第三册习题集

大青花鱼

目录

第一章　无穷

1.1　无穷集合的势

1.2　常见无穷集合的势

1.3　可数和不可数

第二章　连续函数的变化

2.1　函数在一点的变化

定义 2.1.1. 散整式 如果整式 P 的系数在数域 $\mathbb{A}$ 中，根也都在 $\mathbb{A}$ 中，就说 P 是（在 $\mathbb{A}$ 上的）**散整式**。或者说 P 是**散**的，在 $\mathbb{A}$ 上**散开**。散整式 P 可以写成：

$$P(X) = c(X - x_1)^{m_1}(X - x_2)^{m_2} \cdots (X - x_k)^{m_k}$$

的形式。其中 $c \in \mathbb{A}$，$c \neq 0$，根 $x_1 < x_2 < \cdots < x_k$ 是 $\mathbb{A}$ 中系数。$m_0, m_1, \cdots, m_k$ 是正整数。

2.2　微变的运算法则

2.3　常见函数的微变

2.4　微变函数

例子 2.4.1. 设 f 是开区间 I 上可微的函数，下面要证明微变函数 ∂f 在 I 上满足介值定理，即如果对 I 中两点 a, b 有 $\partial f(a) < \partial f(b)$，那么存在 $c \in I$ 使得 $\partial f(a) < \partial f(c) < \partial f(b)$。

1. 设 $a, b \in I$，$\partial f(a) < \partial f(b)$，对 $z \in (\partial f(a), \partial f(b))$，证明：有正实数 H，使得只要 $0 < h < H$，就有：

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} < z < \frac{f(b+h)-f(b)}{h}.$$

2. 证明：存在 $h > 0$，$y \in I$，使得 $y + h \in I$，且

$$\frac{f(y+h)-f(y)}{h} = z.$$

3. 证明：存在 $x \in I$ 使得 $z = \partial f(x)$。

4. 证明 f 把区间 I 映射到一个区间。

5. 考虑函数 $x \mapsto x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$。证明 f 在 $[0,1]$ 上可微。f 的微变函数是否在 $[0,1]$ 上连续？给出集合 $\partial f([0,1])$ 的特征。你能得出什么结论？

解答. 1. 根据定义，微变率是变率的极限。因此，对任意实数 $r > 0$，总有 $H > 0$，使得只要 $0 < h < H$，就有：

$$\left|\frac{f(a+h)-f(a)}{h} - \partial f(a)\right| < r.$$

对 $\partial f(b)$ 也一样。选择 r 使得 $\partial f(a) + r < z$，$\partial f(b) - r > z$。比如 $z - \partial f(a)$ 和 $\partial f(b) - z$ 中较小者的一半。再选择使得相应变率足够接近 $\partial f(b)$、$\partial f(b)$ 的 H。这样，只要 $0 < h < H$，就有：

$$\left|\frac{f(a+h)-f(a)}{h} - \partial f(a)\right| < r,$$
$$\left|\frac{f(b+h)-f(b)}{h} - \partial f(b)\right| < r.$$

从而就有：

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} < z < \frac{f(b+h)-f(b)}{h}.$$

2. 给定 $0 < h < H$，考虑函数

$$\phi : x \mapsto \frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

则 ϕ 是 $[a,b-h]$ 上的连续函数。因此，由于 $z\in(\phi(a),\phi(b))$，根据介值定理，有 $y\in(a,b-h)$，使得

$$\frac{f(y+h)-f(y)}{h}=z.$$

3. 根据微分零值定理，存在 $x\in(y,y+h)$ 使得 $\partial f(x)=\frac{f(y+h)-f(y)}{h}=z$。

4. 考虑像集 $\partial f(I)$，我们在前几问中证明了：在 $\partial f(I)$ 任取两个元素 $\partial f(a)<\partial f(b)$，则开区间 $(\partial f(a),\partial f(b))$ 中任一点都在 $\partial f(I)$ 中。这说明 $\partial f(I)$ 是一个区间。

5. 容易证明 f 在 $(0,1]$ 上可微，微变函数为：

$$\partial f(x)=2x\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)-\frac{2}{x}\cos\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

对于 0 点，考虑变率：

$$\left|\frac{f(h)-f(0)}{h}\right|\leqslant|h|\left|\sin\left(\frac{1}{h^2}\right)\right|\leqslant|h|$$

