

# 第二册

大青花鱼



# 目录

<b>第一章 向量和方程</b>	<b>7</b>
1.1 直线束 . . . . .	7
1.2 三角形的向量表示 . . . . .	9
1.3 圆和直线 . . . . .	14
1.4 圆和圆的关系 . . . . .	14
<b>第二章 空间中的形状</b>	<b>15</b>
2.1 点、直线、平面 . . . . .	15
2.2 空间向量 . . . . .	23
2.3 角度和长度 . . . . .	29
2.4 垂直和投影 . . . . .	30
2.5 垂线和距离 . . . . .	41
<b>第三章 简单多面体</b>	<b>47</b>
3.1 四面体和棱锥 . . . . .	48

4	目录
3.2	平行六面体和棱柱 . . . . . 51
3.3	棱台 . . . . . 53
<b>第四章</b>	<b>旋转体 55</b>
4.1	圆锥、圆柱和圆台 . . . . . 55
4.2	球 . . . . . 58
<b>第五章</b>	<b>空间形状的体积 61</b>
5.1	平行六面体的体积 . . . . . 62
5.2	等积原理 . . . . . 64
5.3	棱柱、棱锥和棱台的体积 . . . . . 65
5.4	圆柱、圆锥和圆台的体积 . . . . . 68
5.5	球的体积 . . . . . 70
<b>附录 A</b>	<b>空间形的表示法 73</b>
1.1	在空间中画平面 . . . . . 73
1.2	在水平面中画平面图形 . . . . . 74
1.3	在一般平面中画平面图形 . . . . . 75
1.4	画空间直角坐标系 . . . . . 76
<b>附录 B</b>	<b>空间向量与公理 79</b>
2.1	平面公理 . . . . . 79
2.2	平直公理 . . . . . 79

目录	5
2.3 交面公理 . . . . .	80
2.4 平行公理 . . . . .	81



# 第一章 向量和方程

我们已经学习过向量。向量将平面形与数集结合起来，让我们能够用方程等代数的手段研究平面形的性质。我们已经学习过使用方程来研究直线和圆。本章我们继续使用方程来研究的平面形。

## 1.1 直线束

我们知道，平面中的直线可以和二元一次方程对应起来。平面中任一直线必然对应某个二元一次方程  $ax + by + c = 0$  的解集，其中  $a, b, c$  是系数， $x, y$  是未知数。

**思考 1.1.1.** 方程  $(x - 2y + 2)(x + y - 3) = 0$  对应什么平面形状？

方程  $(x - 2y + 2)(x + y - 3) = 0$  左边是两个二元一次式的乘积，右边是 0。我们知道，两个数乘积为 0，说明两者至少有一个为 0。如果  $x, y$  使方程成立，那么  $x - 2y + 2$  和  $x + y - 3$  至少有一个等于 0。因此，方程  $(x - 2y + 2)(x + y - 3) = 0$  的解集是方程  $x - 2y + 2 = 0$  和  $x + y - 3 = 0$  解集的并集。直观来说，对应两条直线。

一般来说， $m$  个关于  $x, y$  的一次式乘积等于 0，这样的方程的解集对应平面中  $m$  条直线。

从上面的例子可以看到，我们可以用方程表示多条直线。那么，怎样表示“某种直线”呢？

对给定的系数  $a, b$ ，以下方程代表什么图形呢？

$$l_{a,b}: a(x - 2y + 2) + b(x + y - 3) = 0$$

对给定的系数  $a, b$ ，方程  $l_{a,b}$  是关于  $x, y$  的二元一次式，所以必然对应平面中一条直线。

$a, b$  变化的时候，二元一次式的系数也随着变化，对应的直线也不同。这些直线有什么共同特征呢？

考虑直线  $x - 2y + 2 = 0$  和  $x + y - 3 = 0$  的交点，它对应两个方程解集的交集。具体可以解得交点坐标： $(\frac{4}{3}, \frac{5}{3})$ 。不论  $a, b$  取什么值， $(\frac{4}{3}, \frac{5}{3})$  总使得方程  $l_{a,b}$  成立。也就是说，不论  $a, b$  取什么值，对应的直线总经过  $(\frac{4}{3}, \frac{5}{3})$ 。

反过来，如果直线  $Ax + By + C = 0$  经过  $(\frac{4}{3}, \frac{5}{3})$ ，它是否总能写成  $a(x - 2y + 2) + b(x + y - 3) = 0$  的形式呢？

首先把  $a(x - 2y + 2) + b(x + y - 3)$  写成一般式：

$$a(x - 2y + 2) + b(x + y - 3) = (a + b)x + (b - 2a)y + 2a - 3b$$

要使得直线  $Ax + By + C = 0$  变成这样的形式，就是要找出使得以下方程组成立的  $a, b$ ：

$$\begin{cases} a + b = A \\ b - 2a = B \\ 2a - 3b = C \end{cases}$$

从前两个方程解得： $a = \frac{A-B}{3}$ ， $b = \frac{2A+B}{3}$ 。代入第三个方程，得到：

$$\frac{4}{3}A + \frac{5}{3}B + 3C = 0.$$

而由于直线经过  $(\frac{4}{3}, \frac{5}{3})$ ，因此第三个方程也成立。这说明，只要直线经过  $(\frac{4}{3}, \frac{5}{3})$ ，其方程就可以写成  $l_{a,b}$  的形式。



综上所述,  $a(x - 2y + 2) + b(x + y - 3) = 0$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$  表示所有经过  $x - 2y + 2 = 0$  和  $x + y - 3 = 0$  交点的直线的集合。我们把它称为经过直线  $x - 2y + 2 = 0$  与  $x + y - 3 = 0$  的直线束。

一般来说, 设有直线  $l_1: a_1x + b_1y + c_1 = 0$ 、 $l_2: a_2x + b_2y + c_2 = 0$ , 那么经过  $l_1$  和  $l_2$  的直线束就是:

$$s(a_1x + b_1y + c_1) + t(a_2x + b_2y + c_2) = 0, \quad s, t \in \mathbb{R}$$

如果  $l_1$  和  $l_2$  相交, 那么它由所有经过  $l_1$  和  $l_2$  交点的直线组成。如果  $l_1$  和  $l_2$  平行, 那么它由所有平行于  $l_1$  的直线组成。

## 1.2 三角形的向量表示

三角形是基本而重要的平面形。如何用向量来研究三角形呢?

关于三角形的基本公理是三角形全等公理:

**公理 1.** 考虑  $\triangle ABC$  和  $\triangle A'B'C'$ 。如果  $|AB| = |A'B'|$ 、 $|AC| = |A'C'|$  成立, 并且  $\angle BAC = \angle B'A'C'$  或  $\angle BAC = \angle C'A'B'$  成立, 那么  $\triangle ABC$  和  $\triangle A'B'C'$  全等。

三角形全等公理的直接应用是“边角边”定理。这里我们也从“边角边”构型出发, 使用向量来研究三角形内的点。

从三角形顶点  $A$  出发的两向量  $\overrightarrow{AB}$ 、 $\overrightarrow{AC}$ , 分别指向顶点  $B$ 、 $C$ 。对于一般的(非退化的)三角形来说, 这两个向量不共线。线段  $BC$  上的点, 总可以表示成  $\overrightarrow{AB}$ 、 $\overrightarrow{AC}$  倍数之和, 称为它们的线性组合。比如  $BC$  的  $k$  分点可以表示为:

$$\frac{1}{k+1}\overrightarrow{AB} + \frac{k}{k+1}\overrightarrow{AC}.$$

三角形内部的点, 如何表示呢? 如图, 给定三角形内部一点  $P$ , 直线  $CP$ 、 $BP$  分别交  $AB$ 、 $AC$  于  $D$ 、 $E$  两点。设  $\overrightarrow{AD} = r_1\overrightarrow{AB}$ 、 $\overrightarrow{AE} = r_2\overrightarrow{AC}$ 。

设  $P$  分别是线段  $BE$ 、 $CD$  的  $k_1$ 、 $k_2$  分点, 则

$$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{k_2+1}\overrightarrow{AB} + \frac{k_2}{k_2+1}\overrightarrow{AE} = \frac{1}{k_1+1}\overrightarrow{AC} + \frac{k_1}{k_1+1}\overrightarrow{AD}.$$

将  $\overrightarrow{AD}$ 、 $\overrightarrow{AE}$  分别用  $\overrightarrow{AB}$ 、 $\overrightarrow{AC}$  表示:

$$\frac{k_1 r_1}{k_1+1}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{k_1+1}\overrightarrow{AC} = \frac{k_2 r_2}{k_2+1}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{k_2+1}\overrightarrow{AB}.$$

即:

$$\left(\frac{k_1 r_1}{k_1+1} - \frac{1}{k_2+1}\right)\overrightarrow{AB} + \left(\frac{1}{k_1+1} - \frac{k_2 r_2}{k_2+1}\right)\overrightarrow{AC} = \mathbf{0}.$$

$\overrightarrow{AB}$ 、 $\overrightarrow{AC}$  不共线, 因此它们的线性组合只有当系数都为 0 的时候才等于零向量。于是可以得到方程:

$$\begin{cases} \frac{k_1 r_1}{k_1+1} = \frac{1}{k_2+1} \\ \frac{1}{k_1+1} = \frac{k_2 r_2}{k_2+1} \end{cases}$$

解这个关于  $k_1, k_2$  的方程组, 得到:

$$\begin{cases} k_1 = \frac{1-r_2}{r_2-r_1 r_2} \\ k_2 = \frac{1-r_1}{r_1-r_1 r_2} \end{cases}$$

代入  $\overrightarrow{AP}$  的表达式, 得到:

$$\overrightarrow{AP} = \frac{r_1 - r_1 r_2}{1 - r_1 r_2}\overrightarrow{AB} + \frac{r_2 - r_1 r_2}{1 - r_1 r_2}\overrightarrow{AC}.$$

设  $\frac{|AD|}{|DB|} = \frac{m}{l}$ 、 $\frac{|AE|}{|EC|} = \frac{n}{l}$ , 则  $r_1 = \frac{m}{m+l}$ 、 $r_2 = \frac{n}{n+l}$ , 于是

$$\overrightarrow{AP} = \frac{m\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{AC}}{l + m + n}.$$

这个表达式和线段  $BC$  上的分点很像。设  $F$  为线段  $BC$  的  $\frac{n}{m}$  分点, 则

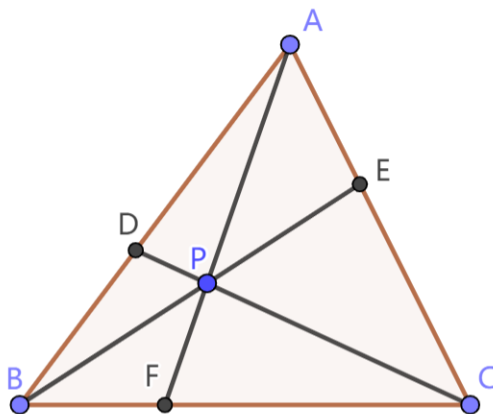
$$\overrightarrow{AF} = \frac{m\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{AC}}{m+n} = \frac{l+m+n}{m+n}\overrightarrow{AP},$$

这说明  $AP$  的延长线交  $BC$  于  $F$ 。

总结一下，我们给定三角形内一点  $P$ ，设  $AP$ 、 $BP$ 、 $CP$  交对边于点  $F$ 、 $E$ 、 $D$ ，最后得到

$$\frac{|AD|}{|DB|} \frac{|BF|}{|FC|} \frac{|CE|}{|EA|} = \frac{m}{l} \cdot \frac{n}{m} \cdot \frac{l}{n} = 1.$$

这个结论称为三角形点分边定理。



**定理 1.2.1.** 三角形点分边定理 设  $P$  为三角形  $ABC$  内一点， $AP$ 、 $BP$ 、 $CP$  交对边于点  $F$ 、 $E$ 、 $D$ ，则

$$\frac{|AD|}{|DB|} \frac{|BF|}{|FC|} \frac{|CE|}{|EA|} = 1.$$

注意：前面的讨论实际上也证明了三角形点分边定理的逆定理：

**定理 1.2.2.** 设有三角形  $ABC$ ， $D$ 、 $E$ 、 $F$  分别是线段  $AB$ 、 $AC$ 、 $BC$  上的点，且满足

$$\frac{|AD|}{|DB|} \frac{|BF|}{|FC|} \frac{|CE|}{|EA|} = 1.$$

那么  $AF$ 、 $BE$ 、 $CD$  交于一点。

根据点分边定理，给定三角形  $ABC$  和内部一个点，我们可以用三个数  $(l, m, n)$  标记它，其中  $l, m, n$  分别是以上提到的比例中的系数。注意到

$l, m, n$  和  $2l, 2m, 2n$ 、 $3l, 3m, 3n$  等等都表示同一个点, 所以我们一般约定  $l + m + n = 1$ 。反之, 任意和为 1 的三个正数组成的有序数组  $(l, m, n)$  都唯一对应了三角形  $ABC$  内一个点。所以,  $(l, m, n)$  可以看作三角形内点  $P$  的“坐标”, 称为三角形的**质心坐标**<sup>1</sup>。使用质心坐标, 可以用  $ABC$  的顶点表示  $P$ :

$$\begin{aligned} P &= A + \overrightarrow{AP} = A + \frac{m\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{AC}}{l + m + n} \\ &= A + \frac{m(B - A) + n(C - A)}{l + m + n} \\ &= \frac{lA + mB + nC}{l + m + n} \end{aligned}$$

### 思考 1.2.1.

1. 以上的讨论对三角形外的点成立吗? 如果成立,  $r_1$ 、 $r_2$ 、 $k_1$ 、 $k_2$ 、 $l$ 、 $m$ 、 $n$  相应有什么改变? 点分边定理的结论是否还成立? 需要做出哪些调整?

2.  $P = \frac{lA + mB + nC}{l + m + n}$  对三角形  $ABC$  外的点  $P$  还成立吗?

使用质心坐标, 我们可以研究三角形的心。首先容易得到三角形的重心  $G$  的质心坐标:  $(1, 1, 1)$ , 因此:

$$G = \frac{1}{3}(A + B + C).$$

再来看内心  $I$ 。我们知道角平分线  $AI_A$  与  $BC$  的交点  $I_A$  使得

$$\frac{|BI_A|}{|I_AC|} = \frac{|BA|}{|AC|}$$

同理可得

$$\frac{|AI_C|}{|I_CB|} = \frac{|AC|}{|CB|}, \quad \frac{|CI_B|}{|I_BA|} = \frac{|CB|}{|BA|}$$

因此  $I$  的质心坐标是  $(|BC|, |CA|, |AB|)$ , 即:

$$I = \frac{aA + bB + cC}{a + b + c},$$

---

<sup>1</sup>这是因为如果在三角形三个顶点上分别放置质量为  $l$ 、 $m$ 、 $n$  的质点, 则这三个质点的质心就在  $P$  点。

其中  $a = |BC|$ 、 $b = |CA|$ 、 $c = |AB|$  分别是三角形三边长度。

使用三角函数可以求出垂心  $H$  的坐标。  
 设  $AH$  到  $BC$  的垂足是  $H_A$ ，则  $|BH_A| = |AH_A| \cot \angle B$ 、 $|CH_A| = |AH_A| \cot \angle C$ 。也就是说，

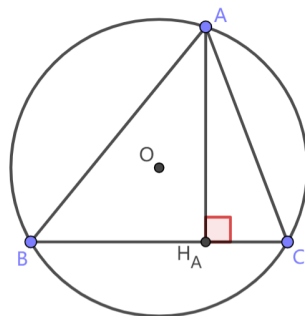
$$\frac{|BH_A|}{|H_AC|} = \frac{\cot \angle B}{\cot \angle C} = \frac{\tan \angle C}{\tan \angle B}$$

同理可得

$$\frac{|AH_C|}{|H_CB|} = \frac{\tan \angle B}{\tan \angle A}, \quad \frac{|CH_B|}{|H_BA|} = \frac{\tan \angle A}{\tan \angle C}.$$

因此  $H$  的质心坐标是  $(\tan \angle A, \tan \angle B, \tan \angle C)$ ，即：

$$H = \frac{\tan \angle A \cdot A + \tan \angle B \cdot B + \tan \angle C \cdot C}{\tan \angle A + \tan \angle B + \tan \angle C}.$$



外心  $O$  的坐标可以利用正弦定理。设  $AO$  交  $BC$  于  $O_A$ ，则根据正弦定理，

$$\frac{|AO_A|}{\sin \angle B} = \frac{|O_AB|}{\sin \angle O_AAB}.$$

我们知道  $\angle O_AAB = \frac{\pi}{2} - \angle C$ ，所以

$$|O_AB| = \frac{|AO_A| \cos \angle C}{\sin \angle B}.$$

同理，

$$|O_AC| = \frac{|AO_A| \cos \angle B}{\sin \angle C}.$$

所以

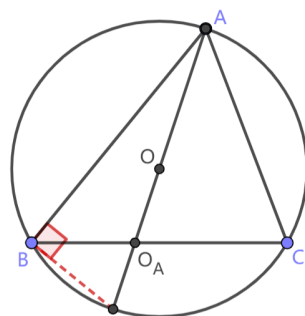
$$\frac{|O_AB|}{|O_AC|} = \frac{\sin \angle C \cos \angle C}{\sin \angle B \cos \angle B} = \frac{\sin 2\angle C}{\sin 2\angle B}.$$

同理可得：

$$\frac{|AO_C|}{|O_CB|} = \frac{\sin 2\angle B}{\sin 2\angle A}, \quad \frac{|CO_B|}{|O_BA|} = \frac{\sin 2\angle A}{\sin 2\angle C}.$$

这说明  $O$  的质心坐标是  $(\sin 2\angle A, \sin 2\angle B, \sin 2\angle C)$ ，即：

$$H = \frac{\sin 2\angle A \cdot A + \sin 2\angle B \cdot B + \sin 2\angle C \cdot C}{\sin 2\angle A + \sin 2\angle B + \sin 2\angle C}.$$



**习题 1.2.1.**

1. 请用三角形  $ABC$  顶点向量  $A, B, C$  表示它的旁心。
2. 设  $\alpha, \beta, \theta$  为实数, 证明:

$$\sin(\alpha - \beta) \cos \theta + \sin(\beta - \theta) \cos \alpha + \sin(\theta - \alpha) \cos \beta = 0,$$

$$\sin(\alpha - \beta) \sin \theta + \sin(\beta - \theta) \sin \alpha + \sin(\theta - \alpha) \sin \beta = 0.$$

### 1.3 圆和直线

### 1.4 圆和圆的关系

## 第二章 空间中的形状

我们已经通过公理体系研究过平面中的简单形状，将基本的平面形和函数的图像联系起来，并且引入了向量的概念。现在，我们进一步研究立体空间中的形状。人类生活在立体空间中，因此，研究空间中形体的性质，对我们认识世界、改造世界有直接帮助。为了更好地理解以下内容，我们建议你准备一把刻度尺和足够的白纸。至于如何在纸面上画出立体形状，可以参考附录 A。

### 2.1 点、直线、平面

和平面形一样，立体空间中的形也是从种种事物的形状总结提炼而来。平面是人类最早总结出的概念之一。我们已经研究过平面中的形状，因此，研究立体空间时，我们把平面作为地位和点、直线相同的基本概念。

研究平面形状时，我们首先引进了公理体系。如今我们将平面公理体系扩展为立体空间的公理体系。为此，我们要通过公设和公理定义平面以及它和点、直线的关系。

我们定义面为点的集合，也是线运动的结果。平面是最基本的面，一般用小写希腊字母  $\alpha, \beta, \gamma$  等表示。

**公理 2. 平面公理** 过不共线的三点，有且仅有一个平面。

我们也说三角形（或圆）确定一个平面。不共线的三点  $A$ 、 $B$ 、 $C$  确定的平面，可以记作平面  $ABC$ 。

如何确定平面是“平”的呢？生活和生产中，我们一般用直线来确定一个面是不是平的。比如，木工常常用角尺的直角边放在刨好的木板上。如果直角边总能与板面紧密贴合，就说明木板已刨平了。水泥工用直的刮子将刚铺水泥的地面刮平。我们把人们总结出的经验作为判断平面的方法，用公理的形式确定下来。

