第二册

大青花鱼

目录

第一章　空间中的形状

我们已经通过公理体系研究过平面中的简单形状，将基本的平面形和函数的图像联系起来，并且引入了向量的概念。现在，我们进一步研究立体空间中的形状。人类生活在立体空间中，因此，研究空间中形体的性质，对我们认识世界、改造世界有直接帮助。为了更好地理解以下的内容，我们建议你准备一把刻度尺和足够的白纸。至于如何在纸面上画出立体形状，可以参考附录 A。

1.1　点、直线、平面

和平面形一样，立体空间中的形也是从种种事物的形状总结提炼而来。平面是人类最早总结出的概念之一。我们已经研究过平面中的形状，因此，研究立体空间时，我们把平面作为地位和点、直线相同的基本概念。

研究平面形状时，我们首先引进了公理体系。如今我们将平面公理体系扩展为立体空间的公理体系。为此，我们要通过公设和公理定义**平面**以及它和点、直线的关系。

我们定义面为点的集合，也是线运动的结果。平面是最基本的面，一般用小写希腊字母 α, β, γ 等表示。

公理 1. 平面公理 过不共线的三点，有且仅有一个平面。

我们也说三角形（或圆）确定一个平面。不共线的三点 A、B、C 确定的平面，可以记作平面 ABC。

如何确定平面是“平”的呢？生活和生产中，我们一般用直线来确定一个面是不是平的。比如，木工常常用角尺的直角边放在刨好的木板上。如果直角边总能与板面紧密贴合，就说明木板已刨平了。水泥工用直的刮子将刚铺水泥的地面刮平。我们把人们总结出的经验作为判断平面的方法，用公理的形式确定下来。

公理 2. 平直公理 过平面上不重合两点的直线，在平面中。

平直公理说明，直线要么与平面没有公共点，要么只交于一点，要么全部在平面里。直线与平面没有公共点，则称直线与平面平行，也用 // 表记；直线与平面恰有一公共点，则称直线与平面相交；直线与平面有两个或以上公共点，则称直线在平面中或平面经过直线。用集合的语言来说，直线 l 在平面 γ 中，就说明 l 是 γ 的子集。

从平面公理和平直公理，容易得到另两种定义平面的方法：

定理 1.1.1. 过一条直线与该直线外一点，有且仅有一个平面。

证明： 设直线为 l，P 为 l 外一点。取 l 上不同的两点，和 P 构成不共线的三点。这三点确定一个平面。根据平直公理，l 在该平面中。 □

定理 1.1.2. 过两条相交的直线，有且仅有一个平面。

证明： 设有直线 l, m。如果 l, m 相交，设交点为 P，在 l, m 上各取不同于 P 的一点：Q, R，则 P, Q, R 不共线，于是确定一个平面 PQR，根据平直公理，l, m 都在 PQR 中。 □

设直线 l 与平面 γ 平行，没有公共点，那么它与 γ 中任何直线没有公共点。比如，给定 γ 中一点 A，γ 中经过 A 的任何直线，都与 l 没有公共点。

平面中，两直线没有公共点，就说它们相互平行。空间中，两直线除了重合、相交和平行，还有另一种关系，我们称之为直线**异面**。前面的例子中，根据平行公理，过 γ 中的点 A，恰有一条直线与 l 平行，其余与 l 不相交的直线，都称与 l 异面。

哪条直线与 l 平行呢？显然，在空间中，我们需要补充平行公理：

公理 3. 平行公理 过直线外一点，有且仅有一条与它平行的直线。它在直线与点确定的平面上。

新版的平行公理在原来的基础上，指定了平行线的位置：在直线与点确定的平面上。换句话说，平行是一个平面内性质。两直线平行的关系必然发生在同一平面中。也正因如此，我们把其它的无公共点的情形叫做异面。

从补充的平行公理出发，可以得到另一种定义平面的方法：

定理 1.1.3. 过两条平行的直线，有且仅有一个平面。

证明： 设直线 $l \parallel m$，在 l 上找两点 P_1, P_2，在 m 上找一点 Q。P_1P_2Q 确定唯一平面 γ。在平面 γ 中，过 Q 作 l 的平行线。根据平行公理，这条平行线就是 m。因此 l, m 共面，它们确定唯一平面 γ。 □

再来看两个平面的关系。两个平面相交，交集是什么呢？生活中的经验告诉我们，两个平面相交，交集是直线。比如，裁纸刀的刀面是平的，切在纸上，将纸面分成两部分，裁痕是直的。我们把这个性质用公理描述为：

公理 4. 交面公理 两个平面如果有交集，则交集至少包含两个不重合的点。

交面公理说明，两个平面不可能只交于一点。如果它们有两个（不重合的）公共点，那么根据平直公理，两平面的交集包括过这两点的直线。而如果两平面的交集中还有不属于这条直线的第三点，那么根据平面公理，这三点确定一个平面，于是两平面重合。

综上所述，从交面公理可以推出：要么两平面没有公共点，要么交集为一条直线 l，称为两平面相交于直线 l；要么两平面重合。

有了交面公理，我们可以证明空间中平行直线的递推性质。由于证明繁琐，有些地方把它当作公理引入。

定理 1.1.4. 如果直线 l_1, l_2 都平行于直线 m，那么 l_1, l_2 平行或重合。

证明： 设 l_1, m 确定的平面为 γ_1，l_2, m 确定的平面为 γ_2。分两种情况讨论：

1. γ_1, γ_2 重合。那么 l_1, l_2, m 都在此平面上。根据平面直线的结论，l_1, l_2 平行或重合。

2. γ_1, γ_2 不重合。于是 $\gamma_1 \cap \gamma_2 = m$。取 l_1 上一点 P，P 与 l_2 确定平面 β。$l_2 \notin \gamma_1$，所以 β, γ_1 不重合。设 $\beta \cap \gamma_1 = n$。

首先证明 $n \mathbin{/\!/} l_2$。反设 n 交 l_2 于点 Q，则 $Q \in \gamma_1 \cap \gamma_2 = m$，于是 $Q \in m \cap l_2$。这与 $m \mathbin{/\!/} l_2$ 矛盾。因此 $n \mathbin{/\!/} l_2$。

再证明 $n \mathbin{/\!/} m$。反设 n 交 m 于点 Q，则过 Q 有 $m \mathbin{/\!/} l_2$ 和 $n \mathbin{/\!/} l_2$，于是 $n = m$。但 $P \in n$，因此 $P \in m \cap l_1$，这与 $m \mathbin{/\!/} l_1$ 矛盾。因此 $n \mathbin{/\!/} m$。

n 与 l_1 都平行于 m，且有公共点 P，所以 $n = l_1$。所以 $l_1 \mathbin{/\!/} l_2$。 □

接下来回顾直线与平面的关系。从补充后的平行公理，可以得出直线与平面平行的判定方法：

定理 1.1.5. 如果平面 α 中有直线 m 平行于直线 l，那么 l 平行于平面 α 或在 α 中。

证明： 设直线 l 平行于平面 α 中的某直线 m。记 l, m 确定的平面为 β。则要么 $\alpha = \beta$，要么 $\alpha \cap \beta = m$。如果 $\alpha = \beta$，那么 $l \subset \alpha$。如果 $\alpha \cap \beta = m$，那么 $\alpha \cap l = \beta \cap \alpha \cap l = m \cap l = \varnothing$，即 $\alpha \mathbin{/\!/} l$。 □

定理 1.1.6. 如果直线 l 与平面 α 平行，那么经过 l 的任意平面，若与 α 相交，其交线也与 l 平行。

证明： 设经过 l 的平面 γ 与 α 交于直线 m。一方面，m,l 共面；另一方面 $m \in \alpha$，因此 m,l 无公共点。这说明 $m \mathbin{/\!/} l$。 □ 从这些结论可以继续推出：

定理 1.1.7. 若直线 l 与平面 α 平行，过 α 中任一点作 l 的平行线 m，则 m 在平面 α 中。

证明： 若直线 l 与平面 α 平行，设它和 α 中任一点 P 确定的平面为 β，则 β 与 α 相交。设交线为 m，则 $P \in m$。根据定理 1.1.6，$l \mathbin{/\!/} m$。这就说明，过 P 而平行于 l 的直线在 α 中。 □

