Título del Libro

Serie Matemáticas

Primera edición

Título del Libro

Serie Matemáticas

Primera edición

Autor o autores del libro
Instituto Superior de Formación Docente Salomé Ureña
Vicerrectoría Académica
Aquí el recinto al cual pertenece el autor

ISFODOSU

Aquí va la dedicatoria

Agradecimientos

Aquí van las palabras de agradecimientos, entre líneas se usa una salto de parrafo, para que no quede muy pegado los parrafos. El salto puede ser de diferentes tipos:

1. `\smallskip`

2. `\medskip`

3. `\bigskip`

Fulanito
Santo Domingo, 2022

Prefacio

Este texto que se coloca es el prefacio que bien pudiera ser escrito por el autor o alguna otra persona.

Fulanito
Instituto Superior de Formación Docente Salomé Ureña

Santo Domingo, 2022

Índice

Índice de Figuras

Índice de Tablas

Lista de símbolos

$\mathbb{N}$	Conjunto de los números naturales
$\mathbb{N}^*$	Conjunto de los números naturales extendidos (incluyen al cero)
$\mathbb{Z}$	Conjunto de los números enteros
$\mathbb{Z}^+$	Conjunto de los números enteros positivos
$\mathbb{Z}^-$	Conjunto de los números enteros negativos
$\mathbb{Q}$	Conjunto de los números racionales
$\mathbb{Q}^+$	Conjunto de los números racionales positivos
$\mathbb{Q}^-$	Conjunto de los números racionales negativos
$\mathbb{R}$	Conjunto de los números reales
$\mathbb{C}$	Conjunto de los números complejos
$\mathscr{U}$	Conjunto universal
$\emptyset$	Conjunto vacío
∞	infinito
$\in$	pertenece a
$\notin$	no pertenece a
$<$	menor que
$>$	mayor que
$\nless$	no es menor que
$\ngtr$	no es mayor que
$\leqslant$ ó $\leq$	menor o igual que
$\geqslant$ ó $\geq$	mayor o igual que
$\nleqslant$ ó $\nleqq$	no es menor o igual que
$\ngeqslant$ ó $\ngeqq$	no es mayor o igual que
$=$	igual
$\neq$	no es igual a
$\subset$	subconjunto de
$\subseteq$	subconjunto o igual a
$\not\subset$	no es subconjunto de
$\nsubseteq$	no es subconjunto o igual a

$a\|b$	a es un divisor de b
aRb ó $a \sim b$	a está relacionado con b
$\sim$	relación
$a\not R b$ ó $a \not\sim b$	a no está relacionado con b
$\not\sim$	no es una relación
$[n]_\sim$ ó $[n]$	clase de equivalencia de n con respecto a la relación $\sim$
$\preccurlyeq$	relación de orden parcial
$\prec$	relación de orden estricto
$\mathrm{dom}(R)$	dominio de R
$\mathrm{ran}(R)$	rango de R
$\circ$	composición
$\iota(\cdot)$	función identidad
$\neg$	negación de
$\neg\neg$	doble negación de
$\vee$	disyunción
$\wedge$	conjunción
$\longrightarrow$ ó $\Longrightarrow$	implicación
$\longleftrightarrow$ ó $\Longleftrightarrow$	bicondicional
$\square$	fin de la solución
$\blacksquare$	fin de la demostración
$\equiv$	equivalente
$\forall$	cuantificador universal (para todo)
$\exists$	cuantificador existencial (existe)
$\nexists$	negación del cuantificador existencial (no existe)
$^\circ C$	grados Celcius
$\cos(\frac{\pi}{3})$	la función coseno evaluado en $\frac{\pi}{3}$
α	letra griega alfa
β	letra griega beta
θ	letra griega theta
ψ	letra griega psi
ϕ	letra griega phi
φ	letra griega varphi
ρ	letra griega rho
π	letra griega pi, usada para denotar el número trascendente π
e	número trascendente e
$\times$ ó $\cdot$	producto
$:$ ó $/$	tal que
$\{\quad\}$	para denotar conjuntos
$\mathscr{P}(X)$	conjunto pontencia de X ó partes de X
$\cup$	unión
$\cap$	intersección
$\setminus$ ó $-$	diferencia de conjunto
$\triangle$	diferencia simétrica
$A \times B$	producto cartesiano de A con B
$\mathbb{R}^2$	plano cartesiano o bidimensional
A^c	complemento del conjunto A
$\|x\|$	valor absoluto de x
$\|A\|$	cardinal o cantidad de elementos del conjunto A

1 Título del Capítulo

No puedo enseñar nada a nadie. Solo puedo hacerles pensar.

