaplanır.

Uyarı 146 *İki eğri arasında kalan alan hesaplanırken, integrant ile integralin sınırlarını belirlemek kolay olmayabilir. Bunları doğru tespit etmek için bölgeyi çizmek yararlı olur. Daha sonra, bölge içinde kalacak şekilde y-eksenine paralel bir şerit çizilir. Şeridin üst ve alt ucundaki eğriler belirlenir. $y_{üst} - y_{alt}$ farkı integranttır (Bu durumda mutlak değere ihtiyaç kalmaz). İntegralin sınırları ise, şeridin bölge ile kesiştiği en sağ ve en sol uç noktalardır.*

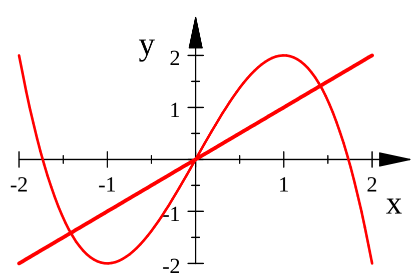
Örnek 147 *$y = \sqrt{x}$ ve $y = x^2$ eğrileri tarafından sınırlanan bölgenin alanını hesaplayınız. Önce bu eğrilerin kesim noktalarını bulalım. $x^2 = \sqrt{x}$ ise $x = 0$ ve $x = 1$ olur.*



O zaman

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 (y_{üst} - y_{alt})dx \\ &= \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)dx \\ &= \frac{1}{3}\ br^2. \end{aligned}$$

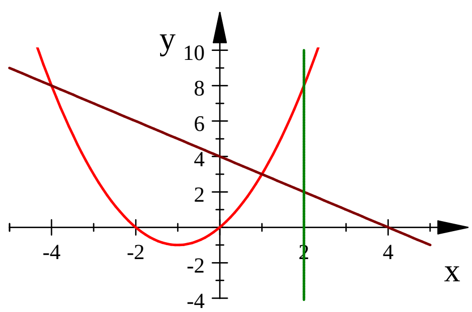
Örnek 148 *$y = 3x - x^3$ eğrisi ile $y = x$ doğrusu arasında kalan bölgenin alanını hesaplayınız.*



Eğrilerin kesim noktalarının apsisleri $-\sqrt{2}, 0$ *ve* $\sqrt{2}$ *dir.* $\left[-\sqrt{2}, 0\right]$ *aralığında* $y_{üst} = x$ *ve* $y_{alt} = 3x - x^3$ *dür.* $\left[0, \sqrt{2}\right]$ *aralığında ise* $y_{üst} = 3x - x^3$ *ve* $y_{alt} = x$ *dir. O zaman istenen alan*

$$\begin{aligned} A &= \int_{-\sqrt{2}}^{0} (x - 3x + x^3)dx + \int_{0}^{\sqrt{2}} (3x - x^3 - x)dx \\ &= 2 \ br^2. \end{aligned}$$

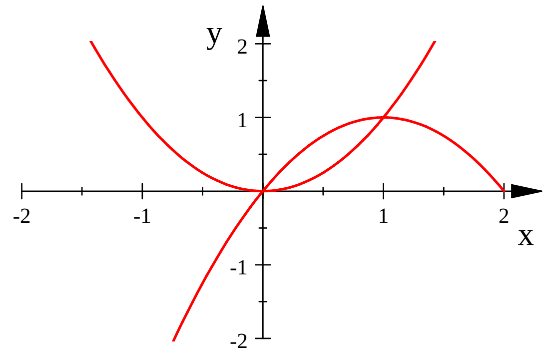
Örnek 149 $[-4, 2]$ *aralığında* $y = x^2 + 2x$ *ve* $y = 4 - x$ *eğrileri tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulunuz. Eğrilerin kesim noktaları* $x = -4$ *ve* $x = 1$ *dir. O zaman istenen bölgenin alanı*



$$\begin{aligned} A &= A_1 + A_2 \\ &= \int_{-4}^{1} (y_{üst} - y_{alt})dx + \int_{1}^{2} (y_{üst} - y_{alt})dx \\ &= \int_{-4}^{1} ((4 - x) - (x^2 + 2x))dx + \int_{1}^{2} ((x^2 + 2x) - (4 - x))dx \\ &= \frac{71}{3} \text{ br}^2 \end{aligned}$$

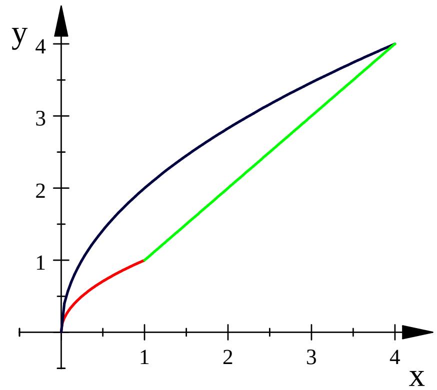
olarak bulunur.

Örnek 150 $y = 2x - x^2$ *ve* $y = x^2$ *parabolleri ile sınırlı bölgenin alanını bulunuz. Eğrilerin grafikleri aşağıda verilmiştir. Bu bölgenin alanı* x *eksenine* *dik doğru parçaları kullanılarak şu şekilde hesaplanır:*



$$
\begin{aligned}
A &= \int_0^1 (y_{üst} - y_{alt})dx \\
&= \int_0^1 (2x - x^2 - x^2)dx \\
&= \int_0^1 (2x - 2x^2)dx \\
&= \left(x^2 - \frac{2}{3}x^3 \right)\Big|_0^1 = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}\text{br}^2
\end{aligned}
$$

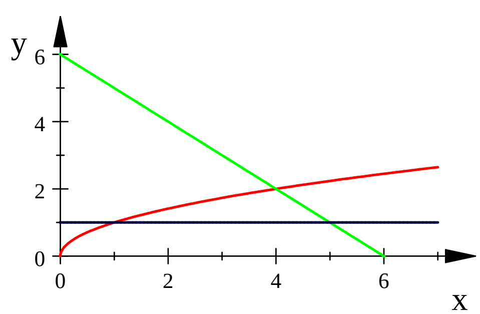
Örnek 151 *$y = \sqrt{x}, y = 2\sqrt{x}$ ve $y = x$ eğrilerinin üçü tarafından sınırlanan* *bölgenin alanını bulunuz.*



$[0,1]$ *aralığında* $y_{\ddot{u}st} = 2\sqrt{x}$ *ve* $y_{alt} = \sqrt{x}$ *olur.* $[1,4]$ *aralığında ise* $y_{\ddot{u}st} = 2\sqrt{x}$ *ve* $y_{alt} = x$ *olur. O zaman istenen bölgenin alanı*

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 (2\sqrt{x} - \sqrt{x})dx + \int_1^4 (2\sqrt{x} - x)dx \\ &= \frac{5}{2}\ br^2. \end{aligned}$$

Örnek 152 $y = \sqrt{x}, y = 6 - x$ *ve* $y = 1$ *eğrilerinin üçü tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.*



Bu üç eğrinin ikişer ikişer kesişme noktaları dikkate alınırsa bölgenin alanı

$$
\begin{aligned}
A &= \int_1^4 (\sqrt{x}-1)dx + \int_4^5 (6-x-1)dx \\
&= \left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - x\right)\Bigg|_1^4 + \left(5x - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_4^5 \\
&= \frac{13}{6}
\end{aligned}
$$

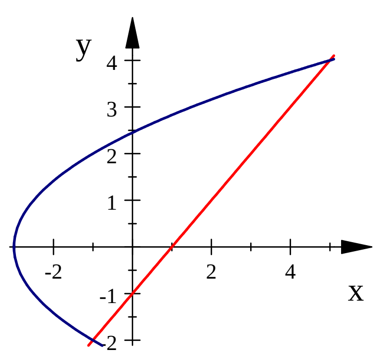
olarak bulunur.

Uyarı 153 *İki eğri tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulmada bazen x değişkenine göre integral almak kullanışlı olmayabilir. u ve v fonksiyonları $[c,d]$ aralığında sürekli olmak üzere, bu aralık üzerinde $x = u(y)$ ve $x = v(y)$ eğrileri tarafından sınırlanan bölgenin alanı*

$$A = \int_c^d |u(y) - v(y)|\, dy$$

ile hesaplanır. İntegral hesaplanırken sağdaki eğriden soldaki eğri çıkarılmalıdır. Bu durumda mutlak değere ihtiyaç kalmaz.

Örnek 154 *$y = x - 1$ doğrusu ile $y^2 = 2x + 6$ eğrisi tarafından sınırlanan bölgenin alanını hesaplayınız.*



Eğrilerin kesim noktaları $(-1,-2)$ ve $(5,4)$ noktalarıdır. O zaman istenen *bölgenin alanı (y değişkenine göre integral alarak)*

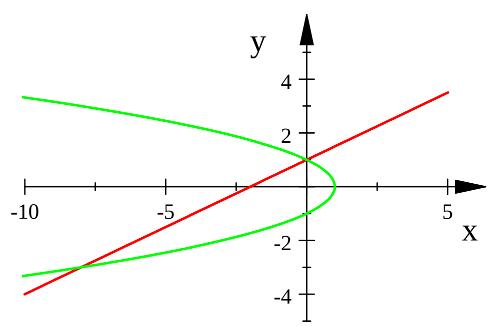
$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^{4} (x_{sağ} - x_{sol}) dy \\ &= \int_{-2}^{4} [y + 1 - (\frac{1}{2}y^2 - 3)] dy \\ &= 18 \ br^2 \end{aligned}$$

olur. Aynı bölgenin alanını x değişkenine göre integral alarak ta hesaplayabiliriz. Bu durumda $[-3, -1]$ aralığında $y_{üst} = \sqrt{2x+6}$ ve $y_{alt} = -\sqrt{2x+6}$ olur. $[-1, 5]$ aralığında ise $y_{üst} = \sqrt{2x+6}$ ve $y_{alt} = x - 1$ olacağından istene alan

$$\begin{aligned} A &= \int_{-3}^{-1} [\sqrt{2x+6} - (-\sqrt{2x+6})] dx + \int_{-1}^{5} [\sqrt{2x+6} - (x-1)] dx \\ &= 18 \ br^2 \end{aligned}$$

olur. Ancak burada x değişkenine göre integral alarak hesap yapmak daha zahmetlidir.

Örnek 155 *$y^2 = 1 - x$ ve $2y = x + 2$ eğrileri tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulunuz. Grafik aşağıda verilmiştir*



Şekle bakıldığında bölgenin y eksenine göre bölge olduğu integralin y eksenine dik doğru parçaları ile daha kolay hesaplanacağı anlaşılmaktadır. Buna göre,

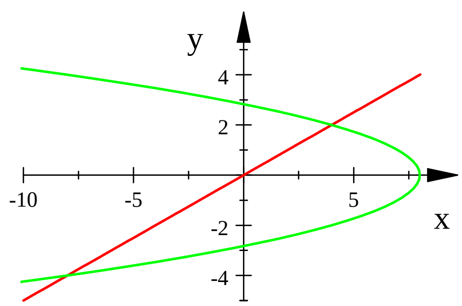
$$\begin{aligned} A &= \int_{-3}^{1} (x_{sağ} - x_{sol}) dy \\ &= \int_{-3}^{1} \left(1 - y^2 - (2y - 2)\right) dy \\ &= \frac{32}{3} \ br^2 \end{aligned}$$

Diğer yoldan

$$\begin{aligned} A &= \int_{-8}^{0} (y_{üst} - y_{alt})dx + \int_{0}^{1} (y_{üst} - y_{alt})dx \\ &= \int_{-8}^{0} (\frac{x+2}{2} - (-\sqrt{1-x})dy + \int_{0}^{1} (\sqrt{1-x} + \sqrt{1-x})dx \\ &= \frac{32}{3} \text{ br}^2 \end{aligned}$$

biçiminde elde edililir.

Örnek 156 *$x = 2y$ ve $x = 8 - y^2$ eğrileri tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.*



Grafiğe bakıldığında bölgenin y eksenine dik doğrularla hesabının daha kolay olacağı sonucuna varırız.

$$\begin{aligned} A &= \int_{-4}^{2} (x_{sağ} - x_{sol})dy \\ &= \int_{-4}^{2} (8 - y^2 - \frac{y}{2})dy = 27 \ br^2 \end{aligned}$$

3.1.3 Parametrik Eğriler Tarfından Sınırlana Bölgelerin Alanı

g ve h türevlenebilir iki fonksiyon olmak üzere

$$\begin{cases} x = g(t) \\ y = h(t) \end{cases}$$

parametrik denklemi ile verilen eğri ile $x = a$ ve $x = b$ doğruları tarafından sınırlanan bölgenin alanını hesaplamak için

$$A = \int_a^b |y|\, dx$$

formülünü t değişkenine bağlı yazmak gerekir. Bu durumda $dx = g'(t)dt$ olup t nin a ve b ye karşılık gelen değereleri sırası ile t_1 ve t_2 olmak üzere

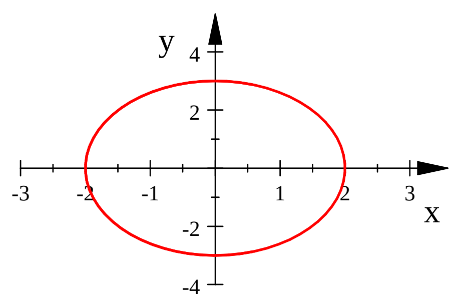
$$A = \int_a^b |y|\, dx = \int_{t_1}^{t_2} |h(t)|\, g'(t)dt$$

olur.

Örnek 157

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$$

parametrik denklemi ile verilen elipsin alanını bulunuz. Önce elipsin birinci bölgede bulunan dörtte bir alanını hesplayalım.



O zaman

$$\frac{A}{4} = \int_0^a |y|\, dx$$

olur. $x = 0$ *için* $t = \frac{\pi}{2}$ *ve* $x = a$ *için* $t = 0$ *olacağından*

$$\begin{aligned} \frac{A}{4} &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} |b\sin t|\, (-a\sin t)dt \\ &= ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt \\ &= \frac{ab}{2}\left(t - \frac{\sin 2t}{2}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\pi ab}{4}\ \ br^2 \end{aligned}$$

olur. Böylece $A = \pi ab$ br^2 bulunur.

Uyarı 158 *Yukarıdaki örnekte elips denklemi $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1$ olacağından birinci bölgede $y = b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$ olur. O zaman dörtte bir alan*

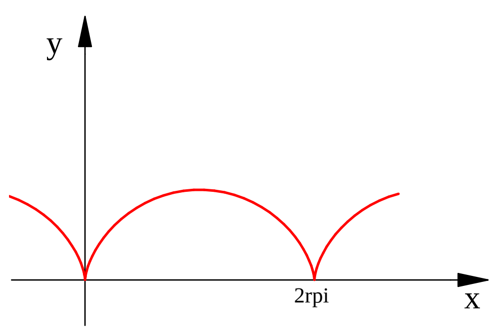
$$
\begin{aligned}
\frac{A}{4} &= \int_0^a b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}dx \\
&= \frac{b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}dx \\
&= \frac{b}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}(a\cos t)dt \\
&= ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2}dt \\
&= ab\left(\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{\pi ab}{4}\ br^2
\end{aligned}
$$

bulunur. Ancak her parametrik denklemi verilen eğri için burada belirtildiği gibi bir kartezyen denklem elde elmek kolay ve kullanışlı olmayabilir.

Örnek 159

$$
\begin{cases} x = r(t-\sin t) \\ y = r(1-\cos t) \end{cases}
$$

parametrik denklemi ile verilen sikloidin bir yayının altında kalan alanı bulunuz.



Sikloidin bir yayı $0 \leq t \leq 2\pi$ *değerleri ile bulunur. O zaman istenen alan*

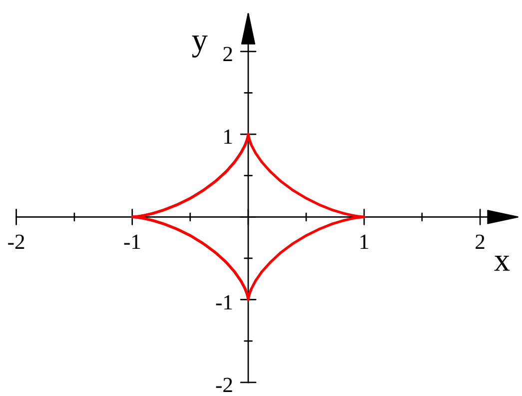
$$\begin{aligned}
A &= \int_0^{2\pi r} |y|\, dx = \int_0^{2\pi} r(1-\cos t) r(1-\cos t) dt \\
&= r^2 \int_0^{2\pi} (1-\cos t)^2 dt \\
&= r^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos t + \cos^2 t) dt \\
&= r^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos t + \frac{1}{2}(1+\cos 2t)) dt \\
&= r^2 \left\{ \frac{3}{2} t - 2\sin t + \frac{1}{4}\sin 2t \right\} \Big|_0^{2\pi} \\
&= 3\pi r^2 \ br^2
\end{aligned}$$

bulunur.

Örnek 160

$$\begin{cases} x = r\cos^3 t \\ y = r\sin^3 t \end{cases}$$

astroid eğrisi tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.



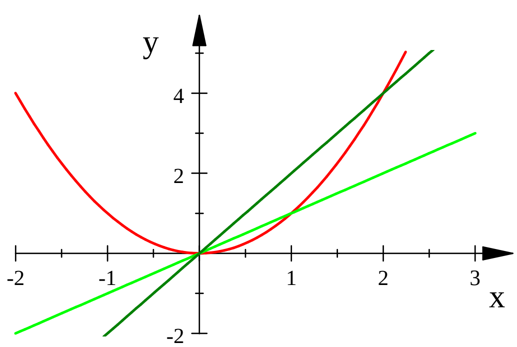
grafiğine dikkat edilirse bu bölge birbirinin kopyası olan 4 *parçadan oluşmaktadır. Bu nedenle birinci bölgedeki parçayı alıp* 4 *katını almak yeterli olacak-*

tır.

$$\begin{aligned} A &= 4\int_0^r |y|\, dx = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} |r\sin^3 t| 3r\cos^2 t \sin t dt \\ &= 12r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t \cos^2 t \sin t dt \\ &= \frac{\pi 3r^2}{8} br^2 \end{aligned}$$

3.1.4 Ek Sorular

Örnek 161 *$y = x$ ve $y = 2x$ doğruları ile $y = x^2$ parabolü arasında kalan bölgenin alanını bulunuz.*

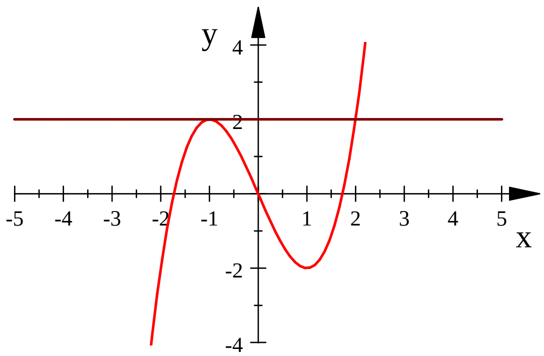


Bu şekle göre alan

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 (2x - x)dx + \int_1^2 (2x - x^2)dx \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{6} \\ &= \frac{7}{6} \text{ br}^2 \end{aligned}$$

olur.

Örnek 162 *$y = x^3 - 3x$ eğrisi ile bu eğriye $(-1, 2)$ noktasında teğet olan doğru arasında kalan bölgenin alanını bulunuz. $y = x^3 - 3x$ eğrisine noktasında teğet olan doğrunun denklemi $y = 2$ dir. Buna göre grafik aşağıdaki* *şekilde olur.*

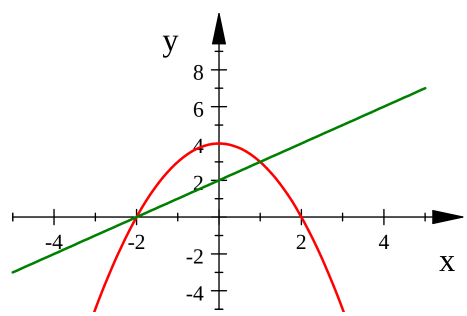


Bu eğriler arasında kalan alan ise

$$A = \int_{-1}^{2} (2 - (x^3 - 3x))dx = \frac{27}{4} \ br^2$$

olur.

Örnek 163 *$y = x + 2$ ve $y = 0$ doğruları ile $y = 4 - x^2$ eğrisi arasında kalan bölgenin alanını bulunuz. Bu eğrilerin kesişme noktaları $x = -2$ ve $x = 1$ noktalarıdır.*

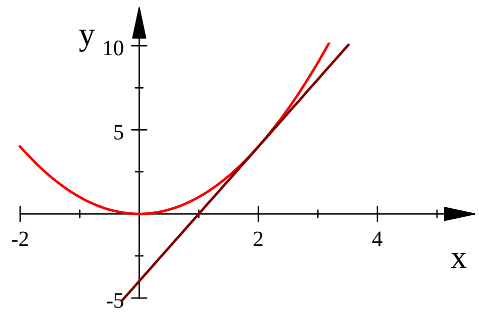


Buna göre alan

$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^{1} (x+2)dx + \int_{1}^{2} (4 - x^2)dx \\ &= \frac{9}{2} + \frac{5}{3} \\ &= \frac{37}{6} \ br^2 \end{aligned}$$

olur.

Örnek 164 *$y = x^2$ eğrisi ile bu eğriye $(2,4)$ noktasında teğet olan doğru ve x-ekseni arasında kalan bölgenin alanını bulunuz.*

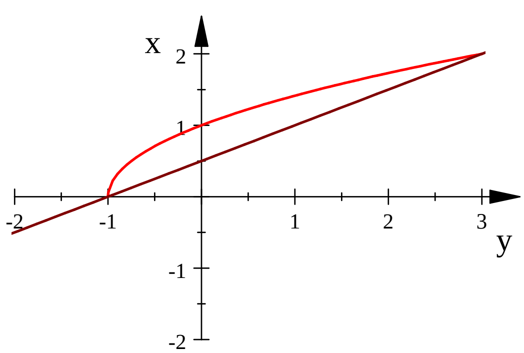


Önce teğet doğrusunun denklemini bulalım. $y' = 2x$ olup teğet doğrusunun eğimi $m_T = 4$ olur. Böylece teğetin denklemi $y = 4x - 4$ olur. O zaman istenen alan

$$\begin{aligned} A &= \int_0^4 \left(\frac{y+4}{4} - \sqrt{y} \right) dy \\ &= \frac{2}{3}\ br^2 \end{aligned}$$

olur.

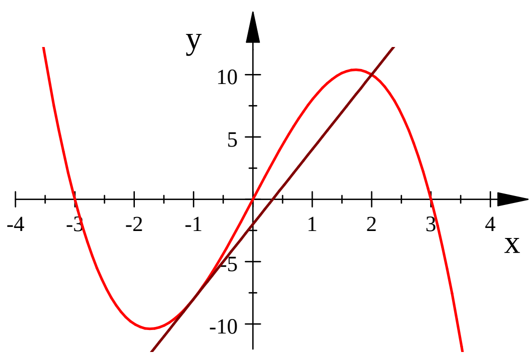
Örnek 165 *$2y = x + 1$ doğrusu ile $x = y^2 - 1$ eğrisi arasında kalan bölgenin alanını bulunuz.*



grafikten bölgenin alanının x-eksenine dik doğru parçaları yoluyla hesaplanmasının kolay olacağı görülmektedir. Buna göre

$$A = \int_{-1}^{3} (\sqrt{x+1} - \frac{x+1}{2})dx = \frac{4}{3}\ br^2$$

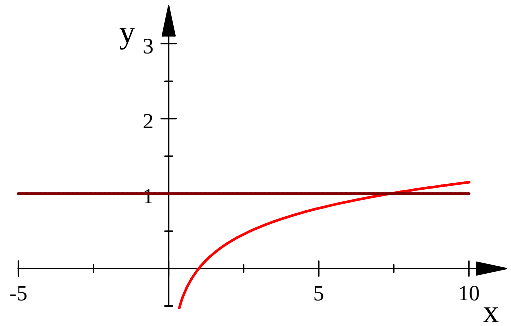
Örnek 166 *$y = 9x - x^3$ eğrisi ile bu eğriye $(-1, -8)$ noktasında teğet olan doğru arasında kalan bölgenin alanını bulunuz. Önce bu bölgenin grafiğini çizelim.*



bu grafik gereği bölge x-eksenine dik doğru parçalarıyla hesaplanırsa kolay olacaktır.

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^{2} ((9x - x^3) - (6x - 2))dx \\ &= \int_{-1}^{2} (-x^3 + 3x + 2)dx \\ &= \left(-\frac{x^4}{4} + \frac{3}{2}x^2 + 2x\right)\Big|_{-1}^{2} \\ &= \frac{27}{4}\ br^2 \end{aligned}$$

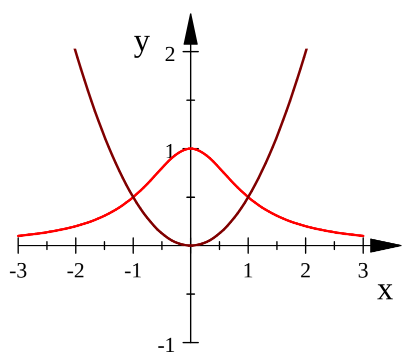
Örnek 167 $y = \dfrac{\ln x}{2}$ *eğrisi ile $x = 0, y = 0$ ve $y = 1$ doğruları arasında* *kalan bölgenin alanını hesaplayınız.*



sözkonusu bölge y eksenine göre bölgedir. Bu nedenle alanı aşağıdaki gibi yazarız.

$$
\begin{aligned}
A &= \int_0^1 (e^{2y} - 0)dy \\
&= \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2} \; br^2
\end{aligned}
$$

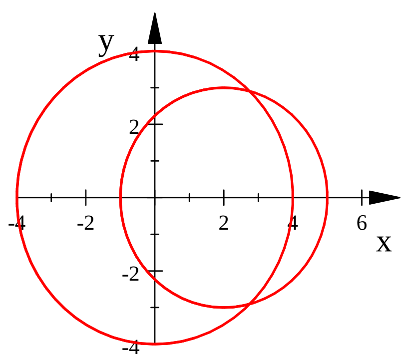
Örnek 168 *$y = \dfrac{x^2}{2}$ ve $y = \dfrac{1}{1+x^2}$ eğrileri arasında kalan bölgenin alanını bulunuz.*



bu eğrilerin kesim noktası $x = -1, x = 1$ noktalarıdır. Bölge ise x eksenine *göre bölgedir. Buna göre alan ise*

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^{1} \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{x^2}{2}\right) dx \\ &= \int_{-1}^{1} \frac{dx}{1+x^2} - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x^2 dx \\ &= \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{3}\ br^2 \end{aligned}$$

Örnek 169 *Hilal şeklindeki bölgelerin alanını bulunuz. Büyük çember* $x^2 + y^2 = 16$*, küçük çember* $(x-2)^2 + y^2 = 9$ *denklemleri ile verilmektedir.*



Grafikte verilen bölge dikkate alınırsa hilalin alt ve üst parçaları simetriktir. Buna göre sadece üstteki parçayı hesaplayıp 2 katını almak yeterlidir. Ayrıca integral bölgesi sol tarafta 4 yarıçaplı çemberden başlayıp iç çembere gelene kadar büyük çemberden ox ekseni çıkarılmasıyla ve daha sonra ise büyük çemberden içteki çemberin çıkarılmasıyla elde edilir.

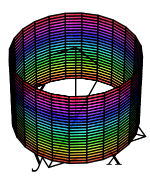
$$\begin{aligned} A &= 2(\textit{Büyük çember- x ekseni+Büyük çember-küçük çember}) \\ &= 2\left(\int_{-4}^{-1} \sqrt{16-x^2} - 0\right)dx + \int_{-1}^{\frac{11}{4}} \left(\sqrt{16-x^2} - \sqrt{9-(x-2)^2}\right)dx \end{aligned}$$

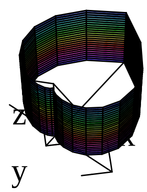
olur.

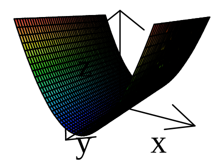
3.2 Hacim Hesabı

Bu kesimde belirli integral yardımıyla katı cisimlerin hacmini hesaplamak için kullanılan yöntemlereden üçü üzerinde duracağız. Bir cismin hacmini bulmaya çalıştığımız zaman karşılaştığımız problem, alan hesaplarken karşılaştığımız problemin aynısıdır.

İlk olarak Silindir denilen cismi düşünerek başlayalım. Genel olarak Silindir, bir düzlemsel eğrinin sınırladığı bölgenin kendisine dik bir doğru veya eksen boyunca hareket ettirilerek elde edilen bir katı cisimdir. Silindirlerin bu eksene dik olan tüm arakesitleri büyüklük ve şekil olarak aynıdır.





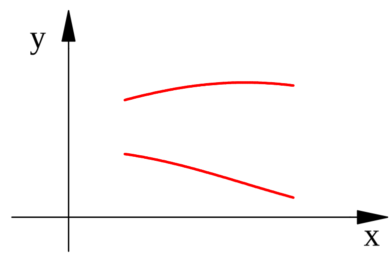


Kapalı bir eğri tarafından sınırlanan düzlemsel bölgenin alanı A br^2 olsun. Bu bölge kendisine dik bir doğru boyunca h birim hareket ettirildiğinde bir silindir elde edilir. O zaman bu silindirin hacmi $V = Ah$ br^3 olarak tanımlanır. Yani böyle bir silindirin hacmi taban alanı ile yüksekliğin çarpımıdır. Özel olarak taban, yarıçapı r olan bir daire ise silindirin hacmi $V = \pi r^2 h$ br^3 olur. Taban, kenar uzunlukları a ve b olan bir dikdörtgen ise hacim $V = abh$ br^3 olur.

3.2.1 Kesit Yöntemi

Silindir olmayan bir S cismin hacmini bulmak için dilimleme veya kesit yöntemi denilen tekniği kullanırız. Önce S yi parçalara ayırır ve her parçanın hacmini yaklaşık olarak veren bir silindir alırız. Bütün silindirlerin hacimleri toplamı S nin hacminin yaklaşık değerini verir. Parçaların sayısının gittikçe arttığı bir limit alma işlemi ile S nin kesin hacmini buluruz.

S cismi x-ekseni boyunca uzansın ve sol ve sağ uçlarına a ve b diyelim.



S silindir olmadığından x-eksenine dik kesitlerin alanı noktadan noktaya değişebilir. $[a, b]$ aralığını

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

özelliğine uygun noktalar ile n tane alt aralığa bölelim. Her bir alt aralığın genişliği $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ dir. Bu noktalardan geçen ve x-ekesnine dik düzlemler seçelim. Bunlar S cismini n tane dilime ayırır. Bu dilimlere $S_1, S_2, \cdots S_n$ diyelim ve tipik bir S_k dilimini göz önüne alalım. Genelde bu dilim silindir olmayabilir. Fakat dilim ince seçilirse S_k bir silindire benzer. Sonuçta k yıncı alt aralıkta rastgele seçilen x'_k noktasındaki kesit alanı $A(x'_k)$ olmak üzere S_k diliminin hacmi $V_k \cong A(x'_k)\Delta x_k$ olur. Böylece S cisminin hacmi

$$\begin{aligned} V &= V_1 + V_2 + \cdots V_n \\ &= \sum_{k=1}^{n} V_k \\ &\cong \sum_{k=1}^{n} A(x'_k)\Delta x_k \end{aligned}$$

olur. Dilimlerin sayısını $maks\Delta x_k \to 0$ olacak şekilde artırırsak

$$V = \lim_{maks\Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} A(x'_k)\Delta x_k$$

olur ki bu eşitliğin sağ tarafı bir belirli integraldir. O zaman

$$V = \int_a^b A(x)dx$$

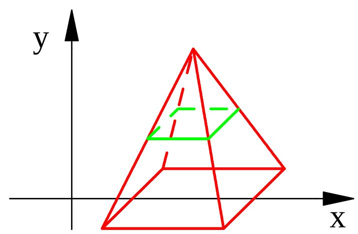
olur. Burada $A(x)$, S cisminin $[a, b]$ aralığındaki x noktasından x-eksenine dik düzlemle elde edilen kesitinin alanıdır.

Uyarı 170 *Eğer S cismi y-ekseninde c ve d noktaları arasına yerleştirilmiş ise benzer düşüncelerle hacmi*

$$V = \int_c^d A(y)dy$$

olur.

Örnek 171 *Yüksekliği h ve tabanının bir kenar uzunluğu a olan kare tabanlı dik piramidin hacmini bulunuz.*



$[0,h]$ aralığında bir y noktasından alınan kesitin de bir kare olacağı açıktır. bu karenin bir kenarı s birim ise

$$\frac{s}{a} = \frac{h-y}{h}$$

veya $s = \frac{a}{h}(h-y)$ dir. O zaman

$$A(y) = s^2 = \frac{a^2}{h^2}(h-y)^2$$

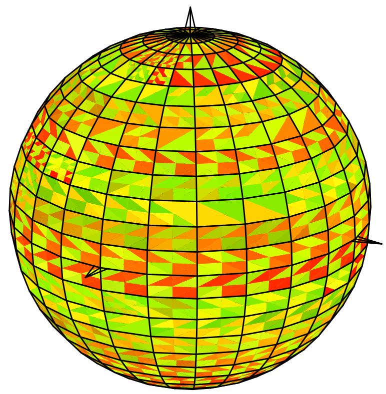
olur. Böylece piramidin hacmi

$$\begin{aligned} V &= \int_0^h A(y)dy = \int_0^h \frac{a^2}{h^2}(h-y)^2 dy \\ &= \frac{a^2}{h^2}\left(-\frac{1}{3}(h-y)^3\right)\Bigg|_0^h = \frac{1}{3}a^2 h \ br^3 \end{aligned}$$

bulunur.

Örnek 172 *Tabanı, bir kenar uzunluğu a olan eşkenar üçgen ve yüksekliği h olan piramidin hacmini bulunuz.*

Örnek 173 *a yarıçaplı bir kürenin hacim formülünü elde ediniz. Küreyi, merkezi orijinde olacak biçimde yerleştirelim ve orijinden x birim uzaklıkta x-eksenine dik bir düzlemle kesit alalım.*



Oluşan kesitin bir daire olacağı açıktır. Üstelik bu dairenin yarıçapı r ise $x^2 + r^2 = a^2$ olacağından $r = \sqrt{a^2 - x^2}$ olur. Böylece kesitin alanı

$$A(x) = \pi r^2 = \pi(a^2 - x^2)$$

olur. Bu kesiti $-a$ dan a ya kadar integrallersek kürenin hacmini elde ederiz. O zaman

$$\begin{aligned} V &= \int_{-a}^{a} A(x)dx \\ &= \int_{-a}^{a} \pi(a^2 - x^2)dx \\ &= 2\pi \int_{0}^{a} (a^2 - x^2)dx \\ &= 2\pi \left(a^2 x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^a = \frac{4\pi a^3}{3} \ br^3 \end{aligned}$$

bulunur.