**公理 3. 平直公理** 过平面上不重合两点的直线，在平面中。

平直公理说明，直线要么与平面没有公共点，要么只交于一点，要么全部在平面里。直线与平面没有公共点，则称直线与平面平行，也用  $//$  标记；直线与平面恰有一公共点，则称直线与平面相交；直线与平面有两个或以上公共点，则称直线在平面中或平面经过直线。用集合的语言来说，直线  $l$  在平面  $\gamma$  中，就说明  $l$  是  $\gamma$  的子集。

从平面公理和平直公理，容易得到另两种定义平面的方法：

**定理 2.1.1.** 过一条直线与该直线外一点，有且仅有一个平面。

**证明：** 设直线为  $l$ ， $P$  为  $l$  外一点。取  $l$  上不同的两点，和  $P$  构成不共线的三点。这三点确定一个平面。根据平直公理， $l$  在该平面中。  $\square$

**定理 2.1.2.** 过两条相交的直线，有且仅有一个平面。

**证明：** 设有直线  $l, m$ 。如果  $l, m$  相交，设交点为  $P$ ，在  $l, m$  上各取不同于  $P$  的一点： $Q, R$ ，则  $P, Q, R$  不共线，于是确定一个平面  $PQR$ ，根据平直公理， $l, m$  都在  $PQR$  中。  $\square$

设直线  $l$  与平面  $\gamma$  平行，没有公共点，那么它与  $\gamma$  中任何直线没有公共点。比如，给定  $\gamma$  中一点  $A$ ， $\gamma$  中经过  $A$  的任何直线，都与  $l$  没有公共点。



平面中，两直线没有公共点，就说它们相互平行。空间中，两直线除了重合、相交和平行，还有另一种关系，我们称之为直线**异面**。前面的例子中，根据平行公理，过  $\gamma$  中的点  $A$ ，恰有一条直线与  $l$  平行，其余与  $l$  不相交的直线，都称与  $l$  异面。

哪条直线与  $l$  平行呢？显然，在空间中，我们需要补充平行公理：

**公理 4. 平行公理** 过直线外一点，有且仅有一条与它平行的直线。它在直线与点确定的平面上。

新版的平行公理在原来的基础上，指定了平行线的位置：在直线与点确定的平面上。换句话说，平行是一个平面内性质。两直线平行的关系必然发生在同一平面中。也正因如此，我们把其它的无公共点的情形叫做异面。

从补充的平行公理出发，可以得到另一种定义平面的方法：

**定理 2.1.3.** 过两条平行的直线，有且仅有一个平面。

**证明：** 设直线  $l \parallel m$ ，在  $l$  上找两点  $P_1, P_2$ ，在  $m$  上找一点  $Q$ 。 $P_1P_2Q$  确定唯一平面  $\gamma$ 。在平面  $\gamma$  中，过  $Q$  作  $l$  的平行线。根据平行公理，这条平行线就是  $m$ 。因此  $l, m$  共面，它们确定唯一平面  $\gamma$ 。  $\square$

再来看两个平面的关系。两个平面相交，交集是什么呢？生活中的经验告诉我们，两个平面相交，交集是直线。比如，裁纸刀的刀面是平的，切在纸上，将纸面分成两部分，裁痕是直的。我们把这个性质用公理描述为：

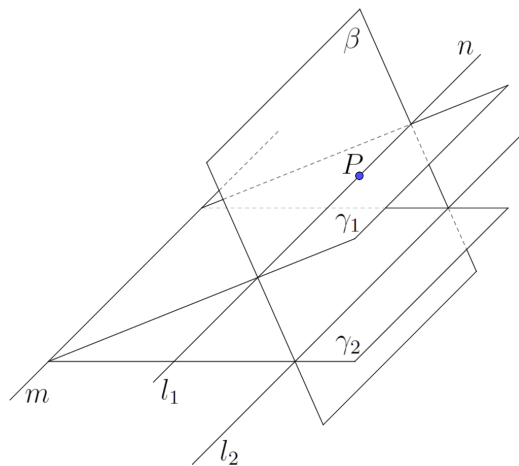
**公理 5. 交面公理** 两个平面如果有交集，则交集至少包含两个不重合的点。

交面公理说明，两个平面不可能只交于一点。如果它们有两个（不重合的）公共点，那么根据平直公理，两平面的交集包括过这两点的直线。而如果两平面的交集中还有不属于这条直线的第三点，那么根据平面公理，这三点确定一个平面，于是两平面重合。

综上所述, 从交面公理可以推出: 要么两平面没有公共点, 要么交集为一条直线  $l$ , 称为两平面相交于直线  $l$ ; 要么两平面重合。

有了交面公理, 我们可以证明空间中平行直线的递推性质。由于证明繁琐, 有些地方把它当作公理引入。

**定理 2.1.4.** 如果直线  $l_1, l_2$  都平行于直线  $m$ , 那么  $l_1, l_2$  平行或重合。



**证明:** 设  $l_1, m$  确定的平面为  $\gamma_1$ ,  $l_2, m$  确定的平面为  $\gamma_2$ 。分两种情况讨论:

1.  $\gamma_1, \gamma_2$  重合。那么  $l_1, l_2, m$  都在此平面上。根据平面直线的结论,  $l_1, l_2$  平行或重合。

2.  $\gamma_1, \gamma_2$  不重合。于是  $\gamma_1 \cap \gamma_2 = m$ 。取  $l_1$  上一点  $P$ ,  $P$  与  $l_2$  确定平面  $\beta$ 。  $l_2 \notin \gamma_1$ , 所以  $\beta, \gamma_1$  不重合。设  $\beta \cap \gamma_1 = n$ 。直觉上, 可以想到  $n$  就是  $l_1$ , 且  $n \parallel l_2$ , 下面来说明这两点。

首先证明  $n \parallel l_2$ 。反设  $n$  交  $l_2$  于点  $Q$ , 则  $Q \in \gamma_1 \cap \gamma_2 = m$ , 于是  $Q \in m \cap l_2$ 。这与  $m \parallel l_2$  矛盾。因此  $n \parallel l_2$ 。

再证明  $n \parallel m$ 。反设  $n$  交  $m$  于点  $Q$ , 则过  $Q$  有  $m \parallel l_2$  和  $n \parallel l_2$ , 于是  $n = m$ 。但  $P \in n$ , 因此  $P \in m \cap l_1$ , 这与  $m \parallel l_1$  矛盾。因此  $n \parallel m$ 。

$n$  与  $l_1$  都平行于  $m$ , 且有公共点  $P$ , 所以  $n = l_1$ 。所以  $l_1 \parallel l_2$ 。

□

接下来回顾直线与平面的关系。从补充后的平行公理, 可以得出直线与平面平行的判定方法:

**定理 2.1.5.** 如果平面  $\alpha$  中有直线  $m$  平行于直线  $l$ , 那么  $l$  平行于平面  $\alpha$  或在  $\alpha$  中。

**证明:** 设直线  $l$  平行于平面  $\alpha$  中的某直线  $m$ 。记  $l, m$  确定的平面为  $\beta$ 。则要么  $\alpha = \beta$ , 要么  $\alpha \cap \beta = m$ 。如果  $\alpha = \beta$ , 那么  $l \subset \alpha$ 。如果  $\alpha \cap \beta = m$ , 那么  $\alpha \cap l = \beta \cap \alpha \cap l = m \cap l = \emptyset$ , 即  $\alpha \parallel l$ 。□

**定理 2.1.6.** 如果直线  $l$  与平面  $\alpha$  平行, 那么经过  $l$  的任意平面, 若与  $\alpha$  相交, 其交线也与  $l$  平行。

**证明:** 设经过  $l$  的平面  $\gamma$  与  $\alpha$  交于直线  $m$ 。一方面,  $m, l$  共面; 另一方面  $m \in \alpha$ , 因此  $m, l$  无公共点。这说明  $m \parallel l$ 。□

从这些结论可以继续推出:

**定理 2.1.7.** 若直线  $l$  与平面  $\alpha$  平行, 过  $\alpha$  中任一点作  $l$  的平行线  $m$ , 则  $m$  在平面  $\alpha$  中。

**证明:** 若直线  $l$  与平面  $\alpha$  平行, 设它和  $\alpha$  中任一点  $P$  确定的平面为  $\beta$ , 则  $\beta$  与  $\alpha$  相交。设交线为  $m$ , 则  $P \in m$ 。根据定理 2.1.6,  $l \parallel m$ 。这就说明, 过  $P$  而平行于  $l$  的直线在  $\alpha$  中。□

**定理 2.1.8.** 直线  $l$  与直线  $m$  平行, 则过  $m$  的平面要么与  $l$  平行, 要么经过  $l$ 。

**证明:** 给定过  $m$  的平面  $\alpha$ ,  $m \subset \alpha$  与  $l$  平行, 所以根据定理 2.1.5,  $l$  平行于平面  $\alpha$  或在  $\alpha$  中。□

直线与平面的平行关系, 也有传递性。

**定理 2.1.9.** 若直线  $l_1$  与直线  $l_2$  平行, 且与平面  $\gamma$  平行, 则  $l_2$  与  $\gamma$  平行或在  $\gamma$  中。

**证明：**  $l_1 \parallel \gamma$ 。过  $\gamma$  中任一点作直线  $n \parallel l_1$ ，则根据定理 2.1.7， $n$  在  $\gamma$  中。  
 $n \parallel l_1$ ， $l_1 \parallel l_2$ ，所以根据定理 2.1.4， $n \parallel l_2$ 。根据定理 2.1.5， $l_2 \parallel \gamma$  或在  $\gamma$  中。  $\square$

上面提到，两平面要么无公共点，要么相交，要么重合。我们把无公共点的平面称为**平行平面**，也用  $\parallel$  表记。平面中，平行公理告诉我们，过直线外一点，恰有一条直线与之平行。空间中的平面，也有类似的结论：

**定理 2.1.10.** 过平面外一点，恰有一平面与之平行。

**证明：** 设平面  $\alpha$  外有点  $P$ 。在  $\alpha$  上选一点  $A$ ，过  $A$  作两相交直线  $l, m$  (交点为  $A$ )。根据平行公理，过  $P$  恰有直线  $l', m'$  分别与  $l, m$  平行。 $l', m'$  相交于点  $P$ ，确定平面  $\alpha'$ 。下面证明  $\alpha, \alpha'$  无公共点，即  $\alpha' \parallel \alpha$ 。

反设  $\alpha, \alpha'$  有公共点。由于  $P \in \alpha'$  在  $\alpha$  外，两者不重合。因此根据交面公理， $\alpha \cap \alpha'$  是一条直线，记为  $n$ 。 $l, m, n$  共面， $l, m$  相交，因此  $l, m$  中至少有一条与  $n$  相交。设  $l$  与  $n$  相交，交点为  $Q$ ，则  $Q \in n \subset \alpha'$ 。又因为  $l \parallel l'$ ， $Q \in l$ ，所以  $Q \notin l'$ ，因而在  $\alpha'$  中，过  $Q$  可作  $l'$  的平行线。但这条线在  $\alpha'$  中，因此不是  $l$ 。这与平行公理矛盾。

因此， $\alpha, \alpha'$  无公共点， $\alpha' \parallel \alpha$ 。  $\square$

类似的结论还有：

**定理 2.1.11.** 过平行于平面  $\alpha$  的一直线  $l$ ，恰有一平面与  $\alpha$  平行。

**证明：** 在  $l$  上任取一点  $P$ ， $P \notin \alpha$ ，因此根据定理 2.1，过  $P$  恰有一平面  $\beta$  与  $\alpha$  平行，只需证明  $\beta$  经过  $l$ 。在  $\alpha$  中任取一点  $Q$ ，则根据定理 2.1.7，过  $Q$  平行于  $l$  的直线  $m$  在  $\alpha$  中。 $\beta$  与  $\alpha$  平行，也就是说  $\beta$  与  $\alpha$  无公共点，所以  $\beta$  与  $\alpha$  的子集  $m$  也无公共点，即  $m \parallel \beta$ 。过  $P$  作  $m$  的平行线，则根据定理 2.1.7，平行线在  $\beta$  中。而这条平行线就是  $l$ ，所以  $l$  在  $\beta$  中。这说明过  $l$  恰有一平面  $\beta$  与  $\alpha$  平行。  $\square$

从证明中，我们还可以提炼出判定平面平行（或重合）的准则：

**定理 2.1.12.** 给定平面  $\gamma_1, \gamma_2$ 。设  $l, m$  为  $\gamma_1$  中的相交直线。若  $\gamma_2$  中有直线  $l', m'$  分别与  $l, m$  平行或重合，则平面  $\gamma_1, \gamma_2$  平行或重合。

**证明：** 两平面要么相互平行，要么重合，要么相交于一直线。反设  $\gamma_1, \gamma_2$  相交于直线  $n$ 。

如果  $l = l'$ ，那么  $l \subset \gamma_1 \cap \gamma_2$ ，于是  $n = l = l'$ 。设  $m, l$  交于点  $P$ ， $m', l'$  交于点  $Q$ 。如果  $P = Q$ ，那么  $m = m'$ ，于是  $\gamma_1, \gamma_2$  都是  $l, m$  确定的平面， $\gamma_1 = \gamma_2$ 。如果  $P \neq Q$ ，那么  $P \notin m'$ 。但  $P \in l = n \subset \gamma_2$ ，因此过  $P$  作  $m'$  的平行线，平行线应该在  $\gamma_2$  中，因此根据平行公理， $m$  在  $\gamma_2$  中。这说明  $\gamma_1, \gamma_2$  都是  $l, m$  确定的平面， $\gamma_1 = \gamma_2$ 。于是总有两平面重合，矛盾。

如果  $l \parallel l'$ ，由于  $l, m, n$  共面，且  $l, m$  相交，因此  $l, m$  中至少有一条与  $n$  相交。设  $l$  与  $n$  相交，交点为  $Q$ ，则  $Q \in n \subset \gamma_2$ 。又因为  $l \parallel l'$ ， $Q \in l$ ，所以  $Q \notin l'$ 。在  $\gamma_2$  中，过  $Q$  可作  $l'$  的平行线。但这条线在  $\gamma_2$  中，因此不是  $l$ 。这与平行公理矛盾。

因此，平面  $\gamma_1, \gamma_2$  平行或重合。  $\square$

平行平面之间，也有类似平行直线的传递性。

**定理 2.1.13.** 如果平面  $\gamma_1, \gamma_2$  都平行于平面  $\beta$ ，那么  $\gamma_1, \gamma_2$  平行或重合。

我们先证明一个小结论：

**定理 2.1.14.** 设平面  $\gamma_1 \parallel \gamma_2$ 。平面  $\beta$  与  $\gamma_1, \gamma_2$  相交于直线  $l_1, l_2$ ，则  $l_1 \parallel l_2$ 。

**证明：** 一方面， $l_1, l_2$  共面。另一方面， $\gamma_1 \parallel \gamma_2$  说明  $l_1, l_2$  无公共点。所以  $l_1 \parallel l_2$ 。  $\square$

从这个结论还可以推出：如果平面  $\gamma_1 \parallel \gamma_2$ ，那么对  $\gamma_1$  中任意直线，过  $\gamma_2$  中任一点，作它的平行线，平行线都在  $\gamma_2$  中。

再来证明定理 2.1.13。

**证明：** 已知平面  $\gamma_1, \gamma_2$  都平行于平面  $\beta$ 。在  $\beta$  中找一点  $P$ ，过  $P$  作相交直线  $l, m$ 。在  $\gamma_1$  中找一点  $Q$ ，过  $Q$  分别作  $l, m$  的平行线  $l_1, m_1$ ，则  $l_1, m_1$  都在  $\gamma_1$  中。它们分别是平面  $\gamma_1$  与  $l, Q$  确定的平面  $\alpha_1$ 、平面  $\gamma_1$  与  $m, Q$  确定的平面  $\alpha_2$  的交线。设  $\alpha_1, \alpha_2$  分别与  $\gamma_2$  交于  $l_2, m_2$ ，由于  $\gamma_2 \parallel \beta$ ，所以根据定理 2.1.6， $l_2 \parallel l$ ， $m_2 \parallel m$ 。因此根据定理 2.1.4， $l_2$  与  $l_1$  平行或重合， $m_2$  与  $m_1$  平行或重合。根据定理 2.1.12， $\gamma_1, \gamma_2$  平行或重合。  $\square$

最后，我们还可以得到：

**定理 2.1.15.** 若平面  $\gamma_1$  与直线  $l$  平行，且与平面  $\gamma_2$  平行，则  $l$  与  $\gamma_2$  平行或在  $\gamma_2$  中。

**证明：**  $l \parallel \gamma_1$ ，所以过  $l$  恰有一平面  $\beta$  与  $\gamma_1$  平行。如果  $\beta = \gamma_2$ ，则  $l \subset \gamma_2$ 。如果  $\beta \parallel \gamma_2$ ，那么  $l \parallel \gamma_2$ 。如果  $\beta$  与  $\gamma_2$  相交于直线  $m$ ，那么由于  $m, l$  共面且无公共点， $m \parallel l$ 。于是，根据定理 2.1.5， $l \parallel \gamma_2$  或在  $\gamma_2$  中。  $\square$

总结：

我们初步建立了关于空间形状的公理体系，引入了空间中平面的概念，并界定了点、直线和平面的关系：

1. 直线和平面都是点的集合。
2. 直线可能与平面平行、相交，或在平面中。
3. 直线可能与直线异面、平行、相交、重合。
4. 平面可能与平面平行、相交、重合。
5. 直线与直线相交于一点，直线与平面相交于一点，平面与平面相交于一直线。

**思考 2.1.1.**

1. 定理 2.1.15 的证明中，我们讨论了  $\beta$  与  $\gamma_2$  相交于直线  $m$  的情形。

实际上  $\beta$  是否会与  $\gamma_2$  相交? 如何看待这个论证?

