

# 第二册

大青花鱼



# 目录

第一章 空间中的形状	5
1.1 点、直线、平面 . . . . .	5
1.2 空间向量 . . . . .	12
1.3 距离、长度和垂直 . . . . .	18



# 第一章 空间中的形状

我们已经通过公理体系研究过平面中的简单形状，将基本的平面形和函数的图像联系起来，并且引入了向量的概念。现在，我们进一步研究立体空间中的形状。人类生活在立体空间中，因此，研究空间中形体的性质，对我们认识世界、改造世界有直接帮助。

## 1.1 点、直线、平面

和平面形一样，立体空间中的形也是从种种事物的形状总结提炼而来。平面是人类最早总结出的概念之一。我们已经研究过平面中的形状，因此，研究立体空间时，我们把平面作为地位和点、直线相同的基本概念。

研究平面形状时，我们首先引进了公理体系。如今我们将平面公理体系扩展为立体空间的公理体系。为此，我们要通过公设和公理定义平面以及它和点、直线的关系。

我们定义面为点的集合，也是线运动的结果。平面是最基本的面，一般用小写希腊字母  $\alpha, \beta, \gamma$  等表示。

**公理 1. 平面公理** 过不共线的三点，有且仅有一个平面。

我们也说三角形（或圆）确定一个平面。不共线的三点  $A, B, C$  确定的平面，可以记作平面  $ABC$ 。

如何确定平面是“平”的呢？生活和生产中，我们一般用直线来确定一个面是不是平的。比如，木工常常用角尺的直角边放在刨好的木板上。如果直角边总能与板面紧密贴合，就说明木板已刨平了。水泥工用直的刮子将刚铺水泥的地面刮平。我们把人们总结出的经验作为判断平面的方法，用公理的形式确定下来。

**公理 2. 平直公理** 过平面上不重合两点的直线，在平面中。

平直公理说明，直线要么与平面没有公共点，要么只交于一点，要么全部在平面里。直线与平面没有公共点，则称直线与平面平行，也用  $//$  标记；直线与平面恰有一公共点，则称直线与平面相交；直线与平面有两个或以上公共点，则称直线在平面中或平面经过直线。用集合的语言来说，直线  $l$  在平面  $\gamma$  中，就说明  $l$  是  $\gamma$  的子集。

从平面公理和平直公理，容易得到另两种定义平面的方法：

**定理 1.1.1.** 过一条直线与该直线外一点，有且仅有一个平面。

**证明：** 设直线为  $l$ ， $P$  为  $l$  外一点。取  $l$  上不同的两点，和  $P$  构成不共线的三点。这三点确定一个平面。根据平直公理， $l$  在该平面中。  $\square$

**定理 1.1.2.** 过两条相交的直线，有且仅有一个平面。

**证明：** 设有直线  $l, m$ 。如果  $l, m$  相交，设交点为  $P$ ，在  $l, m$  上各取不同于  $P$  的一点： $Q, R$ ，则  $P, Q, R$  不共线，于是确定一个平面  $PQR$ ，根据平直公理， $l, m$  都在  $PQR$  中。  $\square$

设直线  $l$  与平面  $\gamma$  平行，没有公共点，那么它与  $\gamma$  中任何直线没有公共点。比如，给定  $\gamma$  中一点  $A$ ， $\gamma$  中经过  $A$  的任何直线，都与  $l$  没有公共点。

平面中，两直线没有公共点，就说它们相互平行。空间中，两直线除了重合、相交和平行，还有另一种关系，我们称之为直线**异面**。前面的例子

中, 根据平行公理, 过  $\gamma$  中的点  $A$ , 恰有一条直线与  $l$  平行, 其余与  $l$  不相交的直线, 都称与  $l$  异面。

哪条直线与  $l$  平行呢? 显然, 在空间中, 我们需要补充平行公理:

**公理 3. 平行公理** 过直线外一点, 有且仅有一条与它平行的直线。它在直线与点确定的平面上。

新版的平行公理在原来的基础上, 指定了平行线的位置: 在直线与点确定的平面上。换句话说, 平行是一个平面内性质。两直线平行的关系必然发生在同一平面中。也正因如此, 我们把其它的无公共点的情形叫做异面。

从补充的平行公理出发, 可以得到另一种定义平面的方法:

**定理 1.1.3.** 过两条平行的直线, 有且仅有一个平面。

**证明:** 设直线  $l \parallel m$ , 在  $l$  上找两点  $P_1, P_2$ , 在  $m$  上找一点  $Q$ 。  $P_1P_2Q$  确定唯一平面  $\gamma$ 。在平面  $\gamma$  中, 过  $Q$  作  $l$  的平行线。根据平行公理, 这条平行线就是  $m$ 。因此  $l, m$  共面, 它们确定唯一平面  $\gamma$ 。  $\square$

再来看两个平面的关系。两个平面相交, 交集是什么呢? 生活中的经验告诉我们, 两个平面相交, 交集是直线。比如, 裁纸刀的刀面是平的, 切在纸上, 将纸面分成两部分, 裁痕是直的。我们把这个性质用公理描述为:

**公理 4. 交面公理** 两个平面如果有交集, 则交集至少包含两个不重合的点。

交面公理说明, 两个平面不可能只交于一点。如果它们有两个 (不重合的) 公共点, 那么根据平直公理, 两平面的交集包括过这两点的直线。而如果两平面的交集中还有不属于这条直线的第三点, 那么根据平面公理, 这三点确定一个平面, 于是两平面重合。

综上所述, 从交面公理可以推出: 要么两平面没有公共点, 要么交集为一条直线  $l$ , 称为两平面相交于直线  $l$ ; 要么两平面重合。

有了交面公理，我们可以证明空间中平行直线的递推性质。由于证明繁琐，有些地方把它当作公理引入。

**定理 1.1.4.** 如果直线  $l_1, l_2$  都平行于直线  $m$ ，那么  $l_1, l_2$  平行或重合。

**证明：** 设  $l_1, m$  确定的平面为  $\gamma_1$ ， $l_2, m$  确定的平面为  $\gamma_2$ 。分两种情况讨论：

1.  $\gamma_1, \gamma_2$  重合。那么  $l_1, l_2, m$  都在此平面上。根据平面直线的结论， $l_1, l_2$  平行或重合。

2.  $\gamma_1, \gamma_2$  不重合。于是  $\gamma_1 \cap \gamma_2 = m$ 。取  $l_1$  上一点  $P$ ， $P$  与  $l_2$  确定平面  $\beta$ 。 $l_2 \notin \gamma_1$ ，所以  $\beta, \gamma_1$  不重合。设  $\beta \cap \gamma_1 = n$ 。

首先证明  $n \parallel l_2$ 。反设  $n$  交  $l_2$  于点  $Q$ ，则  $Q \in \gamma_1 \cap \gamma_2 = m$ ，于是  $Q \in m \cap l_2$ 。这与  $m \parallel l_2$  矛盾。因此  $n \parallel l_2$ 。

再证明  $n \parallel m$ 。反设  $n$  交  $m$  于点  $Q$ ，则过  $Q$  有  $m \parallel l_2$  和  $n \parallel l_2$ ，于是  $n = m$ 。但  $P \in n$ ，因此  $P \in m \cap l_1$ ，这与  $m \parallel l_1$  矛盾。因此  $n \parallel m$ 。

$n$  与  $l_1$  都平行于  $m$ ，且有公共点  $P$ ，所以  $n = l_1$ 。所以  $l_1 \parallel l_2$ 。  $\square$

接下来回顾直线与平面的关系。从补充后的平行公理，可以得出直线与平面平行的判定方法：

**定理 1.1.5.** 如果平面  $\alpha$  中有直线  $m$  平行于直线  $l$ ，那么  $l$  平行于平面  $\alpha$  或在  $\alpha$  中。

**证明：** 设直线  $l$  平行于平面  $\alpha$  中的某直线  $m$ 。记  $l, m$  确定的平面为  $\beta$ 。则要么  $\alpha = \beta$ ，要么  $\alpha \cap \beta = m$ 。如果  $\alpha = \beta$ ，那么  $l \subset \alpha$ 。如果  $\alpha \cap \beta = m$ ，那么  $\alpha \cap l = \beta \cap \alpha \cap l = m \cap l = \emptyset$ ，即  $\alpha \parallel l$ 。  $\square$

**定理 1.1.6.** 如果直线  $l$  与平面  $\alpha$  平行，那么经过  $l$  的任意平面，若与  $\alpha$  相交，其交线也与  $l$  平行。



**证明：** 设经过  $l$  的平面  $\gamma$  与  $\alpha$  交于直线  $m$ 。一方面， $m, l$  共面；另一方面  $m \in \alpha$ ，因此  $m, l$  无公共点。这说明  $m \parallel l$ 。□ 从这些结论可以继续推出：