定理 1.1.8. 直线 l 与直线 m 平行，则过 m 的平面要么与 l 平行，要么经过 l。

证明： 给定过 m 的平面 α，$m \subset \alpha$ 与 l 平行，所以根据定理 1.1.5，l 平行于平面 α 或在 α 中。 □

直线与平面的平行关系，也有传递性。

定理 1.1.9. 若直线 l_1 与直线 l_2 平行，且与平面 γ 平行，则 l_2 与 γ 平行或在 γ 中。

证明： $l_1 \mathbin{/\!/} \gamma$。过 γ 中任一点作直线 $n \mathbin{/\!/} l_1$，则根据定理 1.1.7，n 在 γ 中。$n \mathbin{/\!/} l_1$，$l_1 \mathbin{/\!/} l_2$，所以根据定理 1.1.4，$n \mathbin{/\!/} l_2$。根据定理 1.1.5，$l_2 \mathbin{/\!/} \gamma$ 或在 γ 中。 □

上面提到，两平面要么无公共点，要么相交，要么重合。我们把无公共点的平面称为平行平面，也用 $/\!/$ 表记。平面中，平行公理告诉我们，过直线外一点，恰有一条直线与之平行。空间中的平面，也有类似的结论：

定理 1.1.10. 过平面外一点，恰有一平面与之平行。

证明： 设平面 α 外有点 P。在 α 上选一点 A，过 A 作两相交直线 l, m（交点为 A）。根据平行公理，过 P 恰有直线 l', m' 分别与 l, m 平行。l', m' 相交于点 P，确定平面 α'。下面证明 α, α' 无公共点，即 $\alpha' \mathbin{/\mkern-5mu/} \alpha$。

反设 α, α' 有公共点。由于 $P \in \alpha'$ 在 α 外，两者不重合。因此根据交面公理，$\alpha \cap \alpha'$ 是一条直线，记为 n。l, m, n 共面，l, m 相交，因此 l, m 中至少有一条与 n 相交。设 l 与 n 相交，交点为 Q，则 $Q \in n \subset \alpha'$。又因为 $l \mathbin{/\mkern-5mu/} l'$，$Q \in l$，所以 $Q \notin l'$，因而在 α' 中，过 Q 可作 l' 的平行线。但这条线在 α' 中，因此不是 l。这与平行公理矛盾。

因此，α, α' 无公共点，$\alpha' \mathbin{/\mkern-5mu/} \alpha$。 □

类似的结论还有：

定理 1.1.11. 过平行于平面 α 的一直线 l，恰有一平面与 α 平行。

证明： 在 l 上任取一点 P，$P \notin \alpha$，因此根据定理 1.1，过 P 恰有一平面 β 与 α 平行，只需证明 β 经过 l。在 α 中任取一点 Q，则根据定理 1.1.7，过 Q 平行于 l 的直线 m 在 α 中。β 与 α 平行，也就是说 β 与 α 无公共点，所以 β 与 α 的子集 m 也无公共点，即 $m \mathbin{/\mkern-5mu/} \beta$。过 P 作 m 的平行线，则根据定理 1.1.7，平行线在 β 中。而这条平行线就是 l，所以 l 在 β 中。这说明过 l 恰有一平面 β 与 α 平行。 □

从证明中，我们还可以提炼出判定平面平行（或重合）的准则：

定理 1.1.12. 给定平面 γ_1, γ_2。设 l, m 为 γ_1 中的相交直线。若 γ_2 中有直线 l', m' 分别与 l, m 平行或重合，则平面 γ_1, γ_2 平行或重合。

证明： 两平面要么相互平行，要么重合，要么相交于一直线。反设 γ_1, γ_2 相交于直线 n。

如果 $l = l'$，那么 $l \subset \gamma_1 \cap \gamma_2$，于是 $n = l = l'$。设 m, l 交于点 P，m', l' 交于点 Q。如果 $P = Q$，那么 $m = m'$，于是 γ_1、γ_2 都是 l, m 确定的平面，$\gamma_1 = \gamma_2$。如果 $P \neq Q$，那么 $P \notin m'$。但 $P \in l = n \subset \gamma_2$，因此过 P 作 m' 的平行线，平行线应该在 γ_2 中，因此根据平行公理，m 在 γ_2 中。这说明 γ_1、γ_2 都是 l, m 确定的平面，$\gamma_1 = \gamma_2$。于是总有两平面重合，矛盾。

如果 $l \mathbin{/\mkern-6mu/} l'$，由于 l, m, n 共面，且 l, m 相交，因此 l, m 中至少有一条与 n 相交。设 l 与 n 相交，交点为 Q，则 $Q \in n \subset \gamma_2$。又因为 $l \mathbin{/\mkern-6mu/} l'$，$Q \in l$，所以 $Q \notin l'$。在 γ_2 中，过 Q 可作 l' 的平行线。但这条线在 γ_2 中，因此不是 l。这与平行公理矛盾。

因此，平面 γ_1, γ_2 平行或重合。 □ 平行平面之间，也有类似平行直线的传递性。

定理 1.1.13. 如果平面 γ_1, γ_2 都平行于平面 β，那么 γ_1, γ_2 平行或重合。

我们先证明一个小结论：

定理 1.1.14. 设平面 $\gamma_1 \mathbin{/\mkern-6mu/} \gamma_2$。平面 β 与 γ_1, γ_2 相交于直线 l_1, l_2，则 $l_1 \mathbin{/\mkern-6mu/} l_2$。

证明： 一方面，l_1, l_2 共面。另一方面，$\gamma_1 \mathbin{/\mkern-6mu/} \gamma_2$ 说明 l_1, l_2 无公共点。所以 $l_1 \mathbin{/\mkern-6mu/} l_2$。□ 从这个结论还可以推出：如果平面 $\gamma_1 \mathbin{/\mkern-6mu/} \gamma_2$，那么对 γ_1 中任意直线，过 γ_2 中任一点，作它的平行线，平行线都在 γ_2 中。

再来证明定理 1.1.13。

证明： 已知平面 γ_1, γ_2 都平行于平面 β。在 β 中找一点 P，过 P 作相交直线 l, m。在 γ_1 中找一点 Q，过 Q 分别作 l, m 的平行线 l_1, m_1，则 l_1, m_1 都在 γ_1 中。它们分别是平面 γ_1 与 l, Q 确定的平面 α_1、平面 γ_1 与 m, Q 确定的平面 α_2 的交线。设 α_1, α_2 分别与 γ_2 交于 l_2, m_2，由于 $\gamma_2 \mathbin{/\mkern-6mu/} \beta$，所以根据定理 1.1.6，$l_2 \mathbin{/\mkern-6mu/} l$，$m_2 \mathbin{/\mkern-6mu/} m$。因此根据定理 1.1.4，$l_2$ 与 l_1 平行或重合，m_2 与 m_1 平行或重合。根据定理 1.1.12，γ_1、γ_2 平行或重合。 □

最后，我们还可以得到：

定理 1.1.15. 若平面 γ_1 与直线 l 平行，且与平面 γ_2 平行，则 l 与 γ_2 平行或在 γ_2 中。

证明： $l \mathbin{/\mkern-5mu/} \gamma_1$，所以过 l 恰有一平面 β 与 γ_1 平行。如果 $\beta = \gamma_2$，则 $l \subset \gamma_2$。如果 $\beta \mathbin{/\mkern-5mu/} \gamma_2$，那么 $l \mathbin{/\mkern-5mu/} \gamma_2$。如果 β 与 γ_2 相交于直线 m，那么由于 m,l 共面且无公共点，$m \mathbin{/\mkern-5mu/} l$。于是，根据定理 1.1.5，$l \mathbin{/\mkern-5mu/} \gamma_2$ 或在 γ_2 中。 □

总结：

我们初步建立了关于空间形状的公理体系，引入了空间中平面的概念，并界定了点、直线和平面的关系：

1. 直线和平面都是点的集合。
2. 直线可能与平面平行、相交，或在平面中。
3. 直线可能与直线异面、平行、相交、重合。
4. 平面可能与平面平行、相交、重合。
5. 直线与直线相交于一点，直线与平面相交于一点，平面与平面相交于一直线。

思考 1.1.1.

1. 定理 *1.1.15*的证明中，我们讨论了 β 与 γ_2 相交于直线 m 的情形。实际上 β 是否会与 γ_2 相交？如何看待这个论证？

习题 1.1.1.

