第二册

大青花鱼

目录

第一章　空间中的形状

我们已经通过公理体系研究过平面中的简单形状，将基本的平面形和函数的图像联系起来，并且引入了向量的概念。现在，我们进一步研究立体空间中的形状。人类生活在立体空间中，因此，研究空间中形体的性质，对我们认识世界、改造世界有直接帮助。

1.1　点、直线、平面

和平面形一样，立体空间中的形也是从种种事物的形状总结提炼而来。平面是人类最早总结出的概念之一。我们已经研究过平面中的形状，因此，研究立体空间时，我们把平面作为地位和点、直线相同的基本概念。

研究平面形状时，我们首先引进了公理体系。如今我们将平面公理体系扩展为立体空间的公理体系。为此，我们要通过公设和公理定义**平面**以及它和点、直线的关系。

我们定义面为点的集合，也是线运动的结果。平面是最基本的面，一般用小写希腊字母 α, β, γ 等表示。

公理 1. 平面公理 过不共线的三点，有且仅有一个平面。

我们也说三角形（或圆）确定一个平面。不共线的三点 A、B、C 确定的平面，可以记作平面 ABC。

如何确定平面是“平”的呢？生活和生产中，我们一般用直线来确定一个面是不是平的。比如，木工常常用角尺的直角边放在刨好的木板上。如果直角边总能与板面紧密贴合，就说明木板已刨平了。水泥工用直的刮子将刚铺水泥的地面刮平。我们把人们总结出的经验作为判断平面的方法，用公理的形式确定下来。

公理 2. 平直公理 过平面上不重合两点的直线，在平面中。

平直公理说明，直线要么与平面没有公共点，要么只交于一点，要么全部在平面里。直线与平面没有公共点，则称直线与平面平行，也用 $//$ 表记；直线与平面恰有一公共点，则称直线与平面相交；直线与平面有两个或以上公共点，则称直线在平面中或平面经过直线。用集合的语言来说，直线 l 在平面 γ 中，就说明 l 是 γ 的子集。

从平面公理和平直公理，容易得到另两种定义平面的方法：

定理 1.1.1. 过一条直线与该直线外一点，有且仅有一个平面。

证明： 设直线为 l，P 为 l 外一点。取 l 上不同的两点，和 P 构成不共线的三点。这三点确定一个平面。根据平直公理，l 在该平面中。 □

定理 1.1.2. 过两条相交的直线，有且仅有一个平面。

证明： 设有直线 l, m。如果 l, m 相交，设交点为 P，在 l, m 上各取不同于 P 的一点：Q, R，则 P, Q, R 不共线，于是确定一个平面 PQR，根据平直公理，l, m 都在 PQR 中。 □

设直线 l 与平面 γ 平行，没有公共点，那么它与 γ 中任何直线没有公共点。比如，给定 γ 中一点 A，γ 中经过 A 的任何直线，都与 l 没有公共点。

平面中，两直线没有公共点，就说它们相互平行。空间中，两直线除了重合、相交和平行，还有另一种关系，我们称之为直线**异面**。前面的例子

中，根据平行公理，过 γ 中的点 A，恰有一条直线与 l 平行，其余与 l 不相交的直线，都称与 l 异面。

哪条直线与 l 平行呢？显然，在空间中，我们需要补充平行公理：

公理 3. 平行公理 过直线外一点，有且仅有一条与它平行的直线。它在直线与点确定的平面上。

新版的平行公理在原来的基础上，指定了平行线的位置：在直线与点确定的平面上。换句话说，平行是一个平面内性质。两直线平行的关系必然发生在同一平面中。也正因如此，我们把其它的无公共点的情形叫做异面。

从补充的平行公理出发，可以得到另一种定义平面的方法：

定理 1.1.3. 过两条平行的直线，有且仅有一个平面。

证明： 设直线 $l \parallel m$，在 l 上找两点 P_1, P_2，在 m 上找一点 Q。P_1P_2Q 确定唯一平面 γ。在平面 γ 中，过 Q 作 l 的平行线。根据平行公理，这条平行线就是 m。因此 l, m 共面，它们确定唯一平面 γ。 □

再来看两个平面的关系。两个平面相交，交集是什么呢？生活中的经验告诉我们，两个平面相交，交集是直线。比如，裁纸刀的刀面是平的，切在纸上，将纸面分成两部分，裁痕是直的。我们把这个性质用公理描述为：

