第二册

大青花鱼

目录

第一章　空间中的形状

我们已经通过公理体系研究过平面中的简单形状，将基本的平面形和函数的图像联系起来，并且引入了向量的概念。现在，我们进一步研究立体空间中的形状。人类生活在立体空间中，因此，研究空间中形体的性质，对我们认识世界、改造世界有直接帮助。

1.1　点、直线、平面

和平面形一样，立体空间中的形也是从种种事物的形状总结提炼而来。平面是人类最早总结出的概念之一。我们已经研究过平面中的形状，因此，研究立体空间时，我们把平面作为地位和点、直线相同的基本概念。

研究平面形状时，我们首先引进了公理体系。如今我们将平面公理体系扩展为立体空间的公理体系。为此，我们要通过公设和公理定义**平面**以及它和点、直线的关系。

我们定义面为点的集合，也是线运动的结果。平面是最基本的面，一般用小写希腊字母 α, β, γ 等表示。

公理 1. 平面公理 过不共线的三点，有且仅有一个平面。

我们也说三角形（或圆）确定一个平面。不共线的三点 A、B、C 确定的平面，可以记作平面 ABC。

如何确定平面是“平”的呢？生活和生产中，我们一般用直线来确定一个面是不是平的。比如，木工常常用角尺的直角边放在刨好的木板上。如果直角边总能与板面紧密贴合，就说明木板已刨平了。水泥工用直的刮子将刚铺水泥的地面刮平。我们把人们总结出的经验作为判断“平面”的方法，用公理的形式确定下来。

公理 2. 平直公理 过平面上不重合两点的直线，在平面中。

平直公理说明，直线要么与平面没有公共点，要么只交于一点，要么全部在平面里。直线与平面没有公共点，则称直线与平面平行，也用 $//$ 表记；直线与平面恰有一公共点，则称直线与平面相交；直线与平面有两个或以上公共点，则直线在平面中，用集合的语言来说，直线 l 在平面 γ 中，就说明 l 是 γ 的子集。

设直线 l 与平面 γ 平行，没有公共点，那么它与 γ 中任何直线没有公共点。比如，给定 γ 中一点 A，γ 中经过 A 的任何直线，都与 l 没有公共点。

从平面公理和平直公理，容易得到又两种定义平面的方法：

定理 1.1.1. 过一条直线与该直线外一点，有且仅有一个平面。

证明： 设直线为 l，P 为 l 外一点。取 l 上不同的两点，和 P 构成不共线的三点。这三点确定一个平面。根据平直公理，l 在该平面中。 □

定理 1.1.2. 过两条相交的直线，有且仅有一个平面。

证明： 设有直线 l, m。如果 l, m 相交，设交点为 P，在 l, m 上各取不同于 P 的一点：Q, R，则 P, Q, R 不共线，于是确定一个平面 PQR，根据平直公理，l, m 都在 PQR 中。 □

平面中，我们把两直线没有公共点叫做平行。空间中，两直线除了重合、相交和平行，还有另一种情况。我们称之为直线**异面**。前面的例子中，

根据平行公理，过 γ 中的点 A，恰有一条直线与 l 平行，其余与 l 不相交的直线，都称与 l 异面。

哪条直线与 l 平行呢？显然，在空间中，我们需要补充平行公理：

公理 3. 平行公理 过直线外一点，有且仅有一条与它平行的直线。它在直线与点确定的平面上。

新版的平行公理在原来的基础上，指定了平行线的位置：在直线与点确定的平面上。换句话说，平行是一个平面内性质。两直线平行的关系必然发生在同一平面中。也正因如此，我们把其它的无公共点情形叫做异面。

从补充的平行公理出发，就得到另一种定义平面的方法：

定理 1.1.3. 过两条平行的直线，有且仅有一个平面。

证明： 设直线 $l \mathbin{/\mkern-6mu/} m$，在 l 上找两点 P_1, P_2，在 m 上找一点 Q。P_1P_2Q 确定唯一平面 γ。在平面 γ 中，过 Q 作 l 的平行线。根据平行公理，这条平行线就是 m。因此 l, m 共面，它们确定唯一平面 γ。 □