### 习题 2.1.1.

1. 证明: 如果直线  $l$  与直线  $m$  平行, 那么过  $l$  的平面与过  $m$  的平面要么平行, 要么重合, 要么交于  $l, m$  之一, 要么交于与  $l, m$  都平行的直线  $n$ 。

## 2.2 空间向量

上一节中, 我们使用公理体系讨论空间中的形状。可以看到, 使用公理体系讨论虽然严谨, 但过于抽象, 步骤繁琐。仅处理点线面的平行关系, 就需要大量的篇幅。为此, 我们尝试用向量的概念来讨论空间中的形状。

平面中, 我们用向量表示点, 以及原点到此点的平移。现在我们把向量的概念扩展到空间中。我们把空间看作集合, 记为  $\mathbb{V}$ , 其中的元素称为向量或点。向量满足如下规则:

1. 加法结合律:  $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{V}, \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}$ 。
2. 加法交换律:  $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{V}, \mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$ 。
3. 存在零向量:  $\forall \mathbf{a} \in \mathbb{V}, \mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$ 。
4. 放缩和四则运算相容:  $\forall \mathbf{a} \in \mathbb{V}, 1 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a}$ 。  $\forall s, t \in \mathbb{R}, (s + t) \cdot \mathbf{a} = (s \cdot \mathbf{a}) + (t \cdot \mathbf{a}), (s \cdot t) \cdot \mathbf{a} = s \cdot (t \cdot \mathbf{a})$ 。
5. 放缩和平移相容:  $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{V}, \forall t \in \mathbb{R}, t \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = t \cdot \mathbf{a} + t \cdot \mathbf{b}$ 。

这个定义与平面向量相同。在此基础上, 我们用同样的方式定义直线、线段和射线。

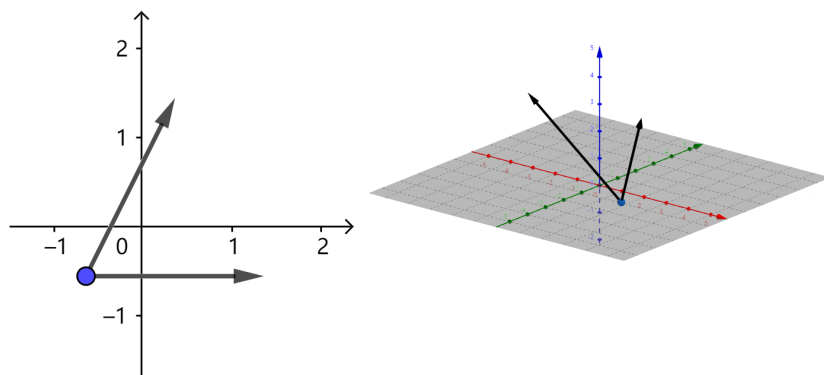
**定义 2.2.1.** 过原点的直线是非零向量放缩得到的集合。不过原点的直线是过原点的直线按一点平移得到的集合。

给定非零向量  $A = \mathbf{a}$ ,  $\{t\mathbf{a} | t \in \mathbb{R}\}$  是一条过原点  $O$  和  $A$  的直线  $OA$ , 称为  $A$  引出的直线, 记为  $\mathbb{R}\mathbf{a}$ 。  $\mathbf{a}$  称为直线的方向向量。给定向量  $B = \mathbf{b}$ ,

$\{t\mathbf{a} + \mathbf{b} \mid t \in \mathbb{R}\}$  是一条方向为  $\mathbf{a}$  且经过  $B$  的直线, 记为  $\mathbb{R}\mathbf{a} + \mathbf{b}$ , 其中  $\mathbb{R}\mathbf{a}$  称为它的**线性部分**; 而  $\{t\mathbf{a} + (1-t)\mathbf{b} \mid t \in \mathbb{R}\}$  就是直线  $AB$ 。

给定非零向量  $\mathbf{a}$ , 如果向量  $\mathbf{b}$  可以通过  $\mathbf{a}$  放缩得到, 或者说  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}\mathbf{a}$ , 就称两者**共线**。

类比可以定义线段和射线: 给定非零向量  $A = \mathbf{a}$  和向量  $B = \mathbf{b}$ ,  $\{(1-t)\mathbf{a} + t\mathbf{b} \mid t \in [0, 1]\}$  是线段  $AB$ ,  $\{(1-t)\mathbf{a} + t\mathbf{b} \mid t \geq 0\}$  是射线  $AB$ 。



平面和立体空间中的向量

空间向量与平面向量的唯一不同的地方在于, 空间向量遵循的不再是平面的根本性质, 而是空间的根本性质。为了描述空间的根本性质, 我们首先引进线性相关的概念:

**定义 2.2.2.** 给定  $n$  个向量  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ , 对实数  $t_1, t_2, \dots, t_n$  来说,  $t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + \dots + t_n\mathbf{a}_n$  称为这  $n$  个向量的**线性组合**。如果存在一组不全为零的实数  $t_1, t_2, \dots, t_n$ , 使得线性组合  $t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + \dots + t_n\mathbf{a}_n$  是零向量, 就说这  $n$  个向量**线性相关**。如果不存在这样一组实数, 就说这  $n$  个向量**线性无关**。

举例来说, 单个非零向量总是线性无关的, 因为非零实数乘以非零向量总得到非零向量。又如: 如果有不全为零的实数  $t_1, t_2$  使得平面向量  $A, B$  的线性组合:  $t_1A + t_2B$  等于零向量, 就说  $A, B$  线性相关。



具体来说, 平面直角坐标系中, 令  $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$ ,  $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$ 。如果  $A = 2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$ ,  $B = -6\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2$ , 那么

$$3A + B = \mathbf{0}.$$

也就是说, 选取  $t_1 = 3$ ,  $t_2 = 1$ , 就使得线性组合:  $t_1A + t_2B$  等于零向量。因此, 以上两个向量  $A, B$  线性相关。

设  $A = 2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$ ,  $B = \mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2$ , 那么对任何  $t_1, t_2$ , 线性组合  $t_1A + t_2B$  可以写为:

$$\begin{aligned} t_1A + t_2B &= t_1(2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2) + t_2(\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2) \\ &= (2t_1 + t_2)\mathbf{e}_1 + (-t_1 + 3t_2)\mathbf{e}_2. \end{aligned}$$

要使得  $t_1A + t_2B$  为零向量  $(0, 0)$ , 就要求它的横坐标和纵坐标同时为零。也就是说,  $t_1, t_2$  应该是二元一次方程组

$$\begin{cases} 2t_1 + t_2 = 0 \\ -t_1 + 3t_2 = 0 \end{cases}$$

的解。解这个二元一次方程组, 得到  $t_1 = t_2 = 0$ 。也就是说, 不存在不全为零的实数  $t_1, t_2$ , 使得线性组合  $t_1A + t_2B$  为零向量。我们说  $A, B$  线性无关。

以上的例子也给出了判断一组向量是否线性相关的方法。我们将“线性组合  $t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + \cdots + t_n\mathbf{a}_n$  是零向量”的条件转化为关于  $t_1, t_2, \cdots, t_n$  的多元一次方程组。如果方程组的解集中有不全为零的解, 这组向量就线性相关。如果方程组没有不全为零的解, 就说这组向量线性无关。

直观来看, 两个平面向量线性相关和共线是一回事。 $A, B$  线性相关, 就是说有不全为零的实数  $t_1, t_2$  使得  $t_1A + t_2B$  等于零向量。不妨设  $t_1$  不为零, 那么  $A = -\frac{t_2}{t_1}B$ , 因此  $A \in \mathbb{R}B$ , 即  $A, B$  共线。反之亦然。平面的根本性质告诉我们, 存在两个不共线的向量, 也就是说, 不多于两个平面向量, 可以线性无关。

如果向量多于两个,平面的根本性质告诉我们,只要其中两个向量  $A, B$  不共线,其余的向量都可以表示成  $sA+tB$  的形式。因此,设有平面向量  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ 。如果  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$  共线,那么它们线性相关,存在  $t_1\mathbf{a}_1+t_2\mathbf{a}_2=\mathbf{0}$ 。于是

$$t_1\mathbf{a}_1+t_2\mathbf{a}_2+\sum_{i>2}0\cdot\mathbf{a}_i=\mathbf{0}.$$

如果  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$  不共线,那么根据平面的根本性质,  $\mathbf{a}_3$  可以写成:

$$\mathbf{a}_3=s\mathbf{a}_1+t\mathbf{a}_2.$$

于是

$$s\mathbf{a}_1+t\mathbf{a}_2-1\cdot\mathbf{a}_3+\sum_{i>3}0\cdot\mathbf{a}_i=\mathbf{0}.$$

也就是说,多于两个平面向量总线性相关。

这个结论反映了平面向量的本质:可以选出两个向量,所有向量都可以从它们开始,通过平移、放缩得到。这两个向量叫作平面的基底。而空间中的点显然不一定在同一个平面里。我们把平面的根本性质替换为**空间的根本性质**:

1. 给定一个非零向量,总能找到另一个向量,使得两者线性无关。
2. 给定两个线性无关的向量,总能找到另一个向量,使得三者线性无关。
3. 从线性无关的向量  $A, B, C$  出发,经过放缩、平移,可以得到空间中任何向量。具体来说,任何向量都可以表示成  $sA+tB+uC$  的形式,集合  $\{sA+tB+uC \mid s, t, u \in \mathbb{R}\}$  就是整个空间。这样的  $A, B, C$  称为空间的一组**基或基底**。

对比平面和空间的根本性质,可以发现,主要的变化是“2 变成 3”。平面中保证存在两个线性无关的向量,空间中保证存在三个线性无关的向量。按照类似的推理,我们可以得到结论:不多于三个空间向量,可以线性无关;多于三个空间向量,总是线性相关。我们把这个数字称为**维数**。平面的维数是 2,立体空间的维数是 3。

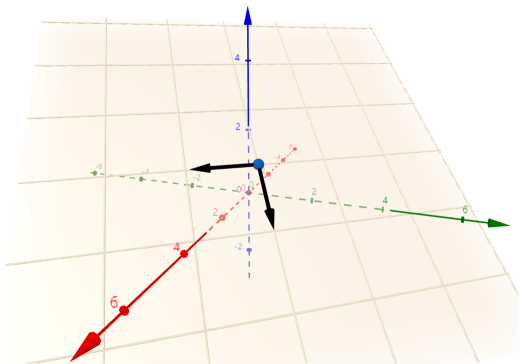
与平面向量一样，给定基底后，任一空间向量  $\mathbf{a}$  可以唯一地写成基向量的线性组合：

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{e}_x + a_y \mathbf{e}_y + a_z \mathbf{e}_z.$$

其中  $a_x, a_y, a_z$  是实数。 $(a_x, a_y, a_z)$  称为  $\mathbf{a}$  的坐标， $a_x, a_y, a_z$  称为它的坐标分量。

于是我们可以定义立体空间中的平面：

**定义 2.2.3.** 过原点的平面是两个线性无关的向量通过平移、放缩得到的集合。不过原点的平面是过原点的平面按一点平移得到的集合。



从向量到平面

给定线性无关的向量  $A = \mathbf{a}, B = \mathbf{b}$ ， $\{s\mathbf{a} + t\mathbf{b} \mid s, t \in \mathbb{R}\}$  是一个过原点  $O$  和  $A, B$  的平面  $OAB$ ，也称为向量  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  生成的平面，简记为  $\mathbb{R}\mathbf{a} + \mathbb{R}\mathbf{b}$ 。 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  也称为  $\mathbb{R}\mathbf{a} + \mathbb{R}\mathbf{b}$  的生成向量。给定向量  $C = \mathbf{c}$ ， $\{s\mathbf{a} + t\mathbf{b} + \mathbf{c} \mid s, t \in \mathbb{R}\}$  是一个过  $C$  的平面，也记为  $\mathbb{R}\mathbf{a} + \mathbb{R}\mathbf{b} + \mathbf{c}$ 。 $\mathbb{R}\mathbf{a} + \mathbb{R}\mathbf{b}$  称为它的线性部分。而  $\{s\mathbf{a} + t\mathbf{b} + (1 - s - t)\mathbf{c} \mid s, t \in \mathbb{R}\}$  就是过  $A, B, C$  的平面  $ABC$ 。

来看几个具体的例子。选定空间的一组基底  $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ ，我们可以构建坐标系  $Oxyz$ ，其中  $x$  轴、 $y$  轴、 $z$  轴分别是基向量引出的直线  $\mathbb{R}\mathbf{e}_x, \mathbb{R}\mathbf{e}_y, \mathbb{R}\mathbf{e}_z$ 。空间中任一点  $A$  的坐标是  $(a_x, a_y, a_z)$ 。 $x$  轴、 $y$  轴构成平面：

$$Oxy : \{s\mathbf{e}_x + t\mathbf{e}_y \mid s, t \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}\mathbf{e}_x + \mathbb{R}\mathbf{e}_y.$$

$x$  轴、 $z$  轴构成平面：

$$Oxz : \{s\mathbf{e}_x + t\mathbf{e}_z \mid s, t \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}\mathbf{e}_x + \mathbb{R}\mathbf{e}_z.$$

$y$  轴、 $z$  轴构成平面：

$$Oyz : \{s\mathbf{e}_y + t\mathbf{e}_z \mid s, t \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}\mathbf{e}_y + \mathbb{R}\mathbf{e}_z.$$

给定点  $A(3, 0, 0)$ 、 $B(0, 2, 0)$ 、 $C(0, 0, 1)$ ，则经过它们的平面为：

$$\{sA + tB + (1 - s - t)C \mid t \in \mathbb{R}\} = \{(3s, 2t, 1 - s - t) \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

可以验证，这样定义的点、直线、平面符合上一节中的各个公理（见附录 B）。

### 思考 2.2.1.

1. 张三这样总结空间向量的特性：一个向量平移缩放得到一条直线；两个向量平移缩放可以得到一个平面；三个向量平移缩放可以得到整个空间。怎么看待这个说法？

2. 是否有维数大于 3 的空间？如何在这样的空间中定义向量？这样定义的向量和空间和 2 维、3 维的向量有什么相同和不同之处？

### 习题 2.2.1.

1. 证明：如果一组线性无关的向量的线性组合等于零向量，那么线性组合中每个向量的系数都是 0。

2. 证明：给定空间一组基底，空间中每个向量都可以唯一写成基向量的线性组合。

3. 判断以下向量是否线性相关：

①.  $(1, 2, 3), (4, 5, 6), (7, 8, 9)$                       ②.  $(1, 0, -1), (1, 2, 0), (-2, 2, 3)$

③.  $(2, 1, -1), (2, -5, -7), (1, -1, -2)$     ④.  $(a, 0, b), (b, -a, 0), (a, b, 0)$

4. 已知直线  $\mathbb{R}\mathbf{a} + \mathbf{b}$  和直线外一点  $P$ ，如何表示它们确定的平面？

5. 一直两条直线相交于点  $P$ ，方向向量分别是  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ ，如何表示这两条

直线, 以及它们确定的平面?

6. 设有向量  $\mathbf{a} = (0, 1, 1)$ 、 $\mathbf{b} = (2, -1, 0)$ 、 $\mathbf{c} = (1, 1, -1)$ 。平面  $\gamma = \{s\mathbf{a} + t\mathbf{b} + \mathbf{c} \mid s, t, \in \mathbb{R}\}$ 。

6.1. 判断点  $(5, 1, -2)$ 、 $(3, 2, 1)$ 、 $(0, 5, 0)$  是否在平面上。

6.2. 点  $(1, 0, 0) + u(0, -1, 3)$  在平面  $\gamma$  中, 求它的坐标。

6.3. 直线  $l$  在平面  $\gamma$  中, 证明: 它的方向向量是  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  的线性组合。

## 2.3 角度和长度

我们可以通过向量引进空间中角度、长度和距离的概念。和平面中一样, 我们选定空间的一组基底  $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ , 然后定义内积:

$$\begin{aligned}\forall A = a_x \mathbf{e}_x + a_y \mathbf{e}_y + a_z \mathbf{e}_z, B = b_x \mathbf{e}_x + b_y \mathbf{e}_y + b_z \mathbf{e}_z, \\ A \cdot B = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.\end{aligned}$$

如果向量  $A, B$  的内积等于 0, 就说它们垂直。我们定义向量  $A$  的长度为

$$\|A\| = \sqrt{A \cdot A} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2},$$

长度为 1 的向量称为**单位向量**。任何非零向量除以自己的长度, 都得到一个与自己共线的单位向量。我们把这个操作称为**向量的归一**。

两点  $A, B$  之间的距离是:

$$\|A - B\| = \sqrt{(A - B) \cdot (A - B)} = \sqrt{(a_x - b_x)^2 + (a_y - b_y)^2 + (a_z - b_z)^2}.$$

平面向量的内积, 小于等于长度之积。空间向量也有类似的性质:

$$\begin{aligned}& (a_x^2 + a_y^2 + a_z^2)(b_x^2 + b_y^2 + b_z^2) \\&= (a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z)^2 + (a_x b_y - a_y b_x)^2 + (a_x b_z - a_z b_x)^2 + (a_y b_z - a_z b_y)^2 \\&\geq (a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z)^2\end{aligned}$$

这个不等式也称为**内积不等式**。由此, 类比平面向量, 我们可以定义**空间向量的夹角**:

$$\cos \angle AOB = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{(a_x^2 + a_y^2 + a_z^2)(b_x^2 + b_y^2 + b_z^2)}}$$

直线是非零向量放缩的结果, 所以, 可以定义空间中两条直线的夹角为它们的方向向量的夹角。

向量  $A, B$  垂直时,  $\cos \angle AOB = 0$ , 即夹角为  $90^\circ$ 。向量夹角为  $0^\circ$ 、 $180^\circ$  时, 两向量共线, 两直线同向或反向。要注意的是, 空间中, 我们无法定义两向量夹角的方向。

### 思考 2.3.1.

1. 内积不等式取等号的条件是什么? 如何从直观上理解?
2. 平面中, 向量夹角的正弦与向量长度的乘积对应着向量的面积。立体空间中, 是否可以作类似的定义? 如何从直观上理解?

### 习题 2.3.1.

1. 已知向量  $A(-1, 3, 1)$ 、 $B(1, 2, 0)$ , 求它们的长度、内积和夹角。它们是否垂直?
2. 已知向量  $A(-2.4, 0, 1)$ 、 $B(0.5, 1, 1.2)$ , 求它们的长度、内积和夹角。它们是否垂直?
3. 已知直线  $l_1: \mathbb{R}(1, 2, -2.5) + (0, -1, -1)$ 、 $l_2: \mathbb{R}(2, 0, 0.8) + (-2.5, 1.1, 1.7)$ , 求两直线的夹角。它们是否垂直? 是否有公共点?
4. 已知向量  $A(2, 0, 1)$ , 求与  $A$  夹角为  $60^\circ$  的单位向量。

## 2.4 垂直和投影

通过内积, 我们已经定义了空间向量以及直线间的垂直关系。下面来看直线与平面的垂直关系。直线与平面垂直, 是直线与平面相交的特殊情形。

**定义 2.4.1.** 给定直线  $l$  和平面  $\gamma$ ，如果  $\gamma$  中任意直线都与  $l$  垂直，就说平面  $\gamma$  与  $l$  垂直。

用向量的语言来说，直线垂直于平面，即垂直于它的线性部分中的所有向量。

给定了直线和平面，如何判定它们垂直呢？我们从以下基本性质出发：

**定理 2.4.1.** 如果向量  $\mathbf{a}$  垂直于另两个向量  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ ，那么  $\mathbf{a}$  也与  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  的任何线性组合垂直。

**证明：** 如果  $\mathbf{a} \perp \mathbf{u}$ 、 $\mathbf{a} \perp \mathbf{v}$ ，按照定义，

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{v} = 0.$$

于是， $\forall s, t \in \mathbb{R}$ ,

$$\mathbf{a} \cdot (s\mathbf{u} + t\mathbf{v}) = s\mathbf{a} \cdot \mathbf{u} + t\mathbf{a} \cdot \mathbf{v} = 0.$$

□

给定直线  $l$  和平面  $\gamma$  中两条相交直线。设  $l$  的方向向量为  $\mathbf{a}$ ，两条相交直线相交于点  $P$ ，方向向量为线性无关的向量： $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ ，那么  $\gamma$  可以表示成

$$\gamma = \{s\mathbf{u} + t\mathbf{v} + P \mid s, t \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}\mathbf{u} + \mathbb{R}\mathbf{v} + P.$$

因此， $\gamma$  中任一直线的方向向量总是  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  的线性组合。如果  $\mathbf{a}$  垂直于  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ ，那么根据定理 2.4.1， $l$  垂直于  $\gamma$  中任一直线，因而垂直于平面  $\gamma$ 。我们可以把这个结论总结为：

**定理 2.4.2.** 直线与平面垂直，当且仅当它垂直于平面中两条相交直线。

接下来我们自然要问：给定了平面，是否有与它垂直的直线呢？

从以上的讨论来看，关键是找到与平面中两个线性无关的向量都垂直的向量。

首先来看平面中的情况。给定非零平面向量  $A$ ，是否有（非零）向量与它垂直？根据平面的根本性质，总存在与  $A$  不共线的向量  $B$ 。但  $B$  不一定与  $A$  垂直。下面我们从  $B$  出发，找一个与  $A$  垂直的非零向量。

