

## Содержание

<b>1</b>	<b>ЛОГИЧЕСКАЯ СИМВОЛИКА. МНОЖЕСТВА И ОСНОВНЫЕ ОПЕРАЦИИ С МНОЖЕСТВАМИ</b>	<b>2</b>
1.1	Логическая символика и некоторые специальные обозначения . . . . .	2
1.2	Множества . . . . .	5
1.3	Операции над множествами . . . . .	6
1.4	Контрольные вопросы и задачи . . . . .	9
<b>2</b>	<b>ФУНКЦИИ И ОТОБРАЖЕНИЯ</b>	<b>10</b>
2.1	Понятия функции и отображения . . . . .	10
2.2	Сюръекция, инъекция и биекция . . . . .	12
2.3	Контрольные вопросы и задачи . . . . .	14
<b>3</b>	<b>ЧИСЛОВЫЕ МНОЖЕСТВА И ИХ СВОЙСТВА</b>	<b>14</b>
3.1	Система аксиом множества вещественных чисел . . . . .	14
3.2	Следствия из аксиом . . . . .	16
3.3	Расширение множества вещественных чисел . . . . .	20
3.4	Натуральные числа . . . . .	21
3.5	Принцип математической индукции . . . . .	22
3.6	Целые, рациональные и иррациональные числа . . . . .	23
3.7	Бином Ньютона . . . . .	24
3.8	Промежутки числовой прямой. Окрестности . . . . .	26
3.9	Модуль вещественного числа . . . . .	28
3.10	Контрольные вопросы и задачи . . . . .	29
<b>4</b>	<b>ОГРАНИЧЕННОСТЬ ЧИСЛОВЫХ МНОЖЕСТВ. СУПРЕМУМ И ИНФИМУМ. ПРИНЦИП АРХИМЕДА</b>	<b>30</b>
4.1	Ограниченность числовых множеств . . . . .	30
4.2	Принцип Архимеда . . . . .	32
4.3	Контрольные вопросы и задачи . . . . .	34
<b>5</b>	<b>ТЕОРЕМА КАНТОРА. ЛЕММА БОРЕЛЯ-ЛЕБЕГА. ЛЕММА О ПРЕДЕЛЬНОЙ ТОЧКЕ. МОЩНОСТЬ</b>	<b>34</b>
5.1	Теорема Кантора . . . . .	34
5.2	Лемма Бореля-Лебега . . . . .	36
5.3	Лемма о предельной точке . . . . .	37
5.4	Немного о замкнутых множествах . . . . .	38
5.5	Мощность множества . . . . .	39
5.6	Контрольные вопросы и задачи . . . . .	45

<b>6</b>	<b>ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ</b>	<b>45</b>
6.1	Понятие предела последовательности . . . . .	45
6.2	Арифметические свойства пределов . . . . .	50
6.3	Предельный переход в неравенствах . . . . .	53
6.4	Теорема о сжатой переменной . . . . .	54
6.5	Теорема Вейерштрасса . . . . .	54
6.6	Второй замечательный предел и число $e$ . . . . .	56
6.7	Сравнение скорости роста функций . . . . .	57
6.8	Частичные пределы . . . . .	59
6.9	Критерий Коши . . . . .	61
6.10	Контрольные вопросы и задачи . . . . .	63
<b>7</b>	<b>ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ</b>	<b>63</b>
7.1	Понятие предела функции по Коши . . . . .	63
7.2	Понятие предела функции по Гейне . . . . .	67
7.3	Свойства функций, имеющих предел . . . . .	69
7.4	Арифметические свойства пределов . . . . .	70
7.5	Теорема о сжатой переменной . . . . .	70
7.6	Предельный переход в неравенствах . . . . .	71
7.7	Односторонние пределы . . . . .	71
7.8	Критерий Коши существования предела функции . . . . .	73
7.9	Предел монотонной функции . . . . .	74
7.10	Бесконечно малые и бесконечно большие функции . . . . .	75
7.11	Свойства бесконечно малых функций . . . . .	76
7.12	Контрольные вопросы и задачи . . . . .	77
<b>8</b>	<b>НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ</b>	<b>78</b>
8.1	Основные определения . . . . .	78
8.2	Классификация точек разрыва . . . . .	80
8.3	Локальные свойства непрерывных функций . . . . .	82
8.4	Глобальные свойства непрерывных функций . . . . .	83
8.5	Первый замечательный предел . . . . .	86
8.6	Непрерывность элементарных функций . . . . .	88
8.7	Второй замечательный предел . . . . .	101
8.8	Следствия замечательных пределов . . . . .	103
8.9	Асимптотическое сравнение функций . . . . .	106
8.10	Таблица эквивалентностей . . . . .	108
8.11	Контрольные вопросы и задачи . . . . .	112
<b>9</b>	<b>ПРОИЗВОДНАЯ И ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИИ</b>	<b>112</b>
9.1	Производная и дифференциал . . . . .	112

9.2	Геометрический смысл производной и дифференциала. Касательная . . . . .	115
9.3	Основные правила дифференцирования . . . . .	116
9.4	Таблица производных простейших функций . . . . .	119
9.5	Дифференцирование функций, заданных параметрически . . .	121
9.6	Теоремы Ферма, Ролля, Лагранжа и Коши . . . . .	122
9.7	Правило Лопиталя . . . . .	129
9.8	Производные и дифференциалы высших порядков . . . . .	131
9.9	Формула Лейбница . . . . .	132
9.10	Формула Тейлора . . . . .	132
9.11	Разложение элементарных функций по формуле Маклорена . .	136
9.12	Исследование функций с помощью производных . . . . .	139
9.13	Асимптоты графика функции . . . . .	147
9.14	Исследование функции и построение графика . . . . .	151
9.15	Контрольные вопросы и задачи . . . . .	153

# 1 ЛОГИЧЕСКАЯ СИМВОЛИКА. МНОЖЕСТВА И ОСНОВНЫЕ ОПЕРАЦИИ С МНОЖЕСТВАМИ

## 1.1 Логическая символика и некоторые специальные обозначения

Математика оперирует предложениями, называемыми высказываниями. Высказывания, в свою очередь, изучаются разделом математики, который называется математическая логика. Приведем для начала некоторые, на наш взгляд, наиболее используемые обозначения и сокращения.

$\forall$  – квантор всеобщности. Читается, как «любой», «всякий», «каждый».

$\exists$  – квантор существования. Читается, как «существует», «найдется».

$\Rightarrow$  – знак импликации (следования).

$\Leftrightarrow$  – знак равносильности (тождества).

$\neg$  – знак отрицания.

$\wedge$  – логическое «и».

$\vee$  – логическое «или».

Кроме того, символы, приведенные далее, позволяют сокращать математические записи.

$\triangleleft$  – читается, как «рассмотрим».

$\square$  – читается, как «пусть».

$:$  – читается, как «такой, что», «так, что».

$!$  – читается, как «единственный».

Приведем несколько примеров использования этих символов для записи высказываний.

**Пример 1.1.1** Запись  $\forall b \exists a : a + b = -3$  читается, как «для каждого  $b$  найдется  $a$  такое, что сумма  $a$  и  $b$  равна  $-3$ ».

**Пример 1.1.2** Запись  $\forall a, b \exists! c = ab$  читается, как «для любых чисел  $a, b$  найдется единственное число  $c$ , равное их произведению».

Доказательство любой теоремы в математике состоит из следующих известных шагов: задается некоторое свойство (высказывание)  $A$ , которое часто называется условием, и из него, путем логических рассуждений выводится некоторое свойство  $B$  (результат). Какие при этом логические операции используются? Приведем и обсудим некоторые из них.

### 1. Логическая операция импликации (следования).

Данная логическая операция часто обозначается символом  $\Rightarrow$ . Если  $A$  и  $B$  – два высказывания, то запись  $A \Rightarrow B$  читается, как «из  $A$  следует  $B$ », « $A$  влечет  $B$ », « $B$  необходимо для  $A$ », « $A$  достаточно для  $B$ ».

**Пример 1.1.3** Рассмотрим высказывания  $A : x < 0$  и  $B : x < 1$ . Тогда, очевидно,  $A \Rightarrow B$ .

Этот же пример показывает, что обратное утверждение, то есть утверждение  $B \Rightarrow A$ , вообще говоря, не выводится из утверждения  $A \Rightarrow B$ .

## 2. Логическая операция равносильности (тождества).

Данная логическая операция часто обозначается символом  $\Leftrightarrow$ . Если  $A$  и  $B$  – два высказывания, то запись  $A \Leftrightarrow B$  читается, как « $A$  равносильно  $B$ », « $B$  необходимо и достаточно для  $A$ », « $A$  выполнено тогда и только тогда, когда выполнено  $B$ ».

**Пример 1.1.4** Рассмотрим высказывания  $A$  : целое число делится на 6 и  $B$  : целое число делится на 2 и на 3. Ясно, что  $A \Leftrightarrow B$ .

**Замечание 1.1.1** Легко понять, что равносильность двух высказываний  $A$  и  $B$  – это то же самое, что одновременное выполнение двух импликаций:  $A \Rightarrow B$  и  $B \Rightarrow A$ . Это наблюдение часто используется при доказательстве теорем, в условии которых фигурирует понятие равносильности (или, что то же самое, фигурирует фраза «тогда и только тогда»). Импликация  $A \Rightarrow B$  часто называется необходимостью, а импликация  $B \Rightarrow A$  – достаточностью.

Необходимое и достаточное условие часто также называется **критерием**.

## 3. Логическая операция отрицания.

Данная логическая операция часто обозначается символом  $\neg$ . Если  $A$  – высказывание, то  $\neg A$  читается, как «не  $A$ ». Можно встретить и такое обозначение отрицания  $A$ :

$$\neg A = \overline{A}.$$

**Пример 1.1.5** Рассмотрим высказывание  $A : x < 0$ . Тогда  $\neg A : x \geq 0$ .

**Замечание 1.1.2** Для любого высказывания  $A$  справедлив принцип исключенного третьего: выполнено либо  $A$ , либо  $\neg A$ .

**Замечание 1.1.3** Всегда справедливо утверждение  $\neg(\neg A) \Leftrightarrow A$ .

На свойствах операции отрицания часто основывается так называемое **доказательство от противного**.

### Лемма 1.1.1

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$$

**Доказательство.** Пусть справедливо  $A \Rightarrow B$  и при этом выполнено  $\neg B$ . Тогда, в силу принципа исключенного третьего, выполнено  $\neg A$  (иначе, в силу того, что  $A \Rightarrow B$ , было бы справедливо  $B$ , а не  $\neg B$ ). Последнее же противоречит тому, что выполнено  $A$ .

Обратно, пусть выполнено  $\neg B \Rightarrow \neg A$ . Тогда, по доказанному, выполнено  $\neg(\neg A) \Rightarrow \neg(\neg B)$ , то есть  $A \Rightarrow B$ .  $\square$

#### 4. Логическая операция «или».

Данная логическая операция часто обозначается символом  $\vee$ . Если  $A$  и  $B$  – два высказывания, то  $A \vee B$  читается, как « $A$  или  $B$ ». Отметим, что это высказывание вовсе не исключает **одновременного** выполнения как  $A$ , так и  $B$ .

**Пример 1.1.6** Рассмотрим высказывания  $A : 0 < x \leq 1$  и  $B : 1 \leq x < 2$ . Тогда  $A \vee B : 0 < x < 2$ .

#### 5. Логическая операция «и».

Данная логическая операция часто обозначается символом  $\wedge$ . Если  $A$  и  $B$  – два высказывания, то  $A \wedge B$  читается, как « $A$  и  $B$ ». Отметим, что это высказывание подразумевает **одновременное** выполнение как  $A$ , так и  $B$ .

**Пример 1.1.7** Рассмотрим высказывания  $A : 0 < x \leq 1$  и  $B : 1 \leq x < 2$ . Тогда  $A \wedge B : x = 1$ .

Полезным в дальнейшем будет и следующее наблюдение. Пусть  $P(x)$  – некоторое высказывание, зависящее от  $x \in X$  (детальнее об этом мы поговорим чуть ниже). Тогда отрицание к утверждению «для любого  $x$  из  $X$  справедливо свойство  $P(x)$ » равносильно тому, что «существует  $x$  из  $X$ , что свойство  $P(x)$  неверно». Записать это можно так:

$$\neg(\forall x \in X \Rightarrow P(x)) \Leftrightarrow (\exists x \in X : \neg P(x)).$$

Аналогично, отрицание утверждения «для некоторого  $x \in X$  верно  $P(x)$ » равносильно тому, что «для всех  $x$  из  $X$  свойство  $P(x)$  неверно», или, в символическом виде,

$$\neg(\exists x \in X : P(x)) \Leftrightarrow (\forall x \in X \Rightarrow \neg P(x)).$$

**Пример 1.1.8** Приведем конкретные примеры.

$$\neg(\forall x \Rightarrow x \text{ делится на } 2) \Leftrightarrow (\exists x : x \text{ не делится на } 2).$$

и

$$\neg(\exists x : x \text{ делится на } 2) \Leftrightarrow (\forall x \Rightarrow x \text{ не делится на } 2).$$

## 1.2 Множества

Понятие множества в рассматриваемом курсе будет первичным, неопределяемым. Не определяя понятия множества, тем не менее, будут указаны его свойства и правила обращения с ним. Другой подход, аксиоматический, использует математическая логика: аксиомы описывают свойства множества и правила построения одних множеств из других.

Само понятие «множество» должно быть интуитивно понятно каждому. Вместо него, в зависимости от ситуации, часто используют такие синонимы, как «набор», «совокупность» и аналогичные слова. Например, множество цветов в вазе часто синонимично называют словом «букет», а множество студентов в аудитории – «группой».

Множества принято обозначать заглавными латинскими буквами, например:  $A, B, C$ , при этом для нумерации множеств часто оказывается удобным использовать индексы:  $A_1, A_2$ . Объекты, составляющие множество, называют элементами множества, их принято обозначать строчными латинскими буквами:  $a, b, c$ .

**Замечание 1.2.1** *Запись  $a \in A$  будет означать, что  $a$  является элементом множества  $A$  или, иначе, что  $a$  входит в  $A$ .*

**Замечание 1.2.2** *Запись  $a \notin A$  будет означать, что  $a$  не является элементом множества  $A$  или, иначе, что  $a$  не входит в  $A$ .*

Основные способы задания множества:

- множество может быть задано перечислением своих элементов, например  $A = \{1, 5, 12, \text{стул}\}$ ;
- множество может быть задано указанием характеристического свойства, например  $A = \{x : \sin x = 1/2\}$ . Таким образом,  $A$  – это множество, составленное из элементов  $x$  таких, что  $\sin x = 1/2$ .

**Замечание 1.2.3** *Вообще, все вышесказанное можно обобщить и такой конструкцией. Пусть  $x$  – объект произвольной природы, а  $P(x)$  – обозначение того, что объект  $x$  обладает свойством  $P$ . Тогда*

$$\{x : P(x)\}$$

– это множество всех объектов, обладающих свойством  $P$ . Объекты в этом контексте – суть элементы построенного множества.

**Замечание 1.2.4** Элементами множества могут выступать и множества, например

$$A = \{1, \{1\}, \{3, 7\}\}.$$

У множества  $A$  три элемента: число 1, множество  $\{1\}$ , состоящее из одного элемента 1, и двухэлементное множество  $\{3, 7\}$ .

Такая свобода в задании множества может привести к мысли, что множество – не такое уж простое понятие. И правда, например, понятия множества всех множеств просто не существует.

Пусть  $A$  – совокупность множеств, не содержащих себя в качестве элемента. Если  $A$  – множество, то либо  $A$  содержит себя в качестве элемента, либо нет. Однако эта альтернатива для  $A$  невозможна. Пусть  $A$  не содержит себя в качестве элемента, тогда, согласно определению  $A$ , должно выполняться  $A \in A$ . С другой стороны, если  $A \in A$ , то это противоречит определению совокупности  $A$ , как множеств, не содержащих себя в качестве элемента. Значит,  $A$  – не множество.

**Замечание 1.2.5** При образовании множеств нужно соблюдать некоторую осторожность. Как показано выше, понятия множества всех подмножеств противоречиво (такого множества нет). Во избежании противоречий достаточно потребовать, чтобы элементы множества были определены раньше, чем само множество. Потребовав это, получим, что никакое множество не может содержать себя в качестве элемента.

**Определение 1.2.1** Обычно рассматривают объекты, принадлежащие некоторому основному множеству  $U$ . Оно либо ясно из контекста, либо явно указывается. Такое множество называется универсальным множеством.

**Определение 1.2.2** Множество, не содержащее элементов, называется пустым множеством и обозначается  $\emptyset$ .

Полезно заметить, что пустое множество является подмножеством абсолютно любого множества.

## 1.3 Операции над множествами

Рассмотрим классические операции над множествами, а также их свойства.



**Определение 1.3.1** Говорят, что множество  $A$  является подмножеством множества  $B$  и пишут  $A \subset B$ , если

$$(\forall x \in A) \Rightarrow (x \in B),$$

т.е. все элементы множества  $A$  являются и элементами множества  $B$ .

**Определение 1.3.2** Если для двух множеств  $A$  и  $B$  одновременно выполняется, что  $A \subset B$  и  $B \subset A$ , то множества  $A$  и  $B$  называются равными. Равенство множеств записывается следующим образом:  $A = B$ .

Понятно, что множества  $A$  и  $B$  равны тогда и только тогда, когда состоят из одинаковых элементов.

**Определение 1.3.3** Объединением множеств  $A$  и  $B$  называется множество  $C$ , обозначаемое  $A \cup B$ , такое, что:

$$C = A \cup B = \{x : (x \in A) \vee (x \in B)\},$$

т.е. элементами объединения являются только те элементы, которые содержатся хотя бы в одном из множеств  $A, B$ .

**Определение 1.3.4** Пересечением множеств  $A$  и  $B$  называется множество  $C$ , обозначаемое  $A \cap B$ , такое, что:

$$C = A \cap B = \{x : (x \in A) \wedge (x \in B)\},$$

т.е. элементами пересечения являются только те элементы, которые принадлежат одновременно множествам  $A$  и  $B$ .

**Определение 1.3.5** Разностью множеств  $A$  и  $B$  называется множество  $C$ , обозначаемое  $A \setminus B$ , такое, что:

$$C = A \setminus B = \{x : (x \in A) \wedge (x \notin B)\},$$

т.е. элементами разности являются элементы, входящие в множество  $A$ , но не входящие в множество  $B$ .

**Определение 1.3.6** Пусть  $U$  – универсальное множество. Дополнением множества  $A$  до  $U$  называется множество  $U \setminus A$ , обозначаемое  $A^c$ .

**Пример 1.3.1** Пусть заданы множества  $A = \{1, 3, 5\}$ ,  $B = \{3, 4, 5, 6\}$  и  $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ , где последнее множество – универсальное. Тогда,

$$A \cup B = \{1, 3, 4, 5, 6\}, \quad A \cap B = \{3, 5\}, \quad A \setminus B = \{1\}, \quad A^c = \{2, 4, 6, 7\}.$$

**Замечание 1.3.1** Пусть элементы  $\alpha$  множества  $A$  нумеруют множества  $X_\alpha$ . Тогда под объединением системы множеств  $X_\alpha$  понимается множество, содержащее те элементы  $x$ , которые принадлежат хотя бы одному множеству  $X_\alpha$ . Обозначается это объединение

$$\bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha.$$

Аналогично, под пересечением системы множеств  $X_\alpha$  понимается множество, содержащее те элементы  $x$ , которые принадлежат каждому множеству  $X_\alpha$ . Обозначается это пересечение

$$\bigcap_{\alpha \in A} X_\alpha.$$

**Определение 1.3.7** Декартовым произведением множеств  $A$  и  $B$  называется множество упорядоченных пар таких, что первый элемент пары принадлежит множеству  $A$ , а второй – множеству  $B$ :

$$A \times B = \{(a, b) : (a \in A), (b \in B)\}.$$

**Замечание 1.3.2** Под упорядоченной парой понимается то, что пара  $(a, b)$ , вообще говоря, не равна паре  $(b, a)$ . Для обозначения упорядоченных пар, часто оказывается удобным добавлять индексы элементам пары, например  $(x_1, x_2)$ .

**Замечание 1.3.3** Декартово произведение естественным образом обобщается на любое конечное число множеств.

Отметим некоторые стандартные свойства, присущие операциям над множествами.

**Лемма 1.3.1** Справедливы следующие свойства:

1.  $X \cup Y = Y \cup X$  – коммутативность объединения;
2.  $X \cap Y = Y \cap X$  – коммутативность пересечения;
3.  $(X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z)$  – ассоциативность объединения;
4.  $(X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z)$  – ассоциативность пересечения;
5.  $X \cup X = X \cup \emptyset = X$ ;
6.  $X \cap X = X, X \cap \emptyset = \emptyset$ ;

$$7. X \cup X^c = U, X \cap X^c = \emptyset, (X^c)^c = X.$$

Все написанные свойства моментально следуют из определения соответствующих операций. Приведем также несколько свойств, показывающих связь операций объединения, пересечения и разности. Начнем с разности.

**Теорема 1.3.1 (Законы де Моргана)** *Справедливы следующие соотношения:*

$$Y \setminus \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha = \bigcap_{\alpha \in A} (Y \setminus X_\alpha), \quad Y \setminus \bigcap_{\alpha \in A} X_\alpha = \bigcup_{\alpha \in A} (Y \setminus X_\alpha).$$

**Доказательство.** Докажем, например, первое соотношение.

$$\begin{aligned} x \in Y \setminus \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha &\Leftrightarrow (x \in Y) \wedge \left( x \notin \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha \right) \Leftrightarrow (x \in Y) \wedge (x \notin X_\alpha, \forall \alpha \in A) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x \in Y \setminus X_\alpha, \forall \alpha \in A) \Leftrightarrow x \in \bigcap_{\alpha \in A} (Y \setminus X_\alpha). \end{aligned}$$

Аналогично доказывается второе соотношение. □

Теперь поговорим про связь объединения и пересечения.

**Теорема 1.3.2** *Справедливы следующие соотношения:*

$$Y \cup \bigcap_{\alpha \in A} X_\alpha = \bigcap_{\alpha \in A} (Y \cup X_\alpha), \quad Y \cap \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha = \bigcup_{\alpha \in A} (Y \cap X_\alpha).$$

**Доказательство.** Докажем, например, первое соотношение.

$$\begin{aligned} x \in Y \cup \bigcap_{\alpha \in A} X_\alpha &\Leftrightarrow (x \in Y) \vee \left( x \in \bigcap_{\alpha \in A} X_\alpha \right) \Leftrightarrow (x \in Y) \vee (x \in X_\alpha, \forall \alpha \in A) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x \in Y \cup X_\alpha, \forall \alpha \in A) \Leftrightarrow x \in \bigcap_{\alpha \in A} (Y \cup X_\alpha). \end{aligned}$$

□

## 1.4 Контрольные вопросы и задачи

1. Покажите, что пустое множество содержится в каждом множестве.
2. Проиллюстрируйте декартово произведение двух отрезков, двух прямых, прямой и окружности, прямой и круга.

3. Докажите, что для произвольных множеств  $A, B, C$  выполнено  $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ .
4. Докажите, что для произвольных множеств  $A, B, C$  выполнено  $A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$ .
5. Докажите, что для произвольных множеств  $A, B, C$  выполнено  $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$ .
6. Пусть даны множества  $A, B, C$ . Выразить следующие множества через  $A, B, C$ , используя операции  $\cap, \cup, \setminus$ :
  - Множество элементов, принадлежащих ровно двум из множеств  $A, B$  и  $C$ ;
  - Множество элементов, принадлежащих ровно одному из множеств  $A, B$  и  $C$ ;
  - Множество элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств  $A, B$ , но не принадлежащих  $C$ .
7. Докажите теоремы 1.3.1, 1.3.2.

## 2 ФУНКЦИИ И ОТОБРАЖЕНИЯ

### 2.1 Понятия функции и отображения

Одним из ключевых понятий математики и ее приложений является понятие функции (отображения).

**Определение 2.1.1** Пусть заданы два множества  $X$  и  $Y$ . Говорят, что  $f$  – отображение из  $X$  в  $Y$ , если установлено правило, по которому каждому элементу  $x \in X$  сопоставляется один элемент  $y \in Y$ . При этом пишут:

$$f : X \rightarrow Y, \quad X \xrightarrow{f} Y.$$

Это описание нельзя считать строгим определением понятия отображения, так как оно все еще включает в себя неопределенные понятия «правило» и «сопоставляется». И хотя можно дать строгое определение понятию отображения на основе понятия множества, нам будет удобно считать его первичным.

**Замечание 2.1.1** Если множество  $Y$  числовое, то отображение в него часто называют функцией.

**Определение 2.1.2** Множество  $X$  называют областью определения отображения  $f$  и обозначают  $D(f)$ , а  $x$  – аргументом отображения  $f$  или независимой переменной.

**Определение 2.1.3** Множество  $E(f) \subset Y$ , определяемое, как

$$E(f) = \{y \in Y : \exists x \in X : f(x) = y\},$$

называется областью значений отображения  $f$ , а  $y$  – значением отображения  $f$  на элементе  $x$ , или зависимой переменной.

**Замечание 2.1.2** Как обычно, и как уже сделано выше, значение отображения  $f$  на элементе  $x$  мы будем записывать как  $f(x)$ .

**Замечание 2.1.3** Область значений отображения  $f : X \rightarrow Y$  вовсе не обязана совпадать с множеством  $Y$ , но всегда является его подмножеством. Пусть  $X = \{0, 1\}$ ,  $Y = \{0, 1, 2, 3\}$ ,  $f : X \rightarrow Y$  и  $f(x) = x$ . Тогда  $D(f) = E(f) = \{0, 1\}$ , но  $E(f) \neq Y$ .

