

第二册

大青花鱼

目录

第一章 空间中的形状	5
1.1 点、直线、平面	5
1.2 空间向量	12

第一章 空间中的形状

我们已经通过公理体系研究过平面中的简单形状，将基本的平面形和函数的图像联系起来，并且引入了向量的概念。现在，我们进一步研究立体空间中的形状。人类生活在立体空间中，因此，研究空间中形体的性质，对我们认识世界、改造世界有直接帮助。

1.1 点、直线、平面

和平面形一样，立体空间中的形也是从种种事物的形状总结提炼而来。平面是人类最早总结出的概念之一。我们已经研究过平面中的形状，因此，研究立体空间时，我们把平面作为地位和点、直线相同的基本概念。

研究平面形状时，我们首先引进了公理体系。如今我们将平面公理体系扩展为立体空间的公理体系。为此，我们要通过公设和公理定义平面以及它和点、直线的关系。

我们定义面为点的集合，也是线运动的结果。平面是最基本的面，一般用小写希腊字母 α, β, γ 等表示。

公理 1. 平面公理 过不共线的三点，有且仅有一个平面。

我们也说三角形（或圆）确定一个平面。不共线的三点 A 、 B 、 C 确定的平面，可以记作平面 ABC 。

如何确定平面是“平”的呢？生活和生产中，我们一般用直线来确定一个面是不是平的。比如，木工常常用角尺的直角边放在刨好的木板上。如果直角边总能与板面紧密贴合，就说明木板已刨平了。水泥工用直的刮子将刚铺水泥的地面刮平。我们把人们总结出的经验作为判断平面的方法，用公理的形式确定下来。

公理 2. 平直公理 过平面上不重合两点的直线，在平面中。

平直公理说明，直线要么与平面没有公共点，要么只交于一点，要么全部在平面里。直线与平面没有公共点，则称直线与平面平行，也用 $//$ 标记；直线与平面恰有一公共点，则称直线与平面相交；直线与平面有两个或以上公共点，则称直线在平面中或平面经过直线。用集合的语言来说，直线 l 在平面 γ 中，就说明 l 是 γ 的子集。

从平面公理和平直公理，容易得到另两种定义平面的方法：

定理 1.1.1. 过一条直线与该直线外一点，有且仅有一个平面。

证明： 设直线为 l ， P 为 l 外一点。取 l 上不同的两点，和 P 构成不共线的三点。这三点确定一个平面。根据平直公理， l 在该平面中。 \square

定理 1.1.2. 过两条相交的直线，有且仅有一个平面。

证明： 设有直线 l, m 。如果 l, m 相交，设交点为 P ，在 l, m 上各取不同于 P 的一点： Q, R ，则 P, Q, R 不共线，于是确定一个平面 PQR ，根据平直公理， l, m 都在 PQR 中。 \square

设直线 l 与平面 γ 平行，没有公共点，那么它与 γ 中任何直线没有公共点。比如，给定 γ 中一点 A ， γ 中经过 A 的任何直线，都与 l 没有公共点。

平面中，两直线没有公共点，就说它们相互平行。空间中，两直线除了重合、相交和平行，还有另一种关系，我们称之为直线**异面**。前面的例子

中, 根据平行公理, 过 γ 中的点 A , 恰有一条直线与 l 平行, 其余与 l 不相交的直线, 都称与 l 异面。

哪条直线与 l 平行呢? 显然, 在空间中, 我们需要补充平行公理:

公理 3. 平行公理 过直线外一点, 有且仅有一条与它平行的直线。它在直线与点确定的平面上。

新版的平行公理在原来的基础上, 指定了平行线的位置: 在直线与点确定的平面上。换句话说, 平行是一个平面内性质。两直线平行的关系必然发生在同一平面中。也正因如此, 我们把其它的无公共点的情形叫做异面。

从补充的平行公理出发, 可以得到另一种定义平面的方法:

定理 1.1.3. 过两条平行的直线, 有且仅有一个平面。

证明: 设直线 $l \parallel m$, 在 l 上找两点 P_1, P_2 , 在 m 上找一点 Q 。 P_1P_2Q 确定唯一平面 γ 。在平面 γ 中, 过 Q 作 l 的平行线。根据平行公理, 这条平行线就是 m 。因此 l, m 共面, 它们确定唯一平面 γ 。 \square