直观上，向量  $A, B$  确定一个平行四边形，我们将它沿着  $A$  的方向“平推”，可以把它“扶正”，变成一个矩形。矩形的另一边就和  $A$  垂直了。把这个想法用向量表示，我们考虑向量  $B' = B + uA$ ，其中  $u \in \mathbb{R}$  是系数。 $B'$  是  $B$  沿  $A$  方向移动得到的。我们希望  $B' \perp A$ ，即内积为 0：

$$A \cdot B' = A \cdot (B + uA) = 0$$

解得  $u = -\frac{A \cdot B}{A \cdot A}$ 。这样我们就找到了垂直于  $A$  的非零向量  $B' = B - \frac{A \cdot B}{A \cdot A}A$ 。

直观来看，过  $B$  作直线  $OA$  的垂线，设垂足为  $P$ ，则  $\frac{A \cdot B}{A \cdot A}A$  就是向量  $OP$ 。如果想象  $OA$  为水平线，线段  $OB$  是一根杆子，那么线段  $OP$  可以看成  $OB$  在竖直照射的阳光下的影子。我们把向量  $\overrightarrow{OP}$  称为向量  $\overrightarrow{OB}$  在直线  $OA$  上的投影。严格的定义如下：

**定义 2.4.2.** 给定向量  $\mathbf{a}$  和向量集合  $S$ 。如果向量  $\mathbf{y} \in S$  使得  $\mathbf{a} - \mathbf{y}$  垂直于  $S$  中所有向量，就说  $\mathbf{y}$  是  $\mathbf{a}$  在  $S$  中的**投影**， $\mathbf{a} - \mathbf{y}$  是  $\mathbf{a}$  关于  $S$  的**修正**。

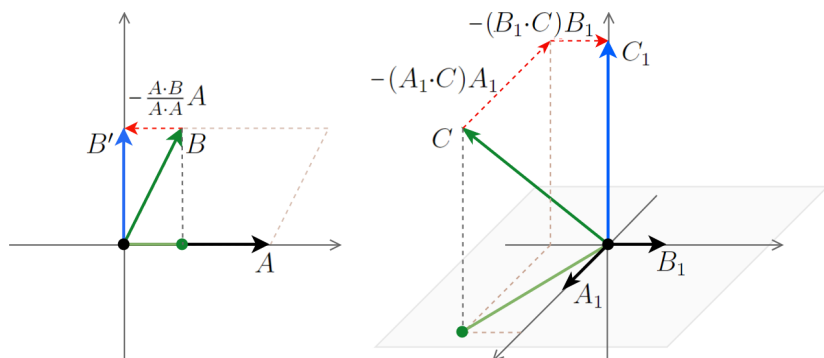
按照严格的定义，向量  $\overrightarrow{OP}$  就是向量  $\overrightarrow{OB}$  在直线  $OA$  中的投影。从  $\overrightarrow{OB}$  中减去它在直线  $OA$  上的投影，得到垂直于  $\overrightarrow{OA}$  的向量（或者说关于直线  $OA$  的修正），这种方法叫做**消影法**。

我们可以进一步将  $A$  和  $B'$  分别归一，就得到两个相互垂直的单位向量。我们把这样两个向量称为平面的**正交归一基**。注意到  $A, B$  是平面的一组基底。从  $A, B$  出发得到正交归一基，这个过程称为**基底的正交归一**。

空间的根本性质告诉我们，给定两个线性无关的向量  $A, B$ ，总有向量  $C$  使得  $A, B, C$  为空间的基底。我们尝试用消影法将它正交归一，得到空间



的正交归一基  $A_1, B_1, \mathbf{n}$ , 然后证明  $\mathbf{n}$  与  $A, B$  垂直。



平面和立体空间中的消影法

根据已知条件,  $A, B$  确定一个平面  $\gamma$ , 而且是平面  $\gamma$  的基底。用消影法将  $A, B$  正交归一, 得到平面  $\gamma$  的正交归一基  $A_1, B_1$ 。然后再次使用消影法。这次我们要消去  $C$  在平面  $\gamma$  中的投影。考虑向量  $C_1 = C + uA_1 + vB_1$ , 其中  $u, v$  是未知系数。我们希望  $C_1$  与  $A_1, B_1$  垂直。分别计算内积  $A_1 \cdot C_1, B_1 \cdot C_1$ , 两者都应当等于 0。于是得到关于  $u, v$  的方程组:

$$\begin{cases} A_1 \cdot C + u\|A_1\|^2 + vA_1 \cdot B_1 = 0 \\ B_1 \cdot C + uA_1 \cdot B_1 + v\|B_1\|^2 = 0 \end{cases}$$

$A_1, B_1$  为正交归一基, 所以  $A_1 \cdot B_1 = 0, \|A_1\|^2 = \|B_1\|^2 = 1$ 。因而解得:

$$\begin{cases} u = -A_1 \cdot C \\ v = -B_1 \cdot C \end{cases}$$

这样我们就得到了与  $A_1, B_1$  都垂直的向量

$$C_1 = C - (A_1 \cdot C)A_1 - (B_1 \cdot C)B_1.$$

它是从  $C$  中去掉它在平面  $\gamma$  中的投影  $(A_1 \cdot C)A_1 + (B_1 \cdot C)B_1$  得到的。将它归一, 就得到垂直于  $A_1, B_1$  的单位向量:  $\mathbf{n} = \frac{C_1}{\|C_1\|}$ 。于是我们得到了空间的正交归一基:  $A_1, B_1, \mathbf{n}$ 。

$A_1, B_1$  是  $A, B$  确定的平面的正交归一基, 所以  $A, B$  可以表示为  $A_1, B_1$  的线性组合。 $\mathbf{n}$  与  $A_1, B_1$  都垂直, 因此也垂直于它们的线性组合  $A, B$ 。于是我们得到结论:

**定理 2.4.3.** 给定两个线性无关的向量  $A, B$ , 存在单位向量  $\mathbf{n}$  与它们都垂直。

任何平面总由两个线性无关的向量确定。设平面  $\gamma = \mathbb{R}A + \mathbb{R}B + C$ , 则存在单位向量  $\mathbf{n}$  与  $A, B$  都垂直。我们称单位向量  $\mathbf{n}$  为  $\gamma$  的**法向量**<sup>1</sup>。以法向量为方向向量的直线, 就与平面垂直。这样, 我们就找到了与平面垂直的直线。

与同一平面垂直的直线有什么共同特征呢? 从前面的推导还可以得出: 所有与  $A, B$  都垂直的向量共线。

在前面的推导中, 我们知道  $A_1, B_1, \mathbf{n}$  是空间的基底。因此, 空间中任何向量  $\mathbf{w}$  可以分解为:

$$\mathbf{w} = w_A A_1 + w_B B_1 + w_n \mathbf{n}.$$

如果它与  $A, B$  都垂直, 那么也垂直于它们的线性组合:  $A_1, B_1$ 。计算它与  $A_1, B_1$  的内积, 得到:

$$0 = \mathbf{w} \cdot A_1 = w_A \|A_1\|^2 = w_A,$$

$$0 = \mathbf{w} \cdot B_1 = w_B \|B_1\|^2 = w_B,$$

这说明  $\mathbf{w} = w_n \mathbf{n}$ , 与  $\mathbf{n}$  共线。或者说, 所有与  $A, B$  都垂直的向量的集合是  $\mathbb{R}\mathbf{n}$ 。

所有与  $A, B$  都垂直的向量共线, 因此都在  $\mathbb{R}\mathbf{n}$  上。因此, 垂直于  $A, B$  确定的平面的直线, 其方向向量总在  $\mathbb{R}\mathbf{n}$  上。换句话说,

---

<sup>1</sup>约定平面的法向量为单位向量, 可以方便讨论。类似地, 以下也约定直线的方向向量为单位向量。

**定理 2.4.4.** 垂直于同一平面的直线平行或重合。

给定空间中一点  $P$  和平面  $\gamma$ ，在  $\gamma$  上任取一点  $O$ ，引出两个线性无关的向量  $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ ，于是有单位向量  $\mathbf{n}$  与它们都垂直，于是  $\mathbb{R}\mathbf{n} + P$  是过  $P$  且垂直于  $\gamma$  的直线。另一方面，如果过  $P$  的直线  $\mathbb{R}\mathbf{m} + P$  垂直于  $\gamma$ ，那么它  $\mathbf{m}$  垂直于  $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ 。于是  $\mathbf{n}$  与  $\mathbf{m}$  共线， $\mathbb{R}\mathbf{m} + P$  就是直线  $\mathbb{R}\mathbf{n} + P$ 。也就是说，

**定理 2.4.5.** 过一点恰有一条直线与给定平面垂直。

我们把过空间中一点到给定平面垂直的唯一直线称为点到这个平面的**垂线**，垂线与平面的交点称为**垂足**。垂足也称为**点在平面中的投影**。

使用法向量和投影，我们可以定义向量和平面的交角。考虑法向量为  $\mathbf{n}$  的（过原点的）平面  $\gamma$  和平面外向量  $A$ ，我们定义向量  $A$  与平面  $\gamma$  的交角为  $A$  和平面法向量  $\mathbf{n}$  的交角的余角。这是因为平面的法向量应该看作垂直于平面的标志。因此类比平面中向量和两垂直向量的角度关系，空间中向量和平面及其法向量的交角应该互为余角。

直观来看，设  $A$  在  $\gamma$  中的投影为  $P$ ，则  $\triangle OAP$  是直角三角形， $\angle APO$  是直角。 $\overrightarrow{OP}$  是  $\overrightarrow{OA}$  在  $\gamma$  中的投影， $\overrightarrow{PA}$  是  $\overrightarrow{OA}$  关于  $\gamma$  的修正。因此， $\angle OAP$  是  $A$  和  $\mathbf{n}$  的交角，它的余角  $\angle AOP$  就是  $A$  和平面的交角。

直线和平面的交角，定义为它的方向向量和平面的交角。

除了点和向量，也可以定义**直线在平面中的投影**。给定直线  $l$ ， $l$  中的点在平面中投影的集合，就构成  $l$  在平面中的投影。

**定理 2.4.6.** 如果直线垂直于平面，那么它在平面中的投影是一个点，即直线和平面的交点。如果直线不垂直于平面，那么它在平面中的投影是一条直线。

**证明：** 设有直线  $l$  和平面  $\gamma$ 。 $l$  与  $\gamma$  或相交、或平行，或在  $\gamma$  中。设  $m$  为  $l$  在平面中的投影。

如果  $l$  在  $\gamma$  中，那么  $m = l$ 。

如果  $l$  与  $\gamma$  交于点  $P$ ，那么  $P$  就是它自己在  $\gamma$  的垂足，因此  $P \in m$ 。设  $l = \mathbb{R}\mathbf{v} + P$ ，平面法向量为  $\mathbf{n}$ 。对  $l$  中另一点  $Q = t\mathbf{v} + P$ ，作  $Q$  到  $\gamma$  的垂线，垂足为  $R$ ，则  $R \in m$ 。直线  $QR \perp \gamma$ ，所以  $QR \perp PR$ ，因此

$$\overrightarrow{PR} \cdot \overrightarrow{QR} = 0.$$

向量  $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}$ ，设  $\overrightarrow{QR} = s\mathbf{n}$ ，则

$$0 = (\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}) \cdot \overrightarrow{QR} = (Q - P) \cdot \overrightarrow{QR} + \|\overrightarrow{QR}\|^2 = st\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} + s^2.$$

解得  $s = 0$  或  $s = -t\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$ 。

$s = 0$  表示  $Q = R \in \gamma \cap l$ ，于是  $Q = P$ ，舍弃。于是  $s = -t\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$ 。

$$\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = t\mathbf{v} - t(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} = t(\mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}).$$

如果  $\mathbf{v}, \mathbf{n}$  共线，那么  $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} = \mathbf{v}$ 。于是  $\overrightarrow{PR} = \mathbf{0}$ ， $P = R$ 。这说明如果直线垂直于平面，则直线上的点的投影总是直线与平面的交点  $P$ 。

如果  $\mathbf{v}, \mathbf{n}$  不共线，那么  $R$  在直线  $f: \mathbb{R}(\mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}) + P$  上。具体来说， $l$  上的点和它的投影点是直线  $l$  到  $f$  的一一对应：

$$t\mathbf{v} + P \mapsto t(\mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}) + P.$$

因此， $l$  的投影  $m$  就是直线  $f$ 。

□

以下定理说明了直线和它在平面中的投影的关系。

**定理 2.4.7. 三垂线定理** 设直线  $l$  在平面  $\gamma$  中的投影为直线  $m$ ，那么  $l$  垂直于平面  $\gamma$  中直线  $f$ ，当且仅当  $m$  垂直于  $f$ 。

**证明：** 设  $l = \mathbb{R}\mathbf{v} + P$ ，平面法向量为  $\mathbf{n}$ 。根据定理 2.4.6，投影直线  $m$  可以表示为

$$m = \mathbb{R}(\mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}) + P.$$

设  $\gamma$  中直线  $f$  的方向向量为  $\mathbf{u}$ 。则  $\mathbf{u}$  垂直于平面的法向量  $\mathbf{n}$ 。而  $l$  与  $m$  的方向向量相差  $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}$ 。如果计算它们与  $\mathbf{u}$  的内积，会发现：

$$(\mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}) \cdot \mathbf{u} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}.$$

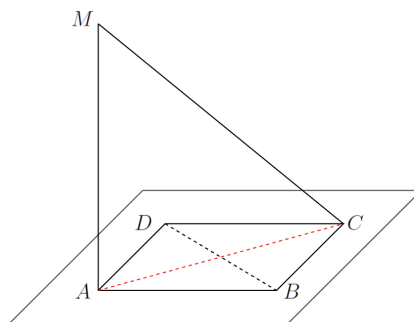
两内积相等，它们同时等于 0 或不等于 0。所以，如果  $\mathbf{v} \perp \mathbf{u}$ ，那么  $\mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} \perp \mathbf{u}$ 。反之，如果  $\mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} \perp \mathbf{u}$ ，那么  $\mathbf{v} \perp \mathbf{u}$ 。对于直线来说，这就说明  $l$  垂直于直线  $f$ ，当且仅当  $m$  垂直于  $f$ 。  $\square$

**例题 2.4.1.** 平面中有平行四边形  $ABCD$ ，过  $A$  作直线  $AM$  垂直于平面。 $M$  为直线上一点。 $|BC|$  满足什么条件的时候，直线  $CM$  垂直于  $BD$ ？

**解答.** 在水平面上画出平行四边形  $ABCD$ ，作出直线  $AM$ ，可以看到，直线  $AC$  就是直线  $CM$  在平面中的投影。因此，根据三垂线定理， $CM$  垂直于  $BD$  当且仅当  $AC$  垂直于  $BD$ ，即  $ABCD$  为菱形。也就是说，当  $|BC| = |AB|$  的时候，直线  $CM$  垂直于  $BD$ ，否则直线  $CM$  不垂直于  $BD$ 。

给定平面，总有与它垂直的直线。反过来，给定一条直线，是否有与它垂直的平面呢？设直线的方向向量为  $\mathbf{n}$ ，我们来看与它垂直的向量有什么共同特征。

**定理 2.4.8.** 所有与非零向量  $\mathbf{n}$  垂直的向量构成一个过原点的平面。



例题 2.4.1

**证明：** 设  $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)$  是非零向量，所以  $n_x, n_y, n_z$  不全为零。设  $n_x \neq 0$ ，则向量  $P_1(-n_y, n_x, 0)$  和  $P_2(-n_z, 0, n_x)$  都垂直于  $\mathbf{n}$ 。容易验证  $P_1, P_2$  线性无关，因此它们确定的平面  $\gamma$  垂直于  $\mathbf{n}$ 。

另一方面, 设  $P$  与非零向量  $\mathbf{n}$  垂直, 下面证明  $P$  在平面  $\gamma$  中。

可以验证  $P_1, P_2, \mathbf{n}$  线性无关, 因此是空间的一组基底。用消影法将它正交归一, 得到正交归一基  $(Q_1, Q_2, \mathbf{m})$ , 其中  $Q_1, Q_2$  是  $P_1, P_2$  正交归一的结果, 是平面  $\gamma$  的正交归一基,  $\mathbf{m}$  是平面  $\gamma$  的法向量, 因此  $\mathbf{m}, \mathbf{n}$  共线。将  $P$  在  $Q_1, Q_2, \mathbf{m}$  上分解:

$$P = p_1 Q_1 + p_2 Q_2 + p_m \mathbf{m}.$$

$P$  垂直于  $\mathbf{n}$ , 因此也垂直于  $\mathbf{m}$ 。于是  $\mathbf{m} \cdot P = 0$ , 即  $p_m = 0$ 。因此  $P = p_1 Q_1 + p_2 Q_2$  在平面  $\gamma$  中。综上所述, 所有与非零向量  $\mathbf{n}$  垂直的向量构成过原点的平面  $\gamma$ 。

□

给定一条直线  $l: \mathbb{R}\mathbf{a} + \mathbf{b}$  及一点  $P$ , 与  $\mathbf{a}$  垂直的向量构成一个过原点的平面。把该平面按  $P$  平移, 就得到一个过  $P$  的平面。也就是说:

**定理 2.4.9.** 过一点恰有一个平面与给定直线垂直。

过空间的每一点, 恰有一个平面与给定直线垂直。这些垂直于同一直线的平面, 有什么特征呢?

