第三册

大青花鱼

目录

第一章　数列的极限

1.1　极限的基本性质

我们来考察以下数列：

$$0,\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \frac{4}{5},\ \frac{5}{6},\cdots$$

它的通项公式是 $a_n = \frac{n-1}{n}$。把数列的前几项在数轴上标出来，我们发现：随着 n 不断增大，a_n 不断变大，不断向着 1 靠拢。

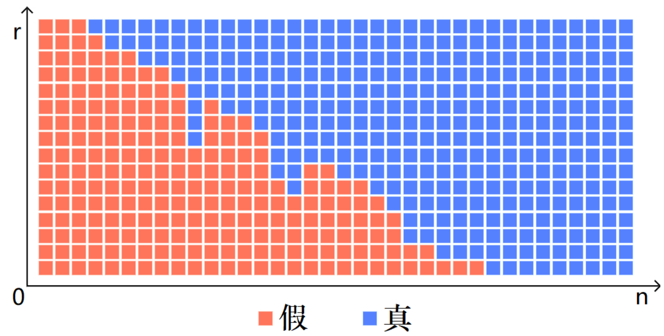
数列 $\{a_n\}$ 各项随着 n 增大，不断接近 1。虽然数列任一项都不等于 1，但我们不难产生这样的想法：随着 n 增大，a_n 的值任意接近于 1。

怎样严谨地表达这个想法呢？我们使用"有求必应"和"一路全真"的结构，把上面的想法用更具体的方式来描述。直观来看，我们考察以 1 为中心的区间 $[1-r, 1+r]$，无论这个区间多么小，到了一定的 n 以后，所有的 a_n 都会落在这个区间里。

用二元命题 $Q(r,n)$ 表示"a_n 落在区间 $[1-r, 1+r]$ 里"。用类似"有求必应"的结构，以上的想法可以写成：

$$\forall r > 0,\ \exists n,\ 使得\forall\ m \geqslant n,\ Q(r,n)成立。$$

这个结构比"有求必允"结构要求更高。它不仅要求"必允"，而且一旦"允"了，就要求之后"一路全真"。用表格来表示这个结论：



每格颜色对应 $Q(r,n)$ 的真假。每一行对应一个正数 r，每一列对应数列的一个下标 n。我们的想法是：不论 $r>0$ 是多少，它对应的行中，$Q(r,n)$ 必然从某一列起全为真。

我们把 1 称为数列 $\{a_n\}$ 的**极限**。对一般数列来说，我们定义：

定义 1.1.1. 数列的极限
设有无穷数列 $\{a_n\}$。如果有某个数 x，使得

$$\forall r>0,\ \exists n,\ \text{使得}\ \forall\ m \geqslant n,\ -r \leqslant a_m - x \leqslant r.$$

就说 $\{a_n\}$ 有极限 x，或 x 是 $\{a_n\}$ 的极限，或 $\{a_n\}$ 趋于 x，或 $\{a_n\}$ 收敛到 x，记作

$$\lim_{n\to\infty} a_n = x.$$

数列有极限也称为数列**收敛**，数列没有极限也称数列**不收敛**。

例题 1.1.1. 数列 $\{a_n\}$ 的通项是 $a_n = \frac{1}{n^2}$，它是否有极限？如果有极限，极限是多少？

解答. $\{a_n\}$ 每项都是正数。

$$a_n \div a_{n+1} = \frac{1}{n^2} \div \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{(n+1)^2}{n^2} = 1 + \frac{2n+1}{n^2} > 1,$$