**Определение 2.1.4** Пусть  $f : X \rightarrow Y$ . образом множества  $A \subset X$  называется множество  $B \subset Y$ , определяемое, как

$$B = \{y \in Y : f(x) = y, x \in A\},$$

при этом пишут  $B = f(A)$ .

**Пример 2.1.1** Пусть  $A \subset X$ ,  $A = \{0, 1, 5, 8\}$ ,  $f : X \rightarrow Y$  и  $f(x) = 3x$ , тогда  $f(A) = \{0, 3, 15, 24\}$  – образ множества  $A$ .

**Определение 2.1.5** Пусть  $f : X \rightarrow Y$ . Полным прообразом  $B \subset Y$  называется множество  $A \subset X$ , определяемое, как

$$A = \{x \in X : f(x) = y, y \in B\},$$

при этом пишут  $A = f^{-1}(B)$ .

**Пример 2.1.2** Пусть  $f : X \rightarrow Y$ ,  $A \subset X$ ,  $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$  и  $f(x) = x^2$ . Тогда

$$f(A) = \{0, 1, 4\},$$

$$f^{-1}(\{1\}) = \{-1, 1\}, f^{-1}(\{1, 4\}) = \{-2, -1, 1, 2\}.$$

Относительно образов и прообразов множеств при отображении  $f$  справедлива следующая лемма.

**Лемма 2.1.1** Пусть  $f : X \rightarrow Y$ ,  $A, B \subset X$ , тогда:

1.  $(A \subset B) \Rightarrow (f(A) \subset f(B))$ ;
2.  $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ ;
3.  $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ .

Если  $A', B' \subset Y$ , тогда:

1.  $(A' \subset B') \Rightarrow (f^{-1}(A') \subset f^{-1}(B'))$ ;
2.  $f^{-1}(A' \cap B') = f^{-1}(A') \cap f^{-1}(B')$ ;
3.  $f^{-1}(A' \cup B') = f^{-1}(A') \cup f^{-1}(B')$ .

Если  $B' \subset A' \subset Y$ , тогда:

1.  $f^{-1}(A' \setminus B') = f^{-1}(A') \setminus f^{-1}(B')$ ;
2.  $f^{-1}(Y \setminus A') = X \setminus f^{-1}(A')$ .

**Доказательство.** Доказательство леммы остается в качестве упражнения. □

## 2.2 Сюръекция, инъекция и биекция

**Определение 2.2.1** Отображение  $f : X \rightarrow Y$  называется инъекцией, или инъективным, если

$$(x_1 \neq x_2) \Rightarrow (f(x_1) \neq f(x_2)) \quad \forall x_1, x_2 \in X.$$

**Пример 2.2.1** Функция  $f(x) = x^2 : (-\infty, +\infty) \rightarrow (-\infty, +\infty)$  не является инъекцией, так как  $f(-x) = f(x)$ . Если же рассмотреть  $f(x) = x^2 : [0, +\infty) \rightarrow (-\infty, +\infty)$ , то данная функция будет инъекцией.

**Определение 2.2.2** Отображение  $f : X \rightarrow Y$  называется сюръекцией или сюръективным, если  $E(f) = Y$ .

**Пример 2.2.2** Функция  $f(x) = x^2 : (-\infty, +\infty) \rightarrow (-\infty, +\infty)$  не является сюръекцией, так как она не может принимать отрицательные значения. Если же рассмотреть  $f(x) = x^2 : (-\infty, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ , то данная функция будет сюръекцией.

**Определение 2.2.3** *Отображение  $f : X \rightarrow Y$  называется биекцией, или взаимно однозначным соответствием, если  $f$  одновременно как инъекция, так и сюръекция.*

**Пример 2.2.3** *Функция  $f(x) = x^2 : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$  является биекцией.*

**Определение 2.2.4** *Пусть  $f : X \rightarrow Y$  – биекция. Тогда определим отображение  $f^{-1}(y) : Y \rightarrow X$  по правилу:*

$$x = f^{-1}(y) \Leftrightarrow y = f(x).$$

*Это отображение называется обратным к отображению  $f(x)$ .*

**Пример 2.2.4** *Как показано выше, функция  $f(x) = x^2 : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$  является биекцией. Обратное отображение определяется по правилу  $x = \sqrt{y}$ .*

**Теорема 2.2.1** *Пусть  $f : X \rightarrow Y$  – биекция и  $f^{-1}(y)$  – обратное отображение к отображению  $f(x)$ . Тогда  $f(f^{-1}(y)) = y$  и  $f^{-1}(f(x)) = x$ .*

**Доказательство.** *Данная теорема является прямым следствием определений.*  $\square$

Богатейший источник отображений дает следующее определение.

**Определение 2.2.5** *Пусть  $f : X \rightarrow Y$  и  $g : Y \rightarrow Z$ . Определим отображение  $g \circ f : X \rightarrow Z$  согласно правилу*

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)), \quad x \in X.$$

*Это отображение называется композицией отображений  $g$  и  $f$  или сложным отображением.*

На практике довольно часто используется композиция не двух, а большего числа функций. Справедлива следующая лемма.

**Лемма 2.2.1** *Композиция отображений обладает свойством ассоциативности, то есть если  $f : X \rightarrow Y$ ,  $g : Y \rightarrow Z$ ,  $h : Z \rightarrow W$ , то*

$$((f \circ g) \circ h)(z) = (f \circ (g \circ h))(z), \quad z \in Z.$$

**Доказательство.** *С одной стороны,*

$$\forall z \in Z \Rightarrow ((f \circ g) \circ h)(z) = (f \circ g)(h(z)) = f(g(h(z))).$$

*С другой стороны,*

$$\forall z \in Z \Rightarrow (f \circ (g \circ h))(z) = f((g \circ h)(z)) = f(g(h(z))),$$

*что завершает доказательство.*  $\square$

Говоря о функции, часто требуется рассматривать ее график. Ниже приводится формальное определение этого понятия.

**Определение 2.2.6** *Графиком функции  $f : X \rightarrow Y$  называется множество*

$$\Gamma_f = \{(x, y) \in X \times Y : y = f(x)\}.$$

Итак, график функции  $f(x)$  – это множество упорядоченных пар  $(x, y)$ , где  $x$  – элемент области определения, а  $y = f(x)$  – значение функции (отображения)  $f$  на  $x$ .

## 2.3 Контрольные вопросы и задачи

1. Приведите пример биекции между  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  и множеством  $(-\infty, +\infty)$ .
2. Приведите пример биекции между двумя отрезками множества вещественных чисел.
3. Докажите лемму 2.1.1.
4. Покажите, что отображение  $f : X \rightarrow Y$  сюръективно тогда и только тогда, когда  $\forall B' \subset Y$  справедливо  $f(f^{-1}(B')) = B'$ .
5. Покажите, что отображение  $f : X \rightarrow Y$  биективно тогда и только тогда, когда  $\forall A \subset X$  и  $\forall B' \subset Y$  справедливо  $f^{-1}(f(A)) = A$  и  $f(f^{-1}(B')) = B'$ .
6. Докажите эквивалентность следующих утверждений относительно отображения  $f : X \rightarrow Y$ :
  - $f$  инъективно;
  - $\forall A \subset X$  справедливо  $f^{-1}(f(A)) = A$ ;
  - $\forall A, B \subset X$  справедливо  $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ ;
  - $f(A) \cap f(B) = \emptyset \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$ ;
  - Если  $B \subset A \subset X$ , то  $f(A \setminus B) = f(A) \setminus f(B)$ .

## 3 ЧИСЛОВЫЕ МНОЖЕСТВА И ИХ СВОЙСТВА

### 3.1 Система аксиом множества вещественных чисел

В этом пункте дается аксиоматическое построение множества вещественных чисел.



**Определение 3.1.1** Множество  $\mathbb{R}$  называется множеством действительных (вещественных) чисел, а его элементы действительными (вещественными) числами, если справедливы следующие условия, называемые аксиомами вещественных чисел:

#### I Аксиомы сложения.

Определено отображение  $+: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , называемое операцией сложения, сопоставляющее каждой упорядоченной паре  $(x, y)$  из  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  элемент  $x + y \in \mathbb{R}$ , называемый суммой  $x$  и  $y$ , обладающее свойствами:

- (a) Операция  $+$  коммутативна, то есть для любых  $x, y \in \mathbb{R}$

$$x + y = y + x.$$

- (b) Операция  $+$  ассоциативна, то есть для любых  $x, y, z \in \mathbb{R}$

$$(x + y) + z = x + (y + z).$$

- (c) Существует нейтральный элемент  $0 \in \mathbb{R}$  (называемый нулем), такой, что для любого  $x \in \mathbb{R}$

$$x + 0 = x.$$

- (d) Для каждого элемента  $x \in \mathbb{R}$  существует противоположный элемент  $-x$  такой, что

$$x + (-x) = 0.$$

#### II Аксиомы умножения.

Определено отображение  $\cdot: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , называемое операцией умножения, сопоставляющее каждой упорядоченной паре  $(x, y)$  из  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  элемент  $x \cdot y \in \mathbb{R}$ , называемый произведением элементов  $x$  и  $y$ , обладающее свойствами:

- (a) Операция  $\cdot$  коммутативна, то есть для любых  $x, y \in \mathbb{R}$

$$x \cdot y = y \cdot x.$$

- (b) Операция  $\cdot$  ассоциативна, то есть для любых  $x, y, z \in \mathbb{R}$

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z).$$

- (c) Существует нейтральный элемент  $1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  (называемый единицей), такой, что для любого  $x \in \mathbb{R}$

$$x \cdot 1 = x.$$

- (d) Для каждого элемента  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  существует обратный элемент  $x^{-1}$  такой, что

$$x \cdot x^{-1} = 1.$$

### III Связь сложения и умножения.

Умножение дистрибутивно по отношению к сложению, то есть  $\forall x, y, z, \in \mathbb{R}$

$$(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z.$$

### IV Аксиомы порядка.

Между элементами  $\mathbb{R}$  введено отношение  $\leq$ , то есть для элементов  $x, y \in \mathbb{R}$  установлено: справедливо  $x \leq y$ , или нет. При этом выполняются следующие условия:

- (a)  $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow x \leq x$ .
- (b) Если  $x \leq y$  и  $y \leq x$ , то  $x = y$ .
- (c) Если  $x \leq y$  и  $y \leq z$ , то  $x \leq z$ .
- (d) Для любых двух элементов  $x, y \in \mathbb{R}$  либо  $x \leq y$ , либо  $y \leq x$ .

### V Связь сложения и порядка.

Если  $x, y, z \in \mathbb{R}$ , то из  $x \leq y$  следует, что  $x + z \leq y + z$ .

### VI Связь умножения и порядка.

Если  $x, y \in \mathbb{R}$  и  $0 \leq x$ ,  $0 \leq y$ , то  $0 \leq x \cdot y$ .

### VII Аксиома непрерывности (полноты).

Пусть  $X, Y \subset \mathbb{R}$ , причем  $X \neq \emptyset$  и  $Y \neq \emptyset$ . Кроме того, пусть  $\forall x \in X$  и  $\forall y \in Y$  выполняется  $x \leq y$ . Тогда найдется  $c \in \mathbb{R}$  такое, что  $x \leq c \leq y$ .

## 3.2 Следствия из аксиом

Ниже установлены различные свойства вещественных чисел и операций над ними, хорошо известные из школы.

### I Следствия аксиом сложения.

**Лемма 3.2.1** В множестве  $\mathbb{R}$  ноль единственен.

**Доказательство.** Пусть  $0_1$  и  $0_2$  – нули в  $\mathbb{R}$ . Тогда, используя аксиому I(a) и определение нуля, получается

$$0_1 \stackrel{\text{I(c)}}{=} 0_1 + 0_2 \stackrel{\text{I(a)}}{=} 0_2 + 0_1 \stackrel{\text{I(c)}}{=} 0_2.$$

□

**Лемма 3.2.2** В множестве  $\mathbb{R}$  каждый элемент имеет единственный противоположный.

**Доказательство.** Пусть  $x_1$  и  $x_2$  противоположные к  $x \in \mathbb{R}$ . Тогда,

$$x_1 \stackrel{\text{I(c)}}{=} x_1 + 0 \stackrel{\text{I(d)}}{=} x_1 + (x + x_2) \stackrel{\text{I(b)}}{=} (x_1 + x) + x_2 \stackrel{\text{I(d)}}{=} 0 + x_2 \stackrel{\text{I(a)}}{=} x_2 + 0 \stackrel{\text{I(c)}}{=} x_2$$

□

**Лемма 3.2.3** В множестве  $\mathbb{R}$  уравнение  $x + a = b$  имеет единственное решение  $x = b + (-a)$ .

**Доказательство.** Прибавляя к обеим частям равенства  $-a$  (проследите использование аксиом самостоятельно), получается

$$(x + a + (-a) = b + (-a)) \Leftrightarrow (x + 0 = b + (-a)) \Leftrightarrow x = b + (-a).$$

Единственность следует из единственности противоположного элемента.

□

## II Следствия аксиом умножения.

**Лемма 3.2.4** В множестве  $\mathbb{R}$  единица единственна.

**Лемма 3.2.5** В множестве  $\mathbb{R} \setminus 0$  каждый элемент имеет единственный обратный.

**Лемма 3.2.6** В множестве  $\mathbb{R}$  уравнение  $a \cdot x = b$  при  $a \neq 0$  имеет единственное решение  $x = b \cdot a^{-1}$ .

**Доказательство.** Все эти леммы доказываются аналогично леммам предыдущего пункта и их доказательство предлагается в качестве упражнения.

□

III Следствия аксиом связи сложения и умножения.

**Лемма 3.2.7** Для любого  $x \in \mathbb{R}$  выполняется

$$x \cdot 0 = 0.$$

**Доказательство.**

$$\begin{aligned}(x \cdot 0 = x \cdot (0 + 0)) &\Leftrightarrow (x \cdot 0 = x \cdot 0 + x \cdot 0) \Leftrightarrow \\(x \cdot 0 + (-x \cdot 0) &= x \cdot 0 + x \cdot 0 + (-x \cdot 0)) \Leftrightarrow 0 = x \cdot 0\end{aligned}$$

□

**Следствие 3.2.1**  $(x \cdot y = 0) \Leftrightarrow (x = 0) \vee (y = 0)$ .

**Доказательство.** Докажите самостоятельно.

□

**Лемма 3.2.8** Для любого  $x \in \mathbb{R}$  выполняется

$$-x = (-1) \cdot x.$$

**Доказательство.**

$$x + (-1) \cdot x = (1 + (-1)) \cdot x = 0 \cdot x = 0,$$

а значит, в силу единственности противоположного элемента,  $-x = (-1) \cdot x$ . □

**Следствие 3.2.2** Для любого  $x \in \mathbb{R}$  выполняется

$$(-1) \cdot (-x) = x.$$

**Доказательство.** Докажите самостоятельно.

□

**Следствие 3.2.3** Для любого  $x \in \mathbb{R}$  выполняется

$$(-x) \cdot (-x) = x \cdot x.$$

**Доказательство.**  $(-x) \cdot (-x) = (-1) \cdot x \cdot (-x) = x \cdot (-1) \cdot (-x) = x \cdot x$ . □

#### IV Следствия аксиом порядка.

Отношение  $x \leq y$  на практике часто записывают, как  $y \geq x$ . При этом условие, что  $x \leq y$  и  $x \neq y$  записывают, как  $x < y$  или  $y > x$ . Неравенства  $\geq$  и  $\leq$  называют нестрогими, а неравенства  $<$  и  $>$  строгими. Отсюда сразу вытекает нижеуказанное следствие.

**Следствие 3.2.4** *Для любых  $x, y \in \mathbb{R}$  всегда имеет место ровно одно из соотношений:*

$$x < y, \quad x = y, \quad x > y.$$

**Лемма 3.2.9** *Для любых чисел  $x, y, z \in \mathbb{R}$  выполняется*

$$(x < y) \wedge (y \leq z) \Rightarrow (x < z),$$

$$(x \leq y) \wedge (y < z) \Rightarrow (x < z).$$

**Доказательство.** Первое утверждение. Из аксиомы транзитивности IV(c) получаем, что

$$(x < y) \wedge (y \leq z) \Rightarrow (x \leq z).$$

Покажем, что  $x \neq z$ . От противного, если  $x = z$ , то

$$(x < y) \wedge (y \leq z) \Leftrightarrow (z < y) \wedge (y \leq z) \Leftrightarrow$$

$$(z \leq y) \wedge (y \leq z) \wedge (z \neq y) \Leftrightarrow (z = y) \wedge (z \neq y).$$

Второе утверждение доказывается аналогично. □

#### V Следствия аксиом связи порядка со сложением и умножением.

**Лемма 3.2.10** *Для любых чисел  $x, y, z, k \in \mathbb{R}$  справедливо*

$$(x < y) \Rightarrow (x + z) < (y + z),$$

$$(0 < x) \Rightarrow (-x < 0),$$

$$(x \leq y) \wedge (z \leq k) \Rightarrow (x + z) \leq (y + k),$$

$$(x < y) \wedge (z \leq k) \Rightarrow (x + z) < (y + k),$$

$$(0 < x) \wedge (0 < y) \Rightarrow (0 < xy),$$

$$(0 > x) \wedge (0 > y) \Rightarrow (0 < xy),$$

$$(0 > x) \wedge (0 < y) \Rightarrow (0 > xy),$$

$$(x < y) \wedge (z > 0) \Rightarrow (xz < yz),$$

$$(x < y) \wedge (z < 0) \Rightarrow (xz > yz).$$

**Доказательство.** Эти свойства предлагается доказать самостоятельно.  $\square$

**Лемма 3.2.11**  $0 < 1$ .

**Доказательство.** Согласно аксиомам,  $0 \neq 1$ . Предположим, что  $1 < 0$ , тогда

$$(1 < 0) \wedge (1 < 0) \Rightarrow (1 \cdot 1 > 0) \Rightarrow (1 > 0).$$

Так как одновременно не может выполняться  $1 < 0$  и  $1 > 0$ , получается противоречие.  $\square$

**Определение 3.2.1** По традиции числа, которые больше нуля, называются положительными, а которые меньше нуля – отрицательными.

**Замечание 3.2.1** Множество вещественных чисел удобно изображать в виде числовой прямой, а сами числа – точками на этой прямой. Поэтому числа часто еще называют точками.

**Замечание 3.2.2** Следствия аксиомы непрерывности мы получим немного позже (принцип Архимеда, существование иррациональных чисел, теорема Кантора и другие).

### 3.3 Расширение множества вещественных чисел

Часто бывает удобно добавить к множеству  $\mathbb{R}$  два формальных элемента: символы  $+\infty$  и  $-\infty$ . Чтобы дальнейшая работа с этим множеством была корректной, требуется установить правила работы с добавленными элементами.

**Определение 3.3.1** Множество  $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$  называется расширенным множеством вещественных чисел, а символы  $-\infty, +\infty$  – минус и плюс бесконечностями, соответственно.

С введенными элементами можно совершать некоторые операции, а именно

$$x + (+\infty) = (+\infty) + x = +\infty, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$x + (-\infty) = (-\infty) + x = -\infty, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$x \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot x = +\infty, \quad x > 0,$$

$$x \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot x = -\infty, \quad x < 0,$$

$$x \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot x = -\infty, \quad x > 0,$$

$$\begin{aligned}
x \cdot (-\infty) &= (-\infty) \cdot x = +\infty, \quad x < 0, \\
(+\infty) + (+\infty) &= +\infty, \\
(-\infty) + (-\infty) &= -\infty, \\
(+\infty) \cdot (+\infty) &= (-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty, \\
(+\infty) \cdot (-\infty) &= (-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty.
\end{aligned}$$

Кроме того, устанавливается, что

$$-\infty < x < +\infty, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

**Замечание 3.3.1** Если не важен знак бесконечности, то часто пишут  $\infty$  – бесконечность без знака.

Выражениям  $(+\infty) + (-\infty)$ ,  $(+\infty) - (+\infty)$ ,  $(-\infty) - (-\infty)$ ,  $0 \cdot (\pm\infty)$ ,  $(\pm\infty) \cdot 0$  не приписывается никакого значения. Такие выражения называются неопределенностями. Кроме данных неопределенностей, в дальнейшем нам встретятся неопределенности вида  $\frac{0}{0}$ ,  $\frac{\infty}{\infty}$ ,  $1^\infty$ ,  $\infty^0$ ,  $0^0$ . Мы поймем мотивировку как определенных операций, так и неопределенных при изучении теории пределов.

### 3.4 Натуральные числа

Всем известно, что числа вида  $1$ ,  $(1+1)$ ,  $((1+1)+1)$  и так далее обозначают  $1$ ,  $2$ ,  $3$  и так далее соответственно. Продолжение какого-то процесса далеко не всегда однозначно, поэтому слова «и так далее» нуждаются в пояснении.

**Определение 3.4.1** Множество  $X \subset \mathbb{R}$  называется индуктивным, если

$$\forall x \in X \Rightarrow (x + 1) \in X.$$

Оказывается справедливой следующая лемма.

**Лемма 3.4.1** Пересечение  $\bigcap_{\alpha \in A} X_\alpha$  любого семейства  $X_\alpha$ ,  $\alpha \in A$ , индуктивных множеств, если оно не пусто, является индуктивным множеством.

**Доказательство.** Действительно,

$$\begin{aligned}
\left( x \in \bigcap_{\alpha \in A} X_\alpha \right) &\Rightarrow (x \in X_\alpha, \quad \forall \alpha \in A) \Rightarrow \\
((x + 1) \in X_\alpha, \quad \forall \alpha \in A) &\Rightarrow \left( (x + 1) \in \bigcap_{\alpha \in A} X_\alpha \right),
\end{aligned}$$

где переход с первой на вторую строчку справедлив в силу индуктивности всех множеств семейства  $X_\alpha$ .  $\square$

Теперь можно дать определение множеству натуральных чисел.

**Определение 3.4.2** Множеством натуральных чисел называется пересечение всех индуктивных множеств, содержащих число 1. Обозначается множество натуральных чисел, как  $\mathbb{N}$ .

Из этого определения, в частности, следует, что множество натуральных чисел – наименьшее индуктивное множество, содержащее единицу.

### 3.5 Принцип математической индукции

Из определения множества натуральных чисел сразу следует важный принцип, называемый принципом математической индукции. Именно он часто обосновывает слова «и так далее».

**Теорема 3.5.1 (Принцип математической индукции)** Если множество  $X \subset \mathbb{N}$  таково, что  $1 \in X$  и  $\forall x \in X \Rightarrow (x + 1) \in X$ , то  $X = \mathbb{N}$ .

**Доказательство.** Действительно,  $X$  – индуктивное множество. Так как  $X \subset \mathbb{N}$ , а  $\mathbb{N}$  – наименьшее индуктивное множество, то  $X = \mathbb{N}$ .  $\square$

С помощью принципа математической индукции можно доказать, например, что сумма и произведение натуральных чисел есть число натуральное, а также другие известные из школы свойства. Приведем пример.

**Теорема 3.5.2** Сумма натуральных чисел – натуральное число.

**Доказательство.** Пусть  $m, n \in \mathbb{N}$ . Покажем, что  $m + n \in \mathbb{N}$ . Пусть  $X$  – множество таких натуральных чисел  $k$ , что  $m + k \in \mathbb{N}$  при любом  $m \in \mathbb{N}$ . Ясно, что  $1 \in X$ , так как если  $m \in \mathbb{N}$ , то  $(m + 1) \in \mathbb{N}$  в силу индуктивности множества натуральных чисел. Если теперь  $k \in X$ , то есть  $m + k \in \mathbb{N}$ , то и  $(k + 1) \in X$ , так как  $m + (k + 1) = (m + k) + 1 \in \mathbb{N}$ . Согласно принципу индукции заключаем, что  $X = \mathbb{N}$ .  $\square$

Следующий пример показывает, как на практике часто применяется (и оформляется) метод математической индукции.

**Лемма 3.5.1 (Неравенство Бернулли)**

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx, \quad x > -1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

**Доказательство.** База индукции. Пусть  $n = 1$ , тогда:

$$1 + x \geq 1 + x.$$

Пусть при  $n = k$  выполнено

$$(1 + x)^k \geq 1 + kx.$$



Покажем, что при  $n = k + 1$  выполняется

$$(1 + x)^{k+1} \geq 1 + (k + 1)x.$$

Действительно,

$$\begin{aligned} (1 + x)^{k+1} &= (1 + x)(1 + x)^k \geq (1 + x)(1 + kx) = \\ &= 1 + kx + x + kx^2 = 1 + (k + 1) \cdot x + kx^2. \end{aligned}$$

Так как  $k \in \mathbb{N}$ , то  $kx^2 \geq 0$ , а значит:

$$1 + (k + 1)x + kx^2 \geq 1 + (k + 1)x,$$

откуда и следует требуемое. □

## 3.6 Целые, рациональные и иррациональные числа

**Определение 3.6.1** Множеством целых чисел называется объединение множества натуральных чисел, множества чисел, противоположных натуральным, и нуля. Множество целых чисел обозначается, как  $\mathbb{Z}$ .

Как было отмечено, сумма и произведение натуральных чисел есть число натуральное, поэтому сумма и произведение целых чисел есть число целое.

**Определение 3.6.2** Числа вида  $m \cdot n^{-1}$ , где  $m, n \in \mathbb{Z}$  называются рациональными. Рациональные числа обозначаются, как  $\mathbb{Q}$ .

Как известно, число  $m \cdot n^{-1}$  записывают в виде отношения  $\frac{m}{n}$ , которое называется рациональной дробью. Правила действий с рациональными дробями, подробно изученные в школе, сразу вытекают из соответствующих свойств и аксиом вещественных чисел.