3.2.2 Disk Yöntemi

Bu yöntem dönel cisimlerin hacimlerini hesaplamada kullanılır ve yukarıda bahsedilen kesit yöntemine dayanmaktadır. Düzlemsel bir bölgenin düzlem içindeki bir eksen etrafında döndürülmesi ile elde edilen katı cisme dönel cisim denir. $y = f(x)$ eğrisi $x = a$ ve $x = b$ doğruları ve x-ekseni tarafından sınırlanan bölgenin x-eksenietrafında döndürülmesi ile oluşan dönel cismin hacmini bulalım. $[a, b]$ aralığındaki herhangi bir noktadan alınan kesit daima bir daire olur. Kesitin alındığı noktanın apsisi x ise kesitin alanı

$$A(x) = \pi(\text{yarıçap})^2 = \pi\left[f(x)\right]^2$$

olacağından cismin hacmi

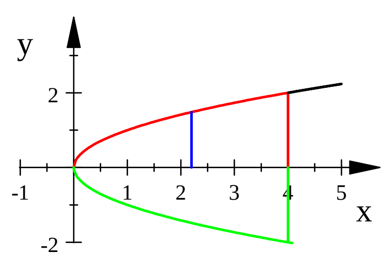
$$V = \int_a^b A(x)dx = \pi \int_a^b \left[f(x)\right]^2 dx$$

olarak bulunur. Benzer şekilde $x = g(y)$ eğrisi, $y = c$ ve $y = d$ doğruları ile y-ekseni tarafından sınırlanan bölgenin y-ekseni etrafında döndürülmesi ile oluşan dönel cismin hacmi

$$V = \pi \int_c^d \left[g(y)\right]^2 dy$$

olur.

Örnek 174 *$y = \sqrt{x}$, $0 \leq x \leq 4$ eğrisi ile x-ekseni arasında kalan bölge x-ekseni etrafında döndürülüyor. Oluşan dönel cismin hacmini bulunuz.*



$[0, 4]$ *aralığında herhangi bir x noktasından alınan kesitin alanı*

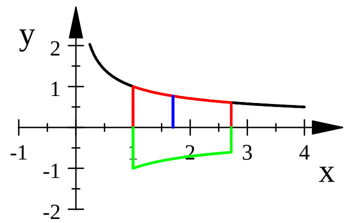
$$A(x) = \pi(\textit{yarıçap})^2 = \pi\left[f(x)\right]^2 = \pi x$$

olacağından cismin hacmi

$$V = \int_0^4 A(x)dx = \pi \int_0^4 x dx = 8\pi \ br^3$$

olur.

Örnek 175 *$y = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $1 \leq x \leq e$ eğrisi ile x-ekseni arasında kalan bölge x-ekseni etrafında döndürülüyor. Oluşan dönel cismin hacmini bulunuz.*



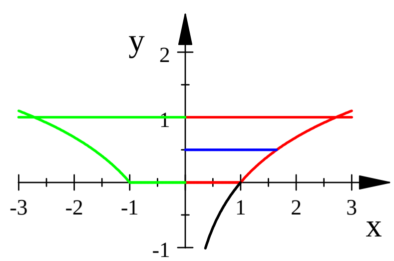
$[1, e]$ aralığında herhangi bir x noktasından alınan kesitin alanı

$$A(x) = \pi(\text{yarıçap})^2 = \pi\left[f(x)\right]^2 = \frac{\pi}{x}$$

olacağından cismin hacmi

$$V = \int_1^e A(x)dx = \pi\int_1^e \frac{dx}{x} = \pi \ br^3$$

Örnek 176 *$y = \ln x$ eğrisi x-ekseni, y-ekseni ve $y = 1$ doğusu arasında kalan bölge y-ekseni etrafında döndürülüyor. Oluşan dönel cismin hacmini bulunuz.*



y ekseni üzerinde bulunan $[0, 1]$ aralığında herhangi bir y noktasından alınan kesitin alanı

$$A(y) = \pi(\text{yarıçap})^2 = \pi\left[e^y\right]^2 = \pi e^{2y}$$

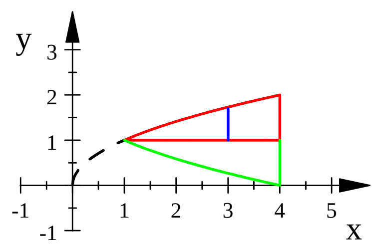
olacağından cismin hacmi

$$V = \int_0^1 A(y)dy = \pi\int_0^1 e^{2y}dy = \frac{\pi}{2}(e^2 - 1) \ br^3$$

olur.

Uyarı 177 *Yukarıda verilen örneklerde dönel cisim x-ekseni veya y-ekseni etrafında döndürülen bir bölge ile oluşmaktadır. Bununla birlikte herhangi bir doğru etrafında döndürülen bir bölge ile de dönel cisim elde edilebilir. Bu durumda dairesel kesitin yarıçapına ve dolayısıyla alanına dikkat edilmesi gerekmektedir.*

Örnek 178 *$y = \sqrt{x}$ eğrisi ile $y = 1$ ve $x = 4$ doğruları arasında kalan bölgenin $y = 1$ doğrusu etrafında döndürülmesi ile oluşan dönel cismin hacmini bulunuz.*



$[1, 4]$ *aralığındaki x noktasından alınana dairesel dik kesitin yarıçapı $\sqrt{x} - 1$ olacağından kesitin alanı*

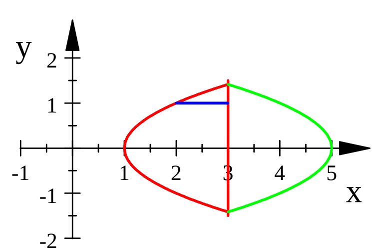
$$A(x) = \pi(\textit{yarıçap})^2 = \pi\left[\sqrt{x} - 1\right]^2$$

olur. O zaman dönel cismin hacmi

$$V = \int_1^4 A(x)dx = \pi \int_1^4 \left[\sqrt{x} - 1\right]^2 dx = \frac{7}{6}\pi \;\; br^3$$

olur.

Örnek 179 *$x = y^2 + 1$ parabolü ile $x = 3$ doğrusu arasında kalan bölgenin $x = 3$ doğrusu etrafında döndürülmesi ile oluşan dönel cismin hacmini bulunuz.*



$x = 3$ *doğrusuna dik olarak alaınana dairesel kesitin yarıçapı* $3 - (y^2 + 1) = 2 - y^2$ *olup kesitin alanı*

$$A(y) = \pi(yarıçap)^2 = \pi \left[2 - y^2\right]^2$$

olur. O zaman cismin hacmi

$$V = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} A(y)dy = \pi \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left[2 - y^2\right]^2 dy = \frac{64}{15}\sqrt{2}\pi \ br^3$$

bulunur.

$[a, b]$ aralığında $0 \leq g(x) \leq f(x)$ olsun. $y = f(x)$, $y = g(x)$ eğrileri ile $x = a$ ve $x = b$ doğruları tarafından sınırlanan bölgenin x-ekseni etrafında döndürülmesi ile oluşan dönel cismi düşünelim. Böyle bir cisim için x-ekesnine dik kesitler halkasal bölge (pul) olur. O zaman kesitin alanı

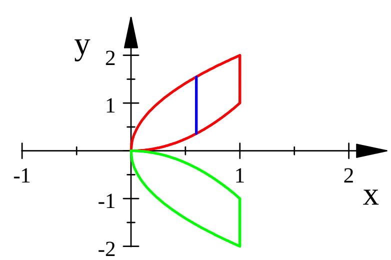
$$\begin{aligned} A(x) &= \pi\left[f(x)\right]^2 - \pi\left[g(x)\right]^2 \\ &= \pi\left[f^2(x) - g^2(x)\right] \end{aligned}$$

olacağından cismin hacmi

$$V = \int_a^b A(x)dx = \pi \int_a^b \left[f^2(x) - g^2(x)\right] dx$$

olur. (Benzer düşünce y-ekseni etrafında döndürülen bölge içinde verilebilir.)

Örnek 180 $y = 2\sqrt{x}$, $y = x^2$ *eğrilerinin* $[0, 1]$ *aralığında kalan parçaları arasında kalan bölgenin* x*-ekseni etrafında döndürülmesi ile oluşan dönel cismin hacmini bulunuz.*



$[0,1]$ aralığında herhangi bir x noktasından alınana kesit bir halkasal bölge olup alanı

$$A(x) = \pi\left[f^2(x) - g^2(x)\right] = \pi[4x - x^4]$$

olacağından cismin hacmi

$$V = \int_0^1 A(x)dx = \pi\int_0^1 [4x - x^4]dx = \frac{9\pi}{5}\ br^3$$

olur.

Örnek 181 *$0 < a < b$ olsun. Merkezi $(0,b)$ de bulunan a yarıçaplı bir çember tarafından sınırlanan düzlemsel bölgenin x-ekseni etrafında döndürülmesi ile oluşan dönel cismin hacmini bulunuz. Çemberin denklemi*

$$x^2 + (y-b)^2 = a^2$$

dir. Buradan

$$y = b \pm \sqrt{a^2 - x^2}$$

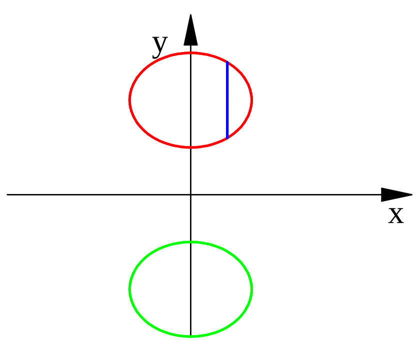
elde edilir.O zaman

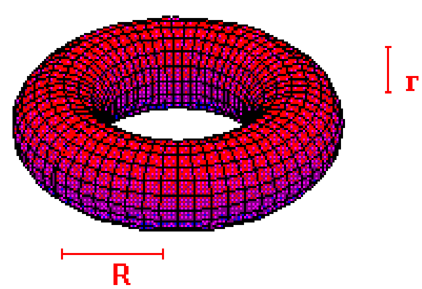
$$f(x) = b + \sqrt{a^2 - x^2}$$

ve

$$g(x) = b - \sqrt{a^2 - x^2}$$

denirse x-ekseni üzerinde $[-a,a]$ aralığında alınan herhangi bir x noktasındaki kesitin alanı





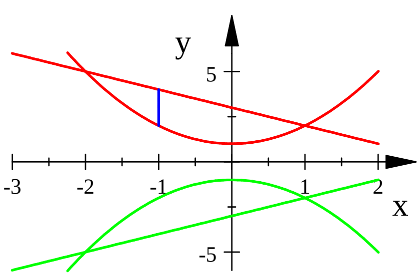
$$\begin{aligned} A(x) &= \pi\left[f^2(x) - g^2(x)\right] \\ &= \pi\left[\left(b + \sqrt{a^2 - x^2}\right)^2 - \left(b - \sqrt{a^2 - x^2}\right)^2\right] \\ &= 4\pi b\sqrt{a^2 - x^2} \end{aligned}$$

olduğundan cismin hacmi

$$
\begin{aligned}
V &= \int_{-a}^{a} A(x)dx \\
&= 4\pi b \int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}dx \\
&= 4\pi b \frac{\pi a^2}{2} \\
&= 2\pi^2 a^2 b \ br^3
\end{aligned}
$$

olur.

Örnek 182 *$y = x^2+1$ eğrisi ve $y = 3-x$ doğrusu ile sınırlı bölgenin x-ekseni etrafında döndürülmesi ile oluşan dönel cismin hacmini bulunuz.*



Eğrilerin kesim noktalarının apsisleri -2 ve 1 olup $[-2, 1]$ aralğında alınan bir x noktasındaki kesitin alanı

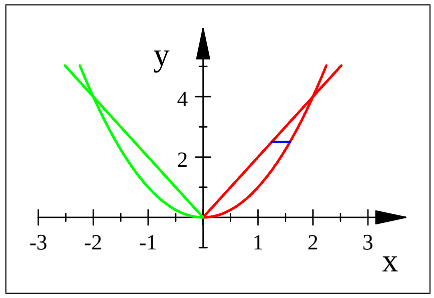
$$
\begin{aligned}
A(x) &= \pi \left[f^2(x) - g^2(x)\right] \\
&= \pi \left[(3-x)^2 - \left(x^2+1\right)^2\right]
\end{aligned}
$$

olduğundan cismin hacmi

$$
\begin{aligned}
V &= \int_{-2}^{1} A(x)dx \\
&= \pi \int_{-2}^{1} \left[(3-x)^2 - \left(x^2+1\right)^2\right] dx \\
&= \frac{117\pi}{5} \ br^3
\end{aligned}
$$

olur.

Örnek 183 *$y = x^2$ eğrisi ve $y = 2x$ doğrusu ile sınırlı bölgenin y-ekseni etrafında döndürülmesi ile oluşan dönel cismin hacmini bulunuz.*



Eğrilerin kesim noktaları $x = 0$ ve $x = 2$ dir. Bunlara karşılık $y = 0$ ve $y = 4$ olur. O zaman y-ekseni üzerinde $[0, 4]$ aralığında alınan bir y noktasındaki kesitin alanı

$$\begin{aligned} A(y) &= \pi\left[u^2(y) - v^2(y)\right] \\ &= \pi\left[(\sqrt{y})^2 - \left(\frac{y}{2}\right)^2\right] \end{aligned}$$

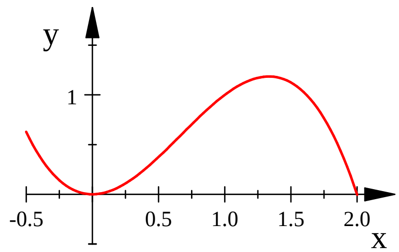
olduğundan cismin hacmi

$$\begin{aligned} V &= \int_0^4 A(y)dy \\ &= \pi\int_0^4 \left[(\sqrt{y})^2 - \left(\frac{y}{2}\right)^2\right] dy \\ &= \frac{8\pi}{3}\ br^3 \end{aligned}$$

olur.

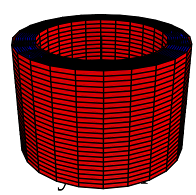
3.2.3 Silindirik Kabuk Yöntemi

Bazı hacim problemlerini, şimdiye kadar kullanılan kesit ve disk yöntemleri ile hesaplamak çok zordur. Örneğin, $y = 2x^2 - x^3$ eğrisi ile x-ekseni arasında kalan bölge y-ekseni etrafında döndürülerek oluşturulan katı cismi düşünelim.



Disk yöntemi ile belirtilen cismin hacmini hesaplamak için $y = 2x^2 - x^3$ eşitliğinden x i bulmak gerekir ki bu pek kolay değildir. ($y' = 4x - 3x^2 = 0$ dan $x = 0$ veya $x = \frac{4}{3}$ olur. Bu durumda $y(\frac{4}{3}) = \frac{32}{27}$ dir. Böylece hacim disk yöntemine göre $V = \pi \int_0^{\frac{32}{27}} (x_{sağ}^2 - x_{sol}^2) dy$ ile hesaplanmalıdır.)

Şimdi bu tip cisimlerin hacmini hesaplamada Silindirik Kabuk Yöntemi denilen bir yöntem geliştireceğiz. Silindirik Kabuk, bir dairesel silindirden yarıçapı daha küçün olan bir başka dairesel silindirin çıkarılması ile elde edilen katı cisimdir.



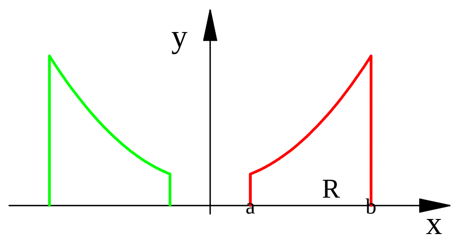
İç yarıçapı r_1 dış yarıçapı r_2 ve yükseklihi h olan bir silindirik kabuğun hacmi

$$\begin{aligned} V &= \pi \left(r_2^2 - r_1^2\right) h \\ &= \pi(r_2 + r_1)(r_2 - r_1)h \\ &= 2\pi \frac{r_2 + r_1}{2}(r_2 - r_1)h \end{aligned}$$

olur. Yani

$$V = 2\pi(\text{ortalama yarıçap})(\text{kalınlık})(\text{yükseklik})$$

olur. Şimdi, f fonksiyonu $[a, b]$ üzerinde sürekli ve bu aralıktaki her x için $f(x) \geq 0$ olsun. Üstten $y = f(x)$ eğrisi, alttan x-ekseni ve sol ve sağdan sırası ile $x = a$ ve $x = b$ doğruları ile sınırlı bölge R ve R nin y-ekseni etrafında döndürülmesi ile oluşan cisim S olsun.



$[a, b]$ aralığını

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

özelliğine uygun noktalar ile n tane alt aralığa bölelim. Her bir alt aralığın genişliği $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ dır. Bu noktalardan geçen ve x-ekesnine dik doğrular seçelim. Bunlar R bölgesini n tane şeride ayırır. Bu şeritlere $R_1, R_2, \cdots R_n$ diyelim ve tipik bir R_k şeridini göz önüne alalım. Bu şeridin y-ekseni etrafında döndürülmesi ile oluşan cisim S_k ise S cisminin hacmi S_k ların hacimleri toplamıdır. Yani

$$\begin{aligned} V &= V_1 + V_2 + \cdots V_n \\ &= \sum_{k=1}^{n} V_k \end{aligned}$$

olur. Genel olarak S_k bir silindirik kabul olmamasına rağmen (Çünkü R_k tam olarak dikdörtgen değildir) bir silindirik kabuğu andırır ve böylece şerit ne kadar ince seçilirse S_k bir Silindirik kabuğa o kadar benzer. Sonuçta k yıncı alt aralığın orta noktası $x'_k = \frac{x_k + x_{k-1}}{2}$ olmak üzere S_k nın hacmi

$$\begin{aligned} V_k &\cong 2\pi(\text{ortalama yarıçap})(\text{kalınlık})(\text{yükseklik}) \\ &= 2\pi \frac{x_k + x_{k-1}}{2}(x_k - x_{k-1}) f\left(\frac{x_k + x_{k-1}}{2}\right) \\ &= 2\pi x'_k f(x'_k) \Delta x_k \end{aligned}$$

olur. Böylece S cisminin hacmi

$$\begin{aligned} V &= \sum_{k=1}^{n} V_k \\ &\cong \sum_{k=1}^{n} 2\pi x'_k f(x'_k) \Delta x_k \end{aligned}$$

Şeritlerin sayısını $maks\Delta x_k \to 0$ olacak şekilde artırırsak

$$V = \lim_{maks\Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} 2\pi x_k' f(x_k')\Delta x_k$$

olur ki bu eşitliğin sağ tarafı bir belirli integraldir. O zaman

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_a^b x f(x) dx \\ &= 2\pi \int_a^b (\text{Kabuk Yarıçapı})(\text{Kabuk Yüksekliği}) dx \end{aligned}$$

olur. Burada ortalama yarıçapın negatif olmaması gerektiğine dikkat edelim. Eğer $x_k' = \frac{x_k + x_{k-1}}{2}$ negatif olursa hacim

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_a^b |x| f(x) dx \\ &= 2\pi \int_a^b (\text{Kabuk Yarıçapı})(\text{Kabuk Yüksekliği}) dx \end{aligned}$$

ile hesaplanmalıdır. Şimdi daha önce bahsedilen cismin hacmini hesaplayalım.

Örnek 184 *$y = 2x^2 - x^3$ eğrisi ile x-ekseni arasında kalan bölge y-ekseni etrafında döndürülerek oluşturulan katı cismin hacmini bulalım.*

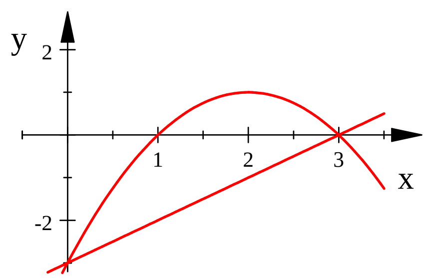
$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^2 x f(x) dx \\ &= 2\pi \int_0^2 x(2x^2 - x^3) dx \\ &= \frac{16}{5}\pi \ br^3. \end{aligned}$$

Uyarı 185 *f ve g fonksiyonları $[a, b]$ üzerinde sürekli ve bu aralıktaki her x için $f(x) \geq g(x)$ olsun. $y = f(x)$, $y = g(x)$ eğrileri ile $x = a$ ve $x = b$ doğruları tarafından sınırlanan bölgenin y-ekseni etrafında döndürülmesi ile oluşan cismin hacmi*

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_a^b x f(x) dx - 2\pi \int_a^b x g(x) dx \\ &= 2\pi \int_a^b x \left[f(x) - g(x) \right] dx \end{aligned}$$

ile hesaplanır.

Örnek 186 *$y=-x^2+4x-3$ eğrisi ile $y=x-3$ doğrusu arasında kalan bölgenin y-ekseni ettrafında döndürülmesi ile oluşan cismin hacmini hesaplayınız.*



$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^3 x\left[-x^2+4x-3-x+3\right]dx \\ &= 2\pi \int_0^3 (-x^3+3x^2)dx \\ &= \frac{27}{2}\pi \ br^3 \end{aligned}$$

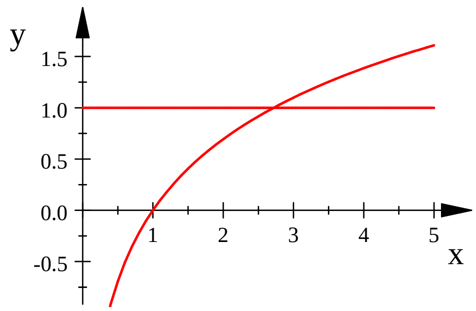
olur.

Uyarı 187 *Benzer şekilde sağdan $x=u(y)$ ve soldan $x=v(y)$ eğrileri ile $y=c$, $y=d$ doğruları tarafından sınırlanan bölgenin x-ekseni etrafında döndürülmesi ile oluşan cismin hacmi*

$$V=2\pi\int_c^d y\,[u(y)-v(y)]\,dy$$

ile hesaplanır.

Örnek 188 *$y=\ln x$ eğrisi x-ekseni, y-ekseni ve $y=1$ doğrusu tarafından sınırlanan bölge x-ekseni etrafında döndürülüyor. Oluşan cismin hacmini bulunuz.*



$$V = 2\pi \int_0^1 ye^y dy = 2\pi \ \ br^3$$

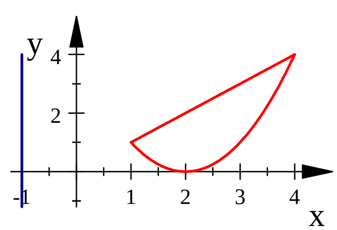
bulunur.

Uyarı 189 *$[a,b]$ aralığı üzerinde negatif olmayan sürekli f fonksiyonunun grafiği ile x-ekseni arasında kalan bölge $x = L$ $(L < a)$ doğrusu etrafında döndürülüyor. Oluşan cismin hacmi*

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_a^b (Kabuk\ Yarıçapı)(Kabuk\ Yüksekliği)dx \\ &= 2\pi \int_a^b (x-L)f(x)dx \end{aligned}$$

ile hesaplanır

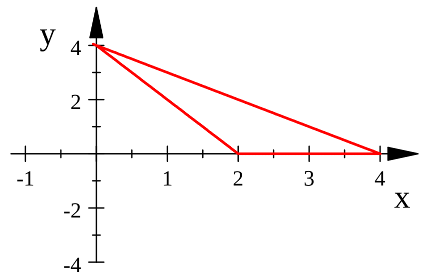
Örnek 190 *$f(x) = x$ ve $g(x) = (x-2)^2$ fonksiyonlarının grafikleri ile sınırlı bölgenin $x = -1$ doğrusu etrafında döndürülmesi ile oluşan cismin hacmini bulunuz.*



$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_1^4 (x-(-1))(x-(x-2)^2)dx \\ &= 2\pi \int_1^4 (x+1)(-x^2+5x-4)dx \\ &= \frac{63}{2}\pi \ \ br^3 \end{aligned}$$

bulunur.

Örnek 191 $y = 4 - 2x$, $y = 4 - x$ *ve* $y = 0$ *ile sınırlı bölgenin* x*-ekseni etrafında döndürülmesi ile oluşan cismin hacmini bulunuz.*



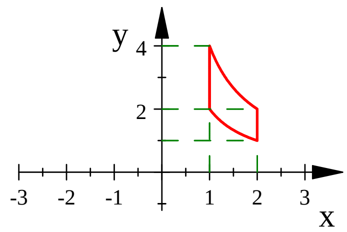
Disk metodu ile:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^2 [(4-x)^2 - (4-2x)^2] dx + \pi \int_2^4 (4-x)^2 \, dx \\ &= \pi \int_0^2 (8-3x)\, x dx + \pi \int_2^4 (16 - 8x + x^2) dx \\ &= 8\pi + \frac{8\pi}{3} \\ &= \frac{32\pi}{3} \; br^3. \end{aligned}$$

Kabuk metodu ile :

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^4 y \left(4 - y - \left(\frac{4-y}{2} \right) \right) dy \\ &= \pi \int_0^4 y\,(4-y)\, dy \\ &= \frac{32\pi}{3} \; br^3. \end{aligned}$$

Örnek 192 $xy = 2$, $xy = 4$, $x = 1$ *ve* $x = 2$ *ile sınırlı bölgenin* y*-ekseni etrafında döndürülmesi ile oluşan cismin hacmini bulunuz.*



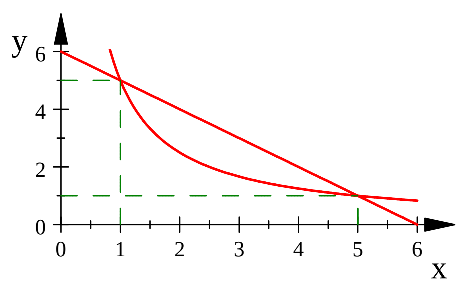
Kabuk metodu ile:

$$
\begin{aligned}
V &= 2\pi \int_1^2 x\left(\frac{4}{x}-\frac{2}{x}\right)dx \\
&= 2\pi \int_1^2 x\left(\frac{2}{x}\right)dx \\
&= 4\pi \ br^3.
\end{aligned}
$$

Disk Metodu ile:

$$
\begin{aligned}
V &= \pi \int_1^2 \left(2^2-\left(\frac{2}{y}\right)^2\right)dy+\pi\int_2^4\left(\left(\frac{4}{y}\right)^2-1^2\right)dy \\
&= 4\pi \ br^3.
\end{aligned}
$$

Örnek 193 *$xy = 5$ ve $x + y = 6$ ile sınırlı bölgenin y-ekseni etrafında döndürülmesi ile oluşan cismin hacmini bulunuz.*



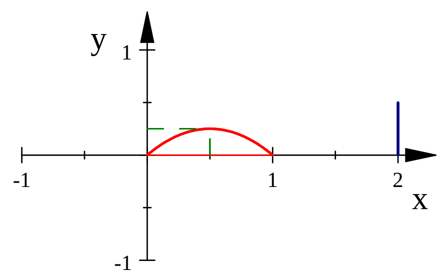
Kabuk metodu ile:

$$
\begin{aligned}
V &= 2\pi \int_1^5 x\left(6-x-\frac{5}{x}\right)dx \\
&= 2\pi \int_1^5 (6x-x^2-5)dx \\
&= \frac{64}{3}\pi \ br^3.
\end{aligned}
$$

Disk Metodu ile:

$$
\begin{aligned}
V &= \pi \int_1^5 \left((6-y)^2 - \left(\frac{5}{y}\right)^2 \right) dy \\
&= \frac{64}{3}\pi \ br^3.
\end{aligned}
$$

Örnek 194 *$f(x) = x - x^2$ fonksiyonunu grafiği ile x-ekseni arasında kalan bölgenin $x = 2$ doğrusu etrafında döndürülmesi ile oluşan cismin hacmini bulunuz.*



Kabuk metodu ile:

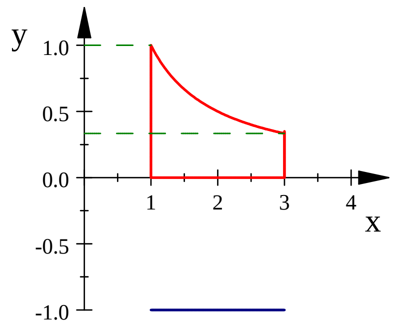
$$
\begin{aligned}
V &= 2\pi \int_0^1 (2-x)\left(x - x^2\right) dx \\
&= 2\pi \int_0^1 (x^3 - 3x^2 + 2x) dx \\
&= \frac{\pi}{2} \ br^3.
\end{aligned}
$$

Disk Metodu ile:

$$
\begin{aligned}
V &= \pi \int_0^{\frac{1}{4}} \left(2 - \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - y} \right)^2 dy - \pi \int_0^{\frac{1}{4}} \left(2 - \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - y} \right)^2 dy \\
&= \frac{27}{32}\pi - \frac{11}{32}\pi \\
&= \frac{\pi}{2} \ br^3.
\end{aligned}
$$

3.2.4 Ek Sorular

Örnek 195 *$xy = 1,\ y = 0, x = 1$ ve $x = 3$ ile sınırlı bölgenin $y = -1$ doğrusu etrafında döndürülmesi ile oluşan cismin hacmini bulunuz.*



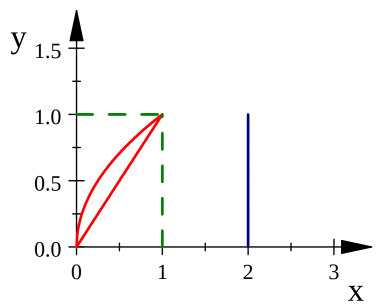
Kabuk metodu ile:

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^{\frac{1}{3}} (y-(-1))\,(3-1)\,dy + 2\pi \int_{\frac{1}{3}}^{1} (y-(-1))\left(\frac{1}{y}-1\right)dy \\ &= \frac{14}{9}\pi + 2\pi\left(\ln 3 - \frac{4}{9}\right) \\ &= \pi\left(2\ln 3 + \frac{2}{3}\right)\ br^3. \end{aligned}$$

Disk Metodu ile:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_1^3 \left(\frac{1}{x}-(-1)\right)^2 dx - \pi \int_1^3 (0-(-1))^2\,dx \\ &= \pi\left(2\ln 3 + \frac{8}{3}\right) - 2\pi \\ &= \pi\left(2\ln 3 + \frac{2}{3}\right)\ br^3. \end{aligned}$$

Örnek 196 *$y = x$ ve $y = \sqrt{x}$ ile sınırlı bölgenin $x = 2$ doğrusu etrafında döndürülmesi ile oluşan cismin hacmini bulunuz.*



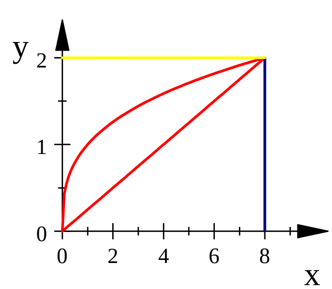
Kabuk metodu ile:

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^1 (2-x)\left(\sqrt{x}-x\right)dx \\ &= \frac{8}{15}\pi \;\; br^3. \end{aligned}$$

Disk Metodu ile:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^1 \left(2-y^2\right)^2 dy - \pi \int_0^1 (2-y)^2\, dy \\ &= \frac{43}{15}\pi - \frac{7}{3}\pi \\ &= \frac{8}{15}\pi \;\; br^3. \end{aligned}$$

Örnek 197 *Birinci bölgede $x = 4y$ ve $y = \sqrt[3]{x}$ ile sınırlı bölgenin $x = 8$ doğrusu etrafında döndürülmesi ile oluşan cismin hacmini bulunuz. Aynı bölgenin $y = 2$ doğrusu etrafında döndürülmesi ile oluşan cismin hacmini bulunuz.*



Kabuk metodu ile:

$$\begin{aligned} V_{x=8} &= 2\pi \int_0^8 (8-x)\left(\sqrt[3]{x}-\frac{x}{4}\right) dx \\ &= \frac{832}{21}\pi \ br^3. \end{aligned}$$

Disk Metodu ile:

$$\begin{aligned} V_{x=8} &= \pi \int_0^2 \left(8-y^3\right)^2 dy - \pi \int_0^2 (8-4y)^2 dy \\ &= \frac{576}{7}\pi - \frac{128}{3}\pi \\ &= \frac{832}{21}\pi \ br^3. \end{aligned}$$

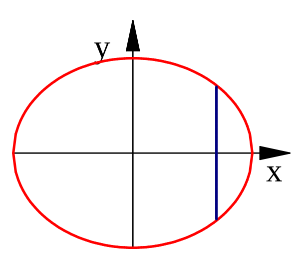
Kabuk metodu ile:

$$\begin{aligned} V_{y=2} &= 2\pi \int_0^2 (2-y)\left(4y-y^3\right) dy \\ &= \frac{112}{15}\pi \ br^3. \end{aligned}$$

Disk Metodu ile:

$$\begin{aligned} V_{y=2} &= \pi \int_0^8 \left(2-\frac{x}{4}\right)^2 dx - \pi \int_0^8 \left(2-\sqrt[3]{x}\right)^2 dx \\ &= \frac{32}{3}\pi - \frac{16}{5}\pi \\ &= \frac{112}{15}\pi \ br^3. \end{aligned}$$

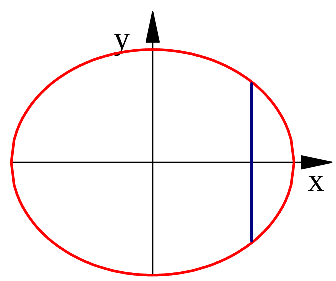
Örnek 198 *S cisminin tabanı, yarıçapı r olan bir dairedir. Tabana dik olan paralel kesitler, yüksekliği h olan ve farklı kenarı tabanda olan ikizkenar üçgenlerdir. S nin hacmini bulunuz.*



Kesit yöntemi ile

$$\begin{aligned} V &= \int_{-r}^{r} A(x)\,dx \\ &= \int_{-r}^{r} \frac{2h\sqrt{r^2-x^2}}{2} dx \\ &= \frac{\pi}{2} h r^2 \ br^3. \end{aligned}$$

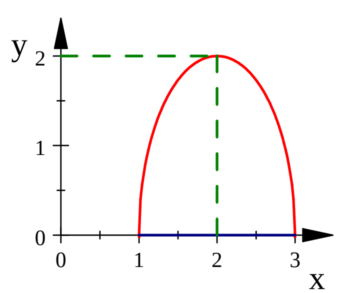
Örnek 199 *S cisminin tabanı yarıçapı r olan bir dairedir. Tabana dik olan paralel kesitler karedir. S nin hacmini bulunuz.*



Kesit yöntemi ile

$$\begin{aligned} V &= \int_{-r}^{r} A(x)\,dx \\ &= \int_{-r}^{r} \left(2\sqrt{r^2-x^2}\right)^2 dx \\ &= \frac{16}{3} r^3 \ br^3. \end{aligned}$$