**定理 2.4.10.** 垂直于同一直线的平面, 相互平行或重合。

**证明:** 设平面  $\gamma_1, \gamma_2$  与直线  $l$  垂直, 与  $l$  分别交于点  $P_1, P_2$ 。过  $P_1$  在  $\gamma_1$  中作两条直线  $m_1, m_2$ , 过  $P_2$  作  $m_1$  的平行线  $n_1$ ,  $n_1 \perp l$ , 因此  $n_1$  在  $\gamma_2$  中。同理, 过  $P_2$  作  $m_2$  的平行线  $n_2$ ,  $n_2$  在  $\gamma_2$  中。因此根据定理 2.1.12,  $\gamma_1$  与  $\gamma_2$  平行或重合。 □

设非零向量  $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)$ , 与它垂直的向量的集合, 就是以下方程的解集。

$$n_x x + n_y y + n_z z = 0.$$

任何过原点的平面，都有法向量，于是总可以写成三元一次方程的解集。因此，过原点的平面，可以用一个三元一次方程定义。

不过原点的平面，可以看作过原点平面按同一向量平移得到。如果过原点平面上的点满足方程

$$n_x x + n_y y + n_z z = 0,$$

那么按向量  $B(x_b, y_b, z_b)$  平移之后得到的点就满足方程：

$$n_x(x - x_b) + n_y(y - y_b) + n_z(z - z_b) = 0. \quad (*)$$

因此，任何平面总是某个三元一次方程的解集。反之，任何三元一次方程  $ax + by + cz + d = 0$  总能写成  $(*)$  的形式，于是解集为某个平面。我们将  $ax + by + cz + d = 0$  称为平面的一般式，将  $(*)$  称为平面的点法式，即经过  $B(x_b, y_b, z_b)$  且垂直于向量  $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)$ 。

三元一次方程的解集是平面，因此，我们也用它来定义平面。比如， $x$  轴和  $y$  轴所在平面  $Oxy$  可以用方程  $z = 0$  定义，过点  $(-2, 10, 3)$  并与它平行的平面可以用  $z = 3$  定义。

用方程来定义平面，可以得出更多结论。比如，考虑到空间中两点  $P_1(x_1, y_1, z_1)$  和  $P_2(x_2, y_2, z_2)$  相等的点  $P(x, y, z)$ ，这样的点满足方程：

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + (z - z_2)^2.$$

方程两边消去  $x^2 + y^2 + z^2$ ，得到关于  $x, y, z$  的三元一次方程：

$$2(x_1 - x_2)x + 2(y_1 - y_2)y + 2(z_1 - z_2)z = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - x_2^2 - y_2^2 - z_2^2.$$

因此，到两点距离相等的点构成一个平面，称为这两点的**垂直平分面**。

最后来看平面与平面的位置关系。我们定义两个平面的夹角为它们的法向量的夹角。两个平面相互垂直，指它们的法向量相互垂直。平行平面的法向量相同，所以如果平面与两平行平面中的一个垂直，那么与另一个也垂直。

显然, 过平面中一点, 有无数平面与它垂直。比如, 过  $x$  轴和  $y$  轴所在平面  $Oxy: z = 0$  中的  $(0, 0, 0)$  点, 可以找到平面  $x + y = 0$  与它垂直。不仅如此,  $x + 2y = 0$ 、 $x + 3.3y = 0$ 、 $2.6x - y = 0$  等也都与它垂直。但所有与它垂直的平面, 都经过直线  $\{(t, 0, 0) | t \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}\mathbf{e}_z$ 。

**定理 2.4.11.** 经过平面中一直线, 恰有一个平面与该平面垂直。

**证明:** 设直线  $l = \mathbb{R}\mathbf{a} + P$  是平面  $\gamma$  中直线, 平面  $\gamma$  的法向量是  $\mathbf{n}$ 。如果平面  $\beta$  经过  $l$  且垂直于  $\gamma$ , 设它的法向量为  $\mathbf{u}$ , 则按定义  $\mathbf{u} \perp \mathbf{n}$ 。平面  $\beta$  经过  $l$ , 所以  $\mathbf{u} \perp \mathbf{a}$ , 这样的  $\mathbf{u}$  可以从  $\mathbf{n}$  和  $\mathbf{a}$  出发用消影法得到。根据定理 2.4.3 的推论, 所有这样的  $\mathbf{u}$  共线。根据定理 2.4.5,  $\beta$  就是垂直于  $\mathbb{R}\mathbf{u}$  且经过点  $P$  的唯一平面。  $\square$

**定理 2.4.12.** 若两相交平面  $\gamma_1, \gamma_2$  都与平面  $\beta$  垂直, 则它们的交线与  $\beta$  垂直。

**证明:** 设  $\gamma_1, \gamma_2, \beta$  的法向量分别为  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{n}$ ,  $\gamma_1, \gamma_2$  交线  $l$  的方向向量为  $\mathbf{a}$ 。 $\gamma_1, \gamma_2$  与  $\beta$  垂直, 所以  $\mathbf{u}_1 \perp \mathbf{n}, \mathbf{u}_2 \perp \mathbf{n}$ 。又  $\gamma_1 \cap \gamma_2 = l$ , 所以  $\mathbf{u}_1 \perp \mathbf{a}, \mathbf{u}_2 \perp \mathbf{a}$ 。根据定理 2.4.3 的推论,  $\mathbf{n}$  和  $\mathbf{a}$  共线。这说明  $l \perp \beta$ 。  $\square$

#### 思考 2.4.1.

1. 空间中, 垂直于同一直线的平面平行或重合, 垂直于同一平面的直线平行或重合。这性质和平面中直线的哪些性质相似?
2. 空间中的直线能否表示为方程的解集? 如果可以, 是怎样的方程?

#### 习题 2.4.1.

1. 设过点  $P$  的平面  $\gamma = \{s\mathbf{u} + t\mathbf{v} + P | s, t \in \mathbb{R}\}$ 。
  - 1.1. 设  $Q_1, Q_2$  为平面  $\gamma$  中两点, 用  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  表示向量  $\overrightarrow{Q_1Q_2}$ 。
  - 1.2. 证明: 平面  $\gamma$  中任何直线的方向向量总是  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  的线性组合。
  - 1.3. 证明: 如果直线与平面中两条相交直线垂直, 就垂直于这个平面。
2. 给定两个线性无关的向量  $A, B$ 。



- 2.1. 如果  $A, B$  是单位向量, 证明  $A + B \perp A - B$ 。
- 2.2. 以第一问的结论为基础, 给出另一种正交归一的方法。
3. 求与  $(2, -1, 1)$ 、 $(0, 1, 2)$  垂直的单位向量。
4. 求过  $(1, 0, 0)$  且垂直于  $\mathbb{R}(0, 1, 0) + (1, -1, 1)$  的平面。
4. 试将平面  $\{s(1, -1, 0) + t(-2, 1, 1) + (0, 0, 1) \mid s, t \in \mathbb{R}\}$  表示为三元一次方程的解集。

## 2.5 垂线和距离

了解了直线、平面之间的垂直关系, 我们进一步来讨论点、直线、平面之间的距离。

平面中, 求点到直线的距离, 可以过点作直线的垂线, 求点到垂足的距离。给定点  $A$  和直线  $l: \mathbb{R}\mathbf{v} + B$ , 过  $A$  作  $l$  的垂线, 记垂足为  $P = t\mathbf{v} + B$ 。如果  $\overrightarrow{AB} \perp \mathbf{v}$ , 那么  $B = P$  就是垂足, 距离就是  $|AB|$ 。否则  $P \neq B$ ,  $\triangle ABP$  是直角三角形,  $\angle APB$  是直角。向量  $\overrightarrow{BP}$  垂直于  $\overrightarrow{AP}$ , 因此

$$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = 0.$$

即

$$(t\mathbf{v} + B - A) \cdot t\mathbf{v} = 0.$$

解得  $t = \frac{\mathbf{v} \cdot (A - B)}{\|\mathbf{v}\|^2}$ 。不妨设  $\mathbf{v}$  是单位向量, 那么  $t = \mathbf{v} \cdot (A - B)$ 。于是  $A$  到  $l$  的距离为  $|AP| = \|t\mathbf{v} + B - A\| = \|\overrightarrow{AB} - (\mathbf{v} \cdot \overrightarrow{AB})\mathbf{v}\|$ 。直观来看, 这表示  $|AP| = |AB| \sin \angle ABP$ 。

求空间中一点到平面的距离, 也和求点到直线距离类似, 可以作点到平面的垂足, 求点到垂足的距离。具体来说, 设平面  $\gamma$  经过点  $B$ , 法向量为  $\mathbf{n}$ , 点  $A$  到平面  $\gamma$  的垂线为:

$$\mathbb{R}\mathbf{n} + A$$

设垂足为  $P$ , 则  $A$  到平面  $\gamma$  的距离就是  $|AP|$ 。

直线  $AP$  垂直于  $\gamma$ , 因此也垂直于  $\gamma$  中的直线  $BP$ , 于是  $\triangle ABP$  是直角三角形, 所以点  $A$  到平面的距离就是  $|AP| = |AB| \cos \angle ABP$ , 也就是向量  $\overrightarrow{AB}$  和法向量  $\mathbf{n}$  的内积的绝对值, 或者说  $|AB|$  在法线  $AP$  上的投影的长度:

$$|AP| = |\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{AB}|.$$

接下来讨论直线与直线的距离。平面中, 不相交的直线是平行直线。空间中, 不相交直线的距离, 包括平行和异面两种情况。平行直线的距离, 计算方法和平面中类似。下面讨论异面直线的距离。

考虑两条异面直线, 它们的方向向量线性无关。因此, 我们可以用定理 2.4.3 讨论与它们都垂直的直线。

设有异面直线  $l_1: \mathbb{R}\mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_1$ ,  $l_2: \mathbb{R}\mathbf{a}_2 + \mathbf{b}_2$ , 其中  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$  是单位向量。按照定义,  $\mathbf{a}_1$  和  $\mathbf{a}_2$  线性无关。根据定理 2.4.3, 有单位向量  $\mathbf{n}$  与它们都垂直。考虑以  $\mathbf{n}$  为方向的直线  $m$ ,  $m$  与  $l_1, l_2$  都垂直。如果  $m$  与  $l_1, l_2$  都相交, 就说  $m$  是  $l_1, l_2$  的公垂线。下面我们来找出  $l_1, l_2$  的公垂线。

我们把  $m$  表示成  $m: \mathbb{R}\mathbf{n} + r_1\mathbf{a}_1 + r_2\mathbf{a}_2$ , 设  $m$  与  $l_1, l_2$  的交点分别是:

$$P_1 = t_1\mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_1 = s_1\mathbf{n} + r_1\mathbf{a}_1 + r_2\mathbf{a}_2$$

$$P_2 = t_2\mathbf{a}_2 + \mathbf{b}_2 = s_2\mathbf{n} + r_1\mathbf{a}_1 + r_2\mathbf{a}_2$$

两点分别与  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{n}$  求内积, 得到:

$$\left\{ \begin{array}{ll} t_1 + \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_1 & = r_1 + r_2\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2 \\ t_1\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_1 & = r_1\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2 + r_2 \\ t_2 + \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_2 & = r_1\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2 + r_2 \\ t_2\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_2 & = r_1 + r_2\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{b}_1 & = s_1 \\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{b}_2 & = s_2 \end{array} \right.$$

从前 4 个方程可以求出  $t_1, t_2, r_1, r_2$  唯一的一组解, 于是可以得到直线  $m$ , 也就是说, 异面直线  $l_1, l_2$  总有唯一的公垂线。我们称线段  $P_1P_2$  为  $l_1, l_2$  的公垂线段。

向量  $\overrightarrow{P_1P_2}$  与  $\mathbf{n}$  共线。从后两个方程可以解出  $s_1, s_2$ , 因此线段  $P_1P_2$  的长度是:

$$\begin{aligned} |P_1P_2| &= \|P_2 - P_1\| = \|s_1\mathbf{n} + r_1\mathbf{a}_1 + r_2\mathbf{a}_2 - (s_2\mathbf{n} + r_1\mathbf{a}_1 + r_2\mathbf{a}_2)\| \\ &= \|(s_1 - s_2)\mathbf{n}\| \\ &= |\mathbf{n} \cdot (\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2)|. \end{aligned}$$

在  $l_1, l_2$  上各取一点:  $Q_1 = P_1 + q_1\mathbf{a}_1$ ,  $Q_2 = P_2 + q_2\mathbf{a}_2$ , 则:

$$\overrightarrow{Q_1Q_2} = P_2 + q_2\mathbf{a}_2 - (P_1 + q_1\mathbf{a}_1) = \overrightarrow{P_1P_2} + (q_2\mathbf{a}_2 - q_1\mathbf{a}_1).$$

而  $\overrightarrow{P_1P_2} = (s_1 - s_2)\mathbf{n} \perp q_2\mathbf{a}_2 - q_1\mathbf{a}_1$ , 所以, 根据勾股定理,

$$|Q_1Q_2|^2 = |P_1P_2|^2 + \|q_2\mathbf{a}_2 - q_1\mathbf{a}_1\|^2 \geq |P_1P_2|^2.$$

这说明  $l_1$  上的点到  $l_2$  上的点的距离总大于等于  $|P_1P_2|$ 。我们把  $|P_1P_2|$  称为异面直线的距离。

直线和平面的距离, 也可以用公垂线定义。设直线  $l: \mathbb{R}\mathbf{v} + A$  平行于平面  $\gamma$ , 我们可以找出与  $l$  和  $\gamma$  都垂直的直线, 称为它们的公垂线。具体来说, 过  $A$  点有唯一一条与  $\gamma$  垂直的直线:

$$m: \mathbb{R}\mathbf{n} + A$$

其中  $\mathbf{n}$  是  $\gamma$  的法向量。设  $m$  与  $\gamma$  交于点  $P$ , 过  $P$  作  $l$  的平行线  $n: \mathbb{R}\mathbf{v} + P$ 。由于  $l \parallel \gamma$ , 所以  $n$  在  $\gamma$  中。于是  $m \perp n$ , 即  $m \perp l$ 。我们说  $m$  是直线  $l$  和平面  $\gamma$  的公垂线。

显然, 直线和平面的公垂线不是唯一的。过直线上任一点, 都恰有一条公垂线。定义直线和平面的距离为公垂线段  $AP$  的长度  $|AP|$ 。我们可以用求点到直线距离的方式, 求出  $|AP|$ 。比如, 设平面经过点  $B$ , 则  $|AP| = |\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{AB}|$ 。

最后讨论平行平面之间的距离。垂直于同一直线的平面相互平行或重合，因此，相互平行的平面，法向量应该相同。这一点并不难证明。设平面  $\gamma_1, \gamma_2$  相互平行。在  $\gamma_1$  中取相交直线  $\mathbb{R}\mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_1, \mathbb{R}\mathbf{a}_2 + \mathbf{b}_1$ ，过  $\gamma_2$  中一点  $\mathbf{b}_2$  作它们的平行线，则两条平行线都在  $\gamma_2$  中，且方向向量分别为  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ 。因此， $\gamma_1, \gamma_2$  可以写成：

$$\gamma_1 = \mathbb{R}\mathbf{a}_1 + \mathbb{R}\mathbf{a}_2 + \mathbf{b}_1$$

$$\gamma_2 = \mathbb{R}\mathbf{a}_1 + \mathbb{R}\mathbf{a}_2 + \mathbf{b}_2$$

它们的法向量都可从  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$  通过消影法得到，因此是同一个单位向量  $\mathbf{n}$ 。

考虑直线  $\mathbb{R}\mathbf{n}$  与  $\gamma_1, \gamma_2$  的交点  $P_1, P_2$ ，可以得到：

$$P_1 = r_1\mathbf{n} = s_1\mathbf{a}_1 + t_1\mathbf{a}_2 + \mathbf{b}_1$$

$$P_2 = r_2\mathbf{n} = s_2\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + \mathbf{b}_2$$

类似异面直线的情况，通过对  $\mathbf{n}$  求内积，我们得到

$$r_1 = \mathbf{n} \cdot \mathbf{b}_1$$

$$r_2 = \mathbf{n} \cdot \mathbf{b}_2$$

因此，两交点的距离为：

$$|P_1P_2| = \|r_2\mathbf{n} - r_1\mathbf{n}\| = |\mathbf{n} \cdot (\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2)|.$$

在  $\gamma_1, \gamma_2$  上各取一点： $Q_1 = P_1 + q_{1,1}\mathbf{a}_1 + q_{1,2}\mathbf{a}_2$ 、 $Q_2 = P_2 + q_{2,1}\mathbf{a}_1 + q_{2,2}\mathbf{a}_2$ ，则：

$$\overrightarrow{Q_1Q_2} = \overrightarrow{P_1P_2} + (q_{2,1}\mathbf{a}_1 + q_{2,2}\mathbf{a}_2 - q_{1,1}\mathbf{a}_1 - q_{1,2}\mathbf{a}_2).$$

而  $\overrightarrow{P_1P_2} = (r_2 - r_1)\mathbf{n} \perp q_{2,1}\mathbf{a}_1 + q_{2,2}\mathbf{a}_2 - q_{1,1}\mathbf{a}_1 - q_{1,2}\mathbf{a}_2$ ，所以，根据勾股定理，

$$|Q_1Q_2|^2 = |P_1P_2|^2 + \|q_{2,1}\mathbf{a}_1 + q_{2,2}\mathbf{a}_2 - q_{1,1}\mathbf{a}_1 - q_{1,2}\mathbf{a}_2\|^2 \geq |P_1P_2|^2.$$

这说明  $\gamma_1$  上的点到  $\gamma_2$  上的点的距离总大于等于  $|P_1P_2|$ 。我们把  $|P_1P_2|$  称为平行平面的距离。

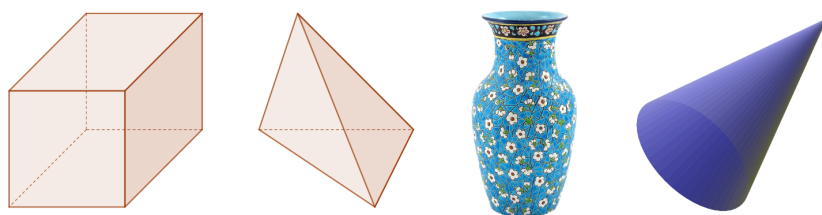
**习题 2.5.1.**

1. 求点  $(2, 0, 1)$  到平面  $x + 2y - 5z + 1 = 0$  的距离。
2. 求点  $(1, 1, -1)$  到直线  $\mathbb{R}(0, 3, -1) + (1, -2, 1)$  的距离。
3. 求异面直线  $\mathbb{R}(0, 1, 1) + (1, -1, 0)$ 、 $\mathbb{R}(1, 0, -1) + (0, 1, -1)$  的公垂线及距离。
4. 求直线  $\mathbb{R}(1, 2, -1) + (0, 1, 1)$  到平面  $x + y + 3z - 1 = 0$  的距离。
5. 求平行平面  $x - y + z = 1$  和  $x - y + z = -1$  的距离。
6. 点  $(1, a, a + 2)$  到平面  $2x - y - z + 2 = 0$  和  $x + 3y - 4z = 0$  的距离相等, 求  $a$  的值。



### 第三章 简单多面体

我们日常生活中看到的书本、桌椅、箱子、柜子等器具，大致可以看作是几个平面围成的。它们的表面分别属于几个相交的平面。我们把若干个平面围成的封闭立体称为**多面体**。下图中，左起第一个形状是六个平面围成的，称为六面体；第二个形状是四个平面围成的，称为四面体。右边两个形状不是由若干个平面围成的，因此不是多面体。



多面体的表面，同属一个平面的部分，称为**多面体的面**。相邻两面公共的部分是线段，称为**多面体的棱**。两条或多条棱相交于多面体表面一点，也是多个面的公共点，称为**多面体的顶点**。上图的六面体中，有  $ABCD$ 、 $ABB'A'$ 、 $BCC'B'$ 、 $CDD'C'$ 、 $DAA'D'$ 、 $A'B'C'D'$  六个面， $AB$ 、 $B'C'$ 、 $DD'$  等十二条棱， $A, B, C, D$  等八个顶点。多面体不同顶点之间的连线，如果不在多面体任何一面中，就称为**多面体的对角线**。上图的六面体中， $AC'$  和  $B'D$  是对角线， $AB'$  和  $B'D'$  不是对角线。

多面体的面总是多边形。如果多面体每一面都是凸多边形，就说它是**凸多面体**。以下我们只讨论凸多面体，凡提到多面体，都是指凸多面体。

围成多面体的平面数目，一般用来为多面体命名。比如六个平面围成的多面体，叫做六面体；十个平面围成的多面体，叫做十面体。平面与多面体相交，得到它的子集，称为平面截多面体得到的**截面**。

### 3.1 四面体和棱锥

多面体的面总是多边形。多边形的边就是多面体的棱，也就是它所在平面与其他面相交的部分。因此多面体每个面至少和另三个面相交，才能形成多边形。最简单的多面体是**四面体**。它的每个面和另三个面相交，形成三角形。四面体的面就是四个三角形。每两个三角形的公共边，就是四面体的棱。四面体有六条棱，每三条棱交于一点。四面体有四个顶点。

四面体是最基本的多面体。任何多面体总能看作若干个四面体拼接而成。

每个面都是正三角形的四面体，称为**正四面体**。不同的正四面体大小不同，形状一致。正四面体所有的棱长度相等。设正四面体棱长为  $a$ ，则每个面的面积为  $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ 。

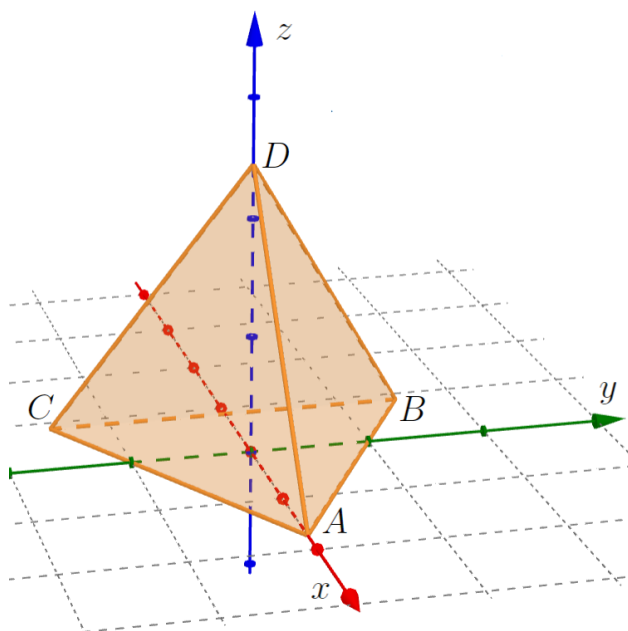
过正四面体  $ABCD$  一个顶点  $D$  向另三点确定的平面作垂线，记垂足为  $O$ ，则  $O$  为  $\triangle ABC$  的中心。 $|AO| = |BO| = |CO| = \frac{\sqrt{3}}{3}a$ 。 $\angle DOA$  是直角，所以根据勾股定理， $|DO| = \frac{\sqrt{6}}{3}a$ 。我们称  $DO$  为正四面体中  $D$  出发的高线。

