

第一册

大青花鱼

目录

第一章 数列初步	5
1.1 数列的基本概念	5
1.2 等差数列	9
1.3 等比数列	11
1.4 数列的极限	14
第二章 从有理数到实数	19
第三章 实变函数初步	21
第四章 二项式	23

第一章 数列初步

1.1 数列的基本概念

例子 1.1.1. 1. 把自然数的倒数排成一列：

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$$

2. 把圆周率按个位，十分位、百分位、千分位截断，得到一系列数：

$$3, 3.1, 3.14, 3.141, 3.1415, \dots$$

3. 把班上同学的身高（厘米）按学号排列：

$$165, 173, 169, 178, 171.5, 176, \dots$$

把数按照一定顺序排列起来，叫做**数列**。数列中的每一个数叫做数列的**一项**。按照顺序，各项分别称为数列的第 1 项、第 2 项，等等。比如，例 1 中的数列第 2 项是 $\frac{1}{2}$ ，例 2 中的数列第 3 项是 3.14。

数列的项和序数有一一对应的关系，这告诉我们，数列的本质是正整数集或其子集 $[1..N]$ 到数域的函数。定义域是 $[1..N]$ 的数列，项数有限，称为**有穷数列**；定义域是正整数集的数列，项数无限，叫做**无穷数列**。我们一般把数列记作：

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

其中 a_n 是数列的第 n 项。项数 n 也叫做下标。为了方便，我们在行文中会把以上数列记作 $\{a_n\}_{n \in \mathbb{Z}^+}$ (无穷数列) 或 $\{a_n\}_{n \in [1..N]}$ (有穷数列)，或简单记作 $\{a_n\}$ 。比如，例 1 中的数列可以记为 $\{\frac{1}{n}\}_{n \in \mathbb{Z}^+}$ 。作为函数，如果某数列的序数和项之间的对应关系可以用一个公式来表示，我们就把这个公式称为该数列的**通项公式**。比如，例 1 中的数列，通项公式是 $a_n = \frac{1}{n}$ ；而例 3 中的数列，我们不知道通项公式。有通项公式的数列，只要把序数代入公式，就能得到该项的值。比如，例 1 中的数列，第 100 项是 $\frac{1}{100}$ 。

研究数列的一个基本目的，是对数列进行求和。比如，一垛炮弹有 8 层，顶层有 1 个炮弹，第 2 层有 4 个，第 3 层有 9 个，……，第 8 层有 64 个，我们希望知道一共有几个炮弹。把各层炮弹个数记为数列： $a_1 = 1$

$$a_1 = 1, a_2 = 4, \dots, a_8 = 64$$

我们把数列的和记为 $S_8 = a_1 + a_2 + \dots + a_8$ 。为了方便，我们也用求和符号表示数列的和： $S_8 = \sum_{i=1}^8 a_i$ 。对于无穷数列，我们还无法定义数列的和，只能定义它的部分和： $S_N = \sum_{i=1}^N a_i$ 。我们把 S_N 称为数列 $\{a_n\}$ 的前 N 项和。比如，例 1 中的数列的前 4 项和为：

$$S_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{25}{12}.$$

习题 1.1.1.

1. 根据以下数列的通项公式，写出数列的前 5 项：

1.1. $a_n = n^2$

1.2. $a_n = (-1)^n \cdot n$

1.3. $a_n = \frac{n}{n+3}$

1.4. $a_n = 2^n - 1$

1.5. $a_n = \frac{(-2)^n + n - 1}{n^2 + 1}$

2. 根据以下数列的通项公式，计算数列的前 5 项和与前 7 项和：

2.1. $a_n = n^2$

2.2. $a_n = (-1)^{n+1} \cdot n$

2.3. $a_n = \frac{2}{n(n+1)}$

2.4. $a_n = 2^n$

2.5. $a_n = (n+1)2^n$

3. 已知数列 $\{a_n\}_{n \in \mathbb{Z}^+}$, 如何构造一个数列 $\{b_n\}_{n \in \mathbb{Z}^+}$, 使得它的前 n 项和是 a_n ?