Örnek 200 $(x-2)^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ *elipsinin üst yarısının x-ekseni etrafında döndürülmesi ile oluşan cismin hacmini bulunuz.*



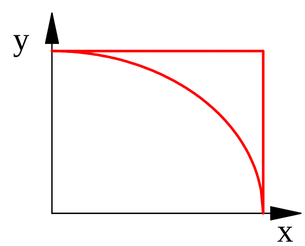
Kabuk metodu ile:

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^2 y \left(2 - \left(2 - \frac{\sqrt{4-y^2}}{2}\right)\right) dy + 2\pi \int_0^2 y \left(\left(2 + \frac{\sqrt{4-y^2}}{2}\right) - 2\right) dy \\ &= \frac{8}{3}\pi + \frac{8}{3}\pi \\ &= \frac{16}{3}\pi \ br^3. \end{aligned}$$

Disk Metodu ile:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_1^3 \left(\sqrt{4 - 4(x-2)^2}\right)^2 dx \\ &= \frac{16}{3}\pi \ br^3. \end{aligned}$$

Örnek 201 *$x^2+y^2=1$, $x=1$ ve $y=1$ ile sınırlı bölgenin x-ekseni etrafında döndürülmesi ile oluşan cismin hacmini bulunuz.*



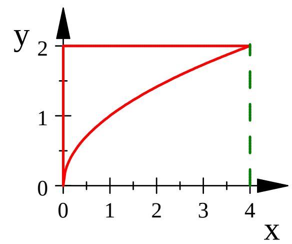
Kabuk metodu ile:

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^1 y \left(1 - \sqrt{1-y^2}\right) dy \\ &= \frac{\pi}{3} \ br^3. \end{aligned}$$

Disk Metodu ile:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^1 \left(1^2 - \left(\sqrt{1-x^2}\right)^2\right) dx \\ &= \frac{\pi}{3} \ br^3. \end{aligned}$$

Örnek 202 *$y = \sqrt{x}$, $y = 2$ ve $x = 0$ ile sınırlı bölgenin, (a) x-ekseni, (b) y-ekseni, (c) $y = 2$ doğrusu, (d) $x = 4$ doğrusu etrafında döndürülmesi ile oluşan cismin hacmini bulunuz.*



a-) Kabuk metodu ile:

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^2 y\left(y^2 - 0\right) dy \\ &= 8\pi \ br^3. \end{aligned}$$

Disk Metodu ile:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^4 \left(2^2 - \left(\sqrt{x}\right)^2\right) dx \\ &= 8\pi \ br^3. \end{aligned}$$

b-) Kabuk metodu ile:

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^4 x\left(2 - \sqrt{x}\right) dx \\ &= \frac{32}{5}\pi \ br^3. \end{aligned}$$

Disk Metodu ile:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^2 \left(y^2\right)^2 dy \\ &= \frac{32}{5}\pi \ br^3. \end{aligned}$$

c-) Kabuk metodu ile:

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^2 (2 - y)\left(y^2\right) dy \\ &= \frac{8}{3}\pi \ br^3. \end{aligned}$$

Disk Metodu ile:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^4 \left(2-\sqrt{x}\right)^2 dx \\ &= \frac{8}{3}\pi \ br^3. \end{aligned}$$

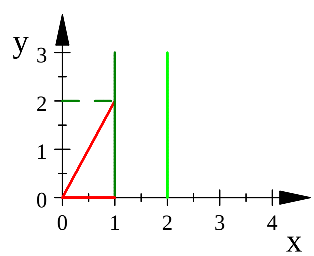
d-) Kabuk metodu ile:

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^4 (4-x)\left(2-\sqrt{x}\right) dx \\ &= \frac{224}{15}\pi \ br^3. \end{aligned}$$

Disk Metodu ile:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^2 \left((4-0)^2 - \left(4-y^2\right)^2\right) dy \\ &= \frac{224}{15}\pi \ br^3. \end{aligned}$$

Örnek 203 *$y=2x$, $y=0$ ve $x=1$ ile sınırlı bölgenin, (a) $x=1$ doğrusu, (b) $x=2$ doğrusu etrafında döndürülmesi ile oluşan cismin hacmini bulunuz.*



a-) Kabuk metodu ile:

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^1 (1-x)\,2x dx \\ &= \frac{2}{3}\pi \ br^3. \end{aligned}$$

Disk Metodu ile:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^2 \left(1-\frac{y}{2}\right)^2 dy \\ &= \frac{2}{3}\pi \ br^3. \end{aligned}$$

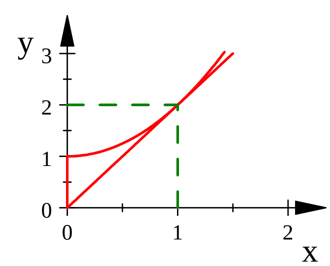
b-) Kabuk metodu ile:

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^1 (2-x)\, 2x dx \\ &= \frac{8}{3}\pi \ br^3. \end{aligned}$$

Disk Metodu ile:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^2 \left[\left(2-\frac{y}{2}\right)^2 - (2-1)^2\right] dy \\ &= \frac{8}{3}\pi \ br^3. \end{aligned}$$

Örnek 204 *$y = x^2 + 1$ eğrisi ile bu eğriye $x = 1$ apsisli noktasından çizilen teğet ve $x = 0$ doğrusu arasında kalan bölgenin (a) x-ekseni, (b) y-ekseni etrafında döndürülmesi ile oluşan cismin hacmini bulunuz.*



a-) Kabuk metodu ile:

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^1 y\left(\frac{y}{2}-0\right) dy + 2\pi \int_1^2 y\left(\frac{y}{2}-\sqrt{y-1}\right) dy \\ &= \frac{1}{3}\pi \ + \frac{1}{5}\pi \\ &= \frac{8}{15}\pi \ br^3. \end{aligned}$$

Disk Metodu ile:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^1 \left(\left(1+x^2\right)^2 - (2x)^2\right) dx \\ &= \frac{8}{15}\pi \ br^3. \end{aligned}$$

b-) Kabuk metodu ile:

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^1 x\left(1+x^2-2x\right)dx \\ &= \frac{1}{6}\pi \ br^3. \end{aligned}$$

Disk Metodu ile:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^1 \left(\frac{y}{2}\right)^2 dy + \pi \int_1^2 \left(\left(\frac{y}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{y-1}\right)^2\right) dy \\ &= \frac{1}{12}\pi \ + \frac{1}{12}\pi \\ &= \frac{1}{6}\pi \ br^3. \end{aligned}$$

Örnek 205 *Yarıçapı* 3 *cm olan bir dairesel dik silindirden iki düzlemle bir eğri takoz kesilmiştir. Bir düzlem silindirin eksenine diktir. İkinci düzlem birinci düzlemi silindirin merkezinde* $45°$ *lik açı ile kesmektedir. Takozun hacmini bulunuz. Aralığın keyfi bir* x *noktasındaki kesit dikdörtgen olur. Dikdörtgenin alanı*

$$\begin{aligned} A(x) &= (\textit{kısa kenar uz.})(\textit{uzun kenar uz.}) \\ &= (x)\left(2\sqrt{9-x^2}\right) \\ &= 2x\sqrt{9-x^2}. \end{aligned}$$

olduğundan istenen hacim kesit yöntemi ile

$$\begin{aligned} V &= \int_0^3 A(x)\,dx \\ &= \int_0^3 2x\sqrt{9-x^2}dx \\ &= 18 \ br^3 \end{aligned}$$

olarak bulunur.

3.3 Eğri Uzunluğu Hesabı

$y = f(x)$ eşitliği ile tanımlı sürekli türevlenebilen bir f fonksiyonu verilsin. Bu eğrinin a ve b apsisli noktaları arasında kalan parçasının uzunluğunu bulalım. Bu uzunluğu l ile gösterelim.

$[a, b]$ aralığını

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

özelliğine uygun noktalar ile n tane alt aralığa bölelim. $P_{k-1} = (x_{k-1}, f(x_{k-1}))$ ve $P_k = (x_k, f(x_k))$ noktaları arasındaki uzaklık l_k ise l uzunluğu yaklaşık olarak l_k sayılarının toplamıdır. Yani

$$l \cong \sum_{k=1}^{n} l_k$$

dır. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} l_k &= |P_k P_{k-1}| \\ &= \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (f(x_k) - f(x_{k-1}))^2} \\ &= \sqrt{1 + \left(\frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}\right)^2}(x_k - x_{k-1}) \\ &= \sqrt{1 + \left(\frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}\right)^2}\Delta x_k \end{aligned}$$

dır. f türevlenebilen bir fonksiyon olduğundan ortalama değer teoremi gereği

$$\frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} = f'(x'_k)$$

olacak şekilde bir $x'_k \in (x_{k-1}, x_k)$ noktası vardır. Böylece

$$l_k = \sqrt{1 + (f'(x'_k))^2}\Delta x_k$$

olup

$$\begin{aligned} l &\cong \sum_{k=1}^{n} l_k \\ &= \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + (f'(x'_k))^2}\Delta x_k \end{aligned}$$

bulunur. Parçalanmanın sayısını $maks\Delta x_k \to 0$ olacak şekilde artırırsak

$$l = \lim_{maks\Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + (f'(x'_k))^2}\Delta x_k$$

olur ki bu eşitliğin sağ tarafı bir belirli integraldir. O zaman

$$\begin{aligned} l &= \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}dx \\ &= \int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx \end{aligned}$$

bulunur.

Örnek 206 *a yarıçaplı çemberin uzunluğunu bulunuz. a yarıçaplı çemberin denklemi*

$$x^2+y^2=a^2$$

olup, buradan $y=\pm\sqrt{a^2-x^2}$ dir. Üst yarı çemberin denklemi $y=\sqrt{a^2-x^2}$ olup

$$y'=\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

ve böylece

$$1+(y')^2=\frac{a^2}{a^2-x^2}$$

olur. O zaman üst yarı çemberin yay uzunluğu

$$\begin{aligned} l_{\ddot{u}} &= \int_a^b \sqrt{1+(y')^2}dx \\ &= \int_{-a}^a \sqrt{\frac{a^2}{a^2-x^2}}dx \\ &= \int_{-a}^a \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}dx \\ &= a \arcsin \frac{x}{a}\bigg|_{-a}^{a} \\ &= a\left(\arcsin 1 - \arcsin(-1)\right) \\ &= a\left(\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)=\pi a \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Alt yarı çemberin uzunluğuda benzer şekilde $l_a=\pi a$ olarak elde edilir. Dolayısıyla a yarıçaplı çemberin çevre uzunluğu $l=2\pi a$ br olarak bulunur.

Örnek 207 *$y=\ln x-\frac{x^2}{8}$ eğrisinin $x=2$ ve $x=4$ apsisli noktaları arasın da kalan parçasının uzunluğunu hesaplayınız.*

$$y'=\frac{1}{x}-\frac{x}{4}\Rightarrow (y')^2=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{2}+\frac{x^2}{16}$$

olup

$$1+(y')^2=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{2}+\frac{x^2}{16}=\left(\frac{1}{x}+\frac{x}{4}\right)^2$$

olur. Buna göre

$$\begin{aligned} l &= \int_a^b \sqrt{1+(y')^2}dx \\ &= \int_2^4 \sqrt{\left(\frac{1}{x}+\frac{x}{4}\right)^2}dx \\ &= \int_2^4 \left(\frac{1}{x}+\frac{x}{4}\right)dx \\ &= \left(\ln x+\frac{x^2}{8}\right)\Big|_2^4 \\ &= 2\ln 2+2 \ br \end{aligned}$$

olarak bulunur.

Örnek 208 *$y=\frac{x^3}{12}+\frac{1}{x}$, $1\leq x\leq 4$ eğri parçasının uzunluğunu hesaplayınız.*

$$y'=\frac{x^2}{4}-\frac{1}{x^2}\Rightarrow (y')^2=\frac{x^4}{16}-\frac{1}{2}+\frac{1}{x^4}$$

olup

$$1+(y')^2=\frac{x^4}{16}+\frac{1}{2}+\frac{1}{x^4}=\left(\frac{x^2}{4}+\frac{1}{x^2}\right)^2$$

olur. O zaman

$$\begin{aligned} l &= \int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx \\ &= \int_1^4 \sqrt{\left(\frac{x^2}{4}+\frac{1}{x^2}\right)^2}dx \\ &= \int_2^4 \left(\frac{x^2}{4}+\frac{1}{x^2}\right)dx \\ &= \left(\frac{x^3}{12}-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_1^4 = 6 \ br \end{aligned}$$

bulunur.

Uyarı 209 *Eğer eğri parçasının denklemi $x = g(y)$, $c \leq y \leq d$ biçiminde verilmiş ise, uzunluğu*

$$\begin{aligned} l &= \int_c^d \sqrt{1+(g'(y))^2}dy \\ &= \int_c^d \sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}dy \end{aligned}$$

ile hesaplanır.

Örnek 210 *$y^2 = x$ parabolünün $(0,0)$ ile $(1,1)$ noktaları arasında kalan parçasının uzunluğunu bulunuz.*

$$x' = 2y \Rightarrow 1+(x')^2 = 1+4y^2$$

olduğundan

$$l = \int_c^d \sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}dy = \int_0^1 \sqrt{1+4y^2}dy$$

olur. Bu son integralde $2y = \tan t$ denirse $2dy = \sec^2 t dt$ olur. $y = 0 \Rightarrow t = 0$ ve $y = 1 \Rightarrow t = \arctan 2$ olur. O zaman

$$\begin{aligned} l &= \int_0^1 \sqrt{1+4y^2}dy \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\arctan 2} \sqrt{1+\tan^2 t}\sec^2 t dt \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\arctan 2} \sec t \sec^2 t dt \end{aligned}$$

olur. Bu son integralede kısmi integrasyon uygularsak ($u = \sec t$, $dv = \sec^2 t dt$, $du = \sec t \tan t dt$, $v = \tan t$)

$$\begin{aligned}
l &= \frac{1}{2}\int_0^{\arctan 2} \sec t \sec^2 t dt \\
&= \frac{1}{2}\sec t \tan t\Big|_0^{\arctan 2} - \frac{1}{2}\int_0^{\arctan 2} \sec t \tan^2 t dt \\
&= \sqrt{5} - \frac{1}{2}\int_0^{\arctan 2} \sec^3 t dt + \frac{1}{2}\int_0^{\arctan 2} \sec t dt \\
&= \sqrt{5} - l + \frac{1}{2}\ln|\sec t + \tan t|\Big|_0^{\arctan 2} \\
&= \sqrt{5} - l + \frac{1}{2}\ln(2+\sqrt{5})
\end{aligned}$$

olur. O zaman

$$l = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{4}\ln(2+\sqrt{5}) \ br$$

olarak elde edilir.

Uyarı 211 *Uzunluğu bulunmak istenen eğrinin parametrik denklemi*

$$\begin{cases} x = u(t) \\ y = v(t) \end{cases}, \ t_1 \le t \le t_2$$

biçiminde ise

$$\begin{aligned}
l_k &= |P_k P_{k-1}| \\
&= \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (f(x_k) - f(x_{k-1}))^2} \\
&= \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2} \\
&= \sqrt{\left(\frac{\Delta x_k}{\Delta t_k}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y_k}{\Delta t_k}\right)^2}\Delta t_k
\end{aligned}$$

yazılabileceğinden

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

şeklinde hesaplanır.

Örnek 212

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

sikloid yayının uzunluğunu bulunuz.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{dx}{dt} = a(1 - \cos t) \\ \dot{y} &= \frac{dy}{dt} = a \sin t \end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2} &= \sqrt{a^2(1 - \cos t)^2 + (a \sin t)^2} \\ &= \sqrt{2} a \sqrt{1 - \cos t} \\ &= 2a \sin \frac{t}{2} \end{aligned}$$

olur. Buna göre

$$\begin{aligned} l &= \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt \\ &= \int_0^{2\pi} 2a \sin \frac{t}{2} dt \\ &= -4a \cos \frac{t}{2} \Big|_0^{2\pi} \\ &= 8a \ \ br \end{aligned}$$

olur.

Örnek 213

$$\begin{cases} x = a \cos^3 t \\ y = a \sin^3 t \end{cases}, 0 \leq t \leq 2\pi$$

astroid eğrisinin uzunluğunu bulunuz. Astroid eğrisinin $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ aralığındaki bir parçasının uzunluğunu bulup 4 ile çarparsak aradığımız çevre uzunluğunu buluruz. Buna göre

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{dx}{dt} = 3a \cos^2 t \, (-\sin t) \\ \dot{y} &= \frac{dy}{dt} = 3a \sin^2 t \cos t \end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}\sqrt{(\dot{x})^2+(\dot{y})} &= \sqrt{(3a\cos^2 t\,(-\sin t))^2+\left(3a\sin^2 t\cos t\right)^2}\\ &= 3a\cos t\sin t\end{aligned}$$

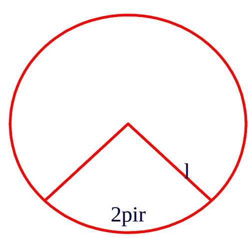
olur. Böylece

$$\begin{aligned} l &= \int_{t_1}^{t_2}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt\\ &= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3a\cos t\sin t dt\\ &= 6a\sin^2 t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\\ &= 6a\ \ br\end{aligned}$$

olarak bulunur.

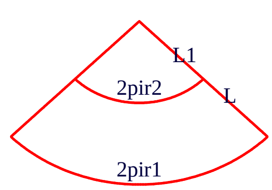
3.4 Yüzey Alanı Hesabı

Bu kesimde belirli integral yardımıyla dönel cisimlerin yüzey alanlarının hesaplanması üzerinde duracağız. Bunun için kesik konilerin yüzey alanından yararlanılacaktır. Taban yarıçapı r, ana doğru uzunluğu l olan bir koninin yanal yüzey alanı



$$S=\frac{2\pi r}{2\pi l}\pi l^2=\pi r l\ \text{br}^2$$

dir. Buna göre alt taban yarıçapı r_1, üst taban yarıçapı r_2 ve anadoğru uzunluğu L olan kesik koninin yüzey alanı



$$S = \pi r_1(L + L_1) - \pi r_2 L_1 \text{ br}^2$$

olur. Diğer taraftan

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{L_1 + L}{L_1} = 1 + \frac{L}{L_1}$$

den

$$L_1 = \frac{Lr_2}{r_1 - r_2}$$

olup

$$\begin{aligned}
S &= \pi r_1(L + \frac{Lr_2}{r_1 - r_2}) - \pi r_2 \frac{Lr_2}{r_1 - r_2} \\
&= \pi L \left[r_1 + \frac{r_1 r_2}{r_1 - r_2} - \frac{r_2^2}{r_1 - r_2} \right] \\
&= \pi L \left[\frac{r_1^2}{r_1 - r_2} - \frac{r_2^2}{r_1 - r_2} \right] \\
&= \pi(r_1 + r_2)L
\end{aligned}$$

bulunur.

Şimdi f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sürekli türevlenebilen pozitif bir bir fonksiyon olmak üzere $y = f(x)$ eğrisinin x-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cisim C ve yüzey alanını S olsun. $[a, b]$ aralığını

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

özelliğine uygun noktalar ile n tane alt aralığa bölelim ve $[x_{k-1}, x_k]$ aralığını göz önüne alalım. f nin bu aralığa karşılık gelen parçasının x-ekseni etrafında döndürülmesi ile oluşan yüzey bir kesik koniye benzerdir. Bu yüzeyin alanı S_k ise

$$S = \sum_{k=1}^{n} S_k$$

olur. Diğe taraftan

$$\begin{aligned}
S_k &\cong \pi(r_1 + r_2)L \\
&= \pi \left(f(x_k) + f(x_{k-1}) \right) \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + \left(f(x_k) - f(x_{k-1}) \right)^2} \\
&= \pi \left(f(x_k) + f(x_{k-1}) \right) \sqrt{1 + \left(\frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} \right)^2} (x_k - x_{k-1}) \\
&= \pi \left(f(x_k) + f(x_{k-1}) \right) \sqrt{1 + \left(\frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} \right)^2} \Delta x_k
\end{aligned}$$

olur. f türevlenebilen bir fonksiyon oladuğundan ortalama değer teoremi gereği

$$\frac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{x_k-x_{k-1}}=f'(x_k')$$

olacak şekilde bir $x_k' \in (x_{k-1}, x_k)$ noktası vardır. Böylece

$$S_k \cong \pi\left(f(x_k)+f(x_{k-1})\right)\sqrt{1+\left[f'(x_k')\right]^2}\Delta x_k$$

olur. O zaman

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=1}^{n} S_k \\ &\cong \sum_{k=1}^{n} \pi\left(f(x_k)+f(x_{k-1})\right)\sqrt{1+\left(f'(x_k')\right)^2}\Delta x_k \end{aligned}$$

Parçalanmanın sayısını $maks\Delta x_k \to 0$ olacak şekilde artırırsak

$$S=\lim_{maks\Delta x_k\to 0}\sum_{k=1}^{n} \pi\left(f(x_k)+f(x_{k-1})\right)\sqrt{1+\left(f'(x_k')\right)^2}\Delta x_k$$

olur ki bu eşitliğin sağ tarafı bir belirli integraldir. O zaman

$$\begin{aligned} S &= 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}dx \\ &= 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx \end{aligned}$$

bulunur. Burada f nin negatif olabileceği dikkate alınırsa yüzey alanının

$$S=2\pi\int_a^b |f(x)|\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}dx$$

ile hesaplanması gerektiği anlaşılmaktadır.

Örnek 214 *a yarıçaplı bir kürenin yüzey alanını hesaplayınız. $x^2+y^2=a^2$ çemberinin üst yarısı olan $y=f(x)=\sqrt{a^2-x^2}$, $-a<x<a$ eğrisi x-ekseni etrafında döndürülürse küre yüzeyi elde edilir. Bunu göre*

$$1+\left(y'\right)^2=\frac{a^2}{a^2-x^2}$$

den

$$|f(x)|\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}=\sqrt{a^2-x^2}\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}=a$$

olur. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} S &= 2\pi\int_a^b |f(x)|\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}dx = 2\pi\int_{-a}^{a} a dx \\ &= 2\pi a x|_{-a}^{a} = 4\pi a^2 \ br^2 \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

Örnek 215 *$y=x^3$, $0\leq x\leq 1$ eğri parçasının x-ekseni etrafında döndürülmesi ile oluşan cismin yüzey alanını hesaplayınız.*

$$y'=3x^2 \Rightarrow |f(x)|\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}=x^3\sqrt{1+9x^4}$$

olup

$$\begin{aligned} S &= 2\pi\int_a^b |f(x)|\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}dx \\ &= \int_0^1 x^3\sqrt{1+9x^4}dx \\ &= \frac{1}{54}\left(\sqrt{1+9x^4}\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{54}\left(10\sqrt{10}-1\right) \ br^2 \end{aligned}$$

olur.

Örnek 216 *$y=2\sqrt{x}$, $1\leq x\leq 2$ eğri parçasının x-ekseni etrafında döndürülmesi ile oluşan cismin yüzey alanını hesaplayınız.*

$$y'=\frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow |f(x)|\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}=2\sqrt{x}\sqrt{1+\frac{1}{x}}=2\sqrt{1+x}$$

olur. Böylece

$$
\begin{aligned}
S &= 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1+(f'(x))^2}dx \\
&= 2\pi \int_1^2 2\sqrt{1+x}dx \\
&= \frac{8\pi}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}\Big|_1^2 \\
&= \frac{8\pi}{3}\left[3\sqrt{3}-2\sqrt{2}\right] \ br^2
\end{aligned}
$$

bulunur.

Uyarı 217 *Eğer eğri parçasının denklemi $x = g(y)$, $c \leq y \leq d$ biçiminde verilmiş ise, bunun y-ekseni etrafında döndürülmesi ile oluşan yüzeyin alanı*

$$
\begin{aligned}
S &= 2\pi \int_c^d |g(y)| \sqrt{1+(g'(y))^2}dy \\
&= 2\pi \int_c^d |g(y)| \sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}dy
\end{aligned}
$$

ile hesaplanır.

Örnek 218 *$y = x^{\frac{1}{3}}$, $0 \leq x \leq 8$ eğri parçasının y-ekseni etrafında döndürülmesi ile oluşan cismin yüzey alanını hesaplayınız. $x = y^3$, $0 \leq x \leq 2$ olup*

$$
x' = 3y^2 \Rightarrow |g(y)| \sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2} = y^3\sqrt{1+9y^4}
$$

olur. Böylece

$$
\begin{aligned}
S &= 2\pi \int_c^d |g(y)| \sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}dy \\
&= 2\pi \int_0^2 y^3\sqrt{1+9y^4}dy \\
&= \frac{\pi}{27}\left(1+9y^4\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^2 \\
&= \frac{\pi}{27}\left[145\sqrt{145}-1\right] \ br^2
\end{aligned}
$$

bulunur.

Uyarı 219 *$y = f(x)$, $a \leq x \leq b$ eğri parçasının $y = k$ doğrusu etrafında döndürülmesi ile oluşan yüzeyin alanı ile $y = f(x) - k$, $a \leq x \leq b$ eğri parçasının $y = 0$ (x-ekseni) etrafında döndürülmesi ile oluşan yüzeyin alanı eşittir. Böylece*

$$\frac{d}{dx}(f(x) - k) = \frac{d}{dx}f(x)$$

olduğundan $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$ eğri parçasının $y = k$ doğrusu etrafında döndürülmesi ile oluşan yüzeyin alanı

$$S = 2\pi \int_a^b |f(x) - k| \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

olur.

Örnek 220 *$x^2+(y-1)^2 = 1$ çemberinin $y = -1$ doğrusu etrafında döndürülmesi ile oluşan yüzeyin alanını hesaplayınız. $-1 \leq x \leq 1$ için*

$$y_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1 - x^2}$$

eğrilerinin $y = -1$ doğrusu etrafında döndürülmesi ile oluşan yüzeyin alanını bulacağız.

$$y_1 = 1 - \sqrt{1 - x^2} \Rightarrow y_1' = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} \Rightarrow \sqrt{1 + (y_1')^2} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}},$$

ve

$$y_2 = 1 + \sqrt{1 - x^2} \Rightarrow \ y_2' = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} \ \Rightarrow \ \sqrt{1 + (y_2')^2} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

olur. O zaman

$$\begin{aligned}
S_1 &= 2\pi \int_{-1}^1 |y_1 - k| \sqrt{1 + (y_1')^2} dx \\
&= 2\pi \int_{-1}^1 \left|1 - \sqrt{1 - x^2} - (-1)\right| \sqrt{1 + \left(\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}\right)^2} dx \\
&= 2\pi \int_{-1}^1 \left(2 - \sqrt{1 - x^2}\right) \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} dx \\
&= 4\pi \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} - 2\pi \int_{-1}^1 dx \\
&= 8\pi \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} - 4\pi
\end{aligned}$$

olur. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}
S_2 &= 2\pi \int_{-1}^{1} |y_2 - k| \sqrt{1 + (y_2')^2} dx \\
&= 2\pi \int_{-1}^{1} \left| 1 + \sqrt{1 - x^2} - (-1) \right| \sqrt{1 + \left(\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} \right)^2} dx \\
&= 2\pi \int_{-1}^{1} \left(2 + \sqrt{1 - x^2} \right) \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} dx \\
&= 4\pi \int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} + 2\pi \int_{-1}^{1} dx \\
&= 8\pi \int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} + 4\pi
\end{aligned}$$

olduğundan

$$S = S_1 + S_2 = 16\pi \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = 16\pi \arcsin x|_0^1 = 8\pi^2 \ \ br^2$$

olarak bulunur.

3.5 Ek Sorular

1. $y = x^2 + 2$ ve $y = -x^2 + 10$ eğrileri tarafından sınırlanan bölgenin x-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmini bulunuz.

2. Denklemi $x = \sqrt{y}, 0 \leq y \leq 2$ olan eğri parçasının y-ekseni etrafında döndürülmesi ile oluşan yüzeyin alanını bulunuz.

3. $y = x^3 - 9x$ eğrisi ile $y = 7x$ doğrusu arasında kalan bölgenin alanını hesaplayınız.

4. $y = e^x$ eğrisi ile bu eğriye$(1, e)$ noktasında teğet olan doğru ve y- ekseni arasında kalan bölge y- ekseni etrafında döndürülüyor. Oluşan cismin hacmini hesaplayınız.

5. Birinci bölgede $y = \sin x$ ve $y = \cos x$ eğrileri ile $x = 0$ doğrusu arasında kalan bölge x- ekseni etrafında döndürülüyor. Oluşan cismin hacmini hesaplayınız.

6. $y = \sqrt{1-x^2}$ eğrisinin $x = -1$ ve $x = 1$ apsisli noktaları arasında kalan parçasının uzunluğunu hesaplayınız.

7. $y = x$ ve $y = 2x$ doğruları ile $y = x^2$ parabolü arasında kalan bölgenin alanını bulunuz.

8. $y = x^3 - 3x$ eğrisi ile bu eğriye $(-1, 2)$ noktasında teğet olan doğru arasında kalan bölgenin alanını bulunuz.

9. $y = x+2$ ve $y = 0$ doğruları ile $y = 4-x^2$ eğrisi arasında kalan bölgenin alanını bulunuz.

10. $y = x^2$ eğrisi ile bu eğriye $(2, 4)$ noktasında teğet olan doğru ve x-ekseni arasında kalan bölgenin alanını bulunuz.

11. $2y = x+1$ doğrusu ile $x = y^2 - 1$ eğrisi arasında kalan bölgenin alanını bulunuz.

12. $y = 9x - x^3$ eğrisi ile bu eğriye $(-1, -8)$ noktasında teğet olan doğru arasında kalan bölgenin alanını bulunuz.

13. $y = \dfrac{\ln x}{2}$ eğrisi ile $x = 0, y = 0$ ve $y = 1$ doğruları arasında kalan bölgenin alanını hesaplayınız.

14. $y = \dfrac{x^2}{2}$ ve $y = \dfrac{1}{1+x^2}$ eğrileri arasında kalan bölgenin alanını bulunuz.

15. $x = y^2$ eğrisi, $2y + x = 3$ doğrusu ve y-ekseni kalan bölge y-ekseni etrafında döndürülüyor. Meydana gelen dönel cismin hacmini bulunuz.

16. $y = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{1}{4x}$ denklemi ile verilen eğrinin $x = 1$ ve $x = 3$ apsisli noktaları arasında kalan parçasının uzunluğunu bulunuz.

17. $y = \dfrac{1}{1+x^2}$ ve $y = \dfrac{3}{2} - x^2$ eğrileri arasında kalan bölgenin alanını bulunuz.

18. $y = x^2$ eğrisi, $2y + x = 3$ doğrusu ve x-ekseni arasında kalan bölge x-ekseni etrafında döndürülüyor. Meydana gelen dönel cismin hacmini bulunuz.

19. $y = \dfrac{x^3}{12} + \dfrac{1}{x}$ denklemi ile verilen eğrinin $x = 1$ ve $x = 2$ apsisli noktaları arasında kalan parçasının uzunluğunu bulunuz.

20. $y = \ln x$ eğrisi, bu eğriye $(e, 1)$ noktasında çizilen teğet ve $y = 0$ doğrusu arasında kalan bölgenin alanını bulunuz.

21. $y = e^x$ eğrisi, bu eğriye $(1, e)$ noktasında çizilen teğet ve $x = 0$ doğrusu arasında kalan bölge y-ekseni etrafında döndürülüyor. Meydana gelen dönel cismin hacmini bulunuz.

22. $y = e^x$ eğrisi, bu eğriye $(1, e)$ noktasında çizilen teğet ve $x = 0$ doğrusu arasında kalan bölgenin alanını bulunuz.

23. $y = \ln x$ eğrisi, bu eğriye $(e, 1)$ noktasında çizilen teğet ve $y = 0$ doğrusu arasında kalan bölge x-ekseni etrafında döndürülüyor. Meydana gelen dönel cismin hacmini bulunuz.

24. $y = x^2 - c^2$ ve $y = c^2 - x^2$ parabolleri arasında kalan alanı 576 yapan c değerini bulunuz.

25. $y = x^2$ eğrisi ile $y = 4$ doğrusu arasında kalan bölge $y = b$ doğrusu ile ikiye bölünmüştür. İki bölümün alanlarının eşit olması için b değeri ne olmalıdır.

26. $y = \frac{1}{x^2}$ $1 \leq x \leq 4$ eğrisinin altında kalan alan $x = a$ doğrusu ile iki eşit parçaya bölünmüştür. a değerini bulunuz.

27. Bir önceki sorudaki alan $y = b$ doğrusu ile iki eşit parçaya bölünmüstür. b değerini bulunuz.

28. Tabanı, dik kenarları b ve $2b$ olan bir dikdörtgen ve yüksekliği h olan piramidin hacmini bulunuz.

29. $y = x^4 - x^2$ ve $y = 1 - x^2$ eğrileri arasında kalan bölgenin alanını bulunuz.

30. $y = x^3 - x$ eğrisi ile bu eğriye $x = -1$ apsisli noktadan çizilen teğet doğru arasında kalan bölgenin alanını bulunuz.

31. $y = -x^2 - 2x + 3$ parabolü, bu parabole $(-2, 3)$ noktasından çizilen teğet ve y-ekseni arasında kalan bölgenin alanını bulunuz.

32. $xy = 2$, $xy = 4$, $x = 1$ ve $x = 2$ ile sınırlı bölgenin y-ekseni etrafında döndürülmesi ile oluşan cismin hacmini bulunuz.

33. $y = 3 - x^2$ parabolu, $y = 3x - 1$ doğrusu ve y-ekseni tarafından sınırlanan bölge y-ekseni etrafında döndürülüyor. Oluşan cismin hacmini (a) Disk yöntemi, (b) Silindirik kabuk yöntemi ile hesaplayınız.

34. $y = \frac{2}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}}$ eğrisinin $x = 0$ ve $x = 2$ apsisli noktaları arasında kalan parçasının uzunluğunu bulunuz.

35. $x^2 + (y-1)^2 = 1$ çemberinin x-ekseni etrafında döndürülmesi ile oluşan cismin yüzey alanını bulunuz.

36. $y = \cosh x$, $0 \le x \le 1$, eğri parçasının x-ekseni etrafında döndürülmesi ile oluşan cismin yüzey alanını bulunuz.

37. $y = \sin x$, $0 \le x \le \pi$, eğri parçasının x-ekseni etrafında döndürülmesi ile oluşan cismin yüzey alanını bulunuz.