**例题 3.1.1.** 求正四面体相邻两面所成的角。

**解答.** 设正四面体  $ABCD$  边长为  $a$ 。过顶点  $D$  作平面  $ABC$  的垂线，记垂足为  $O$ 。

以  $O$  为原点，以  $OA$  为  $x$  轴作直角坐标系，使得  $B, C$  点坐标分别在第二、第三象限。 $|OA| = \frac{\sqrt{3}}{3}a$ ，所以  $A, B, C$  坐标分别为  $(-\frac{\sqrt{3}}{3}a, 0, 0)$ 、 $(-\frac{\sqrt{3}}{6}a, \frac{1}{2}a, 0)$ 、 $(-\frac{\sqrt{3}}{6}a, -\frac{1}{2}a, 0)$ ， $D$  点坐标为  $(0, 0, \frac{\sqrt{6}}{3}a)$ 。于是平面  $ABC$  的





方程为

$$z = 0.$$

$AB$  和  $y$  轴的交点为  $(0, \frac{1}{3}a, 0)$ , 所以平面  $ABD$  的方程为

$$\sqrt{3}x + 3y + \frac{\sqrt{6}}{2}z = a.$$

平面  $ABC$  的法向量是  $\mathbf{n}_1 = (0, 0, 1)$ , 平面  $ABD$  的法向量是

$$\mathbf{n}_2 = \frac{(\sqrt{3}, 3, \frac{\sqrt{6}}{2})}{\|(\sqrt{3}, 3, \frac{\sqrt{6}}{2})\|} = (\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{1}{3}).$$

因此两平面的夹角  $\theta$  满足:

$$\cos \theta = \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = (0, 0, 1) \cdot (\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{1}{3}) = \frac{1}{3}.$$

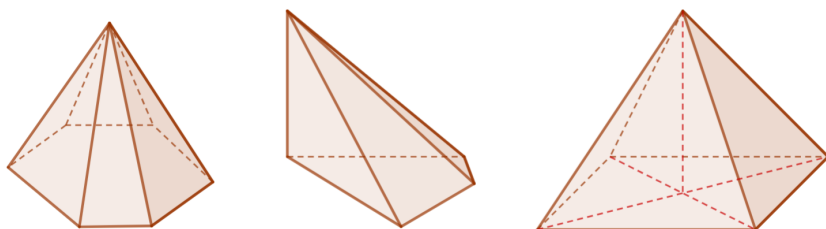
解得  $\theta = \arccos \frac{1}{3} \approx 70.53^\circ$ .

由于正四面体各面地位相等, 因此任何两面所成的角都是  $\theta$ .

从四面体出发,可以得到一类称为棱锥的多面体。给定一平面及其中一个多边形,从平面外一点上到多边形各个顶点连线,得到的多面体称为**棱锥**。直观上看,棱锥是平面外一点发出的三条或以上不共面的射线被平面所截得到的。平面外的点称为**棱锥的锥顶**,多边形称为**棱锥的底面**,其余的面是多边形相邻顶点和锥顶构成的三角形,称为**棱锥的侧面**。锥顶到底面的距离称为**棱锥的高**。棱锥的侧面是以锥顶为公共顶点的三角形。

如果底面是  $n$  边形 ( $n$  为大于等于 3 的整数),就称棱锥为  $n$  棱锥。四面体就可以称为三棱锥。

棱锥的棱可以分为两类。一类是底面的边,称为**棱锥的底棱**;一类是底面顶点和锥顶的连线,称为**棱锥的侧棱**。每条侧棱是相邻两侧面的公共边。相邻的侧棱是同一个侧面的边,不相邻的侧棱所在的平面截棱锥的截面,称为**棱锥的对角面**。对角面就是底面的对角线和锥顶构成的三角形。



棱锥底面的多边形可以用对角线剖分成多个三角形。每个三角形作为底面,棱锥锥顶作为锥顶的三棱锥,合起来就是原棱锥。这说明任何棱锥都是四面体拼合而成。

如果棱锥底面是正多边形,且锥顶在底面的投影是正多边形的中心,就说棱锥是**正棱锥**。正四面体就是一种正三棱锥。正棱锥的各个侧面都是全等的等腰三角形,都和底面成相等的角。这些等腰三角形的高都相等,称为正棱锥的**斜高**。正棱锥的侧棱长度都相等,且和底面成相等的角。

### 习题 3.1.1.

1. 正八面体是各个面全等、各个棱等长、各个面夹角都相等的八面体。求正八面体相邻两面的夹角。

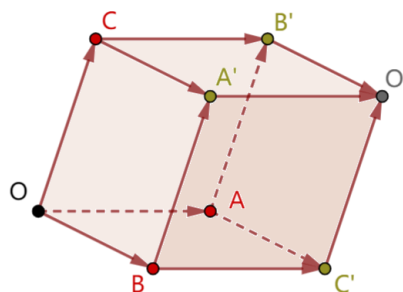
2. 是否有四个面都是直角三角形的四面体？如果有，请举出例子；如果没有，请证明。

3. 四面体  $ABCD$  中，过顶点  $A$  的三个面都是直角三角形。 $A$  到平面  $BCD$  的垂足为  $H$ 。 $H$  和三角形  $BCD$  有何关系？试证明之。

## 3.2 平行六面体和棱柱

如果说四面体是立体空间中的三角形，那么平行六面体就是立体空间中的平行四边形。

平行六面体可以由三个不共线向量  $\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}$  出发，通过不断构建平行四边形得到。首先，三个向量中每两个向量可以构建一个平行四边形。比如  $\vec{OA}, \vec{OB}$  可以确定平行四边形  $AOBC'$ ，其中向量  $\vec{OC'} = \vec{OA} + \vec{OB}$ 。同理可以得到  $\vec{OA'} = \vec{OB} + \vec{OC}$ 、 $\vec{OB'} = \vec{OC} + \vec{OA}$ 。



接下来，向量  $\vec{OA'}, \vec{OB'}, \vec{OC'}$  又可以确定平行四边形  $A'CB'O'$ ，其中  $\vec{OO'} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}$ 。此外可以验证，向量  $\vec{OA'}, \vec{OB}, \vec{OC'}$  以及向量  $\vec{OA}, \vec{OB'}, \vec{OC}$  分别确定的平行四边形的第四个顶点也是  $O'$ 。

$O, A, B, C, A', B', C', O'$  这八个顶点确定的六面体就叫作平行六面体，记为平行六面体  $O - ABC - A'B'C' - O'$  或  $AOBC' - B'CA'O'$ ，简记为平行六面体  $OABC$ 。

平行六面体的八个顶点可以看作三个不共线向量按照“加或不加”的规则得到的所有组合：

$$\{uA + vB + wC \mid u, v, w \in \{0, 1\}\}.$$

有时候，我们也用  $(u, v, w)$  来指代各个顶点，称为顶点的内坐标。比如，点  $A$  的内坐标是  $(1, 0, 0)$ ，而点  $B'$  的内坐标是  $(1, 0, 1)$ 。

直观上看, 平行六面体的 12 条棱可以分为三组, 每组四条棱都相互平行且等长, 对应同一个向量。比如  $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BC'} = \overrightarrow{CB'} = \overrightarrow{AO'}$ 。平行六面体的三组对面分别相互平行, 而且是全等的平行四边形; 根据面的平行关系以及平行四边形的全等关系, 可以推出每组各面对应的对角线平行且等长。这些对角线称为平行六面体的**面对角线**。每个面两条对角线的交点称为平行六面体的**面心**。

平行六面体的顶点可以分为四对, 每对顶点的内坐标相加恰好是  $(1, 1, 1)$ 。比如  $A(1, 0, 0)$  和  $A'(0, 1, 1)$  就是一对。每对顶点的连线称为平行六面体的**体对角线**。四条体对角线交于一点:  $X = \frac{1}{2}O'$ , 它平分这四条对角线。我们称  $X$  为平行六面体的**体心**或**中心**。

和平行四边形类似, 我们也可以定义一些特殊的平行六面体。如果向量  $A, B, C$  相互垂直, 就说平行六面体  $OABC$  是**长方体**。如果向量  $A, B, C$  长度相等, 就说平行六面体  $OABC$  是**菱体**。如果向量  $A, B, C$  相互垂直且长度相等, 就说平行六面体  $OABC$  是**正方体**。可以看到, 这些特殊平行六面体要求三组对面同时具有某种性质。长方体的面都是长方形, 菱体的面都是菱形, 正方体的面都是正方形。

三组面的性质也可以不全相同。比如, 如果  $A$  与  $B, C$  垂直, 就说平行六面体  $OABC$  是**直斜方体**; 如果只知道  $A, B$  垂直, 就说平行六面体  $OABC$  是**双斜方体**。类似定义的特殊平行六面体种类较多, 此处不一一介绍。

从平行六面体出发, 可以得到一类称为棱柱的多面体。给定一平面及其中一个多边形。将多边形所有顶点按同一个向量平移, 得到一个新的多边形。新多边形所在平面和原平面平行。连接新旧多边形对应顶点的线段, 全部平行且相等。相邻的两对新旧顶点, 构成一个平行四边形。新旧多边形和这些平行四边形所在的平面围成的多面体, 称为**棱柱**。

直观上看, 棱柱是三条或以上不共面的直线被两个平行平面所截得到的, 对应的两个面称为**棱柱的底面** (按需要可以称为上底面和下底面), 其

余的面称为**棱柱的侧面**。两底面的距离称为**棱柱的高**。如果底面是  $n$  边形，就称棱柱为  **$n$  棱柱**。比如平行六边形就是四棱柱。

棱柱的棱分为两类，一类是两个全等多边形的边，称为**棱柱的底棱**，侧面连接多边形对应顶点的边，称为**棱柱的侧棱**。每条侧棱是相邻两侧面的公共边。相邻的侧棱是同一侧面的边，不相邻的侧棱截棱柱得到的平面，叫作**棱柱的对角面**。对角面也是平行四边形。它的一对边是不相邻的侧棱，另一对边是两多边形对应的对角线。

棱柱底面的多边形可以用对角线剖分为多个三角形，从这个意义上来说，底面是三角形的三棱柱可以说是基本的棱柱。平行六面体总可以看成两个三棱柱拼合而成。

如果棱柱的底面是正多边形，且两个正多边形的中心连线与它们所在平面垂直，这样的棱柱称为**正棱柱**。正方体就是正四棱柱。一组对面为正方形的长方体也是正四棱柱。如果棱柱的侧面总与底面垂直，这样的棱柱称为**直棱柱**。正棱柱总是直棱柱。

如果棱柱两相邻侧面都与底面垂直，那么根据定理，它们的交线与底面垂直，也就是说，直棱柱的侧棱总与底面垂直。

#### 习题 3.2.1.

1. 证明：平行六面体的体心平分对面面心的连线。
2. 证明：长方体各个对角面的面积相等。
3. 试将三棱柱分为三个四面体。

### 3.3 棱台

如前所述，棱锥可以看成平面截发自同一点的三条或更多（不共面的）射线得到的多面体。棱柱可以看成两平行平面截三条或更多（不共面的）平行直线得到的多面体。而棱台是介于两者之间的一种多面体。

给定一个棱锥，用平行于底面的平面，可以将它截成两部分。一部分是和原棱锥形状相同、大小不同的棱锥，另一部分由两个形状一致、大小不一的多边形和连接它们对应顶点的线段构成的多面体，称为**棱台**。和平面形状类比，棱台类似于梯形。

和棱柱类似，两个平行多边形称为**棱台的底面**（按需要可以称为上底面和下底面），两底面的距离称为**棱台的高**。其余的面称为**棱台的侧面**。每个侧面都是梯形，梯形的上下底分别是上下底面的边。如果底面是  $n$  边形，就称棱台为  **$n$  棱台**。

棱台的棱分为两类，一类是两个全等多边形的边，称为**棱台的底棱**，侧面连接多边形对应顶点的边，称为**棱台的侧棱**。每条侧棱是相邻两侧面的公共边。相邻的侧棱是同一侧面的边，不相邻的侧棱截棱柱得到的平面，叫作**棱台的对角面**。对角面也是梯形。它的一对边是不相邻的侧棱，另一对边是两多边形对应的对角线。

棱台是平面截棱锥所得，所以，上底是下底的位似形，锥顶是位似中心。换句话说，设下底为多边形  $A_1A_2\cdots A_n$ ，上底投影是  $B_1B_2\cdots B_n$ ，棱锥锥顶为  $P$ ，那么存在系数  $t > 0$ ，使得：

$$\forall i \in [1, \cdots, n], \overrightarrow{PB_i} = t\overrightarrow{PA_i}.$$

正棱锥截得的棱台叫作**正棱台**。正棱锥的侧棱长度相等，所以正棱台的侧棱长度也相等。

## 第四章 旋转体

多面体是一类简单的立体形状。另一种容易想到的立体形状是**旋转体**。空间中，把给定平面上的图形绕平面上的某条直线旋转，围成的形状就叫旋转体。该直线称为旋转体的**旋转轴**。旋转体对应着平面形中的圆形。

### 4.1 圆锥、圆柱和圆台

给定平面中的直角三角形  $OAB$ ，将它绕着直角边  $OA$  所在直线旋转一周，就得到一个**圆锥**，记为圆锥  $OAB$ 。 $O$  称为**圆锥的锥顶**，旋转轴  $OA$  称为**圆锥的轴**，它的长度叫做**圆锥的高**。斜边  $OB$  称为**圆锥的母线**，旋转得到的面称为**圆锥的侧面**，另一直角边  $AB$  旋转得到的面称为**圆锥的底面**。

给定平面中的矩形  $OO'AB$ ，将它绕着边  $OO'$  所在直线旋转一周，就得到一个**圆柱**，记为圆柱  $OO'AB$ 。旋转轴  $OO'$  称为**圆柱的轴**，它的长度叫做**圆柱的高**。 $AB$  称为**圆柱的母线**，它旋转得到的面称为**圆柱的侧面**，另两边  $O'A$ 、 $OB$  旋转得到的面称为**圆柱的底面**。

给定平面中的直角梯形  $OO'AB$ ，将它绕着直角腰  $OO'$  所在直线旋转一周，就得到一个**圆台**，记为圆台  $OO'AB$ 。旋转轴  $OO'$  称为**圆台的轴**，它的长度叫做**圆台的高**。 $AB$  称为**圆台的母线**，旋转得到的面称为**圆台的侧面**，另两边  $OA$ 、 $O'B$  旋转得到的面称为**圆台的底面**。

另一种定义是将平面中一直线  $m$  绕另一直线  $h$  旋转。如果两直线平行,那么得到的形状称为**全圆柱面**;如果两直线相交,那么得到的形状称为**全圆锥面**。 $h$  称为旋转轴,而  $m$  称为母线,相交直线的交点就是锥顶。用两平行平面截全圆柱面,如果平面垂直于旋转轴,就得到圆柱;如果不垂直,得到的形状称为**斜圆柱**。用平面截全圆锥面,如果平面垂直于旋转轴,从锥顶到平面的部分就是圆锥;如果不垂直,从锥顶到平面的部分称为**斜圆锥**。用两平行平面截全圆锥面,如果平面垂直于旋转轴,就得到圆台;如果不垂直,得到的形状称为**斜圆台**。

显然,圆锥和圆柱分别和正棱锥、正棱柱、正棱台相似,但没有侧棱。圆台和圆锥的关系,与棱台和棱锥的关系相似。

一般来说,一点绕一直线旋转,得到的总是一个圆。圆心就是圆所在的平面和直线的交点。用向量的语言来说,设旋转轴  $h$  的方向向量是  $\mathbf{h} = (0, 0, 1)$ , 向量  $\overrightarrow{OA}$  的长度为  $a > 1$ , 则  $A$  绕  $h$  旋转,得到的是满足  $\|\overrightarrow{OP}\| = a$  且  $\overrightarrow{OP} \cdot \mathbf{h} = \overrightarrow{OA} \cdot \mathbf{h}$  的点  $P$  的集合。设点  $A, P$  的坐标分别为  $(a_x, a_y, a_z)$ ,  $(p_x, p_y, p_z)$ , 则  $P$  是方程组:

$$\begin{cases} p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 \\ p_z = a_z \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} p_x^2 + p_y^2 = a_x^2 + a_y^2 \\ p_z = a_z \end{cases}$$

的解集。这是一个圆,它所在平面是  $z = a_z$ , 圆心为  $(0, 0, a_z)$ , 半径为  $\sqrt{a_x^2 + a_y^2}$ 。

将这个结论运用到圆锥、圆柱和圆台上,可以知道:圆锥  $OAB$  的底面是一个圆,圆心就是底面和轴的交点,半径就是  $|OA|$ , 称为**圆锥的半径**。圆柱  $OO'AB$  的底面是两个大小一样的圆,圆心就是底面和轴的交点,半径就是  $|OA|$ , 称为**圆柱的半径**。圆台的底面是两个圆,圆心分别是对应平



面和轴的交点，半径分别是  $|O'A|$  和  $|OB|$ ，分别称为圆台的上底半径和下底半径。

更进一步，我们可以得到圆锥、圆柱和圆台的方程。全圆锥面中，设  $A$  在母线  $m$  上。设  $m$  的方向向量为  $(\cos \theta, 0, \sin \theta)$ ， $m$  中一点  $A$  的坐标为  $(t \cos \theta, 0, t \sin \theta)$ ，则它对应的点  $P$  满足

$$\begin{cases} p_x^2 + p_y^2 = a_x^2 + a_y^2 = t^2 \cos^2 \theta \\ p_z = a_z = t \sin \theta \end{cases}$$

因此，全圆锥面是以下方程的解集：

$$x^2 + y^2 = z^2 \cot^2 \theta$$

其中  $\theta$  是轴和母线的夹角。而圆锥可以看做全圆锥面的锥顶  $(0, 0, 0)$  和平面  $z = z_0$  之间的部分，也可以写作：

$$x^2 + y^2 \leq z^2 \cot^2 \theta, \quad 0 \leq z \leq z_0.$$

圆台可以看做全圆锥面在平行平面  $z = z_0 > 0$  和  $z = z_1 > z_0$  之间的部分，也可以写作：

$$x^2 + y^2 \leq z^2 \cot^2 \theta, \quad z_0 \leq z \leq z_1.$$

类似地，设全圆柱面的母线为  $m = \mathbb{R}(0, 0, 1) + (a, 0, 0)$ ， $m$  中一点  $A$  的坐标为  $(a, 0, t)$ ，则它对应的点  $P$  满足

$$\begin{cases} p_x^2 + p_y^2 = a^2 \\ p_z = a_z = t \end{cases}$$

因此，全圆柱面是以下方程的解集：

$$x^2 + y^2 = a^2$$

其中  $a$  是轴和母线的距离，也是底面的半径。而圆柱可以看做全圆柱面在平行平面  $z = 0$  和  $z = z_0$  之间的部分，也可以写作：

$$x^2 + y^2 \leq a^2, \quad 0 \leq z \leq z_0.$$

## 4.2 球

圆锥、圆柱和圆台分别是直角三角形、矩形和直角梯形按轴旋转得到的，如果把圆心过旋转轴的圆按轴旋转，得到的就是**球**。球是日常生活中常见的形状。你能说说，日常生活中哪些物品的形状可以用球来概括？