无穷数列 (或项数相同的有穷数列) 作为函数, 可以进行函数之间的四则运算。比如, 设无穷数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式分别是 $a_n = n - 1$ 、 $b_n = 2n$, 那么对任意正整数 n , $a_n + b_n = 3n - 1$ 。我们定义通项公式为 $c_n = 3n - 1$ 的数列 $\{c_n\}$ 为 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 的和, 也就是说, 我们定义数列的加法: $\{a_n\} + \{b_n\} = \{a_n + b_n\}$ 。

可以验证, 数列的加法满足交换律和结合律。我们称每项都等于同一个数的数列为常数列, 任何数列加上常数列 $\{0\}$ 都等于自己。

同理, 我们可以定义数列的减法、乘法和除法。它们满足的运算律和有理数的运算律一致。任何数列乘以 $\{1\}$ 都得到自己。如果我们把所有取值为实数的数列的集合记为 $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, 那么 $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ 也和 \mathbb{Q} 一样, 可以“装载”四则运算。其中的常数列 $\{0\}$ 、 $\{1\}$ 就相当于有理数 0 和 1。

我们说实值数列集 $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ 是一个域, 但不是数域, 因为它的元素是数列而不是数。

除了四则运算, 无穷数列还可以进行函数操作, 与函数复合。比如, 我们定义函数 $f: x \mapsto x^2 - 3$, 数列 $\{a_n\}$ 的每一项经过 f 映射到 $f(a_n) = f(n-1) = (n-1)^2 - 3 = n^2 - 2n - 2$ 。那么数列 $\{n^2 - 2n - 2\}$ 就可以称为 $\{a_n\}$ 经过 f 的**像数列**。换句话说, 我们用实值函数 f 定义了一个 $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ 到 $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ 的映射。

另一种对数列的操作方法是通过下标。设 g 是从正整数集映射到正整数集的函数, 比如 $g: n \mapsto 3n - 2$ 。从 $\{a_n\}$ 出发, 考虑数列 $\{u_n\}$: $u_n = a_{g(n)} = a_{3n-2}$ 。这样定义的 $\{u_n\}$ 称为用 g 从 $\{a_n\}$ 中提取的数列。要

注意的是, g 不一定把 $\{a_n\}$ 中每项恰好提取一次, 比如

$$a_1, a_1, a_2, a_2, a_3, a_3, a_4, a_4, \dots$$

这样的数列也是从 $\{a_n\}$ 中提取的。如果对任何正整数 n , 函数 g 满足 $g(n+1) > g(n)$ (称为严格单调递增), 用 g 从 $\{a_n\}$ 中提取的数列就可以看作是从前到后挑出一部分项得到的。这样的数列称为 $\{a_n\}$ 的子列。

思考 1.1.1.

1. 给定数列 $\{a_n\}$, 它的前 n 项和可以构成一个数列 $\{S_n\}$, 如何用 $\{S_n\}$ 中的项表示 a_n ? 记 v_n 为 $\{a_n\}$ 前 n 项乘积, 能否用数列 $\{v_n\}$ 中的项表示 a_n ?

2. 记所有从 \mathbb{R} 到 \mathbb{R} 的函数的集合为 $\mathfrak{F}(\mathbb{R})$, 所有从 $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ 到 $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ 的映射的集合为 $\mathfrak{F}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ 。 $\mathfrak{F}(\mathbb{R})$ 和 \mathbb{Q} 有什么共同点? $\mathfrak{F}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ 和 $\mathfrak{F}(\mathbb{R})$ 、 \mathbb{Q} 有什么共同点?

3. 记所有从正整数集到正整数集的函数的集合为 $\mathfrak{F}(\mathbb{Z}^+)$, 数列 $\{a_n\}$ 经过 $\mathfrak{F}(\mathbb{Z}^+)$ 中某个函数 g 可以提取出数列 $\{b_n\}$ 。 g 满足什么条件时, 可以找到另一个 $\mathfrak{F}(\mathbb{Z}^+)$ 中的函数 h , 用 h 可以从 $\{b_n\}$ 中提取出 $\{a_n\}$?