公理 4. 交面公理 两个平面如果有交集，则交集至少包含两个不重合的点。

交面公理说明，两个平面不可能只交于一点。如果它们有两个（不重合的）公共点，那么根据平直公理，两平面的交集包括过这两点的直线。而如果两平面的交集中还有不属于这条直线的第三点，那么根据平面公理，这三点确定一个平面，于是两平面重合。

综上所述，从交面公理可以推出：要么两平面没有公共点，要么交集为一条直线 l，称为两平面相交于直线 l；要么两平面重合。

有了交面公理，我们可以证明空间中平行直线的递推性质。由于证明繁琐，有些地方把它当作公理引入。

定理 1.1.4. 如果直线 l_1, l_2 都平行于直线 m，那么 l_1, l_2 平行或重合。

证明: 设 l_1, m 确定的平面为 γ_1，l_2, m 确定的平面为 γ_2。分两种情况讨论:

1. γ_1, γ_2 重合。那么 l_1, l_2, m 都在此平面上。根据平面直线的结论，l_1, l_2 平行或重合。

2. γ_1, γ_2 不重合。于是 $\gamma_1 \cap \gamma_2 = m$。取 l_1 上一点 P，P 与 l_2 确定平面 β。$l_2 \notin \gamma_1$，所以 β, γ_1 不重合。设 $\beta \cap \gamma_1 = n$。

首先证明 $n \parallel l_2$。反设 n 交 l_2 于点 Q，则 $Q \in \gamma_1 \cap \gamma_2 = m$，于是 $Q \in m \cap l_2$。这与 $m \parallel l_2$ 矛盾。因此 $n \parallel l_2$。

再证明 $n \parallel m$。反设 n 交 m 于点 Q，则过 Q 有 $m \parallel l_2$ 和 $n \parallel l_2$，于是 $n = m$。但 $P \in n$，因此 $P \in m \cap l_1$，这与 $m \parallel l_1$ 矛盾。因此 $n \parallel m$。

n 与 l_1 都平行于 m，且有公共点 P，所以 $n = l_1$。所以 $l_1 \parallel l_2$。 □

接下来回顾直线与平面的关系。从补充后的平行公理，可以得出直线与平面平行的判定方法:

定理 1.1.5. 如果平面 α 中有直线 m 平行于直线 l，那么 l 平行于平面 α 或在 α 中。

证明: 设直线 l 平行于平面 α 中的某直线 m。记 l, m 确定的平面为 β。则要么 $\alpha = \beta$，要么 $\alpha \cap \beta = m$。如果 $\alpha = \beta$，那么 $l \subset \alpha$。如果 $\alpha \cap \beta = m$，那么 $\alpha \cap l = \beta \cap \alpha \cap l = m \cap l = \varnothing$，即 $\alpha \parallel l$。 □

定理 1.1.6. 如果直线 l 与平面 α 平行，那么经过 l 的任意平面，若与 α 相交，其交线也与 l 平行。

证明： 设经过 l 的平面 γ 与 α 交于直线 m。一方面，m,l 共面；另一方面 $m \in \alpha$，因此 m,l 无公共点。这说明 $m \parallel l$。 □ 从这些结论可以继续推出：

定理 1.1.7. 若直线 l 与平面 α 平行，过 α 中任一点作 l 的平行线 m，则 m 在平面 α 中。

证明： 若直线 l 与平面 α 平行，设它和 α 中任一点 P 确定的平面为 β，则 β 与 α 相交。设交线为 m，则 $P \in m$。根据定理 1.1.6，$l \parallel m$。这就说明，过 P 而平行于 l 的直线在 α 中。 □

定理 1.1.8. 直线 l 与直线 m 平行，则过 m 的平面要么与 l 平行，要么经过 l。

证明： 给定过 m 的平面 α，$m \subset \alpha$ 与 l 平行，所以根据定理 1.1.5，l 平行于平面 α 或在 α 中。 □

直线与平面的平行关系，也有传递性。

定理 1.1.9. 若直线 l_1 与直线 l_2 平行，且与平面 γ 平行，则 l_2 与 γ 平行或在 γ 中。

证明： $l_1 \parallel \gamma$。过 γ 中任一点作直线 $n \parallel l_1$，则根据定理 1.1.7，n 在 γ 中。$n \parallel l_1$，$l_1 \parallel l_2$，所以根据定理 1.1.4，$n \parallel l_2$。根据定理 1.1.5，$l_2 \parallel \gamma$ 或在 γ 中。 □