设圆的半径为  $a$ ，圆心为  $O$ ，圆绕着过  $O$  的旋转轴  $h$  旋转一周，得到球  $\otimes(O, a)$ 。 $O$  称为球的**球心**， $a$  称为**球的半径**。

球还有另一种定义：空间中到一点距离不超过定值  $a$  的点的集合，就是球  $\otimes(O, a)$ 。这两种定义是等价的，我们可以通过分别求出相应的方程来证明。

首先看用旋转定义的球。设圆  $(O, a)$  上的点为  $A(a \cos \theta, 0, a \sin \theta)$ ，则它绕  $\mathbf{h} = (0, 0, 1)$  引出的直线一周得到的点  $P$  满足

$$\begin{cases} p_x^2 + p_y^2 = a^2 \sin^2 \theta \\ p_z = a_z = a \cos \theta \end{cases}$$

即

$$p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 = a^2.$$

也就是说，球是以下方程的解集：

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2.$$

另一方面，空间中的点  $P$  到原点（圆  $(O, a)$  的圆心）的距离不超过  $a$ ，就是说  $\|\overrightarrow{OP}\| \leq a$ ，因此这样定义的球，也是方程

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$$

的解集。这说明两种定义是等价的。

球的表面称为球面。球面的方程是：

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2.$$

换句话说，球面是到一点距离为定值的点的集合。球面任一点到球心的线段及其长度称为**球的半径**。过球面任一点和球心的直线与球交于另一点。连接两点的线段及其长度称为**球的直径**。

圆关于圆心对称，也关于过圆心的任何直线对称。球的对称性与之类似。球关于球心对称，也关于过球心的任何直线、任何平面对称。

用平面截球，得到的截面是什么形状呢？

考虑平面  $z = z_0$ ，代入球的方程，得到

$$x^2 + y^2 \leq a^2 - z_0^2$$

$|z_0| < a$  时，方程的解集是一个圆（圆盘），称为**平面与球相交**，交集称为**截面圆**。截面圆的圆心为  $(0, 0, z_0)$ ，半径是  $\sqrt{a^2 - z_0^2}$ 。 $z_0 = 0$  时，圆心为球心，半径为  $a$ ，我们把过球心的平面对球的截面称为**球的大圆**； $z_0 \neq 0$  时，半径小于  $a$ ， $|z_0|$  越小，半径越大。

$z_0 = \pm a$  时，方程分别只有  $(a, 0, 0)$  和  $(-a, 0, 0)$  一个解，平面和球恰交于一点，称为**平面与球相切**，该面称为**球的切面**，交点称为**切点**。切面中过切点的直线与球也只有一个交点，称为**球的切线**。

$|z_0| > a$  时，平面与球无交点，称为**相离**。

球的切面垂直于球心和切点的连线，因此切线也垂直于球心和切点的连线。反之，设  $A$  是球  $O$  面上一点，经过  $A$  且垂直于  $OA$  的直线和平面就是球的切线和切面。

我们知道，地球大致可以看成是一个球。很多与地球有关的研究中，我们假设地球是一个球，球心称为地心。为了方便讨论，我们假设地球自转轴经

过地心。与地球球面相交于两点，分别是南北两极点。过两极的平面截地球得到的大圆，称为经线。垂直于自转轴的平面截地球得到的圆，称为纬线。其中过地心的平面截得的大圆称为赤道。这样，用经线和纬线的交点，可以定位球面上的点。一般的球面上，我们也可以沿用这些术语。

## 第五章 空间形状的体积

生产和实践中，常常会遇到容量和占位相关的问题。比如，仓库、运输机、航母的升降间是否能容纳特定型号的粮食、战车或飞机？修补一条堤坝需要多少土方？热水瓶能容纳多少水？这些问题背后，涉及到空间形状的大小问题。体积的概念，就是用来衡量空间形状的大小。

和长度、面积一样，体积可以有两种理解。从相对的意义来说，空间形状的体积是它的大小相对某个单位体积形状的大小的比值。从绝对的意义来说，体积就是空间形状内部点的“多少”。点、线、面按照定义是没有体积的。从没有体积的概念出发，得到体积的概念，需要复杂的定义过程，我们不做介绍。这里我们只讨论相对意义上的体积。

和面积一样，体积是一个数。规定了立体空间的长度、长度单位和面积单位，我们规定立体空间的体积单位是棱长为 1 的正方体。棱长为 1 的正方体，体积为 1，称为**单位正方体**或**方元**。关于体积，也有以下两条公理：

**公理 6. 全等公理** 全等的形状体积相等。

**公理 7. 加法公理** 把一个形状分为若干部分，各个部分的体积之和等于整体的体积。

从这两条公理出发，我们来研究简单多面体的体积。

## 5.1 平行六面体的体积

正方体是平行六面体的特殊情形。既然我们用正方体定义单位体积，以此出发，我们来研究平行六面体的体积。

从正方体出发，自然要讨论长方体的体积。

设长方体的长、宽、高分别是正整数  $a, b, c$ ，根据加法公理，它的体积是  $abc$  个方元体积之和，因此根据全等公理，它的体积是  $abc$ 。反之，设长方体的长、宽、高分别是  $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ ，其中  $a, b, c$  是正整数，则  $abc$  个它的体积之和是 1，于是它的体积是  $\frac{1}{abc}$ 。于是，如果长方体的长、宽、高分别是有理数  $\frac{n_a}{m_a}, \frac{n_b}{m_b}, \frac{n_c}{m_c}$ ，则体积为  $n_a n_b n_c$  个体积为  $\frac{1}{m_a m_b m_c}$  的长方体体积之和，即为  $\frac{n_a n_b n_c}{m_a m_b m_c}$ 。一般来说，长方体的长、宽、高分别是正数  $a, b, c$ ，则体积为：

$$V = abc.$$

这就是长方体的体积公式。从公式可以得到：如果一个长方体的长、宽、高分别是另一个长方体长、宽、高的  $t_a, t_b, t_c$  倍，那么它的体积是后者的  $t_a t_b t_c$  倍。如果两个长方体底面积相等，那么体积之比等于高之比。如果两个长方体高相等，那么体积之比等于底面积之比。如果一个正方体的棱长是另一个正方体棱长的  $t$  倍，那么它的体积是后者的  $t^3$  倍。

从向量的角度来看，以基向量  $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$  为棱构建的单位正方体，体积为 1。以  $a\mathbf{e}_x, b\mathbf{e}_y, c\mathbf{e}_z$  为棱构建的长方形，体积为  $abc$ 。

对一般的平行六面体，我们希望找出它的体积与方元体积之比。设平行六面体由向量  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  构建，我们尝试用以下映射表示它的体积，记为  $V(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ 。这是一个三元映射，我们希望它满足以下的性质：

1.  $V(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z) = 1$ .
2.  $\forall s, t, V(s\mathbf{a}_1 + t\mathbf{a}_2, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = sV(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}, \mathbf{c}) + tV(\mathbf{a}_2, \mathbf{b}, \mathbf{c}), V(\mathbf{a}, s\mathbf{b}_1 + t\mathbf{b}_2, \mathbf{c}) = sV(\mathbf{a}, \mathbf{b}_1, \mathbf{c}) + tV(\mathbf{a}, \mathbf{b}_2, \mathbf{c}), V(\mathbf{a}, \mathbf{b}, s\mathbf{c}_1 + t\mathbf{c}_2) = sV(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}_1) + tV(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}_2)$ 。
3.  $V(\mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{c}) = 0, V(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a}) = 0, V(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{b}) = 0$ 。

前两个性质对应两条公理和方元体积为 1 的设定。第三个性质说明点、线、面体积为 0。从第三个性质出发，可以推出：

**定理 5.1.1.** 体积的反称性 给定向量  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ ，则它们相关的平行六面体体积满足以下性质：

$$V(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = -V(\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{b}).$$

$$V(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = -V(\mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{c}).$$

$$V(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = -V(\mathbf{c}, \mathbf{b}, \mathbf{a}).$$

换言之，将映射  $V$  的任何两个自变量交换位置，值变为原来的相反数。这说明这样定义的体积可正可负。我们把这样的体积称为**有向体积**，把有向体积的绝对值称为**绝对体积**，或简称体积。

方元的绝对体积总是 1，而有向体积则可以是  $\pm 1$ 。我们来逐个查看： $V(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z) = 1$ ，因此

$$V(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_z, \mathbf{e}_y) = V(\mathbf{e}_y, \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_z) = V(\mathbf{e}_z, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_x) = -1.$$

于是

$$V(\mathbf{e}_z, \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y) = V(\mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z, \mathbf{e}_x) = 1.$$

我们把方元分成了两类，一类的有向体积为 1，另一类为  $-1$ 。可以看出，有向体积为 1，对应向量遵循右手法则；有向体积为  $-1$ ，对应向量遵循左手法则。

一般来说，设  $\mathbf{a} = a_x \mathbf{e}_x + a_y \mathbf{e}_y + a_z \mathbf{e}_z$ 、 $\mathbf{b} = b_x \mathbf{e}_x + b_y \mathbf{e}_y + b_z \mathbf{e}_z$ 、 $\mathbf{c} = c_x \mathbf{e}_x + c_y \mathbf{e}_y + c_z \mathbf{e}_z$ ，则根据第二个性质，可以把  $V(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$  展开成 27 项，每一项都是  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  各自坐标分量乘以  $V(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k)$  的形式，其中  $\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k$  是相同或不同的基向量。根据第三个性质，如果其中两个向量相同，那么  $V(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k) = 0$ 。因此只需要考虑  $\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k$  两两不同的情况，即上面逐个查

看的 6 项:

$$\begin{aligned} V(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) &= a_x b_y c_z V(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z) + a_y b_z c_x V(\mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z, \mathbf{e}_x) + a_z b_x c_y V(\mathbf{e}_z, \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y) \\ &\quad + a_x b_z c_y V(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_z, \mathbf{e}_y) + a_y b_x c_z V(\mathbf{e}_y, \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_z) + a_z b_y c_x V(\mathbf{e}_z, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_x) \\ &= a_x b_y c_z + a_y b_z c_x + a_z b_x c_y - a_x b_z c_y - a_y b_x c_z - a_z b_y c_x. \end{aligned}$$

这就是平行六面体的有向体积。平行六面体的体积就是有向体积的绝对值。

**例题 5.1.1.** 求向量  $(1, -0.5, 0)$ 、 $(0, 1, 0.5)$ 、 $(0, 0.5, 1)$  构建的平行六面体的体积。

**解答.** 根据平行六面体的体积公式，它的有向体积为

$$1 \cdot 1 \cdot 1 + (-0.5) \cdot 0.5 \cdot 0 + 0 \cdot 0 \cdot 0.5 - 1 \cdot 0.5 \cdot 0.5 - (-0.5) \cdot 0 \cdot 1 - 0 \cdot 1 \cdot 0 = 0.75.$$

体积为 0.75。

## 5.2 等积原理

从平行六面体的体积出发，能否得到其它多面体和立体形状的体积呢？这里介绍一个有力的结论：**等积原理**。它结合了相对和绝对意义上的体积的概念，深刻揭示了不同形状的体积之间的关系。本阶段我们不证明等积原理，把它作为公理引入。

**公理 8. 等积原理** 给定空间中两个形状  $X, Y$  和两个平行平面  $\gamma_1, \gamma_2$ ，如果位于  $\gamma_1, \gamma_2$  之间且平行于  $\gamma_1, \gamma_2$  的任何平面  $\gamma$  截  $X, Y$  得到的截面面积都相等，那么  $X, Y$  在  $\gamma_1, \gamma_2$  之间的部分体积相等。

例如：左侧多面体  $X$  和右侧多面体  $Y$  分别被平行于平面  $\gamma_1, \gamma_2$  的平面所截，前者的截面是五边形，后者的截面是三角形。如果不论被  $\gamma_1, \gamma_2$  之



间的哪个平行于  $\gamma_1, \gamma_2$  的平面所截，截出来的五边形和三角形面积总相等，那么根据等积原理， $X$  和  $Y$  在  $\gamma_1, \gamma_2$  之间的部分体积相等。

据唐代李淳风记载，等积原理是南朝梁数学家祖暅发现的。祖暅利用等积原理，解决了球体积计算的问题。因此，后世也把这个定理称为**祖暅原理**。等积原理可以看做平面中“同底等高面积相同”结论的“升级版”。比如，根据等积原理，斜棱柱的体积等于同底等高直棱柱的体积。

**例题 5.2.1.** 证明长方体的对角面把它分成体积相等的两部分。

**解答.** 设有长方体  $ABCD - A'B'C'D'$ ，它夹在平行平面  $ABCD$  和平面  $A'B'C'D'$  之间。考虑对角面  $BB'D'D$ ，它把长方体分为两部分。用平行于平面  $ABCD$  的平面  $\gamma$  截这两部分，得到两个全等三角形（分别全等于  $\triangle ABD$  和  $\triangle BCD$ ），因此截面面积相等。根据等积原理，这两部分在平面  $ABCD$  和平面  $A'B'C'D'$  之间的部分体积相等，即它们体积相等。

**思考 5.2.1.**

平面中，给定两平行直线  $l_1, l_2$  和两个封闭图形  $X, Y$ 。如果  $l_1, l_2$  之间任何平行于  $l_1$  的直线与  $X, Y$  的交集是等长的线段， $X, Y$  夹在  $l_1, l_2$  间的部分的面积是否相等？

**习题 5.2.1.**

1. 证明：斜棱柱的体积等于同底等高直棱柱的体积。
2. 给定空间中两个形状  $X, Y$  和两个平行平面  $\gamma_1, \gamma_2$ ，如果位于  $\gamma_1, \gamma_2$  之间且平行于  $\gamma_1, \gamma_2$  的任何平面  $\gamma$  截  $X, Y$  得到的截面面积都成同一比例，比值为  $c \in \mathbb{Q}$ ，证明： $X, Y$  在  $\gamma_1, \gamma_2$  之间的部分体积之比是  $c$ 。

## 5.3 棱柱、棱锥和棱台的体积

首先来看棱柱的体积。

设棱柱上下底面所在平面分别是  $\gamma_1, \gamma_2$ 。在  $\gamma_1$  上作面积和棱柱底面积相等的长方形  $ABCD$ ，过长方形四边分别作垂直于  $\gamma_1$  的平面。这四个平面和  $\gamma_1, \gamma_2$  围成一个长方体。 $\gamma_1, \gamma_2$  之间任意平行于它们的平面截棱柱和长方体，截面分别是和底面全等的多边形，因此面积相等。根据等积原理，棱柱的体积和这个长方体相等。长方体的体积等于长乘宽乘高，即底面积乘以高。它的高是平面  $\gamma_1, \gamma_2$  之间的距离。我们定义棱柱的高为上下底面之间的距离，则可以得到棱柱的体积公式：

**定理 5.3.1.** 棱柱的体积等于底面积乘以高。

根据棱柱的体积公式，我们知道：**底面积相等，高相等的棱柱，体积相等**。这个性质和平行四边形的性质类似。

接下来看棱锥的体积。过锥顶  $P$  作平行于底面所在平面  $\gamma_1$  的平面  $\gamma_2$ ，我们考虑  $\gamma_1, \gamma_2$  之间平行于  $\gamma_1$  的平面  $\gamma$  截棱锥的截面。截面是底面的相似多边形。设  $\gamma_1, \gamma_2$  距离为  $h$ ， $\gamma, \gamma_2$  的距离为  $g$ ，则截面和底面的相似比是  $\frac{g}{h}$ ，面积比是  $\frac{g^2}{h^2}$ 。如果两个棱锥底面积相等，并且锥顶到底面距离（称为棱锥的高）相等，把这两个棱锥底面放置在同一个平面上，用锥顶和底面之间平行于底面的平面截这两个棱锥，那么各自截面的面积和相应的底面积之比相等。因此，根据等积原理：

**定理 5.3.2.** 底面积相等，高相等的棱锥，体积相等。

这个定理和三角形的性质类似。我们知道三角形是同底等高的平行四边形面积的一半，据此，我们来研究棱锥体积和同底等高棱柱体积的关系。

从最简单的情形出发：我们假设棱锥和棱柱的底面是同一个三角形，棱锥的锥顶是棱柱的一个顶点。这时，棱锥就是四面体。设棱柱为  $ABC - A'B'C'$ ，棱锥为  $A'ABC$ 。

如下图，平面  $A'BC$  和  $A'B'C$  将三棱柱分为三个四面体： $A'ABC$ 、 $A'B'BC$  和  $A'B'C'C$ 。其中，四面体  $A'B'C'C$  可以看作底面为  $A'B'C'$ ，锥

顶为  $C$  的三棱锥。它的底面积和棱锥  $A'ABC$  底面积相同，高相等，所以根据定理 5.3.2，它的体积和四面体  $A'ABC$  的体积相等。

另一方面，四面体  $A'B'BC$  和  $A'B'C'C$  都可以看作底面在平面  $B'C'CB$  上，锥顶为  $A'$  的三棱锥。它们的底面： $\triangle B'BC \simeq \triangle B'C'C$ ，所以根据定理 5.3.2，体积相等。这说明，三棱柱由三个体积相等的四面体组成，因此它的体积是四面体  $A'ABC$  的三倍。

根据等积定理，三棱锥和三棱柱如果底面积相等，高相等，则棱锥的体积是棱柱体积的三分之一。

对于一般的棱柱和棱锥，我们可以将它们的底面剖分为三角形，因此，它们的体积分别等于相应的三棱柱和三棱锥体积之和，也就是相应的三角形面积之和乘以高。因此，对于一般的棱柱和棱锥，也有：

**定理 5.3.3.** 如果棱柱和棱锥的底面积相等，高相等，则棱锥的体积是棱柱体积的三分之一。

因此，从棱柱的体积公式可以立刻得到棱锥的体积公式：

**定理 5.3.4.** 棱柱的体积等于底面积乘以高除以三。

最后来看棱台的体积。棱台可以看做棱锥被平行于底面的平面截去带锥顶的部分得到，因此，它的体积等于补全后的大棱锥体积减去小棱锥体积。已知棱台上下底面积为  $S_{\text{上}}, S_{\text{下}}$ ，高为  $h$ ，则可以先求出大小棱锥的体积，作差得到棱台体积。

设补全后的大小棱锥高为  $h_{\text{大}}, h_{\text{小}}$ ，则  $h_{\text{大}} = h_{\text{小}} + h$ 。棱台上下底面积之比为

$$\frac{S_{\text{上}}}{S_{\text{下}}} = \frac{h_{\text{小}}^2}{h_{\text{大}}^2}$$

联立两个方程，解得

$$\begin{cases} h_{\text{小}} = \frac{h\sqrt{S_{\text{上}}}}{\sqrt{S_{\text{下}}}-\sqrt{S_{\text{上}}}} \\ h_{\text{大}} = \frac{h\sqrt{S_{\text{下}}}}{\sqrt{S_{\text{下}}}-\sqrt{S_{\text{上}}}} \end{cases}$$

因此棱台体积为：

$$\begin{aligned} \text{棱台的体积} &= \text{大棱锥的体积} - \text{小棱锥的体积} \\ &= \frac{1}{3}S_{\text{下}}h_{\text{大}} - \frac{1}{3}S_{\text{上}}h_{\text{小}} \\ &= \frac{h}{3}(S_{\text{上}} + S_{\text{下}} + \sqrt{S_{\text{上}}S_{\text{下}}}) \end{aligned}$$

**定理 5.3.5.** 上下底面积为  $S_{\text{上}}, S_{\text{下}}$ , 高为  $h$  的棱台, 体积为  $\frac{h}{3}(S_{\text{上}} + S_{\text{下}} + \sqrt{S_{\text{上}}S_{\text{下}}})$ 。