1. 如果直线 l 与直线 m 平行，那么过 l 的平面与过 m 的平面要么平行，要么重合，要么交于 l,m 之一，要么交于与 l,m 都平行的直线 n。

1.2 空间向量

上一节中，我们使用公理体系讨论空间中的形状。可以看到，使用公理体系讨论虽然严谨，但过于抽象，步骤繁琐。仅处理点线面的平行关系，就需要大量的篇幅。为此，我们尝试用向量的概念来讨论空间中的形状。

平面中，我们用向量表示点，以及原点到此点的平移。现在我们把向量的概念扩展到空间中。我们把空间看作集合，记为 $\mathbb{V}$，其中的元素称为向量或点。向量满足如下规则：

1. 加法结合律：$\forall\ \mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\in\mathbb{V}$，$\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})=(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}$。
2. 加法交换律：$\forall\ \mathbf{a},\mathbf{b}\in\mathbb{V}$，$\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}$。
3. 存在零向量：$\forall\ \mathbf{a}\in\mathbb{V}$，$\mathbf{a}+\mathbf{0}=\mathbf{a}$。
4. 放缩和四则运算相容：$\forall\ \mathbf{a}\in\mathbb{V}$，$1\cdot\mathbf{a}=\mathbf{a}$。$\forall s,t\in\mathbb{R}$，$(s+t)\cdot\mathbf{a}=(s\cdot\mathbf{a})+(t\cdot\mathbf{a})$，$(s\cdot t)\cdot\mathbf{a}=s\cdot(t\cdot\mathbf{a})$。
5. 放缩和平移相容：$\forall\ \mathbf{a},\mathbf{b}\in\mathbb{V}$，$\forall\ t\in\mathbb{R}$，$t\cdot(\mathbf{a}+\mathbf{b})=t\cdot\mathbf{a}+t\cdot\mathbf{b}$。

这个定义与平面向量相同。在此基础上，我们用同样的方式定义直线、线段和射线。

定义 1.2.1. 过原点的直线是非零向量放缩得到的集合。不过原点的直线是过原点的直线按一点平移得到的集合。

给定非零向量 $A=\mathbf{a}$，$\{t\mathbf{a}\,|\,t\in\mathbb{R}\}$ 是一条过原点 O 和 A 的直线 OA，称为 A **引出**的直线，记为 $\mathbb{R}\mathbf{a}$。$\mathbf{a}$ 称为直线的**方向向量**。给定向量 $B=\mathbf{b}$，$\{t\mathbf{a}+\mathbf{b}\,|\,t\in\mathbb{R}\}$ 是一条方向 $\mathbf{a}$ 且经过 B 的直线，记为 $\mathbb{R}\mathbf{a}+\mathbf{b}$，其中 $\mathbb{R}\mathbf{a}$ 称为它的**线性部分**；而 $\{t\mathbf{a}+(1-t)\mathbf{b}\,|\,t\in\mathbb{R}\}$ 就是直线 AB。

给定非零向量 $\mathbf{a}$，如果向量 $\mathbf{b}$ 可以通过 $\mathbf{a}$ 放缩得到，或者说 $\mathbf{b}\in\mathbb{R}\mathbf{a}$，就称两者**共线**。

类比可以定义线段和射线：给定非零向量 $A=\mathbf{a}$ 和向量 $B=\mathbf{b}$，$\{(1-t)\mathbf{a}+t\mathbf{b}\,|\,t\in[0,1]\}$ 是线段 AB，$\{(1-t)\mathbf{a}+t\mathbf{b}\,|\,t\geqslant 0\}$ 是射线 AB。

空间向量与平面向量的唯一不同的地方在于，空间向量遵循的不再是平面的根本性质，而是空间的根本性质。为了描述空间的根本性质，我们首先引进线性相关的概念:

定义 1.2.2. 给定 n 个向量 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_n$，对实数 $t_1, t_2, \cdots, t_n$ 来说，$t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + \cdots + t_1\mathbf{a}_n$ 称为这 n 个向量的**线性组合**。如果存在一组不全为零的实数 $t_1, t_2, \cdots, t_n$，使得线性组合 $t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + \cdots + t_1\mathbf{a}_n$ 是零向量，就说这 n 个向量**线性相关**。如果不存在这样一组实数，就说这 n 个向量**线性无关**。

举例来说，单个非零向量总是线性无关的，因为非零实数乘以非零向量总得到非零向量。又如：如果有不全为零的实数 t_1, t_2 使得向量 A, B 的线性组合：$t_1A + t_2B$ 等于零向量，就说 A, B 线性相关。

具体来说，设 $A = 2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$，$B = -6\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2$，那么

$$3A + B = \mathbf{0}.$$

也就是说，选取 $t_1 = 3$，$t_2 = 1$，就使得线性组合：$t_1A + t_2B$ 等于零向量。因此，以上两个向量 A, B 线性相关。

设 $A = 2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$，$B = \mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2$，那么对任何 t_1, t_2，线性组合 $t_1A + t_2B$ 可以写为:

$$\begin{aligned} t_1A + t_2B &= t_1(2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2) + t_2(\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2) \\ &= (2t_1 + t_2)\mathbf{e}_1 + (-t_1 + 3t_2)\mathbf{e}_2. \end{aligned}$$

要使得 $t_1A + t_2B$ 为零向量 $(0, 0)$，就要求它的横坐标和纵坐标同时为零。也就是说，t_1, t_2 应该是二元一次方程组

$$\begin{cases} 2t_1 + t_2 &= 0 \\ -t_1 + 3t_2 &= 0 \end{cases}$$

的解。解这个二元一次方程组，得到 $t_1 = t_2 = 0$。也就是说，不存在不全为零的实数 t_1, t_2，使得线性组合 $t_1A + t_2B$ 为零向量。我们说 A, B 线性无关。

以上的例子也给出了判断一组向量是否线性相关的方法。我们将“线性组合 $t_1\mathbf{a}_1+t_2\mathbf{a}_2+\cdots+t_1\mathbf{a}_n$ 是零向量”的条件转化为关于 $t_1,t_2,\cdots,t_n$ 的多元一次方程组。如果方程组的解集中有不全为零的解，这组向量就线性相关。如果方程组没有不全为零的解，就说这组向量线性无关。

直观来看，两个平面向量线性相关和共线是一回事。A,B 线性相关，就是说有有不全为零的实数 t_1,t_2 使得 t_1A+t_2B 等于零向量。不妨设 t_1 不为零，那么 $A=\frac{t_2}{t_1}B$，因此 $A\in\mathbb{R}B$，即 A,B 共线。反之亦然。平面的根本性质告诉我们，存在两个不共线的向量，也就是说，不多于两个平面向量，可以线性无关。

如果向量多于两个，平面的根本性质告诉我们，只要其中两个向量 A,B 不共线，其余的向量都可以都可以表示成 $sA+tB$ 的形式。因此，设有平面向量 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n$。如果 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2$ 不共线，那么它们线性相关，存在 $t_1\mathbf{a}_1+t_2\mathbf{a}_2=\mathbf{0}$。于是

$$t_1\mathbf{a}_1+t_2\mathbf{a}_2+\sum_{i>2}0\cdot\mathbf{a}_i=\mathbf{0}.$$

如果 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2$ 不共线，那么根据平面的根本性质，$\mathbf{a}_3$ 可以写成：

$$\mathbf{a}_3=s\mathbf{a}_1+t\mathbf{a}_2.$$

于是

$$s\mathbf{a}_1+t\mathbf{a}_2-1\cdot\mathbf{a}_3+\sum_{i>3}0\cdot\mathbf{a}_i=\mathbf{0}.$$

也就是说，多于两个平面向量总线性相关。

这个结论反映了平面向量的本质：可以选出两个向量，所有向量都可以从它们开始，通过平移、放缩得到。这两个向量叫作平面的基底。而空间中的点显然不一定在同一个平面里。我们把平面的根本性质替换为**空间的根本性质**：

1. 给定一个非零向量，总能找到另一个向量，使得两者线性无关。
2. 给定两个线性无关的向量，总能找到另一个向量，使得三者线性无关。

3. 从线性无关的向量 A, B, C 出发，经过放缩、平移，可以得到空间中任何向量。具体来说，任何向量都可以表示成 $sA + tB + uC$ 的形式，集合 $\{sA + tB + uC \mid s, t, u \in \mathbb{R}\}$ 就是整个空间。这样的 A, B, C 称为空间的一组**基**或**基底**。

对比平面和空间的根本性质，可以发现，主要的变化是“2 变成 3”。平面中保证存在两个线性无关的向量，空间中保证存在三个线性无关的向量。按照类似的推理，我们可以得到结论：不多于三个空间向量，可以线性无关；多于三个空间向量，总是线性相关。我们把这个数字称为**维数**。平面的维数是 2，立体空间的维数是 3。

与平面向量一样，给定基底后，任一空间向量 $\mathbf{a}$ 可以唯一地写成基向量的线性组合：

$$\mathbf{a} = a_x\mathbf{e}_x + a_y\mathbf{e}_y + a_z\mathbf{e}_z.$$

其中 a_x, a_y, a_z 是实数。(a_x, a_y, a_z) 称为 $\mathbf{a}$ 的**坐标**，a_x, a_y, a_z 称为它的**坐标分量**。