**Пример 3.6.1** Доказать, что

$$\frac{m_1}{n_1} \cdot \frac{m_2}{n_2} = \frac{m_1 \cdot m_2}{n_1 \cdot n_2}.$$

Действительно,

$$\frac{m_1}{n_1} \cdot \frac{m_2}{n_2} = (m_1 \cdot n_1^{-1}) \cdot (m_2 \cdot n_2^{-1}) = (m_1 \cdot m_2) \cdot (n_1 \cdot n_2)^{-1} = \frac{m_1 \cdot m_2}{n_1 \cdot n_2}.$$

**Замечание 3.6.1** Множество рациональных чисел удовлетворяет первым шести аксиомам множества вещественных чисел. Однако именно седьмая аксиома, аксиома непрерывности, устанавливает, что кроме рациональных чисел существуют так называемые иррациональные.

**Определение 3.6.3** Действительные числа, не являющиеся рациональными, называются иррациональными и обозначаются  $\mathbb{I}$ .

Ниже показано, что существует положительное действительное число  $s \in \mathbb{R}$ , квадрат которого равен 2, но при этом  $s \notin \mathbb{Q}$ , что доказывает существование иррациональных чисел.

**Лемма 3.6.1**  $\sqrt{2} \in \mathbb{I}$ .

**Доказательство.** Пусть  $X = \{x \in \mathbb{R}, x > 0 : x^2 < 2\}$  и  $Y = \{y \in \mathbb{R}, y > 0 : y^2 > 2\}$ . Тогда  $1 \in X$ ,  $2 \in Y$ , и  $X$ ,  $Y$  – непустые множества. Так как, для  $x > 0$  и  $y > 0$  справедливо

$$(x < y) \Leftrightarrow (x^2 < y^2),$$

то  $\forall x \in X, \forall y \in Y \Rightarrow (x < y)$ . По аксиоме полноты  $\exists s \in \mathbb{R} : \forall x \in X, \forall y \in Y, x \leq s \leq y$ . Достаточно показать, что  $s^2 = 2$ . Если бы было  $s^2 < 2$ , то, например, квадрат числа  $s + \frac{2-s^2}{3s}$ , большего чем  $s$ , был бы меньше 2. Ведь  $1 \in X \Rightarrow 1^2 \leq s^2 < 2$  и  $0 < \Delta = 2 - s^2 \leq 1$ , значит

$$\left(s + \frac{\Delta}{3s}\right)^2 = s^2 + 2 \cdot \frac{\Delta}{3} + \left(\frac{\Delta}{3s}\right)^2 < s^2 + 3 \cdot \frac{\Delta}{3} = s^2 + \Delta = 2.$$

Следовательно,  $\left(s + \frac{\Delta}{3s}\right) \in X$ , что несовместимо с неравенством  $x \leq s$ , верного для любого  $x \in X$ .

Случай  $2 < s^2$  аналогичен, достаточно рассмотреть квадрат числа  $s - \frac{s^2-2}{3s}$ .

Таким образом, остается единственная возможность  $s^2 = 2$ . Осталось показать, что  $s \notin \mathbb{Q}$ . Пусть  $s \in \mathbb{Q}$  и  $\frac{m}{n}$  – несократимое представление  $s$ . Тогда  $m^2 = 2n^2$ , а следовательно  $m^2$ , а значит и  $m$  делятся на 2  $\Rightarrow m = 2k$ , тогда  $2k^2 = n^2$  и по той же причине  $n$  должно делиться на 2, что противоречит несократимости дроби  $\frac{m}{n}$ .  $\square$

## 3.7 Бином Ньютона

**Определение 3.7.1** Факториалом числа  $n \in \mathbb{N}$  называют число, равное

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$$

и обозначают  $n!$ .

Так, например,  $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ ,  $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$ . Для удобства полагают, что  $0! = 1$ .

**Замечание 3.7.1** Полезно заметить, что  $n! = n \cdot (n - 1)!$  при  $n \geq 1$ .

**Определение 3.7.2** Величины

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$$

называют биномиальными коэффициентами.

Ниже приведены некоторые свойства биномиальных коэффициентов.

**Лемма 3.7.1** Справедливы следующие свойства:

1.  $C_n^0 = C_n^n = 1$ .
2.  $C_n^1 = C_n^{n-1} = n$ .
3.  $C_n^k = C_n^{n-k}$ .
4.  $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$ .

**Доказательство.** Все свойства сразу следуют из определения  $C_n^k$ . Ниже доказано последнее.

$$\begin{aligned} C_n^k + C_n^{k+1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} = \\ &= \frac{n!(k+1+n-k)}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!((n+1)-(k+1))!} = C_{n+1}^{k+1}. \end{aligned}$$

Остальные свойства предлагается доказать самостоятельно. □

**Теорема 3.7.1 (Бином Ньютона)** Для  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  справедливо равенство:

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \dots + C_n^k a^{n-k} b^k + \dots + C_n^n b^n.$$

**Доказательство.** Доказательство проводится по индукции.

База индукции выполняется, так как

$$(a+b)^1 = C_1^0 a + C_1^1 b = a + b.$$

Пусть при  $n = m$  выполнено равенство

$$(a+b)^m = C_m^0 a^m + C_m^1 a^{m-1} b + \dots + C_m^k a^{m-k} b^k + \dots + C_m^m b^m.$$

Достаточно показать, что при  $n = m + 1$  справедливо равенство

$$(a + b)^{m+1} = C_{m+1}^0 a^{m+1} + C_{m+1}^1 a^m b + \dots + C_{m+1}^k a^{m+1-k} b^k + \dots + C_{m+1}^{m+1} b^{m+1}.$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} (a + b)^{m+1} &= (a + b)^m (a + b) = \\ &= (C_m^0 a^m + C_m^1 a^{m-1} b + \dots + C_m^k a^{m-k} b^k + \dots + C_m^m b^m)(a + b) = \\ &= C_m^0 a^{m+1} + C_m^1 a^m b + C_m^2 a^{m-1} b^2 + \dots + C_m^k a^{m-k+1} b^k + \dots + C_m^m a b^m + \\ &+ C_m^0 a^m b + C_m^1 a^{m-1} b^2 + \dots + C_m^{k-1} a^{m-k+1} b^k + \dots + C_m^{m-1} a b^m + C_m^m b^{m+1} = \\ &= C_m^0 a^{m+1} + (C_m^1 + C_m^0) a^m b + (C_m^2 + C_m^1) a^{m-1} b^2 + \dots + (C_m^k + C_m^{m-k+1}) a^{m-k+1} b^k + \\ &\quad + \dots + (C_m^m + C_m^{m-1}) a b^m + C_m^m b^{m+1} = \\ &= C_{m+1}^0 a^{m+1} + C_{m+1}^1 a^m b + C_{m+1}^2 a^{m-1} b^2 + \dots + C_{m+1}^k a^{m+1-k} b^k + \dots + C_{m+1}^{m+1} b^{m+1}. \end{aligned}$$

□

### 3.8 Промежутки числовой прямой. Окрестности

**Определение 3.8.1** *Множество*

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$$

называется *отрезком*.

**Определение 3.8.2** *Множество*

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$$

называется *интервалом*.

**Определение 3.8.3** *Множества*

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}, \quad (a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$$

называются *полуинтервалами*.

**Определение 3.8.4** *Множества*

$$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}, \quad (a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$$

и

$$(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}, \quad (-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$$

называются *лучами*.

**Определение 3.8.5** *Окрестностью точки  $x_0 \in \mathbb{R}$  называется произвольный интервал, содержащий  $x_0$ .*

Окрестность точки  $x_0$  обозначается заглавными латинскими буквами, например  $U(x_0), V(x_0)$ .

**Определение 3.8.6** *Эпсилон-окрестностью (или  $\varepsilon$ -окрестностью) точки  $x_0 \in \mathbb{R}$  называется интервал  $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$  при  $\varepsilon > 0$ .*

$\varepsilon$ -окрестность точки  $x_0$  обозначается заглавными латинскими буквами с индексом  $\varepsilon$ , например  $U_\varepsilon(x_0), V_\varepsilon(x_0)$ . Для элементов  $\pm\infty, \infty$  понятия окрестности вводится отдельно.

**Определение 3.8.7** *Окрестностью элемента  $+\infty$  в  $\overline{\mathbb{R}}$  называется произвольное множество вида*

$$U(+\infty) = (a, +\infty].$$

**Определение 3.8.8** *Окрестностью элемента  $-\infty$  в  $\overline{\mathbb{R}}$  называется произвольное множество вида*

$$U(-\infty) = [-\infty, a).$$

**Определение 3.8.9** *Окрестностью элемента  $\infty$  в  $\overline{\mathbb{R}}$  называется произвольное множество вида*

$$U(\infty) = [-\infty, a); (b, +\infty], \quad a < b.$$

Кроме того, вводится понятие  $\varepsilon$ -окрестности ( $\varepsilon > 0$ ).

**Определение 3.8.10**  *$\varepsilon$ -окрестностью элемента  $+\infty$  в  $\overline{\mathbb{R}}$  называется множество*

$$U_\varepsilon(+\infty) = \left(\frac{1}{\varepsilon}, +\infty\right].$$

**Определение 3.8.11**  *$\varepsilon$ -окрестностью элемента  $-\infty$  в  $\overline{\mathbb{R}}$  называется множество вида*

$$U_\varepsilon(-\infty) = \left[-\infty, -\frac{1}{\varepsilon}\right).$$

**Определение 3.8.12**  *$\varepsilon$ -окрестностью элемента  $\infty$  в  $\overline{\mathbb{R}}$  называется множество вида*

$$U_\varepsilon(\infty) = \left[-\infty, -\frac{1}{\varepsilon}\right); \left(\frac{1}{\varepsilon}, +\infty\right].$$

Полезно пояснить, почему для универсальности берется величина  $\frac{1}{\varepsilon}$ . Рассматривая  $x_0 \in \mathbb{R}$ , при уменьшении  $\varepsilon$ , окрестность  $U_\varepsilon(x_0)$  тоже уменьшается. Аналогично, при уменьшении  $\varepsilon$  величина  $\frac{1}{\varepsilon}$  увеличивается, а значит окрестности  $U_\varepsilon(+\infty), U_\varepsilon(-\infty), U_\varepsilon(\infty)$  уменьшаются.

**Определение 3.8.13** *Проколотой окрестностью точки  $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$  называется множество  $U(x_0) \setminus \{x_0\}$ , то есть произвольная окрестность точки  $x_0$  без самой этой точки. Аналогично, проколотой  $\varepsilon$ -окрестностью точки  $x_0$  называется множество  $U_\varepsilon(x_0) \setminus \{x_0\}$ .*

Проколота окрестность и  $\varepsilon$ -окрестность обозначается, как  $\overset{o}{V}(x_0), \overset{o}{U}_\varepsilon(x_0)$ .

**Замечание 3.8.1** *Не вводя специальных определений отметим, что проколотые окрестности элементов  $\pm\infty, \infty$  в  $\overline{\mathbb{R}}$  могут трактоваться, как окрестности (или проколотые окрестности) этих же элементов, но в  $\mathbb{R}$ .*

## 3.9 Модуль вещественного числа

**Определение 3.9.1** *Модулем вещественного числа  $x$  называется число, равное  $x$ , если оно положительно или равно нулю, и равное  $-x$ , если число  $x$  отрицательно, то есть*

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

**Теорема 3.9.1** *Справедливы следующие основные свойства модуля:*

1.  $|x| \geq 0$ , причем  $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ .

2.  $|x| = |-x|$ .

3.  $-|x| \leq x \leq |x|$ .

4.  $|x| = |y| \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x = -y \end{cases}$ .

5.  $|xy| = |x||y|$ .

6.  $\frac{|x|}{|y|} = \left| \frac{x}{y} \right|$ .

7.  $|x + y| \leq |x| + |y|$  (неравенство треугольника).

8.  $|x - y| \geq ||x| - |y||$ .

**Доказательство.** Свойства 1 - 6 сразу следуют из определения и остаются в качестве упражнения.

7. Для доказательства этого свойства достаточно сложить неравенства  $\pm x \leq |x|$  и  $\pm y \leq |y|$ , получим

$$\pm(x + y) \leq |x| + |y|,$$

что и означает требуемое.

8. Для доказательства данного пункта удобно воспользоваться свойством 7.

$$|x| = |x - y + y| \leq |x - y| + |y| \Rightarrow |x - y| \geq |x| - |y|.$$

Поменяв числа  $x$  и  $y$  местами, получится

$$|x - y| \geq |y| - |x|.$$

Эти неравенства и означают, что

$$|a - b| \geq ||a| - |b||.$$

□

### 3.10 Контрольные вопросы и задачи

1. Докажите, что число  $\sqrt{5}$  является иррациональным.
2. Проверьте, что  $\mathbb{Z}$  и  $\mathbb{Q}$  – индуктивные множества.
3. Докажите, что произведение натуральных чисел – натуральное число.
4. Докажите свойства модуля 1 – 6.
5. Проверьте, что рациональные числа  $\mathbb{Q}$  удовлетворяют всем аксиомам действительных чисел, кроме аксиомы полноты.
6. Покажите, что  $C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n = 2^n$ .
7. Удовлетворяет ли множество  $[0, 1]$  аксиомам множества вещественных чисел?

## 4 ОГРАНИЧЕННОСТЬ ЧИСЛОВЫХ МНОЖЕСТВ. СУПРЕМУМ И ИНФИМУМ. ПРИНЦИП АРХИМЕДА

### 4.1 Ограниченность числовых множеств

**Определение 4.1.1** Множество  $X \subset \mathbb{R}$  называется ограниченным сверху, если

$$\exists M \in \mathbb{R} : \forall x \in X \Rightarrow x \leq M.$$

Число  $M$  называется верхней границей для  $X$ .

Множество  $X \subset \mathbb{R}$  называется ограниченным снизу, если

$$\exists m \in \mathbb{R} : \forall x \in X \Rightarrow x \geq m.$$

Число  $m$  называется нижней границей для  $X$ .

**Определение 4.1.2** Множество  $X \subset \mathbb{R}$  называется ограниченным, если

$$\exists M, m \in \mathbb{R} : \forall x \in X \Rightarrow m \leq x \leq M.$$

**Пример 4.1.1** Пусть  $A = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x < 1\}$ . Ясно, что это множество ограничено как сверху, например, числом 1, так и снизу, например, числом 0.

Ниже приведена лемма, которая будет часто использоваться в дальнейшем.

**Лемма 4.1.1** Множество  $X \subset \mathbb{R}$  ограничено тогда и только тогда, когда

$$\exists C > 0, C \in \mathbb{R} : \forall x \in X \Rightarrow -C \leq x \leq C.$$

**Доказательство.** Необходимость. Пусть множество  $X$  ограничено, то есть

$$\exists M, m \in \mathbb{R} : \forall x \in X \Rightarrow m \leq x \leq M.$$

Положив  $C = \max\{|m|, |M|\}$ , имеем

$$\forall x \in X \Rightarrow -C \leq x \leq C.$$

Достаточность очевидна, так как можно положить  $m = -C$ ,  $M = C$ .  $\square$



**Определение 4.1.3** Элемент  $M \in X \subset \mathbb{R}$  называется *максимальным* (наибольшим) элементом множества  $X$ , если

$$\forall x \in X \Rightarrow x \leq M.$$

При этом пишут, что  $M = \max X$ .

Элемент  $m \in X \subset \mathbb{R}$  называется *минимальным* (наименьшим) элементом множества  $X$ , если

$$\forall x \in X \Rightarrow x \geq m.$$

При этом пишут, что  $M = \min X$ .

**Пример 4.1.2** Пусть  $A = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x < 1\}$ . Легко понять, что  $\min A = 0$ . Однако, множество  $A$  не имеет максимального элемента, что легко доказывается, например, от противного.

**Определение 4.1.4** Пусть  $X \subset \mathbb{R}$  ограничено сверху и не пусто. Наименьший элемент множества верхних границ называется *супремумом* (или *точной верхней гранью*) множества  $X$  и обозначается  $\sup X$ . В свою очередь, наибольший элемент множества нижних границ называется *инфимумом* (или *точной нижней гранью*) множества  $X$  и обозначается  $\inf X$ .

**Пример 4.1.3** Пусть  $A = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x < 1\}$ . Множество его верхних границ – множество  $[1, +\infty)$ , а значит  $\sup A = 1$ . Множество нижних границ  $(-\infty, 0]$ , а значит  $\inf A = 0$ .

В отличие от максимума и минимума, супремум и инфимум всегда существуют, что показывают следующие утверждения.

**Теорема 4.1.1 (Принцип точной грани)** Пусть  $X \subset \mathbb{R}$ , не пусто и ограничено сверху (снизу). Тогда существует единственный  $\sup X$  ( $\inf X$ ).

**Доказательство.** Пусть множество  $X$  ограничено сверху. Тогда множество его верхних границ  $B$  не пусто. В силу определения верхней границы,

$$\forall b \in B \quad \forall x \in X \Rightarrow x \leq b.$$

Согласно аксиоме непрерывности

$$\exists c : x \leq c \leq b, \quad \forall x \in X, \quad \forall b \in B.$$

Ясно, что  $c \in B$ . С другой стороны, в силу неравенства  $c \leq b$  для всех  $b \in B$ , получается, что  $c = \min B$ . Тем самым,  $c = \sup X$ . Доказательство единственности остается в качестве упражнения. Случай, когда множество  $X$  ограничено снизу, рассматривается аналогично.  $\square$

**Замечание 4.1.1** Если множество не ограничено сверху (снизу), то полагают  $\sup X = +\infty$  ( $\inf X = -\infty$ ).

**Следствие 4.1.2** У любого непустого множества  $X \subset \mathbb{R}$  существуют супремум и инфимум (может быть, равные  $\pm\infty$ ).

Установим связь между максимумом (минимумом) и супремумом (инфимумом).

**Лемма 4.1.2** Пусть существует  $\max X$ , тогда  $\sup X = \max X$ . Аналогично, если существует  $\min X$ , то  $\inf X = \min X$ .

**Доказательство.** Рассмотрим первое утверждение. Пусть  $M = \max X$ , тогда  $M$  – верхняя граница множества  $X$ . Кроме того,  $M$ , очевидно, наименьшая верхняя граница. Значит,  $M = \sup X$ .  $\square$

В теории часто бывает удобно использовать следующие равносильные определения супремума и инфимума.

**Лемма 4.1.3** Для супремума и инфимума можно дать следующие эквивалентные определения:

$$s = \sup X \Leftrightarrow (\forall x \in X \Rightarrow s \geq x) \wedge (\forall s' < s \exists x \in X : x > s'), \quad (1)$$

$$i = \inf X \Leftrightarrow (\forall x \in X \Rightarrow i \leq x) \wedge (\forall i' > i \exists x \in X : x < i'). \quad (2)$$

**Доказательство.** Рассмотрим (1). Ясно, что супремум удовлетворяет правой части выражения (1). Обратно, утверждение  $(\forall x \in X \Rightarrow s \geq x)$  гарантирует, что  $s$  – верхняя граница для  $X$ , а утверждение  $(\forall s' < s \exists x \in X : x > s')$ , что  $s$  – наименьшая из верхних границ.

Второй пункт доказывается аналогично.  $\square$

## 4.2 Принцип Архимеда

С помощью принципа точной грани можно доказать важную теорему.

**Теорема 4.2.1** Множество целых чисел  $\mathbb{Z}$  не ограничено ни сверху, ни снизу.

**Доказательство.** От противного, пусть множество  $\mathbb{Z}$  ограничено сверху. Тогда, согласно теореме 4.1.1, у множества  $\mathbb{Z}$  существует конечная верхняя грань

$$M = \sup \mathbb{Z} < +\infty.$$

Поскольку  $M - 1 < M$ , то по свойству верхней грани 4.1.3,

$$\exists k \in \mathbb{Z} : M - 1 < k \leq M.$$

Из левого неравенства получаем, что  $M < k + 1$ . Но, во-первых,  $(k + 1) \in \mathbb{Z}$  в силу определения множества  $\mathbb{Z}$ , а во-вторых  $k + 1 > M$ . Это противоречит тому, что  $M = \sup \mathbb{Z}$ , а значит и ограниченности  $\mathbb{Z}$  сверху.

Аналогично доказывается неограниченность снизу.  $\square$

**Следствие 4.2.2** Множество  $\mathbb{N}$  не ограничено сверху.

**Теорема 4.2.3 (Принцип Архимеда)** Пусть  $x \in \mathbb{R}$ ,  $x > 0$ . Для любого  $y \in \mathbb{R}$  существует единственное целое  $k \in \mathbb{Z}$  такое, что

$$(k - 1)x \leq y < kx.$$

**Доказательство.** Пусть  $T = \{l \in \mathbb{Z} : \frac{y}{x} < l\}$ . Это множество не пусто, так как множество  $\mathbb{Z}$  не ограничено сверху. Кроме того,  $T$  ограничено снизу. Значит, по принципу точной грани у него есть  $m = \inf T \in \mathbb{R}$ . По свойству нижней грани,  $\exists k \in \mathbb{Z} : m \leq k < m + 1$ . Тогда  $k = \min T$ . Значит,

$$k - 1 \leq \frac{y}{x} < k$$

и в силу положительности  $x$  мы получаем требуемое.  $\square$

**Следствие 4.2.4** Для любого  $\varepsilon > 0$  существует натуральное число  $n$  такое, что  $0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$ .

**Доказательство.** Достаточно положить в принципе Архимеда  $y = 1$ ,  $x = \varepsilon$ .  $\square$

**Следствие 4.2.5** Пусть  $x \in \mathbb{R}$ . Если  $\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow 0 \leq x < \varepsilon$ , то  $x = 0$ .

**Доказательство.** Пусть  $x > 0$ . Тогда, по предыдущему следствию, найдется  $n \in \mathbb{N}$  такое, что  $\frac{1}{n} < x$ . Но тогда положив  $\varepsilon = \frac{1}{n}$  получим, что  $x > \varepsilon$ , что противоречит условию.  $\square$

**Следствие 4.2.6** Для любого числа  $x \in \mathbb{R}$  существует единственное  $k \in \mathbb{Z}$  такое, что  $k \leq x < k + 1$ .

**Доказательство.** Это сразу следует из принципа Архимеда, если положить в нем  $x = 1$ .  $\square$

**Определение 4.2.1** Указанное число  $k$  называется целой частью числа  $x$  и обозначается  $[x]$ . Величина  $\{x\} = x - [x]$  называется дробной частью числа  $x$ .

**Лемма 4.2.1 (О плотности множества рациональных чисел)** Пусть  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$ . Тогда существует  $q \in \mathbb{Q}$  :  $a < q < b$ .

**Доказательство.** Так как  $(b - a) > 0$ , то существует  $n \in \mathbb{N}$  такое, что  $\frac{1}{n} < (b - a)$ . Положим  $q = \frac{[na]+1}{n} \in \mathbb{Q}$ , тогда

$$q \leq \frac{na+1}{n} = a + \frac{1}{n} < a + (b - a) = b.$$

С другой стороны,

$$q > \frac{na+1-1}{n} = a,$$

что и завершает доказательство. □

**Лемма 4.2.2 (О плотности множества иррациональных чисел)** Пусть  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$ . Тогда существует  $i \in \mathbb{I}$  :  $a < i < b$ .

**Доказательство.** Было доказано, что  $\sqrt{2} \in \mathbb{I}$ . Для чисел  $a - \sqrt{2} < b - \sqrt{2}$ , по только что доказанному, существует  $q \in \mathbb{Q}$  такое, что  $a - \sqrt{2} < q < b - \sqrt{2}$  или  $a < q + \sqrt{2} < b$ . Ясно, что число  $q + \sqrt{2}$  иррационально. □

### 4.3 Контрольные вопросы и задачи

1. Покажите, что каждое индуктивное множество не ограничено.
2. Постройте графики функций  $f = [x]$ ,  $f = \{x\}$ .
3. Существует ли какое-либо иррациональное число, которое больше любого натурального? А меньше любого целого?
4. Изобразите графически характеристические свойства супремума и инфимума.
5. Докажите, что число  $q + i$ , где  $q \in \mathbb{Q}$ ,  $i \in \mathbb{I}$  иррационально.

## 5 ТЕОРЕМА КАНТОРА. ЛЕММА БОРЕЛЯ-ЛЕБЕГА. ЛЕММА О ПРЕДЕЛЬНОЙ ТОЧКЕ. МОЩНОСТЬ

### 5.1 Теорема Кантора

**Определение 5.1.1** Пусть  $I_n = [a_n, b_n]$ ,  $a_n \leq b_n$ . Говорят, что система  $I_n$  – система вложенных отрезков, если

$$I_1 \supset I_2 \supset \dots \supset I_n \supset \dots$$

**Теорема 5.1.1 (Кантора)** Система вложенных отрезков имеет непустое пересечение, т.е.

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} I_i \neq \emptyset.$$

Кроме того, если  $\forall \varepsilon > 0$  найдется отрезок, длина которого меньше  $\varepsilon$ , то пересечение будет состоять ровно из одного элемента, т.е.

