第一册

大青花鱼

目录

第一章　数列初步

1.1　数列的基本概念

例子 1.1.1.

1. 把自然数的倒数排成一列：

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{5},\cdots$$

2. 把圆周率按个位，十分位、百分位、千分位截断，得到一列数：

$$3,\ 3.1,\ 3.14,\ 3.141,\ 3.1415,\cdots$$

3. 把班上同学的身高（厘米）按学号排列：

$$165,\ 173,\ 169,\ 178,\ 171.5,\ 176,\cdots$$

把数按照一定顺序排列起来，叫做**数列**。数列中的每一个数叫做数列的一**项**。按照顺序，各项分别称为数列的第 1 项、第 2 项，等等。比如，例 1 中的数列第 2 项是 $\frac{1}{2}$，例 2 中的数列第 3 项是 3.14。

数列的项和序数有一一对应的关系，这告诉我们，数列的本质是正整数集或其子集 $[1\ldots N]$ 到数域的函数。定义域是 $[1\ldots N]$ 的数列，项数有

限，称为**有穷数列**；定义域是正整数集的数列，项数无限，叫做**无穷数列**。我们一般把数列记作：

$$a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$$

其中 a_n 是数列的第 n 项。项数 n 也叫做**下标**。为了方便，我们在行文中会把以上数列记作 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$（无穷数列）或 $\{a_n\}_{n\in[1\ldots N]}$（有穷数列），或简单记作 $\{a_n\}$。比如，例 1 中的数列可以记为 $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$。作为函数，如果某数列的序数和项之间的对应关系可以用一个公式来表示，我们就把这个公式称为该数列的**通项公式**。比如，例 1 中的数列，通项公式是 $a_n = \frac{1}{n}$；而例 3 中的数列，我们不知道通项公式。有通项公式的数列，只要把序数代入公式，就能得到该项的值。比如，例 1 中的数列，第 100 项是 $\frac{1}{100}$。

我们把各项不断增大(减小)的数列称为**单调递增(递减)数列**。“单调”一词，表示数列各项增减方向保持一致。换句话说，如果数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ 从第二项起，总有 $a_{n+1} \geqslant a_n$，就说它是**单调递增数列**；如果总有总有 $a_{n+1} \leqslant a_n$，就说它是**单调递减数列**。如果要求不能有相等的项，就称为**严格单调递增（递减）数列**。

研究数列的一个基本目的，是对数列进行求和。比如，一垛炮弹有 8 层，顶层有 1 个炮弹，第 2 层有 4 个，第 3 层有 9 个，……，第 8 层有 64 个，我们希望知道一共有几个炮弹。把各层炮弹个数记为数列：$a_1 = 1$

$$a_1 = 1, a_2 = 4, \cdots, a_8 = 64$$

我们把数列的和记为 $S_8 = a_1 + a_2 + \cdots + a_8$。为了方便，我们也用求和符号表示数列的和：$S_8 = \sum_{i=1}^{8} a_i$。对于无穷数列，我们还无法定义数列的和，只能定义它的部分和：$S_N = \sum_{i=1}^{N} a_i$。我们把 S_N 称为数列 $\{a_n\}$ 的前 N 项和。比如，例 1 中的数列的前 4 项和为：

$$S_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{25}{12}.$$

习题 1.1.1.

1. 根据以下数列的通项公式，写出数列的前 5 项：

1.1. $a_n = n^2$

1.2. $a_n = (-1)^n \cdot n$

1.3. $a_n = \frac{n}{n+3}$

1.4. $a_n = 2^n - 1$

1.5. $a_n = \frac{(-2)^n + n - 1}{n^2+1}$

2. 根据以下数列的通项公式，计算数列的前 5 项和与前 7 项和:

2.1. $a_n = n^2$

2.2. $a_n = (-1)^{n+1} \cdot n$

2.3. $a_n = \frac{2}{n(n+1)}$

2.4. $a_n = 2^n$

2.5. $a_n = (n+1)2^n$

3. 已知数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$，如何构造一个数列 $\{b_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$，使得它的前 n 项和是 a_n?

无穷数列（或项数相同的有穷数列）作为函数，可以进行函数之间的四则运算。比如，设无穷数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式分别是 $a_n = n-1$、$b_n = 2n$，那么对任意正整数 n，$a_n + b_n = 3n - 1$。我们定义通项公式为 $c_n = 3n-1$ 的数列 $\{c_n\}$ 为 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 的和，也就是说，我们定义数列的加法：$\{a_n\} + \{b_n\} = \{a_n + b_n\}$。

可以验证，数列的加法满足交换律和结合律。我们称每项都等于同一个数的数列为**常数列**，任何数列加上常数列 $\{0\}$ 都等于自己。

同理，我们可以定义数列的减法和乘法。它们满足的运算律和有理数的运算律一致。任何数列乘以 $\{1\}$ 都得到自己。如果我们把所有取值为实数的数列的集合记为 $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$，那么 $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ 和 $\mathbb{Z}$ 一样，可以“装载”加法、减法和乘法。其中的常数列 $\{0\}$、$\{1\}$ 就相当于整数 0 和 1。

此外，给定数列 $\{a_n\}$ 和实数 t，我们可以把 $\{a_n\}$ 的每一项乘以 t 得到一个新数列：$t \cdot \{a_n\} = \{t \cdot a_n\}$，这个运算称为**数乘运算**。数乘运算和数、

数列的四则运算相容。

$$\forall\ s,t\in\mathbb{R},\ \forall\ \{a_n\},\ s\cdot(t\cdot\{a_n\})=(s\cdot t)\cdot\{a_n\},$$
$$(s+t)\cdot\{a_n\}=(s\cdot\{a_n\})+(t\cdot\{a_n\}).$$
$$\forall\ t\in\mathbb{R},\ \forall\ \{a_n\},\ \{b_n\},\ t\cdot(\{a_n\}+\{b_n\})=(t\cdot\{a_n\})+(t\cdot\{b_n\}).$$

无穷数列还可以进行函数操作，与函数复合。比如，我们定义函数 $f: x\mapsto x^2-3$，数列 $\{a_n\}$ 的每一项经过 f 映射到 $f(a_n)=f(n-1)=(n-1)^2-3=n^2-2n-2$。那么数列 $\{n^2-2n-2\}$ 就可以称为 $\{a_n\}$ 经过 f 的**像数列**。换句话说，我们用实值函数 f 定义了一个 $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ 到 $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ 的映射。

另一种对数列的操作方法是通过下标。设 g 是从正整数集映射到正整数集的函数，比如 $g:\ n\mapsto 3n-2$。从 $\{a_n\}$ 出发，考虑数列 $\{u_n\}$: $u_n=a_{g(n)}=a_{3n-2}$。这样定义的 $\{u_n\}$ 称为用 g 从 $\{a_n\}$ 中提取的数列。要注意的是，g 不一定把 $\{a_n\}$ 中每项恰好提取一次，比如

$$a_1,a_1,a_2,a_2,a_3,a_3,a_4,a_4,\cdots$$

这样的数列也是从 $\{a_n\}$ 中提取的。如果对任何正整数 n，函数 g 满足 $g(n+1)>g(n)$，用 g 从 $\{a_n\}$ 中提取的数列就可以看作是从前到后挑出一部分项得到的。这样的数列称为 $\{a_n\}$ 的**子列**。

思考 1.1.1.