于是我们可以定义立体空间中的平面：

定义 1.2.3. 过原点的平面是两个线性无关的向量通过平移、放缩得到的集合。不过原点的平面是过原点的平面按一点平移得到的集合。

给定线性无关的向量 $A = \mathbf{a}, B = \mathbf{b}$，$\{s\mathbf{a} + t\mathbf{b} \mid s, t \in \mathbb{R}\}$ 是一个过原点 O 和 A, B 的平面 OAB。给定向量 $C = \mathbf{c}$，$\{s\mathbf{a} + t\mathbf{b} + \mathbf{c} \mid s, t \in \mathbb{R}\}$ 是一条过 C 的直线；而 $\{s\mathbf{a} + t\mathbf{b} + (1 - s - t)\mathbf{c} \mid t \in \mathbb{R}\}$ 就是过 A, B, C 的平面 ABC。

来看几个具体的例子。选定空间的一组基底 $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$，我们可以构建坐标系 $Oxyz$，其中 x 轴、y 轴、z 轴分别是基向量引出的直线 $\mathbb{R}\mathbf{e}_x$、$\mathbb{R}\mathbf{e}_y$、$\mathbb{R}\mathbf{e}_z$。空间中任一点 A 的坐标是 (a_x, a_y, a_z)。x 轴、y 轴构成平面：

$$Oxy : \{s\mathbf{e}_x + t\mathbf{e}_y \mid s, t \in \mathbb{R}\}.$$

x 轴、z 轴构成平面:

$$Oxz : \{s\mathbf{e}_x + t\mathbf{e}_z \mid s, t \in \mathbb{R}\}.$$

y 轴、z 轴构成平面:

$$Oyz : \{s\mathbf{e}_y + t\mathbf{e}_z \mid s, t \in \mathbb{R}\}.$$

给定点 $A(1,0,0)$、$B(0,1,0)$、$C(0,0,1)$，则经过它们的平面为:

$$\{sA + tB + (1-s-t)C \mid t \in \mathbb{R}\} = \{(s,\, t,\, 1-s-t) \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

可以验证，这样定义的点、直线、平面符合上一节中的各个公理（见附录 B)。

思考 1.2.1.

1. 张三这样总结空间向量的特性：一个向量平移缩放得到一条直线；两个向量平移缩放可以得到一个平面；三个向量平移缩放可以得到整个空间。怎么看待这个说法?

2. 是否有维数大于 3 的空间？如何在这样的空间中定义向量？这样定义的向量和空间和 2 维、3 维的向量有什么相同和不同之处?

习题 1.2.1.

1. 证明：如果一组线性无关的向量的线性组合等于零向量，那么线性组合中每个向量的系数都是 0。

2. 证明：给定空间一组基底，空间中每个向量都可以唯一写成基向量的线性组合。

3. 判断以下向量是否线性相关:

①. $(1,2,3)$，$(4,5,6)$，$(7,8,9)$ ②. $(1,0,-1)$，$(1,2,0)$ $(-2,2,3)$

③. $(2,1,-1)$，$(2,-5,-7)$，$(1,-1,-2)$ ④. $(a,0,b)$，$(b,-a,0)$ $(a,b,0)$

4. 已知直线 $\mathbb{R}\mathbf{a} + \mathbf{b}$ 和直线外一点 P，如何表示它们确定的平面?

5. 一直两条直线相交于点 P，方向向量分别是 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$，如何表示这两条

直线，以及它们确定的平面?

6. 设有向量 $\mathbf{a}=(0,1,1)$、$\mathbf{b}=(2,-1,0)$、$\mathbf{c}=(1,1,-1)$。平面 $\gamma=\{s\mathbf{a}+t\mathbf{b}+\mathbf{c}\,|\,s,t,\in\mathbb{R}\}$。

6.1. 判断点 $(5,1,-2)$、$(3,2,1)$、$(0,5,0)$ 是否在平面上。

6.2. 点 $(1,0,0)+u(0,-1,3)$ 在平面 γ 中，求它的坐标。

6.3. 直线 l 在平面 γ 中，证明：它的方向向量是 $\mathbf{a},\mathbf{b}$ 的线性组合。

1.3　长度和角度

我们可以通过向量引进空间中距离和长度的概念。和平面中一样，我们选定空间的一组基底 $\mathbf{e}_x,\mathbf{e}_y,\mathbf{e}_z$，然后定义内积:

$$\forall A=a_x\mathbf{e}_x+a_y\mathbf{e}_y+a_z\mathbf{e}_z,\ B=b_x\mathbf{e}_x+b_y\mathbf{e}_y+b_z\mathbf{e}_z,$$
$$A\cdot B=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z.$$

如果向量 A,B 的内积等于 0，就说它们垂直。我们定义向量 A 的长度为

$$\|A\|=\sqrt{A\cdot A}=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2},$$

长度为 1 的向量称为**单位向量**。任何非零向量除以自己的长度，都得到一个与自己共线的单位向量。我们把这个操作称为**向量的归一**。

两点 A,B 之间的距离就是

$$\|A-B\|=\sqrt{(A-B)\cdot(A-B)}=\sqrt{(a_x-b_x)^2+(a_y-b_y)^2+(a_z-b_z)^2}.$$

平面向量的内积，小于等于长度之积。空间向量也有类似的性质:

$$\begin{aligned}&(a_x^2+a_y^2+a_z^2)(b_x^2+b_y^2+b_z^2)\\=\ &(a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z)^2+(a_xb_y-a_yb_x)^2+(a_xb_z-a_zb_x)^2+(a_yb_z-a_zb_y)^2\\\geqslant\ &(a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z)^2\end{aligned}$$

这个不等式也称为**内积不等式**。由此，类比平面向量，我们可以定义**空间向量的夹角**：

$$\cos\angle AOB = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{(a_x^2 + a_y^2 + a_z^2)(b_x^2 + b_y^2 + b_z^2)}}$$

直线是非零向量放缩的结果，所以，我们可以定义空间中两条直线的夹角为引出它们的向量的夹角。

向量 A, B 垂直时，$\cos\angle AOB = 0$，即夹角为 90°。向量夹角为 0°、180° 时，两向量共线，两直线同向或反向。要注意的是，空间中，我们无法定义两向量夹角的方向。

思考 1.3.1.

1. 内积不等式取等号的条件是什么？如何从直观上理解？

2. 平面中，向量夹角的正弦与向量长度的乘积对应着向量的面积。立体空间中，是否可以作类似的定义？如何从直观上理解？

习题 1.3.1.

1. 已知向量 $A(-1, 3, 1)$、$B(1, 2, 0)$，求它们的长度、内积和夹角。它们是否垂直？

2. 已知向量 $A(-2.4, 0, 1)$、$B(0.5, 1, 1.2)$，求它们的长度、内积和夹角。它们是否垂直？

3. 已知直线 $l_1 : \mathbb{R}(1, 2, -2.5)+(0, -1, -1)$、$l_2 : \mathbb{R}(2, 0, 0.8)+(-2.5, 1.1, 1.7)$，求两直线的夹角。它们是否垂直？是否有公共点？

4. 已知向量 $A(2, 0, 1)$，求与 A 夹角为 60° 的单位向量。

1.4 垂直和投影

通过内积，我们已经定义了空间向量以及直线间的垂直关系。下面来看直线与平面的垂直关系。直线与平面垂直，是直线与平面相交的特殊情形。

定义 1.4.1. 给定直线 l 和平面 γ，如果 γ 中任意直线都与 l 垂直，就说平面 γ 与 l 垂直。

给定了直线和平面，如何判定它们垂直呢？我们从以下基本性质出发：

定理 1.4.1. 如果向量 $\mathbf{a}$ 垂直于另两个向量 $\mathbf{u}, \mathbf{v}$，那么 $\mathbf{a}$ 也与 $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ 的任何线性组合垂直。

证明： 如果 $\mathbf{a} \perp \mathbf{u}$、$\mathbf{a} \perp \mathbf{v}$，按照定义，

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{v} = 0.$$

于是

$$\begin{aligned} &\forall s, t \in \mathbb{R} \\ \mathbf{a} \cdot (s\mathbf{u} + t\mathbf{v}) &= s\mathbf{a} \cdot \mathbf{u} + t\mathbf{a} \cdot \mathbf{v} \\ &= 0. \end{aligned}$$