SÓCRATES

La lógica tradicional como parte de la filosofía es una de las disciplinas científicas más antiguas. Se remonta a los estoicos y al filósofo, polímata y científico **Aristóteles**, y es la raíz de lo que hoy se llama **lógica filosófica**. Sin embargo, la lógica matemática es una disciplina relativamente joven, que surgió a partir de los esfuerzos de: **Giuseppe Peano**, matemático, lógico y filósofo italiano, **Friedrich Ludwig Gottlob Frege**, matemático, lógico y filósofo alemán y **Bertrand Arthur William Russell**, filósofo, matemático, lógico y escritor británico, que contribuyeron a reducir las matemáticas por completo a la lógica. A lo largo del siglo XX se ha desarrollado de forma constante hasta convertirse en una amplia disciplina con varias subáreas y numerosas aplicaciones en matemáticas, informática, lingüística y filosofía.

Este es un ejemplo de una caja resaltada en color gris

el rigor lógico del razonamiento utilizado para justificar los resultados.

1.1 Título de la sección

Podemos definir las matemáticas como el estudio del número y del espacio. Aunque se pueden encontrar representaciones en el mundo físico, el objeto de las matemáticas no es físico. En cambio, los objetos matemáticos son abstractos, como las ecuaciones del álgebra o los puntos y las líneas de la geometría. Solo se encuentran como ideas en las mentes. Estas ideas conducen a veces al descubrimiento de otras ideas que no se manifiestan en el mundo físico, como cuando se estudian diversas magnitudes del infinito, mientras que otras conducen a la creación de objetos tangibles, como los puentes o los computadores.

Un ejemplo de como colocar item con colores en azul con degradado

- De las categorías
- Tópicos
- Refutaciones sofísticas

- Sobre la interpretación
- Primeros analíticos
- Segundos analíticos.

Este es un ejemplo de definición:

Definición 1.1

Una **deducción** es un discurso proveniente del latín *logos* del cual, suponiendo ciertas cosas, resulta la necesidad de otra cosa diferente o distinta de las cosas supuestas, solo por haber sido supuestas estas cosas.

Un ejemplo de como usar las cajas de ejemplos:

Ejemplo 1.1

Supongamos nos dicen que un cierto número natural es menor que 35, y además que el número en cuestión es divisible por 4 y que al sumarle 3 obtenemos un número divisible por 5.

Este es una ambiente definido en el estilo para las soluciones de los ejemplos.

Solución. ¿Podemos a partir de esta información inferir cuál o cuáles son los números?

Ahora bien, como el número buscado es un número divisible por 4 y menor que 35, entonces el número debe ser alguno de los siguientes:

$$4, \quad 8, \quad 12, \quad 16, \quad 20, \quad 24, \quad 28, \quad \text{ó} \quad 32$$

adicionalmente, se pide que al número si le sumamos 3, el número es divisible por 5, entonces si exploramos tal situación, obtenemos los que podrían ser una posible solución, y son:

$$7, \quad 11, \quad 15, \quad 19, \quad 23, \quad 27, \quad 31, \quad 35,$$

luego entre estos números, los números 15 y 35 son los únicos que son divisibles por 5, por lo tanto, concluimos que los números buscados son 15 y 35. □

Este es un ejemplo de items enumerados en color verde claro para los ejemplos:

Ejemplo 1.2

Los siguientes enunciados no son proposiciones:

1. Espérame!
2. ¿Por qué estudias matemáticas?
3. $x + y = x$
4. ¡A estudiar!
5. Él es un estudiante.

Aquí pueden ver un ejemplo de como referenciar los item enumerados del ejemplo anterior: El enunciado 3 no es una proposición, pues no hemos especificado el significado de los símbolos x e y, y por esto no podemos decir si es verdadera o falsa. Sin embargo, si dijéramos lo siguiente

$$x+y=x \qquad \text{para algún } x,y \in \mathbb{Z}$$

entonces esa afirmación es una proposición verdadera. Pues tenemos, por ejemplo, que cuando $x=1$ y $y=0$ se cumple que $x+y=x$.

Este es un ejemplo como usar el ambiente tabular para que las tablas queden con líneas más espaciadas:

Todos los X **son** Y
Algunos Z **son** X
Algunos Z **son** Y

Este es un entorno para colocar en una caja blanca con borde negro algunas citas importantes a modo de resumen en el texto, adicionalmente tambien puede ver como hacer enumeración de item en circulos azules para colocar fuera de los ambientes de ejemplos.