1. 给定数列 $\{a_n\}$，它的前 n 项和可以构成一个数列 $\{S_n\}$，如何用 $\{S_n\}$ 中的项表示 a_n? 记 v_n 为 $\{a_n\}$ 前 n 项乘积，能否用数列 $\{v_n\}$ 中的项表示 a_n?

2. 记平面向量的集合为 $\mathbb{V}$，所有从 $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ 到 $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ 的映射的集合为 $\mathfrak{F}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$。$\mathfrak{F}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ 和 $\mathbb{V}$、$\mathbb{Z}$ 有什么共同点? 有什么不同点?

3. 记所有从正整数集到正整数集的函数的集合为 $\mathfrak{F}(\mathbb{Z}^+)$，数列 $\{a_n\}$ 经过 $\mathfrak{F}(\mathbb{Z}^+)$ 中某个函数 g 可以提取出数列 $\{b_n\}$。g 满足什么条件时，可以找到另一个 $\mathfrak{F}(\mathbb{Z}^+)$ 中的函数 h，用 h 可以从 $\{b_n\}$ 中提取出 $\{a_n\}$?

习题 1.1.2.

1. 计算：$\{6n-1\}-\{3k^2-k+2\}\cdot\{2^m+1\}$ 。

2. 已知定义在全体实数上的函数 $f:\ x\mapsto 2x^2-x-4$，数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=n+\frac{1}{n}$，计算 $\{f(a_n)\}$。

3. 另有定义在全体实数上的函数 $g:\ x\mapsto 1-\frac{1}{x}$，计算 $\{(f-g)(a_n)\}$。

研究实际问题的时候，我们可能不会直接得到数列的通项公式，而是各项之间的关系。来看以下的例子：

例题 1.1.1. 培养一种乳酸菌，初始从 3 个单位起培养。每过一定时间，等乳酸菌数量翻倍后，取出 1 个单位的样本做化验观察，其余继续培养。问每次取出化验后，乳酸菌的数量是几个单位?

解答. 设初始数量为 a_0，第 n 次取出化验后乳酸菌数量为 a_n 个单位。则数列 $\{a_n\}$ 中的项满足以下的关系：

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad a_{n+1}=2a_n-1.$$

这样的关系称为数列的**递推关**系，相关公式称为**递推公式**。以上公式中，已知 a_0 的值，就能推出 a_1，继而次第推出 a_2、a_3，等等。$a_0=3$，所以 $a_1=2\cdot3-1=5$，$a_2=2\cdot5-1=9$，$a_3=2\cdot9-1=17\cdots\cdots$

根据递推关系，已知 a_1，想要算出 a_{100}，就必须依次算出 $a_2,a_3,\cdots,a_{99}$。很多时候，我们希望从各项之间的关系，推出通项公式，以更方便地了解数列的性质。

如何从递推关系得出通项公式呢？并没有简便的统一方法。常见的做法是将递推关系转化为一些已知通项公式的数列的递推关系，再反推出原数列的通项公式。我们在后面会详细介绍。

习题 1.1.3.

已知数列的递推公式如下，求数列的前 7 项：

1. $a_1=1$，$\forall n\geqslant1$，$a_{n+1}=1-2a_n.$

2. $a_1 = 1$，$\forall n \geqslant 1$，$a_{n+1} = 1 + \frac{1}{a_n - 1}$.

3. $a_1 = 1$，$a_2 = 3$，$\forall n \geqslant 1$，$a_{n+2} = 4 + a_n - a_n^2$.

4. $a_1 = 1$，$a_2 = 1$，$\forall n \geqslant 1$，$a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$.

5. $a_1 = 1$，$a_2 = 3$，$\forall n \geqslant 1$，$a_{n+2} = a_n(4 - a_{n+1})$.

1.2　等差数列

来看这样一个数列：

$$1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11,\ 13.$$

这个数列有一个特点：从第二项起，每一项减去前一项的差总是 2。

一般地，如果某个数列从第二项起，每一项减去前一项的差是同一个常数，就说这个数列是**等差数列**。这个常数叫做等差数列的**公差**，通常用字母 d 表示。比如，数列 $2, 5, 8, 11, 14$ 的公差是 3，$19, 15, 11, 7, 3, -1$ 的公差是 -4。

如果数列 $\{a_n\}$ 的公差是 d，那么：

$$\begin{aligned}
a_2 &= a_1 + d \\
a_3 &= a_2 + d = a_1 + 2d \\
a_4 &= a_3 + d = a_1 + 3d \\
&\vdots \\
a_n &= a_1 + (n-1)d
\end{aligned}$$

等差数列的通项公式是：$a_n = a_1 + (n-1)d$。

例题 1.2.1. 已知无穷等差数列 1, 8, 15, $\cdots$，求它的第 30 项。

解答. 等差数列第一项是 1，公差是 $8 - 1 = 7$，所以通项公式是 $a_n = 1 + (n-1)\cdot 7 = 7n - 6$。第 30 项 $a_{30} = 7 \cdot 30 - 6 = 204$。

例题 1.2.2. 已知 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是等差数列，$a_1=4$，$a_3=9$，问 94 是否在数列中？如果是的话，是第几项？

解答. 设公差为 d，则 $a_3=a_1+2d$。代入 a_1、a_3 的值，解得 $d=2.5$。于是通项公式为 $a_n=4+(n-1)\cdot 2.5=2.5n+1.5$。如果有 $a_n=94$，即 $2.5n+1.5=94$，解得 $n=37$。因此 94 在数列中，是第 37 项。

设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n。能否方便地表示 S_n 呢？我们可以这样思考：

$$\begin{aligned}
a_1+a_n &= a_1+a_1+(n-1)d=2a_1+(n-1)d\\
a_2+a_{n-1} &= a_1+d+a_n-d=a_1+a_n=2a_1+(n-1)d\\
&\vdots\\
a_{n-1}+a_2 &= a_1+(n-2)d+a_n-(n-2)d=a_1+a_n=2a_1+(n-1)d\\
a_n+a_1 &= a_1+a_n=2a_1+(n-1)d
\end{aligned}$$

把以上 n 个等式分边相加，就得到：

$$S_n+S_n=n(a_1+a_n)=2na_1+n(n-1)d.$$

也就是说，前 n 项和 S_n 可以写成

$$S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d.$$

这样我们可以方便地计算等差数列的前 n 项和。比如，求前 n 个自然数的和：$a_n=n-1=0+(n-1)\cdot 1$，所以 $S_n=0+\frac{n(n-1)}{2}\cdot 1=\frac{n(n-1)}{2}$。

习题 1.2.1.