再来看两个平面的关系。两个平面相交, 交集是什么呢? 生活中的经验告诉我们, 两个平面相交, 交集是直线。比如, 裁纸刀的刀面是平的, 切在纸上, 将纸面分成两部分, 裁痕是直的。我们把这个性质用公理描述为:

公理 4. 交面公理 两个平面如果有交集, 则交集至少包含两个不重合的点。

交面公理说明, 两个平面不可能只交于一点。如果它们有两个 (不重合的) 公共点, 那么根据平直公理, 两平面的交集包括过这两点的直线。而如果两平面的交集中还有不属于这条直线的第三点, 那么根据平面公理, 这三点确定一个平面, 于是两平面重合。

综上所述, 从交面公理可以推出: 要么两平面没有公共点, 要么交集为一条直线 l , 称为两平面相交于直线 l ; 要么两平面重合。

有了交面公理，我们可以证明空间中平行直线的递推性质。由于证明繁琐，有些地方把它当作公理引入。

定理 1.1.4. 如果直线 l_1, l_2 都平行于直线 m ，那么 l_1, l_2 平行或重合。

证明： 设 l_1, m 确定的平面为 γ_1 ， l_2, m 确定的平面为 γ_2 。分两种情况讨论：

1. γ_1, γ_2 重合。那么 l_1, l_2, m 都在此平面上。根据平面直线的结论， l_1, l_2 平行或重合。

2. γ_1, γ_2 不重合。于是 $\gamma_1 \cap \gamma_2 = m$ 。取 l_1 上一点 P ， P 与 l_2 确定平面 β 。 $l_2 \notin \gamma_1$ ，所以 β, γ_1 不重合。设 $\beta \cap \gamma_1 = n$ 。

首先证明 $n \parallel l_2$ 。反设 n 交 l_2 于点 Q ，则 $Q \in \gamma_1 \cap \gamma_2 = m$ ，于是 $Q \in m \cap l_2$ 。这与 $m \parallel l_2$ 矛盾。因此 $n \parallel l_2$ 。

再证明 $n \parallel m$ 。反设 n 交 m 于点 Q ，则过 Q 有 $m \parallel l_2$ 和 $n \parallel l_2$ ，于是 $n = m$ 。但 $P \in n$ ，因此 $P \in m \cap l_1$ ，这与 $m \parallel l_1$ 矛盾。因此 $n \parallel m$ 。

n 与 l_1 都平行于 m ，且有公共点 P ，所以 $n = l_1$ 。所以 $l_1 \parallel l_2$ 。 \square

接下来回顾直线与平面的关系。从补充后的平行公理，可以得出直线与平面平行的判定方法：

定理 1.1.5. 如果平面 α 中有直线 m 平行于直线 l ，那么 l 平行于平面 α 或在 α 中。

证明： 设直线 l 平行于平面 α 中的某直线 m 。记 l, m 确定的平面为 β 。则要么 $\alpha = \beta$ ，要么 $\alpha \cap \beta = m$ 。如果 $\alpha = \beta$ ，那么 $l \subset \alpha$ 。如果 $\alpha \cap \beta = m$ ，那么 $\alpha \cap l = \beta \cap \alpha \cap l = m \cap l = \emptyset$ ，即 $\alpha \parallel l$ 。 \square

定理 1.1.6. 如果直线 l 与平面 α 平行，那么经过 l 的任意平面，若与 α 相交，其交线也与 l 平行。

证明： 设经过 l 的平面 γ 与 α 交于直线 m 。一方面， m, l 共面；另一方面 $m \in \alpha$ ，因此 m, l 无公共点。这说明 $m \parallel l$ 。□ 从这些结论可以继续推出：

定理 1.1.7. 若直线 l 与平面 α 平行，过 α 中任一点作 l 的平行线 m ，则 m 在平面 α 中。

证明： 若直线 l 与平面 α 平行，设它和 α 中任一点 P 确定的平面为 β ，则 β 与 α 相交。设交线为 m ，则 $P \in m$ 。根据定理 1.1.6， $l \parallel m$ 。这就说明，过 P 而平行于 l 的直线在 α 中。□