Al completar el argumento debemos propender para que sea el mejor argumento posible. Este requiere lo siguiente:

1. la identificación de la(s) premisa(s) necesaria(s) para que el argumento sea deductivamente válido o al menos inductivamente fuerte; o
2. la identificación de la conclusión que se sigue deductiva o inductivamente de las premisas dadas.

Problemas propuestos

Ejercicio 1.1 Indique cuáles de las siguientes oraciones son enunciados.

a) ¿Dónde queda Samarcanda?

b) ¡No me vuelvas a llamar!

c) Beijing es una ciudad enorme.

d) Por favor, cierra la puerta cuando salgas.

e) La autosuficiencia petrolera del país solo durará cinco años más.

f) ¿Quién va primero?

g) $4+6=10$

h) Este ejercicio es corto.

Bajo el ambiente prob se pueden generar los ejercicios de cada capítulo del libro.

2

Título del capítulo

Nunca se alcanza la verdad total, ni nunca se está totalmente alejado de ella.

ARISTÓTELES

Algunas disciplinas, como la música y las matemáticas, han recurrido al lenguaje artificial o simbólico para simplificar la expresión de ideas complejas. A diferencia de los lenguajes naturales como el español, el inglés o el ciguayo, que son herramientas generales de comunicación, los lenguajes simbólicos están diseñados con un propósito específico, lo que nos permite expresar pensamientos en términos precisos sin ambigüedad y contenido emocional.

Forma de usar el ambiente del ejemplo con nombre del ejemplo. Recordar que cada ambiente tiene dos copciones, la primero es para el nombre y la segunda para la etiqueta de referencia.

Ejemplo 2.1 (Negación)

La función seno es periódica.

La función seno **no** es periódica.

2.0.1 *Título de la subsección*

Ejemplo de una tabla con encabezado gris

Tabla 2.1 Tabla de verdad para la conjunción.

p	q	$p \wedge q$
V	**V**	**V**
V	**F**	**F**
F	**V**	**F**
F	**F**	**F**

Ejemplo de una tabla con encabezado azul claro

Tabla 2.2 Tabla del ejemplo **??**.

p	q	$p \wedge q$	$p \longrightarrow q$	$\neg(p \longrightarrow q)$	$(p \wedge q) \vee \neg(p \longrightarrow q)$
F	**F**	**F**	**V**	**F**	**F**
F	**V**	**F**	**V**	**F**	**F**
V	**F**	**F**	**F**	**V**	**V**
V	**V**	**V**	**V**	**F**	**V**

Problemas propuestos

Ejercicio 2.1 ¿Cuáles de las siguientes son proposiciones? En caso que sea un proposición, diga si es verdadera o falsa.

a) $7-4=3$.

b) $5^4 < 3^2$.

c) En la escuela nos enseñan a caminar.

d) Tu voto es tu opinión.

e) ¿Te duele?

f) ¡Cállate la boca!

g) Aquel árbol es azul.

h) La música es una expresión del arte.

3

Título del capítulo

La libertad está en ser dueños de nuestra propia vida.

PLATÓN

Para la lógica de proposiciones, la *lógica formal* puede determinar la validez de cualquier razonamiento, donde la proposición analizada se deriva de una proposición sin analizar de otra u otras proposiciones que no se analizaban. En otras palabras: la lógica formal, a nivel de lógica de proposiciones, solo puede analizar formalmente de manera completa aquellos argumentos cuya estructura interna de las proposiciones que las componen en su validez no tiene ningún papel.

Problemas propuestos

4

Título del capítulo

Si no esperas lo inesperado no lo reconocerás cuando llegue.

HERÁCLITO

Aunque la **teoría de conjuntos** se reconoce como la piedra angular de las *nuevas matemáticas*, el pensamiento intuitivo de los conjuntos no es esencialmente nada nuevo. Los matemáticos han considerado colecciones de un tipo u otro desde los tiempos más remotos, y los conceptos básicos de la teoría de conjuntos moderna están implícitos en un gran número de argumentos clásicos. Sin embargo, no fue hasta finales del siglo XIX, con la obra de **George Cantor** (1845 – 1918), que los conjuntos se convirtieron en el principal objeto de la teoría matemática.

ejemplo del ambiente colorario

Corolario 4.1

Si A y B son conjuntos, las siguientes afirmaciones son equivalentes entre sí, es decir, siempre que alguna de ellas sea verdadera, entonces las demás lo serán:

1. $A = B$;
2. A y B tienen los mismos elementos;
3. $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$;
4. $(\forall x : x \in A \longrightarrow x \in B)$ y $(\forall x : x \in B \longrightarrow x \in A)$;
5. $\forall x : x \in A \longleftrightarrow x \in B$;
6. para todo elemento x, o bien $x \in A$ y $x \in B$, o bien $x \notin A$ y $x \notin B$.