38. Taban yarıçapı r, yüksekliği h olan dairesel koninin yanal yüzey alanının $\pi r\sqrt{r^2+h^2}$ olduğunu gösteriniz.

4 GENELLEŞTİRİLMİŞ İNTEGRALLER

Hatırlanacağı gibi $\int_a^b f(x)dx$ Riemann integralinin tanımlı olması için en azından aşağıdaki iki şartın sağlanması gerekir. Birincisi $[a,b]$ integrasyon aralığı sonlu, ikincisi f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sınırlı olmalıdır. Bu tip integrallere has integral denir. Bu kesimde belirli integral kavramını, aralığın sonsuz olduğu ve f nin $[a,b]$ üzerinde sonsuz süreksizliği (dolayısıyla sınırsız) olduğu durumlara genişleteceğiz. Her iki durumda da integrale genelleştirilmiş integral (has olmayan integral) adı verilir. Bu tür integraller uygulamada sıklıkla karşımıza çıkar. Örneğin,

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx$$

integrali aerodinamikte,

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx$$

integrali istatistikte,

$$\int_0^\infty Ae^{-rt}dt$$

integrali faiz hesaplamalarında ve

$$\int_0^\infty x^{t-1}e^{-x}dx$$

integrali ise (bu integrale bağlı tanımlanan Γ gama fonksiyonu) fiziksel uygulamalarda kullanılmaktadır.

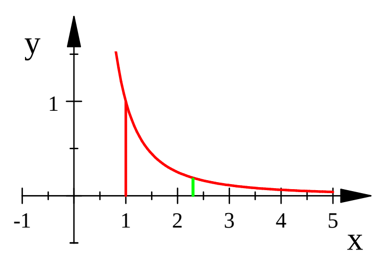
Genelleştirilmiş integraller üç guruba ayrılır. Örneğin,

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}, \int_0^2 \frac{dx}{x-1}, \int_1^\infty \frac{dx}{(x-2)^2}$$

integraleri genelleştirilmiş integrallerdir, ancak herbiri farklı özelliklere sahiptir. Birinci integralde integral aralığı sonsuz, ikincisinde integrant sınırlı değil, üçüncüsünde ise bu durumların her ikisi mevcuttur.

4.1 Birinci Çeşit Genelleştirilmiş İntegraller (Sonsuz Aralıklar)

$y = \dfrac{1}{x^2}$ eğrisinin altında, x-ekseninin üstünde ve $x = 1$ doğrusunun sağında kalan sonsuz bölgeye S diyelim.



Bölgenin uzunluğu sonsuz olduğundan alanının da sonsuz olacağı düşünülebilir. Şimdi bu alanı hesaplayalım. S bölgesinin $x = t$ $(t > 1)$ nin solunda kalan parçasının alanı

$$A(t) = \int_1^t \frac{dx}{x^2} = 1 - \frac{1}{t}$$

dir. t ne kadar büyük seçilirse seçilsin $A(t) < 1$ olduğuna dikkat ediniz. Ayrıca

$$\lim_{t\to\infty} A(t) = 1$$

dir. Dolayısıyla S bölgesinin alanı 1 br^2 olup bu durumda

$$A(S) = \int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = \lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{dx}{x^2} = 1$$

yazılır.

Bu örnek te olduğu gibi, pozitif olması gerekmeyen f fonksiyonunun sonsuz bir aralık üzerindeki integralini sonlu aralıklar üzerindeki integrallerinin limiti olarak tanımlarız.

Tanım 221 *a bir reel sayı olmak üzere f fonksiyonu her $t > a$ için $[a,t]$ aralığında integrallenebilir olsun. Bu durumda*

$$\lim_{t\to\infty} \int_a^t f(x)dx$$

ifadesine f nin $[a,\infty)$ aralığındaki birinci çeşit genelleştirilmiş integrali denir ve bu limit

$$\int_a^\infty f(x)dx$$

biçiminde gösterilir. Yani

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{t\to\infty} \int_a^t f(x)dx$$

eşitliği yazılır. Eğer sağ taraftaki limit mevcutsa genelleştirilmiş integrale yakınsak aksi halde ıraksak denir. Ayrıca buradaki limit değeri integralin değeridir. f fonksiyonunun $(-\infty,b]$ ve $(-\infty,\infty)$ aralıklarındaki birinci çeşit genelleştirilmiş integralleri sırası ile

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{t\to-\infty} \int_t^b f(x)dx$$

ve

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \int_{-\infty}^c f(x)dx + \int_c^\infty f(x)dx$$

biçiminde tanımlanır. Burada c herhangi bir reel sayıdır. Bu son eşitliğin sağ tarafındaki her iki integralin yakınsak olması durumunda

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$$

integrali yakınsaktır. Buna göre

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{t\to-\infty}\int_{t}^{c} f(x)dx + \lim_{s\to\infty}\int_{c}^{s} f(x)dx$$

olur.

Eğer f pozitif bir fonksiyon ise bu tanımdaki genelleştirilmiş integraller alan olarak yorumlanabilir.

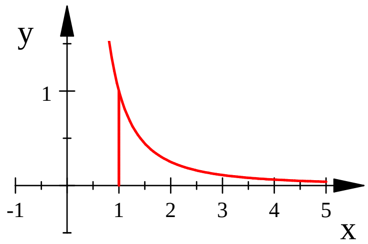
Örnek 222 *Aşağıda verilen integraller birinci çeşit genelleştirilimiş integrallerdir*

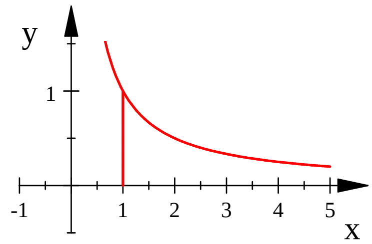
1. $\int_1^{\infty} \dfrac{x^3}{x^4+1}dx$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} x^2e^x dx$
3. $\int_{-\infty}^{1} \dfrac{dx}{(1+x^2)^3}$

Örnek 223 $\int_1^{\infty} \dfrac{dx}{x}$ *integralinin yakınsaklık durumunu belirleyiniz.*

$$\begin{aligned}\int_1^{\infty} \frac{dx}{x} &= \lim_{t\to\infty}\int_1^{t} \frac{dx}{x} \\ &= \lim_{t\to\infty}[\ln t - \ln 1] \\ &= \infty\end{aligned}$$

olduğundan verilen integral ıraksaktır. Bunun anlamı $y = \dfrac{1}{x}$ eğrisi altında $x = 1$ doğrusunun sağında kalan bölgenin alanının sonsuz olduğudur. İlk *örnekle karşılaştırıldığında aşağıdaki durum ortaya çıkmaktadır.*



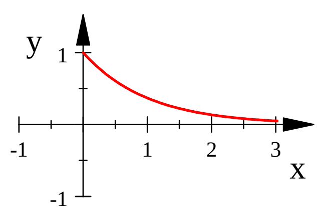


$y = \dfrac{1}{x^2}$ *(Alan sonlu ve* 1 br^2*)* $\qquad$ $y = \dfrac{1}{x}$ *(Alan sonsuz)*

Örnek 224 $\int_0^\infty e^{-x}dx$ *integralinin yakınsaklık durumunu belirleyiniz.*

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{-x}dx &= \lim_{t\to\infty}\int_0^t e^{-x}dx \\
&= \lim_{t\to\infty}[1-e^{-t}] \\
&= 1
\end{aligned}$$

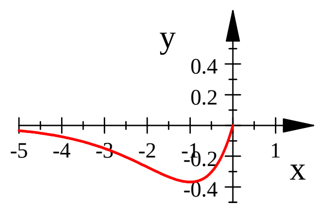
olduğundan verilen integral yakınsaktır ve değeri 1 *dir.*



Örnek 225 $\int_{-\infty}^0 xe^x dx$ *integralinin yakınsaklık durumunu belirleyiniz.*

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^0 xe^x dx &= \lim_{t\to-\infty}\int_t^0 xe^x dx \\
&= \lim_{t\to-\infty}(x-1)e^x\big|_t^0 \\
&= \lim_{t\to-\infty}\left(-1-(t-1)e^t\right) \\
&= -1
\end{aligned}$$

olduğundan verilen integral yakınsaktır ve değeri -1 *dir.*



Örnek 226 $\int_0^\infty \sin x dx$ *integralinin yakınsaklık durumunu belirleyiniz.*

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \sin x dx &= \lim_{t\to\infty}\int_0^t \sin x dx \\ &= \lim_{t\to\infty}(1-\cos t)\end{aligned}$$

limiti mevcut değildir. O zaman verilen integral yakınsak değildir.

Örnek 227 $\int_{-\infty}^\infty \dfrac{dx}{1+x^2}$ *integralinin yakınsaklık durumunu belirleyiniz. Önce verilen integrali*

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2} + \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}$$

biçiminde iki integralin toplamı biçiminde yazalım. Şimdi bu integrallerin yakınsaklık durumlarını ayrı ayrı inceleyelim.

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2} &= \lim_{t\to-\infty}\int_t^0 \frac{dx}{1+x^2} \\ &= \lim_{t\to-\infty}(-\arctan t) \\ &= \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

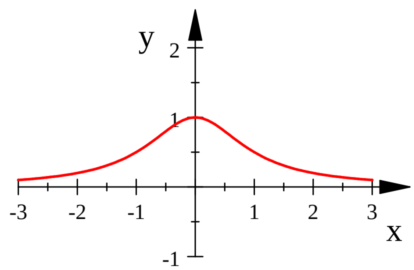
ve

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} &= \lim_{s\to\infty}\int_0^s \frac{dx}{1+x^2} \\ &= \lim_{s\to\infty}\arctan s \\ &= \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

olduğundan sağ taraftaki her iki integralde yakınsaktır. Dolayısıyla verilen integral de yakınsaktır ve üstelik değeri

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2} &= \int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x^2}+\int_{0}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}\\ &= \frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi\end{aligned}$$

olur.



Örnek 228 $\int_{-\infty}^{\infty} xdx$ *integralinin yakınsaklık durumunu belirleyiniz. Önce verilen integrali*

$$\int_{-\infty}^{\infty} xdx = \int_{-\infty}^{0} xdx + \int_{0}^{\infty} xdx$$

biçiminde iki integralin toplamı biçiminde yazalım. Şimdi bu integrallerin yakınsaklık durumlarını ayrı ayrı inceleyelim.

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{0} xdx &= \lim_{t\to-\infty}\int_{t}^{0} xdx\\ &= \lim_{t\to-\infty}\left(-\frac{t^2}{2}\right)\\ &= -\infty\end{aligned}$$

olduğundan sağ taraftaki ilk integral ıraksaktır. Dolayısıyla verilen integral de ıraksak olur.

Uyarı 229 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ *integralini*

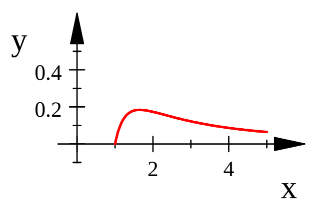
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{t\to\infty}\int_{-t}^{t} f(x)dx \tag{7}$$

biçiminde yazmak doğru olmaz. Örneğin böyle bir yazımda

$$\int_{-\infty}^{\infty} x dx = \lim_{t\to\infty} \int_{-t}^{t} x dx = 0$$

olur ki bu integralin yakınsa olması anlamına gelir. Halbuki bir önceki örnekte görüldüğü üzere bu integral ıraksaktır. Ancak eğer $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ integralinin yakınsak olduğunu biliyorsak değerini hesaplamak için (7) eşitliği yazılabilir.

Örnek 230 *$y = \frac{\ln x}{x^2}$ eğrisi altında $x = 1$ noktasının sağında kalan alan sonlu mudur? Sonlu ise değeri nedir?*



Örnek 231 *$a > 0$ olsun. Hangi p değerleri için $\int_a^{\infty} \dfrac{dx}{x^p}$ integrali yakınsaktır?*

$$\begin{aligned}
\int_a^{\infty} \frac{dx}{x^p} &= \lim_{t\to\infty} \int_a^{t} \frac{dx}{x^p} \\
&= \lim_{t\to\infty} \begin{cases} \ln x\big|_a^t & , \quad p = 1 \\[2ex] \left.\dfrac{x^{1-p}}{1-p}\right|_a^t & , \quad p \neq 1 \end{cases} \\
&= \lim_{t\to\infty} \begin{cases} \ln\left(\dfrac{t}{a}\right) & , \quad p = 1 \\[2ex] \dfrac{t^{1-p}}{1-p} - \dfrac{a^{1-p}}{1-p} & , \quad p \neq 1 \end{cases} \\
&= \begin{cases} \infty & , \quad p \leq 1 \\[2ex] \dfrac{a^{1-p}}{p-1} & , \quad p > 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

olur. Yani verilen integral $p \leq 1$ için ıraksak, $p > 1$ için yakınsaktır.

Örnek 232 *Hangi a değerleri için $\int_1^\infty a^x dx$ integrali yakınsaktır? Öncelikle $f(x) = a^x$ üstel fonksiyonun tanımında a sayısının 1 den farklı pozitif bir reel sayı olması gerektiğini hatırlayalım. O zaman*

$$\begin{aligned}
\int_1^\infty a^x dx &= \lim_{t\to\infty} \int_1^t a^x dx \\
&= \lim_{t\to\infty} \left.\frac{a^x}{\ln a}\right|_1^t \\
&= \lim_{t\to\infty} \frac{a^t - a}{\ln a} \\
&= \begin{cases} \infty & , \quad a > 1 \\ \dfrac{-a}{\ln a} & , \quad 0 < a < 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

elde edilir. Yani $0 < a < 1$ için verilen integral yakınsak ve değeri $\dfrac{-a}{\ln a}$ dır.

Örnek 233 $\int_0^\infty \cos x dx$ *integrali yakınsak mıdır?*

Örnek 234 *Hangi b değerleri için $\int_a^\infty e^{-bx} dx$ integrali yakınsaktır?*

$$\begin{aligned}
\int_a^\infty e^{-bx} dx &= \lim_{t\to\infty} \int_a^t e^{-bx} dx \\
&= \lim_{t\to\infty} \begin{cases} t - a & , \quad b = 0 \\ -\left.\frac{e^{-bx}}{b}\right|_a^t & , \quad b \neq 0 \end{cases} \\
&= \lim_{t\to\infty} \begin{cases} t - a & , \quad b = 0 \\ \dfrac{e^{-ab}}{b} - \dfrac{e^{-bt}}{b} & , \quad b \neq 0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} \infty & , \quad b \leq 0 \\ \dfrac{e^{-ab}}{b} & , \quad b > 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

olur. Yani verilen integral $b \leq 0$ için ıraksak, $b > 0$ için yakınsaktır.

Örnek 235 *$\int_0^\infty xe^{-x^2}dx$ integrali yakınsak mıdır? Yakınsak ise değeri nedir?*

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty xe^{-x^2}dx &= \lim_{t\to\infty}\int_0^t xe^{-x^2}dx \\
&= \lim_{t\to\infty}\left(-\frac{e^{-x^2}}{2}\right)\Bigg|_0^t \\
&= \lim_{t\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{e^{-t^2}}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Örnek 236 *$\int_{-\infty}^\infty \dfrac{xdx}{\sqrt{x^2+2}}$ integrali yakınsak mıdır? Yakınsak ise değeri nedir?*

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{xdx}{\sqrt{x^2+2}} = \int_{-\infty}^0 \frac{xdx}{\sqrt{x^2+2}} + \int_0^\infty \frac{xdx}{\sqrt{x^2+2}}$$

biçiminde yazalım. Şimdi

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^0 \frac{xdx}{\sqrt{x^2+2}} &= \lim_{t\to-\infty}\int_t^0 \frac{xdx}{\sqrt{x^2+2}} \\
&= \lim_{t\to-\infty}\sqrt{x^2+2}\Big|_t^0 \\
&= \lim_{t\to-\infty}\left(\sqrt{2}-\sqrt{t^2+2}\right) \\
&= -\infty
\end{aligned}$$

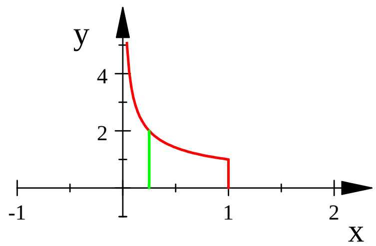
elde edilir. Böylece sağ taraftaki ilk integral ıraksak olduğundan verilen integral de ıraksaktır.

Örnek 237 *$y=\dfrac{8}{x^2-4}$ eğrisi altında $x=3$ noktasının sağında kalan alan sonlu mudur? Sonlu ise değeri nedir?*

4.2 İkinci Çeşit Genelleştirilmiş İntegraller (Sınırlı Olmayan Fonksiyonlar)

Birinci bölgede $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ eğrisi altnda $x=0$ dan $x=1$ e kadar olan bölgeyi S diyelim. S bölgesinin alanını hesaplamak için önce $0<t<1$ olmak üzere

$x = t$ den $x = 1$ e kadar olan kısmın alanını bulalım.



$$A(t) = \int_t^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2 - 2\sqrt{t}$$

olur. Şimdi de $t \to 0^+$ iken bu alanın limitini hesaplarsak

$$\lim_{t\to 0^+} A(t) = \lim_{t\to 0^+} \left(2 - 2\sqrt{t}\right) = 2$$

olur. O halde S bölgesinin alanı 2 br^2 olup bu durumda

$$A(S) = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{t\to 0^+} \int_t^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2$$

yazılır.

Bu örnek te olduğu gibi, sonlu bir aralıkta pozitif olması gerekmeyen sınırsız bir f fonksiyonunun aralık üzerindeki integralini sınırlı olduğu aralıklar üzerindeki integrallerinin limiti olarak tanımlarız.

Tanım 238 *Sonlu bir aralıkta bir noktada sınırsız olan fonksiyonun integraline ikinci çeşit genelleştirilmiş integral denir. Bu tür integraller aşağıdaki durumlar dikkate alınarak hesaplanabilir.*

1. *Eğer f fonksiyonu $(a, b]$ aralığının kapalı her alt aralığında integrallenebilir ve a noktasında sınırsız ise*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to a^+} \int_t^b f(x)dx,$$

2. *Eğer f fonksiyonu $[a, b)$ aralığının kapalı her alt aralığında integrallenebilir ve b de sınırsız ise*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to b^-} \int_a^t f(x)dx,$$

3. *Eğer f fonksiyonu $a < c < b$ olmak üzere c noktasında sınırsız ise*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

yazılır.

Herbir durumda limit sonlu ise genelleştirilmiş integral yakınsaktır ve limit değeri integralin değeridir. Eğer limit yoksa genelleştirilmiş integral ıraksaktır.

Örnek 239 *Aşağıda verilen integraller ikinci çeşit genelleştirilmiş integrallerdir.*

1. $\int_0^2 \dfrac{e^x}{x^2}dx$

2. $\int_1^4 \dfrac{dx}{(4-x)^3}$

3. $\int_{-4}^5 \dfrac{x^2}{(x-2)(x+1)^2}dx$

Örnek 240 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin x}{x}dx$ *bir genelleştirilmiş integral değildir (Neden?).*

Örnek 241 $\int_2^5 \dfrac{dx}{\sqrt{x-2}}$ *integralinin yakınsak olup olmadığını araştırınız.*

$$\begin{aligned}
\int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{x-2}} &= \lim_{t\to 2^+} \int_t^5 \frac{dx}{\sqrt{x-2}} \\
&= \lim_{t\to 2^+} [2\sqrt{3} - 2\sqrt{t-2}] \\
&= 2\sqrt{3}
\end{aligned}$$

olduğundan verilen integral yakınsaktır ve değeride $2\sqrt{3}$ dür.

Örnek 242 $\int_0^3 \dfrac{dx}{x-1}$ *integralinin yakınsak olup olmadığını araştırınız.*

$$\int_0^3 \frac{dx}{x-1} = \int_0^1 \frac{dx}{x-1} + \int_1^3 \frac{dx}{x-1}$$

yazılır. Burada sağdaki integrallerin her ikiside yakınsaksa verilen integral yakınsak olur. Birinin ıraksak olması halinde verilen integral ıraksaktır. O zaman

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{dx}{x-1} &= \lim_{t\to 1^-}\int_0^t \frac{dx}{x-1}\\ &= \lim_{t\to 1^-}[\ln|t-1|-\ln 1]\\ &= -\infty\end{aligned}$$

olduğundan verilen integral ıraksaktır.

Uyarı 243 *Bu örnekte $x = 1$ noktasını farketmeden hareket etseydik*

$$\int_0^3 \frac{dx}{x-1} = \ln|x-1|\Big|_0^3 = \ln 2$$

şeklinde hatalı bir hesap yapardık.

Örnek 244 $\int_0^3 \dfrac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$ *integralinin yakınsak olup olmadığını araştırınız.*

Örnek 245 $\int_0^1 \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ *integralinin yakınsak olup olmadığını araştırınız.*

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \lim_{t\to 1^-}\int_0^t \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\\ &= \lim_{t\to 1^-}(\arcsin x)\Big|_0^t\\ &= \lim_{t\to 1^-}(\arcsin t)\\ &= \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

olduğundan verilen integral yakınsaktır ve değeride $\frac{\pi}{2}$ dir.

Örnek 246 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sec x dx$ *integralinin yakınsak olup olmadığını araştırınız.*

Örnek 247 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan x dx$ *integralinin yakınsak olup olmadığını araştırınız.*

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan x dx &= \lim_{t \to \frac{\pi}{2}^-} \int_0^t \tan x dx \\
&= \lim_{t \to \frac{\pi}{2}^-} (-\ln(\cos x))\Big|_0^t \\
&= \lim_{t \to \frac{\pi}{2}^-} (-\ln(\cos t)) \\
&= \infty
\end{aligned}$$

olduğundan verilen integral ıraksaktır.

Örnek 248 $\int_0^1 \ln x dx$ *integralinin yakınsak olup olmadığını araştırınız.*

Örnek 249 $\int_0^1 \dfrac{dx}{x^2 - x}$ *integralinin yakınsak olup olmadığını araştırınız.*

Örnek 250 *Hangi* p *değerleri için* $\int_a^b \dfrac{dx}{(b-x)^p}$ *integrali yakınsaktır.*

Örnek 251 *Hangi* p *değerleri için* $\int_a^b \dfrac{dx}{(x-a)^p}$ *integrali yakınsaktır.*

$$\begin{aligned}
\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^p} &= \lim_{t \to a^+} \int_t^b \frac{dx}{(x-a)^p} \\
&= \lim_{t \to a^+} \begin{cases} \ln(x-a)\big|_t^b & , \quad p = 1 \\ \dfrac{(x-a)^{1-p}}{1-p}\Big|_t^b & , \quad p \neq 1 \end{cases} \\
&= \lim_{t \to a^+} \begin{cases} \ln\left(\dfrac{b-a}{t-a}\right) & , \quad p = 1 \\ \dfrac{(b-a)^{1-p}}{1-p} - \dfrac{(t-a)^{1-p}}{1-p} & , \quad p \neq 1 \end{cases} \\
&= \begin{cases} \infty & , \quad p \geq 1 \\ \dfrac{(b-a)^{1-p}}{1-p} & , \quad p < 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

olur. Yani verilen integral $p \geq 1$ *için ıraksak,* $p < 1$ *için yakınsaktır.*

4.3 Üçüncü Çeşit Genelleştirilmiş İntegraller

Tanım 252 *Bir integral hem birinci çeşit hem de ikinci çeşit genelleştirilmiş integrallerin özelliklerine sahipse buna üçüncü çeşit genelleştirilmiş integral adı verilir.*

Üçüncü çeşit genelleştirilmiş integraller birinci ve ikinci çeşit genelleştirilmiş integraller cinsinden parçalara ayrılarak yakınsaklık durumları araştırılır.

Örnek 253 $\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln x}}$ *integrali üçüncü çeşit genelleştirilmiş integraldir. Çünkü hem integrsayon aralığı sınırsız hem de integrant* $x=1$ *noktasında sınırsızdır. O zaman*

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln x}} = \int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln x}} + \int_2^\infty \frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln x}}$$

yazılabilir. Böylece

$$\begin{aligned}
\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln x}} &= \lim_{t\to 1^-} \int_t^2 \frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln x}} \\
&= \lim_{t\to 1^-} \frac{3}{2} (\ln x)^{\frac{2}{3}} \Big|_t^2 \\
&= \lim_{t\to 1^-} \frac{3}{2} \left((\ln 2)^{\frac{2}{3}} - (\ln t)^{\frac{2}{3}} \right) \\
&= \frac{3}{2} (\ln 2)^{\frac{2}{3}}
\end{aligned}$$

olur. Diğer taraftan

$$\begin{aligned}
\int_2^\infty \frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln x}} &= \lim_{t\to\infty} \int_2^t \frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln x}} \\
&= \lim_{t\to\infty} \frac{3}{2} (\ln x)^{\frac{2}{3}} \Big|_2^t \\
&= \lim_{t\to\infty} \frac{3}{2} \left((\ln t)^{\frac{2}{3}} - (\ln 2)^{\frac{2}{3}} \right) \\
&= \infty
\end{aligned}$$

olur. Yani verilen üçünci çeşit genelleştirilmiş integral ıraksaktır.

Örnek 254 *Aşağıdaki integrallerin genelleştirilmiş integral olup olmadığını, genelleştirilmiş integral olanların çeşidini belirleyiniz.*

1. $\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$
2. $\int_1^3 \frac{\sqrt{x}dx}{\ln x}$
3. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$
4. $\int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{x-2}}$
5. $\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{(1+x)^2}$
6. $\int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx$
7. $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$
8. $\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin x}{1+x^2}dx$
9. $\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x}$
10. $\int_0^\infty \frac{1-\cos x}{x^2}dx$
11. $\int_0^\infty \frac{e^x}{x}dx$
12. $\int_0^1 \frac{dx}{4x^2-1}$

Örnek 255 *Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.*

1. $\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1+x^2}$
2. $\int_1^\infty \frac{\ln x}{x}dx$

3. $\int_1^\infty \dfrac{xdx}{x^4+1}$

4. $\int_0^1 \dfrac{dx}{x\sqrt{x}}$

5. $\int_0^1 \dfrac{dx}{x^2-x}$

6. $\int_0^\infty \dfrac{dx}{e^x+1}$

7. $\int_0^1 \dfrac{dx}{1-x^3}$

8. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{dx}{\cos x}$

4.4 Yakınsaklık Testleri

Bilindiği gibi $[a,b]$ aralığında f fonksiyonu sürekli ise veya sonlu sayıda kaldırılabilir veya sıçrama süreksizliğine sahipse f bu aralıkta integrallenebilirdir. Yani $\int_a^b f(x)dx$ integrali mevcuttur. Dolayısıyla $\int_a^b f(x)dx$ integrali hesaplanamasa da bir reel sayıya karşılık gelir. Örneğin

$$\int_0^1 \sin(x^2)dx,\quad \int_0^\pi \frac{\sin x}{x}dx,\quad \int_0^2 \sqrt{1+x^3}dx,\quad \int_0^1 e^{-x^2}dx,\quad \int_3^5 \frac{dx}{\ln x}$$

gibi integraller elementer yollarla hesaplanamaz ancak birer reel sayıya karşılık gelirler.

Şimdi $\int_a^\infty f(x)dx$ birinci tip genelleştirilmiş integralini göz önüne alalım. Eğer bu integral yakınsak ise değeri bir reel sayıdır. Şimdiye kadar bu integralin yakınsak olup olmadığını

$$\lim_{t\to\infty} \int_a^t f(x)dx$$

limitini hesaplayarak araştırdık. Bunun için ise $\int_a^t f(x)dx$ integralini hesaplamak gerekti. O zaman $\int_a^t f(x)dx$ integrali elementer yollarla hesaplanamıyorsa

$$\lim_{t\to\infty} \int_a^t f(x)dx$$

limitnin dolayısıyla $\int_a^\infty f(x)dx$ integralinin bir reel sayıya karşılık gelip gelmediğini belirlemek bu yolla mümkün olmaz. Örneğin

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$$

integralinin yakınsak olup olmadığına bu yolla karar vermek zordur.

Bu kesimde integralin hesabına gerek kalmadan genelleştirilmiş integralin yakınsak olup olmadığına karar verebileceğimiz testler sunacağız.

4.4.1 Birinci çeşit genelleştirilmiş integraller için yakınsaklık testleri

Aşağıdaki testler integrasyon sınırlarının birinin ∞ olması halinde verilmiştir. Diğer durumlarda benzer testler verilebilir.

Teorem 256 (Dizi Testi) *$\int_a^\infty f(x)dx$ birinci çeşit genelleştirilmiş integralinin yakınsak olması için gerek ve yeter şart her $n \in \mathbb{N}$ için $t_n \geq a$ ve $\lim_{n\to\infty} t_n = \infty$ özelliklerini sağlayan her (t_n) dizisi için $\left(\int_a^{t_n} f(x)dx\right)$ dizisinin yakınsak olmasıdır.*

Örnek 257 *$\int_2^\infty \dfrac{xdx}{\sqrt{(x^2-3)^3}}$ integralinin yakınsak olduğunu gösteriniz. (t_n) dizisi $t_n \geq 2$ ve $\lim_{n\to\infty} t_n = \infty$ özelliklerini sağlayan herhangi bir dizi olsun. O zaman*

$$\begin{aligned} \int_2^{t_n} \frac{xdx}{\sqrt{(x^2-3)^3}} &= -\left(x^2-3\right)^{-\frac{1}{2}}\Big|_2^{t_n} \\ &= 1-\left(t_n^2-3\right)^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

olur. Böylece

$$\lim_{n\to\infty} \int_2^{t_n} \frac{xdx}{\sqrt{(x^2-3)^3}} = 1$$

olduğundan integral yakınsaktır ve hatta değeri 1 dir.

Teorem 258 (Seri Testi) *$\int_a^\infty f(x)dx$ birinci çeşit genelleştirilmiş integralinin yakınsak olması için gerek ve yeter şart $t_0 = a$, her $n \in \mathbb{N}$ için $t_n \geq a$ ve $\lim_{n\to\infty} t_n = \infty$ özelliklerini sağlayan her (t_n) dizisi için*

$$\sum_{n=1}^\infty \left(\int_{t_{n-1}}^{t_n} f(x)dx\right)$$

serisinin yakınsak olmasıdır.

Uyarı 259 *Yukarıda verilen iki testte de* (t_n) *dizisi keyfi seçilen dizidir. Özel seçilen diziler için serinin yakınsak olması integralin yakınsaklığını gerektirmez. Örneğin* $\int_0^\infty \sin x dx$ *integrali ıraksak olduğu halde*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_{2(n-1)\pi}^{2n\pi}\sin x dx\right)$$

serisi yakınsaktır. Çünkü serinin her bir terimi sıfırdır.

Yukarıdaki seri testi ile birlikte seriler için Cauchy yakınsaklık kriteri dikkate alındığında aşağıdaki Cauchy testi elde edilebilir.

Teorem 260 (Cauchy Testi) $\int_a^\infty f(x)dx$ *birinci çeşit genelleştirilmiş integralinin yakınsak olması için gerek ve yeter şart her* $\varepsilon > 0$ *için* $t_2 > t_1 > t_0$ *olduğunda*

$$\left|\int_{t_1}^{t_2} f(x)dx\right| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $t_0(\varepsilon)$ *sayısının var olmasıdır. Yani*

$$\int_a^\infty f(x)dx \text{ yakınsaktır } \Leftrightarrow \lim_{t_1,t_2\to\infty}\int_{t_1}^{t_2} f(x)dx = 0 \text{ dır.}$$

Örnek 261 $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx$ *integralinin yakınsaklık durumunu belirleyiniz.* t_1 *ve* t_2 *pozitif iki reel sayı ve* $t_2 > t_1$ *olsun. O zaman* $u = \frac{1}{x}$ *ve* $dv = \sin x dx$ *diyerek kısmi integrasyonla*

$$\begin{aligned}\int_{t_1}^{t_2}\frac{\sin x}{x}dx &= -\frac{\cos x}{x}\Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2}\frac{\cos x}{x^2}dx \\ &= \frac{\cos t_1}{t_1} - \frac{\cos t_2}{t_2} - \int_{t_1}^{t_2}\frac{\cos x}{x^2}dx\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}
\left|\int_{t_1}^{t_2} \frac{\sin x}{x} dx\right| &= \left|\frac{\cos t_1}{t_1} - \frac{\cos t_2}{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{\cos x}{x^2} dx\right| \\
&\leq \frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \left|\int_{t_1}^{t_2} \frac{\cos x}{x^2} dx\right| \\
&\leq \frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \left|\int_{t_1}^{t_2} \frac{dx}{x^2}\right| \\
&\leq \frac{2}{t_1} + \frac{2}{t_2}
\end{aligned}$$

olur. O zaman

$$\lim_{t_1, t_2 \to \infty} \int_{t_1}^{t_2} \frac{\sin x}{x} dx = 0$$

olacağından

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$$

integrali yakınsaktır.