1. 在 8 和 36 之间插入 6 个数，使得这 8 个数成等差数列。
2. 设数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ 为等差数列，证明 $a_{n+2}+a_n=2a_{n+1}$。
3. 等差数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ 中，$a_1=0.3$，$a_n=85.5$，$d=0.6$，求 n 和 S_n。
4. 求前 n 个奇数 $1,3,5,\cdots,2n-1$ 的和。
5. 直角三角形的三边成等差数列，求三边比例。
6. 等差数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ 满足 $a_1=1$，$a_{10}=43.3$，求 S_{20} 。

1.3　等比数列

来看这样一个数列：

$$1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ 64.$$

这个数列有一个特点：从第二项起，每一项除以前一项的商总是 2。

一般地，如果某个数列从第二项起，每一项与前一项的比值是同一个常数，就说这个数列是**等比数列**。这个常数叫做等比数列的**公比**，通常用字母 q 表示。比如，数列 $2, 6, 18, 54, 162$ 的公比是 3，$192, -48, 12, -3, 0.75$ 的公比是 -0.25。

如果数列 $\{a_n\}$ 的公比是 q，那么：

$$\begin{aligned}
a_2 &= a_1q \\
a_3 &= a_2q = a_1q^2 \\
a_4 &= a_3q = a_1q^3 \\
&\vdots \\
a_n &= a_1q^{n-1}
\end{aligned}$$

等比数列的通项公式是：$a_n = a_1q^{n-1}$。

例题 1.3.1. 已知无穷等比数列 $1.2,\ 1.8,\ 2.7, \cdots$，求它的第 30 项。

解答. 等比数列第一项是 1，公比是 $1.8 \div 1.2 = 1.5$，所以通项公式是

$$a_n = 1.2 \cdot 1.5^{n-1} = \frac{6 \cdot 3^{n-1}}{5 \cdot 2^{n-1}} = \frac{3^n}{5 \cdot 2^{n-2}}.$$

第 30 项 $a_{30} = \frac{3^{30}}{5 \cdot 2^{28}}$。

例题 1.3.2. 已知 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是等比数列，$a_1 = 3$，$a_3 = 12$ ，问 1536 是否在数列中？如果是的话，是第几项？

解答. 设公比为 q，则 $a_3 = a_1 q^2$。代入 a_1、a_3 的值，解得 $q = 2$。于是通项公式为 $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$。如果有 $a_n = 1536$，即 $3 \cdot 2^{n-1} = 1536$，解得 $n = 10$。因此 1536 在数列中，是第 10 项。

设等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n。能否方便地表示 S_n 呢？已知：

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} a_1 q^{i-1} = a_1 \sum_{i=1}^{n} q^{i-1}$$

如果公比 $q = 1$，那么 $S_n = n a_1$。

如果公比 $q \neq 1$，两边乘以 q，得到

$$qS_n = q \cdot a_1 \sum_{i=1}^{n} q^{i-1} = a_1 \sum_{i=1}^{n} q^{i}.$$

也就是说，

$$qS_n = a_1 \sum_{i=2}^{n+1} q^{i-1} = a_1 q^n + a_1 \sum_{i=1}^{n} q^{i-1} - a_1 = a_1 q^n + S_n - a_1$$

把右边的 S_n 移到左边，解得：

$$S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

由于 $a_n = a_1 q^{n-1}$，所以上式也可以写成：

$$S_n = \frac{q a_n - a_1}{q - 1}.$$

这样我们可以方便地计算等比数列的前 n 项和。比如，求 2 的前 n 个乘方的和：$a_n = 2^n = 2 \cdot 2^{n-1}$，所以 $S_n = 2\frac{2^n-1}{2-1} = 2^{n+1} - 2$。

习题 1.3.1.

1. 在 16 和 36 之间插入 3 个数，使得这 5 个数成等比数列。

2. 设数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ 为等比数列，证明 $a_{n+2} \cdot a_n = a_{n+1}^2$。

3. 等比数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ 中，$a_1 = 1$，公比 $q = 0.5$，求前 n 项和 S_n。

4. 等比数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ 中，$a_1 = 6$，$a_n = 393216$，$q = 2$，求 n 和 S_n。

5. 请用 a_1、a_n 和 q 表示等比数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ 的前 n 项和 S_n。

6. 等比数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ 满足 $a_6 = 4$，$a_8 = 9$，求 S_{10} 。

1.4 数列的极限

我们来考察以下数列：

$$0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \cdots$$

它的通项公式是 $a_n = \frac{n-1}{n}$。把数列的前几项在数轴上标出来，我们发现：随着 n 不断增大，a_n 不断变大，不断向着 1 靠拢。

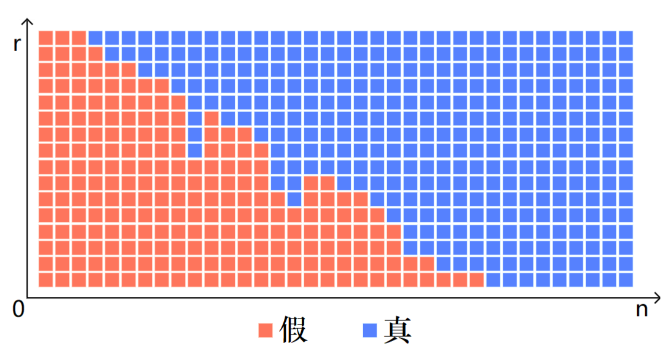
数列 $\{a_n\}$ 各项随着 n 增大，不断接近 1。虽然数列任一项都不等于 1，但我们不难产生这样的想法：随着 n 增大，a_n 的值任意接近于 1。

怎样严谨地表达这个想法呢？我们使用“有求必应”和“一路全真”的结构，把上面的想法用更具体的方式来描述。直观来看，我们考察以 1 为中心的区间 $[1-r, 1+r]$，无论这个区间多么小，到了一定的 n 以后，所有的 a_n 都会落在这个区间里。

用二元命题 $Q(r,n)$ 表示“a_n 落在区间 $[1-r, 1+r]$ 里”。用类似“有求必应”的结构，以上的想法可以写成：

$$\forall r > 0,\ \exists n,\ \text{使得}\forall\ m \geqslant n,\ Q(r,n)\text{成立。}$$