Ejemplo del ambiente teorema

Teorema 4.1

Sea $\mathscr{U}$ el conjunto universal y A, B, y C tres conjuntos. Entonces se satisface las siguientes afirmaciones:

1. $\emptyset \subseteq A$.
2. $A \subseteq A$.
3. Si $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$, entonces $A \subseteq C$.
4. Si $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$, entonces $A = B$.

ejemplo del ambiente para demostraciones

Demostración. Para demostrar el apartado 1, hagamos una demostración por reducción al absurdo, o también conocida como el método indirecto. Supongamos que $\emptyset \nsubseteq A$, es decir, existe $x \in \emptyset$ y $x \notin A$. Ahora, como $\emptyset$ no tiene elementos, entonces x no puede estar en el conjunto $\emptyset$, por lo tanto lo supuesto es falso, y entonces se tiene que $\emptyset \subseteq A$. ■

Proposición 4.1

Sean A, B y C tres conjuntos sobre un conjunto unversal $\mathscr{U}$, entonces se tiene:

1. $A \cup A = A$ y $A \cap A = A$ (idempotencia).
2. $A \cup B = B \cup A$ y $A \cap B = B \cap A$ (conmutativa).
3. $A \subseteq A \cup B$, $B \subseteq A \cup B$, $A \cap B \subseteq A$, y $A \cap B \subseteq B$ (absorción).
4. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ y $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ (asociativa).

Problemas propuestos

5

Título del capítulo

Se mide la inteligencia de un individuo por la cantidad de incertidumbres que es capaz de soportar.

IMMANUEL KANT

En este capítulo desarrollaremos el concepto de *relaciones entre conjuntos*. Este es un concepto importante en matemáticas. Para nosotros, su mayor utilidad es que se basa en la definición de funciones que veremos más adelante. Ya estamos familiarizados con las relaciones, por ejemplo: $a = b$, la relación de *igualdad*; $a < b$, la relación de *menor que*; $X \subseteq Y$ la relación de subconjunto; $m|n$ la relación de *divisor de*, y así muchas otras.

Problemas propuestos

6

Título del capítulo

Acusar a los demás de los infortunios propios es un signo de falta de educación. Acusarse a uno mismo demuestra que la educación ha comenzado.

EPICTETO

El concepto de *función* es una de las ideas matemáticas más básicas, y entra en casi todas las discusiones de la matemática, de ella se hace uso del concepto de función. El concepto de correspondencia entre conjuntos o de relación entre conjuntos consiste en el que, dados dos conjuntos A y B, se define un subconjunto R de $A \times B$, lo cual es muy general. Si se puede decir de cierta manera, este tipo de relaciones son ambiguas.

Problemas propuestos

7

Título del Capítulo

Los educadores, más que cualquier otra clase de profesionales, son los guardianes de la civilización.

BERTRAND RUSSELL

En este capítulo trataremos la numerabilidad o no de conjuntos, en particular se demostrará la numerabilidad de $\mathbb{Q}$ y la no numerabilidad de $\mathbb{R}$. Pero antes debemos introducir algunos conceptos previos sobre la cardinalidad de conjuntos. El tamaño de un conjunto finito puede medirse fácilmente; por ejemplo, el tamaño del conjunto $A = \{1,2,3,\ldots,50\}$ es 50 porque tiene 50 elementos, y el tamaño de los conjuntos $B = \{\pi,2,30,-2\}$ y $C = \{9,11,-1,5\}$ es 4.

ejemplo del ambiente para Lemas

Lema 7.1

El conjunto de números racionales positivos, $\mathbb{Q}^+$, es numerable.

Problemas propuestos

Bibliografía

[1] Carlos Uzcátegui Aylwin, *Lógica, conjuntos y números*, Universidad de los Andes, Consejo de Publicaciones, Colección: Ciencias Básicas, Serie: Matemáticas, 2011.

[2] ______, *Los números reales y el infinito*, Universidad de los Andes, Consejo de Publicaciones, Colección: Ciencias Básicas, Serie: Matemáticas, 2011.