上面提到，两平面要么无公共点，要么相交，要么重合。我们把无公共点的平面称为平行平面，也用 $\parallel$ 表记。平面中，平行公理告诉我们，过直线外一点，恰有一条直线与之平行。空间中的平面，也有类似的结论：

定理 1.1.10. 过平面外一点，恰有一平面与之平行。

证明： 设平面 α 外有点 P。在 α 上选一点 A，过 A 作两相交直线 l,m（交点为 A）。根据平行公理，过 P 恰有直线 l',m' 分别与 l,m 平行。l',m' 相交于点 P，确定平面 α'。下面证明 α,α' 无公共点，即 $\alpha' /\!/ \alpha$。

反设 α,α' 有公共点。由于 $P\in\alpha'$ 在 α 外，两者不重合。因此根据交面公理，$\alpha\cap\alpha'$ 是一条直线，记为 n。l,m,n 共面，l,m 相交，因此 l,m 中至少有一条与 n 相交。设 l 与 n 相交，交点为 Q，则 $Q\in n\subset\alpha'$。又因为 $l /\!/ l'$，$Q\in l$，所以 $Q\notin l'$，因而在 α' 中，过 Q 可作 l' 的平行线。但这条线在 α' 中，因此不是 l。这与平行公理矛盾。

因此，α,α' 无公共点，$\alpha' /\!/ \alpha$。 □

类似的结论还有：

定理 1.1.11. 过平行于平面 α 的一直线 l，恰有一平面与 α 平行。

证明： 在 l 上任取一点 P，$P\notin\alpha$，因此根据定理 1.1，过 P 恰有一平面 β 与 α 平行，只需证明 β 经过 l。在 α 中任取一点 Q，则根据定理 1.1.7，过 Q 平行于 l 的直线 m 在 α 中。β 与 α 平行，也就是说 β 与 α 无公共点，所以 β 与 α 的子集 m 也无公共点，即 $m /\!/ \beta$。过 P 作 m 的平行线，则根据定理 1.1.7，平行线在 β 中。而这条平行线就是 l，所以 l 在 β 中。这说明过 l 恰有一平面 β 与 α 平行。 □

从证明中，我们还可以提炼出判定平面平行（或重合）的准则：

定理 1.1.12. 给定平面 γ_1,γ_2。设 l,m 为 γ_1 中的相交直线。若 γ_2 中有直线 l',m' 分别与 l,m 平行或重合，则平面 γ_1,γ_2 平行或重合。

证明： 两平面要么相互平行，要么重合，要么相交于一直线。反设 γ_1,γ_2 相交于直线 n。

如果 $l=l'$，那么 $l\subset\gamma_1\cap\gamma_2$，于是 $n=l=l'$。设 m,l 交于点 P，m',l' 交于点 Q。如果 $P=Q$，那么 $m=m'$，于是 γ_1、γ_2 都是 l,m 确定的平面，

$\gamma_1=\gamma_2$。如果 $P\neq Q$，那么 $P\notin m'$。但 $P\in l=n\subset\gamma_2$，因此过 P 作 m' 的平行线，平行线应该在 γ_2 中，因此根据平行公理，m 在 γ_2 中。这说明 γ_1、γ_2 都是 l,m 确定的平面，$\gamma_1=\gamma_2$。于是总有两平面重合，矛盾。

如果 $l\mathrel{/\mkern-5mu/} l'$，由于 l,m,n 共面，且 l,m 相交，因此 l,m 中至少有一条与 n 相交。设 l 与 n 相交，交点为 Q，则 $Q\in n\subset\gamma_2$。又因为 $l\mathrel{/\mkern-5mu/} l'$，$Q\in l$，所以 $Q\notin l'$。在 γ_2 中，过 Q 可作 l' 的平行线。但这条线在 γ_2 中，因此不是 l。这与平行公理矛盾。

因此，平面 γ_1,γ_2 平行或重合。 □ 平行平面之间，也有类似平行直线的传递性。

定理 1.1.13. 如果平面 γ_1,γ_2 都平行于平面 β，那么 γ_1,γ_2 平行或重合。

我们先证明一个小结论:

定理 1.1.14. 设平面 $\gamma_1\mathrel{/\mkern-5mu/}\gamma_2$。平面 β 与 γ_1,γ_2 相交于直线 l_1,l_2，则 $l_1\mathrel{/\mkern-5mu/} l_2$。

证明: 一方面，l_1,l_2 共面。另一方面，$\gamma_1\mathrel{/\mkern-5mu/}\gamma_2$ 说明 l_1,l_2 无公共点。所以 $l_1\mathrel{/\mkern-5mu/} l_2$。□ 从这个结论还可以推出：如果平面 $\gamma_1\mathrel{/\mkern-5mu/}\gamma_2$，那么对 γ_1 中任意直线，过 γ_2 中任一点，作它的平行线，平行线都在 γ_2 中。

再来证明定理 1.1.13。

证明: 已知平面 γ_1,γ_2 都平行于平面 β。在 β 中找一点 P，过 P 作相交直线 l,m。在 γ_1 中找一点 Q，过 Q 分别作 l,m 的平行线 l_1,m_1，则 l_1,m_1 都在 γ_1 中。它们分别是平面 γ_1 与 l,Q 确定的平面 α_1、平面 γ_1 与 m,Q 确定的平面 α_2 的交线。设 α_1,α_2 分别与 γ_2 交于 l_2,m_2，由于 $\gamma_2\mathrel{/\mkern-5mu/}\beta$，所以根据定理 1.1.6，$l_2\mathrel{/\mkern-5mu/} l$，$m_2\mathrel{/\mkern-5mu/} m$。因此根据定理 1.1.4，$l_2$ 与 l_1 平行或重合，m_2 与 m_1 平行或重合。根据定理 1.1.12，γ_1、γ_2 平行或重合。 □

最后，我们还可以得到:

定理 1.1.15. 若平面 γ_1 与直线 l 平行，且与平面 γ_2 平行，则 l 与 γ_2 平行或在 γ_2 中。

证明： $l \mathbin{/\!/} \gamma_1$，所以过 l 恰有一平面 β 与 γ_1 平行。如果 $\beta = \gamma_2$，则 $l \subset \gamma_2$。如果 $\beta \mathbin{/\!/} \gamma_2$，那么 $l \mathbin{/\!/} \gamma_2$。如果 β 与 γ_2 相交于直线 m，那么由于 m,l 共面且无公共点，$m \mathbin{/\!/} l$。于是，根据定理 1.1.5，$l \mathbin{/\!/} \gamma_2$ 或在 γ_2 中。 □

总结：

我们初步建立了关于空间形状的公理体系，引入了空间中平面的概念，并界定了点、直线和平面的关系：

1. 直线和平面都是点的集合。
2. 直线可能与平面平行、相交，或在平面中。
3. 直线可能与直线异面、平行、相交、重合。
4. 平面可能与平面平行、相交、重合。
5. 直线与直线相交于一点，直线与平面相交于一点，平面与平面相交于一直线。

思考 1.1.1.

1. 定理 *1.1.15*的证明中，我们讨论了 β 与 γ_2 相交于直线 m 的情形。实际上 β 是否会与 γ_2 相交？如何看待这个论证？

习题 1.1.1.

1. 如果直线 l 与直线 m 平行，那么过 l 的平面与过 m 的平面要么平行，要么重合，要么交于 l,m 之一，要么交于与 l,m 都平行的直线 n。

1.2 空间向量

上一节中，我们使用公理体系讨论空间中的形状。可以看到，使用公理体系讨论虽然严谨，但过于抽象，步骤繁琐。仅处理点线面的平行关系，就

需要大量的篇幅。为此，我们尝试用向量的概念来讨论空间中的形状。

平面中，我们用向量表示点，以及原点到此点的平移。现在我们把向量的概念扩展到空间中。我们把空间看作集合，记为 $\mathbb{V}$，其中的元素称为向量或点。向量满足如下规则：