习题 1.1.2.

1. 计算: $\{6n-1\} - \{3k^2-k+2\} \cdot \{2^m+1\}$ 。

2. 已知定义在全体实数上的函数 $f: x \mapsto 2x^2 - x - 4$, 数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = n + \frac{1}{n}$, 计算 $\{f(a_n)\}$ 。

3. 另有定义在全体实数上的函数 $g: x \mapsto 1 - \frac{1}{x}$, 计算 $\{(f-g)(a_n)\}$ 。

研究实际问题的时候, 我们可能不会直接得到数列的通项公式, 而是各项之间的关系。来看以下的例子:

例题 1.1.1. 培养一种乳酸菌, 初始从 3 个单位起培养。每过一定时间, 等乳酸菌数量翻倍后, 取出 1 个单位的样本做化验观察, 其余继续培养。问每次取出化验后, 乳酸菌的数量是几个单位?

解答. 设初始数量为 a_0 , 第 n 次取出化验后乳酸菌数量为 a_n 个单位。则数列 $\{a_n\}$ 中的项满足以下的关系:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = 2a_n - 1.$$

这样的关系称为数列的**递推关系**, 相关公式称为**递推公式**。以上公式中, 已知 a_0 的值, 就能推出 a_1 , 继而次第推出 a_2 、 a_3 , 等等。 $a_0 = 3$, 所以 $a_1 = 2 \cdot 3 - 1 = 5$, $a_2 = 2 \cdot 5 - 1 = 9$, $a_3 = 2 \cdot 9 - 1 = 17 \cdots \cdots$

根据递推关系, 已知 a_1 , 想要算出 a_{100} , 就必须依次算出 a_2, a_3, \cdots, a_{99} 。很多时候, 我们希望从各项之间的关系, 推出通项公式, 以更方便地了解数列的性质。

如何从递推关系得出通项公式呢? 这个问题并没有简便的统一方法。常见的做法是将递推关系转化为一些已知通项公式的数列的递推关系, 再反推出原数列的通项公式。

习题 1.1.3.

已知数列的递推公式如下, 求数列的前 7 项:

1. $a_1 = 1, \forall n \geq 1, a_{n+1} = 1 - 2a_n.$
2. $a_1 = 1, \forall n \geq 1, a_{n+1} = 1 + \frac{1}{a_n - 1}.$
3. $a_1 = 1, a_2 = 3, \forall n \geq 1, a_{n+2} = 4 + a_n - a_n^2.$
4. $a_1 = 1, a_2 = 1, \forall n \geq 1, a_{n+2} = a_n + a_{n+1}.$
5. $a_1 = 1, a_2 = 3, \forall n \geq 1, a_{n+2} = a_n(4 - a_{n+1}).$

1.2 等差数列

来看这样一个数列:

$$1, 3, 5, 7, 9, 11, 13.$$

这个数列有一个特点: 从第二项起, 每一项减去前一项的差总是 2。

一般地, 如果某个数列从第二项起, 每一项减去前一项的差是同一个常数, 就说这个数列是**等差数列**。这个常数叫做等差数列的**公差**, 通常用字母 d 表示。比如, 数列 $2, 5, 8, 11, 14$ 的公差是 3 , $19, 15, 11, 7, 3, -1$ 的公差是 -4 。

如果数列 $\{a_n\}$ 的公差是 d , 那么:

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + d \\ a_3 &= a_2 + d = a_1 + 2d \\ a_4 &= a_3 + d = a_1 + 3d \\ &\vdots \\ a_n &= a_1 + (n-1)d \end{aligned} \tag{1.1}$$

等差数列的通项公式是: $a_n = a_1 + (n-1)d$ 。

例题 1.2.1. 已知无穷等差数列 $1, 8, 15, \dots$, 求它的第 30 项。

解答. 等差数列第一项是 1 , 公差是 $8 - 1 = 7$, 所以通项公式是 $a_n = 1 + (n-1) \cdot 7 = 7n - 6$ 。第 30 项 $a_{30} = 7 \cdot 30 - 6 = 204$ 。

例题 1.2.2. 已知 $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ 是等差数列, $a_1 = 4$, $a_3 = 9$, 问 94 是否在数列中? 如果是的话, 是第几项?