因此 h 趋于 0 时，变率趋于 0。这说明 f 在 0 处可微，微变率为 0。

另外，对任意正整数 n，取 $x=\frac{1}{\sqrt{2n\pi}}$，则 $\frac{1}{x^2}=2n\pi$。它的正弦值为 0，余弦值为 1。于是 $\partial f(x)=-2\sqrt{2n\pi}$。这说明 x 按数列 $\{\frac{1}{\sqrt{2n\pi}}\}$ 趋于 0 时，∂f 的值趋于负无穷大。因此 ∂f 在 0 处不连续。当然，我们也可以取使得 $\frac{1}{x^2}$ 的正弦值为 0，余弦值为 -1 的 x，类似可以让 ∂f 的值趋于正无穷大。使用前几问的结果可知：$\partial f([0,1])$ 是全体实数集。这也从另一方面印证 ∂f 不连续。

例子 2.4.2. 设 f 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 上可微。$f(a)=f(b)=0$。c 是数轴上不属于 $[a,b]$ 的一点。证明：存在 (a,b) 上一点，函数 f 在该点的切线与横坐标轴交于 $(c,0)$ 点。

证明： 对 (a,b) 上的点 t，f 过点 t 的切线方程为：

$$y = f(t) + \partial f(t)(x-t).$$

切线过 $(c,0)$ 点，说明以下关系成立：

$$\partial f(t)(t-c) - f(t) = 0$$

考虑构造一个关于 t 的函数 $g(t)$，使得 $g(a) = g(b)$，且 $\partial g = 0$ 当且仅当上式等于 0。这样，我们使用微变零值定理，就能得到结论。

直接让 $\partial g = \partial f(t)(t-c) - f(t)$，发现没有简单的构造方法。考虑让 ∂g 为分式，$\partial f(t)(t-c) - f(t)$ 作为分母。这样思考下，我们构造：

$$g : t \mapsto \frac{f(t)}{t-c}.$$

则 $g(a) = g(b) = 0$。而求微得到：

$$\partial g = \frac{\partial f(t)(t-c) - f(t)}{(t-c)^2}.$$

这就是我们要找的 g。运用微变零值定理，存在 $x \in (a,b)$，使得 $\partial g = 0$，即 $\partial f(x)(x-c) - f(x) = 0$。因此 f 在 x 的切线过 $(c,0)$ 点。 □

注意：本题结论在直观上很容易理解，即当点在 (a,b) 上运动时，f 过点的切线扫过整个数轴 $[a,b]$ 以外的部分，不会有遗漏。

例子 2.4.3. 如果 P 是 $\mathbb{R}$ 上的散整式，证明对任意实数 t，$\partial P + tP$ 也是散整式。

解答. 把 P 写成 $c(X-x_1)^{m_1}(X-x_2)^{m_2}\cdots(X-x_k)^{m_k}$ 的形式，它的次数是：

$$n = m_1 + m_2 + \cdots + m_k$$

每个根 x_i 都是 ∂P 的 $m_i - 1$ 次根，那么它也是 $\partial P + tP$ 的 $m_i - 1$ 次根。计算重根的话，我们已经找到了 $\partial P + tP$ 的 $n-k$ 个根。

现在继续找出其他的根。我们可以猜测，对每个 $0 < i < k$，区间 (x_i, x_{i+1}) 中都有一个根。

考虑函数 $f : x \mapsto P(x)\mathrm{e}^{tx}$。$f$ 在闭区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 上连续，在开区间 (x_i, x_{i+1}) 上可微，根据微变零值定理，∂f 在 (x_i, x_{i+1}) 上有零点。而

$$\partial f(x) = (\partial P(x) + tP(x))\mathrm{e}^x,$$

e^x 总大于零，所以这个零点就是 $\partial P + tP$ 的根。

这样，我们又找到了 $k-1$ 个根。合共 $n-1$ 个根。如果 $t = 0$，那么 $\partial P + tP$ 是 $n-1$ 次多项式，这些根就是它所有的根。如果 $t \neq 0$，那么 $\partial P + tP$ 可以写成这 $n-1$ 个根的散整式和一个一次式的乘积。于是最后一个根也是实数。这说明 $\partial P + tP$ 总是散的。

例子 2.4.4. f 是 $\mathbb{R}^+$ 到 $\mathbb{R}$ 的连续函数，且在 $(0, \infty)$ 上可微。已知 $f(0) = 0$，$\operatorname*{lian}_{x\to\infty} f(x) = 0$。证明，存在正实数 c，使得 $\partial f(c) = 0$。

解答. 如果 f 恒等于 0，那么任取正实数即可。

如果 f 不恒等于 0，不妨设 f 有正值 $f(a) > 0$。由于 $\operatorname*{lian}_{x\to\infty} f(x) = 0$，所以对 $\frac{f(a)}{2} > 0$，存在 $R > 0$，使得只要 $x > R$，就有 $f(x) < \frac{f(a)}{2}$。比如，$f(R+1) < \frac{f(a)}{2}$。

因此，根据介值定理，区间 $(0, a)$ 和 $(a, R+1)$ 中，各有一点 x_1、x_2，使得 $f(x_1) = f(x_2) = \frac{f(a)}{2}$。