**定理 1.1.7.** 若直线  $l$  与平面  $\alpha$  平行，过  $\alpha$  中任一点作  $l$  的平行线  $m$ ，则  $m$  在平面  $\alpha$  中。

**证明：** 若直线  $l$  与平面  $\alpha$  平行，设它和  $\alpha$  中任一点  $P$  确定的平面为  $\beta$ ，则  $\beta$  与  $\alpha$  相交。设交线为  $m$ ，则  $P \in m$ 。根据定理 1.1.6， $l \parallel m$ 。这就说明，过  $P$  而平行于  $l$  的直线在  $\alpha$  中。□

**定理 1.1.8.** 直线  $l$  与直线  $m$  平行，则过  $m$  的平面要么与  $l$  平行，要么经过  $l$ 。

**证明：** 给定过  $m$  的平面  $\alpha$ ， $m \subset \alpha$  与  $l$  平行，所以根据定理 1.1.5， $l$  平行于平面  $\alpha$  或在  $\alpha$  中。□

直线与平面的平行关系，也有传递性。

**定理 1.1.9.** 若直线  $l_1$  与直线  $l_2$  平行，且与平面  $\gamma$  平行，则  $l_2$  与  $\gamma$  平行或在  $\gamma$  中。

**证明：**  $l_1 \parallel \gamma$ 。过  $\gamma$  中任一点作直线  $n \parallel l_1$ ，则根据定理 1.1.7， $n$  在  $\gamma$  中。 $n \parallel l_1$ ， $l_1 \parallel l_2$ ，所以根据定理 1.1.4， $n \parallel l_2$ 。根据定理 1.1.5， $l_2 \parallel \gamma$  或在  $\gamma$  中。□

上面提到，两平面要么无公共点，要么相交，要么重合。我们把无公共点的平面称为平行平面，也用  $\parallel$  标记。平面中，平行公理告诉我们，过直线外一点，恰有一条直线与之平行。空间中的平面，也有类似的结论：

**定理 1.1.10.** 过平面外一点，恰有一平面与之平行。

**证明：** 设平面  $\alpha$  外有点  $P$ 。在  $\alpha$  上选一点  $A$ ，过  $A$  作两相交直线  $l, m$  (交点为  $A$ )。根据平行公理，过  $P$  恰有直线  $l', m'$  分别与  $l, m$  平行。 $l', m'$  相交于点  $P$ ，确定平面  $\alpha'$ 。下面证明  $\alpha, \alpha'$  无公共点，即  $\alpha' \parallel \alpha$ 。

反设  $\alpha, \alpha'$  有公共点。由于  $P \in \alpha'$  在  $\alpha$  外，两者不重合。因此根据交面公理， $\alpha \cap \alpha'$  是一条直线，记为  $n$ 。 $l, m, n$  共面， $l, m$  相交，因此  $l, m$  中至少有一条与  $n$  相交。设  $l$  与  $n$  相交，交点为  $Q$ ，则  $Q \in n \subset \alpha'$ 。又因为  $l \parallel l'$ ， $Q \in l$ ，所以  $Q \notin l'$ ，因而在  $\alpha'$  中，过  $Q$  可作  $l'$  的平行线。但这条线在  $\alpha'$  中，因此不是  $l$ 。这与平行公理矛盾。

因此， $\alpha, \alpha'$  无公共点， $\alpha' \parallel \alpha$ 。 □

类似的结论还有：

**定理 1.1.11.** 过平行于平面  $\alpha$  的一直线  $l$ ，恰有一平面与  $\alpha$  平行。

**证明：** 在  $l$  上任取一点  $P$ ， $P \notin \alpha$ ，因此根据定理 1.1，过  $P$  恰有一平面  $\beta$  与  $\alpha$  平行，只需证明  $\beta$  经过  $l$ 。在  $\alpha$  中任取一点  $Q$ ，则根据定理 1.1.7，过  $Q$  平行于  $l$  的直线  $m$  在  $\alpha$  中。 $\beta$  与  $\alpha$  平行，也就是说  $\beta$  与  $\alpha$  无公共点，所以  $\beta$  与  $\alpha$  的子集  $m$  也无公共点，即  $m \parallel \beta$ 。过  $P$  作  $m$  的平行线，则根据定理 1.1.7，平行线在  $\beta$  中。而这条平行线就是  $l$ ，所以  $l$  在  $\beta$  中。这说明过  $l$  恰有一平面  $\beta$  与  $\alpha$  平行。 □