□ 给定直线 l 和平面 γ 中两条相交直线。设 l 的方向向量为 $\mathbf{a}$，两条相交直线相交于点 P，方向向量为线性无关的向量：$\mathbf{u}, \mathbf{v}$，那么 γ 可以表示成

$$\gamma = \{s\mathbf{u} + t\mathbf{v} + P \mid s, t \in \mathbb{R}\}.$$

因此，γ 中任一直线的方向向量总是 $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ 的线性组合。如果 $\mathbf{a}$ 垂直于 $\mathbf{u}, \mathbf{v}$，那么根据定理 1.4.1，l 垂直于 γ 中任一直线，因而垂直于平面 γ。我们可以把这个结论总结为：

定理 1.4.2. 直线与平面垂直，当且仅当它垂直于平面中两条相交直线。

接下来我们自然要问：给定了平面，是否有与它垂直的直线呢？

从以上的讨论来看，关键是找到与平面中两个线性无关的向量都垂直的向量。

首先来看平面中的情况。给定非零平面向量 A，是否有（非零）向量与它垂直？根据平面的根本性质，总存在与 A 不共线的向量 B。但 B 不一定与 A 垂直。下面我们从 B 出发，找一个与 A 垂直的非零向量。

直观上，向量 A, B 确定一个平行四边形，我们将它沿着 A 的方向"平推"，可以把它"扶正"，变成一个矩形。矩形的另一边就和 A 垂直了。把这个想法用向量表示，我们考虑向量 $B' = B + uA$，其中 $u \in \mathbb{R}$ 是系数。B' 是 B 沿 A 方向移动得到的。我们希望 $B' \perp A$，即内积为 0:

$$A \cdot B = A \cdot (B + uA) = 0$$

解得 $u = -\frac{A\cdot B}{A\cdot A}$。这样我们就找到了垂直于 A 的非零向量 $B' = B - \frac{A\cdot B}{A\cdot A}A$。

直观来看，过 B 作直线 OA 的垂线，设垂足为 P，则 $\frac{A\cdot B}{A\cdot A}A$ 就是向量 OP。如果想象 OA 为水平线，线段 OB 是一根杆子，那么线段 OP 可以看成 OB 在竖直照射的阳光下的影子。我们把向量 $\overrightarrow{OP}$ 称为向量 $\overrightarrow{OB}$ 在直线 OA 上的投影。严格的定义如下:

定义 1.4.2. 给定向量 $\mathbf{a}$ 和向量集合 S。如果向量 $\mathbf{y} \in S$ 使得 $\mathbf{a} - \mathbf{y}$ 垂直于 S 中所有向量，就说 $\mathbf{y}$ 是 $\mathbf{a}$ 在 S 中的**投影**，$\mathbf{a} - \mathbf{y}$ 是 $\mathbf{a}$ 关于 S 的**修正**。

按照严格的定义，向量 $\overrightarrow{OP}$ 就是向量 $\overrightarrow{OB}$ 在直线 OA 中的投影。从 $\overrightarrow{OB}$ 中减去它在直线 OA 上的投影，得到垂直于 $\overrightarrow{OA}$ 的向量（或者说关于直线 OA 的修正），这种方法叫做**消影法**。

我们可以进一步将 A 和 B' 分别归一，就得到两个相互垂直的单位向量。我们把这样两个向量称为平面的**正交归一基**。注意到 A, B 是平面的一组基底。从 A, B 出发得到正交归一基，这个过程称为**基底的正交归一**。

空间的根本性质告诉我们，给定两个线性无关的向量 A, B，总有向量 C 使得 A, B, C 为空间的基底。我们尝试用消影法将它正交归一，得到空间的正交归一基 $A_1, B_1, \mathbf{n}$，然后证明 $\mathbf{n}$ 与 A, B 垂直。

根据已知条件，A, B 确定一个平面 γ，而且是平面 γ 的基底。用消影

法将 A, B 正交归一，得到平面 γ 的正交归一基 A_1, B_1。然后再次使用消影法。这次我们要消去 C 在平面 γ 中的投影。考虑向量 $C_1 = C + uA_1 + vB_1$，其中 u, v 是未知系数。我们希望 C_1 与 A_1, B_1 垂直。分别计算内积 $A_1 \cdot C_1$、$B_1 \cdot C_1$，两者都应当等于 0。于是得到关于 u, v 的方程组:

$$\begin{cases} A_1 \cdot C + u\|A_1\|^2 + vA_1 \cdot B & = 0 \\ B_1 \cdot C + uA_1 \cdot B + v\|B_1\|^2 & = 0 \end{cases}$$

A_1, B_1 为正交归一基，所以 $A_1 \cdot B_1 = 0$，$\|A_1\|^2 = \|B_1\|^2 = 1$。因而解得:

$$\begin{cases} u & = -A_1 \cdot C \\ v & = -B_1 \cdot C \end{cases}$$

这样我们就得到了与 A_1, B_1 都垂直的向量

$$C_1 = C - (A_1 \cdot C)A_1 - (B_1 \cdot C)B_1.$$

它是从 C 中去掉它在平面 γ 中的投影 $(A_1 \cdot C)A_1 + (B_1 \cdot C)B_1$ 得到的。将它归一，就得到垂直于 A_1, B_1 的单位向量：$\mathbf{n} = \frac{C_1}{\|C_1\|}$ 。于是我们得到了空间的正交归一基：$A_1, B_1, \mathbf{n}$。

A_1, B_1 是 A, B 确定的平面的正交归一基，所以 A, B 可以表示为 A_1, B_1 的线性组合。$\mathbf{n}$ 与 A_1, B_1 都垂直，因此也垂直于它们的线性组合 A, B。于是我们得到结论:

定理 1.4.3. 给定两个线性无关的向量 A, B，存在非零向量 $\mathbf{n}$ 与它们都垂直。

任何平面总由两个线性无关的向量确定。平面 $\gamma : \{sA + tB + C \mid s, t \in \mathbb{R}\}$，则存在单位向量 $\mathbf{n}$ 与 A, B 都垂直。我们称向量 $\mathbf{n}$ 为 γ 的法向量。以法向量为方向向量的直线，就与平面垂直。这样，我们就找到了与平面垂直的直线。

与同一平面垂直的直线有什么共同特征呢？从前面的推导还可以得出：所有与 A, B 都垂直的向量共线。

在前面的推导中，我们知道 $A_1, B_1, \mathbf{n}$ 是空间的基底。因此，空间中任何向量 $\mathbf{w}$ 可以分解为:

$$\mathbf{w} = w_A A_1 + w_B B_1 + w_n \mathbf{n}.$$

如果它与 A, B 都垂直，那么也垂直于它们的线性组合：A_1, B_1。计算它与 A_1, B_1 的内积，得到:

$$0 = \mathbf{w} \cdot A_1 w_A \|A_1\|^2 = w_A,$$
$$0 = \mathbf{w} \cdot B_1 w_B \|B_1\|^2 = w_B,$$

这说明 $\mathbf{w} = w_n \mathbf{n}$，与 $\mathbf{n}$ 共线。或者说，所有与 A, B 都垂直的向量的集合是 $\mathbb{R}\mathbf{n}$。

所有与 A, B 都垂直的向量共线，因此都在 $\mathbb{R}\mathbf{n}$ 上。因此，垂直于 A, B 确定的平面的直线，其方向向量总在 $\mathbb{R}\mathbf{n}$ 上。换句话说，

定理 1.4.4. 垂直于同一平面的直线平行或重合。

给定空间中一点 P 和平面 γ，在 γ 上任取一点 O，引出两个线性无关的向量 OA, OB，于是有单位向量 $\mathbf{n}$ 与它们都垂直，于是 $\mathbb{R}\mathbf{n} + P$ 是过 P 且垂直于 γ 的直线。另一方面，如果过 P 的直线 $\mathbb{R}\mathbf{m} + P$ 垂直于 γ，那么它 $\mathbf{m}$ 垂直于 OA, OB。于是 $\mathbf{n}$ 与 $\mathbf{m}$ 共线，$\mathbb{R}\mathbf{m} + P$ 就是直线 $\mathbb{R}\mathbf{n} + P$。也就是说，

定理 1.4.5. 过一点恰有一条直线与给定平面垂直。

考虑两条异面直线，它们的方向向量线性无关。因此，我们也可以用定理 1.4.3讨论与它们都垂直的直线。

设有异面直线 $l_1 : \mathbb{R}\mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_1$、$l_2 : \mathbb{R}\mathbf{a}_2 + \mathbf{b}_2$，其中 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ 是单位向量。按照定义，$\mathbf{a}_1$ 和 $\mathbf{a}_2$ 线性无关。根据定理 1.4.3，有单位向量 $\mathbf{n}$ 与它们都垂直。考虑以 $\mathbf{n}$ 为方向的直线 m，m 与 l_1, l_2 都垂直。如果 m 与 l_1, l_2 都相交，就说 m 是 l_1, l_2 的**公垂线**。下面我们来找出 l_1, l_2 的公垂线。

