第二册

大青花鱼

目录

第一章　空间中的形状

我们已经通过公理体系研究过平面中的简单形状，将基本的平面形和函数的图像联系起来，并且引入了向量的概念。现在，我们进一步研究立体空间中的形状。人类生活在立体空间中，因此，研究空间中形体的性质，对我们认识世界、改造世界有直接帮助。

1.1　点、直线、平面

和平面形一样，立体空间中的形也是从种种事物的形状总结提炼而来。平面是人类最早总结出的概念之一。我们已经研究过平面中的形状，因此，研究立体空间时，我们把平面作为地位和点、直线相同的基本概念。

研究平面形状时，我们首先引进了公理体系。如今我们将平面公理体系扩展为立体空间的公理体系。为此，我们要通过公设和公理定义**平面**以及它和点、直线的关系。

我们定义面为点的集合，也是线运动的结果。平面是最基本的面，一般用小写希腊字母 α, β, γ 等表示。

公理 1. 平面公理 过不共线的三点，有且仅有一个平面。

我们也说三角形（或圆）确定一个平面。不共线的三点 A、B、C 确定的平面，可以记作平面 ABC。

如何确定平面是“平”的呢？生活和生产中，我们一般用直线来确定一个面是不是平的。比如，木工常常用角尺的直角边放在刨好的木板上。如果直角边总能与板面紧密贴合，就说明木板已刨平了。水泥工用直的刮子将刚铺水泥的地面刮平。我们把人们总结出的经验作为判断平面的方法，用公理的形式确定下来。

公理 2. 平直公理 过平面上不重合两点的直线，在平面中。

平直公理说明，直线要么与平面没有公共点，要么只交于一点，要么全部在平面里。直线与平面没有公共点，则称直线与平面平行，也用 $//$ 表记；直线与平面恰有一公共点，则称直线与平面相交；直线与平面有两个或以上公共点，则称直线在平面中或平面经过直线。用集合的语言来说，直线 l 在平面 γ 中，就说明 l 是 γ 的子集。

从平面公理和平直公理，容易得到另两种定义平面的方法：

定理 1.1.1. 过一条直线与该直线外一点，有且仅有一个平面。

证明： 设直线为 l，P 为 l 外一点。取 l 上不同的两点，和 P 构成不共线的三点。这三点确定一个平面。根据平直公理，l 在该平面中。 □

定理 1.1.2. 过两条相交的直线，有且仅有一个平面。

证明： 设有直线 l, m。如果 l, m 相交，设交点为 P，在 l, m 上各取不同于 P 的一点：Q, R，则 P, Q, R 不共线，于是确定一个平面 PQR，根据平直公理，l, m 都在 PQR 中。 □

设直线 l 与平面 γ 平行，没有公共点，那么它与 γ 中任何直线没有公共点。比如，给定 γ 中一点 A，γ 中经过 A 的任何直线，都与 l 没有公共点。

平面中，两直线没有公共点，就说它们相互平行。空间中，两直线除了重合、相交和平行，还有另一种关系，我们称之为直线**异面**。前面的例子

中，根据平行公理，过 γ 中的点 A，恰有一条直线与 l 平行，其余与 l 不相交的直线，都称与 l 异面。

哪条直线与 l 平行呢？显然，在空间中，我们需要补充平行公理：

公理 3. 平行公理 过直线外一点，有且仅有一条与它平行的直线。它在直线与点确定的平面上。

新版的平行公理在原来的基础上，指定了平行线的位置：在直线与点确定的平面上。换句话说，平行是一个平面内性质。两直线平行的关系必然发生在同一平面中。也正因如此，我们把其它的无公共点的情形叫做异面。

从补充的平行公理出发，可以得到另一种定义平面的方法：

定理 1.1.3. 过两条平行的直线，有且仅有一个平面。

证明： 设直线 $l \parallel m$，在 l 上找两点 P_1, P_2，在 m 上找一点 Q。P_1P_2Q 确定唯一平面 γ。在平面 γ 中，过 Q 作 l 的平行线。根据平行公理，这条平行线就是 m。因此 l, m 共面，它们确定唯一平面 γ。 □