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} I_i = \{a\}.$$

**Доказательство.** Пусть

$$X = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}, \quad Y = \{b_1, b_2, \dots, b_n, \dots\}.$$

Эти множества не пусты и  $\forall i, k \in \mathbb{N} \Rightarrow a_i \leq b_k$ , то есть левый конец любого отрезка системы не больше, чем правый конец любого отрезка системы. Значит, по аксиоме непрерывности,

$$\exists c : a_i \leq c \leq b_k \quad \forall i, k \in \mathbb{N}.$$

В частности,

$$a_i \leq c \leq b_i \quad \forall i \in \mathbb{N},$$

а значит  $\forall i \in \mathbb{N} \Rightarrow c \in I_i$ , то есть

$$c \in \bigcap_{i=1}^{\infty} I_i \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{\infty} I_i \neq \emptyset.$$

Осталось доказать вторую часть утверждения. От противного, пусть

$$c_1, c_2 \in \bigcap_{i=1}^{\infty} I_i, \quad c_1 \neq c_2.$$

Предположив, что  $c_1 < c_2$ , получается, что  $a_n \leq c_1 < c_2 \leq b_n$  или  $0 < c_2 - c_1 \leq b_n - a_n < \varepsilon$ . Согласно следствию 4.2.5 выходит, что  $c_2 - c_1 = 0$ . Противоречие.  $\square$

**Замечание 5.1.1** *Условие, что рассматриваются отрезки, важно. Например, для интервалов данная теорема не верна. Пусть  $U_n = (0, \frac{1}{n})$ . Очевидно, что*

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n = \emptyset.$$

*Действительно, пусть  $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$ . Тогда, согласно следствию 4.2.4, существует  $n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} < x$ , а значит  $x \notin U_n$ . Противоречие.*

## 5.2 Лемма Бореля-Лебега

**Определение 5.2.1** *Говорят, что система интервалов  $U_\alpha$ ,  $\alpha \in A$ , покрывает отрезок  $[a, b]$ , если*

$$\forall x \in [a, b] \exists \alpha_0 : x \in U_{\alpha_0}.$$

**Лемма 5.2.1 (Бореля - Лебега)** *Из любого покрытия отрезка интервалами можно выделить конечное покрытие.*

**Доказательство.** От противного. Пусть существует покрытие, из которого нельзя выделить конечное покрытие отрезка  $I_0 = [a, b]$ . Разделим  $I_0$  пополам. Тогда хотя бы одна из полученных частей не допускает конечного покрытия. Назовем ее  $I_1$ . Теперь разделим  $I_1$  пополам, и снова хотя бы одна из двух частей не допускает конечного покрытия. Назовем ее  $I_2$ . Продолжая это процесс дальше, получим систему вложенных отрезков

$$I_0 \supset I_1 \supset \dots \supset I_n \supset \dots,$$

причем длина  $|I_n|$  отрезка  $I_n$  равна

$$|I_n| = \frac{1}{2} \cdot |I_{n-1}| = \frac{b-a}{2^n}$$

По теореме Кантора,

$$\exists c \in \bigcap_{i=0}^{\infty} I_i,$$

значит существует интервал  $(\alpha, \beta)$  из покрытия такой, что  $c \in (\alpha, \beta)$ . Положим  $\varphi = \min(c - \alpha, \beta - c)$ . Покажем, что в системе существуют отрезки сколь угодно малой длины. Так как

$$2^n = (1 + 1)^n = 1 + n + \dots > n \Rightarrow \frac{1}{2^n} < \frac{1}{n},$$

то согласно следствию 4.2.4 для любого  $\varepsilon > 0$  найдется номер  $n$ , что

$$\frac{b - a}{2^n} < \varepsilon.$$

Тем самым, так как в системе существуют отрезки длины меньше, чем  $\varphi$ , то интервал  $(\alpha, \beta)$  покрывает их. Это противоречит построению.  $\square$

**Замечание 5.2.1** Рассмотрение отрезка существенно. Например, если взять интервал  $U = (0, 1)$ , то интервалы  $U_n = (0, 1 - \frac{1}{n})$  образуют покрытие  $U$ , из которого нельзя выделить конечного покрытия. Детальная проверка оставляется читателю.

### 5.3 Лемма о предельной точке

**Определение 5.3.1** Точка  $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$  называется предельной точкой множества  $E$ , если для любой окрестности  $U(x_0)$  точки  $x_0$  множество  $U(x_0) \cap E$  бесконечно.

**Замечание 5.3.1** Множество предельных точек множества  $E$  будем обозначать  $E'$ .

**Пример 5.3.1** Пусть  $E = (0, 1]$ . Ясно, что  $E' = [0, 1]$ .

**Пример 5.3.2** Пусть  $E = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\}$ . Легко установить, что данное множество имеет лишь одну предельную точку 0, то есть  $E' = \{0\}$ .

Примеры выше показывают, что предельная точка для множества  $E$  может как принадлежать множеству  $E$ , так и не принадлежать.

**Определение 5.3.2** Точка  $x_0 \in E$ , не являющаяся предельной для множества  $E$ , называется изолированной для  $E$ .

**Пример 5.3.3** Все точки множества  $E$  примера 5.3.2 являются изолированными.

**Лемма 5.3.1 (О предельной точке)** Любое бесконечное ограниченное подмножество  $X$  множества действительных чисел  $\mathbb{R}$  имеет хотя бы одну предельную точку.

**Доказательство.** От противного. Пусть множество предельных точек  $X'$  пусто. Так как  $X$  ограничено, то найдется отрезок  $[a, b]$  такой, что  $X \subset [a, b]$ . Достаточно показать, что хотя бы одна точка отрезка является предельной для  $X$ . От противного, пусть

$$\forall x \in [a, b] \exists U(x) : U(x) \cap E \text{ либо конечно, либо пусто.}$$

Данная система окрестностей  $U(x)$ ,  $x \in [a, b]$  образует открытое покрытие отрезка  $[a, b]$ . По лемме Бореля-Лебега из этой системы можно выделить конечное покрытие  $U(x_1), \dots, U(x_n)$ . Но тогда

$$E \subset [a, b] \subset \bigcup_{i=1}^n U(x_i),$$

где последнее объединение с одной стороны содержит  $E$ , с другой стороны

$$\left( \bigcup_{i=1}^n U(x_i) \right) \cap E$$

не более чем конечно. Это противоречит бесконечности множества  $E$ .  $\square$   
Легко доказать следующее замечание.

**Замечание 5.3.2** Если бесконечное подмножество  $X$  множества действительных чисел  $\mathbb{R}$  не ограничено, то оно имеет предельную точку в  $\overline{\mathbb{R}}$ .

## 5.4 Немного о замкнутых множествах

Ниже приведены некоторые факты, касающиеся замкнутых множеств. Более детально они будут изучены в разделе функций многих переменных.

**Определение 5.4.1** Говорят, что множество  $E \subset \mathbb{R}$  замкнуто, если оно содержит все свои предельные точки, то есть  $E' \subset E$ .

В дальнейшем будет дано другое, эквивалентное определение замкнутому множеству.

**Пример 5.4.1** Отрезок  $[a, b]$  является замкнутым множеством. Интервал  $(a, b)$  или полуинтервал  $[a, b)$  замкнутыми множествами не являются. Пустое множество  $\emptyset$  и все множество  $\mathbb{R}$  замкнуты в  $\mathbb{R}$ .



**Пример 5.4.2** Любое конечное множество является, очевидно, замкнутым, так как множество его предельных точек пусто.

**Лемма 5.4.1** Любое непустое ограниченное сверху (снизу) замкнутое множество  $E \subset \mathbb{R}$  имеет максимальный (минимальный) элемент.

**Доказательство.** Пусть  $E$  замкнуто и ограничено сверху. По принципу верхней грани существует  $M = \sup E$ . Достаточно показать, что  $M \in E$ . От противного, пусть  $M \notin E$  и  $U(M) = (\alpha, \beta)$  – окрестность точки  $M$ . По определению супремума, если  $\varepsilon_1 = M - \alpha$ , то

$$\exists x_1 \in E : M - \varepsilon_1 < x_1 \leq M.$$

Так как  $M \notin E$ , то на самом деле

$$M - \varepsilon_1 < x_1 < M.$$

Пусть  $\varepsilon_2 = M - x_1$ , тогда аналогично

$$\exists x_2 \in E : M - \varepsilon_2 < x_2 < M, \quad x_1 < x_2.$$

Продолжая процесс, получается, что пересечение  $U(M) \cap E$  бесконечно (оно содержит бесконечное множество  $\{x_1, x_2, \dots\}$ ), то есть  $M$  – предельная для  $E$ . Но, в силу замкнутости  $E$ ,  $M \in E$ . Противоречие.  $\square$

**Следствие 5.4.1** Любое конечное множество имеет максимальный и минимальный элементы.

**Доказательство.** Ограниченность конечного множества легко доказывается с помощью метода математической индукции, а далее утверждение следует из доказанной выше леммы.  $\square$

**Следствие 5.4.2** Во всяком интервале содержится бесконечное число как рациональных, так и иррациональных чисел.

**Доказательство.** Пусть в интервале  $(a, b)$  лишь конечное число рациональных чисел. Пусть  $x$  – наименьшее из них, тогда в интервале  $(a, x)$  нет рациональных чисел, что противоречит лемме 4.2.1.

Аналогично доказывается утверждение об иррациональных числах.  $\square$

## 5.5 Мощность множества

Часто бывает важным выяснить, «одинаково» ли количество элементов в двух разных множествах. В случае конечных множеств этот вопрос может быть решен весьма просто: достаточно пересчитать элементы каждого множества. Проблема заключается в том, что описанный подход не применим к бесконечным множествам.

С другой стороны, если два конечных множества  $A$  и  $B$  имеют одинаковое количество элементов, то между элементами этих множеств можно установить биекцию  $\varphi : A \rightarrow B$ . Такой подход уже прекрасно применим и к бесконечным множествам.

**Определение 5.5.1** *Говорят, что множества  $A$  и  $B$  равномощны (эквивалентны), если существует биекция  $\varphi : A \rightarrow B$ .*

Иными словами, множества называются равномощными, если между их элементами можно установить взаимно однозначное соответствие.

**Пример 5.5.1** *Противоположные стороны прямоугольника равномощны: достаточно точкам одной стороны сопоставить противоположные точки другой стороны.*

**Пример 5.5.2** *Гипотенуза прямоугольного треугольника равномощна каждому из его катетов (хотя они и имеют разные длины). Взаимно однозначное соответствие – это проекция гипотенузы на катет.*

**Пример 5.5.3** *Множество натуральных чисел  $\mathbb{N}$  и множество целых чисел  $\mathbb{Z}$  равномощны. Биекция может быть установлена, например, следующим образом:*

$$1 \rightarrow 0, \quad 2 \rightarrow 1, \quad 3 \rightarrow -1, \dots, \quad 2k \rightarrow k, \quad 2k + 1 \rightarrow -k, \dots$$

или

$$\varphi(n) = \begin{cases} \frac{n}{2}, & n \text{ чётно} \\ -\frac{n-1}{2}, & n \text{ нечётно} \end{cases}.$$

**Пример 5.5.4** *Пусть центр окружности радиуса  $R > 0$  имеет координаты  $(0, R)$ . Тогда часть окружности без точки  $N(0, 2R)$  равномощна координатной оси  $Ox$  или, что то же самое, множеству вещественных чисел  $\mathbb{R}$ . Для установления взаимно однозначного соответствия, достаточно точке  $A$  на оставшейся части окружности сопоставить точку  $A'$  оси  $Ox$ , получающуюся пересечением луча  $NA$  и  $Ox$  (стереографическая проекция). Попробуйте написать аналитическое выражение для описанного соответствия самостоятельно.*

Последний пример также показывает, что бесконечное ограниченное множество может быть равномощно неограниченному множеству.

Оказывается, введенное отношение равномощности является отношением эквивалентности.

**Определение 5.5.2** *Отношение  $\sim$  между элементами некоторого множества называется отношением эквивалентности, если оно обладает следующими свойствами:*

1. *Рефлексивность:  $A \sim A$ ;*
2. *Симметричность: если  $A \sim B$ , то и  $B \sim A$ ;*
3. *Транзитивность: если  $A \sim B$  и  $B \sim C$ , то  $A \sim C$ .*

Примеры отношений эквивалентности, известные из школы, таковы: отношение равенства на множестве треугольников, отношение подобия на множестве треугольников, отношение параллельности на множестве прямых и многие другие.

**Лемма 5.5.1** *Равномощность множеств является отношением эквивалентности.*

**Доказательство.** В доказательстве нуждается только третье свойство. Пусть  $\varphi_{AB} : A \rightarrow B$ ,  $\varphi_{BC} : B \rightarrow C$  – соответствующие биекции. Тогда

$$\varphi_{AC} = \varphi_{BC} \circ \varphi_{AB}$$

– биекция  $A$  на  $C$ , что легко проверяется по определению.  $\square$

Из курса алгебры хорошо известно, что отношение эквивалентности разбивает все множество на классы непересекающихся подмножеств. А значит, корректно ввести следующее определение.

**Определение 5.5.3** *Класс эквивалентности, к которому принадлежит множество  $A$ , называется мощностью  $A$ , кардиналом или кардинальным числом множества  $A$  и обозначается  $|A|$  или  $\text{card } A$ .*

**Замечание 5.5.1** *Обычно мощность  $n$ -элементного множества  $A$  (или, что то же самое, соответствующего класса) обозначают числом  $n$  и пишут*

$$|A| = \text{card } A = n.$$

**Определение 5.5.4** *Множество  $A$  называется счетным, если оно равномощно множеству натуральных чисел, то есть  $|A| = |\mathbb{N}|$ .*

**Замечание 5.5.2** Как было установлено ранее, множество целых чисел  $\mathbb{Z}$  счетно.

Выясним некоторые свойства счетных множеств.

**Теорема 5.5.1** *Всякое бесконечное множество имеет счетное подмножество.*

**Доказательство.** Пусть  $A$  – бесконечное множество, тогда в нем есть элемент  $a_1$ . Множество  $A \setminus \{a_1\}$  тоже бесконечно, значит в нем есть элемент  $a_2$ . Множество  $A \setminus \{a_1, a_2\}$  бесконечно, а значит в нем есть элемент  $a_3$ . Продолжая такой процесс и далее (он не оборвется в силу бесконечности  $A$ ), получим бесконечное множество

$$B = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}.$$

Понятно, что искомая биекция  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow B$  может быть построена, например, по правилу  $\varphi(n) = a_n$ .  $\square$

**Теорема 5.5.2** *Всякое бесконечное подмножество счетного множества счетно.*

**Доказательство.** Достаточно проверить, что каждое бесконечное подмножество  $A$  множества натуральных чисел  $\mathbb{N}$  счетно. Так как  $A$  – подмножество множества натуральных чисел, то в нем существует минимальный элемент (оно замкнуто и ограничено снизу). Его мы обозначим  $a_1$  и сопоставим числу 1. Далее, в множестве  $A \setminus \{a_1\}$  аналогично имеется минимальный элемент  $a_2$ , ему мы сопоставим число 2. Так как  $A$  бесконечно, то, по принципу индукции, мы построим инъекцию  $f : \mathbb{N} \rightarrow A$  по правилу  $f(n) = a_n$ . Осталось доказать, что  $f$  – сюръекция, то есть  $f(\mathbb{N}) = A$ .

Пусть  $a \in A$ . Множество  $\{n \in \mathbb{N} : n \leq a\}$  конечно, а значит тем более конечно его подмножество  $\{n \in E : n \leq a\}$ . Пусть  $k$  – число элементов в последнем множестве. Тогда, по построению,  $a_k = a$ .  $\square$

Из последних двух теорем вытекает, что счетные множества – самые «бедные» бесконечные множества: их подмножества или счетны (если бесконечны), или конечны.

**Определение 5.5.5** *Множества, мощность которых либо конечна, либо счетна, называются не более чем счетными.*

**Теорема 5.5.3** *Пусть элементы множества  $A$  расположены в виде бесконечной в обоих направлениях матрицы*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}.$$

*Тогда  $A$  счетно.*

**Доказательство.** Искомая биекция  $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  может быть задана, например, так:

$$f(m, n) = m + \frac{(m + n - 2)(m + n - 1)}{2}.$$

Данная нумерация имеет простой наглядный смысл: мы нумеруем элементы таблицы «по диагоналям», где сумма  $(m + n)$  постоянна, постепенно переходя от одной диагонали к другой. Например  $a_{11} \leftrightarrow 1$ ,  $a_{12} \leftrightarrow 2$ ,  $a_{21} \leftrightarrow 3$  и так далее.  $\square$

**Следствие 5.5.4** Множество  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  счетно.

**Следствие 5.5.5** Не более чем счетное объединение не более чем счетных множеств не более чем счетно.

**Доказательство.** Пусть рассматривается множество

$$B = \bigcup_{i=1}^n A_i \text{ или } B = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i,$$

где все  $A_i$  не более чем счетны. Запишем в первую строку матрицы элементы множества  $A_1$ , во вторую – элементы множества  $A_2 \setminus A_1$ , и так далее: если задано множество  $A_k$ , то элементы множества  $A_k \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1} A_i$  запишем в  $k$ -ую строку матрицы. Тогда все элементы множества будут записаны в матрице, хотя некоторые клетки матрицы могут оказаться пустыми. Значит,  $B$  равно-мощно некоторому подмножеству счетного множества, а значит оно не более чем счетно.  $\square$

**Теорема 5.5.6** Множество рациональных чисел  $\mathbb{Q}$  счетно.

**Доказательство.** Понятно, что количество рациональных чисел бесконечно. Рассмотрим множества

$$Q_+ = \{x \in \mathbb{Q} : x > 0\}, \quad Q_- = \{x \in \mathbb{Q} : x < 0\}.$$

Ясно, что  $|Q_+| = |Q_-|$ . Пусть

$$Q_q = \left\{ \frac{1}{q}, \frac{2}{q}, \dots, \frac{n}{q}, \dots \right\},$$

тогда  $Q_q$  не более чем счетно и

$$Q_+ = \bigcup_{q=1}^{\infty} Q_q.$$

Согласно предыдущему следствию,  $Q_+$  не более чем счетно. Аналогично,  $Q_-$  не более чем счетно. Но

$$\mathbb{Q} = Q_+ \cup Q_- \cup \{0\},$$

и по тому же следствию  $\mathbb{Q}$  – не более чем счетно. Так как оно бесконечно, то оно счетно.  $\square$

До сих пор у нас не было ни одного примера несчетных множеств.

**Теорема 5.5.7 (Кантора)** *Отрезок  $[0, 1]$  несчетен.*

**Доказательство.** От противного. Пусть  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$  – произвольная нумерация чисел отрезка  $I_0 = [0, 1]$ . Выберем отрезок  $I_1 \subset I_0$ , что  $a_1 \notin I_1$ . Далее, выберем отрезок  $I_2 \subset I_1$ , что  $a_2 \notin I_2$ . Продолжая такой процесс, получим систему вложенных отрезков

$$I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \dots \supset I_n \supset \dots,$$

которая, по теореме Кантора, имеет непустое пересечение. Пусть

$$c \in \bigcap_{n=0}^{\infty} I_n,$$

тогда  $c \neq a_i \ \forall i \in \mathbb{N}$ . Действительно, предполагая, что  $c = a_k$ , получаем противоречие с построением:  $a_k \notin I_k$ , а значит

$$a_k \notin \bigcap_{n=0}^{\infty} I_n.$$

Противоречие.  $\square$

**Определение 5.5.6** *Мощность множеств, равномощных отрезку  $[0, 1]$ , называется континуумом.*

**Следствие 5.5.8** *Произвольный отрезок, интервал, полуинтервал или луч имеют мощность континуум. Множество вещественных чисел  $\mathbb{R}$  имеет мощность континуум.*

**Доказательство.** Докажем, например, что отрезок  $[0, 1]$  и полуинтервал  $(0, 1]$  равномощны. Биекцию  $\varphi : (0, 1] \rightarrow [0, 1]$  построим так:

$$\varphi(1) = \frac{1}{2}, \ \varphi\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2^2}, \ \dots, \ \varphi\left(\frac{1}{2^k}\right) = \frac{1}{2^{k+1}}, \ \dots,$$

остальные точки переводятся в себя. Остальные детали оставляем читателю.

Для доказательства того, что  $\mathbb{R}$  континуально можно рассмотреть такую биекцию:

$$\operatorname{tg} x : \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}.$$

□

Долгое время была актуальна так называемая гипотеза континуума: любое бесконечное подмножество  $\mathbb{R}$  либо континуально, либо счетно. Этот вопрос был окончательно решен в 1963 году О. Коэном. Было доказано, что гипотеза континуума не может быть ни доказана, ни опровергнута в рамках принятой аксиоматики теории множеств. Ситуация вполне аналогична независимости пятого постулата Евклида от остальных аксиом геометрии.

## 5.6 Контрольные вопросы и задачи

1. Покажите, что из системы отрезков, покрывающей отрезок, не всегда можно выделить конечную систему, покрывающую этот отрезок.
2. Покажите, что из системы отрезков, покрывающих интервал, не всегда можно выделить конечную систему, покрывающую этот интервал.
3. Покажите, что в множестве  $\mathbb{Q}$  ни теорема Кантора, ни лемма о предельной точке, ни лемма Бореля-Лебега не верны.
4. Покажите, что любое вещественное число является предельной точкой множества рациональных чисел.

## 6 ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

### 6.1 Понятие предела последовательности

**Определение 6.1.1** *Функция  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ , областью определения которой является множество натуральных чисел, называется последовательностью.*

Обычно последовательности обозначают маленькими латинскими буквами, например  $x(n)$ ,  $y(n)$ , причем чаще всего аргумент  $n$  пишется снизу, то есть  $x_n$ ,  $y_n$ .

**Определение 6.1.2** ( $\varepsilon - n$  определение предела последовательности) *Число  $A$  называется пределом последовательности  $x_n$ , если для любого положительного числа  $\varepsilon$  существует натуральное число  $n_0$ , зависящее от*

$\varepsilon$  такое, что какое бы ни взять натуральное число  $n$ , большее  $n_0$ , будет выполняться неравенство

$$|x_n - A| < \varepsilon.$$

При этом пишут, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$ ,  $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A$  или  $x_n \longrightarrow A$ .

Ниже приведена короткая запись данного определения, которая обычно и будет использоваться в дальнейшем:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n > n_0 \Rightarrow |x_n - A| < \varepsilon.$$

**Замечание 6.1.1** Геометрически определение предела последовательности означает (см. рисунок 1), что какую бы полосу шириной  $2\varepsilon$  ни взять, найдется номер  $n_0$ , что все члены последовательности с номерами, большими  $n_0$ , лежат в этой полосе. Ясно, что при уменьшении  $\varepsilon$ , уменьшается ширина полосы и номер  $n_0$ , вообще говоря, увеличивается.

Легко заметить, что это же определение, используя понятие  $\varepsilon$ -окрестности, можно переписать в виде:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n > n_0 \Rightarrow x_n \in U_\varepsilon(A).$$

**Определение 6.1.3 (Предел последовательности через окрестности)**  
Число  $A$  называется пределом последовательности  $x_n$ , если

$$\forall U(A) \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n > n_0 \Rightarrow x_n \in U(A).$$

Оказывается, что справедлива следующая лемма.

**Лемма 6.1.1** *Определения 6.1.2 и 6.1.3 эквивалентны.*

**Доказательство.** Сначала будет доказано, что если  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$  в смысле определения 6.1.2, то  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$  и в смысле определения 6.1.3. Пусть  $U(A) = (\alpha, \beta)$  – произвольная окрестность точки  $A$ . Положив  $\varepsilon = \min(A - \alpha, \beta - A)$  оказывается, что  $U_\varepsilon(A) \subset U(A)$ . Согласно определению 6.1.2, по выбранному  $\varepsilon$

$$\exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n > n_0 \Rightarrow x_n \in U_\varepsilon(A) \subset U(A),$$

то есть  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$  в смысле определения 6.1.3.

Доказательство, что из определения 6.1.3 следует определение 6.1.2, моментально следует из того, что  $\varepsilon$ -окрестность является частным случаем окрестности.  $\square$



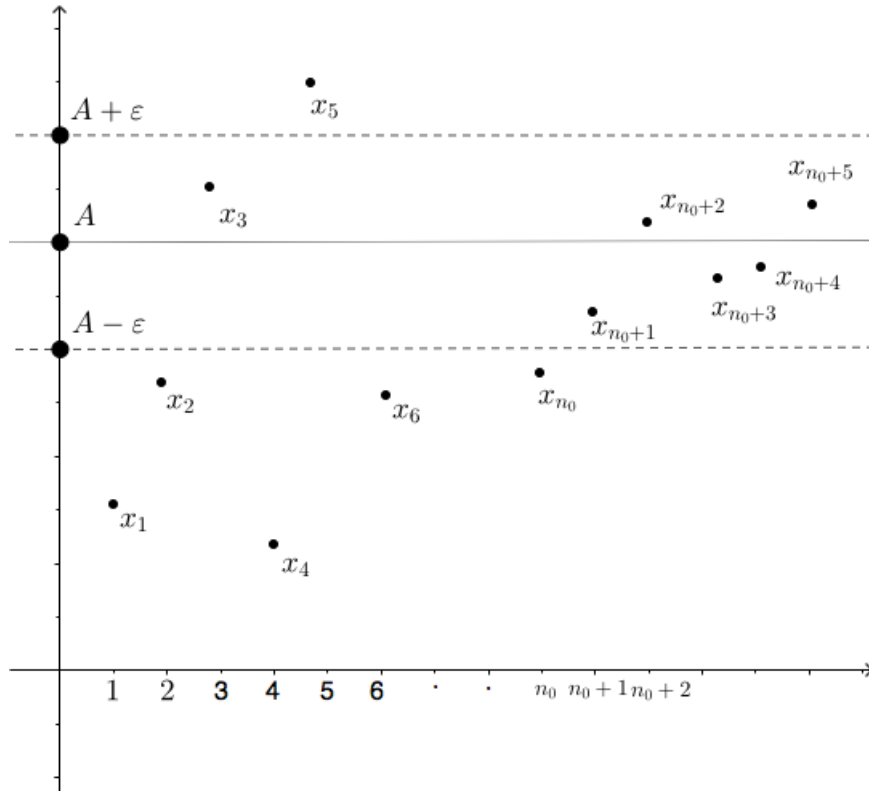


Рис. 1: Предел последовательности

**Пример 6.1.1** Доказать по определению, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Пусть  $\varepsilon > 0$ . Нужно найти такое натуральное число  $n_0$ , что при всех натуральных  $n > n_0$  будет выполняться

$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \varepsilon,$$

то есть  $\frac{1}{n} < \varepsilon$ . Если положить  $n_0 = \left[ \frac{1}{\varepsilon} \right]$ , то при  $n > n_0$  выполняется  $n > \frac{1}{\varepsilon}$  и  $\frac{1}{n} < \varepsilon$ . В силу произвольности числа  $\varepsilon$  получено, что число 0 является пределом последовательности  $x_n = \frac{1}{n}$ .