这个结构比“有求必允”结构要求更高。它不仅要求“必允”，而且一旦“允”了，就要求之后“一路全真”。用表格来表示这个结论：



每格颜色对应 $Q(r,n)$ 的真假。每一行对应一个正数 r，每一列对应数列的一个下标 n。我们的想法是: 不论 $r>0$ 是多少, 它对应的行中, $Q(r,n)$ 必然从某一列起全为真。

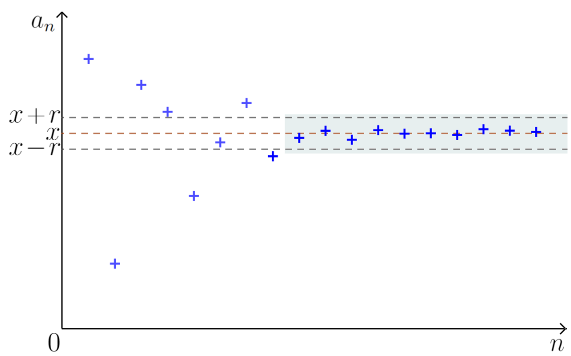
我们把 1 称为数列 $\{a_n\}$ 的**极限**。对一般数列来说，我们定义:

定义 1.4.1. 数列的极限
设有无穷数列 $\{a_n\}$。如果有某个数 x，使得

$$\forall r>0,\ \exists n,\ \text{使得}\ \forall\ m\geqslant n,\ -r\leqslant a_m-x\leqslant r.$$

就说 $\{a_n\}$ 有极限 x，或 x 是 $\{a_n\}$ 的极限，或 $\{a_n\}$ 趋于 x，记作

$$\lim_{n\to\infty} a_n = x.$$



从某一项开始，数列的值总落在区间 $[x-r,x+r]$ 中

例题 1.4.1. 数列 $\{a_n\}$ 的通项是 $a_n=\frac{1}{n^2}$，它是否有极限? 如果有极限，极限是多少?

解答. $\{a_n\}$ 每项都是正数。

$$a_n\div a_{n+1}=\frac{1}{n^2}\div\frac{1}{(n+1)^2}=\frac{(n+1)^2}{n^2}=1+\frac{2n+1}{n^2}>1,$$

所以 $\{a_n\}$ 是单调递减数列。从数轴上看，$\{a_n\}$ 不断趋近于 0。猜测它有极限 0。

设 $r>0$，考察区间 $[-r,r]$。设 n_r 是大于等于 $\frac{1}{\sqrt{r}}$ 的最小正整数，那么，只要 $n\geqslant n_r$，就有 $n^2\geqslant n_r^2\geqslant \frac{1}{r}$，于是 $0\leqslant \frac{1}{n^2}\leqslant r$。因此，$\forall r>0$，$\exists n_r$，使得 $\forall m\geqslant n_r$，$-r\leqslant a_m-0\leqslant r$。这说明 $\{a_n\}$ 有极限 0。

不难看出，极限是构造出来的。因此，从定义出发，我们可以说某个数是某数列的极限。反过来，一个数列有极限，它的极限是否只能有一个呢？答案是肯定的。我们可以用反证法来证明。

反设某数列 $\{a_n\}$ 有两个极限 x_1,x_2。不妨设 $x_1<x_2$。直觉上，n 足够大的时候，a_n 在数轴上离 x_1,x_2 都很近，到两点的距离比 x_2-x_1 的一半都小，加起来就小于 x_2-x_1，于是就产生矛盾了。

具体来说，记 $\delta=\frac{x_2-x_1}{2}$ 为两点距离的一半。选一个小于 δ 的正数 r。按照极限的定义，有正整数 n_1,n_2 使得：

$$\forall m\geqslant n_1,\ \ -r\leqslant a_m-x_1\leqslant r,$$
$$\forall m\geqslant n_2,\ \ -r\leqslant a_m-x_2\leqslant r.$$

于是，选一个比 n_1,n_2 都大的 m，比如 $m=n_1+n_2$，这时 $a_m-x_1\leqslant r$，$x_2-a_m\leqslant r$。加起来就得到：

$$x_2-x_1\leqslant 2r<2\delta=x_2-x_1.$$

矛盾！因此，**数列如果有极限，只能有一个**。

设数列 $\{a_n\}$ 有极限 x。我们把它每一项减去 x（或者说让数列减去常数列 $\{x\}$），得到的数列 $\{a_n-x\}$ 趋于 0。所以，任何有极限的数列，都可以看做一个趋于 0 的数列加上它的极限。我们把趋于 0 的数列称为**无穷小**。任何有极限的数列，都是它的极限加上无穷小。

极限描述了数列的项在“远处”的特征。我们把数列下标超过一定限度后的特征称为数列的**大体行为**。有极限的数列，我们可以用极限来刻画数列的大体行为（落在极限“附近”）。没有极限的数列，大体行为有什么特征呢？

我们来看另一个数列：

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\cdots$$

它是正整数数列，通项为 $a_n = n$。不难看出，它没有极限。因为对任何实数 x 来说，令 n_x 为大于 x 的最小正整数，那么从 $n_x + 1$ 开始的项都比 x 大至少 1，无法落到 x 附近的小区间里面。可以说，随着 n 增大，a_n 会比任何数都大。

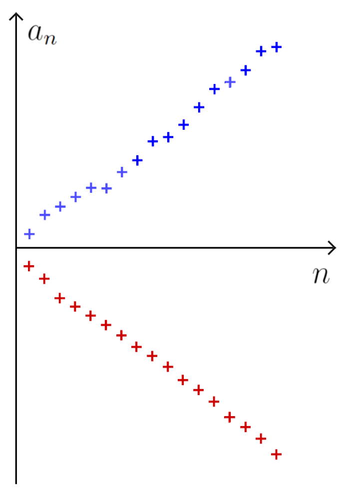
如何严谨描述这个想法呢？我们仍然可以用“有求必应”的结构，把以上想法写成：

$$\forall x,\ \exists n,\ 使得\ \forall\ m \geqslant n\ ,\ a_m \geqslant x.$$

直观来看，随着 n 增大，从某一项开始，a_n 会落到数轴任何给定点 x 的右边。我们把这个性质称为数列**趋于正无穷大**。同理，可以定义数列**趋于负无穷大**：

$$\forall x,\ \exists n,\ 使得\ \forall\ m \geqslant n\ ,\ a_m \leqslant x.$$

直观来看，随着 n 增大，从某一项开始，a_n 会落到数轴任何给定点 x 的左边。



趋于无穷大的数列

我们也把有这两个性质的数列简称为**正无穷大**和**负无穷大**。

例题 1.4.2. 设数列 $\{\frac{1}{n}\}$ 的部分和数列为 $\{a_n\}$，证明：$\{a_n\}$ 趋于正无穷大。

证明： 按照定义，$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$。$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+1} > 0$，所以 $\{a_n\}$ 单调递增。对任意实数 x，我们需要找到相应的 n，使得 $\forall m \geqslant n$，$a_m \geqslant x$。由于 $\{a_n\}$ 单调递增，只要某一项 $a_n \geqslant x$，它之后的项都大于等于 x。因此，只需要找到 n 使得 $a_n \geqslant x$ 即可。