Tanım 262 *Eğer* $\int_a^\infty |f(x)|\, dx$ *yakınsak ise* $\int_a^\infty f(x)dx$ *integraline mutlak yakınsak denir. Eğer* $\int_a^\infty |f(x)|\, dx$ *ıraksak fakat* $\int_a^\infty f(x)dx$ *yakınsak ise* $\int_a^\infty f(x)dx$ *integraline şartlı yakınsaktır denir.*

Örnek 263 $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ *integralini göz önüne alalım. Bir önceki örnekte bu integralin yakınsak olduğunu göstermiştik. Şimdi* $\int_0^\infty \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx$ *integralinin de yakınsak olduğunu kabul edelim. O zaman*

$$\sum_{n=1}^\infty \left(\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx \right)$$

serisi de yakınsak olmalıdır. Şimdi

$$\begin{aligned}
\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx &\geq \frac{1}{n\pi} \left|\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \sin x dx\right| \\
&= \frac{2}{n\pi}
\end{aligned}$$

olup

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi}$$

serisi ıraksak olduğundan karşılaştırma testine göre

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx \right)$$

seri de ıraksaktır. O zaman $\int_0^\infty \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx$ *ıraksak olur. Sonuç olarak* $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ *integrali şartlı yakınsar.*

Teorem 264 *Mutlak yakınsak her integral yakınsaktır.*

Ispat. $\int_a^\infty f(x)dx$ mutlak yakınsak bir integral olsun. O zaman $\int_a^\infty |f(x)|\, dx$ integrali yakınsaktır. Dolayısıyla Cauchy testine göre her $\varepsilon > 0$ için $t_2 > t_1 > t_0$ olduğunda

$$\left| \int_{t_1}^{t_2} |f(x)|\, dx \right| = \int_{t_1}^{t_2} |f(x)|\, dx < \varepsilon$$

olacak biçimde bir t_0 reel sayısı vardır. Böylece $t_2 > t_1 > t_0$ için

$$\left| \int_{t_1}^{t_2} f(x)dx \right| \leq \int_{t_1}^{t_2} |f(x)|\, dx < \varepsilon$$

olduğundan yine Cauchy testine göre $\int_a^\infty f(x)dx$ integrali yakınsak olur. ■

Teorem 265 (Karşılaştırma Testi) *$x \geq a$ için $0 \leq f(x) \leq g(x)$ olsun. Bu durumda*

- *$\int_a^\infty g(x)dx$ yakınsak ise $\int_a^\infty f(x)dx$ de yakınsaktır.*
- *$\int_a^\infty f(x)dx$ ıraksak ise $\int_a^\infty g(x)dx$ de ıraksaktır.*

Ispat. $\int_a^\infty g(x)dx$ yakınsak olsun. O zaman her $\varepsilon > 0$ için $t_2 > t_1 > t_0$ olduğunda

$$\left| \int_{t_1}^{t_2} g(x)dx \right| < \varepsilon$$

olacak biçimde bir t_0 reel sayısı vardır. $x \geq a$ için $0 \leq f(x) \leq g(x)$ olduğundan $t_2 > t_1 > t_0$ için

$$\left| \int_{t_1}^{t_2} f(x)dx \right| \leq \left| \int_{t_1}^{t_2} g(x)dx \right| < \varepsilon$$

olur ki bu $\int_a^\infty f(x)dx$ integralinin yakınsak olduğunu gösterir. Diğer durum benzer şekilde ispat edileblir. ■

Örnek 266 $\int_0^\infty \dfrac{dx}{e^x + 1}$ *integralinin yakınsaklık durumunu araştıralım. Dikkat edilirse* $x \geq 0$ *için*

$$0 \leq \frac{1}{e^x + 1} \leq \frac{1}{e^x}$$

olup

$$\int_0^\infty \frac{dx}{e^x} = \lim_{t\to\infty} \int_0^t \frac{dx}{e^x} = \lim_{t\to\infty}(1 - \frac{1}{e^t}) = 1$$

olduğundan karşılaştırma testine göre $\int_0^\infty \dfrac{dx}{e^x + 1}$ *integrali yakınsaktır.*

Örnek 267 $\int_2^\infty \dfrac{dx}{\ln x}$ *integralinin yakınsaklık durumunu araştıralım. Dikkat edilirse* $x \geq 2$ *için*

$$0 \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{\ln x}$$

olup

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x} = \lim_{t\to\infty} \int_2^t \frac{dx}{x} = \lim_{t\to\infty}(\ln t - \ln 2) = \infty$$

olduğundan karşılaştırma testine göre $\int_2^\infty \dfrac{dx}{\ln x}$ *integrali ıraksaktır.*

Örnek 268 $\int_1^\infty e^{-x^2} dx$ *integralinin yakınsaklık durumunu araştırınız.*

Örnek 269 $\int_1^\infty \dfrac{x+1}{x^2} dx$ *integralinin yakınsaklık durumunu araştırınız.*

Sonuç 270 (Özel Karşılaştırma) $x \geq a$ *için* f *pozitif bir fonksiyon olsun. O zaman*

- $x \geq a$ *için* $f(x) \leq \frac{c}{x^p}$ *ve* $p > 1$ *ise* $\int_a^\infty f(x)dx$ *yakınsaktır.*

- *$x \geq a$ için $f(x) \geq \frac{c}{x^p}$ ve $p \leq 1$ ise $\int_a^\infty f(x)dx$ ıraksaktır.*

Örnek 271 $\int_1^\infty \dfrac{dx}{x^2 + \ln x}$ *integralinin yakınsaklık durumunu araştıralım. Dikkat edilirse $x \geq 1$ için*

$$\frac{1}{x^2 + \ln x} \leq \frac{1}{x^2}$$

ve

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$$

yakınsak olduğundan verilen integral de yakınsaktır.

Teorem 272 (Limit Testi) *Pozitif tanımlı f fonksiyonu için*

$$\lim_{x \to \infty} x^p f(x) = \gamma$$

olsun. O zaman $\int_a^\infty f(x)dx$ integrali

- *$p > 1$ ve γ sonlu ise yakınsaktır.*
- *$p \leq 1$ ve $\gamma \neq 0$ ise ıraksaktır.*

Ispat. $p > 1$ ve γ sonlu olsun.

$$\lim_{x \to \infty} x^p f(x) = \gamma$$

olduğundan $\varepsilon > 0$ verildiğinde yeterince büyük x ler için

$$\gamma - \varepsilon \leq x^p f(x) \leq \gamma + \varepsilon$$

eşitsizliği sağlanır. Buradan

$$f(x) \leq \frac{\gamma + \varepsilon}{x^p}$$

olacağından özel karşılaştıma dikkate alınırsa $\int_a^\infty f(x)dx$ integrali yakınsak olur.

Şimdi de $p \leq 1$ ve $\gamma \neq 0$ olsun. Yine

$$\lim_{x \to \infty} x^p f(x) = \gamma$$

olduğundan $\varepsilon > 0$ verildiğinde yeterince büyük x ler için

$$\gamma - \varepsilon \leq x^p f(x) \leq \gamma + \varepsilon$$

eşitsizliği sağlanır. Buradan

$$\frac{\gamma - \varepsilon}{x^p} \leq f(x)$$

olacağından özel karşılaştıma dikkate alınırsa $\int_a^\infty f(x)dx$ integrali ıraksak olur. ■

Örnek 273 *$\int_0^\infty \frac{x^2}{4x^4+25}dx$ integrali verilsin.*

$$\lim_{x\to\infty} x^2 f(x) = \lim_{x\to\infty} x^2 \frac{x^2}{4x^4+25} = \frac{1}{4}$$

olup $p = 2$ ve $\gamma = \frac{1}{4}$ olduğundan $\int_0^\infty \frac{x^2}{4x^4+25}dx$ integrali yakınsaktır.

Örnek 274 *$\int_0^\infty \frac{x}{\sqrt{x^4+x^2+1}}dx$ integrali verilsin.*

$$\lim_{x\to\infty} xf(x) = \lim_{x\to\infty} x\frac{x}{\sqrt{x^4+x^2+1}} = 1$$

olup $p = 1$ ve $\gamma = 1$ olduğundan $\int_0^\infty \frac{x}{\sqrt{x^4+x^2+1}}dx$ integrali ıraksaktır.

Örnek 275 *$\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^3+1}}$ integralinin yakınsaklık durumunu araştırınız.*

Örnek 276 *Euler-Poisson integrali denilen $\int_0^\infty e^{-x^2}dx$ integralinin yakınsaklık durumunu araştırınız.*

Örnek 277 *$n \geq 0$ ve $m \in \mathbb{R}$ olsun. Bu durumda $\int_1^\infty \frac{x^m}{1+x^n}dx$ integralinin karakterini belirleyiniz.*

Örnek 278 *$x = 1$ doğrusunun sağında, $y = \frac{1}{x}$ eğrisinin altında ve x-eksenin üstünde kalan bölge R olsun.*

- *R nin alanı nedir?*

- *R nin x-ekseni etrafında döndürülmesi ile oluşan cismin hacmi nedir?*

- *R nin x-ekseni etrafında döndürülmesi ile oluşan cismin yüzey alanı nedir?*

Teorem 279 (Abel Testi) *φ fonksiyonu $[a,\infty)$ aralığında sürekli ve aynı aralıkta sürekli türeve sahip olsun. Eğer*

$$\phi(x) = \int_a^x \varphi(t)dt$$

fonksiyonu $[a,\infty)$ aralığında sınırlı ve g fonksiyonu da

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$$

özelliğine sahip monoton azalan bir fonksiyon ise

$$\int_a^\infty \varphi(x)g(x)dx$$

integrali yakınsaktır.

Ispat. $t_2 > t_1 \geq a$ için

$$\int_{t_1}^{t_2} \varphi(x)g(x)dx$$

integralini dikkate alalım ve buna kısmi integrasyon formülünü uygulayalım. $u = g(x)$ ve $dv = \varphi(x)dx$ denirse $du = g'(x)dx$ ve

$$v = \int_a^x \varphi(t)dt$$

olacağından

$$\begin{aligned}
\int_{t_1}^{t_2} \varphi(x)g(x)dx &= g(x)\int_a^x \varphi(t)dt\Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2}\left(\int_a^x \varphi(t)dt\right)g'(x)dx \\
&= g(t_2)\phi(t_2) - g(t_1)\phi(t_1) - \int_{t_1}^{t_2} \phi(x)g'(x)dx
\end{aligned}$$

olur. g fonksiyonu monoton azalan olduğundan $g'(x) \leq 0$ dır. İntegral hesabın ortalama değer teoreminden

$$\int_{t_1}^{t_2} \phi(x)g'(x)dx = \phi(t_0)\left[g(t_2) - g(t_1)\right]$$

eşitliğini sağlayan br $t_0 \in (t_1, t_2)$ noktası vardır. Buradan

$$\int_{t_1}^{t_2} \varphi(x)g(x)dx = g(t_2)\phi(t_2) - g(t_1)\phi(t_1) - \phi(t_0)\left[g(t_2) - g(t_1)\right]$$

olur. Böylece ϕ sınırlı olduğundan

$$\lim_{t_1,t_2\to\infty} \int_{t_1}^{t_2} \varphi(x)g(x)dx = 0$$

elde edilir bu Cauchy testi ile beraber

$$\int_{a}^{\infty} \varphi(x)g(x)dx$$

integralinin yakınsak olduğunu gösterir. ■

Örnek 280 *$\alpha > 0$ için*

$$\int_{\pi}^{\infty} \frac{\sin x}{x^{\alpha}}dx$$

integralinin karakterini belirleyelim.

$$\varphi(x) = \sin x \text{ ve } g(x) = \frac{1}{x^{\alpha}}$$

denirse

$$|\phi(x)| = \left|\int_{\pi}^{x} \sin t dt\right| = |\cos\pi - \cos x| \leq 2$$

olur. Yine g fonksiyonu monoton azalan ve

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^{\alpha}} = 0$$

olduğundan Abel Testine göre

$$\int_{\pi}^{\infty} \frac{\sin x}{x^{\alpha}}dx$$

integrali yakınsaktır.

Örnek 281 *Fresnel integrali adı verilen*

$$\int_0^\infty \sin(x^2)dx$$

integralin yakınsak olduğunu gösterelim.

Öncelikle verilen integralde $x^2 = t$ dönüşümü yapılırsa

$$\int_0^\infty \sin(x^2)dx = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt$$

elde edilir. O zaman

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt = \int_0^\pi \frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt + \int_\pi^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt$$

eşitliği yazıldığında sağ taraftaki ilk integral bir has integraldir. İkincisi ise bir önceki örnekten yakınsaktır. Sonuç olarak

$$\int_0^\infty \sin(x^2)dx$$

integrali yakınsaktır.

Uyarı 282 $\int_{-\infty}^a f(x)dx$ *integralinde* $x = -t$ *dönüşümü yapılırsa* $\int_{-a}^\infty f(-t)dt$ *integrali elde edilir ve böylece daha önce verilen testler dikkate alınabilir.*

Örnek 283 $\int_{-\infty}^0 x^3 e^x dx$ *integralinin karakterini belirleyiniz.*

Örnek 284 $\int_{-\infty}^0 \dfrac{dx}{1+e^x}$ *integralinin karakterini belirleyiniz.*

Örnek 285 *Aşağıdaki integrallerin karakterini belirleyiniz.*

1. $\int_1^\infty \dfrac{dx}{\sqrt{x+x^3}}$
2. $\int_1^\infty \dfrac{dx}{x^2+\sin^2 x}$
3. $\int_2^\infty \dfrac{dx}{\ln x}$

4. $\int_{-\infty}^{\infty} \dfrac{xdx}{x^2-6x+10}$

5. $\int_{1}^{\infty} \dfrac{\ln(1+x^2)}{x} dx$

6. $\int_{1}^{\infty} \dfrac{\arctan x}{x} dx$

Örnek 286 *Aşağıdaki eşitliklerin doğruluğunu gösteriniz.*

1. $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|} dx = 2$

2. $\int_{0}^{\infty} \dfrac{\ln x}{1+x^2} dx = 0$

4.4.2 İkinci çeşit genelleştirilmiş integraller için yakınsaklık testleri

Aşağıdaki testler f fonksiyonunu $[a, b]$ aralığında sadece $x = a$ noktasında sınırsız olduğu hal için verilmiştir. Diğer durumlar için benzer sonuçlar elde edilebilir.

Teorem 287 (Karşılaştırma Testi) *$a < x \leq b$ için $0 \leq f(x) \leq g(x)$ olsun. Bu durumda*

- *$\int_a^b g(x)dx$ yakınsak ise $\int_a^b f(x)dx$ de yakınsaktır.*
- *$\int_a^b f(x)dx$ ıraksak ise $\int_a^b g(x)dx$ de ıraksaktır.*

Örnek 288 $\int_1^5 \dfrac{dx}{\sqrt{x^4-1}}$ *integrali verilsin. $x > 1$ için*

$$0 \leq \frac{1}{\sqrt{x^4-1}} \leq \frac{1}{\sqrt{x-1}}$$

olup

$$\int_1^5 \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$$

integrali yakınsak olduğundan karşılaştırma testine göre

$$\int_1^5 \frac{dx}{\sqrt{x^4-1}}$$

integrali de yakınsaktır.

Örnek 289 $\int_3^6 \frac{\ln x}{(x-3)^4}dx$ *integrali verilsin.* $x > 3$ *için*

$$0 \leq \frac{1}{(x-3)^4} \leq \frac{\ln x}{(x-3)^4}$$

olup

$$\int_3^6 \frac{dx}{(x-3)^4}$$

integrali ıraksak olduğundan karşılaştırma testine göre

$$\int_3^6 \frac{\ln x}{(x-3)^4}dx$$

integrali ıraksaktır.

Örnek 290 $\int_1^2 \frac{\ln(x+2)}{(x-2)^2}dx$ *integralinin karakterini belirleyiniz.*

Teorem 291 (Limit Testi) f *fonksiyonu* $(a,b]$ *aralığında tanımlı pozifit bir fonksiyon ve*

$$\lim_{x \to a^+} (x-a)^p f(x) = \gamma$$

olsun. O zaman $\int_a^b f(x)dx$ *integrali*

- $p < 1$ *ve* γ *sonlu ise yakınsaktır.*
- $p \geq 1$ *ve* $\gamma \neq 0$ *ise ıraksaktır.*

Örnek 292 $\int_1^5 \frac{dx}{\sqrt{x^3-1}}$ *integrali verilsin.*

$$\lim_{x \to 1^+} (x-1)^{\frac{1}{2}} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (x-1)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{x^3-1}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

olur. O zaman $p = \frac{1}{2}$ *ve* $\gamma = \frac{\sqrt{3}}{3}$ *olduğundan Limit Testine göre*

$$\int_1^5 \frac{dx}{\sqrt{x^3-1}}$$

integrali yakınsaktır.

Örnek 293 $\int_0^3 \dfrac{dx}{(3-x)\sqrt{x^2+1}}$ *integrali verilsin.*

$$\lim_{x\to 3^-}(3-x)f(x) = \lim_{x\to 3^-}(3-x)\frac{1}{(3-x)\sqrt{x^2+1}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$$

olup $p=1$ *ve* $\gamma = \frac{\sqrt{10}}{10} \neq 0$ *olduğundan*

$$\int_0^3 \frac{1}{(3-x)\sqrt{x^2+1}}dx$$

integrali ıraksaktır.

Örnek 294 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{dx}{\sqrt{\sin x}}$ *integralinin karakterini belirleyiniz.*

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{2}}f(x) = \lim_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{\sin x}} = \lim_{x\to 0^+}\sqrt{\frac{x}{\sin x}} = 1$$

olur. O zaman $p=\frac{1}{2}$ *ve* $\gamma = 1$ *olduğundan Limit Testine göre verilen integral yakınsaktır.*

Örnek 295 $\int_0^{\pi} \dfrac{dx}{1+\cos x}$ *integralinin karakterini belirleyiniz.*

$$\lim_{x\to \pi^-}(\pi-x)f(x) = \lim_{x\to \pi^-}(\pi-x)\frac{1}{1+\cos x} = \lim_{x\to \pi^-}\frac{\pi-x}{1+\cos x} = \infty$$

olur. O zaman Limit Testine göre verilen integral ıraksaktır.

Örnek 296 $\int_0^1 \dfrac{\sin x}{x^3}dx$ *integralinin karakterini belirleyiniz.*

Örnek 297 $\int_{-1}^0 \dfrac{x dx}{1-\cos x}$ *integralinin karakterini belirleyiniz.*

Örnek 298 $\int_1^3 \dfrac{dx}{\sqrt[4]{x^3-1}}$ *integralinin karakterini belirleyiniz.*

Örnek 299 α *nın durumlarına göre* $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin x}{x^{\alpha}}dx$ *integralinin yakınsak durumunu araştırınız.*

Örnek 300 $\int_0^1 \dfrac{\arcsin x}{1-x}dx$ *integralinin karakterini belirleyiniz.*

4.5 Bir Özel Genelleştirilmiş İntegral (Gama Fonksiyonu)

Bu kesime aşağıdaki örneği inceleyerek başlayalım.

Örnek 301 $\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$ *integralinin* $x>0$ *için yakınsak,* $x \leq 0$ *için ıraksak olduğunu gösteriniz.*

Öncelikle verilen integrali

$$\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt = \underbrace{\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}dt}_{=A} + \underbrace{\int_1^\infty t^{x-1}e^{-t}dt}_{=B}$$

şeklinde iki integralin toplamı biçiminde yazalım. Şimdi de aşağıdaki durumları inceleyelim

1. Durum. $x \geq 1$ *olsun. O zaman* A *integrali bir has integraldir. Çünkü integrant* $[0,1]$ *aralığında süreklidir.* B *integrali ise birinci çeşit genelleştirilmiş integral olup*

$$\lim_{t\to\infty} t^p f(t) = \lim_{t\to\infty} t^2 t^{x-1}e^{-t} = \lim_{t\to\infty} \frac{t^{x+1}}{e^t} = 0$$

olduğundan birinci çeşit genelleştirilmiş integraller için limit testine ($p=2$ *ve* $\gamma=0$ *durumu) göre yakınsaktır. Sonuç olarak başta verilen integral* $x \geq 1$ *için yakınsak olur.*

2. Durum. $0<x<1$ *olsun. O zaman* A *integrali ikinci çeşit genelleştirilmiş integral olur. Bu durumda*

$$\lim_{t\to 0^+} t^{1-x} f(t) = \lim_{t\to 0^+} t^{1-x}\left(t^{x-1}e^{-t}\right) = 1$$

olduğundan A *integrali ikinci çeşit genelleştirilmiş integraller için limit testine (*$p=1-x<1$ *ve* $\gamma=1$ *durumu) göre yakınsaktır.* B *integrali ise 1. Durumda olduğu gibi yakınsaktır. Sonuç olarak başta verilen integral* $0<x<1$ *için de yakınsak olur.*

3. Durum. $x=0$ *olsun. O zaman* A *integrali*

$$A = \int_0^1 t^{-1}e^{-t}dt$$

biçiminde ikinci çeşit genelleştirilmiş integral olur. Böylece

$$\lim_{t\to 0^+} tf(t) = \lim_{t\to 0^+} t\left(t^{-1}e^{-t}\right) = 1$$

olduğundan A integrali ikinci çeşit genelleştirilmiş integraller için limit testine ($p = 1$ ve $\gamma = 1$ durumu) göre ıraksaktır. O zaman verilen integral $x = 0$ için ıraksak olur.

4. Durum. *$x < 0$ olsun. O zaman yine A integrali ikinci çeşit genelleştirilmiş integral olur.*

$$\lim_{t\to 0^+} tf(t) = \lim_{t\to 0^+} t\left(t^{x-1}e^{-t}\right) = \infty$$

olduğundan A integrali ikinci çeşit genelleştirilmiş integraller için limit testine ($p = 1$ ve $\gamma = \infty$ durumu) göre ıraksaktır. O zaman verilen integral $x < 0$ için ıraksak olur.

Sonuç olarak $\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$ integralinin $x > 0$ için yakınsak, $x \leq 0$ için ıraksak olduğu elde edilir.

Tanım 302 *$\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$ integrali $\Gamma(x)$ ile gösterilir ve Gama fonksiyonu veya genelleştirilmiş faktöriyel fonksiyonu olarak adlandırılır. Yukarıdaki örnekten integralin $x > 0$ için yakınsak, $x \leq 0$ için ıraksak olduğunu biliyoruz. O zaman Γ fonksiyonu (şimdilik) $x > 0$ için tanımlıdır.*

Şimdi Γ fonksiyonuna neden genelleştirilmiş faktöriyel fonksiyonu da dendiğini anlamak için aşağıdaki yolu takip edelim.

$\int_0^\infty e^{-ut}dt$ birinci tip genelleştirilmiş integralini göz önüne alalım. Bu integral $u > 0$ için yakınsak olup değeri $\frac{1}{u}$ dur. Yani $u > 0$ için

$$\int_0^\infty e^{-ut}dt = \frac{1}{u}$$

dur. Bu eşitliğin her iki yanının u ya göre türetilmesi ile

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty te^{-ut}dt &= \frac{1}{u^2}\\
\int_0^\infty t^2e^{-ut}dt &= \frac{2}{u^3}\\
\int_0^\infty t^3e^{-ut}dt &= \frac{3!}{u^4}\\
&\vdots\\
\int_0^\infty t^ne^{-ut}dt &= \frac{n!}{u^{n+1}}
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu son ifade de $u = 1$ alınırsa

$$\int_0^\infty t^n e^{-t} dt = n!$$

elde edilir. Burada n değeri pozitif tam sayı olarak alınmıştır. Bununla birlikte $n > -1$ herhangi bir reel sayı olması halinde de sağ taraftaki integral yakınsaktır. O halde $x > -1$ için

$$x! = \int_0^\infty t^x e^{-t} dt = \Gamma(x+1)$$

yazılabilir. Buradan

$$0! = \Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} dt = 1$$

bulunur. Bu durum 0! in neden 1 olarak tanımlanması gerektiğini açıklar.

Elementer matematikte, n bir pozitif tam sayı olmak üzere $n! = n(n-1)!$ eşitliğinin sağlandığını biliyoruz. Buradan n bir pozitif tam sayı ise

$$\Gamma(n+1) = n! = n(n-1)! = n\Gamma(n)$$

olur. Buna göre

$$\begin{aligned}
\Gamma(1) &= 0! = 1 \\
\Gamma(2) &= 1! = 1 \\
\Gamma(3) &= 2! = 2 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

dir. Şimdi $x > 0$ olsun. O zaman (kısmi integrasyon işlemi ile)

$$\begin{aligned}
\Gamma(x+1) &= \int_0^\infty t^x e^{-t} dt = \lim_{b\to\infty} \int_0^b t^x e^{-t} dt \\
&= \lim_{b\to\infty} \left(-t^x e^{-t}\Big|_0^b + \int_0^b x t^{x-1} e^{-t} dt \right) \\
&= \lim_{b\to\infty} \left(-b^x e^{-b} + x \int_0^b t^{x-1} e^{-t} dt \right) \\
&= x \lim_{b\to\infty} \int_0^b t^{x-1} e^{-t} dt \\
&= x\Gamma(x)
\end{aligned}$$

bulunur. Bu özellik yardımıyla Γ fonksiyonunun herhangi iki tam sayı arasındaki değerlerine karşılık gelen sonuçlarının bilinmesi halinde diğer aralıklardaki fonksiyon değerleri kolayca hesaplanabilir. Örneğin,

$$\Gamma(\frac{5}{2}) = \frac{3}{2}\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{3}{2}\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{3}{4}\Gamma(\frac{1}{2})$$

dir. Yani $\Gamma(\frac{1}{2})$ nin bilinmesi halinde $\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2} \cdots$ noktalarının Γ fonksiyonu altındaki görüntüleri bulunabilir.

Örnek 303 $\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ *olduğu bilindiğine göre* $\Gamma(\frac{1}{2})$ *yi hesaplayınız.* $t = x^2$ *dnüşümü ile*

$$\begin{aligned} \Gamma(\frac{1}{2}) &= \int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}}e^{-t}dt \\ &= \int_0^\infty x^{-1}e^{-x^2}2xdx \\ &= 2\int_0^\infty e^{-x^2}dx \\ &= \sqrt{\pi} \end{aligned}$$

bulunur. Buna göre

$$\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

ve

$$\Gamma(\frac{5}{2}) = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}$$

olur.

Örnek 304 $\Gamma(\frac{5}{3}) \cong 0.9$ *ise* $\int_0^\infty x^4e^{-x^3}dx$ *integralini yaklaşık olarak hesaplayınız.* $x^3 = t$ *denirse* $x = t^{\frac{1}{3}}$ *olup* $dx = \frac{1}{3}t^{-\frac{2}{3}}dt$ *olur. O zaman*

$$\begin{aligned} \int_0^\infty x^4e^{-x^3}dx &= \int_0^\infty t^{\frac{4}{3}}e^{-t}\frac{1}{3}t^{-\frac{2}{3}}dt \\ &= \frac{1}{3}\int_0^\infty t^{\frac{2}{3}}e^{-t}dt \\ &= \frac{1}{3}\Gamma(\frac{5}{3}) \cong 0.3 \end{aligned}$$

Örnek 305 $\int_0^1 x^2 \left(\ln \frac{1}{x}\right)^3 dx$ *integralini hesaplayınız.* $y = -\ln x$ *denirse* $x = e^{-y}$ *olup* $dx = -e^{-y}dy$ *olur. O zaman*

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^2 \left(\ln \frac{1}{x}\right)^3 dx &= \int_0^\infty e^{-2y} y^3 e^{-y} dy \\ &= \int_0^\infty y^3 e^{-3y} dy \\ &= \frac{1}{3}\int_0^\infty \frac{t^3}{27} e^{-t} dt \\ &= \frac{1}{81}\int_0^\infty t^3 e^{-t} dt \\ &= \frac{1}{81}\Gamma(4) = \frac{3!}{81} = \frac{2}{27}\end{aligned}$$

Örnek 306 $\left(\frac{3}{2}\right)!$ *nedir? Hesaplayınız.*

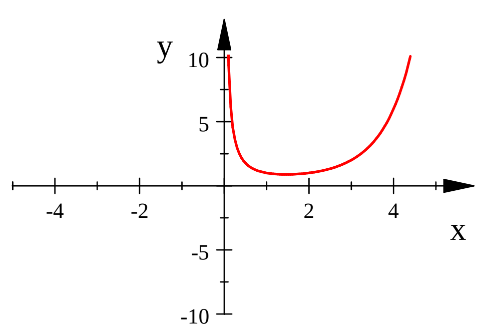
$$\left(\frac{3}{2}\right)! = \Gamma\left(\frac{3}{2}+1\right) = \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}$$

olur.

Uyarı 307 Γ *fonksiyonunun tanım kümesinin* $(0,\infty)$ *olduğu bilinmektedir. Ayrıca*

$$\lim_{x\to 0^+} \Gamma(x) = \infty \text{ ve } \lim_{x\to\infty} \Gamma(x) = \infty$$

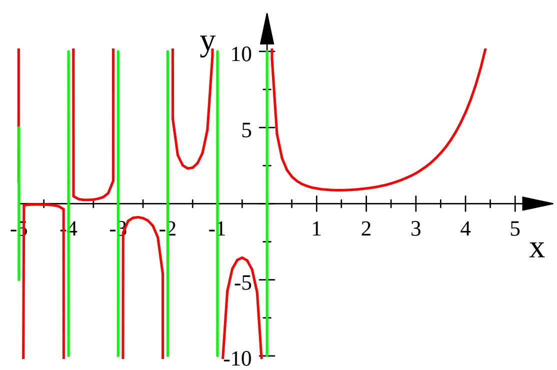
limitleri ve Γ *fonksiyonunun konveks olduğu dikkate alınırsa grafiğinin aşağıdaki gibi olduğu elde edilebilir.*



Uyarı 308 Γ *fonksiyonunu* $x < 0$ *için farklı bir yolla tanımlayarak reel sayılara genişletmek mümkündür.* $x < 0$ *bu fonksiyon aşağıdaki biçimde tanımlanır:*

$$\begin{aligned}
-1 &< x < 0 \text{ ise } \Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x} \\
-2 &< x < -1 \text{ ise } \Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+2)}{x(x+1)} \\
&\vdots \\
-m &< x < -m+1 \text{ ise } \Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+m)}{x(x+1)\cdots(x+m-1)}.
\end{aligned}$$

Burada Γ *fonksiyonunun negatif tam sayılarda ve sıfırda tanımlı olmadığına dikkat ediniz. Bu şekilde genişletilerek elde edilen* Γ *fonksiyonuna genelleştirilmiş gama fonsiyonu denir ve grafiği aşağıdaki gibidir.*



Uyarı 309 *Faktörüyel özelliği pozitif reel sayılar için anlam ifade eder. Negatif reel sayılar için geçerli olmaz.*

Örnek 310 $\left(\frac{5}{2}\right)!$ *nedir? Hesaplayınız.*

Örnek 311 $\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right)$ *nedir? Hesaplayınız.*

$$-2 < x < -1 \text{ için } \Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+2)}{x(x+1)}$$

olduğundan

$$\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(-\frac{3}{2}+2\right)}{-\frac{3}{2}\left(-\frac{3}{2}+1\right)} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\frac{3}{4}} = \frac{4\sqrt{\pi}}{3}$$

olur.

4.6 Ek Sorular

Örnek 312 *Aşağıdaki integrallerin bir genelleştirilmiş integral olup olmadığını belirleyiniz. İntegrallerin yakınsak olup olmadığını araştırınız. Yakınsak olanların (mümkünse) değerini bulunuz.*

- $\int_1^\infty \dfrac{dx}{x^3}$
- $\int_0^\infty e^{-x}\sin x dx$
- $\int_0^1 \dfrac{dx}{x\sqrt{x}}$
- $\int_0^1 \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$
- $\int_0^1 \dfrac{dx}{\sqrt{x-x^2}}$
- $\int_0^\infty \dfrac{dx}{\sqrt{x+x^4}}$
- $\int_0^\infty \dfrac{dx}{x-1}$

Örnek 313 *a nın hangi değeri veya değerleri için*

$$\int_1^\infty \left(\frac{ax}{x^2+1}-\frac{1}{2x}\right)dx$$

integrali yakınsaktır. Karşılık gelen integral(ler)i hesaplayınız.

Örnek 314 *Her $x>0$ için $G(x)=\int_0^\infty e^{-xt}dt$ olsun. $xG(x)=1$ olduğunu gösteriniz.*

Örnek 315 *Birinci bölgede koordinat eksenleri ve $y=-\ln x$ eğrisi arasında kalan sonsuz bölge bir cisim oluşturmak için x-ekseni etrafında döndürülüyor. Oluşan cismin hacmini bulunuz.*

Örnek 316 *Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.*

- $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^{2/3}}$
- $\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$
- $\int_{2}^{\infty} \frac{2}{v^2-v} dv$
- $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x}{(x^2+1)^2} dx$
- $\int_{0}^{1} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} dx$
- $\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(1+\arctan x)}$
- $\int_{-\infty}^{0} e^{-|x|} dx$
- $\int_{0}^{1} x \ln x dx$
- $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(x^2+4)^{3/2}} dx$
- $\int_{0}^{2} \frac{s+1}{\sqrt{4-s^2}} ds$
- $\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx$
- $\int_{0}^{1} (-\ln x) dx$
- $\int_{1}^{\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx$
- $\int_{-\infty}^{\infty} te^{-t^2} dt$
- $\int_{0}^{\infty} e^{-x} \sin x dx$
- $\int_{-\infty}^{0} e^{x} \cos 2x dx$
- $\int_{0}^{\infty} \frac{1}{e^x+e^{-x}} dx$
- $\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$
- $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

Örnek 317 *Aşağıdaki integrallerin yakınsak olup olmadığını testleri kullanarak belirleyeniz.*

- $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan\theta d\theta$
- $\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{\sqrt{\pi - x}} dx$
- $\int_0^{\ln 2} x^{-2} e^{-1/x} dx$
- $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\theta}{(\pi - 2\theta)^{1/3}} d\theta$
- $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x} + \sin x}$
- $\int_0^1 \frac{dt}{t - \sin t}$ *(İpucu: $t \geq 0$ için $t \geq \sin t$)*
- $\int_{-1}^1 \ln|x|\, dx$
- $\int_{\pi}^{\infty} \frac{2 + \cos x}{x} dx$
- $\int_{\pi}^{\infty} \frac{1 + \sin x}{x^2} dx$
- $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$
- $\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1 + \cos x} dx$
- $\int_0^{\pi} \frac{\cos x}{\sqrt{1 - \sin x}} dx$
- $\int_0^1 \left[\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{1-x}} \right] dx$

Örnek 318 $[-2, 1]$ *aralığı üzerinde* $y = \frac{1}{\sqrt{x+2}}$ *ve* $y = 0$ *ın grafikleri ile sınırlanan bölgeyi göz önüne alalım.*

- *Bölgenin sonlu alana sahip olduğunu gösteriniz.*
- *Bölgenin x-ekseni etrafında döndürülmesiyle meydana gelen dönel cismin sonsuz hacme sahip olduğunu gösteriniz.*

Örnek 319 *Aşağıda verilen integrallerin yakınsak veya ıraksak olup olmadığını araştırınız.*

- $\int_1^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx$
- $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x + e^x}$

- $\int_2^\infty \frac{dx}{x^3+4}$
- $\int_0^\infty e^{-x^2} dx$
- $\int_1^\infty \frac{1+e^{-2x}}{\sqrt{x}} dx$
- $\int_1^\infty e^{x^2} dx$

Örnek 320 *Aşağıdaki integrallerin karakterlerini araştırınız.*

- $\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}\cos x}{\sqrt{x^4+x^2+x+1}} dx$
- $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2-4}\sqrt{4-x}}$
- $\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x(x+1)}}$
- $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sqrt[3]{\sin x}\sqrt{\cos 2x}}$
- $\int_0^\infty \frac{\cos^2 x}{\sqrt{x}(x+1)} dx$
- $\int_2^5 \frac{x}{\sqrt[4]{5-x}\sqrt{x-2}(x-3)} dx$
- $\int_0^\infty \frac{x^4}{\sqrt[3]{x-2}(x^6+3)} dx$
- $\int_1^\infty \frac{\ln x}{(x^3+1)\ln(x+1)} dx$
- $\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{x-1}(x-3)^{2/3}}$
- $\int_2^\infty \frac{dx}{\sqrt[5]{x-2}}$

Örnek 321 $\int_0^\infty \frac{2xdx}{x^2+1}$ *integralinin ıraksak oduğunu ve dolayısıyla* $\int_{-\infty}^\infty \frac{2xdx}{x^2+1}$ *integralinin de ıraksak olduğunu gösteriniz. Sonra*

$$\lim_{b\to\infty} \int_{-b}^{b} \frac{2xdx}{x^2+1} = 0$$

olduğunu gösteriniz.