从证明中，我们还可以提炼出判定平面平行（或重合）的准则：

**定理 1.1.12.** 给定平面  $\gamma_1, \gamma_2$ 。设  $l, m$  为  $\gamma_1$  中的相交直线。若  $\gamma_2$  中有直线  $l', m'$  分别与  $l, m$  平行或重合，则平面  $\gamma_1, \gamma_2$  平行或重合。

**证明：** 两平面要么相互平行，要么重合，要么相交于一直线。反设  $\gamma_1, \gamma_2$  相交于直线  $n$ 。

如果  $l = l'$ ，那么  $l \subset \gamma_1 \cap \gamma_2$ ，于是  $n = l = l'$ 。设  $m, l$  交于点  $P$ ， $m', l'$  交于点  $Q$ 。如果  $P = Q$ ，那么  $m = m'$ ，于是  $\gamma_1, \gamma_2$  都是  $l, m$  确定的平面，

$\gamma_1 = \gamma_2$ 。如果  $P \neq Q$ , 那么  $P \notin m'$ 。但  $P \in l = n \subset \gamma_2$ , 因此过  $P$  作  $m'$  的平行线, 平行线应该在  $\gamma_2$  中, 因此根据平行公理,  $m$  在  $\gamma_2$  中。这说明  $\gamma_1, \gamma_2$  都是  $l, m$  确定的平面,  $\gamma_1 = \gamma_2$ 。于是总有两平面重合, 矛盾。

如果  $l \parallel l'$ , 由于  $l, m, n$  共面, 且  $l, m$  相交, 因此  $l, m$  中至少有一条与  $n$  相交。设  $l$  与  $n$  相交, 交点为  $Q$ , 则  $Q \in n \subset \gamma_2$ 。又因为  $l \parallel l'$ ,  $Q \in l$ , 所以  $Q \notin l'$ 。在  $\gamma_2$  中, 过  $Q$  可作  $l'$  的平行线。但这条线在  $\gamma_2$  中, 因此不是  $l$ 。这与平行公理矛盾。

因此, 平面  $\gamma_1, \gamma_2$  平行或重合。□ 平行平面之间, 也有类似平行直线的传递性。

**定理 1.1.13.** 如果平面  $\gamma_1, \gamma_2$  都平行于平面  $\beta$ , 那么  $\gamma_1, \gamma_2$  平行或重合。

我们先证明一个小结论:

**定理 1.1.14.** 设平面  $\gamma_1 \parallel \gamma_2$ 。平面  $\beta$  与  $\gamma_1, \gamma_2$  相交于直线  $l_1, l_2$ , 则  $l_1 \parallel l_2$ 。

**证明:** 一方面,  $l_1, l_2$  共面。另一方面,  $\gamma_1 \parallel \gamma_2$  说明  $l_1, l_2$  无公共点。所以  $l_1 \parallel l_2$ 。□ 从这个结论还可以推出: 如果平面  $\gamma_1 \parallel \gamma_2$ , 那么对  $\gamma_1$  中任意直线, 过  $\gamma_2$  中任一点, 作它的平行线, 平行线都在  $\gamma_2$  中。

再来证明定理 1.1.13。

**证明:** 已知平面  $\gamma_1, \gamma_2$  都平行于平面  $\beta$ 。在  $\beta$  中找一点  $P$ , 过  $P$  作相交直线  $l, m$ 。在  $\gamma_1$  中找一点  $Q$ , 过  $Q$  分别作  $l, m$  的平行线  $l_1, m_1$ , 则  $l_1, m_1$  都在  $\gamma_1$  中。它们分别是平面  $\gamma_1$  与  $l, Q$  确定的平面  $\alpha_1$ 、平面  $\gamma_1$  与  $m, Q$  确定的平面  $\alpha_2$  的交线。设  $\alpha_1, \alpha_2$  分别与  $\gamma_2$  交于  $l_2, m_2$ , 由于  $\gamma_2 \parallel \beta$ , 所以根据定理 1.1.6,  $l_2 \parallel l$ ,  $m_2 \parallel m$ 。因此根据定理 1.1.4,  $l_2$  与  $l_1$  平行或重合,  $m_2$  与  $m_1$  平行或重合。根据定理 1.1.12,  $\gamma_1, \gamma_2$  平行或重合。□