1. 加法结合律：$\forall\ \mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\in\mathbb{V}$，$\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})=(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}$。
2. 加法交换律：$\forall\ \mathbf{a},\mathbf{b}\in\mathbb{V}$，$\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}$。
3. 存在零向量：$\forall\ \mathbf{a}\in\mathbb{V}$，$\mathbf{a}+\mathbf{0}=\mathbf{a}$。
4. 放缩和四则运算相容：$\forall\ \mathbf{a}\in\mathbb{V}$，$1\cdot\mathbf{a}=\mathbf{a}$。$\forall s,t\in\mathbb{R}$，$(s+t)\cdot\mathbf{a}=(s\cdot\mathbf{a})+(t\cdot\mathbf{a})$，$(s\cdot t)\cdot\mathbf{a}=s\cdot(t\cdot\mathbf{a})$。
5. 放缩和平移相容：$\forall\ \mathbf{a},\mathbf{b}\in\mathbb{V}$，$\forall\ t\in\mathbb{R}$，$t\cdot(\mathbf{a}+\mathbf{b})=t\cdot\mathbf{a}+t\cdot\mathbf{b}$。

这个定义与平面向量相同。在此基础上，我们用同样的方式定义直线、线段和射线。

定义 1.2.1. 过原点的直线是非零向量放缩得到的集合。不过原点的直线是过原点的直线按一点平移得到的集合。

给定非零向量 $A=\mathbf{a}$，$\{t\mathbf{a}\,|\,t\in\mathbb{R}\}$ 是一条过原点 O 和 A 的直线 OA，称为 A **引出**的直线，记为 $\mathbb{R}\mathbf{a}$。给定向量 $B=\mathbf{b}$，$\{t\mathbf{a}+\mathbf{b}\,|\,t\in\mathbb{R}\}$ 是一条过 B 的直线，记为 $\mathbb{R}\mathbf{a}+\mathbf{b}$，其中 $\mathbb{R}\mathbf{a}$ 称为它的线性部分；而 $\{t\mathbf{a}+(1-t)\mathbf{b}\,|\,t\in\mathbb{R}\}$ 就是直线 AB。

给定非零向量 $\mathbf{a}$，如果向量 $\mathbf{b}$ 可以通过 $\mathbf{a}$ 放缩得到，或者说 $\mathbf{b}\in\mathbb{R}\mathbf{a}$，就称两者**共线**。

类比可以定义线段和射线：给定非零向量 $A=\mathbf{a}$ 和向量 $B=\mathbf{b}$，$\{(1-t)\mathbf{a}+t\mathbf{b}\,|\,t\in[0,1]\}$ 是线段 AB，$\{(1-t)\mathbf{a}+t\mathbf{b}\,|\,t\geqslant 0\}$ 是射线 AB。

空间向量与平面向量的唯一不同的地方在于，空间向量遵循的不再是平面的根本性质，而是空间的根本性质。为了描述空间的根本性质，我们首先引进线性相关的概念：

定义 1.2.2. 给定 n 个向量 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_n$，对实数 $t_1, t_2, \cdots, t_n$ 来说，$t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + \cdots + t_1\mathbf{a}_n$ 称为这 n 个向量的**线性组合**。如果存在一组不全为零的实数 $t_1, t_2, \cdots, t_n$，使得线性组合 $t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + \cdots + t_1\mathbf{a}_n$ 是零向量，就说这 n 个向量**线性相关**。如果不存在这样一组实数，就说这 n 个向量**线性无关**。

举例来说，单个非零向量总是线性无关的，因为非零实数乘以非零向量总得到非零向量。又如：如果有不全为零的实数 t_1, t_2 使得向量 A, B 的线性组合：$t_1A + t_2B$ 等于零向量，就说 A, B 线性相关。

具体来说，设 $A = 2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$，$B = -6\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2$，那么

$$3A + B = \mathbf{0}.$$

也就是说，选取 $t_1 = 3$，$t_2 = 1$，就使得线性组合：$t_1A + t_2B$ 等于零向量。因此，以上两个向量 A, B 线性相关。

设 $A = 2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$，$B = \mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2$，那么对任何 t_1, t_2，线性组合 $t_1A + t_2B$ 可以写为:

$$\begin{aligned} t_1A + t_2B &= t_1\left(2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2\right) + t_2\left(\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2\right) \\ &= (2t_1 + t_2)\mathbf{e}_1 + (-t_1 + 3t_2)\mathbf{e}_2. \end{aligned}$$

要使得 $t_1A + t_2B$ 为零向量 $(0, 0)$，就要求它的横坐标和纵坐标同时为零。也就是说，t_1, t_2 应该是一元一次方程组

$$\begin{cases} 2t_1 + t_2 &= 0 \\ -t_1 + 3t_2 &= 0 \end{cases}$$

的解。解这个一元一次方程组，得到 $t_1 = t_2 = 0$。也就是说，不存在不全为零的实数 t_1, t_2，使得线性组合 $t_1A + t_2B$ 为零向量。我们说 A, B 线性无关。