再来看两个平面的关系。两个平面相交，交集是什么呢？生活中的经验告诉我们，两个平面相交，交集是直线。比如，裁纸刀的刀面是平的，切在纸上，将纸面分成两部分，裁痕是直的。我们把这个性质用公理描述为：

公理 4. 交面公理 两个平面如果有交集，则交集至少包含两个不重合的点。

交面公理说明，两个平面不可能只交于一点。如果它们有两个（不重合的）公共点，那么根据平直公理，两平面的交集包括过这两点的直线。而如果两平面的交集中还有不属于这条直线的第三点，那么根据平面公理，这三点确定一个平面，于是两平面重合。

综上所述，从交面公理可以推出：要么两平面没有公共点，要么交集为一条直线 l，称为两平面相交于直线 l；要么两平面重合。

有了交面公理，我们可以证明空间中平行直线的递推性质。由于证明繁琐，有些地方把它当作公理引入。

定理 1.1.4. 如果直线 l_1, l_2 都平行于直线 m，那么 l_1, l_2 平行或重合。

证明： 设 l_1, m 确定的平面为 γ_1，l_2, m 确定的平面为 γ_2。分两种情况讨论:

1. γ_1, γ_2 重合。那么 l_1, l_2, m 都在此平面上。根据平面直线的结论，l_1, l_2 平行或重合。

2. γ_1, γ_2 不重合。于是 $\gamma_1 \cap \gamma_2 = m$。取 l_1 上一点 P，P 与 l_2 确定平面 β。$l_2 \notin \gamma_1$，所以 β, γ_1 不重合。设 $\beta \cap \gamma_1 = n$。

首先证明 $n \mathbin{/\!/} l_2$。反设 n 交 l_2 于点 Q，则 $Q \in \gamma_1 \cap \gamma_2 = m$，于是 $Q \in m \cap l_2$。这与 $m \mathbin{/\!/} l_2$ 矛盾。因此 $n \mathbin{/\!/} l_2$。

再证明 $n \mathbin{/\!/} m$。反设 n 交 m 于点 Q，则过 Q 有 $m \mathbin{/\!/} l_2$ 和 $n \mathbin{/\!/} l_2$，于是 $n = m$。但 $P \in n$，因此 $P \in m \cap l_1$，这与 $m \mathbin{/\!/} l_1$ 矛盾。因此 $n \mathbin{/\!/} m$。

n 与 l_1 都平行于 m，且有公共点 P，所以 $n = l_1$。所以 $l_1 \mathbin{/\!/} l_2$。 □

接下来回顾直线与平面的关系。从补充后的平行公理，可以得出直线与平面平行的判定方法:

定理 1.1.5. 如果平面 α 中有直线 m 平行于直线 l，那么 l 平行于平面 α 或在 α 中。

证明： 设直线 l 平行于平面 α 中的某直线 m。记 l, m 确定的平面为 β。则要么 $\alpha = \beta$，要么 $\alpha \cap \beta = m$。如果 $\alpha = \beta$，那么 $l \subset \alpha$。如果 $\alpha \cap \beta = m$，那么 $\alpha \cap l = \beta \cap \alpha \cap l = m \cap l = \varnothing$，即 $\alpha \mathbin{/\!/} l$。 □

定理 1.1.6. 如果直线 l 与平面 α 平行，那么经过 l 的任意平面，若与 α 相交，其交线也与 l 平行。

证明： 设经过 l 的平面 γ 与 α 交于直线 m。一方面，m,l 共面；另一方面 $m \in \alpha$，因此 m,l 无公共点。这说明 $m \parallel l$。 □ 从这些结论可以继续推出：

定理 1.1.7. 若直线 l 与平面 α 平行，过 α 中任一点作 l 的平行线 m，则 m 在平面 α 中。

证明： 若直线 l 与平面 α 平行，设它和 α 中任一点 P 确定的平面为 β，则 β 与 α 相交。设交线为 m，则 $P \in m$。根据定理 1.1.6，$l \parallel m$。这就说明，过 P 而平行于 l 的直线在 α 中。 □