再来看两个平面的关系。两个平面相交，交集是什么呢？生活中的经验告诉我们，两个平面相交，交集是直线。比如，裁纸刀的刀面是平的，切在纸上，将纸面分成两部分，裁痕是直的。我们把这个性质用公理描述为：

公理 4. 交面公理 两个平面如果有交集，则交集至少包含两个不重合的点。

交面公理说明，两个平面不可能只交于一点。如果它们有两个（不重合的）公共点，那么根据平直公理，两平面的交集包括过这两点的直线。而如果两平面的交集中还有不属于这条直线的第三点，那么根据平面公理，这三点确定一个平面，于是两平面重合。

综上所述，从交面公理可以推出：要么两平面没有共同点，要么交集为一条直线 l，称为两平面相交于直线 l；要么两平面重合。

有了交面公理，我们可以证明下面这个定理。它将平行直线的性质拓展到空间中。由于证明繁琐，有些地方把它当作公理引入。

定理 1.1.4. 如果直线 l_1, l_2 都平行于直线 m，那么 l_1, l_2 平行或重合。

证明： 设 l_1, m 确定的平面为 γ_1，l_2, m 确定的平面为 γ_2。分两种情况讨论：

1. γ_1, γ_2 重合。那么 l_1, l_2, m 都在此平面上。根据平面直线的结论，l_1, l_2 平行或重合。

2. γ_1, γ_2 不重合。于是 $\gamma_1 \cap \gamma_2 = m$。取 l_1 上一点 P，P 与 l_2 确定平面 β。$l_2 \notin \gamma_1$，所以 β, γ_1 不重合。设 $\beta \cap \gamma_1 = n$。

首先证明 $n \,/\!/\, l_2$。反设 n 交 l_2 于点 Q，则 $Q \in \gamma_1 \cap \gamma_2 = m$，于是 $Q \in m \cap l_2$。这与 $m \,/\!/\, l_2$ 矛盾。因此 $n \,/\!/\, l_2$。

再证明 $n \,/\!/\, m$。反设 n 交 m 于点 Q，则过 Q 有 $m \,/\!/\, l_2$ 和 $n \,/\!/\, l_2$，于是 $n = m$。但 $P \in n$，因此 $P \in m \cap l_1$，这与 $m \,/\!/\, l_1$ 矛盾。因此 $n \,/\!/\, m$。

n 与 l_1 都平行于 m，且有公共点 P，所以 $n = l_1$。所以 $l_1 \,/\!/\, l_2$。 □

上面提到，两平面要么无公共点，要么相交，要么重合。那么，两平面是否可以无公共点呢？我们把无公共点的平面称为平行平面，也用 $/\!/$ 表记。平面中，平行公理告诉我们，过直线外一点，恰有一条直线与之平行。空间中的平面，也有类似的结论：

定理 1.1.5. 过平面外一点，恰有一平面与之平行。

证明： 设平面 α 外有点 P。在 α 上选一点 A，过 A 作两相交直线 l, m（交点为 A）。根据平行公理，过 P 恰有直线 l', m' 分别与 l, m 平行。l', m' 相交于点 P，确定平面 α'。下面证明 α, α' 无公共点，即 $\alpha' \,/\!/\, \alpha$。

反设 α, α' 有公共点。由于 $P \in \alpha'$ 在 α 外，两者不重合。因此 $\alpha \cap \alpha'$ 是一条直线，记为 n。l, m, n 共面，l, m 相交，因此 l, m 中至少有一条与 n

相交。设 l 与 n 相交，交点为 Q。$Q \in n \subset \alpha'$，$Q \notin l'$。在 α' 中，过 Q 可作 l' 的平行线。但这条线在 α' 中，因此不是 l。这与平行公理矛盾。

因此，α, α' 无公共点，$\alpha' \mathbin{/\mkern-5mu/} \alpha$。 $\square$