**Пример 6.1.2** Доказать по определению, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 2n}{2n^2 + 4} = \frac{3}{2}.$$

Пусть  $\varepsilon > 0$ . Справедлива цепочка преобразований

$$\left| \frac{3n^2 + 2n}{2n^2 + 4} - \frac{3}{2} \right| = \left| \frac{4n - 12}{2(2n^2 + 4)} \right|.$$

Можно считать, что  $n > 3$ , тогда

$$\left| \frac{4n - 12}{2(2n^2 + 4)} \right| < \left| \frac{4n}{4n^2} \right| = \frac{1}{n}.$$

Положив  $\frac{1}{n} < \varepsilon$  получается, что при  $n > n_0 = \max\left(3, \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]\right)$  будет

$$\left| \frac{3n^2 + 2n}{2n^2 + 4} - \frac{3}{2} \right| < \varepsilon,$$

что и доказывает утверждение.

**Пример 6.1.3** Доказать, что последовательность  $x_n = (-1)^n$  не имеет предела. Для этого достаточно выписать отрицание того факта, что число  $A$  является пределом последовательности:

$$\exists \varepsilon_0 > 0 : \forall n_0 \in \mathbb{N} \exists n > n_0 : |x_n - A| > \varepsilon_0.$$

Пусть  $\varepsilon_0 = 1$  и  $n_0 \in \mathbb{N}$ . Если  $A < 0$ , то достаточно положить  $n = 2n_0$ , если  $A \geq 0$ , то  $n = 2n_0 + 1$ . Тогда для любого  $n_0 \in \mathbb{N}$  получается

$$|x_n - A| = |(-1)^n - A| \geq 1,$$

то есть никакое число  $A$  пределом последовательности не является.

**Определение 6.1.4** Если последовательность имеет конечный предел, то говорят, что она сходится. Иначе говорят, что она расходится.

Определение предела последовательности дополняется следующими важными случаями.

**Определение 6.1.5** Говорят, что последовательность  $x_n$  стремится к плюс бесконечности и пишут  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ , если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n > n_0 \Rightarrow x_n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

**Определение 6.1.6** Говорят, что последовательность  $x_n$  стремится к минус бесконечности и пишут  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$ , если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n > n_0 \Rightarrow x_n < -\frac{1}{\varepsilon}.$$

**Определение 6.1.7** Говорят, что последовательность  $x_n$  стремится к бесконечности и пишут  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ , если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n > n_0 \Rightarrow |x_n| > \frac{1}{\varepsilon}.$$

**Замечание 6.1.2** Данные определения можно переписать через  $\varepsilon$ -окрестности и через окрестности, как сделано в определениях 6.1.2 и 6.1.3. Лемма 6.1.1 сохраняется. Читателю предлагается самостоятельно заполнить данный пробел по аналогии со сделанным выше.

**Замечание 6.1.3** Про последовательности, имеющие пределом  $+\infty$ ,  $-\infty$  или  $\infty$  все равно говорят, что они расходятся.

**Пример 6.1.4** Доказать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 - 5}{2n + 4} = +\infty.$$

Справедлива цепочка преобразований

$$\left| \frac{3n^2 - 5}{2n + 4} \right| > \left| \frac{3n^2 - 5n}{2n + 4n} \right| = \left| \frac{3n - 5}{6} \right| > \frac{1}{\varepsilon}.$$

При  $n > 1$  дробь положительна и

$$\frac{3n - 5}{6} \geq \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow n > \frac{\frac{6}{\varepsilon} + 5}{3}.$$

Положив

$$n_0 = \left\lceil \frac{\frac{6}{\varepsilon} + 5}{3} \right\rceil,$$

получается, что при  $n > \max(n_0, 1)$  выполняется

$$\left| \frac{3n - 5}{6} \right| > \frac{1}{\varepsilon},$$

а значит и

$$\left| \frac{3n^2 - 5}{2n + 4} \right| > \frac{1}{\varepsilon}.$$

**Замечание 6.1.4** Запись  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$  будет всегда снабжена уточнением: либо  $A \in \mathbb{R}$ , либо  $A \in \overline{\mathbb{R}}$ .

**Замечание 6.1.5** В определении предела в дальнейшем для краткости часто опускается тот факт, что  $n_0 = n_0(\varepsilon)$ , а так же то, что  $n_0 \in \mathbb{N}$ .

Ниже сформулированы свойства последовательностей, имеющих предел.

**Лемма 6.1.2 (Свойства сходящихся последовательностей)** Пусть  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$ , тогда:

1. При  $A \in \overline{\mathbb{R}}$  предел единственен.
2. При  $A \in \mathbb{R}$  последовательность  $x_n$  ограничена.
3. В любой окрестности  $A \in \overline{\mathbb{R}}$  содержатся все элементы последовательности  $x_n$ , за исключением не более чем конечного числа.

**Доказательство.** 1. От противного, пусть  $A_1$  и  $A_2$  – пределы последовательности  $x_n$ , причем  $A_1 \neq A_2$ . Пусть  $U(A_1), U(A_2)$  – окрестности точек  $A_1$  и  $A_2$  такие, что

$$U(A_1) \cap U(A_2) = \emptyset.$$

По определению предела, для окрестности  $U(A_1)$

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n > n_0 \Rightarrow x_n \in U(A_1),$$

а для окрестности  $U(A_2)$

$$\exists n_1 \in \mathbb{N} : \forall n > n_1 \Rightarrow x_n \in U(A_2).$$

Пусть  $n_2 = \max(n_0, n_1)$ , тогда

$$\forall n > n_2 \Rightarrow (x_n \in U(A_1)) \wedge (x_n \in U(A_2)) \Rightarrow x_n \in U(A_1) \cap U(A_2),$$

что невозможно, так как пересечение пусто.

2. Пусть  $\varepsilon = 1$ , тогда

$$\exists n_0 : \forall n > n_0 \Rightarrow |x_n - A| < 1 \Leftrightarrow (A - 1) < x_n < (A + 1)$$

и все элементы последовательности, начиная с  $n_0 + 1$ , ограничены по модулю числом

$$\max(|A + 1|, |A - 1|).$$

До  $n_0 + 1$  имеется ровно  $n_0$  членов последовательности, тогда положив

$$C = \max(|x_0|, |x_1|, \dots, |x_{n_0}|, |A + 1|, |A - 1|),$$

получается, что

$$|x_n| \leq C,$$

т. е. последовательность  $x_n$  ограничена.

3. Пусть  $U(A)$  – произвольная окрестность точки  $A$ . Согласно определению предела,

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n > n_0 \Rightarrow x_n \in U(A),$$

а значит вне окрестности  $U(A)$  содержится не более  $n_0$  членов.

□

## 6.2 Арифметические свойства пределов

Ниже сформулирована и доказана теорема об арифметических операциях над сходящимися последовательностями.

**Теорема 6.2.1 (Арифметические свойства пределов)** Пусть

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = B, A, B \in \mathbb{R}, \text{ тогда}$$

1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = A + B.$
2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) = A \cdot B.$
3.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{x_n}{y_n} \right) = \frac{A}{B}, B \neq 0, y_n \neq 0.$

**Доказательство.** 1. Пусть  $\varepsilon > 0$ . Так как  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$ , то

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n > n_0 \Rightarrow |x_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Так как  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = B$ , то

$$\exists n_1 \in \mathbb{N} : \forall n > n_1 \Rightarrow |y_n - B| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда, используя неравенство треугольника, при  $n > n_2 = \max(n_0, n_1)$

$$|x_n + y_n - (A + B)| = |(x_n - A) + (y_n - B)| \leq |x_n - A| + |y_n - B| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

2. Пусть  $\varepsilon > 0$ . Так как  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = B$ , то по второму пункту леммы 6.1.2

$$\exists C > 0 : |y_n| \leq C.$$

Так как  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$ , то

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n > n_0 \Rightarrow |x_n - A| < \frac{\varepsilon}{2C}.$$

Так как  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = B$ , то

$$\exists n_1 \in \mathbb{N} : \forall n > n_1 \Rightarrow |y_n - B| < \frac{\varepsilon}{2(|A| + 1)}.$$

Тогда, используя неравенство треугольника, при  $n > n_2 = \max(n_0, n_1)$

$$\begin{aligned} |x_n y_n - AB| &= |x_n y_n + A y_n - A y_n - AB| \leq |x_n y_n - A y_n| + |A y_n - AB| = \\ &= |y_n| \cdot |x_n - A| + |A| \cdot |y_n - B| \leq C \cdot \frac{\varepsilon}{2C} + \frac{|A|\varepsilon}{2(|A| + 1)} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

3. Достаточно показать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{y_n} = \frac{1}{B},$$

так как тогда, по доказанному в пункте 2,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{y_n}.$$

Так как  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = B$ ,  $B \neq 0$ , то

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n > n_0 \Rightarrow |y_n - B| < \frac{|B|}{2},$$

откуда

$$B - \frac{|B|}{2} < y_n < B + \frac{|B|}{2}.$$

Если положить  $C = \min \left( \left| B - \frac{|B|}{2} \right|, \left| B + \frac{|B|}{2} \right| \right)$ , то

$$|y_n| \geq C \Rightarrow 0 < \frac{1}{|y_n|} \leq \frac{1}{C}.$$

Пусть  $\varepsilon > 0$ , тогда

$$\exists n_1 \in \mathbb{N} : \forall n > n_1 \Rightarrow |y_n - B| < \varepsilon C B,$$

а значит при  $n > \max(n_0, n_1)$

$$\left| \frac{1}{y_n} - \frac{1}{B} \right| = \left| \frac{B - y_n}{B y_n} \right| \leq \frac{|B - y_n|}{C B} < \varepsilon.$$

□

Пример ниже иллюстрирует, как с помощью данной теоремы можно раскрывать некоторые неопределенности.

**Пример 6.2.1** Вычислить предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 5n + 4}{2n^2 + n + 1}.$$

Вынося в числителе и знаменателе старшие степени за скобку, получается

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 5n + 4}{2n^2 + n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \left(3 + \frac{5}{n} + \frac{4}{n^2}\right)}{n^2 \left(2 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{5}{n} + \frac{4}{n^2}}{2 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}.$$

Пределы последовательностей

$$\frac{5}{n}, \frac{4}{n^2}, \frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}$$

равны нулю, что легко показать по определению предела, значит предел числителя равен 3, а предел знаменателя равен 2. Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 5n + 4}{2n^2 + n + 1} = \frac{3}{2}.$$

На самом деле, справедлива более общая теорема, чем теорема 6.2.1.

**Теорема 6.2.2** Пусть  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = B$ ,  $A, B \in \overline{\mathbb{R}}$ , тогда если определена соответствующая операция (сложения, умножения или деления) в  $\overline{\mathbb{R}}$ , то:

1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = A + B$ .
2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) = A \cdot B$ .
3.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \frac{A}{B}$ ,  $B \neq 0$ ,  $y_n \neq 0$ .

**Доказательство.** Доказательство предлагается в качестве упражнения.  $\square$

## 6.3 Предельный переход в неравенствах

**Теорема 6.3.1** Пусть  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = B$ ,  $A < B$ ,  $A, B \in \overline{\mathbb{R}}$ . Тогда

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n > n_0 \Rightarrow x_n < y_n.$$

**Доказательство.** Пусть  $A, B \in \mathbb{R}$  (другие случаи остаются в качестве упражнения). Пусть  $\varepsilon = \frac{B-A}{2}$ , тогда так как  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$ , то

$$\exists n_0 : \forall n > n_0 \Rightarrow |x_n - A| < \frac{B-A}{2} \Rightarrow x_n < A + \frac{B-A}{2} = \frac{A+B}{2}.$$

Так как  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = B$ , то

$$\exists n_1 : \forall n > n_1 \Rightarrow |y_n - B| < \frac{B-A}{2} \Rightarrow y_n > B - \frac{B-A}{2} = \frac{A+B}{2}.$$

Значит, при  $n > n_2 = \max(n_0, n_1)$  выполняется

$$x_n < \frac{A+B}{2} < y_n,$$

откуда и следует требуемое. □

**Следствие 6.3.2 (Предельный переход в неравенствах)** Пусть  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = B$ ,  $A, B \in \mathbb{R}$ .

1. Если  $x_n > y_n$  начиная с какого-либо номера  $n_0$ , то  $A \geq B$ .
2. Если  $x_n \geq y_n$  начиная с какого-либо номера  $n_0$ , то  $A \geq B$ .

**Доказательство.** 1. От противного, пусть  $A < B$ . Согласно теореме 6.3.1  $\exists n_0 : \forall n > n_0 \Rightarrow x_n < y_n$ . Это противоречит условию.

Второй пункт доказывается аналогично. □

**Замечание 6.3.1** Важно отметить, что в 1 пункте следствия 6.3.2 нельзя написать строгое неравенство  $A > B$ . Например, для последовательностей  $x_n = \frac{1}{n}$  и  $y_n = 0$  выполняется неравенство  $x_n > y_n \forall n \in \mathbb{N}$ , однако  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$ .

## 6.4 Теорема о сжатой переменной

**Теорема 6.4.1 (О сжатой переменной)** Пусть  $\forall n \in \mathbb{N}$  выполняется  $x_n \leq z_n \leq y_n$ . Пусть, кроме того,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = A$ ,  $A \in \mathbb{R}$ , тогда  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = A$ .

**Доказательство.** Пусть  $A \in \mathbb{R}$ . Пусть  $\varepsilon > 0$ , тогда

$$\exists n_0 : \forall n > n_0 \Rightarrow |x_n - A| < \varepsilon \Leftrightarrow A - \varepsilon < x_n < A + \varepsilon,$$



$$\exists n_1 : \forall n > n_1 \Rightarrow |y_n - A| < \varepsilon \Leftrightarrow A - \varepsilon < y_n < A + \varepsilon.$$

Тогда при  $n > n_2 = \max(n_0, n_1)$  выполняется

$$A - \varepsilon < x_n \leq z_n \leq y_n < A + \varepsilon \Leftrightarrow |z_n - A| < \varepsilon.$$

□

## 6.5 Теорема Вейерштрасса

**Определение 6.5.1** Говорят, что последовательность  $x_n$  возрастает, если

$$\forall n_1, n_2 \in \mathbb{N} : n_1 > n_2 \Rightarrow x_{n_1} > x_{n_2}.$$

**Определение 6.5.2** Говорят, что последовательность  $x_n$  не убывает, если

$$\forall n_1, n_2 \in \mathbb{N} : n_1 > n_2 \Rightarrow x_{n_1} \geq x_{n_2}.$$

**Определение 6.5.3** Говорят, что последовательность  $x_n$  убывает, если

$$\forall n_1, n_2 \in \mathbb{N} : n_1 > n_2 \Rightarrow x_{n_1} < x_{n_2}.$$

**Определение 6.5.4** Говорят, что последовательность  $x_n$  не возрастает, если

$$\forall n_1, n_2 \in \mathbb{N} : n_1 > n_2 \Rightarrow x_{n_1} \leq x_{n_2}.$$

**Определение 6.5.5** Про возрастающую (не убывающую, убывающую, не возрастающую) последовательность также говорят, что она монотонна.

**Теорема 6.5.1 (Вейерштрасса)** Неубывающая (невозрастающая) последовательность  $x_n$  сходится тогда и только тогда, когда она ограничена сверху (снизу).

**Доказательство.** Пусть последовательность не убывает.

Необходимость следует из того факта, что сходящаяся последовательность ограничена (лемма 6.1.2).

Достаточность. Так как  $x_n$  ограничена сверху, то существует  $A = \sup x_n < +\infty$ . Пусть  $\varepsilon > 0$ . По свойству супремума (лемма 4.1.3),

$$\exists n_0 : A - \varepsilon < x_{n_0} \leq A.$$

Так как последовательность  $x_n$  не убывает, то

$$\forall n > n_0 \Rightarrow A - \varepsilon < x_{n_0} \leq x_n \leq A < A + \varepsilon \Rightarrow A - \varepsilon < x_n < A + \varepsilon,$$

что и означает, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$ .

□

Теорема Вейерштрасса может быть дополнена следующим образом.

**Лемма 6.5.1** Если последовательность не убывает и не ограничена сверху, то ее предел равен  $+\infty$ . Если последовательность не возрастает и не ограничена снизу, то ее предел равен  $-\infty$ .

**Доказательство.** Так как последовательность не ограничена сверху, то по  $\varepsilon > 0$  найдется  $n_0$  такой, что

$$x_{n_0} > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Так как последовательность не убывает, то при  $n > n_0$  аналогично выполнено

$$x_n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Тем самым установлено, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ . □

## 6.6 Второй замечательный предел и число $e$

**Теорема 6.6.1 (Второй замечательный предел)** Существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

**Доказательство.** Достаточно показать, что последовательность

$$y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

убывает. Действительно, используя неравенство Бернулли (лемма 3.5.1) при  $n \geq 2$ :

$$\begin{aligned} \frac{y_{n-1}}{y_n} &= \frac{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}} = \frac{\left(\frac{n}{n-1}\right)^n}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}} = \frac{n}{n+1} \cdot \left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n = \\ &= \frac{n}{n+1} \cdot \left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^n > \frac{n}{n+1} \cdot \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n \geq \frac{n}{n+1} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1. \end{aligned}$$

Поскольку члены последовательности положительны и последовательность убывает при  $n \geq 2$ , то по теореме Вейерштрасса 6.5.1 существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-1} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Последний предел существует по доказанному выше, тем самым существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

□

**Определение 6.6.1** Рассмотренный выше предел называют вторым замечательным пределом, а его значение называют числом  $e$ , то есть

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Ниже предложено еще одно доказательство теоремы 6.6.1.

**Доказательство.** Используя формулу бинома Ньютона,

$$\begin{aligned} x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \frac{1}{n^2} + \dots + \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{k!} \frac{1}{n^k} + \dots \\ &+ \frac{n!}{n!} \frac{1}{n^n} = 2 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \dots + \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) + \dots \\ &+ \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right). \end{aligned}$$

С увеличением  $n$  число положительных слагаемых в правой части увеличивается. Кроме того, при увеличении  $n$  скобки вида  $\left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right)$  и т.д. увеличиваются, а значит,  $x_{n+1} > x_n$ , т.е. последовательность, возрастает.

Осталось доказать, что последовательность ограничена сверху. Для этого достаточно заменить каждую скобку справа на 1, тем самым:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}.$$

Усилив неравенство, заменив факториалы в знаменателе степенью числа 2, получается

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Выражение справа представляет из себя сумму геометрической прогрессии, тем самым

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)}{1 - \frac{1}{2}} = 2 + 1 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3.$$

Значит, по теореме Вейерштрасса 6.5.1 последовательность имеет предел. □

**Замечание 6.6.1** Из последнего доказательства хорошо видно, что  $2 < e < 3$ .

## 6.7 Сравнение скорости роста функций

При вычислении пределов часто бывают полезны следующие соотношения.

**Теорема 6.7.1** Справедливы равенства:

1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0, \quad a > 0.$
2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{a^n} = 0, \quad a > 1, \quad k \in \mathbb{N}.$
3.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1.$
4.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1, \quad a > 0.$

**Доказательство.** 1. Последовательность  $x_n$  может быть переписана в виде

$$x_n = \frac{a^n}{n!} = \frac{a^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \frac{a}{n} = x_{n-1} \cdot \frac{a}{n}. \quad (3)$$

Так как  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{n} = 0$ , то

$$\exists n_0 : \forall n > n_0 \Rightarrow \frac{a}{n} < 1,$$

то есть при  $n > n_0$  выполняется  $x_n < x_{n-1}$ , а значит последовательность убывает. Кроме того,  $x_n \geq 0$ . По теореме Вейерштрасса 6.5.1,  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$ .

Переходя к пределу в равенстве (3), получается

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{n} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n-1},$$

откуда

$$A = 0 \cdot A = 0 \Rightarrow A = 0.$$

2. Докажите самостоятельно аналогично п.1.

3. Пусть  $\varepsilon > 0$ . По доказанному в п.2 (при  $k = 1$ )

$$\exists n_0 : \forall n > n_0 \Rightarrow 1 < n < (1 + \varepsilon)^n,$$

откуда

$$1 < \sqrt[n]{n} < 1 + \varepsilon \Leftrightarrow 0 < \sqrt[n]{n} - 1 < \varepsilon,$$

что и доказывает утверждение.

4. Пусть сначала  $a \geq 1$ . Пусть  $\varepsilon > 0$ , тогда

$$\exists n_0 : \forall n > n_0 \Rightarrow 1 \leq a \leq (1 + \varepsilon)^n,$$

откуда

$$1 < \sqrt[n]{a} < 1 + \varepsilon \Leftrightarrow 0 < \sqrt[n]{a} - 1 < \varepsilon,$$

что и доказывает утверждение.

Если  $0 < a < 1$ , то  $\frac{1}{a} > 1$  и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{\frac{1}{a}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a}}} = 1.$$

□

**Замечание 6.7.1** Отметим пока без доказательства, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_a^\alpha n}{n^s} = 0, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad s > 0.$$

## 6.8 Частичные пределы

**Определение 6.8.1** Пусть дана последовательность  $x_n$  и возрастающая последовательность  $n_1 < n_2 < n_3 < \dots < n_k < \dots$  натуральных чисел. Последовательность  $y_k = x_{n_k}$  называется подпоследовательностью последовательности  $x_n$ .

**Определение 6.8.2** Множеством частичных пределов последовательности  $x_n$  называется множество пределов всевозможных сходящихся подпоследовательностей (возможно к  $\pm\infty$ ).

**Пример 6.8.1** Пусть  $x_n = (-1)^n$ . Множество частичных пределов данной последовательности – двухэлементное множество  $\{-1, 1\}$ .

**Пример 6.8.2** Пусть  $x_n = n^{(-1)^n}$ . Множество частичных пределов данной последовательности – двухэлементное множество  $\{0, +\infty\}$ .

**Теорема 6.8.1 (Больцано-Вейерштрасса)** Из любой ограниченной последовательности  $x_n$  можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

**Доказательство.** Пусть множество значений последовательности  $x_n$  конечно. Тогда существует хотя бы одно значение  $x$ , которое повторяется бесконечное число раз, то есть существуют натуральные числа  $n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$ , что  $x_{n_k} = x$ . Данная последовательность постоянна, а значит сходится.

Если множество значений бесконечно, то по лемме о предельной точке существует хотя бы одна предельная точка  $x$ . Так как  $x$  – предельная, то можно выбрать  $n_1$  так, что  $|x_{n_1} - x| < 1$ . Далее по индукции, если уже выбрано  $n_k > n_{k-1}$  так, что  $|x_{n_k} - x| < \frac{1}{k}$ , то выбирается  $n_{k+1} > n_k$  так, что  $|x_{n_{k+1}} - x| < \frac{1}{k+1}$  (иначе бы  $\frac{1}{k+1}$ -окрестность точки  $x$  содержала бы лишь конечное число членов последовательности  $x_n$ ). Так как  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} = 0$ , то  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x$ .  $\square$

Теорема Больцано-Вейерштрасса допускает следующее дополнение.

**Лемма 6.8.1** *Если последовательность  $x_n$  не ограничена сверху (снизу), то из нее можно выделить сходящуюся к  $+\infty$  ( $-\infty$ ) подпоследовательность.*

**Доказательство.** Пусть последовательность не ограничена сверху. Найдется номер  $n_1$  такой, что  $x_{n_1} > 1$ . Далее, найдется номер  $n_2 > n_1$  такой, что  $x_{n_2} > 2$  (иначе последовательность  $x_n$  была бы ограничена сверху числом  $\max(x_1, \dots, x_{n_1}, 2)$ ). Данный процесс продолжается, на шаге с номером  $k$  можно найти  $n_k > n_{k-1}$ , что  $x_{n_k} > k$ . Тем самым,  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = +\infty$ .  $\square$

Из двух утверждений, доказанных выше, моментально вытекает следующее следствие.

**Следствие 6.8.2** *Множество частичных пределов последовательности  $x_n$  в  $\overline{\mathbb{R}}$  не пусто.*

**Замечание 6.8.1** *Из доказательства теоремы Больцано-Вейерштрасса видно, что если точка  $x$  – предельная точка множества значений последовательности  $x_n$ , то можно выбрать подпоследовательность попарно различных элементов последовательности  $x_n$ , не равных  $x$ , сходящуюся к  $x$ .*

Имет место следующая важная теорема.

**Теорема 6.8.3** *Множество частичных пределов последовательности  $x_n$  замкнуто.*

**Доказательство.** Пусть  $E$  – множество частичных пределов последовательности  $x_n$  и  $x$  – предельная точка множества  $E$ . Пусть  $U(x) = (\alpha, \beta)$  – окрестность точки  $x$  и  $\varepsilon = \min(x - \alpha, \beta - x)$ , тогда  $U_\varepsilon(x) \subset U(x)$  и

$$\exists a \in E : |x - a| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Так как  $a \in E$ , то, согласно замечанию 6.8.1 существует подпоследовательность попарно различных чисел, что  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = a$ . Значит,

$$\exists k_0 : \forall k > k_0 \Rightarrow |x_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Но тогда

$$|x - x_{n_k}| < |x - a| + |a - x_{n_k}| = \varepsilon,$$

то есть  $\varepsilon$ -окрестность точки  $a$  содержит все члены последовательности  $x_{n_k}$  с номерами, большими  $n_{k_0}$ , причем равенство нулю выражения  $|x - x_{n_k}|$  возможно не более чем при одном  $k$ . Тем самым показано, что  $x$  – предельная точка последовательности  $x_n$ , а значит, согласно замечанию 6.8.1,  $x \in E$ .  $\square$

**Определение 6.8.3** Пусть  $E$  – множество частичных пределов последовательности  $x_n$ . Тогда  $\sup E$  называется верхним пределом последовательности  $x_n$  и обозначается  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$ . В свою очередь,  $\inf E$  называется нижним пределом последовательности  $x_n$  и обозначается  $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$ .

**Пример 6.8.3** Пусть  $x_n = (-1)^n$ . Тогда  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$ ,  $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = -1$ .