我们把 m 表示成 $m:\mathbb{R}\mathbf{n}+r_1\mathbf{a}_1+r_2\mathbf{a}_2$，设 m 与 l_1,l_2 的交点分别是：

$$P_1=t_1\mathbf{a}_1+\mathbf{b}_1=s_1\mathbf{n}+r_1\mathbf{a}_1+r_2\mathbf{a}_2$$
$$P_2=t_2\mathbf{a}_2+\mathbf{b}_2=s_2\mathbf{n}+r_1\mathbf{a}_1+r_2\mathbf{a}_2$$

两点分别与 $\mathbf{a_1},\mathbf{a}_2,\mathbf{n}$ 求内积，得到：

$$\begin{cases} t_1+\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{b}_1 & =r_1+r_2\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{a}_2\\ t_1\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{a}_2+\mathbf{a}_2\cdot\mathbf{b}_1 & =r_1\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{a}_2+r_2\\ t_2+\mathbf{a}_2\cdot\mathbf{b}_2 & =r_1\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{a}_2+r_2\\ t_2\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{a}_2+\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{b}_2 & =r_1+r_2\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{a}_2\\ \mathbf{n}\cdot\mathbf{b}_1 & =s_1\\ \mathbf{n}\cdot\mathbf{b}_2 & =s_2 \end{cases}$$

从前 4 个方程可以求出 t_1,t_2,r_1,r_2 唯一的一组解，于是可以得到直线 m，也就是说，异面直线 l_1,l_2 总有唯一的公垂线。我们称线段 P_1P_2 为 l_1,l_2 的**公垂线段**。

向量 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 与 $\mathbf{n}$ 共线。从后两个方程可以解出 s_1,s_2，因此线段 P_1P_2 的长度是：

$$\begin{aligned}|P_1P_2|=\|P_2-P_1\|&=\|s_1\mathbf{n}+r_1\mathbf{a}_1+r_2\mathbf{a}_2-(s_2\mathbf{n}+r_1\mathbf{a}_1+r_2\mathbf{a}_2)\|\\&=\|(s_1-s_2)\mathbf{n}\|\\&=|\mathbf{n}\cdot(\mathbf{b}_1-\mathbf{b}_2)|.\end{aligned}$$

在 l_1,l_2 上各取一点：$Q_1=P_1+q_1\mathbf{a_1}$、$Q_2=P_2+q_2\mathbf{a}_2$，则：

$$\overrightarrow{Q_1Q_2}=P_2+q_2\mathbf{a}_2-(P_1+q_1\mathbf{a_1})=\overrightarrow{P_1P_2}+(q_2\mathbf{a}_2-q_1\mathbf{a_1}).$$

而 $\overrightarrow{P_1P_2}=(s_1-s_2)\mathbf{n}\perp q_2\mathbf{a}_2-q_1\mathbf{a_1}$，所以，根据勾股定理，

$$|Q_1Q_2|^2=|P_1P_2|^2+\|q_2\mathbf{a}_2-q_1\mathbf{a_1}\|^2\geqslant|P_1P_2|^2.$$

这说明 l_1 上的点到 l_2 上的点的距离总大于等于 $|P_1P_2|$。我们把 $|P_1P_2|$ 称为**异面直线的距离**。

给定平面，总有与它垂直的直线。反过来，给定一条直线，是否有与它垂直的平面呢？设直线的方向向量为 $\mathbf{n}$，我们来看与它垂直的向量有什么共同特征。

定理 1.4.6. 所有与非零向量 $\mathbf{n}$ 垂直的向量构成一个过原点的平面。

证明： 设 $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)$ 是非零向量，所以 n_x, n_y, n_z 不全为零。设 $n_x \neq 0$，则向量 $P_1(-n_y, n_x, 0)$ 和 $P_2(-n_z, 0, n_x)$ 都垂直于 $\mathbf{n}$。容易验证 P_1, P_2 线性无关，因此它们确定的平面 γ 垂直于 $\mathbf{n}$。

另一方面，设 P 与非零向量 $\mathbf{n}$ 垂直，下面证明 P 在平面 γ 中。

可以验证 $P_1, P_2, \mathbf{n}$ 线性无关，因此是空间的一组基底。用消影法将它正交归一，得到正交归一基 $(Q_1, Q_2, \mathbf{m})$，其中 Q_1, Q_2 是 P_1, P_2 正交归一的结果，是平面 γ 的正交归一基，$\mathbf{m}$ 是平面 γ 的法向量，因此 $\mathbf{m}$、$\mathbf{n}$ 共线。将 P 在 $Q_1, Q_2, \mathbf{m}$ 上分解：

$$P = p_1 Q_1 + p_2 Q_2 + p_m \mathbf{m}.$$

P 垂直于 $\mathbf{n}$，因此也垂直于 $\mathbf{m}$。于是 $\mathbf{m} \cdot P = 0$，即 $p_m = 0$。因此 $P = p_1 Q_1 + p_2 Q_2$ 在平面 γ 中。综上所述，所有与非零向量 $\mathbf{n}$ 垂直的向量构成过原点的平面 γ。

$\square$

给定一条直线 $l : \mathbb{R}\mathbf{a} + \mathbf{b}$ 及一点 P，与 $\mathbf{a}$ 垂直的向量构成一个过原点的平面。把该平面按 P 平移，就得到一个过 P 的平面。也就是说：

定理 1.4.7. 过一点恰有一个平面与给定直线垂直。

过空间的每一点，恰有一个平面与给定直线垂直。这些垂直于同一直线的平面，有什么特征呢？

定理 1.4.8. 垂直于同一直线的平面，相互平行或重合。

证明： 设平面 γ_1, γ_2 与直线 l 垂直，与 l 分别交于点 P_1, P_2。过 P_1 在 γ_1 中作两条直线 m_1, m_2，过 P_2 作 m_1 的平行线 n_1，$n_1 \perp l$，因此 n_1 在 γ_2 中。同理，过 P_2 作 m_2 的平行线 n_2，n_2 在 γ_2 中。因此根据定理 1.1.12，γ_1 与 γ_2 平行或重合。 □

既然垂直于同一直线的平面相互平行或重合，那么，相互平行的平面，法向量应该相同。这一点并不难证明。设平面 γ_1, γ_2 相互平行。在 γ_1 中取相交直线 $\mathbb{R}\mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_1$、$\mathbb{R}\mathbf{a}_2 + \mathbf{b}_1$，过 γ_2 中一点 $\mathbf{b}_2$ 作它们的平行线，则两条平行线都在 γ_2 中，且方向向量分别为 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$。因此，$\gamma_1, \gamma_2$ 可以写成：

$$\gamma_1 = \{s\mathbf{a}_1 + t\mathbf{a}_2 + \mathbf{b}_1 \mid s, t \in \mathbb{R}\}$$
$$\gamma_2 = \{s\mathbf{a}_1 + t\mathbf{a}_2 + \mathbf{b}_2 \mid s, t \in \mathbb{R}\}$$

它们的法向量都可从 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ 通过消影法得到，因此是同一个单位向量 $\mathbf{n}$。

考虑直线 $\mathbb{R}\mathbf{n}$ 与 γ_1, γ_2 的交点 P_1, P_2，可以得到：

$$P_1 = r_1\mathbf{n} = s_1\mathbf{a}_1 + t_1\mathbf{a}_2 + \mathbf{b}_1$$
$$P_2 = r_2\mathbf{n} = s_2\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + \mathbf{b}_2$$

类似异面直线的情况，通过对 $\mathbf{n}$ 求内积，我们得到

$$r_1 = \mathbf{n} \cdot \mathbf{b}_1$$
$$r_2 = \mathbf{n} \cdot \mathbf{b}_2$$

因此，两交点的距离为：

$$|P_1P_2| = \|r_2\mathbf{n} - r_1\mathbf{n}\| = |\mathbf{n} \cdot (\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2)|.$$

在 γ_1, γ_2 上各取一点：$Q_1 = P_1 + q_{1,1}\mathbf{a}_1 + q_{1,2}\mathbf{a}_2$、$Q_2 = P_2 + q_{2,1}\mathbf{a}_1 + q_{2,2}\mathbf{a}_2$，则：

$$\overrightarrow{Q_1Q_2} = \overrightarrow{P_1P_2} + (q_{2,1}\mathbf{a}_1 + q_{2,2}\mathbf{a}_2 - q_{1,1}\mathbf{a}_1 - q_{1,2}\mathbf{a}_2).$$