解答. 设公差为 d , 则 $a_3 = a_1 + 2d$ 。代入 a_1 、 a_3 的值, 解得 $d = 2.5$ 。于是通项公式为 $a_n = 4 + (n-1) \cdot 2.5 = 2.5n + 1.5$ 。如果有 $a_n = 94$, 即 $2.5n + 1.5 = 94$, 解得 $n = 37$ 。因此 94 在数列中, 是第 37 项。

设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n 。能否方便地表示 S_n 呢? 我们可以

这样思考：

$$\begin{aligned}
 a_1 + a_n &= a_1 + a_1 + (n-1)d = 2a_1 + (n-1)d \\
 a_2 + a_{n-1} &= a_1 + d + a_n - d = a_1 + a_n = 2a_1 + (n-1)d \\
 &\vdots \\
 a_{n-1} + a_2 &= a_1 + (n-2)d + a_n - (n-2)d = a_1 + a_n = 2a_1 + (n-1)d \\
 a_n + a_1 &= a_1 + a_n = 2a_1 + (n-1)d
 \end{aligned}
 \tag{1.2}$$

把以上 n 个等式分边相加，就得到：

$$S_n + S_n = n(a_1 + a_n) = 2na_1 + n(n-1)d.$$

也就是说，前 n 项和 S_n 可以写成

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d.$$

这样我们可以方便地计算等差数列的前 n 项和。比如，求前 n 个自然数的和： $a_n = n - 1 = 0 + (n-1) \cdot 1$ ，所以 $S_n = 0 + \frac{n(n-1)}{2} \cdot 1 = \frac{n(n-1)}{2}$ 。

习题 1.2.1.

1. 在 8 和 36 之间插入 6 个数，使得这 8 个数成等差数列。
2. 设数列 $\{a_n\}_{n \in \mathbb{Z}^+}$ 为等差数列，证明 $a_{n+2} + a_n = 2a_{n+1}$ 。
3. 等差数列 $\{a_n\}_{n \in \mathbb{Z}^+}$ 中， $a_1 = 0.3$ ， $a_n = 85.5$ ， $d = 0.6$ ，求 n 和 S_n 。
4. 求前 n 个奇数 $1, 3, 5, \dots, 2n-1$ 的和。
5. 直角三角形的三边成等差数列，求三边比例。
6. 等差数列 $\{a_n\}_{n \in \mathbb{Z}^+}$ 满足 $a_1 = 1$ ， $a_{10} = 43.3$ ，求 S_{20} 。

1.3 等比数列

来看这样一个数列：

$$1, 2, 4, 8, 16, 32, 64.$$

这个数列有一个特点：从第二项起，每一项除以前一项的商总是 2。

一般地，如果某个数列从第二项起，每一项与前一项的比值是同一个常数，就说这个数列是**等比数列**。这个常数叫做等比数列的**公比**，通常用字母 q 表示。比如，数列 2, 6, 18, 54, 162 的公比是 3, 192, -48, 12, -3, 0.75 的公比是 -0.25。

如果数列 $\{a_n\}$ 的公比是 q ，那么：

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 q \\ a_3 &= a_2 q = a_1 q^2 \\ a_4 &= a_3 q = a_1 q^3 \\ &\vdots \\ a_n &= a_1 q^{n-1} \end{aligned} \tag{1.3}$$

等比数列的通项公式是： $a_n = a_1 q^{n-1}$ 。

例题 1.3.1. 已知无穷等比数列 1.2, 1.8, 2.7, \dots ，求它的第 30 项。

解答. 等比数列第一项是 1，公比是 $1.8 \div 1.2 = 1.5$ ，所以通项公式是

$$a_n = 1.2 \cdot 1.5^{n-1} = \frac{6 \cdot 3^{n-1}}{5 \cdot 2^{n-1}} = \frac{3^n}{5 \cdot 2^{n-2}}.$$