如果 $x \leqslant 1$，那么 $n=1$ 即满足要求。

如果 $x>1$，设 M 是大于 x 的最小整数，考虑 $n=2^{2M}$。下面证明 $a_{2^{2M}}>x$。

$$a_{2^{2M}} = a_{2^0} + \sum_{i=1}^{2M} a_{2^i} - a_{2^{i-1}}.$$

$$\begin{aligned}\forall\ i \in [1\ldots 2M],\ \ a_{2^i} - a_{2^{i-1}} &= \frac{1}{2^{i-1}+1} + \frac{1}{2^{i-1}+2} + \cdots + \frac{1}{2^i} \\ &\geqslant \frac{1}{2^i} + \frac{1}{2^i} + \cdots + \frac{1}{2^i} \\ &= \frac{2^{i-1}}{2^i} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

$$\text{所以}\quad a_{2^{2M}} \geqslant a_1 + \frac{1}{2}\cdot(2M-1) = M + \frac{1}{2} > x.$$

这就证明 $\{a_n\}$ 趋于正无穷大。 □

思考 1.4.1.

1. 张三在判定数列 $\{a_n\}$ 的极限时写到：数 x 满足：

$$\forall r>0,\ \exists n,\ \text{使得}\forall\ m>n\ \text{都有} x-r<a_m<x+r.$$

因此 $\{a_n\}$ 有极限 x。他的说法对吗?

2. 李四在判定数列 $\{a_n\}$ 的极限时写到：数 x 满足：

$$\forall r>0,\ \exists n,\ \text{使得}\forall\ m>n\ \text{都有} x-2r\leqslant a_m\leqslant x+2r.$$

因此 $\{a_n\}$ 有极限 x。他的说法对吗?

3. 一般数列除了有极限和趋于正负无穷大，还可能有什么大体行为?

4. 单调数列除了有极限和趋于正负无穷大，还可能有什么大体行为?

习题 1.4.1.

1. 以下数列是否有极限? 如果有极限，是多少?

1.1. $\{2^{1-n}\}$

1.2. $\{(-1)^{n-1}\frac{n+1}{3n+1}\}$

1.3. $\{1-\frac{1}{n^3+1}\}$

2. 以下数列是否趋于无穷大?

2.1. $\{2^n\}$

2.2. $\{n^2\}$

2.3. $\{\frac{2^n}{n^2}\}$

3. 如果数列 $\{a_n\}$ 趋于 x，证明：$\{a_n\}$ 的任何子列趋于 x。

我们已经介绍了数列的运算。数列之间可以做加法、减法、乘法。如果数列 $\{a_n\}$、$\{b_n\}$ 有极限，它们的和、差、乘积是否有极限? 答案是肯定的，并且符合我们的直觉:

定理 1.4.1. 若数列 $\{a_n\}$ 趋于 a，$\{b_n\}$ 趋于 b，则

$$\lim_{n\to\infty} a_n \pm b_n = a \pm b,$$
$$\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = a \cdot b.$$

特别地，令 $\{b_n\}$ 是常数列，就得到数乘对极限的影响: 若数列 $\{a_n\}$ 趋于 a，则

$$\forall\ t \in \mathbb{R},\ \ \lim_{n\to\infty} t \cdot a_n = ta.$$

证明:

首先证明极限的加法: 设数列 $\{a_n\}$ 趋于 a，$\{b_n\}$ 趋于 b。按照定义，$\forall r > 0$，由于 $\frac{r}{2} > 0$，总有正整数 n_a, n_b，使得

$$\forall\ m \geqslant n_a,\ \ -\frac{r}{2} \leqslant a_m - a \leqslant \frac{r}{2},$$
$$\forall\ m \geqslant n_b,\ \ -\frac{r}{2} \leqslant b_m - b \leqslant \frac{r}{2},$$

因此，

$$\forall\ m \geqslant n_a + n_b,\ \ -r = -\frac{r}{2} - \frac{r}{2} \leqslant a_m + b_m - a - b \leqslant \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r$$

于是数列 $\{a_n\}+\{b_n\}$ 趋于 $a+b$。

接下来证明极限的数乘：设 t 为实数，数列 $\{a_n\}$ 趋于 a，则数列 $\{t\cdot a_n\}$ 趋于 ta。这样，数列 $\{a_n\}-\{b_n\}$ 可以看作 $\{a_n\}+\{-b_n\}$，因而趋于 $a-b$。分两种情况讨论。如果 $t=0$，那么 $\{t\cdot a_n\}=\{0\}$，显然趋于 0，也就是 ta。如果 $t\neq 0$，按照定义，对 $\forall r>0$，由于 $\frac{r}{t}>0$，总有正整数 n 使得

$$\forall\ m\geqslant n,\ \ a-\frac{r}{t}\leqslant a_m\leqslant a+\frac{r}{t}.$$

因此

$$\forall\ m\geqslant n,\ \ ta-r\leqslant t\cdot a_m\leqslant ta+r.$$

这就说明数列 $\{t\cdot a_n\}$ 趋于 ta。

最后证明极限的乘法：设数列 $\{a_n\}$ 趋于 a，$\{b_n\}$ 趋于 b。按照定义，$\forall r>0$，由于 $\sqrt{r}>0$，总有正整数 n_a,n_b，使得

$$\begin{aligned}\forall\ m\geqslant n_a,\ \ -\sqrt{r}\leqslant a_m-a\leqslant\sqrt{r},\\ \forall\ m\geqslant n_b,\ \ -\sqrt{r}\leqslant b_m-b\leqslant\sqrt{r},\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}\forall\ m\geqslant n_a+n_b,\ (a_m-a)(b_m-b)&\leqslant\left(\sqrt{r}\right)^2=r\\ -(a_m-a)(b_m-b)&\leqslant\left(\sqrt{r}\right)^2=r,\\ \text{即}\quad -r\leqslant(a_m-a)(b_m-b)&\leqslant r.\end{aligned}$$

这说明数列 $\{(a_n-a)(b_n-b)\}$ 趋于 0。而 $\{b\cdot a_n\}$ 和 $\{a\cdot b_n\}$ 都趋于 ab，常数列 $\{ab\}$ 也趋于 ab，所以根据前面证明的极限加减法，数列

$$\{a_nb_n\}=\{(a_n-a)(b_n-b)\}+\{b\cdot a_n\}+\{a\cdot b_n\}-\{ab\}$$

趋于 $0+ab+ab-ab=ab$。 □

四则运算中，加法、减法、乘法都可以对数列的极限做运算。那么除法是否可以呢？具体来说，若数列 $\{a_n\}$ 趋于 a，$\{b_n\}$ 趋于 b，是否有 $\{\frac{a_n}{b_n}\}$ 趋于 $\frac{a}{b}$？