所以 $\{a_n\}$ 是单调递减数列。从数轴上看，$\{a_n\}$ 不断趋近于 0。猜测它有极限 0。

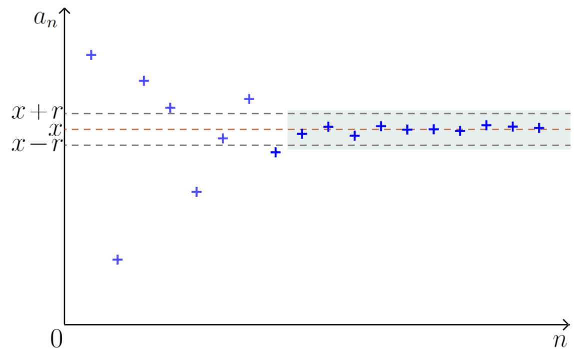


图 1.1: *
从某一项开始，数列的值总落在区间 $[x-r, x+r]$ 中

设 $r>0$，考察区间 $[-r,r]$。设 n_r 是大于等于 $\frac{1}{\sqrt{r}}$ 的最小正整数，那么，只要 $n \geqslant n_r$，就有 $n^2 \geqslant n_r^2 \geqslant \frac{1}{r}$，于是 $0 \leqslant \frac{1}{n^2} \leqslant r$。因此，$\forall r>0$，$\exists n_r$，使得 $\forall m \geqslant n_r$，$-r \leqslant a_m - 0 \leqslant r$。这说明 $\{a_n\}$ 有极限 0。

不难看出，极限是构造出来的。因此，从定义出发，我们可以说某个数是某数列的极限。反过来，一个数列有极限，它的极限是否只能有一个呢？答案是肯定的。我们可以用反证法来证明。

反设某数列 $\{a_n\}$ 有两个极限 x_1, x_2。不妨设 $x_1 < x_2$。直觉上，n 足够大的时候，a_n 在数轴上离 x_1, x_2 都很近，到两点的距离比 $x_2 - x_1$ 的一半都小，加起来就小于 $x_2 - x_1$，于是就产生矛盾了。

具体来说，记 $\delta = \frac{x_2 - x_1}{2}$ 为两点距离的一半。选一个小于 δ 的正数 r。按照极限的定义，有正整数 n_1, n_2 使得：

$$\forall m \geqslant n_1, \quad -r \leqslant a_m - x_1 \leqslant r,$$
$$\forall m \geqslant n_2, \quad -r \leqslant a_m - x_2 \leqslant r.$$

于是，选一个比 n_1, n_2 都大的 m，比如 $m = n_1 + n_2$，这时 $a_m - x_1 \leqslant r$，$x_2 - a_m \leqslant r$。加起来就得到：

$$x_2 - x_1 \leqslant 2r < 2\delta = x_2 - x_1.$$

矛盾！因此，**数列如果有极限，只能有一个**。

数列的极限，如果存在，是唯一的。我们可以把数列 $\{a_n\}$ 的极限记为 a_∞。

设数列 $\{a_n\}$ 有极限 a_∞。我们把它每一项减去 a_∞，得到的数列 $\{a_n - a_\infty\}$ 趋于 0。所以，任何有极限的数列，都可以看做一个趋于 0 的数列加上它的极限。我们把趋于 0 的数列称为**无穷小**。任何有极限的数列，都是它的极限加上无穷小。

极限描述了数列的项在“远处”的特征。我们把数列下标超过一定限度后的特征称为数列的**大体行为**。有极限的数列，我们可以用极限来刻画数列的大体行为（落在极限“附近”）。没有极限的数列，大体行为有什么特征呢？

我们来看另一个数列：

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5, \cdots$$

它是正整数数列，通项为 $a_n = n$。不难看出，它没有极限。因为对任何实数 x 来说，令 n_x 为大于 x 的最小正整数，那么从 $n_x + 1$ 开始的项都比 x 大至少 1，无法落到 x 附近的小区间里面。可以说，随着 n 增大，a_n 会比任何数都大。

如何严谨描述这个想法呢？我们仍然可以用“有求必应”的结构，把以上想法写成：

$$\forall x,\ \exists n,\ \text{使得}\ \forall\ m \geqslant n\ ,\ a_m \geqslant x.$$

直观来看，随着 n 增大，从某一项开始，a_n 会落到数轴任何给定点 x 的右边。我们把这个性质称为数列**趋于正无穷大**。同理，可以定义数列**趋于负无穷大**：

$$\forall x,\ \exists n,\ \text{使得}\ \forall\ m \geqslant n\ ,\ a_m \leqslant x.$$