第 30 项 $a_{30} = \frac{3^{30}}{5 \cdot 2^{28}}$ 。

例题 1.3.2. 已知 $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ 是等比数列， $a_1 = 3$ ， $a_3 = 12$ ，问 1536 是否在数列中？如果是的话，是第几项？

解答. 设公比为 q ，则 $a_3 = a_1 q^2$ 。代入 a_1 、 a_3 的值，解得 $q = 2$ 。于是通项公式为 $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$ 。如果有 $a_n = 1536$ ，即 $3 \cdot 2^{n-1} = 1536$ ，解得 $n = 10$ 。因此 1536 在数列中，是第 10 项。

设等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n 。能否方便地表示 S_n 呢？已知：

$$S_n = \sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n a_1 q^{i-1} = a_1 \sum_{i=1}^n q^{i-1}$$

如果公比 $q = 1$ ，那么 $S_n = na_1$ 。

如果公比 $q \neq 1$ ，两边乘以 q ，得到

$$qS_n = q \cdot a_1 \sum_{i=1}^n q^{i-1} = a_1 \sum_{i=1}^n q^i.$$

也就是说，

$$qS_n = a_1 \sum_{i=2}^{n+1} q^{i-1} = a_1 q^n + a_1 \sum_{i=1}^n q^{i-1} - a_1 = a_1 q^n + S_n - a_1$$

把右边的 S_n 移到左边，解得：

$$S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

由于 $a_n = a_1 q^{n-1}$ ，所以上式也可以写成：

$$S_n = \frac{qa_n - a_1}{q - 1}.$$

这样我们可以方便地计算等比数列的前 n 项和。比如，求 2 的前 n 个乘方的和： $a_n = 2^n = 2 \cdot 2^{n-1}$ ，所以 $S_n = 2 \frac{2^n - 1}{2 - 1} = 2^{n+1} - 2$ 。

习题 1.3.1.

1. 在 16 和 36 之间插入 3 个数，使得这 5 个数成等比数列。
2. 设数列 $\{a_n\}_{n \in \mathbb{Z}^+}$ 为等比数列，证明 $a_{n+2} \cdot a_n = a_{n+1}^2$ 。
3. 等比数列 $\{a_n\}_{n \in \mathbb{Z}^+}$ 中， $a_1 = 1$ ，公比 $q = 0.5$ ，求前 n 项和 S_n 。
4. 等比数列 $\{a_n\}_{n \in \mathbb{Z}^+}$ 中， $a_1 = 6$ ， $a_n = 393216$ ， $q = 2$ ，求 n 和 S_n 。
5. 请用 a_1 、 a_n 和 q 表示等比数列 $\{a_n\}_{n \in \mathbb{Z}^+}$ 的前 n 项和 S_n 。
6. 等比数列 $\{a_n\}_{n \in \mathbb{Z}^+}$ 满足 $a_6 = 4$ ， $a_8 = 9$ ，求 S_{10} 。

1.4 数列的极限

我们来考察以下数列：

$$0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \dots$$

它的通项公式是 $a_n = \frac{n-1}{n}$ 。把数列的前几项在数轴上标出来，我们发现，随着 n 不断增大， a_n 不断变大，不断向着 1 靠拢。

我们把各项不断增大（减小）的数列称为单调递增（递减）数列。“单调”一词，表示数列各项增减方向保持一致。换句话说，如果数列 $\{a_n\}_{n \in \mathbb{Z}^+}$ 从第二项起，总有 $a_{n+1} \geq a_n$ ，就说它是**单调递增数列**；如果总有 $a_{n+1} \leq a_n$ ，就说它是**单调递减数列**。如果要求不能有相等的项，就称为**严格单调递增（递减）数列**。

数列 $\{\frac{n-1}{n}\}$ 就是一个严格单调递增的数列。它的各项随着 n 增大，不断接近 1。虽然数列任一项都不等于 1，但我们不难产生这样的想法：随着 n 增大， a_n 的值任意接近于 1。