Örnek 322 *Birinci bölgede* $y = e^{-x}$ *ile* x*-ekseni arasında kalan bölgenin*

- *alanını bulunuz*
- *y-ekseni etrafında döndürülmesi ile oluşan cismin hacmini bulunuz.*
- *x-ekseni etrafında döndürülmesi ile oluşan cismin hacmini bulunuz.*

Örnek 323 *$y = \sec x$ ve $y = \tan x$ arasında $x = 0$ dan $x = \frac{\pi}{2}$ ye kadar olan bölgenin*

- *alanını bulunuz*
- *x-ekseni etrafında döndürülmesi ile oluşan cismin hacmini bulunuz.*

Örnek 324 *Aşağıdaki integralleri yakınsak yapan C sabitini bulunuz. Bu C sabiti için integralleri hesaplayınız.*

- $\int_0^\infty \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+4}} - \frac{C}{x+2}\right) dx$
- $\int_0^\infty \left(\frac{x}{x^2+1} - \frac{C}{3x+1}\right) dx$

Örnek 325 $\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^2+1} dx$ *integralinin mutlak yakınsak olduğunu gösteriniz.*

Örnek 326 $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ *integralinin yakınsak olduğunu gösteriniz.*

Örnek 327 $\int_0^\infty e^{-x^2} dx$ *integralinin yakınsak olduğunu gösteriniz.*

Örnek 328 $\int_0^\infty \frac{1-\cos x}{x^2} dx$ *integralinin yakınsak olduğunu gösteriniz.*

Örnek 329 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x) dx = -\frac{\pi}{2} \ln 2$ *eşitliğinin sağlandığını göstriniz.*
Öncelikle verilen integral ikinci çeşit genelleştirilmiş integraldir.

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 0^+} x^{\frac{1}{2}} f(x) &= \lim_{x \to 0^+} x^{\frac{1}{2}} \ln(\sin x) \\
&= \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(\sin x)}{x^{-\frac{1}{2}}} \\
&= \lim_{x \to 0^+} -2 \frac{x\sqrt{x} \cos x}{\sin x} \\
&= 0
\end{aligned}$$

olduğundan limit testi gereği verilen integral yakınsaktır. Bu integralin değeri I olsun. O zaman $x = \frac{\pi}{2} - t$ değişken değiştirmesi ile

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)\, dx \\
&= \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \ln\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right)\right)(-dt) \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos t)\, dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos x)\, dx
\end{aligned}$$

olur. Böylece

$$
\begin{aligned}
2I &= I+I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)\,dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos x)\,dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\ln(\sin x)+\ln(\cos x))\,dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x\cos x)\,dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{\sin 2x}{2}\right)dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin 2x)\,dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln 2dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin 2x)\,dx-\frac{\pi}{2}\ln 2 \qquad (2x=t) \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \ln(\sin t)\,dt-\frac{\pi}{2}\ln 2 \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t)\,dt+\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln(\sin t)\,dt-\frac{\pi}{2}\ln 2 \\
&= \frac{I}{2}+\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln(\sin t)\,dt-\frac{\pi}{2}\ln 2 \quad (s=\pi-t) \\
&= \frac{I}{2}+\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \ln(\sin(\pi-s))\,(-ds)-\frac{\pi}{2}\ln 2 \\
&= \frac{I}{2}+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin s)\,ds-\frac{\pi}{2}\ln 2 \\
&= \frac{I}{2}+\frac{I}{2}-\frac{\pi}{2}\ln 2 \\
&= I-\frac{\pi}{2}\ln 2
\end{aligned}
$$

olur. O zaman

$$I=-\frac{\pi}{2}\ln 2$$

elde edilir.

Örnek 330 *Gama fonksiyonu yardımıyla aşağıdaki integralleri hesaplayınız.*

- $\int_0^\infty x^3 e^{-x} dx = 6$
- $\int_0^\infty x^6 e^{-2x} dx = \frac{45}{8}$
- $\int_0^\infty \sqrt{x} e^{-x^3} dx = \frac{1}{3}\sqrt{\pi}$
- $\int_0^\infty 3^{-4x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4\sqrt{\ln 3}}$
- $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{-\ln x}} = \sqrt{\pi}$
- $\int_0^\infty \sqrt[4]{x} e^{-\sqrt{x}} dx$

5 DİZİLER

Tanım 331 *Tanım kümesi pozitif tam sayılar kümesi olan her fonksiyona bir dizi denir. Değer kümesi reel sayılar kümesi ise diziye reel terimli dizi adı verilir.*

Örneğin n bir pozitif tam sayı ise $f(n) = n^2 + n$ bir reel terimli dizidir. Alışılagelmiş $f(n)$ gösterimi yerine bir dizi genelikle (a_n) (veya $(a_n)_1^\infty, \{a_n\}$) biçiminde gösterilir. n tam sayısına a_n teriminin indisi denir. İndis yerine değerler konularak dizinin terimleri elde edilir. a_1 birinci terim, a_2 ikinci terim, ... a_n n-inci terimdir. a_n n-inci terimine dizinin genel terimi denir. Genel terimi a_n olan dizi (a_n) ile gösterilir. Örneğin $(\frac{n}{n+1})$ dizisi denilince terimleri $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, ...\frac{n}{n+1}, ...$ olan dizi anlaşılır. Genel terimi a_n olan dizi (a_n) bimimde gösterilebileceği gibi terimleri listelemek ile $(a_1, a_2, ..., a_n, ...)$ biçiminde de gösterilebilir. Bazı durumlarda dizinin ilk terimi olarak a_0 alınır ve bu durumda dizi $a_0, a_1, ...a_n, ...$ olur.

Örnek 332 $(\frac{1}{2^n})$, $((-1)^n)$, $((1+\frac{1}{n})^n)$ *dizilerinin ilk üç terimini yazınız.*

Reel terimli diziler reel eksende noktalar olarak ifede edilebileceği gibi düzlemde noktalar olarakta ifade edilebilir.

Örnek 333 $(\frac{1}{n})$ *dizisinin terimlerini reel eksende ve düzlemde gösteriniz.*

Bazen bir dizinin indisi olan n sayısı büyüdükçe dizinin terimleri belli bir değere yaklaşır. Örneğin

$$(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n}, ...)$$

dizisinde n büyüdükçe terimler 0 a yaklaşırken

$$(0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, ..., 1 - \frac{1}{n}, ...)$$

dizisinde terimler 1 e yaklaşır. Diğer taraftan

$$(\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, ..., \sqrt{n}, ...)$$

dizisinde n indisi büyüdükçe terimler verilen her sayıdan büyük olurken

$$(-1, 1, -1, ..., (-1)^n, ...)$$

dizisinde terimler -1 ile 1 olarak değişmektedir ve tek bir değere yakınsamazlar.

Dizilerin yakınsaması ile ilgili genel kural aşağıdaki tanım ile verilmiştir.

Tanım 334 (a_n) *reel terimli bir dizi ve* L *bir reel sayı olsun. Verilen her* $\varepsilon > 0$ *sayısı için* $n > n_0$ *olduğunda* $|a_n - L| < \varepsilon$ *özelliğini sağlayan bir* n_0 *tam sayısı bulunabiliyorsa* (a_n) *dizisi* L *ye yakınsaktır denir.* L *sayısına da* (a_n) *dizisinin limiti denir. Bu durum*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \text{ veya } a_n \to L$$

biçiminde gösterilir. $\lim_{n\to\infty} a_n$ *mevcut değil ise* (a_n) *dizisine ıraksaktır denir.*

Bu tanımın temelde söylediği şey şudur: L sayısının herbir komşuluğu, (a_n) dizisinin sonlu sayıdaki terimleri hariç diğer tüm terimlerini içeriyorsa (a_n) dizisi L sayısına yakınsıyor denir. Bilindiği gibi L sayısının ε-komşuluğu

$$\{x \in \mathbb{R} : |x - L| < \varepsilon\} = (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$$

kümesidir.

Örnek 335 $(\frac{1}{\sqrt{n}})$ *dizisinin* 0 *a yakınsak olduğunu gösteriniz.* 0 *ın* $\frac{1}{50}$*-komşuluğunun dışında kaç terimi vardır?*

Dizinin terimleri sıralandığında $1, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{5}}, \ldots$ *biçiminde olduğu görülmektedir ve sezgisel olarak* n *indisi sınırsız arttığında terimlerin* 0 *limitine yaklaştığı görülür. Yakınsaklığı göstermek için* $\varepsilon > 0$ *sayısı verilsin. Dizinin terimleri pozitif olduğundan* $|a_n - 0| < \varepsilon$ *ifadesi* $\frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon$ *şeklini alır ki buradan* $n > \frac{1}{\varepsilon^2}$ *olur. Böylece* n_0 *sayısı olarak* $\frac{1}{\varepsilon^2}$ *ye eşit veya daha büyük olan pozitif tam sayı seçilmelidir.*

Örneğin $\varepsilon = \frac{1}{50}$ *verildiğinde* $n_0 \geq 2500$ *alınmalıdır. Bu durumda* $n > n_0 \geq 2500$ *olduğunda*

$$|a_n - 0| = \frac{1}{\sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n_0}} \leq \frac{1}{\sqrt{2500}} = \frac{1}{50} = \varepsilon$$

bulunur. Yani dizinin 2500 *tane terimi* 0 *ın* $\frac{1}{50}$*-komşuluğunun dışındadır.*

Eğer $n \to \infty$ için a_n sınırsız olarak artıyor veya azalıyor ise (a_n) dizisi ıraksaktır ve bu durum

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \text{ veya } \lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$$

biçiminde gösterilir. Birincisine sonsuza ıraksama, ikincisine eksi sonsuza ıraksama denir. Bunların dışında $\lim_{n\to\infty} a_n$ limit var olmadığında da dizi ıraksaktır. Örneğin $\lim_{n\to\infty}(-1)^n$ ve $\lim_{n\to\infty} \sin n$ limitleri mevcut değildir.

Diziler özel fonksiyonlar olduklarından fonksiyonlar için geçerli olan limit alma kuralları diziler içinde geçerlidir. Bir dizinin limiti hesaplanırken o dizide n yerine x konup $x \to \infty$ için limit alınabilir. Buna göre $a_n = f(n)$ genel terimli dizi için

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{x\to\infty} f(x)$$

yazılabilir. Bu durumda L'Hopital kuralı da kullanılabilir. Bu bilgiler neticesinde aşağıdaki teoremin ispatı açıktır.

Teorem 336 *(a_n) ve (b_n) yakınsak reel sayı dizileri için* $\lim_{n\to\infty} a_n = L_1$ *ve* $\lim_{n\to\infty} b_n = L_2$ *olsun. O zaman* k *bir sabit sayı olmak üzere aşağıdaki eşitlikler sağlanır.*

- $\lim_{n\to\infty} k = k$
- $\lim_{n\to\infty} ka_n = kL_1$
- $\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = L_1 \pm L_2$

- $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = L_1 L_2$
- $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{L_1}{L_2}$, *($L_2 \neq 0$)*

Örnek 337 $\left((n+1)^{\frac{1}{n}}\right)$ *dizisinin limitini bulunuz.*

$f(x) = (x+1)^{\frac{1}{x}}$ *diyelim.* $\lim_{x\to\infty} f(x)$ *limiti* ∞^0 *belirsizliğine sahiptir. O zaman*

$$\lim_{x\to\infty} \ln f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x+1)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x+1}}{1} = 0$$

olduğundan

$$\lim_{x\to\infty} (x+1)^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1$$

olur. Böylece

$$\lim_{n\to\infty} (n+1)^{\frac{1}{n}} = 1$$

bulunur.

Örnek 338 $\left(\sqrt{\frac{n+1}{n}}\right)$ *ve* $\left((\frac{n+1}{n-1})^n\right)$ *dizilerinin limitlerini bulunuz.*

Teorem 339 $|r| < 1$ *ise* $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$ *dır.*

Örnek 340 $\left(\frac{1}{2^n}\right)$, $\left(\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}\right)$, (5^{-n}) *dizilerinin limitleri* 0 *dır.*

Teorem 341 (Diziler için Sıkıştırma Teoremi) $(a_n), (b_n)$ *ve* (c_n) *reel sayı dizileri olsunlar. Eğer belli bir* n_0 *sayısından büyük bütün* n *ler için*

$$a_n \leq b_n \leq c_n$$

eşitsizliği sağlanıyor ve

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = L$$

ise

$$\lim_{n\to\infty} b_n = L$$

dir.

Örnek 342 $\left(\frac{\cos n}{n}\right)$ *ve* $\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)$ *dizilerinin limitleri için sıkıştırma teoremi kullanılabilir.*

Örnek 343 $(|a_n|)$ *dizisi* 0 *a yakınsak ise* (a_n) *dizisi de* 0 *a yakınsar.*

Örnek 344 $\left(\frac{2^n}{n!}\right)$ *dizisinin limitini hesaplayınız.*

$n \to \infty$ için $2^n \to \infty$ ve $n! \to \infty$ olduğundan verilen dizinin yakınsaklığı veya ıraksaklığı hemen belli değildir. Üstelik $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n!}$ *limiti* $\frac{\infty}{\infty}$ *belirsizliğine sahip olmasına rağmen* $n!$ *nedeni ile L'Hopital kuralınıda kullanamayız. Ancak dizinin genel terimi üzerinde bir cebirsel işlem yaparak sıkıştırma teoremini kullanabiliriz.*

$$\begin{aligned}\frac{2^n}{n!} &= \frac{\overbrace{2.2.2...2}^{n\ tane}}{1.2.3...n} = \frac{2}{1}.\frac{2}{2}.\frac{2}{3}...\frac{2}{n} \\ &\leq 2.1.\frac{2}{3}.\frac{2}{3}...\frac{2}{3} = 2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} = \frac{9}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{n}\end{aligned}$$

bulunur. O zaman sıkıştırma teoreminde $a_n = 0$, $b_n = \frac{2^n}{n!}$ *ve* $c_n = \frac{9}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ *alınırsa*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = 0$$

olduğundan $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n!} = 0$ *bulunur.*

Örnek 345 (Sıkça raslanan limitler) *Aşağıdaki altı dizi karşılarında yazılı limitlere yakınsar.*

- $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$
- $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$
- $\lim_{n\to\infty} r^{\frac{1}{n}} = 1$ *($r > 0$)*
- $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$ *($|r| < 1$)*
- $\lim_{n\to\infty} (1 + \frac{r}{n})^n = e^r$ *(her r için)*
- $\lim_{n\to\infty} \frac{r^n}{n!} = 0$ *(her r için)*

Örnek 346 (İndirgemeli diziler) *Bir dizi, önce birinci terimi (veya terimlerinden birinin değeri) verilip, sonraki terimlerin önceki terimler cinsinden ifade edilmesi ile de tanımlanabilir. Bu tür dizilere indirgemeli veya tekrarlamalı diziler denir.*

- *(a_n) dizisi, $a_1 = 2$ ve $n \geq 1$ için $a_{n+1} = 3a_n + 4$ indirgeme formülü ile tanımlansın. Dizinin dördüncü terimi kaçtır.*

- *(a_n) dizisi, $a_1 = 1$ ve $n > 1$ için $a_n = na_{n-1}$ indirgeme formülü ile tanımlansın. Dizinin dördüncü terimi kaçtır. $a_n = n!$ olduğuna dikkat ediniz.*

- *(a_n) dizisi, $a_1 = 1$, $a_2 = 1$ ve $n > 2$ için $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ indirgeme formülü ile tanımlansın. Bu şekilde tanımlı (a_n) dizisine Fibonacci Dizisi denir ve dizinin terimlerine de Fibonacci Sayıları adı verilir.*

5.1 Monoton ve Sınırlı Diziler

Önceki kesimde $\lim_{n\to\infty} a_n$ limiti bulunarak (a_n) dizisinin yakınsaklığı araştırılmıştır. Ancak her zaman bu limiti hesaplamak mümkün olmayabilir. Örneğin genel terimi

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} - \ln n$$

dizinin yakınsayıp yakınsamadığı bahsi geçen limit dikkate alınarak bulunamaz. Bu kesimde (a_n) dizisinin limiti bulunmadan yakınsaklığı hakkında karar verebileceğimiz önemli bir sonucu vereceğiz.

Tanım 347 (Monoton dizi) *(a_n) reel terimli bir dizi olsun. Eğer her n pozitif tam sayısı için*

- *$a_{n+1} > a_n$ ise (a_n) dizisi artan,*
- *$a_{n+1} < a_n$ ise (a_n) dizisi azalan,*
- *$a_{n+1} \geq a_n$ ise (a_n) dizisi azalmayan,*
- *$a_{n+1} \leq a_n$ ise (a_n) dizisi artmayandır.*

Yukarıdaki tiplerden herhangi birini sağlayan diziye monoton dizi denir.

Uyarı 348 *Bir dizinin monotonluk durumu araştırılırken $a_{n+1} - a_n$ farkına veya $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ oranına bakılabileceği gibi, mümkünse $f(n) = a_n$ ile verilen $f(x)$ fonksiyonunun türevinin işareti de incelenebilir*

Örnek 349 *Genel terimleri verilen dizilerin monoton olup olmadığını araştırınız.*

- $a_n = n$
- $a_n = \frac{n}{n+1}$
- $a_n = \frac{2^n}{n!}$
- $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$
- $a_n = 5$
- $a_n = \frac{n}{e^n}$

Tanım 350 (Sınırlı dizi) *(a_n) reel terimli bir dizi olsun.*

- *Eğer her n pozitif tam sayısı için $a_n \leq M$ olacak şekilde bir M reel sayısı varsa (a_n) dizisine üstten sınırlıdır denir.*
- *Eğer her n pozitif tam sayısı için $a_n \geq m$ olacak şekilde bir m reel sayısı varsa (a_n) dizisine alttan sınırlıdır denir.*
- *Dizi hem alttan hem üstten sınırlı ise diziye sınırlı dizi denir.*

Örnek 351 *Genel terimleri verilen dizilerin sınırlı olup olmadığını araştırınız.*

- $a_n = n$
- $a_n = \frac{n}{n+1}$
- $a_n = \frac{2^n}{n!}$
- $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$
- $a_n = 5$
- $a_n = \frac{n}{e^n}$
- $a_n = \frac{2n+1}{n+1}$

Uyarı 352 *Yakınsak her dizi sınırlıdır. (a_n) reel terimli dizisi L sayısına yakınsak olsun. O zaman $n > n_0$ olduğunda $|a_n - L| < 1$ olacak biçimde bir n_0 sayısı vardır. Bu durumda her $n > n_0$ için $L - 1 < a_n < L + 1$ olur. O zaman $m = \min\{L-1, a_1, a_2, ..., a_{n_0}\}$ ve $M = \max\{L+1, a_1, a_2, ..., a_{n_0}\}$ dersek her n pozitif tam sayısı için $m \leq a_n \leq M$ olur. Yani dizi sınırlıdır.*

Uyarı 353 *Sınırlı bir dizi yakınsak olmayabilir. Örneğin* $(a_n) = ((-1)^n)$ *dizisi sınırlıdır fakat yakınsak değildir. Monoton bir dizi de yakınsak olmayabilir. Örneğin* $(a_n) = (n)$ *dizisi monotondur fakat yakınsak değildir. Sınırlı bir dizi monoton ve monoton bir dizi de sınırlı olmayabilir. (Bu uyarıdaki iki örnek bunun için kullanılabilir)*

Teorem 354 *Bir* (a_n) *dizisi hem sınırlı hem de monoton ise yakınsaktır.*

Ispat. Terimleri azalmayan diziler için ispat yapalım. (a_n) sınırlı olduğundan her n pozitif tam sayısı için $m \leq a_n \leq M$ olacak şekilde m ve M sayıları vardır. Bu ise disinin terimlerinin kümesi olan $S = \{a_1, a_2, ...a_n, ...\}$ kümesinin üstten sınırlı olduğunu söyler. O zaman bu kümenin L gibi bir en küçük üst sınırı vardır. Verilen $\varepsilon > 0$ için $L - \varepsilon < L$ olup $L - \varepsilon$ sayısı S kümesinin üst sınırı değildir. Böylece $a_{n_0} > L - \varepsilon$ olacak biçimde bir n_0 sayısı vardır. (a_n) azalmayan olduğundan

$$L - \varepsilon < a_{n_0} \leq a_{n_0+1} \leq \cdots \leq L < L + \varepsilon$$

olur. Buradan her $n > n_0$ için $|a_n - L| < \varepsilon$ elde edilir ki bu $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ demektir. ■

Örnek 355 *Genel terimi aşağıda verilen dizilerin yakınsak olduğunu gösteriniz.*

- $a_n = \frac{n}{n+1}$
- $a_n = \frac{2^n}{n!}$
- $a_n = \frac{n}{e^n}$
- $a_n = \frac{2n+1}{n+1}$
- $a_n = \frac{1.3.5..(2n-1)}{2.4.6...(2n)}$ *(*$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2n+1}{2n+2} < 1$ *ve* $0 < a_n < 1$*)*
- $a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$ *(*$a_{n+1} - a_n > 0$ *ve* $\frac{1}{2} \leq a_n < 1$*)*

Örnek 356 *$a_1 = \sqrt{2}$ ve $n \geq 1$ için $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$ indirgeme bağıntısı ile tanımlı (a_n) dizisinin yakınsak olduğunu gösterip limitini bulunuz.*

$$\begin{aligned} a_1 &= \sqrt{2} < 2 \\ a_2 &= \sqrt{2 + a_1} < \sqrt{2+2} = 2 \\ a_3 &= \sqrt{2 + a_2} < \sqrt{2+2} = 2 \\ &\vdots \\ a_n &< 2 \end{aligned}$$

olduğundan her n doğal sayısı için $0 < a_n < 2$ dir. Yani (a_n) dizisi sınırlıdır. Diğer taraftan n doğal sayısı için

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \sqrt{2 + a_n} - a_n \\ &= \frac{2 + a_n - a_n^2}{\sqrt{2 + a_n} + a_n} \\ &= \frac{(2 - a_n)(1 + a_n)}{\sqrt{2 + a_n} + a_n} > 0 \end{aligned}$$

olur. Böylece (a_n) dzisi monoton artandır. Sonuç olarak (a_n) dizisi monoton ve sınırlı olduğundan yakınsaktır. Şimdi $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ olsun. O zaman $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$ eşitliğinden limit alınırsa $L = \sqrt{2 + L}$ bulunur. Buradan $L = 2$ olarak elde edilir.

Örnek 357 *$a_1 = 1$ ve $n \geq 1$ için $a_{n+1} = \frac{1}{4}a_n + 6$ indirgeme bağıntısı ile tanımlı (a_n) dizisinin yakınsak olduğunu gösterip limitini bulunuz.*

6 SERİLER

Tanım 358 *Verilen bir (a_n) dizisi için*

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

*ifadesine bir sonsuz seri denir. a_n, serinin n. terimidir ve buna serinin **genel terimi** denir. Genel terimi a_n olan bir seri*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

biçiminde gösterilir. Böyle bir seri için

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1 \\ s_2 &= a_1 + a_2 \\ &\vdots \\ s_n &= a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \end{aligned}$$

*ile tanımlı (s_n) dizisine serinin **kısmi toplamlar dizisi** denir. Eğer (s_n) kısmi toplamlar dizisi bir L sayısına yakınsıyorsa seriye yakınsaktır ve L toplamına sahiptir denir. Bu durumda*

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = L$$

yazılır. Eğer serinin kısmi toplamlar dizisi yakınsamıyorsa seri ıraksaktır denir.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisindeki n değişkeni keyfidir. n yerine herhangi bir değişkende alınabilir. Yani $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{k=1}^{\infty} a_k, \sum_{i=1}^{\infty} a_i$ aynı serilerdir. Ayrıca seride değişkenin 1 den başlama zorunluluğu yoktur. Örneğin $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{n}{n^4-7}$, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ de birer seridirler. Eğer değişkenin başlangıç değeri belirtilmemişse başlangıç değeri olarak 1 düşünülecektir.

Örnek 359 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ *serisinin yakınsaklık durumunu araştıralım. Öncelikle serinin genel terimi $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$ dir. Kısmi toplamlar dizisi ise*

$$\begin{aligned} s_n &= a_1 + a_2 + \cdots + a_n \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} \end{aligned}$$

dir. Burada

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
s_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \\
&= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\
&= 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}
\end{aligned}$$

olur. O zaman

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

olduğundan seri yakınsaktır ve toplamı 1 *dir. Yani*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$

olur.

Örnek 360 $\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(\frac{n+1}{n}\right)$ *serisinin yakınsaklık durumunu araştıralım. Serinin genel terimi* $a_n = \log\left(\frac{n+1}{n}\right)$ *dir. Kısmi toplamlar dizisi ise*

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} \log\left(\frac{k+1}{k}\right)$$

dir. Burada

$$\log\left(\frac{k+1}{k}\right) = \log(k+1) - \log(k)$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
s_n &= \sum_{k=1}^{n} \log\left(\frac{k+1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \left(\log(k+1) - \log(k)\right) \\
&= (\log 2 - \log 1) + (\log 3 - \log 2) + \cdots + (\log(n+1) - \log(n)) \\
&= \log(n+1)
\end{aligned}$$

olur. O zaman

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \log(n+1) = \infty$$

olduğundan seri ıraksaktır.

6.1 Geometrik Seriler

$a \neq 0$ olmak üzere a ve r herhangi iki reel sayı olsun. Bu durumda

$$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$$

biçimindeki serilere **geometrik seri** adı verilir. Böyle bir seri

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$$

biçiminde de yazılabilir.

Eğer $r = 1$ ise serinin kısmi toplamlar dizisi

$$s_n = a + ar + \cdots + ar^{n-1} = a + a + \cdots + a = na$$

olur. O zaman a nın işaretine bağlı olarak $\lim_{n\to\infty} s_n = \pm\infty$ olur ki bu serinin ıraksak olduğu anlamına gelir.

Eğer $r = -1$ ise serinin kısmi toplamlar dizisi

$$\begin{aligned} s_n &= a + ar + \cdots + ar^{n-1} = a + a(-1) + a(-1)^2 \cdots + a(-1)^{n-1} \\ &= a - a + a - a + \cdots + a(-1)^{n-1} \\ &= \begin{cases} 0 & , \quad n \text{ çift} \\ a & , \quad n \text{ tek} \end{cases} \end{aligned}$$

olur. O zaman $\lim_{n\to\infty} s_n$ mevcut değildir. Yani seri ıraksaktır.

Şimdi $|r| \neq 1$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} s_n &= a + ar + \cdots + ar^{n-1} \\ rs_n &= ra + ar^2 + \cdots + ar^n \end{aligned}$$

olduğundan

$$s_n - rs_n = a - ar^n$$

ve böylece

$$s_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}$$

olur. Şimdi eğer $|r| < 1$ ise $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$ olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{a}{1 - r}$$

olur. Eğer $|r| > 1$ ise $\lim_{n\to\infty} |r|^n = \infty$ olduğundan $\lim_{n\to\infty} s_n$ mevcut değildir.

Sonuç olarak $|r| < 1$ ise geometrik seri yakınsaktır ve toplamı $\dfrac{a}{1-r}$ dir. $|r| \geq 1$ ise geometrik seri ıraksaktır.

Özel olarak $a = 1$ ve $|r| < 1$ için geometrik seri

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} r^n = 1 + r + r^2 + \cdots = \frac{1}{1-r}$$

dir.

Örnek 361 *$a = \frac{1}{9}$ ve $r = \frac{1}{3}$ için geometrik serinin toplamı*

$$\frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \cdots + \frac{1}{9}\frac{1}{3^{n-1}} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{9}\frac{1}{3^{n-1}} = \frac{\frac{1}{9}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{6}$$

olur.

Örnek 362 *Bir topu yatay bir yüzeye a metre yükseklikten bırakıyoruz. Top her seferinde h metre yükseklikten aşağı düşüp rh metre kadar yukarı zıplamaktadır. Burada $0 < r < 1$ dir. Topun duruncaya kadar toplam aldığı mesafeyi bulunuz.*

Topun duruncaya kadar toplam aldığı mesafe L olsun. Ozaman

$$\begin{aligned} L &= a + 2ar + 2ar^2 + \cdots \\ &= a + 2ar(1 + r + r^2 + \cdots) \\ &= a + 2ar\frac{1}{1-r} \\ &= a + \frac{2ar}{1-r} \\ &= a\frac{1+r}{1-r} \end{aligned}$$

olur. Örneğin $a = 6$ metre ve $r = \frac{2}{3}$ ise toplam aldığı mesafe $L = 30$ metre olur.

Örnek 363 $2,\overline{45}=\frac{243}{99}$ *olduğunu gösteriniz.*

$$\begin{aligned}
2,\overline{45} &= 2,454545\cdots \\
&= 2+\frac{45}{100}+\frac{45}{(100)^2}+\frac{45}{(100)^3}+\cdots \\
&= 2+\frac{45}{100}\left(1+\frac{1}{100}+\frac{1}{(100)^2}+\cdots\right) \\
&= 2+\frac{45}{100}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{100}}\right) \\
&= 2+\frac{45}{100}\frac{100}{99}=\frac{243}{99}
\end{aligned}$$

bulunur.

Uyarı 364 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *serisi verilmiş olsun. Bu serinin yakınsak ve toplamının* L *olduğunu kabul edelim. O zaman serinin* (s_n) *kısmi toplamlar dizisi* L *sayısına yakınsar. Diğer taraftan*

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

ve

$$s_{n-1} = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}$$

olduğundan

$$s_n - s_{n-1} = a_n$$

olur. Böylece $\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = L$ *olduğundan*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L - L = 0$$

olur. Buna göre aşağıdaki teoremi ifade edebiliriz.

Teorem 365 *Yakınsak bir seride genel terimin limiti sıfırdır.*

Uyarı 366 *Bu teoremin karşıtı doğru değildir. Yani genel terimin limitinin sıfır olması serinin yakınsak olacağı anlamına gelmez. Örneğin* $\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(\frac{n+1}{n}\right)$ *serisinin genel teriminin limiti sıfır olmasına rağmen seri ıraksaktır.*

Uyarı 367 *Teoremdeki ifadeye denk olan karşıt tersi ($p \Rightarrow q \equiv q' \Rightarrow p'$) uygulamada daha kullanışlıdır.*

$$\sum a_n \text{ yakınsak ise } \lim a_n = 0 \equiv \lim a_n \neq 0 \text{ ise } \sum a_n \text{ ıraksaktır.}$$

Yani bir seride genel terimin limiti sıfır değilse o seri ıraksaktır.

Örnek 368 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n}, \sum_{n=1}^{\infty} 2^{\frac{1}{n}}, \sum_{n=1}^{\infty} \sin n$ *serileri ıraksaktırlar. Çünkü hiçbirinin genel teriminin limiti sıfır değildir.*

Tanım 369 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *serisi verilsin. Bu durumda*

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots$$

ifadesine serinin ***kalan terimi*** *denir.*

Uyarı 370 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *serisi yakınsak ve toplamı L olsun. O zaman bu serinin kısmi toplamlar dizisi (s_n) ise $\lim_{n\to\infty} s_n = L$ dir. Böylece*

$$L = \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = s_n + R_n$$

olduğundan

$$L = \lim_{n\to\infty} (s_n + R_n) = L + \lim_{n\to\infty} R_n$$

olur. Yani

$$\lim_{n\to\infty} R_n = 0$$

dır. Buna göre aşağıdaki teoremi ifade edebiliriz.

Teorem 371 *Yakınsak bir seride kalan terimin limiti sıfırdır.*

Uyarı 372 *Dizilerle yapılan bazı işlemler seriler içinde geçerlidir.*

1. *$\sum a_n$ ve $\sum b_n$ yakınsak iki seri ve toplamları sırası ile L_1 ve L_2 olsun. O zaman*
$$\sum (a_n \pm b_n) = L_1 \pm L_2$$
ve $\lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere
$$\sum \lambda a_n = \lambda L_1$$
eşitlikleri doğrudur.

2. *Iraksak bir serinin sıfırdan farklı sabit bir katı ıraksaktır.*

3. *$\sum a_n$ yakınsak ve $\sum b_n$ ıraksak ise $\sum (a_n \pm b_n)$ ıraksaktır.*

4. *$\sum a_n$ ve $\sum b_n$ serilerinin her ikiside ıraksak ise $\sum (a_n \pm b_n)$ serisi yakınsak olabilir. Örneğin genel terimleri $a_n = 1$ ve $b_n = -1$ olan seriler ıraksak olmasına rağmen $\sum (a_n + b_n)$ serisi yakınsaktır.*

5. *Bir seriden sonlu sayıda terimin çıkarılması veya sonlu sayıda terimin eklenmesi serinin karakterini etkilemez. Ancak yakınsak serilerde bu işlem sadece serinin toplamını değiştirir.*

6.2 Alıştırmalar

Örnek 373 *Aşağıda verilen serilerin toplamını bulunuz.*

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$. *Serinin genel terimi $a_n = \frac{1}{n(n+2)}$ dir. Kısmi toplamlar dizisi ise*
$$\begin{aligned} s_n &= a_1 + a_2 + \cdots + a_n \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+2)} \end{aligned}$$
dir. Burada
$$\frac{1}{k(k+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}\right)$$

olduğundan

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+2)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right] \\ &= \frac{3}{4} - \frac{2n+3}{2(n+1)(n+2)} \end{aligned}$$

olur. O zaman

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{3}{4}$$

olduğundan serinin toplamı $\frac{3}{4}$ *dür. Yani*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)} = \frac{3}{4}$$

olur.

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$. *Serinin genel terimi* $a_n = \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$ *dir. Kısmi toplamlar dizisi ise*

$$\begin{aligned} s_n &= a_1 + a_2 + \cdots + a_n \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} \end{aligned}$$

dir. Burada

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)}\right)$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
s_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{1.2} - \frac{1}{2.3}\right) + \left(\frac{1}{2.3} - \frac{1}{3.4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right] \\
&= \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)}
\end{aligned}$$

olur. O zaman

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{4}$$

olduğundan serinin toplamı $\frac{1}{4}$ *dür. Yani*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{4}$$

olur.

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$. *Serinin genel terimi* $a_n = \frac{n}{(n+1)!}$ *dir. Kısmi toplamlar dizisi ise*

$$\begin{aligned}
s_n &= a_1 + a_2 + \cdots + a_n \\
&= \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!}
\end{aligned}$$

dir. Burada

$$\frac{k}{(k+1)!} = \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
s_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}\right) \\
&= \left(\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!}\right) + \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}\right) \\
&= 1 - \frac{1}{(n+1)!}
\end{aligned}$$

olur. O zaman

$$\lim_{n\to\infty} s_n = 1$$

olduğundan serinin toplamı 1 *dir. Yani*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!} = 1$$

olur.

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}-1}{6^{n-1}}$. *Serinin genel terimi* $a_n = \frac{3^{n-1}-1}{6^{n-1}} = \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{6^{n-1}}$ *dir.* *Burada* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$ *ve* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{6^{n-1}}$ *serilerinin her ikisi de geometrik seri olup her ikisi de yakınsaktır. Dolayısıyla*

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}-1}{6^{n-1}} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{6^{n-1}} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{6^{n-1}} \\ &= \frac{1}{1-\frac{1}{2}} - \frac{1}{1-\frac{1}{6}} \\ &= \frac{4}{5} \end{aligned}$$

olur.