定理 1.1.8. 直线 l 与直线 m 平行，则过 m 的平面要么与 l 平行，要么经过 l。

证明： 给定过 m 的平面 α，$m \subset \alpha$ 与 l 平行，所以根据定理 1.1.5，l 平行于平面 α 或在 α 中。 □

直线与平面的平行关系，也有传递性。

定理 1.1.9. 若直线 l_1 与直线 l_2 平行，且与平面 γ 平行，则 l_2 与 γ 平行或在 γ 中。

证明： $l_1 \parallel \gamma$。过 γ 中任一点作直线 $n \parallel l_1$，则根据定理 1.1.7，n 在 γ 中。$n \parallel l_1$，$l_1 \parallel l_2$，所以根据定理 1.1.4，$n \parallel l_2$。根据定理 1.1.5，$l_2 \parallel \gamma$ 或在 γ 中。 □

上面提到，两平面要么无公共点，要么相交，要么重合。我们把无公共点的平面称为平行平面，也用 $\parallel$ 表记。平面中，平行公理告诉我们，过直线外一点，恰有一条直线与之平行。空间中的平面，也有类似的结论：

定理 1.1.10. 过平面外一点，恰有一平面与之平行。

证明： 设平面 α 外有点 P。在 α 上选一点 A，过 A 作两相交直线 l,m（交点为 A）。根据平行公理，过 P 恰有直线 l',m' 分别与 l,m 平行。l',m' 相交于点 P，确定平面 α'。下面证明 α,α' 无公共点，即 $\alpha' \mathbin{/\mkern-5mu/} \alpha$。

反设 α,α' 有公共点。由于 $P \in \alpha'$ 在 α 外，两者不重合。因此根据交面公理，$\alpha \cap \alpha'$ 是一条直线，记为 n。l,m,n 共面，l,m 相交，因此 l,m 中至少有一条与 n 相交。设 l 与 n 相交，交点为 Q，则 $Q \in n \subset \alpha'$。又因为 $l \mathbin{/\mkern-5mu/} l'$，$Q \in l$，所以 $Q \notin l'$，因而在 α' 中，过 Q 可作 l' 的平行线。但这条线在 α' 中，因此不是 l。这与平行公理矛盾。

因此，α,α' 无公共点，$\alpha' \mathbin{/\mkern-5mu/} \alpha$。 □

类似的结论还有：

定理 1.1.11. 过平行于平面 α 的一直线 l，恰有一平面与 α 平行。

证明： 在 l 上任取一点 P，$P \notin \alpha$，因此根据定理 1.1，过 P 恰有一平面 β 与 α 平行，只需证明 β 经过 l。在 α 中任取一点 Q，则根据定理 1.1.7，过 Q 平行于 l 的直线 m 在 α 中。β 与 α 平行，也就是说 β 与 α 无公共点，所以 β 与 α 的子集 m 也无公共点，即 $m \mathbin{/\mkern-5mu/} \beta$。过 P 作 m 的平行线，则根据定理 1.1.7，平行线在 β 中。而这条平行线就是 l，所以 l 在 β 中。这说明过 l 恰有一平面 β 与 α 平行。 □

从证明中，我们还可以提炼出判定平面平行（或重合）的准则：

定理 1.1.12. 给定平面 γ_1,γ_2。设 l,m 为 γ_1 中的相交直线。若 γ_2 中有直线 l',m' 分别与 l,m 平行或重合，则平面 γ_1,γ_2 平行或重合。

证明： 两平面要么相互平行，要么重合，要么相交于一直线。反设 γ_1,γ_2 相交于直线 n。

如果 $l = l'$，那么 $l \subset \gamma_1 \cap \gamma_2$，于是 $n = l = l'$。设 m,l 交于点 P，m',l' 交于点 Q。如果 $P = Q$，那么 $m = m'$，于是 γ_1、γ_2 都是 l,m 确定的平面，

$\gamma_1=\gamma_2$。如果 $P\neq Q$，那么 $P\notin m'$。但 $P\in l=n\subset\gamma_2$，因此过 P 作 m' 的平行线，平行线应该在 γ_2 中，因此根据平行公理，m 在 γ_2 中。这说明 γ_1、γ_2 都是 l,m 确定的平面，$\gamma_1=\gamma_2$。于是总有两平面重合，矛盾。