直观来看，随着 n 增大，从某一项开始，a_n 会落到数轴任何给定点 x 的左边。

我们也把有这两个性质的数列简称为**正无穷大**和**负无穷大**。

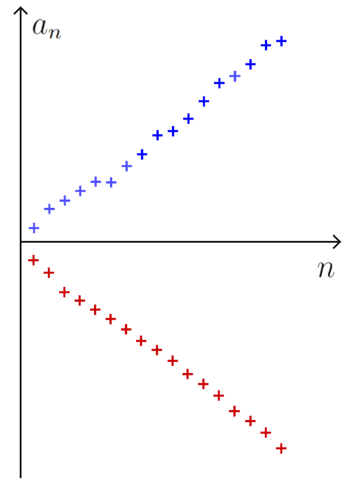


图 1.2: *

趋于无穷大的数列

例题 1.1.2. 设数列 $\{\frac{1}{n}\}$ 的部分和数列为 $\{a_n\}$，证明：$\{a_n\}$ 趋于正无穷大。

证明： 按照定义，$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$。
$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+1} > 0$，所以 $\{a_n\}$ 单调递增。
对任意实数 x，我们需要找到相应的 n，使得 $\forall m \geqslant n$，$a_m \geqslant x$。由于 $\{a_n\}$ 单调递增，只要某一项 $a_n \geqslant x$，它之后的项都大于等于 x。因此，只需要找到 n 使得 $a_n \geqslant x$ 即可。
如果 $x \leqslant 1$，那么 $n = 1$ 即满足要求。
如果 $x > 1$，设 M 是大于 x 的最小整数，考虑 $n = 2^{2M}$。下面证明 $a_{2^{2M}} > x$。

$$a_{2^{2M}} = a_{2^0} + \sum_{i=1}^{2M} a_{2^i} - a_{2^{i-1}}.$$

$$\begin{aligned}\forall\ i \in [1 \ldots 2M],\ \ a_{2^i} - a_{2^{i-1}} &= \frac{1}{2^{i-1}+1} + \frac{1}{2^{i-1}+2} + \cdots + \frac{1}{2^i} \\ &\geqslant \frac{1}{2^i} + \frac{1}{2^i} + \cdots + \frac{1}{2^i} \\ &= \frac{2^{i-1}}{2^i} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

$$\text{所以} \quad a_{2^{2M}} \geqslant a_1 + \frac{1}{2} \cdot (2M - 1) = M + \frac{1}{2} > x.$$

这就证明 $\{a_n\}$ 趋于正无穷大。 □

思考 1.1.1.

1. 张三在判定数列 $\{a_n\}$ 的极限时写到：数 x 满足：

$$\forall r > 0,\ \ \exists n,\ \ \text{使得}\forall\ m > n\ \ \text{都有} x - r < a_m < x + r.$$

因此 $\{a_n\}$ 有极限 x。他的说法对吗?

2. 李四在判定数列 $\{a_n\}$ 的极限时写到：数 x 满足：

$$\forall r > 0,\ \exists n,\ \text{使得}\forall\ m > n\ \ \text{都有} x - 2r \leqslant a_m \leqslant x + 2r.$$

因此 $\{a_n\}$ 有极限 x。他的说法对吗?

3. 一般数列除了有极限和趋于正/负无穷大，还可能有什么大体行为?

4. 单调数列除了有极限和趋于正/负无穷大，还可能有什么大体行为?

习题 1.1.1.

1. 以下数列是否有极限？如果有极限，是多少?

1.1. $\{2^{1-n}\}$

1.2. $\{(-1)^{n-1}\frac{n+1}{3n+1}\}$

1.3. $\{1 - \frac{1}{n^3+1}\}$

2. 以下数列是否趋于无穷大?

2.1. $\{2^n\}$

2.2. $\{n^2\}$

2.3. $\{\frac{2^n}{n^2}\}$

3. 定义：无穷数列 $\{a_n\}$ 的子列是指从 $\{a_n\}$ 的项中抽取一部分得到的无穷数列。如果数列 $\{a_n\}$ 趋于 x（趋于正/负无穷大），证明：$\{a_n\}$ 的任何子列趋于 x（趋于正/负无穷大）。

1.2 极限的运算

我们已经学习了数列的运算。数列之间可以做加法、减法、乘法。如果数列 $\{a_n\}$、$\{b_n\}$ 有极限，它们的和、差、乘积是否有极限？答案是肯定的，并且符合我们的直觉：

定理 1.2.1. 若数列 $\{a_n\}$ 趋于 a，$\{b_n\}$ 趋于 b，则

$$\lim_{n\to\infty} a_n \pm b_n = a \pm b,$$
$$\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = a \cdot b.$$