Örnek 374 $|r| < 1$ *için*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n r^{n-1} = \frac{1}{(1-r)^2}$$

eşitliğinin sağlandığını gösteriniz. Bundan yararlanarak aşağıdaki serilerin toplamını bulunuz.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{3^n}$

Öncelikle $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} nr^{n-1}$ *serisinin kısmi toplamlar dizisi* (s_n) *olsun. O zaman*

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} kr^{k-1} = 1 + 2r + 3r^2 + \cdots + nr^{n-1}$$

olduğundan

$$rs_n = \sum_{k=1}^{n} kr^k = r + 2r^2 + 3r^3 + \cdots + (n-1)r^{n-1} + nr^n$$

olur. Böylece

$$\begin{aligned} s_n - rs_n &= 1 + r + r^2 + \cdots + r^{n-1} + nr^n \\ &= \frac{1-r^n}{1-r} + nr^n \end{aligned}$$

olduğundan

$$s_n = \frac{1-r^n}{(1-r)^2} + \frac{nr^n}{1-r}$$

elde edilir. $|r| < 1$ *için* $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$ *ve* $\lim_{n\to\infty} nr^n = 0$ *olduğundan* $\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{(1-r)^2}$ *elde dilir. Bu ise istenen eşitliğin doğruluğunu gösterir. Bundan yararlanarak*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n-1}} = \frac{1}{2} \frac{1}{(1-\frac{1}{2})^2} = 2$$

ve

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{3^n} = -\frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n}{3^{n-1}} = -\frac{1}{3} \frac{1}{(1+\frac{1}{3})^2} = -\frac{3}{16}$$

bulunur.

6.3 Pozitif Terimli Seriler

Matematiğin bazı uygulamalarında serilerin sadece yakınsaklık veya ıraksaklık durumuna ihtiyaç duyulur. Verilen her serinin kısmi toplamlar dizisini göz önüne alıp toplamını hesaplayarak yakınsaklığına veya ıraksaklığına karar vermek mümkün olmaz. Bu gibi durumlarda serinin toplamını hesaplamadan yakınsak olup olmadığına karar vermek için çeşitli kriterler geliştirilmiştir. Bu kesimde önce pozitif terimli seriler için bu kriterleri inceleyeceğiz. Daha sonra herhangi terimli seriler için benzer kriterler geliştireceğiz.

Her $n \in \mathbb{N}$ için $a_n > 0$ ise $\sum a_n$ serisine bir pozitif terimli seri denir. Böyle bir seri için $s_{n+1} = s_n + a_{n+1}$ olduğundan $s_n < s_{n+1}$ olur. Yani serinin (s_n) kısmi toplamlar dizisi monoton artan olur. Dolayısıyla bu kısmi toplamlar dizisinin ve böylece serinin yakınsak olması için gerek ve yeter şart (s_n) dizisinin sınırlı olmasıdır.

Örnek 375 $\alpha \in \mathbb{R}$ *bir sabit olmak üzere*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$$

serisini göz önüne alalım. Bu seri uygulamada çok sık kullanılır ve harmonik seri olarak adlandırılır. Şimdi α nın durumlarına göre bu serinin karakterini araştıralım.

1. Durum: $\alpha = 1$ olsun. Bu durumda harmonik serinin kısmi toplamlar dizisi

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

dir. Bu dizi monoton artandır. Şimdi bu dizinin sınırlı olup olmadığını araştıralım. $M > 0$ istenildiği kadar büyük bir reel sayı olmak üzere $m > 2M$ ve $n > 2^m$ eşitsizliklerini sağlayan m ve n tamsayılarını göz önüne alalım. O *zaman*

$$\begin{aligned}
s_n &= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n} \\
&> 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^m} \\
&= 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\cdots \\
&\quad +\left(\frac{1}{2^{m-1}+1}+\cdots+\frac{1}{2^m}\right) \\
&> \frac{1}{2}+2\frac{1}{4}+4\frac{1}{8}+\cdots+2^{m-1}\frac{1}{2^m} \\
&= \frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2} \\
&= \frac{m}{2} > M
\end{aligned}$$

olur. Yani (s_n) *dizisinin verilen her* M *sayısından daha büyük bir terimi mevcuttur. Dolayısıyla* (s_n) *dizisi sınırlı değildir. Bu ise* (s_n) *dizisinin yakınsak olmadığını ve dolayısıyla*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

harmonik serisinin ıraksak olduğunu gösterir.

2. Durum: $\alpha > 1$ *olsun. Şimdi* $n \in \mathbb{N}$ *için* $2^r > n$ *eşitsizliğini sağlayan bir* r *doğal sayısı tespit ederek*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}\ (\alpha > 1)$$

harmonik serisinin kısmi toplamlar dizisinin sınırlı olduğunu gösterelim. O *zaman*

$$
\begin{aligned}
s_n &= 1+\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}+\cdots+\frac{1}{n^\alpha} \\
&\leq 1+\left(\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}\right)+\left(\frac{1}{4^\alpha}+\frac{1}{5^\alpha}+\frac{1}{6^\alpha}+\frac{1}{7^\alpha}\right)+\cdots \\
&\quad +\left(\frac{1}{(2^{r-1})^\alpha}+\cdots+\frac{1}{(2^r-1)^\alpha}\right) \\
&< 1+2\frac{1}{2^\alpha}+4\frac{1}{4^\alpha}+\cdots+2^{r-1}\frac{1}{(2^{r-1})^\alpha} \\
&= 1+\frac{1}{2^{\alpha-1}}+\frac{1}{4^{\alpha-1}}+\cdots+\frac{1}{(2^{r-1})^{\alpha-1}} \\
&= 1+\frac{1}{2^{\alpha-1}}+\left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^{r-1} \\
&= \frac{1-\left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^r}{1-\frac{1}{2^{\alpha-1}}}<\frac{1}{1-\frac{1}{2^{\alpha-1}}}=\frac{2^{\alpha-1}}{2^{\alpha-1}-1}
\end{aligned}
$$

olur. Yani $\frac{2^{\alpha-1}}{2^{\alpha-1}-1}=M$ *denirse her* $n\in\mathbb{N}$ *için* $s_n<M$ *dir. Dolayısıyla* (s_n) *dizisi yakınsak olacağından*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}\ (\alpha>1)$$

harmonik serisi yakınsaktır.

3. Durum: $\alpha<1$ *olması durumunu aşağıdaki karşılaştırma testinden sonra inceleyeceğiz.*

Teorem 376 (Karşılaştırma Testi) (a_n) *ve* (b_n) *pozitif iki dizi,* C *bir reel sayı ve her* $n\in\mathbb{N}$ *için* $a_n\leq Cb_n$ *olsun. O zaman*

1. $\sum b_n$ *serisi yakınsak ise* $\sum a_n$ *serisi de yakınsaktır.*

2. $\sum a_n$ *serisi ıraksak ise* $\sum b_n$ *serisi de ıraksaktır.*

Ispat. $\sum a_n$ ve $\sum b_n$ serilerinin kısmi toplamlar dizileri sırası ile (s_n) ve (t_n) olsun.

1. $\sum b_n$ serisinin yakınsak olduğunu kabul edelim. Ozaman $\sum b_n = L$ olacak biçimde bir $L > 0$ vardır. Diğer taraftan her $n \in \mathbb{N}$ için $a_n \leq Cb_n$ olduğundan

$$\begin{aligned} s_n &= a_1 + a_2 + \cdots + a_n \\ &\leq C(b_1 + b_2 + \cdots b_n) \\ &\leq C(b_1 + b_2 + \cdots b_n + \cdots) \\ &= C\sum b_n \\ &= CL \end{aligned}$$

olur. Yani (s_n) dizisi sınırlıdır ki aynı zamanda monoton olduğundan yakınsaktır. Dolayısıyla $\sum a_n$ serisi de yakınsaktır.

2. $\sum a_n$ serisinin ıraksak olduğunu kabul edelim. O zaman bunun kısmi toplamlar dizisi (s_n) sınırsızdır. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} s_n &= a_1 + a_2 + \cdots + a_n \\ &\leq C(b_1 + b_2 + \cdots b_n) \\ &= Ct_n \end{aligned}$$

olduğundan (t_n) dizisi de sınırsızdır. O halde (t_n) dizisi ve dolayısıyla $\sum b_n$ serisi ıraksaktır.

■

Uyarı 377 *Bir seride sonlu tane terimin alınıp alınmaması serinin karakterini etkilemediğinden Karşılaştırma testinde $a_n \leq Cb_n$ eşitsizliğinin sonlu tane n hariç diğer tüm doğal sayılar için geçerli olduğu kabul edilebilir.*

Uyarı 378

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

harmonik serisinin $\alpha > 1$ için yakınsak ve $\alpha = 1$ için ıraksak olduğunu göstermiştik. Şimdi $\alpha < 1$ olsun. Bu durumda her n doğal sayısı için $n^\alpha \leq n$ olduğundan $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n^\alpha}$ olur. Böylece

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

serisi ıraksak olduğundan Karşılaştırma Testine göre

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$$

harmonik serisi $\alpha < 1$ için ıraksaktır.

Örnek 379 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n}{n(n+1)}$ *serisini göz önüne alalım. Her $n \in \mathbb{N}$ için* $\frac{\cos^2 n}{n(n+1)} \leq \frac{1}{n(n+1)}$ *dir. Ayrıca*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

serisi yakınsak olduğundan Karşılaştırma Testine göre

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n}{n(n+1)}$$

serisi de yakınsaktır.

Örnek 380 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n^2}{2n^2+1}\right)^n$ *serisini göz önüne alalım. Her $n \in \mathbb{N}$ için*

$$2n^2 + 1 \leq 2n^2 + 2n$$

olduğundan

$$\frac{1}{2n^2+1} \geq \frac{1}{2n^2+2n}$$

ve böylece

$$\frac{2n^2}{2n^2+1} \geq \frac{2n^2}{2n^2+2n} = \frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

olur. O zaman her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\left(\frac{2n^2}{2n^2+1}\right)^n \geq \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n \geq 1 - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1} \geq \frac{1}{2n}$$

elde edilir.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

harmonik serisi ıraksak olduğundan Karşılaştırma Testine göre

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n^2}{2n^2+1}\right)^n$$

serisi de ıraksaktır.

Uyarı 381 *Bu örnekte Bernoulli eşitsizliği denilen aşağıdaki eşitsizlik kullanılmıştır: Her $n \in \mathbb{N}$ ve her $x \geq -1$ için*

$$(1+x)^n \geq 1+nx$$

eşitziliği sağlanır.

Teorem 382 (Karşılaştırma Testinin Limit Formu) *(a_n) ve (b_n) pozitif iki dizi ve*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\gamma$$

olsun. O zaman

1. *$0<\gamma<\infty$ ise $\sum a_n$ ve $\sum b_n$ serilerinin karakterleri aynıdır*
2. *$\gamma = 0$ ve $\sum b_n$ yakınsak ise $\sum a_n$ de yakınsaktır.*
3. *$\gamma=\infty$ ve $\sum b_n$ ıraksak ise $\sum a_n$ de ıraksaktır.*

Ispat. γ nın durumlarına göre aşağıdaki biçimde ispat yapabiliriz.

1. $0<\gamma<\infty$ olsun. $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\gamma$ olduğundan her $\varepsilon>0$ için $n \geq n_0$ olduğunda

   $$\left|\frac{a_n}{b_n}-\gamma\right|<\varepsilon$$

   olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. O zaman $n \geq n_0$ için

   $$\gamma-\varepsilon<\frac{a_n}{b_n}<\gamma+\varepsilon$$

   ve böylece

   $$(\gamma-\varepsilon)b_n<a_n<(\gamma+\varepsilon)b_n$$

   eşitsizliği sağlanır. Şimdi eğer ε sayısı $\varepsilon<\gamma$ olacak biçimde seçilirse $\gamma-\varepsilon>0$ olur. Böylece Karşılaştırma Testi dikkate alındığında bahsi geçen serilerin karakterlerinin aynı olduğu elde edilir.

2. $\gamma = 0$ olsun. O zaman yine limit tanımından her $\varepsilon > 0$ için $n \geq n_1$ olduğunda
$$\left|\frac{a_n}{b_n}\right| < \varepsilon$$
olacak şekilde bir $n_1 \in \mathbb{N}$ vardır. Böylece $n \geq n_1$ için $a_n < \varepsilon b_n$ olacağından yine Karşılaştırma Testine göre $\sum b_n$ yakınsak ise $\sum a_n$ de yakınsaktır.

3. $\gamma = \infty$ olsun. O zaman $\frac{a_n}{b_n}$ sınırsız bir dizidir. Böylece her $M > 0$ için $n \geq n_2$ olduğunda $\frac{a_n}{b_n} > M$ olacak şekilde bir $n_2 \in \mathbb{N}$ vardır. Bu durumda $n \geq n_2$ için $a_n > Mb_n$ olacağından Karşılaştırma Testine göre $\sum b_n$ ıraksak ise $\sum a_n$ de ıraksaktır.

■

Uyarı 383 *Yukarıdaki teoremde $\sum b_n$ serisi yerine $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ harmonik serisi alınırsa aşağıdaki testi elde ederiz ki bu test uygulamada oldukça kullanışlıdır.*

Teorem 384 (Limit Testi) *$\sum a_n$ pozitif terimli bir seri ve*
$$\lim_{n\to\infty} n^\alpha a_n = \gamma$$
olsun. O zaman

1. *$0 \leq \gamma < \infty$ ve $\alpha > 1$ ise $\sum a_n$ yakınsaktır.*

2. *$\gamma > 0$ ve $\alpha \leq 1$ ise $\sum a_n$ ıraksaktır.*

Örnek 385 *$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2n^3+5}$ serisini göz önüne alalım. O zaman $\alpha = 2$ için*
$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} n^\alpha a_n &= \lim_{n\to\infty} n^\alpha \frac{n+1}{2n^3+5} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^3+n^2}{2n^3+5} \\ &= \frac{1}{2} = \gamma \end{aligned}$$
olur. Bu ise Limit Testine göre verilen serinin yakınsak olduğunu gösterir.

Örnek 386 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n+1}}$ *serisini göz önüne alalım. O zaman* $\alpha = \frac{1}{2}$ *için*

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} n^{\alpha} a_n &= \lim_{n\to\infty} n^{\alpha} \frac{\ln n}{\sqrt{n+1}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}\ln n}{\sqrt{n+1}} \\ &= \infty = \gamma \end{aligned}$$

olur. Bu ise Limit Testine göre verilen serinin ıraksak olduğunu gösterir.

Teorem 387 (D'Alember Oran Testi) $\sum a_n$ *pozitif terimli bir seri olmak üzere*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = r$$

olsun. O zaman

1. $r < 1$ *ise seri yakınsaktır.*
2. $r > 1$ *ise seri ıraksaktr.*
3. $r = 1$ *ise herhangi bir hüküm verilemez.*

Ispat. r nin durumlarına göre aşağıdaki biçimde ispat yapabiliriz.

1. $r < 1$ olsun ve $r + \varepsilon < 1$ olacak biçimde bir $\varepsilon > 0$ sayısı seçelim. O zaman $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = r$ olduğundan $n \geq n_0$ için

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - r \right| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Böylece $n \geq n_0$ için

$$r - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < r + \varepsilon$$

olur. Şimdi kısalık olması açısından $r + \varepsilon = p$ dersek $n \geq n_0$ için

$$a_{n+1} < p a_n$$

olur. Yani her $k \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} a_{n_0+1} &< pa_{n_0} \\ a_{n_0+2} &< pa_{n_0+1} \\ &\vdots \\ a_{n_0+k} &< pa_{n_0+k-1} \end{aligned}$$

yazılabilir. Bu eşitsizlikler taraf tarafa çarpılırsa

$$a_{n_0+k} < p^k a_{n_0}$$

bulunur. $n_0 + k = n$ dersek bu son eşitsizlik

$$a_n < p^{n-n_0} a_{n_0}$$

halini alır. Burada $p < 1$ ve a_{n_0} sabit olduğundan $\sum p^{n-n_0} a_{n_0}$ serisi yakınsaktır. Dolayısıyla Karşılaştırma Testinden $\sum a_n$ serisi de yakınsak olur.

2. $r > 1$ olsun ve $r - \varepsilon > 1$ olacak biçimde bir $\varepsilon > 0$ sayısı seçelim. O zaman $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = r$ olduğundan $n \geq n_1$ için

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - r \right| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $n_1 \in \mathbb{N}$ vardır. Böylece $n \geq n_1$ için

$$r - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < r + \varepsilon$$

elde edilirki $r - \varepsilon > 1$ olduğundan $a_n < a_{n+1}$ elde edilir. Yani (a_n) dizisi n_1 den sonra monoton artandır. Böylece $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ olacağından $\sum a_n$ serisi ıraksak olur.

3. $\sum \frac{1}{n}$ ve $\sum \frac{1}{n^2}$ serilerinin her ikisi için de $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ olmasına rağmen ilk seri ıraksak ikinci seri ise yakınsaktır. Yani $r = 1$ olması durumunda $\sum a_n$ serisinin karakteri hakkında kesin bir hüküm verilemez.

$\blacksquare$

Örnek 388 $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{n!}$ *serisini göz önüne alalım. O zaman*

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \\
&= 0 < 1
\end{aligned}$$

olduğundan verilen seri yakınsaktır.

Uyarı 389 $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{n!}$ *serisinin toplamı e dir. Yani*

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots$$

dir. Diğer taraftan

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

olduğuda bilinmektedir.

Örnek 390 $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!}{n^n}$ *serisini göz önüne alalım. O zaman*

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{n!} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n \\
&= \frac{1}{e} < 1
\end{aligned}$$

olduğundan verilen seri yakınsaktır.

Örnek 391 *Oran Testini dikkate alarak aşağıda verilen serilerin karakterini belirleyiniz.*

1. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n+5}{3^n}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n(n!)^2}{(2n)!}$

Çözüm 392 *Oran Testini dikkate alalım. O zaman*

1.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2^{n+1}+5}{3^{n+1}} \frac{3^n}{2^n+5} \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2^{n+1}+5}{3(2^n+5)} \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2+\frac{5}{2^n}}{3(1+\frac{5}{2^n})} \right) \\
&= \frac{2}{3} < 1
\end{aligned}$$

olduğundan

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n+5}{3^n}$$

serisi yakınsaktır.

2.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{(2n+2)!}{((n+1)!)^2} \frac{(n!)^2}{(2n)!} \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{2(2n+1)}{n+1} \\
&= 4 > 1
\end{aligned}$$

olduğundan

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

serisi ıraksaktır.

3.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{4^{n+1}((n+1)!)^2}{(2n+2)!}\frac{(2n)!}{4^n(n!)^2}\right)\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{4(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{2n+2}{2n+1}\\ &= 1\end{aligned}$$

olduğundan Oran Testi cevap vermez. Burada

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2n+2}{2n+1} > 1$$

olduğundan (a_n) *dizisi pozitif ve monoton artan bir dizidir. Dolayısıyla* $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ *olacağından seri ıraksaktır.*

Örnek 393 *Genel terimi*

$$a_n = \begin{cases} \frac{n}{2^n} & , \quad n \text{ tek} \\ \\ \frac{1}{2^n} & , \quad n \text{ çift} \end{cases}$$

biçiminde tanımlı olan $\sum a_n$ *serisini göz önüne alalım. O zaman*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \begin{cases} \frac{1}{2n} & , \quad n \text{ tek} \\ \\ \frac{n+1}{2} & , \quad n \text{ çift} \end{cases}$$

olur ki bu durumda $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ *mevcut değildir. Yani Oran Testi* $\sum a_n$ *serisinin karakteri için cevap vermez.*

Teorem 394 (Cauchy Kök Testi) $\sum a_n$ *pozitif terimli bir seri olmak üzere*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = r$$

olsun. O zaman

1. $r < 1$ *ise seri yakınsaktır.*

2. $r > 1$ *ise seri ıraksaktr.*

3. $r = 1$ *ise herhangi bir hüküm verilemez.*

Ispat. r nin durumlarına göre aşağıdaki biçimde ispat yapabiliriz.

1. $r < 1$ olsun. $\varepsilon > 0$ sayısını $r + \varepsilon < 1$ olacak biçimde seçelim. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = r$ olduğundan seçilen $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $n \geq n_0$ olduğunda
$$|\sqrt[n]{a_n} - r| < \varepsilon$$
olacak biçimde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. O zaman $n \geq n_0$ için
$$-\varepsilon < \sqrt[n]{a_n} - r < \varepsilon$$
ve böylece
$$r - \varepsilon < \sqrt[n]{a_n} < r + \varepsilon < 1$$
olur. Buradan $n \geq n_0$ için
$$a_n < (r + \varepsilon)^n$$
olup
$$\sum (r + \varepsilon)^n$$
geometrik seris yakınsak olduğundan Karşılaştırma Testi gereği
$$\sum a_n$$
serisi de yakınsaktır.

2. $r > 1$ olsun. Şimdi de $\varepsilon > 0$ sayısını $r - \varepsilon > 1$ olacak biçimde seçelim. Yine $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = r$ olduğundan seçilen $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $n \geq n_1$ olduğunda
$$|\sqrt[n]{a_n} - r| < \varepsilon$$
olacak biçimde bir $n_1 \in \mathbb{N}$ vardır. O zaman $n \geq n_1$ için
$$-\varepsilon < \sqrt[n]{a_n} - r < \varepsilon$$
ve böylece
$$1 < r - \varepsilon < \sqrt[n]{a_n} < r + \varepsilon$$
olur. Buradan $n \geq n_1$ için $1 < a_n$ olup $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ olur. Bu ise
$$\sum a_n$$
serisinin ıraksak olduğunu gösterir.

3. $\sum \frac{1}{n}$ ve $\sum \frac{1}{n^2}$ serilerinin her ikisi için de $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$ olmasına rağmen ilk seri ıraksak ikinci seri ise yakınsaktır. Yani $r = 1$ olması durumunda $\sum a_n$ serisinin karakteri hakkında kesin bir hüküm verilemez.

■

Örnek 395 *Kök Testini dikkate alarak aşağıda verilen serilerin karakterini belirleyiniz.*

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^3}$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{5} + \frac{2}{n}\right)^n$
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1}\right)^n$

Çözüm 396 *Kök Testini dikkate alalım. O zaman*

1.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} &= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^2}{2^n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n^{\frac{2}{n}}}{2} \\
&= \frac{1}{2} < 1
\end{aligned}$$

olduğundan Kök Testine göre

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^3}$$

serisi yakınsaktır.

2.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} &= \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{2^n}{n^3}}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n^{\frac{3}{n}}}\\ &= 2>1\end{aligned}$$

olduğundan Kök Testine göre

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^3}$$

serisi ıraksaktır.

3.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} &= \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n}\\ &= e>1\end{aligned}$$

olduğundan Kök Testine göre

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$$

serisi ıraksaktır.

Örnek 397 *Genel terimi*

$$a_n=\begin{cases}\frac{n}{2^n} & , \quad n \ \text{tek}\\ \\ \frac{1}{2^n} & , \quad n \ \text{çift}\end{cases}$$

biçiminde tanımlı olan $\sum a_n$ *serisini göz önüne alalım. Daha önce Oran Testinin bu serinin yakınsaklığı için cevap vermediğini hatırlayalım. Şimdi*

$$\sqrt[n]{a_n}=\begin{cases}\frac{\sqrt[n]{n}}{2} & , \quad n \ \text{tek}\\ \\ \frac{1}{2} & , \quad n \ \text{çift}\end{cases}$$

olur ki bu durumda $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{2} < 1$ *dir. Yani Kök Testine göre* $\sum a_n$ *serisi yakınsaktır.*

Oran Testinin cevap vermediği durumlarda aşağıdaki testler dikkate alınabilir.

Teorem 398 (Kummer Testi) $\sum a_n$ *pozitif terimli bir seri ve* (p_n) *de*

$$\lim_{n\to\infty}\left(p_n\frac{a_n}{a_{n+1}} - p_{n+1}\right) = L$$

olacak biçimde pozitif bir dizi olsun. Bu durumda

1. $L > 0$ *ise* $\sum a_n$ *yakınsaktır.*
2. $L < 0$ *ve* $\sum \frac{1}{p_n}$ *ıraksak ise* $\sum a_n$ *de ıraksaktır.*

Ispat. L nin durumlarına göre aşağıdaki biçimde ispatı yapalım.

1. $L > 0$ olsun ve $0 < r < L$ olacak biçimde bir r sayısı seçelim. O zaman

   $$\lim_{n\to\infty}\left(p_n\frac{a_n}{a_{n+1}} - p_{n+1}\right) = L$$

   olduğundan her $n \geq n_0$ için

   $$p_n\frac{a_n}{a_{n+1}} - p_{n+1} > r$$

   olacak biçimde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Buradan $n \geq n_0$ için

   $$p_n a_n - p_{n+1}a_{n+1} > r a_{n+1}$$

   bulunur. Bu son eşitsizlikte n yerine sırası ile n_0, n_{0+1}, $\cdots$, n_{0+m-1} yazıldığında

   $$\begin{array}{rcl} p_{n_0}a_{n_0} - p_{n_0+1}a_{n_0+1} & > & r a_{n_0+1} \\ p_{n_0+1}a_{n_0+1} - p_{n_0+2}a_{n_0+2} & > & r a_{n_0+2} \\ & \vdots & \\ p_{n_0+m-1}a_{n_0+m-1} - p_{n_0+m}a_{n_0+m} & > & r a_{n_0+m} \end{array}$$

eşitsizlikleri elde edilir. Taraf tarafa toplama ile de

$$p_{n_0}a_{n_0} - p_{n_0+m}a_{n_0+m} > r\sum_{n=n_0+1}^{n_0+m} a_n$$

bulunur. Şimdi

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

denirse son eşitsizlik

$$p_{n_0}a_{n_0} - p_{n_0+m}a_{n_0+m} > r(s_{n_0+m} - s_{n_0})$$

biçiminde yazılabilir ki buradan

$$\begin{aligned} rs_{n_0+m} &< rs_{n_0} + p_{n_0}a_{n_0} - p_{n_0+m}a_{n_0+m} \\ &< rs_{n_0} + p_{n_0}a_{n_0} \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$s_{n_0+m} < s_{n_0} + \frac{p_{n_0}a_{n_0}}{r}$$

elde edilir ki bu (s_n) dizisinin üstten sınırlı olduğunu gösterir. Dolayısıyla (s_n) yakınsak ve böylece $\sum a_n$ yakınsaktır.

2. $L < 0$ ve $\sum \frac{1}{p_n}$ ıraksak olsun. O zaman

$$\lim_{n\to\infty}\left(p_n\frac{a_n}{a_{n+1}} - p_{n+1}\right) = L$$

olduğundan her $n \geq n_1$ için

$$p_n\frac{a_n}{a_{n+1}} - p_{n+1} \leq 0$$

olacak biçimde bir $n_1 \in \mathbb{N}$ vardır. Böylece $n \geq n_1$ için

$$p_n a_n \leq p_{n+1}a_{n+1}$$

olup buradan $n \geq n_1$ için

$$p_{n_1}a_{n_1} \leq p_{n_1+1}a_{n_1+1} \leq p_{n_1+2}a_{n_1+2} \leq \cdots \leq p_n a_n$$

elde edilir. Buradan da

$$\frac{1}{p_n} \leq \frac{1}{p_{n_1} a_{n_1}} a_n$$

elde edilir ki $\sum \frac{1}{p_n}$ ıraksak oldğundan Karşılaştırma Testine göre $\sum a_n$ de ıraksaktır.

■

Örnek 399 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1.4.7.\cdots.(3n-2)}{3.6.9.\cdots.(3n)}$ *serisinin karakterini araştıralım. Öncelikle*

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{1.4.7.\cdots.(3n+1)}{3.6.9.\cdots.(3n+3)} \frac{3.6.9.\cdots.(3n)}{1.4.7.\cdots.(3n-2)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{3n+1}{3n+3} = 1
\end{aligned}$$

olduğundan Oran Testi cevap vermez. Şimdi $p_n = n$ alarak Kummer Testini uygulayalım ki bu durumda $\sum \frac{1}{p_n} = \sum \frac{1}{n}$ serisi ıraksaktır. Böylece

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \left(p_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - p_{n+1} \right) &= \lim_{n\to\infty} \left(n \frac{3n+3}{3n+1} - (n+1) \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} -\frac{n+1}{3n+1} \\
&= -\frac{1}{3} < 0
\end{aligned}$$

olur. O halde verilen seri ıraksaktır.

Teorem 400 (Raabe Testi) $\sum a_n$ *pozitif terimli bir seri ve*

$$\lim_{n\to\infty} n \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1 \right) = S$$

olsun. Bu durumda

1. $S < -1$ *ise* $\sum a_n$ *yakınsaktır.*
2. $S > -1$ *ise* $\sum a_n$ *ıraksaktır.*

Ispat. Öncelikle $\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}-1\right)=S$ limitinin var olması için $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1$ olmalıdır. Şimdi Kummer Testinde $p_n=n$ alınırsa şu önermeler elde edilir:

- $\lim_{n\to\infty}\left(n\frac{a_n}{a_{n+1}}-(n+1)\right)>0$ ise $\sum a_n$ yakınsak.
- $\lim_{n\to\infty}\left(n\frac{a_n}{a_{n+1}}-(n+1)\right)<0$ ise $\sum a_n$ ıraksaktır.

Böylece

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left(n\frac{a_n}{a_{n+1}}-(n+1)\right) &= -\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)a_{n+1}-na_n}{a_{n+1}}\\
&= -\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\frac{a_{n+1}}{a_n}-n}{\frac{a_{n+1}}{a_n}}\\
&= -\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}-1\right)+\frac{a_{n+1}}{a_n}}{\frac{a_{n+1}}{a_n}}\\
&= -\frac{S+1}{1}=-S-1
\end{aligned}$$

olur. O zaman yukarıdaki önermeler dikkate alınırsa $-S-1>0$ yani $S<-1$ ise seri yakındak $S>-1$ ise ıraksaktır. ∎

Örnek 401 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1.3.5.\cdots.(2n-1)}{2.4.6.\cdots.(2n)}$ *serisinin karakterini araştıralım. Öncelikle*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2n+2}=1$$

olduğundan Oran Testi cevap vermez. Şimdi Raabe Testini uygulayalım.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}-1\right) &= \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{2n+1}{2n+2}-1\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{-n}{2n+2}\\
&= -\frac{1}{2}>-1
\end{aligned}$$

olduğundan seri ıraksaktır.

Teorem 402 (Bertrand Testi) *(a_n) pozitif terimli bir dizi ve*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(\frac{1}{a_n})}{\ln n} = q$$

olsun. O zaman

1. *$q > 1$ ise $\sum a_n$ yakınsaktır.*
2. *$q < 1$ ise $\sum a_n$ ıraksaktır.*

Ispat. q nun durumlarına göre ispatı aşağıdaki biçimde yapabiliriz.

1. $q > 1$ olsun. $1 < \alpha < q$ olacak biçimde bir α sayısı seçelim. O zaman $n \geq n_0$ için
$$\frac{\ln(\frac{1}{a_n})}{\ln n} \geq \alpha$$
olacak biçimde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Buradan $n \geq n_0$ için
$$\ln(\frac{1}{a_n}) \geq \alpha \ln n = \ln(n^\alpha)$$
olup
$$a_n \leq \frac{1}{n^\alpha}$$
bulunur. Böylece Karşılaştırma Testinden $\sum a_n$ yakınsaktır.

2. $q < 1$ olsun. O zaman $n \geq n_1$ için
$$\frac{\ln(\frac{1}{a_n})}{\ln n} < 1$$
olacak biçimde bir $n_1 \in \mathbb{N}$ vardır. Buradan $n \geq n_1$
$$a_n > \frac{1}{n}$$
bulunur. Böylece Karşılaştırma Testinden $\sum a_n$ ıraksaktır.

■

Örnek 403 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^{\ln n^2}}$ *serisinin yakınsaklık durumunu araştıralım.*

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(\frac{1}{a_n})}{\ln n} &= \lim_{n\to\infty}\frac{\ln((\ln n)^{\ln n^2})}{\ln n}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{2\ln n\ln(\ln n)}{\ln n}\\ &= \lim_{n\to\infty}2\ln(\ln n)\\ &= \infty>1\end{aligned}$$

olduğundan seri yakınsaktır.

Uyarı 404 *Pozitif terimli* $\sum a_n$ *serisi yakınsak ise bu durum* $\sum a_n<\infty$ *biçiminde, ıraksak ise* $\sum a_n=\infty$ *biçiminde gösterilecektir.*

Teorem 405 (Benzerlik Testi) (a_n) *pozitif terimli monoton azalan bir dizi olsun. O zaman* $\sum a_n$ *ve* $\sum 2^p a_{2^p}$ *serilerinin yakınsaklık durumları aynıdır.*

Ispat. Bahsi geçen serilerin kısmi toplamlar dizileri

$$s_n=\sum_{k=1}^{n}a_k \text{ ve } t_m=\sum_{k=0}^{m}2^k a_{2^k}$$

olsun. O zaman $n\leq 2^m$ için

$$\begin{aligned}s_n &= a_1+a_2+\cdots+a_n\\ &< a_1+(a_2+a_3)+\cdots+(a_{2^m}+\cdots+a_{2^{m+1}-1})\\ &< a_1+2a_2+\cdots+2^m a_{2^m}\\ &= t_m\end{aligned}$$

olur. Yani $n\leq 2^m$ için $s_n<t_m$ olur. Benzer şekilde $n>2^{m-1}$ için

$$\begin{aligned}s_n &= a_1+a_2+\cdots+a_n\\ &> a_1+a_2+(a_3+a_4)+\cdots+(a_{2^{m-2}+1}+\cdots+a_{2^{m-1}})\\ &> \frac{a_1}{2}+a_2+2a_4+\cdots+2^{m-2}a_{2^{m-1}}\\ &= \frac{1}{2}\left[a_1+2a_2+4a_4+\cdots+2^{m-1}a_{2^{m-1}}\right]\\ &= \frac{1}{2}t_m\end{aligned}$$

olur. Yani

$$\frac{1}{2}t_m < s_n < t_m$$

elde edilir. O zaman (s_n) ve (t_m) dizilerinin sınırlılık durumları aynıdır. Dolayısıyla yakınsaklık surumları da aynı olacağından bahsi geçen serilerin karakterleri aynıdır. ■

Örnek 406 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ *serisinin karakterini araştıralım.* $n \geq 2$ *için* $a_n = \frac{1}{n \ln n}$ *pozitif ve monoton azalan bir dizidir. O zaman Benzerlik tesi uygulanabilir. Buna göre* $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ *serisi ile*

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{2^n \ln 2^n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln 2} \end{aligned}$$

serilerinin karakterleri aynıdır. Halbu ki

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln 2} = \frac{1}{\ln 2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

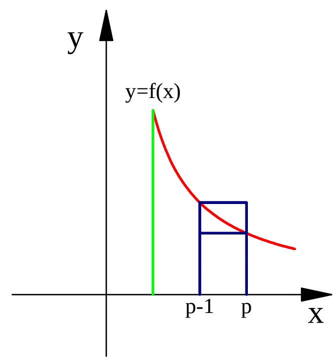
serisi ıraksak olduğundan $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ *serisi de ıraksaktır.*

Teorem 407 (İntegral Testi) (a_n) *pozitif ve monoton azalan bir dizi ve* f *de* $[1, \infty)$ *aralığında tanımlı pozitif ve monoton azalan bir fonksiyon olsun. Her* $n \in \mathbb{N}$ *için* $f(n) = a_n$ *ise* $\sum_{n=}^{\infty} a_n$ *serisinin yakınsak olması için gerek ve yeter şart*

$$I_n = \int_1^n f(x)dx$$

ole tanımlı (I_n) *dizisinin sınırlı olmasıdır.*

Ispat. f fonksiyonu $[1, \infty)$ aralığında poziif ve monoton azalan bir fonksiyon olduğundan grafiğinin aşağıdaki gibi olduğu kabul edilebilir:



Şekilden $p \geq 2$ için

$$1.f(p) \leq \int_{p-1}^{p} f(x)dx \leq 1.f(p-1)$$

eşitliğinin doğru olduğu açıktır. O zaman $p \geq 2$ için

$$a_p \leq \int_{p-1}^{p} f(x)dx \leq a_{p-1} \tag{8}$$

olur. Buradan $p = 2$ den $p = n$ ye kadar toplam alınırsa

$$\sum_{p=2}^{n} a_p \leq \sum_{p=2}^{n} \int_{p-1}^{p} f(x)dx \leq \sum_{p=2}^{n} a_{p-1}$$

yazılabilir. Böylece serinin kısmi toplamlar dizisi (s_n) ise

$$s_n - a_1 \leq \int_{1}^{n} f(x)dx \leq s_{n-1}$$

veya buna denk olarak

$$s_n - a_1 \leq I_n \leq s_{n-1}$$

eşitsizliği elde edililir. Şimdi eğer $\sum a_n < \infty$ ise (s_n) kısmi toplamlar dizisi sınırlıdır. Dolayısıyla (I_n) dizisi sınırlıdır. Karşıt olarak (I_n) sınırlı ise (s_n) dizisi de sınırlı ve dolayısıyla $\sum a_n < \infty$ olur. ■

Uyarı 408 *(a_n) dizisi ve f fonksiyonu İntegral Testinin koşullarını sağlamak üzere bahsi geçen seri yakınsak ve toplamı S olsun. O zaman (I_n) dizisi de yakınsaktır. Eğer bu dizinin limiti I ise*

$$S - a_1 \leq I \leq S$$

eşitsizliği yazılabilir. Buradan

$$I \leq S \leq I + a_1$$

veya denk olarak

$$I \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq I + a_1 \tag{9}$$

eşitsizliği elde edilir.