以上的例子也给出了判断一组向量是否线性相关的方法。我们将“线性组合 $t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + \cdots + t_1\mathbf{a}_n$ 是零向量”的条件转化为关于 $t_1, t_2, \cdots, t_n$ 的

一元一次方程组。如果方程组的解集中有不全为零的解，这组向量就线性相关。如果方程组没有不全为零的解，就说这组向量线性无关。

直观来看，两个平面向量线性相关和共线是一回事。A, B 线性相关，就是说有有不全为零的实数 t_1, t_2 使得 $t_1 A + t_2 B$ 等于零向量。不妨设 t_1 不为零，那么 $A = \frac{t_2}{t_1} B$，因此 $A \in \mathbb{R}B$，即 A, B 共线。反之亦然。平面的根本性质告诉我们，存在两个不共线的向量，也就是说，不多于两个平面向量，可以线性无关。

如果向量多于两个，平面的根本性质告诉我们，只要其中两个向量 A, B 不共线，其余的向量都可以都可以表示成 $sA+tB$ 的形式。因此，设有平面向量 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_n$。如果 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ 不共线，那么它们线性相关，存在 $t_1\mathbf{a}_1+t_2\mathbf{a}_2 = \mathbf{0}$。于是

$$t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + \sum_{i>2} 0 \cdot \mathbf{a}_i = \mathbf{0}.$$

如果 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ 不共线，那么根据平面的根本性质，$\mathbf{a}_3$ 可以写成:

$$\mathbf{a}_3 = s\mathbf{a}_1 + t\mathbf{a}_2.$$

于是

$$s\mathbf{a}_1 + t\mathbf{a}_2 - 1 \cdot \mathbf{a}_3 + \sum_{i>3} 0 \cdot \mathbf{a}_i = \mathbf{0}.$$

也就是说，多于两个平面向量总线性相关。

这个结论反映了平面向量的本质：可以选出两个向量，所有向量都可以从它们开始，通过平移、放缩得到。这两个向量叫作平面的基底。而空间中的点显然不一定在同一个平面里。我们把平面的根本性质替换为**空间的根本性质**:

1. 给定一个非零向量，总能找到另一个向量，使得两者线性无关。
2. 给定两个线性无关的向量，总能找到另一个向量，使得三者线性无关。
3. 从线性无关的向量 A, B, C 出发，经过放缩、平移，可以得到空间中任何向量。具体来说，任何向量都可以表示成 $sA + tB + uC$ 的形式，

集合 $\{sA+tB+uC\,|\,s,t,u\in\mathbb{R}\}$ 就是整个空间。这样的 A,B,C 称为空间的一组**基**或**基底**。

对比平面和空间的根本性质，可以发现，主要的变化是“2 变成 3”。平面中保证存在两个线性无关的向量，空间中保证存在三个线性无关的向量。按照类似的推理，我们可以得到结论：不多于三个空间向量，可以线性无关；多于三个空间向量，总是线性相关。我们把这个数字称为**维数**。平面的维数是 2，立体空间的维数是 3。

与平面向量一样，给定基底后，任一空间向量 $\mathbf{a}$ 可以唯一地写成基向量的线性组合：

$$\mathbf{a}=a_x\mathbf{e}_x+a_y\mathbf{e}_y+a_z\mathbf{e}_z.$$

其中 a_x,a_y,a_z 是实数。(a_x,a_y,a_z) 称为 $\mathbf{a}$ 的**坐标**，a_x,a_y,a_z 称为它的**坐标分量**。

于是我们可以定义立体空间中的平面：

定义 1.2.3. 过原点的平面是两个线性无关的向量通过平移、放缩得到的集合。不过原点的平面是过原点的平面按一点平移得到的集合。

给定线性无关的向量 $A=\mathbf{a},B=\mathbf{b}$，$\{s\mathbf{a}+t\mathbf{b}\,|\,s,t\in\mathbb{R}\}$ 是一个过原点 O 和 A,B 的平面 OAB。给定向量 $C=\mathbf{c}$，$\{s\mathbf{a}+t\mathbf{b}+\mathbf{c}\,|\,s,t\in\mathbb{R}\}$ 是一条过 C 的直线；而 $\{s\mathbf{a}+t\mathbf{b}+(1-s-t)\mathbf{c}\,|\,t\in\mathbb{R}\}$ 就是过 A,B,C 的平面 ABC。