**Пример 6.8.4** Пусть последовательность  $x_n$  задана следующим образом:  $\{1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$ . Множество частичных пределов такой последовательности совпадает с множеством натуральных чисел  $\mathbb{N}$ .

**Лемма 6.8.2** Верхний (нижний) предел последовательности  $x_n$  является наибольшим (наименьшим) ее частичным пределом.

**Доказательство.** Пусть  $x_n$  ограничена. Согласно теореме Больцано-Вейерштрасса, множество частичных пределов  $E$  не пусто. Согласно лемме 5.4.1, существуют  $\max E$  и  $\min E$ .

Если последовательность не ограничена сверху, то по лемме 6.8.1 существует подпоследовательность, сходящаяся к  $+\infty$ . Значит,  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ . Аналогично рассматривается случай неограниченности снизу.  $\square$

**Следствие 6.8.4** Последовательность имеет предел (может быть, равный  $\pm\infty$ ) тогда и только тогда, когда  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$ .

**Доказательство.** Пусть последовательность имеет предел. Тогда любая ее подпоследовательность имеет тот же самый предел (докажите это), а значит

множество частичных пределов состоит из ровно одного элемента.

Обратно, пусть  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = A$ . Предположим, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \neq A$ , то есть

$$\exists \varepsilon_0 : \forall n_0 \exists n > n_0 \Rightarrow |x_n - A| \geq \varepsilon_0,$$

откуда либо  $x_n \geq A + \varepsilon_0$ , либо  $x_n \leq A - \varepsilon_0$ . Построенная таким образом последовательность  $x_n$  является подпоследовательностью последовательности  $x_n$ , у которой либо верхний предел больше, чем  $A$ , либо меньший меньше, чем  $A$ , что противоречит условию.  $\square$

## 6.9 Критерий Коши

**Определение 6.9.1** Последовательность  $x_n$  называется фундаментальной (или сходящейся в себе), если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n > n_0, \forall p \in \mathbb{N} \Rightarrow |x_{n+p} - x_n| < \varepsilon.$$

**Теорема 6.9.1 (Критерий Коши)** Последовательность  $x_n$  сходится тогда и только тогда, когда она фундаментальна.

**Доказательство.**

Необходимость. Пусть  $\varepsilon > 0$ , тогда

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n > n_0 \Rightarrow |x_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Пусть  $p \in \mathbb{N}$ , тогда  $n + p > n_0$  и

$$|x_{n+p} - x_n| = |(x_{n+p} - A) + (A - x_n)| \leq |x_{n+p} - A| + |A - x_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

то есть  $x_n$  — фундаментальная последовательность.

Достаточность. Пусть  $x_n$  — фундаментальная последовательность,  $\varepsilon = 1$ , тогда

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n > n_0, \forall p \in \mathbb{N} \Rightarrow |x_{n+p} - x_n| < 1.$$

В частности, при  $n = n_0 + 1$

$$-1 + x_{n_0+1} < x_{n_0+p+1} < 1 + x_{n_0+1},$$

откуда члены последовательности  $x_n$  при  $n > n_0 + 1$  ограничены числом

$$\max(|-1 + x_{n_0+1}|, |1 + x_{n_0+1}|).$$

Тогда положив

$$C = \max(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_{n_0+1}|, |-1 + x_{n_0+1}|, |1 + x_{n_0+1}|)$$



получается, что

$$|x_n| \leq C,$$

то есть последовательность ограничена.

По теореме Больцано – Вейерштрасса из последовательности  $x_n$  можно выделить сходящуюся подпоследовательность, то есть  $\exists x_{n_k} : x_{n_k} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} A$ . Докажем, что  $x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} A$ .

Пусть  $\varepsilon > 0$ , тогда, в силу фундаментальности  $x_n$ ,

$$\exists n_0 : \forall n > n_0, \forall p \in \mathbb{N} \Rightarrow |x_{n+p} - x_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Так как  $x_{n_k} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} A$ , то

$$\exists k_0 : \forall k > k_0 \Rightarrow |x_{n_k} - A| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Пусть  $k_1 > k_0$  таково, что  $n_{k_1} > n_0$ , тогда при  $n > n_0$  имеем

$$|x_n - A| = |(x_n - x_{n_{k_1}}) + (x_{n_{k_1}} - A)| \leq |x_n - x_{n_{k_1}}| + |x_{n_{k_1}} - A| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

**Пример 6.9.1** Важную роль в математическом анализе играет последовательность  $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$ . Оказывается, что она не имеет конечного предела. Согласно отрицанию критерия Коши:

$$\exists \varepsilon_0 > 0 : \forall n_0 \in \mathbb{N} \exists n > n_0, p \in \mathbb{N} : |x_{n+p} - x_n| \geq \varepsilon_0.$$

Пусть  $n_0 \in \mathbb{N}$ ,  $n > n_0$ ,  $p = n$ , тогда

$$|x_{2n} - x_n| = \left| \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n} \right| > \left| \frac{1}{2n} \cdot n \right| = \frac{1}{2}.$$

Это значит, что для  $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$  выполнено отрицание критерия Коши. Значит, последовательность предела не имеет.

Можно заметить, что данная последовательность монотонна и имеет предел в  $\overline{\mathbb{R}}$ , равный  $+\infty$ .

## 6.10 Контрольные вопросы и задачи

1. Приведите пример последовательности, имеющей ровно одну предельную точку, ровно две предельные точки, ровно пять предельных точек. Сколько частичных пределов имеет такая последовательность?

2. Может ли последовательность быть ограничена сверху, но не ограничена снизу?
3. Покажите, что теоремы о предельном переходе в неравенствах, о сжатой переменной, Вейерштрасса справедливы даже если все утверждения начинаются не с  $n = 1$ , а с  $n = n_0$ .
4. Докажите, что любая подпоследовательность сходящейся последовательности сходится и имеет тот же самый предел, что и исходная последовательность.
5. Проиллюстрируйте графически теоремы о сжатой переменной, о предельном переходе в неравенствах.

## 7 ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

### 7.1 Понятие предела функции по Коши

**Определение 7.1.1** ( $\varepsilon - \delta$  определение предела функции) Пусть  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  и  $x_0$  – предельная точка для  $E$ . Число  $A$  называется пределом функции  $f(x)$  в точке  $x_0$ , если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in E : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

При этом пишут, что  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$  или  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} A$ .

Легко заметить, что это же определение, используя понятия  $\varepsilon$ -окрестности и  $\delta$ -окрестности можно переписать в виде

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in E : x \in \overset{o}{U}_\delta(x_0) \Rightarrow f(x) \in U_\varepsilon(A).$$

**Замечание 7.1.1** Геометрически определение предела функции означает, что какую бы полосу шириной  $2\varepsilon$  не взять, найдется  $\delta$ , что при всех  $x$  из области определения, лежащих в проколотой окрестности  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$ , значения функции  $f(x)$  лежат в этой полосе. При уменьшении  $\varepsilon$  значение  $\delta$ , вообще говоря, уменьшается. На рисунке 2 наглядно продемонстрировано, как с изменением  $\varepsilon$  меняется и  $\delta$ .

**Определение 7.1.2** (Определение предела функции через окрестности) Пусть  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  и  $x_0$  – предельная точка для  $E$ . Число  $A$  называется пределом функции  $f(x)$  в точке  $x_0$ , если

$$\forall V(A) \exists \overset{o}{U}(x_0) : \forall x \in E : x \in \overset{o}{U}(x_0) \Rightarrow f(x) \in V(A).$$

Как и в случае последовательности, справедлива следующая лемма.

**Лемма 7.1.1** *Определения (7.1.1) и (7.1.2) эквивалентны.*

**Доказательство.** Докажите самостоятельно аналогично доказательству леммы (6.1.1).  $\square$

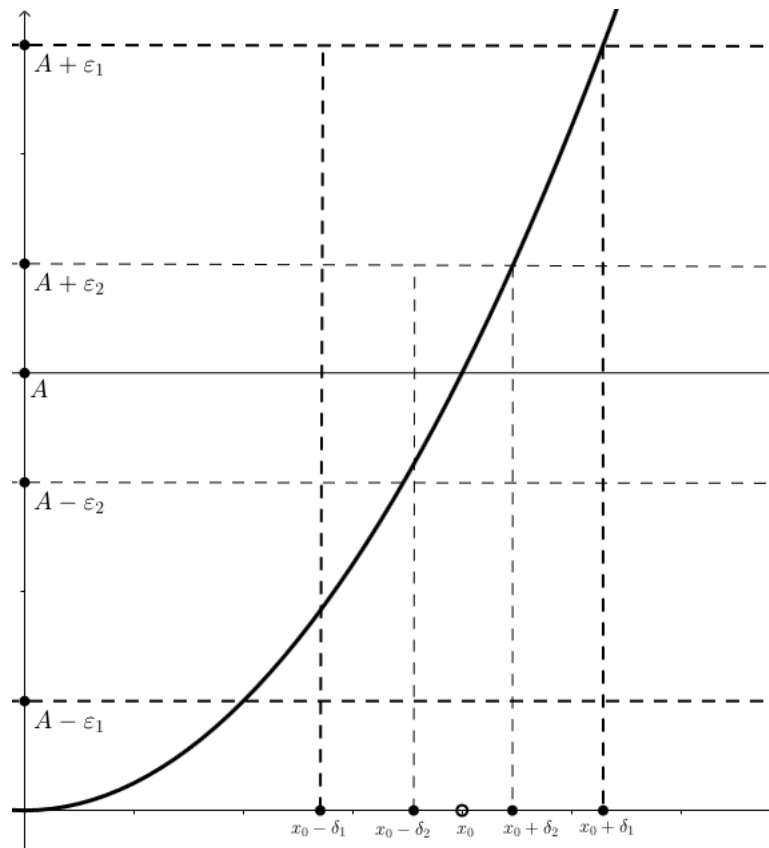


Рис. 2: Предел функции

**Пример 7.1.1** *Доказать, что*

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4.$$

Пусть  $\varepsilon > 0$ . Нужно найти те  $x$ , при которых выполняется неравенство

$$\left| \frac{x^2 - 4}{x - 2} - 4 \right| < \varepsilon.$$

Так как  $x \neq 2$ , то

$$\left| \frac{x^2 - 4}{x - 2} - 4 \right| = |x + 2 - 4| = |x - 2| < \varepsilon.$$

Значит, если положить  $\delta = \varepsilon$ , то при  $0 < |x - 2| < \delta$  выполняется

$$\left| \frac{x^2 - 4}{x - 2} - 4 \right| < \varepsilon.$$

**Пример 7.1.2** Доказать, что

$$\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - x) = 6.$$

Пусть  $\varepsilon > 0$ . Справедлива цепочка преобразований

$$|f(x) - A| = |x^2 - x - 6| = |(x - 3)(x + 2)|.$$

Можно предполагать, что  $x \in (2, 4)$ ,  $x \neq 3$ . Тогда

$$|(x - 3)(x + 2)| \leq 6|x - 3|$$

и если потребовать, чтобы выполнялось неравенство  $6|x - 3| < \varepsilon$ , то при  $0 < |x - 3| < \delta = \min(1, \frac{\varepsilon}{6})$  будет выполняться  $|f(x) - A| < \varepsilon$ .

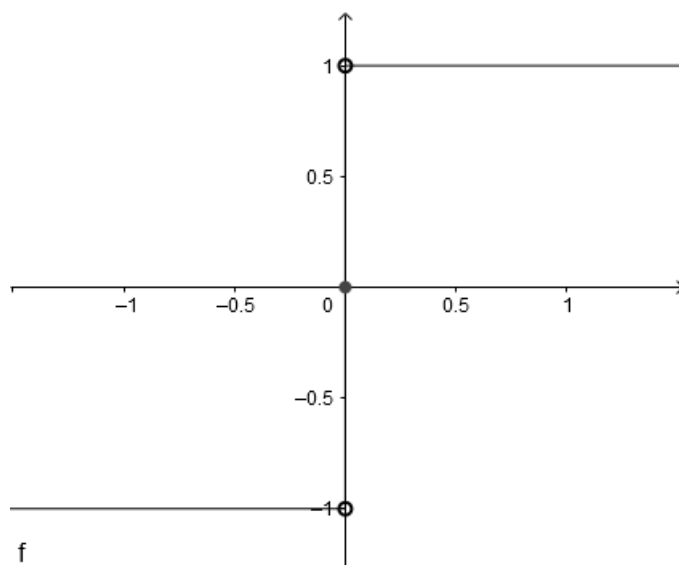


Рис. 3: График  $y = \text{sign } x$

**Пример 7.1.3** Доказать, что функция (см. рисунок 3)

$$\text{sign } x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

не имеет предела в точке  $x_0 = 0$ . Ниже записано отрицание определения того, что число  $A$  является пределом функции  $f(x) : E \rightarrow \mathbb{R}$  в точке  $x_0$ ,

$$\exists \varepsilon_0 > 0 : \forall \delta > 0 \exists x_\delta \in E : 0 < |x_\delta - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x_\delta) - A| \geq \varepsilon_0.$$

Пусть  $\varepsilon_0 = 1$  и  $\delta > 0$ . Достаточно положить  $x_\delta = -\frac{\delta}{2}$ , если  $A \geq 0$  и  $x_\delta = \frac{\delta}{2}$ , если  $A < 0$ , тогда

$$|\operatorname{sign} x_\delta - A| \geq 1.$$

**Пример 7.1.4** Доказать, что  $\lim_{x \rightarrow 0} |\operatorname{sign} x| = 1$ . Пусть  $\varepsilon > 0$ , тогда какое бы число  $\delta > 0$  не взяли, для всех  $x : 0 < |x| < \delta$  выполняется  $|\operatorname{sign} x - 1| = |1 - 1| = 0 < \varepsilon$ .

**Замечание 7.1.2** Последний пример еще раз иллюстрирует, что при изучении предела функции при  $x \rightarrow x_0$  важно поведение функции около точки  $x_0$ , а не в самой точке. В определении предела это отмечается рассмотрением проколотой окрестности  $x_0$ .

Определение предела легко обобщается как на случаи, когда  $x_0 = +\infty$ ,  $x_0 = -\infty$ ,  $x_0 = \infty$ , так и на случаи, когда  $A = +\infty$ ,  $A = -\infty$ ,  $A = \infty$ . Требование, что  $x_0$  – предельная точка, сохраняется.

**Определение 7.1.3** Пусть  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ . Говорят, что  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$ , если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in E : |x| > \frac{1}{\delta} \Rightarrow f(x) > \frac{1}{\varepsilon}.$$

**Определение 7.1.4** Пусть  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ . Говорят, что  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$  ( $x_0$  – число), если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in E : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < -\frac{1}{\varepsilon}.$$

**Определение 7.1.5** Пусть  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ . Говорят, что  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$  ( $A$  – число), если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in E : |x| > \frac{1}{\delta} \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Читателю предлагается самому сформулировать определения предела в остальных случаях.

**Замечание 7.1.3** Данные определения можно переписать через  $\varepsilon$ -окрестности и через окрестности, как сделано в определениях (7.1.1) и (7.1.2). Лемма об эквивалентности сохраняется. Читателю предлагается самостоятельно заполнить данный пробел по аналогии со сделанным выше.

**Замечание 7.1.4** Запись  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$  будет всегда снабжена уточнением: либо  $A \in \mathbb{R}$ , либо  $A \in \overline{\mathbb{R}}$ .

**Замечание 7.1.5** В определении предела в дальнейшем для краткости часто опускается тот факт, что  $\delta = \delta(\varepsilon)$ .

## 7.2 Понятие предела функции по Гейне

### Определение 7.2.1 (Определение предела функции по Гейне)

Пусть  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  и  $x_0$  – предельная точка для  $E$ . Число  $A$  называется пределом функции  $f(x)$  в точке  $x_0$ , если для любой последовательности  $x_n$ , сходящейся к  $x_0$ , такой, что  $x_n \in E$ ,  $x_n \neq x_0$ , выполняется равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A.$$

**Замечание 7.2.1** Определение предела по Гейне легко обобщается как на случаи, когда либо  $x_0 = +\infty$ ,  $x_0 = -\infty$ ,  $x_0 = \infty$ , так и на случаи, когда  $A = +\infty$ ,  $A = -\infty$ ,  $A = \infty$ . Требование, что  $x_0$  – предельная точка, сохраняется. Сделайте это самостоятельно.

Оказывается, что определения предела по Коши и по Гейне эквивалентны.

**Теорема 7.2.1 (Об эквивалентности определений)** *Определения предела по Коши и Гейне эквивалентны.*

**Доказательство.** Доказательство будет приведено в предположении, что  $x_0$  и  $A$  – числа, оставив другие случаи в качестве упражнения.

Сначала будет доказано, что если  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$  в смысле определения по Коши, то  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$  в смысле определения по Гейне.

Пусть  $\varepsilon > 0$ , тогда, согласно определению по Коши,

$$\exists \delta > 0 : \forall x \in E : x \in \overset{o}{U}_\delta(x_0) \Rightarrow f(x) \in V_\varepsilon(A).$$

Пусть последовательность  $x_n$  сходится к  $x_0$ , причем  $x_n \in E$  и  $x_n \neq x_0$ , тогда по ранее найденному числу  $\delta > 0$

$$\exists n_0 : \forall n > n_0 \Rightarrow x_n \in \overset{o}{U}_\delta(x_0).$$

Значит, при  $n > n_0$

$$f(x_n) \in V_\varepsilon(A),$$

что означает, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$ .

Теперь будет доказано, что если  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$  в смысле определения по Гейне, то  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$  в смысле определения по Коши.

От противного, пусть не выполнено определение по Коши, то есть

$$\exists \varepsilon_0 : \forall \delta > 0 \exists x \in E, x \in \overset{o}{U}_\delta(x_0) : |f(x) - A| \geq \varepsilon_0.$$

Так как  $\delta$  может быть любой, то взяв  $\delta_n = \frac{1}{n}$

$$\exists x_n \in E, x \in \overset{o}{U}_{\delta_n}(x_0) : |f(x_n) - A| \geq \varepsilon_0.$$

Последовательность  $x_n$  удовлетворяет условиям, что  $x_n \in E$  и  $x_n \neq x_0$  (по построению). Кроме того, так как  $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$ , то  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ , однако так как  $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow |f(x_n) - A| \geq \varepsilon_0$ , то  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \neq A$ , то есть не выполнено определение по Гейне.  $\square$

Определение предела по Гейне часто помогает доказать, что какое-то число не является пределом данной функции, или что функция не имеет предела вовсе.

**Пример 7.2.1** Доказать, что не существует предела  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x$ .

Достаточно рассмотреть две последовательности

$$x_n^1 = 2\pi n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty, \quad x_n^2 = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty.$$

Так как

$$f(x_n^1) = \sin(2\pi n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \quad f(x_n^2) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

и пределы между собой не равны, то это означает, что предела не существует.

## 7.3 Свойства функций, имеющих предел

Для функций справедливы теоремы, аналогичные теоремам для последовательностей.

**Теорема 7.3.1** Пусть  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  и  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ , тогда:

1. При  $A \in \overline{\mathbb{R}}$  предел единственен.
2. При  $A \in \mathbb{R}$  существует окрестность  $\overset{o}{U}(x_0)$  такая, что в  $\overset{o}{U}(x_0) \cap E$  функция  $f(x)$  ограничена.
3. Если  $A \neq 0$ ,  $A \in \overline{\mathbb{R}}$ , то существует окрестность  $\overset{o}{U}(x_0)$  такая, что в  $\overset{o}{U}(x_0) \cap E$  знаки  $f(x)$  и  $A$  совпадают.

**Доказательство.** 1. От противного, пусть существует два предела  $A_1 \neq A_2$ . Пусть  $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_0$ ,  $x_n \in E$ ,  $x_n \neq x_0$ . Согласно определению предела по Гейне,  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A_1$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A_2$ . В силу единственности предела последовательности  $A_1 = A_2$ . Тем самым получено противоречие.

2. Пусть  $\varepsilon = 1$ . Согласно определению предела функции,

$$\begin{aligned} \exists \delta > 0 : \forall x \in E : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < 1 \Leftrightarrow \\ (A - 1) < f(x) < (A + 1), \end{aligned}$$

что и означает ограниченность.

3. Пусть  $A \in \mathbb{R}$ . Пусть  $\varepsilon = \frac{|A|}{2}$ . Тогда, согласно определению предела,

$$\begin{aligned} \exists \delta > 0 : \forall x \in E : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \frac{|A|}{2} \Leftrightarrow \\ A - \frac{|A|}{2} < f(x) < A + \frac{|A|}{2}, \end{aligned}$$

откуда и следует требуемое. Случай  $A \in \overline{\mathbb{R}}$  остается в качестве упражнения.  $\square$

## 7.4 Арифметические свойства пределов

**Теорема 7.4.1 (Арифметические свойства пределов)** Пусть  $f, g : E \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$  и  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$ ,  $A, B \in \mathbb{R}$ , тогда:

$$1. \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = A + B.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = A \cdot B.$$

$$3. \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B} \text{ при } B \neq 0.$$

**Доказательство.** Используя определение предела по Гейне, доказательство этой теоремы сводится к применению соответствующей теоремы для последовательностей. Для примера будет доказано первое утверждение. Пусть  $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_0$ ,  $x_n \in E$ ,  $x_n \neq x_0$ . Согласно определению предела по Гейне,  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = B$ . Тогда по теореме о пределе суммы для последовательностей,  $\lim_{n \rightarrow \infty} (f(x_n) + g(x_n)) = A + B$ . В силу произвольности  $x_n$  это означает, что  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = A + B$ .  $\square$

Аналогично тому, как сделано в последовательностях, можно сформулировать и более общую теорему.



**Теорема 7.4.2** Пусть  $f, g : E \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$  и  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$ ,  $A, B \in \overline{\mathbb{R}}$ , тогда, если определена соответствующая операция (сложение, умножение, деление) в  $\overline{\mathbb{R}}$ , то

1.  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = A + B$ .
2.  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = A \cdot B$ .
3.  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$  при  $B \neq 0$ .

**Доказательство.** Доказательство предлагается в качестве упражнения.  $\square$

## 7.5 Теорема о сжатой переменной

**Теорема 7.5.1** Пусть  $f, g, h : E \rightarrow \mathbb{R}$ , причем на  $E$  выполнено условие  $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$  и  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A$ ,  $A \in \overline{\mathbb{R}}$ . Тогда  $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = A$ .

**Доказательство.** Пусть  $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_0$ ,  $x_n \in E$ ,  $x_n \neq x_0$ . Согласно определению по Гейне,  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = A$ . По теореме о сжатой переменной для последовательностей получим, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} h(x_n) = A$ . В силу произвольности последовательности  $x_n$  получается, что  $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = A$ .  $\square$

## 7.6 Предельный переход в неравенствах

**Теорема 7.6.1** Пусть  $f, g : E \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$ ,  $A, B \in \overline{\mathbb{R}}$  и  $A < B$ , тогда

$$\exists \overset{\circ}{U}(x_0) : \forall x \in \overset{\circ}{U}(x_0) \cap E \Rightarrow f(x) < g(x).$$

**Доказательство.** Доказательство этой теоремы совершенно аналогично доказательству соответствующей теоремы для последовательностей и предоставляется читателю.  $\square$

**Следствие 7.6.2 (Предельный переход в неравенствах)** Пусть  $f, g : E \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$ ,  $A, B \in \overline{\mathbb{R}}$ , тогда:

1. Если  $f(x) > g(x)$  на  $E$ , то  $A \geq B$ .
2. Если  $f(x) \geq g(x)$  на  $E$ , то  $A \geq B$ .

**Доказательство.** Доказательство следствия аналогично доказательству следствия (7.3.1) и оставляется в качестве упражнения.  $\square$

**Пример 7.6.1** В первом пункте следствия нельзя утверждать, что  $A > B$ . Действительно, рассмотрим функции  $f(x) = \frac{1}{x}$ ,  $g(x) = 0$  видно, что  $f(x) > g(x)$  при  $x > 0$ , но  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$  и  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ .

## 7.7 Односторонние пределы

**Определение 7.7.1** Пусть  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0$  – предельная точка для множества  $U_+(x_0) = \{x \in E : x > x_0\}$ . Говорят, что число  $A$  является пределом функции  $f$  в точке  $x_0$  справа, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in E : 0 < x - x_0 < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon,$$

при этом пишут  $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = A$ .

**Определение 7.7.2** Пусть  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0$  – предельная точка для множества  $U_-(x_0) = \{x \in E : x < x_0\}$ . Говорят, что число  $A$  является пределом функции  $f$  в точке  $x_0$  слева, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in E : 0 < x_0 - x < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon,$$

при этом пишут  $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = A$ .

**Замечание 7.7.1** Аналогично тому, как сделано в пределе функции, определения обобщаются на случай  $A \in \overline{\mathbb{R}}$ .

**Замечание 7.7.2** Полезно заметить, что при  $x_0 = +\infty$  или  $x_0 = -\infty$  определение предела и так является односторонним.

**Замечание 7.7.3** Для краткости часто применяют обозначения  $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = f(x_0 - 0)$  и  $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = f(x_0 + 0)$ .

**Пример 7.7.1** Пусть

$$\text{sign } x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}.$$

Ясно, что  $\lim_{x \rightarrow 0+0} \text{sign } x = 1$ , а  $\lim_{x \rightarrow 0-0} \text{sign } x = -1$ .