因此，根据微变零值定理，存在 $c \in (x_1, x_2)$，使得 $\partial f(c) = 0$。

例子 2.4.5. 函数 f、g 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，在开区间 (a, b) 上可微。

1. 如果 ∂g 在 (a, b) 上不等于 0，证明 g 在 (a, b) 上不等于 $g(b)$。
2. 给定 $t \in [a, b)$。记 $v = \frac{f(t)-f(b)}{g(t)-g(b)}$。考虑定义在 $[a, b]$ 上的函数 h:

$$h:\ x \mapsto f(x) - v \cdot g(x)$$

验证 $h(t)=h(b)$，从而证明：

$$\exists c\in[t,b),\ \text{使得}\ \frac{f(t)-f(b)}{g(t)-g(b)}=\frac{\partial f(c)}{\partial g(c)}.$$

3. 如果有实数 l 使得

$$\operatorname*{lian}_{x\to b^-}\frac{\partial f(x)}{\partial g(x)}=l,$$

证明：

$$\operatorname*{lian}_{x\to b^-}\frac{f(x)-f(b)}{g(x)-g(b)}=l,$$

解答. 1. 使用反证法：如果有 $t\in(a,b)$ 使得 $g(t)=g(b)$，那么根据微变零值定理，存在 $c\in(t,b)$ 使得 $\partial g(c)=0$，矛盾！

2. 验证 $h(t)=h(b)$：

$$\begin{aligned}
h(t)&=f(t)-\frac{f(t)-f(b)}{g(t)-g(b)}\cdot g(t)\\
&=\frac{f(t)\cdot(g(t)-g(b))-g(t)\cdot(f(t)-f(b))}{g(t)-g(b)}\\
&=\frac{f(t)g(t)-f(t)g(b)-g(t)f(t)+g(t)f(b)}{g(t)-g(b)}\\
&=\frac{f(b)g(t)-g(b)f(t)}{g(t)-g(b)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h(b)&=f(b)-\frac{f(t)-f(b)}{g(t)-g(b)}\cdot g(b)\\
&=\frac{f(b)\cdot(g(t)-g(b))-g(b)\cdot(f(t)-f(b))}{g(t)-g(b)}\\
&=\frac{f(b)g(t)-f(b)g(b)-g(b)f(t)+g(b)f(b)}{g(t)-g(b)}\\
&=\frac{f(b)g(t)-g(b)f(t)}{g(t)-g(b)}
\end{aligned}$$

所以 $h(t)=h(b)$。
根据微变零值定理，存在 $c\in(t,b)$，使得 $\partial h(c)=0$，因此:

$$\frac{f(t)-f(b)}{g(t)-g(b)}=\frac{\partial f(c)}{\partial g(c)}.$$

这里我们可以用 $\partial g(c)$ 做分母，是因为第一问的结论保证了它不等于 0。

3. 按照定义，对任意实数 $r>0$，存在 $d>0$，使得只要 $x\in(b-d,b)$，就有

$$\left|\frac{\partial f(x)}{\partial g(x)}-l\right|<r.$$

而根据第二问，存在 $c\in(x,b)$，使得

$$\frac{f(x)-f(b)}{g(x)-g(b)}=\frac{\partial f(c)}{\partial g(c)}.$$

$c\in(x,b)$，故 $c\in(b-d,b)$，于是

$$\left|\frac{f(x)-f(b)}{g(x)-g(b)}-l\right|=\left|\frac{\partial f(c)}{\partial g(c)}-l\right|<r.$$

这说明只要取 $x\in(b-d,b)$，就有

$$\left|\frac{f(x)-f(b)}{g(x)-g(b)}-l\right|<r.$$

也就是说，

$$\operatorname*{lian}_{x\to b^-}\frac{f(x)-f(b)}{g(x)-g(b)}=l.$$

2.5 多次微变

第三章　研究函数

3.1　增减与极值

3.2　凹凸性质

3.3　局部性质

3.4　曲线的性质

第四章　平直空间

4.1　平直空间的基本性质

4.2　子空间与和空间

4.3　生成空间

4.4　基底和维数

给定 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，$\partial^2 f+f=0$。如果 $f(0)=\partial f(0)=0$，那么 $f=0$。

$$f(x)=f(0)+\partial f(0)x+\frac{\partial^2 f(c)}{2}x^2=-\frac{f(c)}{2}x^2.\ 0<c<x.$$

证明：反设 $f(x_0)>0$。

第五章　连续函数的和

5.1　函数图像的面积

5.2　函数的定合

5.3　合函数

第六章　级数

6.1　正项级数

6.2　收敛与发散

6.3　函数的级数