如果 $l\mathbin{/\!/}l'$，由于 l,m,n 共面，且 l,m 相交，因此 l,m 中至少有一条与 n 相交。设 l 与 n 相交，交点为 Q，则 $Q\in n\subset\gamma_2$。又因为 $l\mathbin{/\!/}l'$，$Q\in l$，所以 $Q\notin l'$。在 γ_2 中，过 Q 可作 l' 的平行线。但这条线在 γ_2 中，因此不是 l。这与平行公理矛盾。

因此，平面 γ_1,γ_2 平行或重合。 □ 平行平面之间，也有类似平行直线的传递性。

定理 1.1.13. 如果平面 γ_1,γ_2 都平行于平面 β，那么 γ_1,γ_2 平行或重合。

我们先证明一个小结论：

定理 1.1.14. 设平面 $\gamma_1\mathbin{/\!/}\gamma_2$。平面 β 与 γ_1,γ_2 相交于直线 l_1,l_2，则 $l_1\mathbin{/\!/}l_2$。

证明： 一方面，l_1,l_2 共面。另一方面，$\gamma_1\mathbin{/\!/}\gamma_2$ 说明 l_1,l_2 无公共点。所以 $l_1\mathbin{/\!/}l_2$。□ 从这个结论还可以推出：如果平面 $\gamma_1\mathbin{/\!/}\gamma_2$，那么对 γ_1 中任意直线，过 γ_2 中任一点，作它的平行线，平行线都在 γ_2 中。

再来证明定理 1.1.13。

证明： 已知平面 γ_1,γ_2 都平行于平面 β。在 β 中找一点 P，过 P 作相交直线 l,m。在 γ_1 中找一点 Q，过 Q 分别作 l,m 的平行线 l_1,m_1，则 l_1,m_1 都在 γ_1 中。它们分别是平面 γ_1 与 l,Q 确定的平面 α_1、平面 γ_1 与 m,Q 确定的平面 α_2 的交线。设 α_1,α_2 分别与 γ_2 交于 l_2,m_2，由于 $\gamma_2\mathbin{/\!/}\beta$，所以根据定理 1.1.6，$l_2\mathbin{/\!/}l$，$m_2\mathbin{/\!/}m$。因此根据定理 1.1.4，$l_2$ 与 l_1 平行或重合，m_2 与 m_1 平行或重合。根据定理 1.1.12，γ_1、γ_2 平行或重合。 □

最后，我们还可以得到：

定理 1.1.15. 若平面 γ_1 与直线 l 平行，且与平面 γ_2 平行，则 l 与 γ_2 平行或在 γ_2 中。

证明： $l \parallel \gamma_1$，所以过 l 恰有一平面 β 与 γ_1 平行。如果 $\beta = \gamma_2$，则 $l \subset \gamma_2$。如果 $\beta \parallel \gamma_2$，那么 $l \parallel \gamma_2$。如果 β 与 γ_2 相交于直线 m，那么由于 m,l 共面且无公共点，$m \parallel l$。于是，根据定理 1.1.5，$l \parallel \gamma_2$ 或在 γ_2 中。 □

总结：

我们初步建立了关于空间形状的公理体系，引入了空间中平面的概念，并界定了点、直线和平面的关系：

1. 直线和平面都是点的集合。
2. 直线可能与平面平行、相交，或在平面中。
3. 直线可能与直线异面、平行、相交、重合。
4. 平面可能与平面平行、相交、重合。
5. 直线与直线相交于一点，直线与平面相交于一点，平面与平面相交于一直线。

思考 1.1.1.

1. 定理 *1.1.15*的证明中，我们讨论了 β 与 γ_2 相交于直线 m 的情形。实际上 β 是否会与 γ_2 相交？如何看待这个论证？

习题 1.1.1.

1. 如果直线 l 与直线 m 平行，那么过 l 的平面与过 m 的平面要么平行，要么重合，要么交于 l,m 之一，要么交于与 l,m 都平行的直线 n。

1.2 空间向量

上一节中，我们使用公理体系讨论空间中的形状，