Uyarı 409 *(7) eşitsizliğinin $p = 3$ den $p = n$ ye kadar toplamının alınması halinde*

$$s_n - a_1 - a_2 \leq \int_2^n f(x)dx \leq s_{n-1} - a_1$$

veya

$$\int_2^n f(x)dx + a_1 \leq s_{n-1} \leq s_n \leq \int_2^n f(x)dx + a_1 + a_2 \tag{10}$$

eşitsizliği de yazılabilir.

Örnek 410 $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n^2}$ *serisinin yakınsaklık durumunu araştıralım. Serinin genel terimi $a_n = ne^{-n^2}$ olup (a_n) dizisi pozitifdir. Şimdi $x \geq 1$ için $f(x) = xe^{-x^2}$ dersek f de pozitif bir fonksiyondur. Üstelik her $n \in \mathbb{N}$ için $f(n) = a_n$ dir. Ayrıca $f'(x) = (1 - 2x^2)e^{-x^2}$ olduğundan $x \geq 1$ için $f'(x) < 0$ dır. Yani $x \geq 1$ için f fonksiyonu ve dolayısıyla (a_n) dizisi monoton azalandır. O zaman İntegral Testi uygulanabilir. Bu durumda*

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_1^n f(x)dx \\
&= \int_1^n xe^{-x^2}dx \\
&= -\frac{1}{2}e^{-x^2}\Big|_1^n \\
&= \frac{1}{2e} - \frac{1}{2e^{n^2}} \\
&< \frac{1}{2e}
\end{aligned}$$

olduğundan (I_n) dizisi sınırlıdır. Dolayısıyla İntegral Testine göre verilen seri yakınsaktır.

Örnek 411 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ *serisinin yakınsak olduğunu gösterip*

$$\frac{\pi}{4} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} \leq \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$$

eşitsizliğinin sağlandığını gösteriniz.

Serinin genel terimi $a_n = \frac{1}{n^2+1}$ *olup* (a_n) *dizisi pozitif ve monoton azalandır. Şimdi* $x \geq 1$ *için* $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ *dersek* f *de pozitif ve monoton azalan bir fonksiyondur. Üstelik her* $n \in \mathbb{N}$ *için* $f(n) = a_n$ *dir. O zaman İntegral Testi uygulanabilir. Bu durumda*

$$\begin{aligned} I_n &= \int_1^n f(x)dx \\ &= \int_1^n \frac{dx}{x^2+1} \\ &= \arctan x|_1^n \\ &= \arctan n - \arctan 1 \\ &< \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

olduğundan (I_n) *dizisi sınırlıdır. Dolayısıyla İntegral Testine göre verilen seri yakınsaktır. Ayrıca*

$$I = \lim_{n\to\infty} I_n = \frac{\pi}{4}$$

olup bu (9) eşitsizliğinde yerine yazılırsa

$$\frac{\pi}{4} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} \leq \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$$

elde edilir.

Örnek 412

$$\frac{9}{8} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \leq \frac{5}{4}$$

eşitsizliğinin sağlandığını gösteriniz.

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ *serisini göz önüne alalım. Serinin genel terimi* $a_n = \frac{1}{n^3}$ *olup* (a_n) *dizisi pozitif ve monoton azalandır. Şimdi* $x \geq 1$ *için* $f(x) = \frac{1}{x^3}$ *dersek* f *de pozitif ve monoton azalan bir fonksiyondur. Üstelik her* $n \in \mathbb{N}$ *için* $f(n) = a_n$ *dir. O zaman İntegral Testinin tüm koşulları sağlanır. Şimdi (10) eşitsizliğini dikkate alırsak*

$$\int_2^n f(x)dx + a_1 \leq s_n \leq \int_2^n f(x)dx + a_1 + a_2$$

veya buna denk olarak

$$\int_2^n \frac{dx}{x^3} + 1 \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3} \leq \int_2^n \frac{dx}{x^3} + 1 + \frac{1}{8}$$

yazılabilir. Böylece

$$\frac{1}{8} - \frac{1}{2n^2} + 1 \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3} \leq \frac{1}{8} - \frac{1}{2n^2} + 1 + \frac{1}{8}$$

olup $n \to \infty$ *için limit alınırsa*

$$\frac{9}{8} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3} \leq \frac{5}{4}$$

eşitsizliği elde edilir.

6.4 Alıştırmalar

1. Aşağıda verilen serilerin yakınsaklık durumunu araştırınız.

   a $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{2n^3 - 1}$

   b $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{\sqrt{n+1}}$

   c $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$

d $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \left(\tfrac{1}{3} + \tfrac{2}{n}\right)^n$

e $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1(1+3)(1+2.3)\cdots(1+n.3)}{5(5+3)(5+2.3)\cdots(5+n.3)}$

f $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{2n+3}$

g $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n2^n}$

h $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n\sqrt{n}}$

i $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n-2}{n}\right)^{n^2}$

j $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{1.3.5\cdots(2n-1)}$

k $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$

l $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n5^{-n^2}$

m $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$

n $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n}}{2n^3+1}$

o $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n^2+1}{n^2+2}}$

ö $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\arcsin n)^2}{2n^3+1}$

p $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\frac{n}{2}}}{(n+1)^n}$

r $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{\sin n}{n^2+1}\right)$

s $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^n}{(n!)^n}$

2. (a_n) reel terimli dizisi $a_1=\frac{1}{2}$ ve $n\geq 1$ için $a_{n+1}=\dfrac{n}{n+2}a_n$ indirgeme bağıntısı ile verilmektedir. Bu durumda $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ serisinin toplamını hesaplayınız.

3. (a_n) reel terimli dizisi $a_1=1$ ve $n\geq 1$ için $a_{n+1}=\dfrac{1+\sqrt{n}}{n^2+3}a_n$ indirgeme bağıntısı ile verilmektedir. Bu durumda $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ serisinin yakınsaklık durumunu araştırınız.

4. (a_n) reel terimli dizisi $a_1=1$ ve $n\geq 1$ için $a_{n+1}=\dfrac{2-\sin\sqrt{n}}{n\ln n}a_n$ indirgeme bağıntısı ile verilmektedir. Bu durumda $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ serisinin yakınsaklık durumunu araştırınız.

5. (a_n) reel terimli dizisi $a_1=1$ ve $n\geq 1$ için $a_{n+1}=\dfrac{1-\cos n}{n^2+3}a_n$ indirgeme bağıntısı ile verilmektedir. Bu durumda $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ serisinin yakınsaklık durumunu araştırınız.

6. (a_n) reel terimli dizisi $a_1=1$ ve $n\geq 1$ için $a_{n+1}=n^2\sin^2\left(\dfrac{1}{n}\right)a_n$ indirgeme bağıntısı ile verilmektedir. Bu durumda $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ serisinin yakınsaklık durumunu araştırınız.

7. $$1,2\overline{34}=\frac{1222}{990}$$
eşitliğinin doğru olduğunu gösteriniz.

8.
$$\frac{1}{\ln 2} \leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2} \leq \frac{1}{\ln 2}\left(1+\frac{1}{\ln 4}\right)$$
eşitsizliğinin sağlandığını gösteriniz.

6.5 Alterne Seriler

Genel teriminin işareti ardışık olarak değişen serilere alterne seri adı verilir. Örneğin $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^n}$ birer alterne seridirler. Alterne seriler için aşağıdaki yakınsaklık testini dikkate alacağız.

Teorem 413 (Leibnitz Testi) *(a_n) reel terimli pozitif bir dizi olsun. Eğer*
$$\text{her } n \in \mathbb{N} \text{ için } a_{n+1} \leq a_n$$
ve
$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$
oluyorsa
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$$
alterne serisi yakınsaktır.

Uyarı 414 *Leibnitz Testi "Terimlerinin mutlak değeri azalarak sıfıra yakn-sayan bir alterne seri yakınsaktır" biçiminde de ifade edilebilir.*

Ispat. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ serisinin kısmi toplamlar dizisi (s_n) olsun. O zaman $n \geq 2$ için $a_{n+1} \leq a_n$ olduğundan
$$s_{2n} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \cdots + (a_{2n-1} - a_{2n})$$
dizisi artan bir dizidir. Burada s_{2n} genel terimi
$$s_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \cdots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n}$$

şeklinde de yazılabilir. Buradaki ilk terim hariç diğer bütün terimler ya negatif yada sıfırdır. O zaman $s_{2n} \leq a_1$ olur. Yani (s_{2n}) dizisi sınırlıdır. Monoton ve sınırlı diziler yakınsak olduğundan (s_{2n}) dizisi yakınsaktır.

$$\lim_{n\to\infty} s_{2n} = L$$

olsun. O zaman $L \leq a_1$ olduğu açıktır. Şimdi

$$\lim_{n\to\infty} s_{2n-1} = \lim_{n\to\infty} [s_{2n} + a_{2n}] = \lim_{n\to\infty} s_{2n} + \lim_{n\to\infty} a_{2n}] = L$$

olur. Böylece (s_n) dizisinin hem tek hem de çift indisli alt dizileri aynı L sayısına yakınsamaktadır. O zaman $s_n \to L$ olacağından $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ serisi yakınsaktır. ■

Örnek 415 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ *alterne serisini göz önüne alalım.* $a_n = \frac{1}{n}$ *der-sek verilen seri* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ *biçiminde bir alterne seridir. Burada* (a_n) *dizisi azalan ve sıfıra yakınsayan bir dizidir. O zaman Leibnitz testine göre* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ *serisi yakınsaktır.*

Tanım 416 $\sum a_n$ *herhangi terimli bir seri olsun. Eğer* $\sum |a_n|$ *serisi yakınsak ise* $\sum a_n$ *serisine Mutlak Yakınsaktır denir. Eğer* $\sum |a_n|$ *ıraksak fakat* $\sum a_n$ *serisi yakınsak ise* $\sum a_n$ *serisine şartlı yakınsaktır denir.*

Örnek 417 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ *serisi mutlak yakınsaktır fakat* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ *seisi şartlı yakınsaktır.*

Tanım 418 (a_n) *reel terimli bir dizi olsun. Eğer her* $\varepsilon > 0$ *için* $n, m \geq n_0$ *olduğunda*

$$|a_n - a_m| < \varepsilon$$

olacak biçimde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ *varsa* (a_n) *dizisine bir Cauchy dizisi denir.*

Uyarı 419 *Yakınsak her dizi bir Cauchy dizisidir. Karşıt olarak $\mathbb{R}$ de her Cauchy dizisi yakınsaktır.*

Teorem 420 (Seriler için genel yakınsaklık prensibi) *$\sum a_n$ herhangi bir seri olsun. O zaman $\sum a_n$ serisinin yakınsak olması için gerek ve yeter şart her $\varepsilon > 0$ için $m > n \geq n_0$ olduğunda*

$$\left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k\right| < \varepsilon$$

olacak biçimde bir n_0 doğal sayısının var olmasıdır.

Ispat. $\sum a_n$ serisinin kısmi toplamlar dizisi (s_n) olsun. O zaman $\sum a_n$ serisinin yakınsak olması için gerek ve yeter şart (s_n) dizisinin yakınsak ve dolayısıyla Cauchy dizisi olmasıdır. Buna göre serinin yakınsak olması için gerek ve yeter şart her $\varepsilon > 0$ için $m > n \geq n_0$ olduğunda

$$|s_n - s_m| < \varepsilon$$

olacak biçimde bir n_0 doğal sayısının var olmasıdır. Böylece

$$|s_n - s_m| = \left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k\right|$$

olduğundan istenen denklik elde edilir. ∎

Teorem 421 *Mutlak yakınsak her seri yakınsaktır.*

Ispat. $\sum a_n$ mutlak yakınsak bir seri olsun. O zaman $\sum |a_n|$ serisi yakınsaktır. Böylece genel yakınsaklık prensibinden her $\varepsilon > 0$ için $m > n \geq n_0$ olduğunda

$$\left|\sum_{k=n+1}^{m} |a_k|\right| = \sum_{k=n+1}^{m} |a_k| < \varepsilon$$

olacak biçimde bir n_0 doğal sayısı vardır. Diğer taraftan

$$\left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k\right| \leq \sum_{k=n+1}^{m} |a_k|$$

olduğundan $m > n \geq n_0$ için

$$\left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k\right| < \varepsilon$$

elde edilir. Böylece yine genel yakınsaklık prensibinden $\sum a_n$ yakınsaktır. ■

Teorem 422 *$\sum a_n$ reel terimli bir seri ve $n \in \mathbb{N}$ için*

$$p_n = \frac{|a_n| + a_n}{2} \text{ ve } q_n = \frac{|a_n| - a_n}{2}$$

olsun. O zaman

1. *$\sum a_n$ serisi şartlı yakınsak ise $\sum p_n$ ve $\sum q_n$ serilerinin her ikiside ıraksaktır.*

2. *$\sum a_n$ serisi mutlak yakınsak ise $\sum p_n$ ve $\sum q_n$ serilerinin her ikiside yakınsaktır ve*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} p_n - \sum_{n=1}^{\infty} q_n$$

   eşitliği sağlanır.

Ispat. Öncelikle eğer $a_n \geq 0$ ise $p_n = a_n$ ve $q_n = 0$, eğer $a_n \leq 0$ ise $p_n = 0$ ve $q_n = -a_n$ olduğu açıktır. Ayrıca her $n \in \mathbb{N}$ için

$$a_n = p_n - q_n \text{ ve } |a_n| = p_n + q_n$$

dir.

1. $\sum a_n$ serisi şartlı yakınsak olsun. O zaman $\sum a_n$ yakınsak fakat $\sum |a_n|$ ıraksaktır. Şimdi eğer $\sum q_n$ yakınsak ise $p_n = a_n + q_n$ olduğundan $\sum p_n$ de yakınsak olur. Benzer şekilde $\sum p_n$ yakınsak ise $\sum q_n$ serisinin de yakınsak olacağı elde edilir. Halbu ki $\sum p_n$ ve $\sum q_n$ serilerinin yakınsak olması halinde $|a_n| = p_n + q_n$ olduğundan $\sum |a_n|$ de yakınsak olur k bu mümkün değildir. O zaman $\sum p_n$ ve $\sum q_n$ serilerinin her ikiside ıraksaktır.

2. $\sum a_n$ serisi mutlak yakınsak olsun. O zaman $\sum |a_n|$ ve $\sum a_n$ serilerinin her ikiside yakınsaktır. Böylece

$$\sum \frac{|a_n| + a_n}{2} \text{ ve } \sum \frac{|a_n| - a_n}{2}$$

seileri de yakınsak olur. Yani $\sum p_n$ ve $\sum q_n$ serileri yakınsaktır. Ayrıca $a_n = p_n - q_n$ olduğundan

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (p_n - q_n) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n - \sum_{n=1}^{\infty} q_n$$

eşitliği sağlanır.

■

Teorem 423 *$\sum a_n$ reel terimli yakınsak bir seri olsun. Eğer (b_n) dizisi*

$$\begin{aligned} b_1 &= a_1 + a_2 + \cdots + a_{m_1} \\ b_2 &= a_{m_1+1} + a_{m_1+2} + \cdots + a_{m_2} \\ &\vdots \\ b_n &= a_{m_{n-1}+1} + a_{m_{n-1}+2} + \cdots + a_{m_n} \end{aligned}$$

biçiminde tanımlanırsa $\sum b_n$ serisi yakınsaktır ve üstelik

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

dir.

Ispat. $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ ve $t_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$ olsun. Bu durumda (b_n) dizisinin tanımı gereği $t_n = s_{m_n}$ olacağından (t_n) dizisi (s_n) dizisinin bir alt dizisi olur. Hipoteze göre (s_n) dizisi yakınsaktır ve eğer limiti S ise (t_n) dizisi de yakınsaktır ve limiti S dir. Yani

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

olur. ■

Uyarı 424 *Bu teorem yakınsak bir serinin terimlerinin parantezlere alınarak guruplandırılabileceğini göstermektedir. Yani*

$$a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots=(a_1+a_2+\cdots+a_{m_1})+(a_{m_1+1}+a_{m_1+2}+\cdots+a_{m_2})+\cdots$$

şeklinde yazılabilir. Burada terimler paranteze alınırken terimlerin sırasının değişmediğine dikkat ediniz.

Örnek 425 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ *serisini göz önüne alalım. Bilindiği gibi bu seri şartlı yakınsak bir seridir. Şimdi*

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n} &= 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots \\ &= \left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)+\cdots \\ &= \frac{1}{1.2}+\frac{1}{3.4}+\frac{1}{5.6}+\cdots \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)2n}\end{aligned}$$

olur. Yani

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}=S$$

ise

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)2n}=S$$

dir.

Örnek 426 *Aşağıdaki serilerin yakınsaklık durumunu araştırınız.*

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+1}$
2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{n+1}$
3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\pi}{n!}$

4. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! - 1}$

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\frac{n\pi}{2})}{2^n}$

6. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2.4.6 \cdots (2n)}{1.4.7 \cdots (3n-2)}$

7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-5)^{n-1}}{n.n!}$

8. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\ln n}$

9. $\sum\limits_{n=3}^{\infty} (-1)^n \ln \sqrt[n]{n}$

10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin n}{n^2}$

11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2 + (-1)^n}{2^n}$

12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$

13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{\frac{3}{4}}}$

6.6 Herhangi Terimli Seriler

Bu kesimde poitif veya alterne olması gerekmeyen seriler için bazı testler vereceğiz. Buradaki testler tüm seriler için geçerlidir. Buradaki testlerin ispatında kullanacağımız aşağıdaki teoremle başlayalım.

Teorem 427 (Abel Kısmi Toplam Formülü) *(a_n) ve (b_n) herhangi iki dizi olmak üzere*

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

ve

$$\Delta b_n = b_n - b_{n+1}$$

olsun. O zaman

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = s_n b_n + \sum_{k=1}^{n-1} s_k \Delta b_k$$

eşitliği sağlanır.

Ispat. $s_0 = 0$ olarak tanımlansın. Her $k \in \mathbb{N}$ için $a_k = s_k - s_{k-1}$ olduğundan

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} a_k b_k &= \sum_{k=1}^{n} (s_k - s_{k-1}) b_k \\
&= (s_1 - s_0) b_1 + (s_2 - s_1) b_2 + \cdots + (s_n - s_{n-1}) b_n \\
&= s_1 (b_1 - b_2) + s_2 (b_2 - b_3) + \cdots + s_{n-1}(b_{n-1} - b_n) + s_n b_n \\
&= s_n b_n + \sum_{k=1}^{n-1} s_k \Delta b_k
\end{aligned}$$

olur. ■

Teorem 428 *(a_n) ve (b_n) herhangi iki dizi olmak üzere*

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

ve

$$\Delta b_n = b_n - b_{n+1}$$

olsun. O zaman

1. *$(s_n b_n)$ dizisi yakınsak,*
2. *$\sum s_n \Delta b_n$ serisi yakınsak ise*

$\sum a_n b_n$ serisi de yakınsaktır.

Ispat. $\lim(s_n b_n) = L$ ve $\sum s_n \Delta b_n = S$ olsun. Abel Kısmi toplam formülünde $n \to \infty$ için limit alınırsa

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k b_k &= \lim_{n\to\infty} \left(s_n b_n + \sum_{k=1}^{n-1} s_k \Delta b_k \right) \\
&= L + S
\end{aligned}$$

olur. Yani

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k = L + S$$

olur ki bu verilen serinin yakınsak ve toplamının $L + S$ olduğunu söyler. ■

Teorem 429 (Abel Testi) *(a_n) ve (b_n) herhangi iki dizi olmak üzere*

A1-) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *yakınsak,*

A2-) (b_n) *monoton ve snırlı*

koşulları sağlansın. O zaman $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ *serisi yakınsaktır.*

Ispat. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ yakınsak olduğundan bunun kısmi toplamlar dizisi (s_n) de yakınsak ve dolayısıyla sınırlıdır. Yani her $n \in \mathbb{N}$ için $|s_n| \leq M$ olacak biçimde bir M reel sayısı vardır. (b_n) dizisi de monoton ve snırlı olduğundan yakınsaktır. O zaman $(s_n b_n)$ dizisi de yakınsak olur. Diğer taraftan

$$|s_n \Delta b_n| = |s_n| \, |\Delta b_n| \leq M \, |\Delta b_n|$$

olur. Ayrıca $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\Delta b_n|$ bir teleskopik seri olduğundan yakınsaktır. Böylece Karşılaştırma Testine göre $\sum_{n=1}^{\infty} s_n \Delta b_n$ serisi mutlak yakınsak ve dolayısıyla yakınsaktır. O zaman yukarıdaki teoreme göre $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ serisi yakınsaktır.
■

Örnek 430 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *yakınsak ve* $\alpha \geq 0$ *olsun. Bu durumda* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{n^{\alpha}}$ *serisi de yakınsaktır. Bunun için Abel Testinde* $b_n = \dfrac{1}{n^{\alpha}}$ *olarak dikkate almak yeterlidir.*

Uyarı 431 *Abel Testinde (b_n) dizisinin monotonluk şartı kaldırılamaz. Yani (b_n) monoton olmadığında* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ *yakınsak olmayabilir. Örneğin*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

serisi yakınsak ve $b_n = (-1)^n$ *dizisi sınırlı olduğu halde*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

serisi ıraksaktır.

Teorem 432 (Dedekind Testi) (a_n) *ve* (b_n) *herhangi iki dizi olmak üzere*

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

ve

$$\Delta b_n = b_n - b_{n+1}$$

olsun. O zaman

D1-) (s_n) *dizisi sınırlı,*

D2-) $\sum |\Delta b_n|$ *serisi yakınsak*

D3-) $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ *ise*

$\sum a_n b_n$ *serisi yakınsaktır ve üstelik*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} s_n \Delta b_n$$

eşitliği sağlanır.

Ispat. (s_n) dizisi sınırlı ve $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ olduğundan $\lim_{n\to\infty} s_n b_n = 0$ dır. Ayrıca yine (s_n) dizisi sınırlı olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için $|s_n| \leq M$ olacak biçimde bir M reel sayısı vardır. Bu durumda

$$\sum_{n=1}^{\infty} |s_n \Delta b_n| \leq M \sum_{n=1}^{\infty} |\Delta b_n| < \infty$$

olur ki bu $\sum s_n \Delta b_n$ serisinin mutlak yakınsak ve dolayısıyla yakınsak olduğunu ifade eder. Böylece Teorem 428 den $\sum a_n b_n$ serisi yakınsaktır. Son olarak

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = s_n b_n + \sum_{k=1}^{n-1} s_k \Delta b_k$$

Abel Kısmi toplam formülünde $n \to \infty$ için limit alınırsa

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k = \sum_{k=1}^{\infty} s_k \Delta b_k$$

eşitliği elde edilir. ■

Örnek 433 *Dedekind Testini kullanarak* $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ *serisinin yakınsak olduğunu gösteriniz.*

$a_n = (-1)^{n-1}$ *ve* $b_n = \frac{1}{n}$ *dersek*

$$\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \sum a_n b_n$$

olur. Ayrıca

$$\begin{aligned} s_n &= a_1 + a_2 + \cdots + a_n \\ &= 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots + (-1)^n \\ &= \begin{cases} 1 & , \quad n \text{ tek} \\ 0 & , \quad n \text{ çift} \end{cases} \end{aligned}$$

olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ *için* $|s_n| \leq 1$ *dir. Yani* (s_n) *sınırlıdır. Yine*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\Delta b_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1$$

olduğundan

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\Delta b_n|$$

serisi yakınsaktır. Son olarak

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

dır. Böylece Dedekind testinin tüm koşulları sağlanır. O zaman

$$\sum a_n b_n = \sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

serisi yakınsaktır.

Teorem 434 (Dirichlet Testi) *(a_n) ve (b_n) herhangi iki dizi olmak üzere*

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

ve

$$\Delta b_n = b_n - b_{n+1}$$

olsun. O zaman

Dr1-) (s_n) dizisi sınırlı,

Dr2-) (b_n) azalarak sıfıra yakınsayan bir dizi ise

$\sum a_n b_n$ *serisi yakınsaktır ve üstelik*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} s_n \Delta b_n$$

eşitliği sağlanır.

Ispat. Dedekind testinin hipotezlerinin sağlandığını göstermek ispat için yeterli olacaktır. O zaman

D1-) Hipotezden (s_n) dizisi sınırlıdır.

D2-) (b_n) azalan ve sıfıra yakınsak olduğundan

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} |\Delta b_n| &= \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - b_{n+1}) \\ &= b_1 - \lim b_n \\ &= b_1 < \infty \end{aligned}$$

olur.

D3-) Yine hipotezden $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ dır.

■

Örnek 435 *c tam sayı olmayan bir reel sayı olmak üzere*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n-c}$$

serisinin yakınsak olduğunu gösteriniz.

$a_n = (-1)^{n-1}$ *ve* $b_n = \dfrac{1}{n-c}$ *diyelim. O zaman*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n-c} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$$

olur. Şimdi

$$\begin{aligned} s_n &= a_1 + a_2 + \cdots + a_n \\ &= 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots + (-1)^n \\ &= \begin{cases} 1 & , \quad n \text{ tek} \\ 0 & , \quad n \text{ çift} \end{cases} \end{aligned}$$

olduğundan (s_n) *sınırlıdır. Yine* (b_n) *dizisi monoton azalan ve sıfıra yakınsaktır. Böylece Dirichlet Testine göre verilen seri yakınsaktır.*

Örnek 436 *Her bir* $\theta \in \mathbb{R}$ *için*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\theta}{n}$$

serisinin yakınsak olduğunu gösteriniz.

Öncelikle m *bir tamsayı olmak üzere* $\theta = m\pi$ *ise her* $n \in \mathbb{N}$ *için* $\sin n\theta = 0$ *olacağından serinin tüm terimleri sıfır olur. Bu durumda seri yakınsaktır. Şimdi* $\theta \neq m\pi$ *olsun.* $a_n = \sin n\theta$ *ve* $b_n = \dfrac{1}{n}$ *dersek*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\theta}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$$

olur. Bu durumda

$$\begin{aligned} s_n &= a_1 + a_2 + \cdots + a_n \\ &= \sin\theta + \sin 2\theta + \cdots + \sin n\theta \\ &= \frac{\sin\frac{n}{2}\theta \sin\frac{n+1}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}} \end{aligned}$$

olup

$$|s_n| \leq \frac{1}{\left|\sin \frac{\theta}{2}\right|}$$

olur. Yani (s_n) *sınırlıdır. Yine* (b_n) *dizisi azalan ve sıfıra yakınsak bir dizidir. Böylece Dirichlet Testine göre*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\theta}{n}$$

serisi yakınsaktır.

Uyarı 437 *Her* $n \in \mathbb{N}$ *için*

$$\sin\theta + \sin 2\theta + \cdots + \sin n\theta = \frac{\sin \frac{n}{2}\theta \sin \frac{n+1}{2}\theta}{\sin \frac{\theta}{2}}$$

eşitliğinin doğruluğu tümevarım ile gösterilebilir. Gerçekten eşitliğin $n = 1$ *için doğru olduğu açıktır. Şimdi* $n > 1$ *için bu eşitliğin sağlandığını kabul ederek* $n + 1$ *için de doğruluğunu gösterelim. O zaman*

$$\begin{aligned}
\sin\theta + \sin 2\theta + \cdots + \sin(n+1)\theta &= \underbrace{\sin\theta + \sin 2\theta + \cdots + \sin n\theta} + \sin(n+1)\theta \\
&= \frac{\sin \frac{n}{2}\theta \sin \frac{n+1}{2}\theta}{\sin \frac{\theta}{2}} + \sin(n+1)\theta \\
&= \frac{\sin \frac{n}{2}\theta \sin \frac{n+1}{2}\theta + \sin(n+1)\theta \sin \frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} \\
&= \frac{\sin \frac{n}{2}\theta \sin \frac{n+1}{2}\theta + 2\sin \frac{n+1}{2}\theta \cos \frac{n+1}{2}\theta \sin \frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} \\
&= \frac{\sin \frac{n+1}{2}\theta \left[\sin \frac{n}{2}\theta + 2\cos \frac{n+1}{2}\theta \sin \frac{\theta}{2}\right]}{\sin \frac{\theta}{2}} \\
&= \frac{\sin \frac{n+1}{2}\theta \left[\sin \frac{n}{2}\theta + \sin \frac{n+2}{2}\theta - \sin \frac{n}{2}\theta\right]}{\sin \frac{\theta}{2}} \\
&= \frac{\sin \frac{n+1}{2}\theta \sin \frac{n+2}{2}\theta}{\sin \frac{\theta}{2}}
\end{aligned}$$

elde edilir. Yani bahsi geçen eşitlik $n + 1$ *için de doğrudur. Burada*

$$\cos\alpha \sin\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)\right]$$

özdeşliği kullanılmıştır.

Örnek 438
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\theta}{n} \ \textit{ve} \ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\theta}{n^2}$$
serileri veriliyor. Birinci serinin m bir tamsayı olmak üzere $\theta \neq 2m\pi$ için yakınsak, ikinci serinin ise her θ reel sayısı için yakınsak olduğunu gösteriniz.

Öncelikle $\theta = 2m\pi$ için birinci seri
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$
harmonik serisi olup ıraksaktır. Şimdi $\theta \neq 2m\pi$ olsun. $a_n = \cos n\theta$ ve $b_n = \dfrac{1}{n}$ diyerek Dirichlet Testini uygulayalım. Bu durumda
$$\begin{aligned} s_n &= a_1 + a_2 + \cdots + a_n \\ &= \cos\theta + \cos 2\theta + \cdots + \cos n\theta \\ &= \frac{\sin\frac{n}{2}\theta\cos\frac{n+1}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}} \end{aligned}$$
olup
$$|s_n| \leq \frac{1}{\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|}$$
olur. Yani (s_n) sınırlıdır. Yine (b_n) dizisi azalan ve sıfıra yakınsak bir dizidir. Böylece Dirichlet Testine göre
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\theta}{n}$$
serisi yakınsaktır. Şimdi de ikinci seriyi göz önüne alalım. Bu durumda her θ reel sayısı için
$$\left|\frac{\cos n\theta}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$$
olup
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$
serisi yakınsak olduğundan karşılaştırma testine göre
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\cos n\theta}{n^2}\right|$$

seriside yakınsaktır. Böylece bahsi geçen seri mutlak yakınsak ve dolayısıyla yakınsaktır.

Örnek 439 *Abel Kısmi Toplam formülünden yararlanarak*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

serisinin yakınsak olduğunu gösteriniz.

$a_n = \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ *ve* $b_n = \frac{1}{n}$ *diyelim. O zaman*

$$\begin{aligned} s_n &= a_1 + a_2 + \cdots + a_n \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} \log\left(\frac{k+1}{k}\right) \\ &= \log\frac{2}{1} + \log\frac{3}{2} + \cdots + \log\frac{n+1}{n} \\ &= \log(n+1) \end{aligned}$$

olur. Bunlar

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = s_n b_n + \sum_{k=1}^{n-1} s_k \Delta b_k$$

Abel Kısmi Toplam fomülünde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \log\left(1 + \frac{1}{k}\right) &= \frac{1}{n}\log(n+1) + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \log(k+1) \\ &= \frac{\log(n+1)}{n} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\log(k+1)}{k(k+1)} \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $n \to \infty$ *için limit alınırsa*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(n+1)}{n} = 0$$

olduğuda düşünülerek

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \log\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\log(k+1)}{k(k+1)}$$

elde edilir. Şimdi

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\log(k+1)}{k(k+1)}$$

serisine Limit testini uygularsak

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} k^{\alpha} a_k &= \lim_{k\to\infty} k^{\frac{3}{2}} \frac{\log(k+1)}{k(k+1)} \\
&= \lim_{k\to\infty} \sqrt{k} \frac{\log(k+1)}{(k+1)} \\
&= \lim_{k\to\infty} \left(\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k+1}} \frac{\log(k+1)}{\sqrt{k+1}} \right) \\
&= \lim_{k\to\infty} \frac{\log(k+1)}{\sqrt{k+1}} \\
&= 0
\end{aligned}$$

olur. O zaman

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\log(k+1)}{k(k+1)}$$

serisi ve dolayısıyla verilen seri yakınsaktır.

Örnek 440 $\sum a_n$ *pozifit retimli yakınsak bir seri ve* R_n *de bunun kalan terimi olsun. Bu durumda*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n R_n$$

serisinin de yakınsak olacağını gösteriniz.

Örnek 441 $\sum a_n$ *pozifit retimli ıraksak bir seri ve* s_n *de bunun kısmi toplamlar dizisi olsun. Bu durumda*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{s_n}$$

serisinin yakınsak olacağını gösteriniz.