显然，$b=0$ 的时候，$\frac{a}{b}$ 无定义，所以排除 $\{b_n\}$ 趋于 0 的情况。如果 b 不等于 0，答案大致是肯定的。$\{\frac{a_n}{b_n}\}$ 趋于 $\frac{a}{b}$。当然，我们要先"剪掉"$\{b_n\}$ 最开始一些离 b 比较远的项，确保剩下的项都不等于 0，这样才好定义 $\frac{a_n}{b_n}$。然后可以用类似证明极限乘法的方法，证明 $\{\frac{1}{b_n}\}$ 趋于 $\frac{1}{b}$，这样，$\{\frac{a_n}{b_n}\}$ 可以看作 $\{a_n \cdot \frac{1}{b_n}\}$，因而趋于 $\frac{a}{b}$。

思考 1.4.2.

1. 如果数列 $\{a_n\}$ 有极限 a，$\{b_n\}$ 趋于无穷大，它们的和、差、乘积、商数列是否有极限？是否趋于无穷大？

2. 如果数列 $\{a_n\}$、$\{b_n\}$ 都趋于无穷大，它们的和、差、乘积、商数列有什么特性？

习题 1.4.2.

1. 如果数列 $\{a_n\}$ 有极限 a，$\{b_n\}$ 趋于无穷大，它们的和、差、乘积、商数列是否有极限？是否趋于无穷大？

2. 如果数列 $\{a_n\}$、$\{b_n\}$ 都趋于无穷大，它们的和、差、乘积、商数列有什么特性？

第二章　实变函数初步

上一章中，我们学习了出发集为 $\mathbb{Z}^+$ 的函数。现在我们来学习出发集为 $\mathbb{R}$ 的函数。我们把这样的函数称为**实变函数**。

我们已经接触过一些简单的实变函数。正比例函数（$x \mapsto ax$）、一次函数（$x \mapsto ax+b$）、反比例函数（$x \mapsto \frac{a}{x}$）、二次函数（$x \mapsto ax^2+bx+c$）都是实变函数的例子。这些函数都来自简单的代数式。我们把这样的函数称为**显式函数**，也就是能用表达式写出对应关系的函数。下面来看另外几种显式函数。

2.1　整幂函数和有理函数

一元整式是变量 x 和数经过有限次加、减、乘法得到的式子。把 x 对应到关于 x 的一元整式，就得到一个整式函数。正比例函数、一次函数、二次函数等都是整式函数。一类简单的整式函数是**整幂函数**：

$$f_n:\ x \mapsto x^n$$

其中 n 是自然数。

任何数的 0 次方都是 1，所以，$f_0:\ x \mapsto 1$ 是常函数。以下我们不研究它。f_1 和 f_2 分别是一次和二次函数。选择几个不同的 n，我们可以用描

点法大致画出 f_n 的图像。

从图像中可以发现，n 是奇数的时候，函数图像关于原点对称。n 是偶数的时候，函数图像关于 y 轴对称。我们说具有前一种性质的函数是奇函数，具有后一种性质的函数是偶函数。

定义 2.1.1. 给定实变函数 f。如果对 f 定义域中任何 x,都有 $f(-x) = f(x)$，就说 f 是**偶函数**。如果对 f 定义域中任何 x，都有 $f(-x) = -f(x)$，就说 f 是**奇函数**。

要注意的是,奇(偶)函数的定义中隐含了"函数定义域关于 0 对称"的要求。因为如果 $f(-x)$ 没有定义，就不存在 $f(-x) = f(x)$ 或 $f(-x) = -f(x)$ 的性质了。

由奇（偶）函数的定义，研究奇（偶）函数时，我们往往只需要研究半个定义域，另外一半的性质通过对称就可以得到。比如，研究区间 $(-3, 3)$ 上的偶函数 g，我们只需要研究 g 在 $[0, 3)$ 上的性质。g 在区间 $(-3, 0]$ 上的性质，可以通过 $g(-x) = -g(x)$ 得到。

任何奇函数 f，如果在 0 处有定义，总有 $f(0) = -f(-0) = -f(0)$，所以 $f(0) = 0$。偶函数在 0 处的值则不一定是 0。

对定义域关于 0 不对称，但在对称范围内是奇（偶）函数的函数，也可以将其自然补全。比如，在区间 $[-1, 2]$ 上定义函数 $f : x \mapsto x^2$。f 在 $[-1, 1]$ 上是偶函数，但定义域不对称。我们可以自然地将 f 的定义域补全到 $[-2, 2]$。定义在区间 $[-2, 2]$ 上的新函数 $f : x \mapsto x^2$ 就是偶函数了。

从图像中还可以发现，n 是偶数的时候，f_n 总大于等于 0。我们说 f_n 有下界 0。n 是奇数的时候，$f_n(x)$ 可以大于任何给定的数，也可以小于任何给定的数。我们说 f_n 无上界也无下界，是无界函数。

定义 2.1.2. 给定实变函数 f。如果有某个数 b，使得对 f 定义域中任何 x，都有 $f(x) \leqslant b$，就说 f **有上界** b。如果不存在这样的 b，就说 f **无上界**。如

果有某个数 b，使得对 f 定义域中任何 x，都有 $f(x) \geqslant b$，就说 f **有下界** b。如果不存在这样的 b，就说 f **无下界**。既有上界又有下界的函数称为**有界函数**，既无上界又无下界的函数称为**无界函数**。

此外，从图像中还可以观察到，对任何正整数 n，$f_n(0) = 0$。$x > 0$ 时，f_n 总随着 x 的增大不断增大。我们称 f_n 在 $(0, +\infty)$ 上严格单调递增，或称 f_n 在在 $(0, +\infty)$ 上是严格增函数。如果 n 是奇数，那么 f_n 在 $\mathbb{R}$ 上严格单调递增；如果 n 是偶数，$x < 0$ 时，f_n 总随着 x 的增大不断减小。我们称 f_n 在 $(-\infty, 0)$ 上严格单调递减，或称 f_n 在在 $(-\infty, 0)$ 上是严格减函数。

定义 2.1.3. 给定实变函数 f。如果 f 定义域中任意两个数 $x_1 < x_2$，总有 $f(x_1) \leqslant f(x_2)$，就说 f 在定义域上**单调递增**，或者说 f 是**增函数**；如果 f 定义域中任意两个数 $x_1 < x_2$，总有 $f(x_1) \geqslant f(x_2)$，就说 f 在定义域上**单调递减**，或者说 f 是**减函数**。如果 f 定义域中任意两个数 $x_1 < x_2$，总有 $f(x_1) < f(x_2)$，就说 f 在定义域上**严格单调递增**，或者说 f 是**严格增函数**；如果 f 定义域中任意两个数 $x_1 < x_2$，总有 $f(x_1) > f(x_2)$，就说 f 在定义域上**严格单调递减**，或者说 f 是**严格减函数**。