而 $\overrightarrow{P_1P_2} = (r_2 - r_1)\mathbf{n} \perp q_{2,1}\mathbf{a}_1 + q_{2,2}\mathbf{a}_2 - q_{1,1}\mathbf{a}_1 - q_{1,2}\mathbf{a}_2$，所以，根据勾股定理，

$$|Q_1Q_2|^2 = |P_1P_2|^2 + \|q_{2,1}\mathbf{a}_1 + q_{2,2}\mathbf{a}_2 - q_{1,1}\mathbf{a}_1 - q_{1,2}\mathbf{a}_2\|^2 \geqslant |P_1P_2|^2.$$

这说明 γ_1 上的点到 γ_2 上的点的距离总大于等于 $|P_1P_2|$。我们把 $|P_1P_2|$ 称为**平行平面的距离**。

设非零向量 $\mathbf{n}=(n_x,n_y,n_z)$，与它垂直的向量的集合，就是以下方程的解集。

$$n_xx+n_yy+n_zz=0.$$

任何过原点的平面，都有法向量，于是总可以写成三元一次方程的解集。因此，过原点的平面，可以用一个三元一次方程定义。

不过原点的平面，可以看作过原点平面按同一向量平移得到。如果过原点平面上的点满足方程

$$n_xx+n_yy+n_zz=0,$$

那么按向量 $B(x_b,y_b,z_b)$ 平移之后得到的点就满足方程：

$$n_x(x-x_b)+n_y(y-y_b)+n_z(z-z_b)=0. \qquad (*)$$

因此，任何平面总是某个三元一次方程的解集。反之，任何三元一次方程 $ax+by+cz+d=0$ 总能写成 $(*)$ 的形式，于是解集为某个平面。我们将 $ax+by+cz+d=0$ 称为平面的一般式，将 $(*)$ 称为平面的点法式，即经过 $B(x_b,y_b,z_b)$ 且垂直于向量 $\mathbf{n}=(n_x,n_y,n_z)$。

三元一次方程的解集是平面，因此，我们也用它来定义平面。比如，x 轴和 y 轴所在平面 Oxy 可以用方程 $z=0$ 定义，过点 $(-2,10,3)$ 并与它平行的平面可以用 $z=3$ 定义。

用方程来定义平面，可以得出更多结论。比如，考虑到空间中两点 $P_1(x_1,y_1,z_1)$ 和 $P_2(x_2,y_2,z_2)$ 相等的点 $P(x,y,z)$，这样的点满足方程：

$$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2=(x-x_2)^2+(y-y_2)^2+(z-z_2)^2.$$

方程两边消去 $x^2+y^2+z^2$，得到关于 x,y,z 的三元一次方程：

$$2(x_1-x_2)x+2(y_1-y_2)y+2(z_1-z_2)z=x_1^2+y_1^2+z_1^2-x_2^2-y_2^2-z_2^2.$$

因此，到两点距离相等的点构成一个平面，称为这两点的**垂直平分面**。

再来看平面与平面的垂直关系。两个平面相互垂直，指它们的法向量相互垂直。平行平面的法向量相同，所以如果平面与两平行平面中的一个垂直，那么与另一个也垂直。

显然，过平面中一点，有无数平面与它垂直。比如，过 x 轴和 y 轴所在平面 $Oxy: z=0$ 中的 $(0,0,0)$ 点，可以找到平面 $x+y=0$ 与它垂直。不仅如此，$x+2y=0$、$x+3.3y=0$、$2.6x-y=0$ 等也都与它垂直。但所有与它垂直的平面，都经过直线 $\{(t,0,0)\,|\,t\in\mathbb{R}\}=\mathbb{R}\mathbf{e}_z$。

思考 1.4.1.

1. 空间中，垂直于同一直线的平面平行或重合，垂直于同一平面的直线平行或重合。这性质和平面中直线的哪些性质相似?

2. 空间中的直线能否表示为方程的解集? 如果可以，是怎样的方程?

3. 平行平面有没有公垂线? 异面直线的距离和平行平面的距离有什么联系?

习题 1.4.1.

1. 证明：如果直线与平面中两条相交直线垂直，就垂直于这个平面。

2. 给定两个线性无关的向量 A, B。

2.1. 如果 A, B 是单位向量，证明 $A+B\perp A-B$。

2.2. 以第一问的结论为基础，给出另一种正交归一的方法。

3. 求与 $(2,-1,1)$、$(0,1,2)$ 垂直的单位向量。

4. 求异面直线 $\mathbb{R}(0,1,1)+(1,-1,0)$、$\mathbb{R}(1,0,-1)+(0,1,-1)$ 的公垂线及距离。

5. 求过 $(1,0,0)$ 且垂直于 $\mathbb{R}(0,1,0)+(1,-1,1)$ 的平面。

6. 求平行平面 $x-y+z=1$ 和 $x-y+z=-1$ 的距离。

附录 A　空间形的表示法

为了方便讨论空间形，我们希望在纸面上快速便捷地表示空间中的点、直线、平面等基本形状。讨论平面形状时，我们自然地将纸面作为形状所在的平面。讨论空间中的形状时，我们没法在纸面上完整表示立体图形，所以需要一套统一约定的折衷方法，方便交流。我们把这样的方法称为**作图法**或**画法**。

人类自古以来就在探索作图法。距今两万年的壁画上，就有用线条表示动物和地形的创作。人类对作图法的探索有两个方向，一个致力于在平面上真实地还原人眼看到的景物，另一个致力于用简练记号表述空间中的对象。前者发展出以透视法为基础的艺术绘画技法，后者发展出以地图、工程图等为代表的实用绘图技法。下面介绍的属于后者，是数学中一种常用的简便作图法。

1.1　在空间中画平面

空间中的平面是没有边界的。为了在有限的纸面上表示平面，我们选用一定的形状框定边界，表示一个平面，称为平面的**示形**。要注意的是，这样表示的平面其实是平面的一部分，但不妨碍我们想象它是无边际延伸开来的。

我们约定用常见的平行四边形表示平面。平行四边形的长边长度一般

介于短边长度的 1.5 至 3 倍之间，长短边的锐角夹角一般是 45 度角。

一般来说，水平位置的平面（称为**水平面**），用上下对边水平的平行四边形表示，竖直位置的平面（称为竖立面），用左右对边竖直的平行四边形表示。矩形一般表示正对视线的竖直平面。完全侧对视线的竖直平面，用 45 度角的上下对边表示。

平面的名字一般标记在示形内部，靠近其某个顶点。

当一个平面示形的一部分被其它平面遮住时，我们用虚线表示被遮住部分的边界。如果虚线使得画面过于繁杂难辨，可以连虚线也不画。

用平行四边形表示平面，意味着我们降低了对真实性的要求，比如舍弃了近大远小的性质。因此作出的图形往往“不真实”。例如，一个水平面，我们看不出它到底位于我们上方还是下方。为此我们约定，**所有水平面均处于视线下方**，即我们总在俯视这些平面。这样，水平面靠下的点离我们较近，靠上的点离我们较远。

1.2 在水平面中画平面图形

已知一个平面形的样子，如何把它画在空间中某个水平面里?