特别地，令 $\{b_n\}$ 是常数列，就得到数乘对极限的影响: 若数列 $\{a_n\}$ 趋于 a，则

$$\forall\, t \in \mathbb{R},\ \ \lim_{n\to\infty} t \cdot a_n = ta.$$

证明:
首先证明极限的加法: 设数列 $\{a_n\}$ 趋于 a，$\{b_n\}$ 趋于 b。按照定义，$\forall r > 0$，由于 $\frac{r}{2} > 0$，总有正整数 n_a, n_b，使得

$$\forall\, m \geqslant n_a,\ \ -\frac{r}{2} \leqslant a_m - a \leqslant \frac{r}{2},$$
$$\forall\, m \geqslant n_b,\ \ -\frac{r}{2} \leqslant b_m - b \leqslant \frac{r}{2},$$

因此，

$$\forall\, m \geqslant n_a + n_b,\ \ -r = -\frac{r}{2} - \frac{r}{2} \leqslant a_m + b_m - a - b \leqslant \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r$$

于是数列 $\{a_n\} + \{b_n\}$ 趋于 $a + b$。
接下来证明极限的数乘: 设 t 为实数，数列 $\{a_n\}$ 趋于 a，则数列 $\{t \cdot a_n\}$ 趋于 ta。这样，数列 $\{a_n\} - \{b_n\}$ 可以看作 $\{a_n\} + \{-b_n\}$，因而趋于 $a - b$。分两种情况讨论。如果 $t = 0$，那么 $\{t \cdot a_n\} = \{0\}$，显然趋于 0，也就是 ta。如果 $t \neq 0$，按照定义，对 $\forall r > 0$，由于 $\frac{r}{t} > 0$，总有正整数 n 使得

$$\forall\, m \geqslant n,\ \ a - \frac{r}{t} \leqslant a_m \leqslant a + \frac{r}{t}.$$

因此

$$\forall\, m \geqslant n,\ \ ta - r \leqslant t \cdot a_m \leqslant ta + r.$$

这就说明数列 $\{t \cdot a_n\}$ 趋于 ta。

最后证明极限的乘法：设数列 $\{a_n\}$ 趋于 a，$\{b_n\}$ 趋于 b。按照定义，$\forall r > 0$，由于 $\sqrt{r} > 0$，总有正整数 n_a, n_b，使得

$$\forall\ m \geqslant n_a,\ \ -\sqrt{r} \leqslant a_m - a \leqslant \sqrt{r},$$
$$\forall\ m \geqslant n_b,\ \ -\sqrt{r} \leqslant b_m - b \leqslant \sqrt{r},$$

因此

$$\begin{aligned} \forall\ m \geqslant n_a + n_b,\ (a_m - a)(b_m - b) &\leqslant \left(\sqrt{r}\right)^2 = r \\ -(a_m - a)(b_m - b) &\leqslant \left(\sqrt{r}\right)^2 = r, \\ \text{即}\quad -r \leqslant (a_m - a)(b_m - b) &\leqslant r. \end{aligned}$$

这说明数列 $\{(a_n - a)(b_n - b)\}$ 趋于 0。而 $\{b \cdot a_n\}$ 和 $\{a \cdot b_n\}$ 都趋于 ab，常数列 $\{ab\}$ 也趋于 ab，所以根据前面证明的极限加减法，数列

$$\{a_n b_n\} = \{(a_n - a)(b_n - b)\} + \{b \cdot a_n\} + \{a \cdot b_n\} - \{ab\}$$

趋于 $0 + ab + ab - ab = ab$。 □

四则运算中，加法、减法、乘法都可以对数列的极限做运算。那么除法是否可以呢？具体来说，若数列 $\{a_n\}$ 趋于 a，$\{b_n\}$ 趋于 b，是否有 $\{\frac{a_n}{b_n}\}$ 趋于 $\frac{a}{b}$?

显然，$b = 0$ 的时候，$\frac{a}{b}$ 无定义，所以排除 $\{b_n\}$ 趋于 0 的情况。如果 b 不等于 0，答案大致是肯定的。$\{\frac{a_n}{b_n}\}$ 趋于 $\frac{a}{b}$。当然，我们要先“剪掉”$\{b_n\}$ 最开始一些离 b 比较远的项，确保剩下的项都不等于 0，这样才好定义 $\frac{a_n}{b_n}$。然后可以用类似证明极限乘法的方法，证明 $\{\frac{1}{b_n}\}$ 趋于 $\frac{1}{b}$，这样，$\{\frac{a_n}{b_n}\}$ 可以看作 $\{a_n \cdot \frac{1}{b_n}\}$，因而趋于 $\frac{a}{b}$。

习题 1.2.1.