最后, 我们还可以得到:

**定理 1.1.15.** 若平面  $\gamma_1$  与直线  $l$  平行, 且与平面  $\gamma_2$  平行, 则  $l$  与  $\gamma_2$  平行或在  $\gamma_2$  中。

**证明:**  $l \parallel \gamma_1$ , 所以过  $l$  恰有一平面  $\beta$  与  $\gamma_1$  平行。如果  $\beta = \gamma_2$ , 则  $l \subset \gamma_2$ 。如果  $\beta \parallel \gamma_2$ , 那么  $l \parallel \gamma_2$ 。如果  $\beta$  与  $\gamma_2$  相交于直线  $m$ , 那么由于  $m, l$  共面且无公共点,  $m \parallel l$ 。于是, 根据定理 1.1.5,  $l \parallel \gamma_2$  或在  $\gamma_2$  中。  $\square$

总结:

我们初步建立了关于空间形状的公理体系, 引入了空间中平面的概念, 并界定了点、直线和平面的关系:

1. 直线和平面都是点的集合。
2. 直线可能与平面平行、相交, 或在平面中。
3. 直线可能与直线异面、平行、相交、重合。
4. 平面可能与平面平行、相交、重合。
5. 直线与直线相交于一点, 直线与平面相交于一点, 平面与平面相交于一直线。

**思考 1.1.1.**

1. 定理 1.1.15 的证明中, 我们讨论了  $\beta$  与  $\gamma_2$  相交于直线  $m$  的情形。实际上  $\beta$  是否会与  $\gamma_2$  相交? 如何看待这个论证?

**习题 1.1.1.**

1. 如果直线  $l$  与直线  $m$  平行, 那么过  $l$  的平面与过  $m$  的平面要么平行, 要么重合, 要么交于  $l, m$  之一, 要么交于与  $l, m$  都平行的直线  $n$ 。

## 1.2 空间向量

上一节中, 我们使用公理体系讨论空间中的形状。可以看到, 使用公理体系讨论虽然严谨, 但过于抽象, 步骤繁琐。仅处理点线面的平行关系, 就

需要大量的篇幅。为此，我们尝试用向量的概念来讨论空间中的形状。

平面中，我们用向量表示点，以及原点到此点的平移。现在我们把向量的概念扩展到空间中。我们把空间看作集合，记为  $\mathbb{V}$ ，其中的元素称为向量或点。向量满足如下规则：

1. 加法结合律： $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{V}, \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}$ 。
2. 加法交换律： $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{V}, \mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$ 。
3. 存在零向量： $\forall \mathbf{a} \in \mathbb{V}, \mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$ 。
4. 放缩和四则运算相容： $\forall \mathbf{a} \in \mathbb{V}, 1 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a}$ 。  $\forall s, t \in \mathbb{R}, (s + t) \cdot \mathbf{a} = (s \cdot \mathbf{a}) + (t \cdot \mathbf{a}), (s \cdot t) \cdot \mathbf{a} = s \cdot (t \cdot \mathbf{a})$ 。
5. 放缩和平移相容： $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{V}, \forall t \in \mathbb{R}, t \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = t \cdot \mathbf{a} + t \cdot \mathbf{b}$ 。

这个定义与平面向量相同。在此基础上，我们用同样的方式定义直线、线段和射线。

**定义 1.2.1.** 过原点的直线是非零向量放缩得到的集合。不过原点的直线是过原点的直线按一点平移得到的集合。

给定非零向量  $A = \mathbf{a}$ ， $\{t\mathbf{a} | t \in \mathbb{R}\}$  是一条过原点  $O$  和  $A$  的直线  $OA$ ，称为  $A$  引出的直线，记为  $\mathbb{R}\mathbf{a}$ 。给定向量  $B = \mathbf{b}$ ， $\{t\mathbf{a} + \mathbf{b} | t \in \mathbb{R}\}$  是一条过  $B$  的直线，记为  $\mathbb{R}\mathbf{a} + \mathbf{b}$ ，其中  $\mathbb{R}\mathbf{a}$  称为它的线性部分；而  $\{t\mathbf{a} + (1-t)\mathbf{b} | t \in \mathbb{R}\}$  就是直线  $AB$ 。

给定非零向量  $\mathbf{a}$ ，如果向量  $\mathbf{b}$  可以通过  $\mathbf{a}$  放缩得到，或者说  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}\mathbf{a}$ ，就称两者**共线**。