**Пример 7.7.2** Пусть  $y = 5^{\frac{1}{x}}$ . Так как при  $x \rightarrow 0+0$  имеет место равенство  $\lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{1}{x} = +\infty$ , то легко показать, что

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} 5^{\frac{1}{x}} = +\infty.$$

Аналогично, так как  $\lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{1}{x} = -\infty$ , то легко показать, что

$$\lim_{x \rightarrow 0-0} 5^{\frac{1}{x}} = 0.$$

**Теорема 7.7.1 (Критерий существования предела функции)**

Пусть  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  и  $x_0$  — предельная точка для множеств  $U_-(x_0) = \{x \in E : x < x_0\}$  и  $U_+(x_0) = \{x \in E : x > x_0\}$ . Тогда

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = A, \quad A \in \overline{\mathbb{R}}.$$

**Доказательство.** Пусть  $A \in \mathbb{R}$ . Необходимость. Пусть  $\varepsilon > 0$ , тогда

$$\exists \delta > 0 : \forall x \in E : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon,$$

в частности,

$$\forall x \in E : 0 < x - x_0 < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon,$$

то есть  $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = A$ . Аналогично,

$$\forall x \in E : 0 < x_0 - x < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon,$$

то есть  $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = A$ .

Достаточность. Пусть  $\varepsilon > 0$ , тогда

$$\exists \delta_1 > 0 : \forall x \in E : 0 < x - x_0 < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon,$$

$$\exists \delta_2 > 0 : \forall x \in E : 0 < x_0 - x < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Пусть  $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ , тогда

$$\forall x \in E : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

□

## 7.8 Критерий Коши существования предела функции

**Теорема 7.8.1 (Критерий Коши)** Пусть  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0$  – предельная точка для  $E$ . Тогда

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A &\Leftrightarrow \\ \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x', x'' \in E : 0 < |x' - x_0| < \delta, \\ 0 < |x'' - x_0| < \delta &\Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon. \end{aligned}$$

**Доказательство.** Необходимость. Пусть  $\varepsilon > 0$ , тогда

$$\exists \delta > 0 : \forall x \in E : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Пусть  $x', x'' \in E : 0 < |x_0 - x'| < \delta, 0 < |x_0 - x''| < \delta$ , тогда

$$\begin{aligned} |f(x') - f(x'')| &= |(f(x') - A) + (A - f(x''))| \leq \\ &\leq |(f(x') - A)| + |(f(x'') - A)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Достаточность. Пусть  $\varepsilon > 0$ , тогда

$$\begin{aligned} \exists \delta > 0 : \forall x', x'' \in E : 0 < |x' - x_0| < \delta, \\ 0 < |x'' - x_0| < \delta &\Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Пусть  $x_n$  – последовательность такая, что  $x_n \in E$ ,  $x_n \neq x_0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ , тогда

$$\exists n_0 : \forall n > n_0 \Rightarrow 0 < |x_n - x_0| < \delta,$$

а значит при  $n > n_0$  и  $p \in \mathbb{N}$  выполняется также и  $0 < |x_{n+p} - x_0| < \delta$ , а значит  $|f(x_n) - f(x_{n+p})| < \varepsilon$ , что означает, что последовательность  $f(x_n)$  фундаментальна, а значит имеет предел (согласно критерию Коши для последовательностей). Тем самым доказано, что для любой последовательности, удовлетворяющей условиям  $x_n \in E$ ,  $x_n \neq x_0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ , последовательность  $f(x_n)$  сходится.

Теперь нужно показать, что все эти пределы одинаковы, для этого можно предположить (от противного), что  $x_n^1 \in E$ ,  $x_n^1 \neq x_0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^1 = x_0$ ,  $x_n^2 \in E$ ,  $x_n^2 \neq x_0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^2 = x_0$ , но

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n^1) = A_1 \neq A_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n^2).$$

Составив последовательность

$$x_n^3 = \{x_1^1, x_1^2, x_2^1, x_2^2, \dots, x_n^1, x_n^2, \dots\}$$

видно, что  $x_n^3 \in E$ ,  $x_n^3 \neq x_0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^3 = x_0$ . С одной стороны, по только что доказанному выше,  $f(x_n^3)$  сходится, а с другой стороны

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{2k-1}^3) = A_1 \neq A_2 = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{2k}^3).$$

Противоречие. □

## 7.9 Предел монотонной функции

**Определение 7.9.1** Говорят, что функция  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  возрастает на  $E$ , если

$$\forall x_1, x_2 \in E : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

**Определение 7.9.2** Говорят, что функция  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  не убывает на  $E$ , если

$$\forall x_1, x_2 \in E : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2).$$

**Определение 7.9.3** Говорят, что функция  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  убывает на  $E$ , если

$$\forall x_1, x_2 \in E : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

**Определение 7.9.4** Говорят, что функция  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  не возрастает на  $E$ , если

$$\forall x_1, x_2 \in E : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2).$$

**Определение 7.9.5** Про возрастающую (убывающую, не убывающую, не возрастающую) функцию также говорят, что она монотонна.

**Теорема 7.9.1** Пусть  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $s = \sup E$  ( $i = \inf E$ ) – предельная для  $E$ . Для того чтобы неубывающая (невозрастающая) функция  $f$  имела предел при  $x \rightarrow s$  ( $x \rightarrow i$ ) необходимо и достаточно, чтобы функция  $f$  была ограничена сверху (снизу). Иначе предел равен  $+\infty$  ( $-\infty$ ).

**Доказательство.** Пусть функция не убывает. Необходимость следует из того, что функция, имеющая предел, ограничена, а поскольку  $f$  – неубывающая на  $E$ , то имеет место ограниченность сверху.

Достаточность. Пусть  $A = \sup_{x \in E} f(x)$ . Пусть  $\varepsilon > 0$ , тогда, согласно определению супремума,  $\exists x_0 \in E$ , что  $A - \varepsilon < f(x_0) \leq A$ . В силу неубывания  $f$  на  $E$ , при  $x > x_0, x \in E$  имеем  $A - \varepsilon < f(x_0) \leq f(x) \leq A$ . Тем самым,  $\lim_{x \rightarrow s} f(x) = A$ . □

## 7.10 Бесконечно малые и бесконечно большие функции

**Определение 7.10.1** Функция  $\alpha(x)$  называется бесконечно малой при  $x \rightarrow x_0$ , если

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0.$$

**Определение 7.10.2** Функция  $\beta(x)$  называется бесконечно большой при  $x \rightarrow x_0$ , если

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \beta(x) = \infty.$$

**Лемма 7.10.1 (О связи бесконечно малой и бесконечно большой)**

Пусть  $\beta(x) : E \rightarrow \mathbb{R}$  – бесконечно большая при  $x \rightarrow x_0$ . Тогда  $\alpha(x) = \frac{1}{\beta(x)}$  – бесконечно малая при  $x \rightarrow x_0$ .

Обратно, пусть  $\alpha(x) : E \rightarrow \mathbb{R}$  – бесконечно малая при  $x \rightarrow x_0$  и  $\exists \delta > 0 : \forall x \in E : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow \alpha(x) \neq 0$ . Тогда  $\beta(x) = \frac{1}{\alpha(x)}$  – бесконечно большая при  $x \rightarrow x_0$ .

**Доказательство.** Первое утверждение. Пусть  $\varepsilon > 0$ , тогда:

$$\exists \delta > 0 : \forall x \in E : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |\beta(x)| > \frac{1}{\varepsilon},$$

откуда

$$|\alpha(x)| < \varepsilon,$$

что и доказывает утверждение.

Второе утверждение. Пусть  $\varepsilon > 0$ , тогда

$$\exists \delta_1 > 0, \delta_1 < \delta : \forall x \in E : 0 < |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |\alpha(x)| < \varepsilon.$$

Так как на множестве  $x \in E : 0 < |x - x_0| < \delta_1$  выполнено, что  $\alpha(x) \neq 0$ , то определена функция  $\beta(x) = \frac{1}{\alpha(x)}$  и

$$\left| \frac{1}{\alpha(x)} \right| > \frac{1}{\varepsilon},$$

то есть  $\beta(x)$  – бесконечно большая при  $x \rightarrow x_0$ . □

## 7.11 Свойства бесконечно малых функций

В следующей теореме отмечены свойства бесконечно малых.

**Теорема 7.11.1** Пусть  $\alpha, \beta : E \rightarrow \mathbb{R}$  – бесконечно малые при  $x \rightarrow x_0$ , тогда:

1. Функция  $\alpha(x) + \beta(x)$  – бесконечно малая при  $x \rightarrow x_0$ .
2. Функция  $\alpha(x) \cdot \beta(x)$  – бесконечно малая при  $x \rightarrow x_0$ .
3. Если функция  $\theta(x) : E \rightarrow \mathbb{R}$  ограничена в некоторой проколотой окрестности  $\overset{o}{U}_\delta(x_0)$ , тогда функция  $\alpha(x) \cdot \theta(x)$  – бесконечно малая при  $x \rightarrow x_0$ .

**Доказательство.** Первые два пункта немедленно следуют из теоремы об арифметических операциях над пределами.

3. Согласно условию,

$$\exists \overset{o}{U}_\delta(x_0) : \forall x \in E, x \in \overset{o}{U}_\delta(x_0) \Rightarrow |\theta(x)| \leq C.$$

Пусть  $\varepsilon > 0$ , тогда

$$\exists \delta_1 < \delta : \forall x \in E : 0 < |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{C}.$$

Тогда при  $x \in E : 0 < |x - x_0| < \delta_1$  выполняется

$$|\theta(x) \cdot \alpha(x)| < \varepsilon,$$

что и завершает доказательство. □

**Пример 7.11.1** Вычислить предел

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}.$$

Предел  $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin x$  не существует. В то же время,  $|\sin x| < 1$  при  $x \in \mathbb{R}$ , а значит функция  $\sin x$  является ограниченной. Кроме того,  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$ , значит функция  $\frac{1}{x}$  является бесконечно малой при  $x \rightarrow \infty$ . Тогда, согласно теореме,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0.$$

**Теорема 7.11.2 (О связи функции, ее предела и бесконечно малой)**

Пусть функция  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0$  – предельная для  $E$ , тогда

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha(x),$$

где  $\alpha(x)$  – бесконечно малая при  $x \rightarrow x_0$ .

**Доказательство.** Необходимость. Пусть  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ , а значит

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in E : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Обозначив  $\alpha(x) = f(x) - A$  получается определение того, что  $\alpha(x)$  – бесконечно малая при  $x \rightarrow x_0$  и представление  $f(x) = A + \alpha(x)$ .

Достаточность. Пусть  $f(x) = A + \alpha(x)$ , где  $\alpha(x)$  – бесконечно малая при  $x \rightarrow x_0$ , тогда

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} (A + \alpha(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} A + \lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = A + 0 = A.$$

□

## 7.12 Контрольные вопросы и задачи

1. Докажите арифметические свойства пределов, не используя непосредственно соответствующие свойства для пределов последовательности.
2. Докажите теорему о сжатой переменной, не используя непосредственно соответствующую теорему для последовательности.
3. Проиллюстрируйте критерий Коши существования предела функции рисунком.
4. Сформулируйте все недостающие определения предела функции.
5. Сформулируйте определение предела функции по Гейне, используя кванторы.

## 8 НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ

### 8.1 Основные определения

**Определение 8.1.1** Функция  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  называется непрерывной в точке  $x_0 \in E$ , если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in E : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$



Ясно, что используя понятие  $\varepsilon$ -окрестности и  $\delta$ -окрестности определение может быть переписано в виде

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in E : x \in U_\delta(x_0) \Rightarrow f(x) \in U_\varepsilon(f(x_0)).$$

Аналогично определению предела, понятие непрерывности может быть сформулировано и в терминах произвольных окрестностей.

**Определение 8.1.2** Функция  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  называется непрерывной в точке  $x_0 \in E$ , если

$$\forall U(f(x_0)) \exists U(x_0) : \forall x \in E : x \in U(x_0) \Rightarrow f(x) \in U(f(x_0)).$$

Можно бы было провести доказательство эквивалентности этих двух определений в том ключе, который был рассмотрен ранее, однако это получится несколько иным путем.

Пусть функция  $f(x)$  непрерывна в точке  $x_0$ . Для точки  $x_0$  справедлива альтернатива: либо  $x_0$  предельная для  $E$ , либо нет. Оказывается, в первом случае понятие непрерывности тесно связано с понятием предела.

**Лемма 8.1.1** Для того чтобы функция  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  была непрерывной в точке  $x_0$ , предельной для  $E$ , необходимо и достаточно, чтобы выполнялось

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

**Доказательство.** Необходимость. Пусть функция  $f(x)$  непрерывна в точке  $x_0$ , предельной для  $E$ , тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in E : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

В частности,

$$\forall x \in E : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon,$$

то есть получается определение того, что  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ .

Достаточность. Пусть  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ , тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in E : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Так как при  $x = x_0$  выполняется  $|f(x_0) - f(x_0)| = 0$ , то

$$\forall x \in E : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon,$$

то есть функция  $f(x)$  непрерывна в точке  $x_0$ . □

**Лемма 8.1.2** Если  $x_0 \in E$  – изолированная точка, то функция  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывна в  $x_0$ .

**Доказательство.** Если  $x_0$  – изолированная точка множества  $E$ , то существует окрестность  $U(x)$ , не содержащая других точек из  $E$ . А тогда если  $\varepsilon > 0$ , то

$$x \in U(x), x \in E \Rightarrow (x = x_0) \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| = 0 < \varepsilon,$$

что и означает непрерывность.  $\square$

**Определение 8.1.3** Функция  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  называется непрерывной на множестве  $D \subset E$ , если она непрерывна в каждой точке  $D$ . Обозначается это, как  $f \in C(D)$ .

**Замечание 8.1.1** Геометрически понятие непрерывности на множестве (например, на отрезке  $[a, b]$ ) можно пояснить следующим образом. Непрерывность функции  $f(x)$  на отрезке  $[a, b]$  означает, что ее график на этом отрезке можно нарисовать, не отрывая ручки от бумаги.

**Пример 8.1.1** Константа, то есть функция  $y(x) = c$ , непрерывна на  $\mathbb{R}$ . Действительно, пусть  $\varepsilon > 0$ , тогда неравенство

$$0 = |c - c| < \varepsilon$$

справедливо при любой  $\delta$ .

**Пример 8.1.2** Функция  $y(x) = x$  непрерывна на  $\mathbb{R}$ . Действительно, пусть  $\varepsilon > 0$  и  $x_0 \in \mathbb{R}$ , тогда неравенство

$$|x - x_0| < \varepsilon$$

справедливо, как только  $|x - x_0| < \delta = \varepsilon$ .

## 8.2 Классификация точек разрыва

**Определение 8.2.1** Если функция  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  не является непрерывной в точке  $x_0$ , то говорят, что функция  $f$  терпит разрыв (или что  $f$  разрывна) в точке  $x_0$ , а сама точка  $x_0$  называется точкой разрыва.

**Лемма 8.2.1** Пусть  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  и  $x_0$  – предельная для  $E$ . Если существуют (в смысле определения) пределы  $f(x_0 + 0)$  и  $f(x_0 - 0)$ , то непрерывность функции  $f$  в точке  $x_0$  равносильна равенству

$$f(x_0 + 0) = f(x_0 - 0) = f(x_0).$$

**Доказательство.** Первое равенство  $f(x_0 + 0) = f(x_0 - 0)$  необходимо и достаточно для того, чтобы существовал предел  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0 + 0) = f(x_0 - 0)$ . Второе же равенство устанавливает, что  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ , что означает непрерывность.  $\square$

Тем самым, если нарушено какое-либо из условий вышеприведенной леммы, то функция не является непрерывной. Возможны следующие варианты.

**Определение 8.2.2** Пусть  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ . Если существуют пределы  $f(x_0 + 0)$ ,  $f(x_0 - 0)$ , причем  $f(x_0 + 0) = f(x_0 - 0) = A$ , но  $A \neq f(x_0)$  или  $f$  не определена в точке  $x_0$ , то точка  $x_0$  называется точкой устранимого разрыва первого рода.

**Замечание 8.2.1** Если  $x_0$  – точка устранимого разрыва, то переопределив (или доопределив) функцию  $f$  в точке  $x_0$  значением  $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$  получится непрерывная в точке  $x_0$  функция.

**Пример 8.2.1** Пусть  $f(x) = |\operatorname{sign} x|$ . Тогда  $f(0 + 0) = f(0 - 0) = 1$ , но  $f(0) = 0$ , то есть точка  $x_0 = 0$  – точка устранимого разрыва первого рода.

**Пример 8.2.2** Пусть  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ . Тогда  $f(1 + 0) = f(1 - 0) = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2$ . Однако сама функция в точке  $x_0 = 1$  не определена. Тем самым в точке  $x_0 = 1$  функция имеет устранимый разрыв первого рода.

**Определение 8.2.3** Пусть  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ . Если существуют пределы  $f(x_0 + 0)$ ,  $f(x_0 - 0)$ , но

$$f(x_0 + 0) \neq f(x_0 - 0),$$

то точка  $x_0$  называется точкой неустраняемого разрыва первого рода или точкой разрыва типа скачок.

**Замечание 8.2.2** Величина

$$f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$$

называется величиной скачка.

**Пример 8.2.3** Пусть  $f(x) = \operatorname{sign} x$ . Тогда  $f(0 + 0) = 1$ ,  $f(0 - 0) = -1$ . Значит, точка  $x_0 = 0$  является точкой неустраняемого разрыва первого рода.

**Определение 8.2.4** Пусть  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ . Если не существует хотя бы один из двух пределов  $f(x_0 - 0)$  или  $f(x_0 + 0)$ , то точка  $x_0$  называется точкой разрыва второго рода.

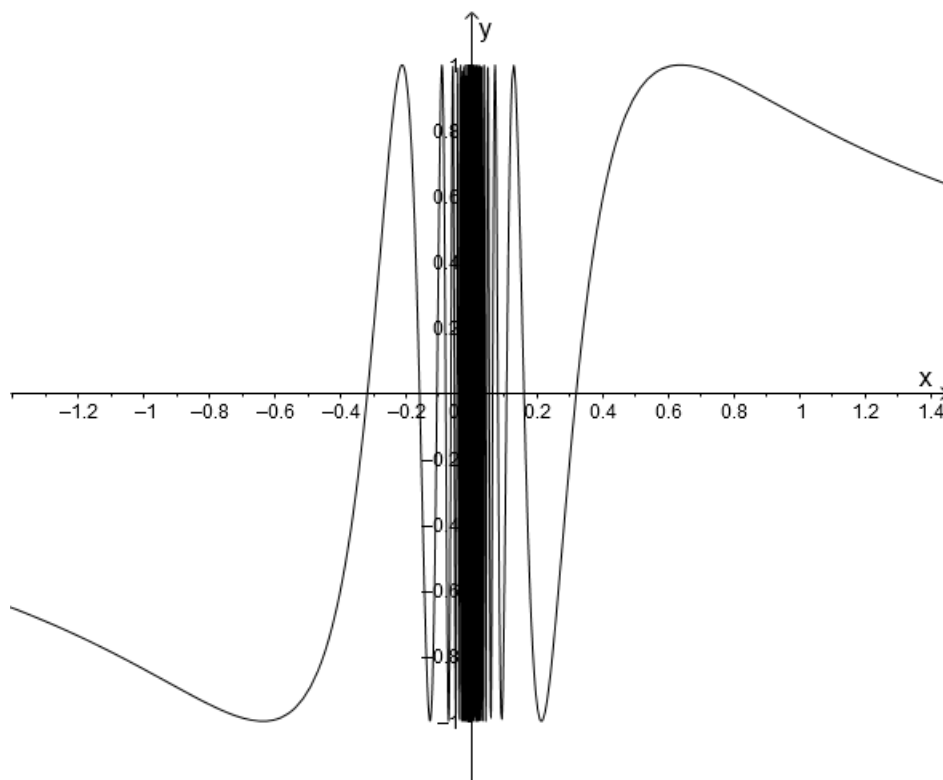


Рис. 4: График  $y = \sin \frac{1}{x}$

**Пример 8.2.4** Пусть  $f(x) = \frac{1}{x}$ . Тогда  $f(0+0) = +\infty$  и  $f(0-0) = -\infty$ , значит точка  $x_0 = 0$  – точка разрыва второго рода.

**Пример 8.2.5** Пусть  $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ . Положив

$$x_n^1 = \frac{1}{2\pi n}, \quad x_n^2 = \frac{1}{\pi/2 + 2\pi n}.$$

очевидно, что  $x_n^i \rightarrow 0+0$ ,  $i = 1, 2$ . Однако,

$$\sin \frac{1}{x_n^1} = \sin(2\pi n) \rightarrow 0,$$

а

$$\sin \frac{1}{x_n^2} = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) \rightarrow 1.$$

Значит, согласно отрицанию определения предела по Гейне, не существует  $\lim_{x \rightarrow 0+0} \sin \frac{1}{x}$ . Аналогично можно показать, что не существует  $\lim_{x \rightarrow 0-0} \sin \frac{1}{x}$ . Тем самым, точка  $x_0 = 0$  – точка разрыва второго рода. Попытка изобразить график этой функции представлена на рисунке 4.

**Пример 8.2.6** Еще одна классическая функция – функция Дирихле:

$$d(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{I} \end{cases}.$$

Ясно, что данная функция разрывна в каждой точке и каждая точка является точкой разрыва второго рода.

### 8.3 Локальные свойства непрерывных функций

**Теорема 8.3.1** Пусть функции  $f, g : E \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывны в точке  $x_0$ , тогда:

1. Функция  $f(x)$  ограничена в некоторой окрестности  $x_0$ .
2. Функция  $f(x) + g(x)$  – непрерывна в  $x_0$ .
3. Функция  $f(x)g(x)$  – непрерывна в  $x_0$ .
4. Функция  $\frac{f(x)}{g(x)}$  – непрерывна в  $x_0$ , если  $g(x_0) \neq 0$ .

**Доказательство.** Если  $x_0$  – изолированная точка для  $E$ , то теорема очевидна. Если  $x_0$  – предельная точка для  $E$ , то теорема является прямым следствием теоремы об арифметических свойствах пределов.  $\square$

**Теорема 8.3.2 (О непрерывности сложной функции)** Пусть  $f : E_1 \rightarrow E_2$ ,  $g : E_2 \rightarrow \mathbb{R}$ , функция  $f(x)$  непрерывна в точке  $x_0 \in E_1$ , а функция  $g(y)$  непрерывна в точке  $y_0 = f(x_0) \in E_2$ . Тогда функция  $g(f(x))$  непрерывна в точке  $x_0$ .

**Доказательство.** Так как  $g(y)$  непрерывна в точке  $y_0$ , то

$$\forall U(g(y_0)) \exists U(y_0) : \forall y \in E_2 : y \in U(y_0) \Rightarrow g(y) \in U(g(y_0)).$$

Так как  $f(x)$  непрерывна в точке  $x_0$ , то по  $U(y_0)$

$$\exists U(x_0) : \forall x \in E_1, x \in U(x_0) \Rightarrow f(x) \in U(y_0),$$

откуда

$$\forall x \in E_1, x \in U(x_0) \Rightarrow g(f(x)) \in U(g(f(x_0))),$$

то есть  $g(f(x))$  непрерывна в точке  $x_0$ .  $\square$

**Следствие 8.3.3 (Теорема о пределе сложной функции)** Пусть  $f : E_1 \rightarrow E_2$ ,  $g : E_2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0$ , а функция  $g(y)$  непрерывна в точке  $y_0$ . Тогда  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = g(y_0)$ .

**Доказательство.** Доопределив функцию  $f(x)$  в точке  $x_0$  по непрерывности значением  $y_0$ , по теореме о непрерывности сложной функции,  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = g(y_0)$ . Так как при  $x \rightarrow x_0$  выполняется  $x \neq x_0$ , то для исходной функции  $f$  справедливо требуемое равенство.  $\square$

**Пример 8.3.1** Лишь требование существования предела функции  $g(y)$  в точке  $y_0$  недостаточно. Пусть  $g(y) = |\operatorname{sign} y|$ , а  $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ . Тогда  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ ,  $\lim_{y \rightarrow 0} g(y) = 1$ , но не существует предела  $\lim_{x \rightarrow 0} g(f(x))$ . Действительно, пусть

$$x_n^1 = \frac{1}{2\pi n}, \quad x_n^2 = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}.$$

Тогда  $\lim_{n \rightarrow \infty} g(f(x_n^1)) = 0$ , а  $\lim_{n \rightarrow \infty} g(f(x_n^2)) = 1$ .

## 8.4 Глобальные свойства непрерывных функций

**Теорема 8.4.1 (Первая теорема Больцано-Коши)** Пусть  $f(x) \in C[a, b]$  и  $f(a) \cdot f(b) < 0$ . Тогда  $\exists c \in (a, b) : f(c) = 0$ .

**Доказательство.** Разделим отрезок  $[a, b]$  пополам точкой  $c_1 = \frac{a+b}{2}$ , тогда если  $f(c_1) = 0$ , то условие теоремы выполняется, а если  $f(c_1) \neq 0$  имеем два случая: либо  $f(c_1) > 0$ , либо  $f(c_1) < 0$ . Тогда выберем отрезок либо  $[a, c_1]$ , либо  $[c_1, b]$  так, чтобы на его концах значения функции были разных знаков. С этим отрезком поступим так же, как и с исходным, то есть делим пополам и продолжаем процесс дальше.

На очередном шаге мы либо попадем в точку  $c \in [a, b]$ , где  $f(c) = 0$ , либо получим систему вложенных отрезков  $I_n$ , длины которых стремятся к нулю и на концах которых функция  $f$  принимает значения разных знаков. Согласно принципу вложенных отрезков, найдется единственная точка  $c \in [a, b]$ , принадлежащая каждому отрезку  $I_n$ . Пусть  $a_n$  – левый конец отрезка  $I_n$ , а  $b_n$  его правый конец. Можно считать, что

$$f(a_n) < 0, f(b_n) > 0,$$

или наоборот. Так как  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = c$  и  $f(x)$  непрерывна на  $[a, b]$ , то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(c) \leq 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) = f(c) \geq 0,$$

то есть  $f(c) = 0$ .  $\square$

**Замечание 8.4.1** Геометрически теорема означает, что уравнение  $f(x) = 0$  имеет хотя бы одно решение на отрезке  $[a, b]$  (см. рисунок 5). Кроме того, доказательство теоремы дает простейший способ поиска корня.