1. 如果数列 $\{a_n\}$ 有极限 a，$\{b_n\}$ 趋于无穷大，它们的和、差、乘积、商数列是否有极限？是否趋于无穷大?

2. 如果数列 $\{a_n\}$、$\{b_n\}$ 都趋于无穷大，它们的和、差、乘积、商数列有什么特性?

1.3 关于数列极限的一些定理

1.3.1 自敛数列

我们已经了解过有极限的数列和趋于正（负）无穷大的数列。数列的大体行为是否还有别的可能呢？要讨论数列的大体行为，我们更关注的是数列“往后”的性质。如果以某个正整数下标 N 为界，把数列分为前 N 项和 N 以后的项，那么 N 以后的项对我们研究大体行为来说更重要。我们把这部分称为数列截断后的**余列**。数列 $\{a_n\}$ 第 N 项以后的项（$a_{N+1}, a_{N+2}, \cdots$）称为 $\{a_n\}$ 的 N **项余列**，记作 $\{a_n\}_{n>N}$。任何数列在正整数 N 处截断，都能得到一个前 N 项部分以及一个 N 项余列。

我们引入一个新的性质：

定义 1.3.1. 如果随着 N 增大，数列 $\{a_n\}$ 的 N 项余列中，各项之间的差任意小，就说数列 $\{a_n\}$ 是**自敛**的（或者说 $\{a_n\}$ 有**自敛性**）。具体来说，如果对任意正数 r，都存在正整数 N，使得对 $\{a_n\}_{n>N}$ 中任何两项 a_k, a_m，都有 $|a_k - a_m| \leqslant r$，就说数列 $\{a_n\}$ 是**自敛**的。

顾名思义，自敛的数列，指数列的项会逐渐相互靠近，自相收敛到一起。不难看出，有极限的数列，总是自敛的，因为它的项会逐渐趋于它的极限，于是互相靠近，收敛到一起。反之是否成立呢？对于实数来说，这个性质是成立的。我们把这个性质称为实数的**致密性**或**完备性**。

公理. 任何自敛的实数数列总有极限，极限为实数。

我们可以从另一个角度来理解这个性质。考虑数列 $\{a_n\}$：

$$a_1 = 1, \quad \forall\ n \in \mathbb{Z}^+,\ a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n}$$

$\{a_n\}$ 的项是有理数四则运算的结果，所以总是有理数。用归纳法可以证明，

$1 < a_n < 2$ 总成立。此外可以验证：

$$a_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{(a_n - \sqrt{2})^2}{2a_n},$$

因此，

$$|a_{n+1} - \sqrt{2}| = \frac{|a_n - \sqrt{2}|}{2|a_n|} \cdot |a_n - \sqrt{2}| < \frac{2 - \sqrt{2}}{2} \cdot |a_n - \sqrt{2}| < 0.3 \cdot |a_n - \sqrt{2}|.$$

这说明总有 $|a_n - \sqrt{2}| < (0.3)^{n-1}$。于是 $\{a_n\}$ 趋于 $\sqrt{2}$。然而，$\sqrt{2}$ 并不是有理数。这说明有理数集合并不是致密的。一列有理数互相靠近，自相收敛，但它们最终收敛的结果，是不属于有理数集合的"空隙"。这说明，如果我们认为有理数组成的数列才叫数列，那么"极限"这个概念对有理数集和有理数的数列是不完备的：我们没法只通过有理数来讨论有理数列的极限。而实数的完备性说明，如果一列实数互相靠近，不断聚拢到一起，那么最终总能收敛到某个实数，而非某个不属于实数集合的"新数"。

实数的致密性（完备性）是实数集合的根本性质，是对日常生活中"长度"概念进行抽象得到的必然结果：我们认为任意的长度都是存在的，直尺上不可能有两点之间没有长度。即便由于测量工具的局限，我们无法精确测量物体的长度，我们也相信，物体的长度是一个真实存在的数。**实数是人类在自身尺度下对世界的朴素认知的抽象**。