类比可以定义线段和射线：给定非零向量  $A = \mathbf{a}$  和向量  $B = \mathbf{b}$ ， $\{(1-t)\mathbf{a} + t\mathbf{b} | t \in [0, 1]\}$  是线段  $AB$ ， $\{(1-t)\mathbf{a} + t\mathbf{b} | t \geq 0\}$  是射线  $AB$ 。

空间向量与平面向量的唯一不同的地方在于，空间向量遵循的不再是平面的根本性质，而是空间的根本性质。为了描述空间的根本性质，我们首先引进线性相关的概念：

**定义 1.2.2.** 给定  $n$  个向量  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ , 对实数  $t_1, t_2, \dots, t_n$  来说,  $t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + \dots + t_n\mathbf{a}_n$  称为这  $n$  个向量的**线性组合**。如果存在一组不全为零的实数  $t_1, t_2, \dots, t_n$ , 使得线性组合  $t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + \dots + t_n\mathbf{a}_n$  是零向量, 就说这  $n$  个向量**线性相关**。如果不存在这样一组实数, 就说这  $n$  个向量**线性无关**。

举例来说, 单个非零向量总是线性无关的, 因为非零实数乘以非零向量总得到非零向量。又如: 如果有不全为零的实数  $t_1, t_2$  使得向量  $A, B$  的线性组合:  $t_1A + t_2B$  等于零向量, 就说  $A, B$  线性相关。

具体来说, 设  $A = 2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$ ,  $B = -6\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2$ , 那么

$$3A + B = \mathbf{0}.$$

也就是说, 选取  $t_1 = 3$ ,  $t_2 = 1$ , 就使得线性组合:  $t_1A + t_2B$  等于零向量。因此, 以上两个向量  $A, B$  线性相关。

设  $A = 2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$ ,  $B = \mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2$ , 那么对任何  $t_1, t_2$ , 线性组合  $t_1A + t_2B$  可以写为:

$$\begin{aligned} t_1A + t_2B &= t_1(2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2) + t_2(\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2) \\ &= (2t_1 + t_2)\mathbf{e}_1 + (-t_1 + 3t_2)\mathbf{e}_2. \end{aligned}$$

要使得  $t_1A + t_2B$  为零向量  $(0, 0)$ , 就要求它的横坐标和纵坐标同时为零。也就是说,  $t_1, t_2$  应该是一元一次方程组

$$\begin{cases} 2t_1 + t_2 = 0 \\ -t_1 + 3t_2 = 0 \end{cases}$$

的解。解这个一元一次方程组, 得到  $t_1 = t_2 = 0$ 。也就是说, 不存在不全为零的实数  $t_1, t_2$ , 使得线性组合  $t_1A + t_2B$  为零向量。我们说  $A, B$  线性无关。

以上的例子也给出了判断一组向量是否线性相关的方法。我们将“线性组合  $t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + \dots + t_n\mathbf{a}_n$  是零向量”的条件转化为关于  $t_1, t_2, \dots, t_n$  的

一元一次方程组。如果方程组的解集中有不全为零的解，这组向量就线性相关。如果方程组没有不全为零的解，就说这组向量线性无关。

直观来看，两个平面向量线性相关和共线是一回事。 $A, B$  线性相关，就是说有不全为零的实数  $t_1, t_2$  使得  $t_1A + t_2B$  等于零向量。不妨设  $t_1$  不为零，那么  $A = \frac{t_2}{t_1}B$ ，因此  $A \in \mathbb{R}B$ ，即  $A, B$  共线。反之亦然。平面的根本性质告诉我们，存在两个不共线的向量，也就是说，不多于两个平面向量，可以线性无关。

如果向量多于两个，平面的根本性质告诉我们，只要其中两个向量  $A, B$  不共线，其余的向量都可以表示成  $sA + tB$  的形式。因此，设有平面向量  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ 。如果  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$  不共线，那么它们线性相关，存在  $t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 = \mathbf{0}$ 。于是

$$t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + \sum_{i>2} 0 \cdot \mathbf{a}_i = \mathbf{0}.$$

如果  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$  不共线，那么根据平面的根本性质， $\mathbf{a}_3$  可以写成：

$$\mathbf{a}_3 = s\mathbf{a}_1 + t\mathbf{a}_2.$$

于是

$$s\mathbf{a}_1 + t\mathbf{a}_2 - 1 \cdot \mathbf{a}_3 + \sum_{i>3} 0 \cdot \mathbf{a}_i = \mathbf{0}.$$