（严格）单调递增、递减函数，统称为（严格）单调函数。如果 f 在某个区间中（严格）单调，就把这个区间称为 f 的**单调区间**，或者说 f 在该区间上单调。

用以上的定义，我们梳理整幂函数的基本性质如下：

1. n 是奇数时，f_n 是奇函数；n 是偶数时，f_n 是偶函数。因此只需研究它们在 $[0, +\infty)$ 上的性质。
2. 对任何正整数 n，$f_n(0) = 0$。f_n 在 $(0, +\infty)$ 上严格单调递增。
3. n 是偶数时，f_n 有下界，最小值是 0，值域是 $[0, +\infty)$。n 是奇数时，f_n 是无界函数，值域是 $\mathbb{R}$。
4. 如果 $n > 1$，那么 $x > 0$ 时，随着 x 增大，f_n 增大得越来越快。

5. 对于给定的 x，若 $x > 1$，那么 n 越大，$f_n(x)$ 越大；若 $0 < x < 1$，那么 n 越大，$f_n(x)$ 越小。

不同的整幂函数，乘以常数（常函数）再相加，就得到一般的整式函数。一般的整式函数可以写成：

$$\begin{aligned} p: \quad & \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \end{aligned}$$

其中 $\mathcal{D}$ 为其定义域。和整式一样，我们仍把 n 称为整式函数的次数，把 a_n 称为最高次项，等等。

一元有理式是变量 x 和数经过有限次加、减、乘、除法得到的式子，化简之后总能得到一元分式或整式。它对应的显式函数称为**有理函数**或**分式函数**。反比例函数就是分式函数。一般的有理函数可以写成：

$$\begin{aligned} q: \quad & \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto \frac{a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m} \end{aligned}$$

显然，整式函数也属于有理函数（分母为常函数 1）。

整式函数的定义域 $\mathcal{D}$ 可以是 $\mathbb{R}$ 或它的任何子集。有理函数的定义域则有一定约束。如果某个实数 c 使得作为分母的整式等于 0：

$$b_0 + b_1 c + \cdots + b_m c^m = 0,$$

那么有理函数 q 在 c 处没有定义。我们把这样的 c 称为 q 的**奇点**[1]。有理函数的定义域不应包含奇点。

一类特殊的有理函数是形如：

$$f_{-n}: \ \ x \mapsto x^{-n}$$

[1] “奇”通“畸”，读音同“奇数”的“奇”。

的函数。其中 n 是正整数。它们也是整幂函数，但对应的幂次是负整数。它们也可以写成

$$f_{-n}: \ x \mapsto \frac{1}{x^n}$$

显然，0 是 f_{-n} 的奇点。它的定义域是 $(-\infty,\ 0) \cup (0,\ +\infty)$（简记作 $\mathbb{R}^*$）。

选择几个不同的 n，通过描点法画出 f_{-n} 的图像。

观察函数图像可以发现:

1. n 是奇数时，f_{-n} 是奇函数；n 是偶数时，f_{-n} 是偶函数。因此只需研究它们在 $(0,\ +\infty)$ 上的性质。
2. 对任何正整数 n，f_{-n} 在 $(0,\ +\infty)$ 上严格单调递减。
3. n 是偶数时，f_{-n} 有下界，无最小值，值域是 $(0,\ +\infty)$。n 是奇数时，f_{-n} 是无界函数，值域是 $\mathbb{R}^*$。
4. 如果 $n > 1$，那么 $x > 0$ 时，随着 x 增大，f_{-n} 减小得越来越慢。
5. 对于给定的 x，若 $x > 1$，那么 n 越大，$f_{-n}(x)$ 越小；若 $0 < x < 1$，那么 n 越大，$f_{-n}(x)$ 越大。

2.2 分幂函数和无理函数

以上的函数是关于整式和分式的。它们是 x 和数加减乘除得到的代数式。如果再添加开方运算，我们就能得到一元无理式。当然，开方得到的式子不总是无理式，比如 $\sqrt{(x+1)^4} = (x+1)^2$ 就不是无理式。我们除开其中有理式的部分，把剩余的称为无理式。

把 x 对应到一元无理式，得到的函数叫做**无理函数**。一类简单的无理函数有着和整幂函数类似的形式:

$$f_r: \quad x \mapsto x^r.$$

其中 r 是有理数。我们称它为分幂函数。把 r 写成既约分数的形式。$r>0$ 时，记 $r=\frac{p}{q}$，分幂函数就写成：

$$f_r:\quad x\mapsto x^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{x^p}.$$

$r<0$ 时，记 $r=-\frac{p}{q}$，分幂函数就写成：

$$f_r:\quad x\mapsto x^{-\frac{p}{q}}=\frac{1}{\sqrt[q]{x^p}}.$$

我们不讨论 $r=0$ 和 $q=1$ 的情况（前者是常函数，后者是整幂函数）。

选择几个正有理数 $r=\frac{p}{q}>0$，用描点法大致画出 f_r 的图像：

观察图像可以发现：

1. p,q 是奇数时，f_r 是奇函数；p 是偶数 q 是奇数时，f_r 是偶函数。因此只需研究它们在 $[0,\ +\infty)$ 上的性质。
2. p 是奇数 q 是偶数时，f_r 只在 $[0,\ +\infty)$ 上有定义。
3. 对任何 $r>0$，$f_r(0)=0$。f_r 在 $(0,\ +\infty)$ 上严格单调递增。
4. p,q 之一是偶数时，f_r 有下界，最小值是 0，值域是 $[0,\ +\infty)$。p,q 是奇数时，f_r 是无界函数，值域是 $\mathbb{R}$。
5. $x>0$ 时，如果 $r>1$，随着 x 增大，f_r 增大得越来越快；如果 $0<r<1$，随着 x 增大，f_r 增大得越来越慢。
6. 对于给定的 x，若 $x>1$，那么 r 越大，$f_r(x)$ 越大；若 $0<x<1$，那么 r 越大，$f_r(x)$ 越小。