怎样严谨地表达这个想法呢？我们使用“有求必应”的结构。把上面的想法用更具体的方式来描述，我们可以说：只要 n 足够大，那么，不论是多么小的距离 r ， a_n 及之后的项都在区间 $[1-r, 1]$ 里。定义二元命题 $Q(r, n)$ ： $\forall m \geq n, 1-r \leq a_m \leq 1$ 。用“有求必应”的结构，以上的想法就可以写成：

$$\forall r > 0, \exists n, \text{使得 } Q(r, n) \text{ 成立。}$$

直观来看，这就是说，我们考察以 1 为右端的区间，无论这个区间多么小，到了一定的 n 以后，所有的 a_n 都落在这个区间里。

我们把这个性质称为单调递增数列有**极限**。一般来说，设无穷数列 $\{a_n\}$ 是单调递增数列。如果有某个数 x ，使得

$$\forall r > 0, \exists n, \text{使得 } Q_x(r, n) \text{ 成立。}$$

就说 $\{a_n\}$ 有极限 x , 或 x 是 $\{a_n\}$ 的极限, 或 $\{a_n\}$ 趋于 x 。其中二元命题 $Q_x(r, n)$ 是: $\forall m \geq n, x - r \leq a_m \leq x$ 。

对单调递减数列, 我们可以作类似定义。设无穷数列 $\{a_n\}$ 是单调递减数列。如果有某个数 x , 使得

$$\forall r > 0, \exists n, \text{使得 } Q_x(r, n) \text{ 成立。}$$

就说 $\{a_n\}$ 有极限 x , 或 x 是 $\{a_n\}$ 的极限, 或 $\{a_n\}$ 趋于 x 。其中二元命题 $Q_x(r, n)$ 是: $\forall m \geq n, x \leq a_m \leq x + r$ 。

两个定义基本一样, 唯一的区别在于二元命题中 a_m 落入的区间。可以看出, 递增数列的项总比极限小, 所以落在极限左边的区间; 递减数列的项总比极限大, 所以落在极限右边的区间。

对一般的数列, 我们这样定义极限:

定义 1.4.1. 数列的极限 设有无穷数列 $\{a_n\}$ 。如果有某个数 x , 使得

$$\forall r > 0, \exists n, \text{使得 } Q_x(r, n) \text{ 成立。}$$

就说 $\{a_n\}$ 有极限 x , 或 x 是 $\{a_n\}$ 的极限, 或 $\{a_n\}$ 趋于 x 。其中二元命题 $Q_x(r, n)$ 是: $\forall m \geq n, x - r \leq a_m \leq x + r$ 。

可以看到, 一般数列极限的定义包含了单调数列极限的定义。具体来说, 无论是单调递增数列还是单调递减数列, 只要按照单调数列极限的定义有极限 x , 那么它会逐步落入 $[x - r, x]$ 或 $[x, x + r]$ 中, 自然也就落入 $[x - r, x + r]$ 中, 于是它按一般数列极限的定义也有极限 x 。

反之, 某个单调递增数列按照一般数列极限的定义有极限 x , 那么它会逐步落入 $[x - r, x + r]$ 中。然而, 一旦某个 $a_k > x$, 由于之后的每项都大于等于 a_k , 当 $r < a_k - x$ 时, 就找不到 n 使得 $\forall m \geq n, x - r \leq a_m \leq x + r$ 了。这说明 a_n 总小于等于 x 。因此, 把一般数列极限定义中的 $[x - r, x + r]$ 换成 $[x - r, x]$, 仍然成立。也就是说, 按照单调递增数列极限的定义, $\{a_n\}$ 仍有极限 x 。

综上所述, 单调数列的极限可以用一般数列的极限来定义。两种定义可以互换。

例题 1.4.1. 数列 $\{a_n\}$ 的通项是 $a_n = \frac{1}{n^2}$, 它是否有极限? 如果有极限, 极限是多少?