来看几个具体的例子。选定空间的一组基底 $\mathbf{e}_x,\mathbf{e}_y,\mathbf{e}_z$，我们可以构建坐标系 $Oxyz$，其中 x 轴、y 轴、z 轴分别是基向量引出的直线 $\mathbb{R}\mathbf{e}_x$、$\mathbb{R}\mathbf{e}_y$、$\mathbb{R}\mathbf{e}_z$。空间中任一点 A 可以写成 (a_x,a_y,a_z)。x 轴、y 轴构成平面：

$$Oxy:\{s\mathbf{e}_x+t\mathbf{e}_y\,|\,s,t\in\mathbb{R}\}.$$

x 轴、z 轴构成平面：

$$Oxz:\{s\mathbf{e}_x+t\mathbf{e}_z\,|\,s,t\in\mathbb{R}\}.$$

y 轴、z 轴构成平面:

$$Oyz : \{s\mathbf{e}_y + t\mathbf{e}_z \mid s, t \in \mathbb{R}\}.$$

给定点 $A(1,0,0)$、$B(0,1,0)$、$C(0,0,1)$，则经过它们的平面为:

$$\{sA + tB + (1-s-t)C \mid t \in \mathbb{R}\} = \{(s,\, t,\, 1-s-t) \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

可以验证，这样定义的点、直线、平面符合上一节中的各个公理（见附录 B)。

1.3 距离、长度和角度

我们可以通过向量引进空间中距离和长度的概念。和平面中一样，我们选定空间的一组基底 $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$，然后定义内积:

$$\forall A = a_x\mathbf{e}_x + a_y\mathbf{e}_y + a_z\mathbf{e}_z,\ B = b_x\mathbf{e}_x + b_y\mathbf{e}_y + b_z\mathbf{e}_z,$$
$$A \cdot B = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z.$$

如果向量 A, B 的内积等于 0，就说它们垂直。我们定义向量 A 的长度为

$$\|A\| = \sqrt{A \cdot A} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2},$$

长度为 1 的向量称为单位向量。任何非零向量除以自己的长度，都得到一个与自己共线的单位向量。我们把这个操作称为**向量的归一**。

两点 A, B 之间的距离就是

$$\|A - B\| = \sqrt{(A-B)\cdot(A-B)} = \sqrt{(a_x-b_x)^2 + (a_y-b_y)^2 + (a_z-b_z)^2}.$$

平面向量的内积，小于等于长度之积。空间向量也有类似的性质:

$$\begin{aligned}
&(a_x^2 + a_y^2 + a_z^2)(b_x^2 + b_y^2 + b_z^2) \\
&= (a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z)^2 + (a_xb_y - a_yb_x)^2 + (a_xb_z - a_zb_x)^2 + (a_yb_z - a_zb_y)^2 \\
&\geqslant (a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z)^2
\end{aligned}$$

这个不等式也称为**内积不等式**。由此，类比平面向量，我们可以定义**空间向量的夹角**：

$$\cos\angle AOB = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{(a_x^2 + a_y^2 + a_z^2)(b_x^2 + b_y^2 + b_z^2)}}$$

直线是非零向量放缩的结果，所以，我们可以定义空间中两条直线的夹角为引出它们的向量的夹角。

向量 A, B 垂直时，$\cos\angle AOB = 0$，即夹角为 90°。向量夹角为 0°、180° 时，两向量共线，两直线同向或反向。要注意的是，空间中，我们无法定义两向量夹角的方向。

思考 1.3.1.

1. 内积不等式取等号的条件是什么？如何从直观上理解？

2. 平面中，向量夹角的正弦与向量长度的乘积对应着向量的面积。立体空间中，是否可以作类似的定义？如何从直观上理解？

习题 1.3.1.