我们把平面形所在的图称为平面图，把要画的图称为立体图。首先在立体图中画出水平面。为了方便，设示形的水平边长度为非水平边的 2 倍，夹角为 45 度。这个比例系数和夹角在下面画平面图形时将一直使用。

选择平面图中一条线段、射线或直线作为**水平线**。把它画进立体图时，画成水平方向，长度不变。与它平行的线段、射线、直线，也画成水平方向，线段长度不变。

平面图中垂直于水平线的线段、射线或直线（称为**纵直线**），把它画进立体图时，画成与平面非水平对边平行的方向（45 度角），线段的长度要除

以 2。

要将平面图中一点画进立体图中，可以先在平面图中作它到水平线和纵直线的垂线。这样，该点就成了水平线和纵直线的交点，于是可以在立体图中作出对应的点。

平面图中其它位置的线段、射线或直线，在其中取两点（线段一般取端点，射线取端点和较远一点，直线取较远两点）。将两点按上述方法画进立体图中，再连出对应的线段、射线或直线。

约定平面图中的上下左右关系在立体图中不变。但立体图中的上下关系应理解为前后关系，即靠上的在后（较远），靠下的在前（较近）。

1.3 在一般平面中画平面图形

在一般平面中画平面图形是复杂的操作。从原则上来说，违背了简便作图法的精神，容易产生既不简便、真实性也低的困境。因此，如果可以选择在水平面中画平面图形，最好不要在非水平面中画。

和在水平位置的平面中画平面图形的方法类似，我们需要在立体图中示形的对边中选择一个**主边**和一个**副边**。水平面中，我们选择水平方向的对边为主边，非水平方向的对边为副边。一般平面中，需要自行选择边和副边。主边长度和副边长度之比称为**斜变系数**，比如水平位置平面的斜变系数为 2。

选定之后，主方向将对应平面图中的水平线，副方向将对应平面图中的纵直线。平面图中平行于水平线的线段、射线、直线，按主边方向画出，线段长度不变。平面图中垂直于水平线的线段、射线、直线，按副边方向画出，线段长度要除以斜变系数。

要将平面图中一点画进立体图中，可以先在平面图中作它到水平线和纵直线的垂线。这样，该点就成了水平线和纵直线的交点，于是可以在立体

图中作出对应的点。

平面图中其它位置的线段、射线或直线，在其中取两点（线段一般取端点，射线取端点和较远一点，直线取较远两点）。将两点按上述方法画进立体图中，再连出对应的线段、射线或直线。

把平面图形画到非水平面中的时候，平面图中的上下左右关系在立体图中可能改变。为此，作图时需要注意保持一致性，否则将产生错误的结果。

1.4 画空间直角坐标系

以上作图法中，其实已经用到了坐标系的想法。比如，平面图中的水平线可以看作坐标轴横轴，纵直线可以看作坐标轴纵轴。我们把平面图中一点画到立体图中时，过它作到水平线和纵直线的垂线，实际上就在确定它的坐标。

我们可以直接在立体图中画出直角坐标系。一般来说，选定的基底 $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$，表示三个两两垂直的单位向量，对应三条射线。在立体图中，直角坐标系有多种画法。

选定一点为原点，过原点往右作水平射线，这条射线可以是 x 轴或 y 轴正半部分。如果设它为 x 轴正半，那么过原点往右上 45 度角作射线，是为 y 轴正半；如果设它为 y 轴正半，那么过原点往左下 45 度角作射线，是为 x 轴正半。最后过原点往上作竖直射线，是为 z 轴正半。这种画法称为**右手正斜式**。将 x 轴和 y 轴互换，则称为**左手正斜式**。

另一种画法从 z 轴开始。过原点往上作竖直射线，是为 z 轴正半。将其顺时针旋转 120 度，得到 x 轴正半；顺时针再旋转 120 度，得到 y 轴正半。这种画法称为**右手对称式**。将 x 轴和 y 轴互换，则称为**左手对称式**。

更一般的画法则继续向透视法靠拢。比如参考两点透视画出水平位置

的矩形，以此确定 x 轴和 y 轴。我们不在此展开，只介绍正斜式画法。

正斜式画法与前面的平行四边形表示法兼容。从左下为 x 轴的右手对称式出发，容易看出，Oxy 就是水平面。为了方便，我们在它的示形基础上画坐标系。选好长短边长度后，水平上边就是 y 轴，非水平的左边就是 x 轴。将代表射线的箭头画在平行四边形对应的顶点，然后将这两边等分，标上坐标刻度。z 轴（竖轴）按 y 轴长度标上刻度。朝反方向延伸可以画出各坐标轴的负半部分，并标上刻度。

按照坐标轴刻度，可以找出 Oxy 中点的位置。比如，要画出坐标为 $(1,2,0)$ 的点，可以在 x 轴找到刻度为 1 的点，过它作平行于 y 轴的直线（水平线）；在 y 轴找到刻度为 2 的点，过它作平行于 x 轴的直线；两线交点就是坐标为 $(1,2,0)$ 的点。

对于不在 Oxy 中的点，可以先画出它在 Oxy 上的投影点。比如，要画出坐标为 $(1,2,3)$ 的点，可以先画出 $(1,2,0)$，然后过它作平行于 z 轴的直线。由于往上为 z 轴正向，所以对于正数 3，往上数三个单位长度，即为 $(1,2,3)$。如果要画坐标为 $(1,2,-3)$ 的点，则向下数三个单位长度。为了清楚表明点在空间中的位置，可以保留投影点，并将投影点与 x 轴、y 轴用虚线连线，将目标点和投影点用虚线连线。

附录 B　空间向量与公理

下面验证：根据向量定义的点、直线、平面符合平面公理、平直公理、交面公理和补充的平行公理。

2.1　平面公理

首先来看平面公理。任取不共线三点 A, B, C，则 $A - C, B - C$ 线性无关，因此 $\{sA + tB + (1 - s - t)C \mid s, t \in \mathbb{R}\}$ 是 A, B, C 确定的平面。

2.2　平直公理

再来看平直公理。如果点 P, Q 在平面 $\{sA + tB + (1 - s - t)C \mid t \in \mathbb{R}\}$ 中，那么存在 s_1, t_1, s_2, t_2 使得

$$
\begin{aligned}
P &= s_1 A + t_1 B + (1 - s_1 - t_1)C \\
Q &= s_2 A + t_2 B + (1 - s_2 - t_2)C
\end{aligned}
$$

直线 PQ 是集合 $\{uP+(1-u)Q \mid u\in\mathbb{R}\}$，其中任一点 $U=uP+(1-u)Q$ 可以用 A,B,C 表示为

$$\begin{aligned}U &= uP+(1-u)Q\\ &= (us_1+(1-u)s_2)A+(ut_1+(1-u)t_2)B+(u(1-s_1-t_1)+(1-u)(1-s_2-t_2))C\\ &= (us_1+(1-u)s_2)A+(ut_1+(1-u)t_2)B+(1-(us_1+(1-u)s_2)-(ut_1+(1-u)t_2))C\end{aligned}$$

因此 U 在平面 ABC 中。这说明向量表示的空间符合平直公理。

2.3 交面公理

接下来验证交面公理。如果两平面 γ_1,γ_2 交于点 C，记 $\gamma_1:\{sA_1+tB_1+C \mid s,t\in\mathbb{R}\}$，$\gamma_2:\{sA_2+tB_2+C \mid s,t\in\mathbb{R}\}$。其中 (A_1,B_1) 线性无关，(A_2,B_2) 线性无关。两平面公共点可以表示为让以下等式成立的 s_1,t_1,s_2,t_2:

$$s_1A_1+t_1B_1+C=s_2A_2+t_2B_2+C.$$

以上等式可以转为:

$$s_1A_1+t_1B_1-s_2A_2-t_2B_2=\mathbf{0}.$$

根据空间的根本性质，四个向量总是线性相关。所以存在不全为零的四个实数 s_1,t_1,s_2,t_2 使上式成立。由于 (A_1,B_1) 线性无关，(A_2,B_2) 线性无关，所以 $s_1A_1+t_1B_1$ 和 $s_2A_2+t_2B_2$ 为零向量时，s_1,t_1,s_2,t_2 必然全为零。然而 s_1,t_1,s_2,t_2 不全为零，所以 $s_1A_1+t_1B_1$ 和 $s_2A_2+t_2B_2$ 不为零向量。于是这时 $s_1A_1+t_1B_1+C=s_2A_2+t_2B_2+C\neq C$ 是两平面另一个公共点。这说明向量表示的空间符合交面公理。

2.4 平行公理

我们主要验证平行线共面的性质。平面中，两条直线平行，当且仅当它们的线性部分是同一条过原点的直线。我们用这个方法来判定空间中直线的平行关系。设有两直线 $l_1 \parallel l_2$，那么它们是同一条过原点的直线平移而成：

$$l_1: \{t\mathbf{a} + \mathbf{b}_1 \,|\, t \in \mathbb{R}\}$$
$$l_2: \{t\mathbf{a} + \mathbf{b}_2 \,|\, t \in \mathbb{R}\}$$

所以 l_1, l_2 都在平面：$\gamma : \{t\mathbf{a} + s(\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2) + \mathbf{b}_2 \,|\, s, t \in \mathbb{R}\}$ 中。对任意 $t \in \mathbb{R}$，l_1 中的点 $t\mathbf{a} + \mathbf{b}_1 = t\mathbf{a} + 1 \cdot (\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2) + \mathbf{b}_2 \in \gamma$；$l_2$ 中的点 $t\mathbf{a} + \mathbf{b}_2 = t\mathbf{a} + 0 \cdot (\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2) + \mathbf{b}_2 \in \gamma$。这说明，两条平行直线总在同一平面内，即向量表示的空间符合补充后的平行公理。