对比整幂函数，可以发现，除了定义域以外，大多数时候 f_r 的性质与 f_n 的性质相符。

选择几个正有理数 $r=-\frac{p}{q}<0$，用描点法大致画出 f_r 的图像：

观察图像可以发现：

1. p,q 是奇数时，f_r 是奇函数；p 是偶数 q 是奇数时，f_r 是偶函数。因此只需研究它们在 $(0,\ +\infty)$ 上的性质。

2. p 是奇数 q 是偶数时，f_r 只在 $(0,\ +\infty)$ 上有定义。
3. 对任何 $r<0$，f_r 在 $(0,\ +\infty)$ 上严格单调递减。
4. p,q 之一是偶数时，f_r 有下界，无最小值，值域是 $(0,\ +\infty)$。p,q 是奇数时，f_r 是无界函数，值域是 $\mathbb{R}^*$。
5. $x>0$ 时，如果 $r>1$，随着 x 增大，f_r 增大得越来越快；如果 $0<r<1$，随着 x 增大，f_r 增大得越来越慢。
6. 对于给定的 x，若 $x>1$，那么 r 越大，$f_r(x)$ 越小；若 $0<x<1$，那么 r 越大，$f_r(x)$ 越大。

对比整幂函数，可以发现，除了定义域以外，大多数时候 f_r 的性质与 f_{-n} 的性质相符。

不讨论过于复杂的 $x\leqslant 0$ 的情况，设定义域为 $(0,\ +\infty)$，我们可以把整幂函数和分幂函数一起考虑，称为**幂函数**：

$$\begin{aligned} f_r:\quad &(0,\ +\infty)\to\mathbb{R}\\ &\qquad\quad x\mapsto x^r. \end{aligned}$$

这样，我们就可以整理出整幂函数和分幂函数的共性。

1. f_r 的值域是 $(0,\ +\infty)$
2. $r>0$ 时，f_r 严格单调递增；$r<0$ 时，f_r 严格单调递减。
3. $r>1$ 时，随着 x 增大，f_r 增大得越来越快；$0<r<1$ 时，随着 x 增大，f_r 增大得越来越慢。
4. 对于给定的 x，若 $x>1$，那么 r 越大，$f_r(x)$ 越小；若 $0<x<1$，那么 r 越大，$f_r(x)$ 越大。

除了分幂函数，我们还可以了解以下几类简单的无理函数。

$\sqrt{ax+b}$ 型函数。这类函数是将一次函数开方得到的。一般形式为：

$$x\mapsto\sqrt{ax+b}.$$

其中 a,b 是常数系数。比如，$x\mapsto\sqrt{2x-3}$ 就是 $\sqrt{ax+b}$ 类函数。

$\sqrt{ax^2+bx+c}$ 型函数。这类函数是将二次函数开方得到的。一般形式为:

$$x \mapsto \sqrt{ax^2+bx+c}.$$

其中 a, b 是常数系数。比如，$x \mapsto \sqrt{x^2+2x-3}$ 就是 $\sqrt{ax^2+bx+c}$ 类函数。

$\frac{\sqrt{ax+b}}{\sqrt{cx+d}}$ 型函数。这类函数是两个 $\sqrt{ax+b}$ 类函数的商。一般形式为:

$$x \mapsto \frac{\sqrt{ax+b}}{\sqrt{cx+d}}.$$

其中 a, b 是常数系数。比如，$x \mapsto \frac{2x-3}{\sqrt{x+3}}$ 就是 $\frac{\sqrt{ax+b}}{\sqrt{cx+d}}$ 类函数。

处理无理函数定义域的时候需要注意以下几点。首先，写成分式的无理函数，分母同样可能包含奇点，定义域中不包含这些奇点。其次，偶数次开方的代数式中，根号下的值需要大于等于 0。因此，定义域只包括使得这些值大于等于 0 的 x。

例题 2.2.1. 求以下函数的定义域:

$$\begin{array}{llll} (1) & x \mapsto \dfrac{\sqrt{x^2-3x+2}}{x+3} & (2) & x \mapsto \dfrac{\sqrt[4]{x+1}}{\sqrt{-x^2-2x+3}} \\ (3) & x \mapsto \dfrac{\sqrt{5-2x}}{(x-1)\sqrt{x+3}} & (4) & x \mapsto \dfrac{\sqrt{2-x^2}}{(x^2-1)\sqrt{x+0.3}} \end{array}$$

解答.

1. 这个函数包含了 $\sqrt{ax^2+bx+c}$ 型函数作为分子。要求根号下的值大于等于 0，即

$$x^2-3x+2 \geqslant 0.$$

对左边的二次式做因式分解，得到

$$(x-1)(x-2) \geqslant 0.$$

解集为 $(-\infty,\ 1]\cup[2,\ +\infty)$。又函数分母为 $x\mapsto x+3$，有奇点 -3。即 -3 不能在定义域里。于是定义域为 $(-\infty,\ -3)\cup(-3,\ 1]\cup[2,\ +\infty)$。

2. 这个函数的分子为偶数次开方无理函数，要求根号下的值大于等于 0。另外，分母为 $\sqrt{ax^2+bx+c}$ 型函数，因此要求根号下的值大于 0。于是有不等式组:

$$\begin{cases} x+1 & \geqslant 0 \qquad\qquad (1) \\ -x^2-2x+3 & > 0 \qquad\qquad (2) \end{cases}$$

(1) 的解集为 $[-1,\ +\infty)$，(2) 的解集为 $(-3,\ 1)$。于是定义域为两者交集: $[-1,\ 1)$。

3. 这个函数可以看作 $\frac{\sqrt{ax+b}}{\sqrt{cx+d}}$ 型函数与一次函数的商。处理前者时，通常将分母有理化。比如这里就变为

$$x\mapsto\frac{\sqrt{(5-2x)(x+3)}}{(x-1)(x+3)}.$$

这个函数有两个奇点: 1、-3。分子为偶数次开方根式，要求根号下的值大于等于 0，即:

$$(5-2x)(x+3)\geqslant 0$$

解集为 $[-3,\ 2.5]$，去掉奇点，得到定义域; $(-3,\ 1)\cup(1,\ 2.5]$。

4. 这个函数涉及了 $\sqrt{ax+b}$ 型和 $\sqrt{ax^2+bx+c}$ 型函数。要求分子根号下的值大于等于零，分母根号下的值大于零，并去除奇点。于是有不等式组:

$$\begin{cases} 2-x^2 & \geqslant 0 \qquad\qquad (1) \\ x+0.3 & > 0 \qquad\qquad (2) \\ x^2-1 & \neq 0 \qquad\qquad (3) \end{cases}$$

(1) 的解集为 $[-\sqrt{2},\ \sqrt{2}]$，(2) 的解集为 $(-0.3,\ +\infty)$。由 (3) 知 $x\neq\pm1$。于是定义域为: $(-0.3,\ 1)\cup(1,\ \sqrt{2}]$。

2.3 三角函数

2.4 复合函数和反函数

2.5 反三角函数

第三章　二项式

3.1　杨辉三角型

3.2　二项式定理

3.3　二项分布

3.4　二项式与幂函数

3.5　近似计算

第四章　不等式