可以看到，如果上底缩为一点，则上底面积为 0，这时棱台变为棱锥；如果上底和下底全等，这时棱台变为棱柱。

#### 习题 5.3.1.

1. 底面是长为 4、宽为 3 的长方形，高为 2 的四棱柱、四棱锥，体积分别是多少？

2. 棱长为 3 的正四面体，体积是多少？

3. 平面  $\gamma$  上有一梯形  $ABCD$ 。 $l$  是平面外一条平行于梯形上底  $AD$  的直线。 $l$  到  $\gamma$  的距离为 3，梯形上底长度为 2.6、下底长度为 3.5，梯形的高为 1.9。 $l$  上有距离为 2.6 的两点  $P, Q$ 。连接  $PA, PB, QC, QD$ ，这样的多面体称为**畚**。求多面体  $PQ-ABCD$  的体积。

## 5.4 圆柱、圆锥和圆台的体积

使用等积原理，不难从棱柱、棱锥和棱台的体积，推出圆柱、圆锥和圆台的体积。

半径为  $r$ ，高为  $h$  的圆柱的方程可以写为

$$x^2 + y^2 \leq r^2, \quad 0 \leq z \leq h.$$

任何与底面平行的平面  $z = z_0$  截圆柱，得到的是半径为  $r$  的圆。因此，在圆柱底面所在平面作面积等于  $\pi r^2$  的长方形，过长方形各边作垂直底面的平面，和两底面围成长方体。根据等积原理，这个长方体的体积等于圆柱的体积。于是可以得到圆柱体积公式：

**定理 5.4.1.** 半径为  $r$ ，高为  $h$  的圆柱，体积为  $\pi r^2 h$ 。

锥顶为原点、半径为  $r$ 、高为  $h$  的圆锥的方程可以写为

$$x^2 + y^2 \leq \frac{r^2 z^2}{h^2}, \quad 0 \leq z \leq h.$$

任何与底面平行的平面  $z = z_0$  截圆锥，得到的是半径为  $\frac{r z_0}{h}$  的圆，面积为  $\frac{\pi r^2 z_0^2}{h^2}$ 。因此，在圆锥底面所在平面  $z = h$  作面积等于  $\pi r^2$  的长方形，以圆点为锥顶，作它到长方形各顶点的连线，是为一四棱锥。平面  $z = z_0$  截该四棱锥，得到一个长方形，面积为  $\frac{\pi r^2 z_0^2}{h^2}$ ，和截圆锥得到的圆面积相等。因此，根据等积原理，这个四棱锥的体积等于圆锥的体积。于是可以得到圆锥体积公式：

**定理 5.4.2.** 半径为  $r$ ，高为  $h$  的圆锥，体积为  $\frac{1}{3}\pi r^2 h$ 。

上底半径为  $r_{\text{上}}$ 、下底半径为  $r_{\text{下}}$ ，高为  $h$  的圆台，可以看作补全后的大圆锥减去小圆锥后的部分。经过类似棱台的计算可以得到，大小圆锥的高分别为：

$$\begin{cases} h_{\text{大}} = \frac{hr_{\text{下}}}{r_{\text{下}} - r_{\text{上}}} \\ h_{\text{小}} = \frac{hr_{\text{上}}}{r_{\text{下}} - r_{\text{上}}} \end{cases}$$

于是圆台体积为:

$$\begin{aligned}\text{圆台的体积} &= \text{大圆锥的体积} - \text{小圆锥的体积} \\ &= \frac{1}{3}\pi r_{\text{下}}^2 h_{\text{大}} - \frac{1}{3}\pi r_{\text{上}}^2 h_{\text{小}} \\ &= \frac{1}{3}\pi (r_{\text{上}}^2 + r_{\text{下}}^2 + r_{\text{上}}r_{\text{下}}) h\end{aligned}$$

即:

**定理 5.4.3.** 上下底半径分别为  $r_{\text{上}}$ 、 $r_{\text{下}}$ ，高为  $h$  的圆台，体积为

$$\frac{1}{3}\pi (r_{\text{上}}^2 + r_{\text{下}}^2 + r_{\text{上}}r_{\text{下}}) h.$$

不难看出，如果把圆柱、圆锥的底面积记为  $S$ ，把圆台上下底面积记为  $S_{\text{上}}$ 、 $S_{\text{下}}$ ，则圆柱、圆锥和圆台的体积公式和棱柱、棱锥和棱台的体积公式完全一致。

**思考 5.4.1.**

1. 方程  $x^2 + (y - z)^2 = \frac{r^2 z^2}{h^2}$ ， $0 \leq z \leq h$  确定的空间形状和圆锥  $x^2 + y^2 = \frac{r^2 z^2}{h^2}$ ， $0 \leq z \leq h$  一样吗？它们的体积一样吗？

2. 考虑全圆锥面  $x^2 + y^2 = z^2$  和全圆柱面  $x^2 + (z - 4)^2 = 9$  围成的空间形状。它的体积是多少？

**习题 5.4.1.**

1. 半径为 5、高为 2 的圆柱、圆锥，体积分别是多少？
2. 上底半径为 3、下底半径为 7、高为 5 的圆台，体积是多少？
3. 考虑点  $(0, 0, 0)$ 、 $(0, 0, 4)$ 、 $(3, 0, 1)$  确定的三角形。将它分别绕  $x$  轴、 $y$  轴、 $z$  轴旋转，得到的空间形状的体积各是多少？

## 5.5 球的体积

球的体积较难直接看出。我们可以从平面截球的截面面积入手。

圆心为原点、半径为  $r$  的球的方程可以写为:

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

用离圆心  $z_0$  的平面  $z = z_0$  截球, 得到半径为  $\sqrt{r^2 - z_0^2}$  的圆盘, 面积为  $\pi(r^2 - z_0^2)$ 。考虑锥顶在原点、上底在  $z = r$  平面、半径为  $r$ 、高为  $r$  的圆锥,

$$x^2 + y^2 = z^2, \quad 0 \leq z \leq r$$

平面  $z = z_0$  截该圆锥得到的截面面积为  $\pi z_0^2$ 。考虑下底在  $Oxy$  平面、上底在  $z = r$  平面, 半径为  $r$ 、方程为

$$x^2 + y^2 = r^2, \quad 0 \leq z \leq r$$

的圆柱, 平面  $z = z_0$  截该圆锥得到的截面面积为  $\pi r^2$ 。因此, 考虑圆柱中挖去圆锥得到的形状, 根据等积原理, 它的体积等于半个球 ( $z > 0$  部分) 的体积。于是,

$$\begin{aligned} \text{球的体积} &= 2 \cdot (\text{圆柱的体积} - \text{圆锥的体积}) \\ &= 2 \left( \pi r^2 \cdot r - \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot r \right) \\ &= \frac{4}{3} \pi r^3 \end{aligned}$$

即:

**定理 5.5.1.** 半径为  $r$  的球, 体积为  $\frac{4}{3}\pi r^3$ 。

**思考 5.5.1.**

1. 半径为  $r$  的球面, 面积是多少?
2. 球面能否展开成为平面形状? 如果不能, 如何求它与单位面积的比值?

**习题 5.5.1.**

1. 从棱长为 4 的正方体中挖出一个最大的球, 剩余部分的体积是多少?

2. 全圆柱面  $y^2 + z^2 = r^2$  和  $x^2 + z^2 = r^2$  围成的形状称为**牟合方盖**。求牟合方盖的体积。

3. 圆心为原点、半径为  $r$  的球在平面  $z = z_0$  和  $z = r$  之间的部分，称为球缺。求球缺的体积。

4. 方程为  $(x - 4)^2 + z^2 = 4$  的圆绕  $z$  轴旋转一周，围成的空间形状称为**镯**。

4.1. 求该镯的方程。

4.2. 求平面  $z = z_0$  截该镯的截面面积。

4.3. 试通过与平放的圆柱对比，求该镯的体积。

4.4. 试推导镯的体积公式。



## 附录 A 空间形的表示法

为了方便讨论空间形，我们希望在纸面上快速便捷地表示空间中的点、直线、平面等基本形状。讨论平面形状时，我们自然地将纸面作为形状所在的平面。讨论空间中的形状时，我们没法在纸面上完整表示立体图形，所以需要一套统一约定的折衷方法，方便交流。我们把这样的方法称为**作图法**或**画法**。

人类自古以来就在探索作图法。距今两万年的壁画上，就有用线条表示动物和地形的创作。人类对作图法的探索有两个方向，一个致力于在平面上真实地还原人眼看到的景物，另一个致力于用简练记号表述空间中的对象。前者发展出以透视法为基础的艺术绘画技法，后者发展出以地图、工程图等为代表的实用绘图技法。下面介绍的属于后者，是数学中一种常用的简便作图法。

### 1.1 在空间中画平面

空间中的平面是没有边界的。为了在有限的纸面上表示平面，我们选用一定的形状框定边界，表示一个平面，称为平面的**示形**。要注意的是，这样表示的平面其实是平面的一部分，但不妨碍我们想象它是无边际延伸开来的。

我们约定用常见的平行四边形表示平面。平行四边形的长边长度一般

介于短边长度的 1.5 至 3 倍之间，长短边的锐角夹角一般是 45 度角。

一般来说，水平位置的平面（称为**水平面**），用上下对边水平的平行四边形表示，竖直位置的平面（称为**竖立面**），用左右对边竖直的平行四边形表示。矩形一般表示正对视线的竖直平面。完全侧对视线的竖直平面，用 45 度角的上下对边表示。

平面的名字一般标记在示形内部，靠近其某个顶点。

当一个平面示形的一部分被其它平面遮住时，我们用虚线表示被遮住部分的边界。如果虚线使得画面过于繁杂难辨，可以连虚线也不画。

用平行四边形表示平面，意味着我们降低了对真实性的要求，比如舍弃了近大远小的性质。因此作出的图形往往“不真实”。例如，一个水平面，我们看不出它到底位于我们上方还是下方。为此我们约定，**所有水平面均处于视线下方**，即我们总在俯视这些平面。这样，水平面靠下的点离我们较近，靠上的点离我们较远。

## 1.2 在水平面中画平面图形

已知一个平面形的样子，如何把它画在空间中某个水平面里？

我们把平面形所在的图称为平面图，把要画的图称为立体图。首先在立体图中画出水平面。为了方便，设示形的水平边长度为非水平边的 2 倍，夹角为 45 度。这个比例系数和夹角在下面画平面图形时将一直使用。

选择平面图中一条线段、射线或直线作为**水平线**。把它画进立体图时，画成水平方向，长度不变。与它平行的线段、射线、直线，也画成水平方向，线段长度不变。

平面图中垂直于水平线的线段、射线或直线（称为**纵直线**），把它画进立体图时，画成与平面非水平对边平行的方向（45 度角），线段的长度要除

以 2。

要将平面图中一点画进立体图中，可以先在平面图中作它到水平线和纵直线的垂线。这样，该点就成了水平线和纵直线的交点，于是可以在立体图中作出对应的点。

平面图中其它位置的线段、射线或直线，在其中取两点（线段一般取端点，射线取端点和较远一点，直线取较远两点）。将两点按上述方法画进立体图中，再连出对应的线段、射线或直线。

约定平面图中的上下左右关系在立体图中不变。但立体图中的上下关系应理解为前后关系，即靠上的在后（较远），靠下的在前（较近）。

## 1.3 在一般平面中画平面图形

在一般平面中画平面图形是复杂的操作。从原则上来说，违背了简便作图法的精神，容易产生既不简便、真实性也低的困境。因此，如果可以选择在水平面中画平面图形，最好不要在非水平面中画。

和在水平位置的平面中画平面图形的的方法类似，我们需要在立体图中示形的对边中选择一个**主边**和一个**副边**。水平面中，我们选择水平方向的对边为主边，非水平方向的对边为副边。一般平面中，需要自行选择边和副边。主边长度和副边长度之比称为**斜变系数**，比如水平位置平面的斜变系数为 2。

选定之后，主方向将对应平面图中的水平线，副方向将对应平面图中的纵直线。平面图中平行于水平线的线段、射线、直线，按主边方向画出，线段长度不变。平面图中垂直于水平线的线段、射线、直线，按副边方向画出，线段长度要除以斜变系数。

要将平面图中一点画进立体图中，可以先在平面图中作它到水平线和纵直线的垂线。这样，该点就成了水平线和纵直线的交点，于是可以在立体

图中作出对应的点。

平面图中其它位置的线段、射线或直线，在其中取两点（线段一般取端点，射线取端点和较远一点，直线取较远两点）。将两点按上述方法画进立体图中，再连出对应的线段、射线或直线。

把平面图形画到非水平面中的时候，平面图中的上下左右关系在立体图中可能改变。为此，作图时需要注意保持一致性，否则将产生错误的结果。

## 1.4 画空间直角坐标系

以上作图法中，其实已经用到了坐标系的想法。比如，平面图中的水平线可以看作坐标轴横轴，纵直线可以看作坐标轴纵轴。我们把平面图中一点画到立体图中时，过它作到水平线和纵直线的垂线，实际上就在确定它的坐标。

我们可以直接在立体图中画出直角坐标系。一般来说，选定的基底  $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ ，表示三个两两垂直的单位向量，对应三条射线。在立体图中，直角坐标系有多种画法。

选定一点为原点，过原点往右作水平射线，这条射线可以是  $x$  轴或  $y$  轴正半部分。如果设它为  $x$  轴正半，那么过原点往右上 45 度角作射线，是为  $y$  轴正半；如果设它为  $y$  轴正半，那么过原点往左下 45 度角作射线，是为  $x$  轴正半。最后过原点往上作竖直线，是为  $z$  轴正半。这种画法称为**右手正斜式**。将  $x$  轴和  $y$  轴互换，则称为**左手正斜式**。

另一种画法从  $z$  轴开始。过原点往上作竖直线，是为  $z$  轴正半。将其顺时针旋转 120 度，得到  $x$  轴正半；顺时针再旋转 120 度，得到  $y$  轴正半。这种画法称为**右手对称式**。将  $x$  轴和  $y$  轴互换，则称为**左手对称式**。

更一般的画法则继续向透视法靠拢。比如参考两点透视画出水平位置

的矩形，以此确定  $x$  轴和  $y$  轴。我们不在这里展开，只介绍正斜式画法。

正斜式画法与前面的平行四边形表示法兼容。从左下为  $x$  轴的右手对称式出发，容易看出， $Oxy$  就是水平面。为了方便，我们在它的示形基础上画坐标系。选好长短边长度后，水平上边就是  $y$  轴，非水平的左边就是  $x$  轴。将代表射线的箭头画在平行四边形对应的顶点，然后将这两边等分，标上坐标刻度。 $z$  轴（竖轴）按  $y$  轴长度标上刻度。朝反方向延伸可以画出各坐标轴的负半部分，并标上刻度。

按照坐标轴刻度，可以找出  $Oxy$  中点的位置。比如，要画出坐标为  $(1, 2, 0)$  的点，可以在  $x$  轴找到刻度为 1 的点，过它作平行于  $y$  轴的直线（水平线）；在  $y$  轴找到刻度为 2 的点，过它作平行于  $x$  轴的直线；两线交点就是坐标为  $(1, 2, 0)$  的点。

对于不在  $Oxy$  中的点，可以先画出它在  $Oxy$  上的投影点。比如，要画出坐标为  $(1, 2, 3)$  的点，可以先画出  $(1, 2, 0)$ ，然后过它作平行于  $z$  轴的直线。由于往上为  $z$  轴正向，所以对于正数 3，往上数三个单位长度，即为  $(1, 2, 3)$ 。如果要画坐标为  $(1, 2, -3)$  的点，则向下数三个单位长度。为了清楚表明点在空间中的位置，可以保留投影点，并将投影点与  $x$  轴、 $y$  轴用虚线连线，将目标点和投影点用虚线连线。



## 附录 B 空间向量与公理

下面验证：根据向量定义的点、直线、平面符合平面公理、平直公理、交面公理和补充的平行公理。

### 2.1 平面公理

首先来看平面公理。任取不共线三点  $A, B, C$ ，则  $A - C, B - C$  线性无关，因此  $\{sA + tB + (1 - s - t)C \mid s, t \in \mathbb{R}\}$  是  $A, B, C$  确定的平面。

### 2.2 平直公理

再来看平直公理。如果点  $P, Q$  在平面  $\{sA + tB + (1 - s - t)C \mid s, t \in \mathbb{R}\}$  中，那么存在  $s_1, t_1, s_2, t_2$  使得

$$P = s_1A + t_1B + (1 - s_1 - t_1)C$$

$$Q = s_2A + t_2B + (1 - s_2 - t_2)C$$

直线  $PQ$  是集合  $\{uP + (1-u)Q \mid u \in \mathbb{R}\}$ , 其中任一点  $U = uP + (1-u)Q$  可以用  $A, B, C$  表示为

$$\begin{aligned} U &= uP + (1-u)Q \\ &= (us_1 + (1-u)s_2)A + (ut_1 + (1-u)t_2)B + (u(1-s_1-t_1) + (1-u)(1-s_2-t_2))C \\ &= (us_1 + (1-u)s_2)A + (ut_1 + (1-u)t_2)B + (1 - (us_1 + (1-u)s_2) - (ut_1 + (1-u)t_2))C \end{aligned}$$

因此  $U$  在平面  $ABC$  中。这说明向量表示的空间符合平直公理。

## 2.3 交面公理

接下来验证交面公理。如果两平面  $\gamma_1, \gamma_2$  交于点  $C$ , 记  $\gamma_1 = \mathbb{R}A_1 + \mathbb{R}B_1 + C$ ,  $\gamma_2 = \mathbb{R}A_2 + \mathbb{R}B_2 + C$ 。其中  $(A_1, B_1)$  线性无关,  $(A_2, B_2)$  线性无关。两平面公共点可以表示为让以下等式成立的  $s_1, t_1, s_2, t_2$ :

$$s_1A_1 + t_1B_1 + C = s_2A_2 + t_2B_2 + C.$$

以上等式可以转为:

$$s_1A_1 + t_1B_1 - s_2A_2 - t_2B_2 = \mathbf{0}.$$

根据空间的根本性质, 四个向量总是线性相关。所以存在不全为零的四个实数  $s_1, t_1, s_2, t_2$  使上式成立。由于  $(A_1, B_1)$  线性无关,  $(A_2, B_2)$  线性无关, 所以  $s_1A_1 + t_1B_1$  和  $s_2A_2 + t_2B_2$  为零向量时,  $s_1, t_1, s_2, t_2$  必然全为零。然而  $s_1, t_1, s_2, t_2$  不全为零, 所以  $s_1A_1 + t_1B_1$  和  $s_2A_2 + t_2B_2$  不为零向量。于是这时  $s_1A_1 + t_1B_1 + C = s_2A_2 + t_2B_2 + C \neq C$  是两平面另一个公共点。这说明向量表示的空间符合交面公理。



## 2.4 平行公理

我们主要验证平行线共面的性质。平面中，两条直线平行，当且仅当它们的线性部分是同一条过原点的直线。我们用这个方法来判断空间中直线的平行关系。设有两直线  $l_1 \parallel l_2$ ，那么它们是同一条过原点的直线平移而成：

$$l_1 : \mathbb{R}\mathbf{a} + \mathbf{b}_1$$

$$l_2 : \mathbb{R}\mathbf{a} + \mathbf{b}_2$$

所以  $l_1, l_2$  都在平面： $\gamma = \mathbb{R}\mathbf{a} + \mathbb{R}(\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2) + \mathbf{b}_2$  中。对任意  $t \in \mathbb{R}$ ， $l_1$  中的点  $t\mathbf{a} + \mathbf{b}_1 = t\mathbf{a} + 1 \cdot (\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2) + \mathbf{b}_2 \in \gamma$ ； $l_2$  中的点  $t\mathbf{a} + \mathbf{b}_2 = t\mathbf{a} + 0 \cdot (\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2) + \mathbf{b}_2 \in \gamma$ 。这说明，两条平行直线总在同一平面内，即向量表示的空间符合补充后的平行公理。