定理 1.1.8. 直线 l 与直线 m 平行，则过 m 的平面要么与 l 平行，要么经过 l 。

证明： 给定过 m 的平面 α ， $m \subset \alpha$ 与 l 平行，所以根据定理 1.1.5， l 平行于平面 α 或在 α 中。□

直线与平面的平行关系，也有传递性。

定理 1.1.9. 若直线 l_1 与直线 l_2 平行，且与平面 γ 平行，则 l_2 与 γ 平行或在 γ 中。

证明： $l_1 \parallel \gamma$ 。过 γ 中任一点作直线 $n \parallel l_1$ ，则根据定理 1.1.7， n 在 γ 中。 $n \parallel l_1$ ， $l_1 \parallel l_2$ ，所以根据定理 1.1.4， $n \parallel l_2$ 。根据定理 1.1.5， $l_2 \parallel \gamma$ 或在 γ 中。□

上面提到，两平面要么无公共点，要么相交，要么重合。我们把无公共点的平面称为平行平面，也用 \parallel 标记。平面中，平行公理告诉我们，过直线外一点，恰有一条直线与之平行。空间中的平面，也有类似的结论：

定理 1.1.10. 过平面外一点，恰有一平面与之平行。

证明： 设平面 α 外有点 P 。在 α 上选一点 A ，过 A 作两相交直线 l, m (交点为 A)。根据平行公理，过 P 恰有直线 l', m' 分别与 l, m 平行。 l', m' 相交于点 P ，确定平面 α' 。下面证明 α, α' 无公共点，即 $\alpha' \parallel \alpha$ 。

反设 α, α' 有公共点。由于 $P \in \alpha'$ 在 α 外，两者不重合。因此根据交面公理， $\alpha \cap \alpha'$ 是一条直线，记为 n 。 l, m, n 共面， l, m 相交，因此 l, m 中至少有一条与 n 相交。设 l 与 n 相交，交点为 Q ，则 $Q \in n \subset \alpha'$ 。又因为 $l \parallel l'$ ， $Q \in l$ ，所以 $Q \notin l'$ ，因而在 α' 中，过 Q 可作 l' 的平行线。但这条线在 α' 中，因此不是 l 。这与平行公理矛盾。

因此， α, α' 无公共点， $\alpha' \parallel \alpha$ 。 □

类似的结论还有：

定理 1.1.11. 过平行于平面 α 的一直线 l ，恰有一平面与 α 平行。

证明： 在 l 上任取一点 P ， $P \notin \alpha$ ，因此根据定理 1.1，过 P 恰有一平面 β 与 α 平行，只需证明 β 经过 l 。在 α 中任取一点 Q ，则根据定理 1.1.7，过 Q 平行于 l 的直线 m 在 α 中。 β 与 α 平行，也就是说 β 与 α 无公共点，所以 β 与 α 的子集 m 也无公共点，即 $m \parallel \beta$ 。过 P 作 m 的平行线，则根据定理 1.1.7，平行线在 β 中。而这条平行线就是 l ，所以 l 在 β 中。这说明过 l 恰有一平面 β 与 α 平行。 □

从证明中，我们还可以提炼出判定平面平行（或重合）的准则：

定理 1.1.12. 给定平面 γ_1, γ_2 。设 l, m 为 γ_1 中的相交直线。若 γ_2 中有直线 l', m' 分别与 l, m 平行或重合，则平面 γ_1, γ_2 平行或重合。

证明： 两平面要么相互平行，要么重合，要么相交于一直线。反设 γ_1, γ_2 相交于直线 n 。

如果 $l = l'$ ，那么 $l \subset \gamma_1 \cap \gamma_2$ ，于是 $n = l = l'$ 。设 m, l 交于点 P ， m', l' 交于点 Q 。如果 $P = Q$ ，那么 $m = m'$ ，于是 γ_1, γ_2 都是 l, m 确定的平面，

$\gamma_1 = \gamma_2$ 。如果 $P \neq Q$, 那么 $P \notin m'$ 。但 $P \in l = n \subset \gamma_2$, 因此过 P 作 m' 的平行线, 平行线应该在 γ_2 中, 因此根据平行公理, m 在 γ_2 中。这说明 γ_1, γ_2 都是 l, m 确定的平面, $\gamma_1 = \gamma_2$ 。于是总有两平面重合, 矛盾。