也就是说，多于两个平面向量总线性相关。

这个结论反映了平面向量的本质：可以选出两个向量，所有向量都可以从它们开始，通过平移、放缩得到。这两个向量叫作平面的基底。而空间中的点显然不一定在同一个平面里。我们把平面的根本性质替换为**空间的根本性质**：

1. 给定一个非零向量，总能找到另一个向量，使得两者线性无关。
2. 给定两个线性无关的向量，总能找到另一个向量，使得三者线性无关。
3. 从线性无关的向量  $A, B, C$  出发，经过放缩、平移，可以得到空间中任何向量。具体来说，任何向量都可以表示成  $sA + tB + uC$  的形式，

集合  $\{sA + tB + uC \mid s, t, u \in \mathbb{R}\}$  就是整个空间。这样的  $A, B, C$  称为空间的一组基或基底。

对比平面和空间的根本性质，可以发现，主要的变化是“2 变成 3”。平面中保证存在两个线性无关的向量，空间中保证存在三个线性无关的向量。按照类似的推理，我们可以得到结论：不多于三个空间向量，可以线性无关；多于三个空间向量，总是线性相关。我们把这个数字称为维数。平面的维数是 2，立体空间的维数是 3。

于是我们可以定义立体空间中的平面：

**定义 1.2.3.** 过原点的平面是两个线性无关的向量通过平移、放缩得到的集合。不过原点的平面是过原点的平面按一点平移得到的集合。

给定线性无关的向量  $A = \mathbf{a}, B = \mathbf{b}$ ,  $\{s\mathbf{a} + t\mathbf{b} \mid s, t \in \mathbb{R}\}$  是一个过原点  $O$  和  $A, B$  的平面  $OAB$ 。给定向量  $C = \mathbf{c}$ ,  $\{s\mathbf{a} + t\mathbf{b} + \mathbf{c} \mid s, t \in \mathbb{R}\}$  是一条过  $C$  的直线；而  $\{s\mathbf{a} + t\mathbf{b} + (1 - s - t)\mathbf{c} \mid t \in \mathbb{R}\}$  就是过  $A, B, C$  的平面  $ABC$ 。

来看几个具体的例子。选定空间的一组基底  $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ ，我们可以构建坐标系  $Oxyz$ ，其中  $x$  轴、 $y$  轴、 $z$  轴分别是基向量引出的直线  $\mathbb{R}\mathbf{e}_x, \mathbb{R}\mathbf{e}_y, \mathbb{R}\mathbf{e}_z$ 。空间中任一点  $A$  可以写成  $(a_x, a_y, a_z)$ 。 $x$  轴、 $y$  轴构成平面：

$$Oxy : \{s\mathbf{e}_x + t\mathbf{e}_y \mid s, t \in \mathbb{R}\}.$$

$x$  轴、 $z$  轴构成平面：

$$Oxz : \{s\mathbf{e}_x + t\mathbf{e}_z \mid s, t \in \mathbb{R}\}.$$

$y$  轴、 $z$  轴构成平面：

$$Oyz : \{s\mathbf{e}_y + t\mathbf{e}_z \mid s, t \in \mathbb{R}\}.$$

给定点  $A(1, 0, 0)$ 、 $B(0, 1, 0)$ 、 $C(0, 0, 1)$ ，则经过它们的平面为：

$$\{sA + tB + (1 - s - t)C \mid t \in \mathbb{R}\} = \{(s, t, 1 - s - t) \mid t \in \mathbb{R}\}.$$



可以验证, 这样定义的点、直线、平面符合上一节中的各个公理。

首先来看平面公理。任取不共线三点  $A, B, C$ , 则  $A - C, B - C$  线性无关, 因此  $\{sA + tB + (1 - s - t)C \mid s, t \in \mathbb{R}\}$  是  $A, B, C$  确定的平面。