解答. $\{a_n\}$ 每项都是正数。

$$a_n \div a_{n+1} = \frac{1}{n^2} \div \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{(n+1)^2}{n^2} = 1 + \frac{2n+1}{n^2} > 1,$$

所以 $\{a_n\}$ 是单调递减数列。从数轴上看, $\{a_n\}$ 不断趋近于 0。猜测它有极限 0。

设 $r > 0$, 考察区间 $[0, r]$ 。设 n_r 是大于等于 $\frac{1}{\sqrt{r}}$ 的最小正整数, 那么, 只要 $n \geq n_r$, 就有 $n^2 \geq n_r^2 \geq \frac{1}{r}$, 于是 $0 \leq \frac{1}{n^2} \leq r$ 。因此, $\forall r > 0, \exists n_r$, 使得 $\forall m \geq n_r, 0 \leq a_m \leq 0 + r$ 。这说明 $\{a_n\}$ 有极限 0。

不难看出, 极限是构造出来的。因此, 从定义出发, 我们可以说某个数是某数列的极限。反过来, 一个数列有极限, 它的极限是否只能有一个呢? 答案是肯定的。我们可以用反证法来证明。

反设某数列 $\{a_n\}$ 有两个极限 x_1, x_2 。不妨设 $x_1 < x_2$ 。直觉上, n 足够大的时候, a_n 离两者都很近, 距离比两者的一半都小, 加起来就小于两者的距离, 于是就产生矛盾了。

具体来说, 记 $\delta = \frac{x_2 - x_1}{2}$ 为两点距离的三分之一。选一个小于 δ 的正数 r 。按照极限的定义, 有正整数 n_1, n_2 使得:

$$\begin{aligned} \forall m \geq n_1, x_1 - r &\leq a_m \leq x_1 + r, \\ \forall m \geq n_2, x_2 - r &\leq a_m \leq x_2 + r. \end{aligned} \tag{1.4}$$

于是, 选一个比 n_1, n_2 都大的 m , 比如 $m = n_1 + n_2$, 这时 $a_m - x_1 \leq r$, $x_2 - a_m \leq r$ 。加起来就得到:

$$x_2 - x_1 \leq 2r < 2\delta = x_2 - x_1.$$

矛盾！因此，数列如果有极限，只能有一个。

设数列 $\{a_n\}$ 有极限 x 。我们把它每一项减去 x （或者说让数列减去常数 x ），得到的数列 $\{a_n - x\}$ 趋于 0。所以，任何有极限的数列，都可以看做一个趋于 0 的数列加上它的极限。我们把趋于 0 的数列称为**无穷小**。任何有极限的数列，都是它的极限加上无穷小。

有极限的数列，我们可以用极限来刻画“大多数”项的位置（在极限“附近”）。没有极限的数列，有什么特征呢？我们来看另一个数列：

$$1, 2, 3, 4, 5, \dots$$

这是正整数数列，通项为 $a_n = n$ 。不难看出，它没有极限，因为对任何实数 x 来说，令 n_x 为大于 x 的最小正整数，那么从 $n_x + 1$ 开始的项都比 x 大至少 1，无法落到 x 附近的小区间里面。可以说，随着 n 增大， a_n 会比任何数都大。

如何严谨描述这个想法呢？我们仍然用“有求必应”的结构。定义二元命题 $M^+(x, n)$ ： $\forall m \geq n, a_m \geq x$ 。那么我们可以把以上想法写成：

$$\forall x, \exists n, \text{使得 } M^+(x, n) \text{ 成立。}$$

直观来看，随着 n 增大，从某一项开始， a_n 会落到数轴任何给定点 x 的右边。我们把这个性质称为数列**趋于正无穷大**。同理，可以定义数列**趋于负无穷大**：

$$\forall x, \exists n, \text{使得 } M^-(x, n) \text{ 成立。}$$

其中二元命题 $M^-(x, n)$ 为： $\forall m \geq n, a_m \leq x$ 。我们也把有这两个性质的数列简称为**正无穷大**和**负无穷大**。

第二章 从有理数到实数

第三章 实变函数初步

第四章 二项式