如果 $l \parallel l'$, 由于 l, m, n 共面, 且 l, m 相交, 因此 l, m 中至少有一条与 n 相交。设 l 与 n 相交, 交点为 Q , 则 $Q \in n \subset \gamma_2$ 。又因为 $l \parallel l'$, $Q \in l$, 所以 $Q \notin l'$ 。在 γ_2 中, 过 Q 可作 l' 的平行线。但这条线在 γ_2 中, 因此不是 l 。这与平行公理矛盾。

因此, 平面 γ_1, γ_2 平行或重合。□ 平行平面之间, 也有类似平行直线的传递性。

定理 1.1.13. 如果平面 γ_1, γ_2 都平行于平面 β , 那么 γ_1, γ_2 平行或重合。

我们先证明一个小结论:

定理 1.1.14. 设平面 $\gamma_1 \parallel \gamma_2$ 。平面 β 与 γ_1, γ_2 相交于直线 l_1, l_2 , 则 $l_1 \parallel l_2$ 。

证明: 一方面, l_1, l_2 共面。另一方面, $\gamma_1 \parallel \gamma_2$ 说明 l_1, l_2 无公共点。所以 $l_1 \parallel l_2$ 。□ 从这个结论还可以推出: 如果平面 $\gamma_1 \parallel \gamma_2$, 那么对 γ_1 中任意直线, 过 γ_2 中任一点, 作它的平行线, 平行线都在 γ_2 中。

再来证明定理 1.1.13。

证明: 已知平面 γ_1, γ_2 都平行于平面 β 。在 β 中找一点 P , 过 P 作相交直线 l, m 。在 γ_1 中找一点 Q , 过 Q 分别作 l, m 的平行线 l_1, m_1 , 则 l_1, m_1 都在 γ_1 中。它们分别是平面 γ_1 与 l, Q 确定的平面 α_1 、平面 γ_1 与 m, Q 确定的平面 α_2 的交线。设 α_1, α_2 分别与 γ_2 交于 l_2, m_2 , 由于 $\gamma_2 \parallel \beta$, 所以根据定理 1.1.6, $l_2 \parallel l$, $m_2 \parallel m$ 。因此根据定理 1.1.4, l_2 与 l_1 平行或重合, m_2 与 m_1 平行或重合。根据定理 1.1.12, γ_1, γ_2 平行或重合。□

最后, 我们还可以得到:

定理 1.1.15. 若平面 γ_1 与直线 l 平行, 且与平面 γ_2 平行, 则 l 与 γ_2 平行或在 γ_2 中。

证明: $l \parallel \gamma_1$, 所以过 l 恰有一平面 β 与 γ_1 平行。如果 $\beta = \gamma_2$, 则 $l \subset \gamma_2$ 。如果 $\beta \parallel \gamma_2$, 那么 $l \parallel \gamma_2$ 。如果 β 与 γ_2 相交于直线 m , 那么由于 m, l 共面且无公共点, $m \parallel l$ 。于是, 根据定理 1.1.5, $l \parallel \gamma_2$ 或在 γ_2 中。 \square

总结:

我们初步建立了关于空间形状的公理体系, 引入了空间中平面的概念, 并界定了点、直线和平面的关系:

1. 直线和平面都是点的集合。
2. 直线可能与平面平行、相交, 或在平面中。
3. 直线可能与直线异面、平行、相交、重合。
4. 平面可能与平面平行、相交、重合。
5. 直线与直线相交于一点, 直线与平面相交于一点, 平面与平面相交于一直线。

思考 1.1.1.

1. 定理 1.1.15 的证明中, 我们讨论了 β 与 γ_2 相交于直线 m 的情形。实际上 β 是否会与 γ_2 相交? 如何看待这个论证?

习题 1.1.1.

1. 如果直线 l 与直线 m 平行, 那么过 l 的平面与过 m 的平面要么平行, 要么重合, 要么交于 l, m 之一, 要么交于与 l, m 都平行的直线 n 。

1.2 空间向量

上一节中, 我们使用公理体系讨论空间中的形状,