如果点  $P, Q$  在平面  $\{sA + tB + (1 - s - t)C \mid t \in \mathbb{R}\}$  中, 那么存在  $s_1, t_1, s_2, t_2$  使得

$$P = s_1A + t_1B + (1 - s_1 - t_1)C$$

$$Q = s_2A + t_2B + (1 - s_2 - t_2)C$$

直线  $PQ$  是集合  $\{uP + (1 - u)Q \mid u \in \mathbb{R}\}$ , 其中任一点  $U = uP + (1 - u)Q$  可以用  $A, B, C$  表示为

$$\begin{aligned} U &= uP + (1 - u)Q \\ &= (us_1 + (1 - u)s_2)A + (ut_1 + (1 - u)t_2)B + (u(1 - s_1 - t_1) + (1 - u)(1 - s_2 - t_2))C \\ &= (us_1 + (1 - u)s_2)A + (ut_1 + (1 - u)t_2)B + (1 - (us_1 + (1 - u)s_2) - (ut_1 + (1 - u)t_2))C \end{aligned}$$

因此  $U$  在平面  $ABC$  中。这说明向量表示的空间符合平直公理。

如果两平面  $\gamma_1, \gamma_2$  交于点  $C$ , 记  $\gamma_1 : \{sA_1 + tB_1 + C \mid s, t \in \mathbb{R}\}$ ,  $\gamma_2 : \{sA_2 + tB_2 + C \mid s, t \in \mathbb{R}\}$ 。其中  $(A_1, B_1)$  线性无关,  $(A_2, B_2)$  线性无关。两平面公共点可以表示为让以下等式成立的  $s_1, t_1, s_2, t_2$ :

$$s_1A_1 + t_1B_1 + C = s_2A_2 + t_2B_2 + C.$$

以上等式可以转为:

$$s_1A_1 + t_1B_1 - s_2A_2 - t_2B_2 = \mathbf{0}.$$

根据空间的根本性质, 四个向量总是线性相关。所以存在不全为零的四个实数  $s_1, t_1, s_2, t_2$  使上式成立。由于  $(A_1, B_1)$  线性无关,  $(A_2, B_2)$  线性无关, 所以  $s_1A_1 + t_1B_1$  和  $s_2A_2 + t_2B_2$  为零向量时,  $s_1, t_1, s_2, t_2$  必然全为零。然而  $s_1, t_1, s_2, t_2$  不全为零, 所以  $s_1A_1 + t_1B_1$  和  $s_2A_2 + t_2B_2$  不为零向量。于

是这时  $s_1A_1 + t_1B_1 + C = s_2A_2 + t_2B_2 + C \neq C$  是两平面另一个公共点。这说明向量表示的空间符合交面公理。

平面中，两条直线平行，当且仅当它们的线性部分是同一条过原点的直线。我们用这个方法判定空间中直线的平行关系。设有两直线  $l_1 \parallel l_2$ ，那么它们是同一条过原点的直线平移而成：

$$l_1 : \{t\mathbf{a} + \mathbf{b}_1 \mid t \in \mathbb{R}\}$$

$$l_2 : \{t\mathbf{a} + \mathbf{b}_2 \mid t \in \mathbb{R}\}$$

所以  $l_1, l_2$  都在平面： $\gamma : \{t\mathbf{a} + s(\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2) + \mathbf{b}_2 \mid s, t \in \mathbb{R}\}$  中。对任意  $t \in \mathbb{R}$ ， $l_1$  中的点  $t\mathbf{a} + \mathbf{b}_1 = t\mathbf{a} + 1 \cdot (\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2) + \mathbf{b}_2 \in \gamma$ ； $l_2$  中的点  $t\mathbf{a} + \mathbf{b}_2 = t\mathbf{a} + 0 \cdot (\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2) + \mathbf{b}_2 \in \gamma$ 。这说明，两条平行直线总在同一平面内，即向量表示的空间符合补充后的平行公理。

### 1.3 距离、长度和垂直

我们可以通过向量引进空间中距离和长度的概念。和平面中一样，我们选定空间的一组基底  $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ ，然后定义内积：

$$\begin{aligned} \forall A = a_x\mathbf{e}_x + a_y\mathbf{e}_y + a_z\mathbf{e}_z, B = b_x\mathbf{e}_x + b_y\mathbf{e}_y + b_z\mathbf{e}_z, \\ A \cdot B = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z. \end{aligned}$$

如果向量  $A, B$  的内积等于 0，就说它们垂直。我们定义向量  $A$  的长度为

$$\|A\| = \sqrt{A \cdot A} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2},$$

两点  $A, B$  之间的距离就是

$$\|A - B\| = \sqrt{(A - B) \cdot (A - B)} = \sqrt{(a_x - b_x)^2 + (a_y - b_y)^2 + (a_z - b_z)^2}.$$