1. 已知向量 $A(-1,3,1)$、$B(1,2,0)$，求它们的长度、内积和夹角。它们是否垂直？

2. 已知向量 $A(-2.4,0,1)$、$B(0.5,1,1.2)$，求它们的长度、内积和夹角。它们是否垂直？

3. 已知直线 $l_1 : \mathbb{R}(1,2,-2.5)+(0,-1,-1)$、$l_2 : \mathbb{R}(2,0,0.8)+(-2.5,1.1,1.7)$，求两直线的夹角。它们是否垂直？是否有公共点？

4. 已知向量 $A(2,0,1)$，求与 A 夹角为 60° 的单位向量。

附录 A　空间形的表示法

附录 B 空间向量与公理

我们来验证，根据向量定义的点、直线、平面符合平面公理、平直公理、交面公理和补充的平行公理。

首先来看平面公理。任取不共线三点 A, B, C，则 $A-C, B-C$ 线性无关，因此 $\{sA+tB+(1-s-t)C \mid s,t\in\mathbb{R}\}$ 是 A, B, C 确定的平面。

如果点 P, Q 在平面 $\{sA+tB+(1-s-t)C \mid t\in\mathbb{R}\}$ 中，那么存在 s_1, t_1, s_2, t_2 使得

$$
\begin{aligned}
P &= s_1A+t_1B+(1-s_1-t_1)C \\
Q &= s_2A+t_2B+(1-s_2-t_2)C
\end{aligned}
$$

直线 PQ 是集合 $\{uP+(1-u)Q \mid u\in\mathbb{R}\}$，其中任一点 $U=uP+(1-u)Q$ 可以用 A, B, C 表示为

$$
\begin{aligned}
U &= uP+(1-u)Q \\
&= (us_1+(1-u)s_2)A+(ut_1+(1-u)t_2)B+(u(1-s_1-t_1)+(1-u)(1-s_2-t_2))C \\
&= (us_1+(1-u)s_2)A+(ut_1+(1-u)t_2)B+(1-(us_1+(1-u)s_2)-(ut_1+(1-u)t_2))C
\end{aligned}
$$

因此 U 在平面 ABC 中。这说明向量表示的空间符合平直公理。

如果两平面 γ_1, γ_2 交于点 C，记 $\gamma_1: \{sA_1+tB_1+C \mid s,t\in\mathbb{R}\}$，$\gamma_2: \{sA_2+tB_2+C \mid s,t\in\mathbb{R}\}$。其中 (A_1, B_1) 线性无关，(A_2, B_2) 线性无关。两

平面公共点可以表示为让以下等式成立的 s_1, t_1, s_2, t_2:

$$s_1A_1 + t_1B_1 + C = s_2A_2 + t_2B_2 + C.$$

以上等式可以转为:

$$s_1A_1 + t_1B_1 - s_2A_2 - t_2B_2 = \mathbf{0}.$$

根据空间的根本性质，四个向量总是线性相关。所以存在不全为零的四个实数 s_1, t_1, s_2, t_2 使上式成立。由于 (A_1, B_1) 线性无关，(A_2, B_2) 线性无关，所以 $s_1A_1 + t_1B_1$ 和 $s_2A_2 + t_2B_2$ 为零向量时，s_1, t_1, s_2, t_2 必然全为零。然而 s_1, t_1, s_2, t_2 不全为零，所以 $s_1A_1 + t_1B_1$ 和 $s_2A_2 + t_2B_2$ 不为零向量。于是这时 $s_1A_1 + t_1B_1 + C = s_2A_2 + t_2B_2 + C \neq C$ 是两平面另一个公共点。这说明向量表示的空间符合交面公理。

平面中，两条直线平行，当且仅当它们的线性部分是同一条过原点的直线。我们用这个方法来判定空间中直线的平行关系。设有两直线 $l_1 \mathbin{/\!/} l_2$，那么它们是同一条过原点的直线平移而成:

$$l_1: \{t\mathbf{a} + \mathbf{b}_1 \,|\, t \in \mathbb{R}\}$$
$$l_2: \{t\mathbf{a} + \mathbf{b}_2 \,|\, t \in \mathbb{R}\}$$

所以 l_1, l_2 都在平面: $\gamma : \{t\mathbf{a} + s(\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2) + \mathbf{b}_2 \,|\, s, t \in \mathbb{R}\}$ 中。对任意 $t \in \mathbb{R}$，l_1 中的点 $t\mathbf{a} + \mathbf{b}_1 = t\mathbf{a} + 1 \cdot (\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2) + \mathbf{b}_2 \in \gamma$；$l_2$ 中的点 $t\mathbf{a} + \mathbf{b}_2 = t\mathbf{a} + 0 \cdot (\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2) + \mathbf{b}_2 \in \gamma$。这说明，两条平行直线总在同一平面内，即向量表示的空间符合补充后的平行公理。