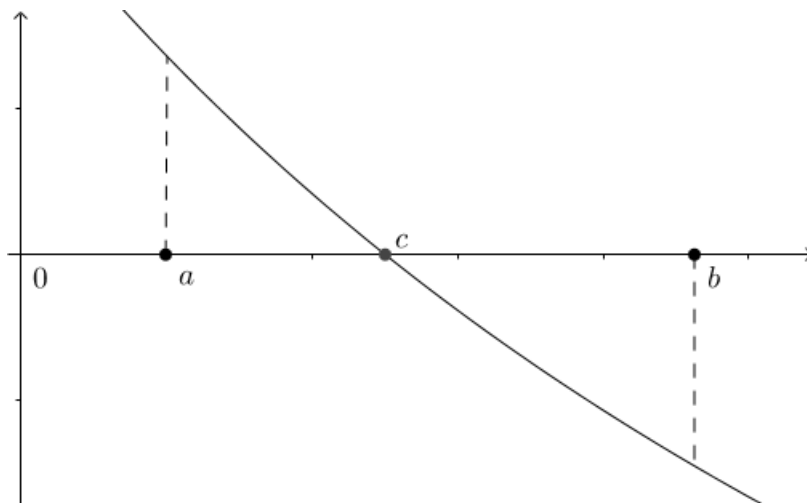


Рис. 5: Теорема Вейерштрасса

**Теорема 8.4.2 (Вторая теорема Больцано-Коши)** Пусть  $f(x) \in C[a, b]$ ,  $f(a) = A$ ,  $f(b) = B$ ,  $A < B$ . Тогда  $\forall C \in (A, B) \exists c \in (a, b) : f(c) = C$ .

**Доказательство.** Пусть  $C \in (A, B)$ . Рассмотрим функцию  $\varphi(x) = f(x) - C$ . Функция  $\varphi(x)$  непрерывна на  $[a, b]$  и  $\varphi(a) = A - C < 0$ , а  $\varphi(b) = B - C > 0$ , т. е.  $\varphi(a) \cdot \varphi(b) < 0$ .

По первой теореме Больцано-Коши (8.4.1), имеем

$$\exists c \in (a, b) : \varphi(c) = 0 \Rightarrow f(c) - C = 0 \Rightarrow f(c) = C.$$

□

**Замечание 8.4.2** Геометрически вторая теорема Больцано-Коши означает, что непрерывная на отрезке функция  $f$  принимая два каких-то значения, принимает на этом отрезке и все промежуточные. Эту теорему часто называют теоремой о промежуточных значениях непрерывной функции.

**Теорема 8.4.3 (Теорема Вейерштрасса)** Пусть  $f(x) \in C[a, b]$ . Тогда  $f(x)$  ограничена на  $[a, b]$  и принимает на нем наибольшее и наименьшее значение.

**Доказательство.**

Пусть  $x \in [a, b]$ . Так как функция  $f(x)$  непрерывна в точке  $x$ , то она ограничена в некоторой окрестности  $U(x)$  этой точки по теореме 8.3.1. Множество таких окрестностей  $U(x)$ ,  $x \in [a, b]$  образует покрытие отрезка  $[a, b]$ . По лемме Бореля-Лебега, существует конечное покрытие  $U(x_1), U(x_2), \dots, U(x_n)$ . В каждой окрестности  $U(x_i)$  имеем

$$x \in [a, b], x \in U(x_i) \Rightarrow m_i \leq f(x) \leq M_i.$$

Положив  $m = \min(m_1, \dots, m_n)$ ,  $M = \max(M_1, \dots, M_n)$  получим, что  $m \leq f(x) \leq M$  на  $[a, b]$ , то есть,  $f(x)$  ограничена.

Второй пункт будет доказан от противного. Пусть  $M = \sup_{x \in [a, b]} f(x)$ , причем супремум не достигается. Тогда функция

$$\varphi(x) = \frac{1}{M - f(x)}$$

непрерывна на  $[a, b]$ , а значит ограничена (по только что доказанному пункту 1), то есть существует положительное число  $M_1$ , что  $\varphi(x) \leq M_1$ . Но тогда

$$f(x) \leq M - \frac{1}{M_1}$$

и  $M$  – не супремум. Противоречие.  $\square$

#### **Теорема 8.4.4 (О существовании и непрерывности обратной функции)**

Пусть функция  $f(x)$  строго возрастает и непрерывна на отрезке  $[a, b]$ , причем  $f(a) = c$ ,  $f(b) = d$ . Тогда на отрезке  $[c, d]$  определена обратная функция  $x = f^{-1}(y)$ , которая непрерывна на  $[c, d]$  и строго возрастает.

**Доказательство.** Сначала будет показано, что обратная функция существует. По второй теореме Больцано - Коши,  $\forall y \in (c, d) \exists x \in (a, b) : f(x) = y$ . Кроме того, так как  $f(x)$  строго возрастает, то  $\forall x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ . Тогда  $f(x)$  – взаимно однозначное отображение отрезка  $[a, b]$  на отрезок  $[c, d]$ , а следовательно, существует обратная функция  $x = f^{-1}(y)$ , определенная на  $[c, d]$ .

Далее будет показано, что обратная функция строго возрастает. От противного, пусть  $\exists y_1 < y_2 : f^{-1}(y_1) = x_1 \geq x_2 = f^{-1}(y_2)$ . По условию  $f(x)$  возрастает. Подействовав ею на неравенство  $f(x_1) = y_1 \geq y_2 = f(x_2)$ , получается противоречие.

Осталось показать, что обратная функция непрерывна. Для этого достаточно установить, что  $f^{-1}(y_0 - 0) = f^{-1}(y_0) = f^{-1}(y_0 + 0)$  (для граничных значений отрезка равенства односторонние). От противного. Пусть, например,  $f^{-1}(y_0 - 0) \neq f^{-1}(y_0)$ . Тогда, в силу возрастания  $f^{-1}(y)$  она не принимает значений из интервала  $(f^{-1}(y_0 - 0), f^{-1}(y_0))$ . Противоречие.  $\square$

**Замечание 8.4.3** В предыдущей теореме строгое возрастание можно, с необходимыми изменениями порядка  $c$  и  $d$ , заменить на строгое убывание. Кроме того, вместо отрезка  $[a, b]$  можно рассматривать интервал, полуинтервал или луч.



## 8.5 Первый замечательный предел

Далее устанавливается равенство, которое будет часто использоваться в дальнейшем.

**Теорема 8.5.1 (Первый замечательный предел)**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

**Доказательство.** Пусть  $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ . Из геометрических соображений (рису-

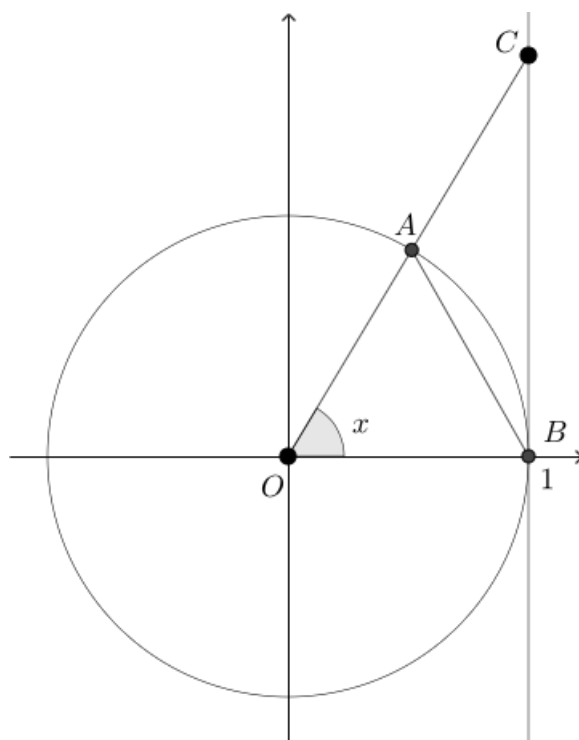


Рис. 6: Первый замечательный предел

нок 6) очевидно неравенство

$$S_{\triangle OAB} < S_{\text{сект. } OAB} < S_{\triangle OCB}.$$

Вычислив каждую из площадей, имеем

$$S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2} \cdot OB \cdot AM = \frac{1}{2} \cdot \sin x,$$

$$S_{\text{сект. } OAB} = \frac{\pi \cdot x}{2\pi} = \frac{x}{2},$$

$$S_{\triangle OCB} = \frac{1}{2} \cdot CB \cdot OB = \frac{1}{2} \cdot \operatorname{tg} x.$$

Тогда получаем цепочку неравенств

$$\frac{\sin x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\operatorname{tg} x}{2}$$

или

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x.$$

Поделив на  $\sin x$ , получается

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}.$$

Так как все функции, входящие в неравенство, четные, можно утверждать, что неравенство справедливо при  $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \setminus \{0\}$ . Попутно установлено, что

$$\sin x < x, \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right),$$

а значит, что

$$|\sin x| < |x|, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right). \quad (4)$$

Устремим  $x$  к 0, при этом заметив, что  $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$ , так как

$$|\cos x - 1| = |\cos x - \cos 0| = \left|2 \sin \frac{x}{2} \sin \frac{x}{2}\right| \leq \left|2 \sin \frac{x}{2}\right| < 2 \left|\frac{x}{2}\right| = |x| < \varepsilon,$$

где предпоследнее неравенство справедливо в силу (4). Положив  $\delta = \varepsilon$  получается, что  $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$ . Кроме того, предел правой части неравенства  $\lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1$ . Тогда по теореме о сжатой переменной

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

□

**Пример 8.5.1** *Вычислить предел*

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ctg} x (1 - \cos^2(2x))}{x^2 + 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x \sin^2(2x)}{x(x+5) \sin x}.$$

Так как  $\sin^2(2x) = 4 \sin^2 x \cos^2 x$ , получается

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \cos^3 x \sin^2 x}{x(x+5) \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \cos^3 x \sin x}{x(x+5)}.$$

По доказанному выше,  $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$ . Кроме того, так как  $\lim_{x \rightarrow 0} (x+5) = 5$  и учитывая первый замечательный предел,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \cos^3 x \sin x}{x(x+5)} = 4 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x+5} \lim_{x \rightarrow 0} \cos^3 x \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{4}{5}.$$

## 8.6 Непрерывность элементарных функций

**Определение 8.6.1** Основными элементарными функциями, или простейшими функциями, называются следующие функции:

1. Постоянная:  $y(x) = c, c \in \mathbb{R}$ .
2. Степенная:  $y(x) = x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$ .
3. Показательная  $y(x) = a^x, a > 0, a \neq 1$ .
4. Логарифмическая:  $y(x) = \log_a x, a > 0, a \neq 1$ .
5. Тригонометрические:  $y(x) = \sin x, y(x) = \cos x, y(x) = \operatorname{tg} x, y(x) = \operatorname{ctg} x$ .
6. Обратные тригонометрические:  $y(x) = \arcsin x, y(x) = \arccos x, y(x) = \operatorname{arctg} x, y(x) = \operatorname{arcctg} x$ .

Ниже подробно будет рассмотрена каждая из функций, с указанием области определения и свойств.

**Определение 8.6.2** Функции, которые получаются из основных элементарных функций с помощью конечного числа арифметических действий и операций композиции называются элементарными.

В виду того, что некоторые функции были определены в школе недостаточно строго, их определения будут дополнены.

**1. Постоянная функция.** Эта функция, как уже было отмечено в примере 8.1.1, непрерывна на  $\mathbb{R}$ .

**2. Степенная функция.** Функция  $x^\alpha$  будет определена при различных значениях  $x$  и  $\alpha$ , постепенно усложняя вид  $\alpha$ .

При  $\alpha = 1$  получается функция  $y(x) = x$ , которая, как отмечалось в примере 8.1.2, непрерывна на  $\mathbb{R}$ .

При  $\alpha = n \in \mathbb{N}$  по определению

$$x^n = x \cdot \dots \cdot x, \quad x \in \mathbb{R},$$

и функция непрерывна на  $\mathbb{R}$ , как произведение конечного числа непрерывных функций.

При  $\alpha = -n, n \in \mathbb{N}$ , полагаем

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

и функция непрерывна на  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ , как частное непрерывных функций.

При  $\alpha = 0$  по определению полагается  $x^0 = 1$  при  $x \neq 0$ . Удобно доопределить функцию по непрерывности и считать, что  $x^0 = 1$  при  $x \in \mathbb{R}$ .

При нечетном  $n \in \mathbb{N}$  функция  $x^n$  возрастает, причем  $\sup_{x \in \mathbb{R}} x^n = +\infty$ ,  $\inf_{x \in \mathbb{R}} x^n = -\infty$ , а значит, по теореме 8.4.4  $E(x^n) = \mathbb{R}$ . Если  $n \in \mathbb{N}$  четно, то функция  $x^n$  возрастает при  $x \geq 0$ ,  $\sup_{x \geq 0} x^n = +\infty$ ,  $\inf_{x \geq 0} x^n = 0$ . По теореме 8.4.4, существует и непрерывна обратная функция, обозначаемая  $x^{1/n}$  или  $\sqrt[n]{x}$ , причем

$$\begin{aligned} x^{1/n} : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, \quad n \text{ нечетно,} \\ x^{1/n} : [0, +\infty) &\rightarrow [0, +\infty), \quad n \text{ четно,} \end{aligned}$$

Ниже приведены свойства корня, хорошо известные из школы.

**Лемма 8.6.1** Пусть  $x, y \geq 0$  и  $m, n \in \mathbb{N}$ , тогда:

1.  $\sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[nm]{x}$ .
2.  $\sqrt[n]{x} = \sqrt[nm]{x^m}$ .
3.  $\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x} \sqrt[n]{y}$ .
4.  $\sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}, y \neq 0$ .

**Доказательство.** Все свойства доказываются исходя из определения. Для примера будет доказано первое свойство. Пусть  $z = \sqrt[n]{\sqrt[m]{x}}$ , тогда  $z^n = \sqrt[m]{x}$  и  $z^{nm} = x$ , откуда  $z = \sqrt[nm]{x}$ .  $\square$

Описанные выше свойства справедливы и при  $x, y < 0$ , если указанные корни существуют. Пусть  $\alpha \in \mathbb{Q}$ , причем  $\alpha = \frac{p}{q} = r$ , где последняя дробь несократима. Положим

$$x^r = (x^p)^{1/q}$$

для всех тех  $x$ , при которых правая часть имеет смысл. Таким образом, функция  $x^r$  определена в следующих случаях:

$$\begin{aligned} x &> 0, \quad \forall r \in \mathbb{Q}, \\ x &= 0, \quad r \geq 0, \\ x &\in \mathbb{R}, \quad q \text{ нечетно.} \end{aligned}$$

Функция  $x^r$  непрерывна на области определения, возрастает на  $[0, +\infty)$  при  $r > 0$ , убывает на  $(0, +\infty)$  при  $r < 0$ . Ниже приведены свойства рациональной степени.

**Лемма 8.6.2** Пусть  $x, y > 0$ ,  $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$ , тогда:

$$1. x^{-r_1} = \frac{1}{x^{r_1}}.$$

$$2. x^{r_1} x^{r_2} = x^{r_1+r_2}.$$

$$3. (x^{r_1})^{r_2} = x^{r_1 r_2}.$$

$$4. x^{r_1} y^{r_1} = (xy)^{r_1}.$$

**Доказательство.** Первое свойство.

$$x^{-r_1} = x^{-\frac{m}{n}} = (x^{-m})^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x^{-m}} = \sqrt[n]{\frac{1}{x^m}} = \frac{1}{\sqrt[n]{x^m}} = \frac{1}{x^{r_1}}.$$

Второе свойство. Пользуясь свойствами корней,

$$\begin{aligned} x^{r_1} x^{r_2} &= \sqrt[n_1]{x^{m_1}} \sqrt[n_2]{x^{m_2}} = \sqrt[n_1 n_2]{x^{m_1 n_2}} \sqrt[n_2 n_2]{x^{n_1 m_2}} = \\ &= \sqrt[n_1 n_2]{x^{m_1 n_2 + n_1 m_2}} = x^{\frac{m_1 n_2 + n_1 m_2}{n_1 n_2}} = x^{r_1} x^{r_2}. \end{aligned}$$

Остальные свойства доказываются аналогично.  $\square$

На рисунке 7 изображены графики степенных функций при различных  $\alpha$  при  $x > 0$ .

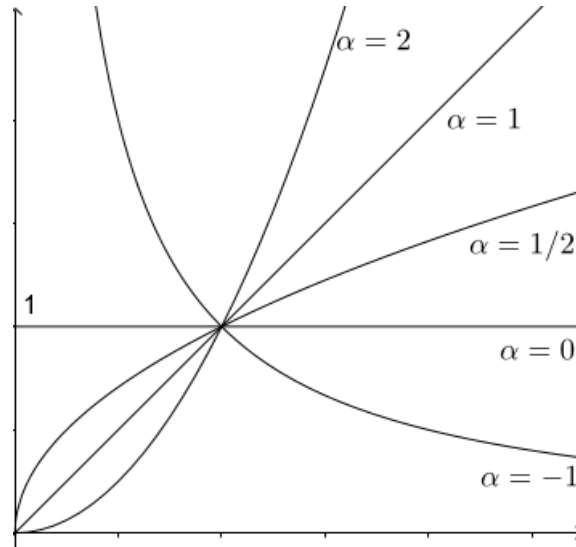


Рис. 7: Графики степенных функций

Для  $\alpha \in \mathbb{I}$  определение степенной функции будет закончено ниже.

**3. Показательная функция.** Пусть  $0^x = 0$  для  $x > 0$ . Пусть  $a > 0$ . Цель данного пункта – определить  $a^x$  для  $x \in \mathbb{R}$ . Пока что значение  $a^x$  определено лишь при  $x \in \mathbb{Q}$ . Эта функция обладает следующими свойствами, хорошо известными из школы. Ниже эти свойства сформулированы, хотя часть из них уже была доказана выше.

**Лемма 8.6.3** Пусть  $r, s \in \mathbb{Q}$ ,  $a, b > 0$ , тогда

1. Если  $r < s$ , то  $a^r < a^s$  при  $a > 1$  и  $a^s < a^r$  при  $0 < a < 1$ .

2.  $a^{r+s} = a^r a^s$ .

3.  $(a^r)^s = a^{rs}$ .

4.  $(ab)^r = a^r b^r$ .

**Доказательство.** 1. Исходя из принципа индукции получается, что если  $x, y > 0$ , то

$$(x < y) \Leftrightarrow (x^n < y^n),$$

причем

$$(x = y) \Leftrightarrow (x^n = y^n).$$

Тогда, если  $a > 1$ , то  $a^{\frac{1}{n}} > 1$  при натуральных  $n$  (если предположить  $x = a^{\frac{1}{n}} \leq 1$ , то это означает, что  $x^n = a > 1$ , что противоречит вышесказанному). Кроме того, аналогично предыдущему при натуральных  $m$  выполняется  $(a^m)^{\frac{1}{n}} > 1$ . Тогда

$$a^s = a^r \cdot a^{s-r} > a^r.$$

Остальные свойства доказаны в лемме 8.6.2. □

**Определение 8.6.3** Пусть  $a > 0$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,  $r \in \mathbb{Q}$ . По определению,

$$a^x = \lim_{r \rightarrow x} a^r.$$

При  $a > 0$ ,  $a \neq 1$  полученная функция называется показательной функцией с основанием  $a$ .

Для того, чтобы введенное определение было корректным, необходимо доказать, что данный предел существует, и что для рациональных  $x$  новое определение совпадает со старым.

**Лемма 8.6.4** Пусть  $a > 0$ ,  $r_n \in \mathbb{Q}$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0$ , тогда  $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{r_n} = 1$ .

**Доказательство.** При  $a = 1$  лемма выполняется, так как  $1^{r_n} = 1$ . В частном случае, при  $r_n = \frac{1}{n}$  уже доказано, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1.$$

Пусть  $a > 1$ ,  $\varepsilon > 0$ ,  $r_n$  произвольна, тогда можно выбрать  $n_0$  такой, что

$$1 - \varepsilon < a^{-1/n_0} < a^{1/n_0} < 1 + \varepsilon.$$

Так как  $r_n \rightarrow 0$ , то найдется номер  $n_1$ , что при  $n > n_1$

$$-\frac{1}{n_0} < r_n < \frac{1}{n_0}.$$

В силу леммы 8.6.3,

$$1 - \varepsilon < a^{-1/n_0} < a^{r_n} < a^{1/n_0} < 1 + \varepsilon,$$

что и означает, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{r_n} = 1$ .

Если  $0 < a < 1$ , то  $\frac{1}{a} > 1$  и

$$a^{r_n} = \frac{1}{(1/a)^{r_n}} \rightarrow 1.$$

□

**Лемма 8.6.5** Пусть  $a > 0$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,  $r_n \in \mathbb{Q}$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = x$ . Тогда последовательность  $a^{r_n}$  имеет предел.

**Доказательство.** При  $a = 1$  лемма, очевидно, выполняется. Пусть  $a > 1$ . Пусть  $s_n$  – возрастающая последовательность рациональных чисел, сходящаяся к  $x$ . Тогда, согласно лемме 8.6.3, последовательность  $a^{s_n}$  возрастает и ограничена сверху числом  $a^{[x]+1}$ , а значит, по теореме Вейерштрасса, имеет предел. Значит,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{s_n} = A$ . Но тогда

$$a^{r_n} = a^{r_n - s_n} a^{s_n} \rightarrow A,$$

так как по предыдущей лемме  $a^{r_n - s_n} \rightarrow 1$ .

Если  $0 < a < 1$ , то  $\frac{1}{a} > 1$  и по доказанному  $(\frac{1}{a})^{r_n} = A > 0$ . Тогда

$$a^{r_n} = \frac{1}{(1/a)^{r_n}} \rightarrow \frac{1}{A}.$$

□

Данная лемма устанавливает корректность определения  $a^x$ . Во-первых, так как для любой последовательности рациональных чисел предел существует, то он один и тот же (это доказывается аналогично доказательству в критерии Коши). Если же  $x \in \mathbb{Q}$ , то положим  $r_n = x$  получаем, что новое определение совпадает со старым.

**Замечание 8.6.1** Последовательность  $s_n$ , выбранная в доказательстве леммы, существует. Например, можно взять  $s_n = \frac{[10^n x]}{10^n}$ . Детальная проверка оставляется читателю.

Ниже приведены основные свойства функции  $a^x$ .

**Лемма 8.6.6** Функция  $a^x$  возрастает на  $\mathbb{R}$  при  $a > 1$  и убывает на  $\mathbb{R}$  при  $0 < a < 1$ .

**Доказательство.** Пусть  $a > 0$ ,  $x < y$ . Нужно показать, что  $a^x < a^y$ . Пусть числа  $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$  такие, что

$$x < r_1 < r_2 < y$$

и последовательности  $r_n^1 < x$ ,  $r_n^2 > y$  такие, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n^1 = x$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n^2 = y$ . В силу монотонности показательной функции при рациональном аргументе,

$$a^{r_n^1} < a^{r_1} < a^{r_2} < a^{r_n^2}$$

и по теореме о предельном переходе в неравенствах

$$a^x \leq a^{r_1} < a^{r_2} \leq a^y.$$

Случай  $0 < a < 1$  разбирается аналогично. □

**Лемма 8.6.7**  $a^{x+y} = a^x a^y$ , где  $x \in \mathbb{R}$  и  $y \in \mathbb{R}$ .

**Доказательство.** Пусть  $r_n^1, r_n^2 \in \mathbb{Q}$ , причем  $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n^1 = x$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n^2 = y$ . Так как

$$a^{r_n^1 + r_n^2} = a^{r_n^1} a^{r_n^2},$$

то переходя к пределу в этом равенстве, получается требуемое. □

**Лемма 8.6.8** Показательная функция непрерывна на  $\mathbb{R}$ .

**Доказательство.** Уже доказано, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1.$$

Пусть  $a > 1$ ,  $\varepsilon > 0$ ,  $x_n$  — произвольная последовательность, стремящаяся к нулю, тогда можно выбрать  $n_0$  такой, что

$$1 - \varepsilon < a^{-1/n_0} < a^{1/n_0} < 1 + \varepsilon.$$

Так как  $x_n \rightarrow 0$ , то найдется номер  $n_1$ , что при  $n > n_1$

$$-\frac{1}{n_0} < x_n < \frac{1}{n_0}.$$



В силу леммы 8.6.3,

$$1 - \varepsilon < a^{-1/n_0} < a^{x_n} < a^{1/n_0} < 1 + \varepsilon,$$

что и означает, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{x_n} = 1$ .

Если  $0 < a < 1$ , то  $\frac{1}{a} > 1$  и

$$a^{x_n} = \frac{1}{(1/a)^{x_n}} \rightarrow 1.$$

Непрерывность в произвольной точке  $x_0$  следует из непрерывности в нуле, так как

$$a^{x_0 + \Delta x} - a^{x_0} = a^{x_0}(a^{\Delta x} - 1) \rightarrow 0.$$

□

**Лемма 8.6.9**  $(a^x)^y = a^{xy}$ .

**Доказательство.** Пусть  $x_n, y_n \in \mathbb{Q}$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$ . Согласно лемме 8.6.3,

$$(a^{x_n})^{y_m} = a^{x_n y_m}.$$

Пусть  $m$  фиксировано, а  $n \rightarrow \infty$ . По определению показательной функции

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^{x_n y_m} = a^{x y_m}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a^{x_n} = a^x.$$

В силу непрерывности степенной функции с рациональным показателем,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a^{x_n})^{y_m} = a^{x y_m}.$$

Теперь пусть  $m \rightarrow \infty$ , тогда в силу непрерывности показательной функции получим требуемое. □

**Лемма 8.6.10**  $(ab)^x = a^x b^x$ .

**Доказательство.** Для доказательства нужно осуществить предельный переход в равенстве для степеней с рациональным показателем. Детали оставляем читателю. □

**Лемма 8.6.11**  $E(a^x) = (0, +\infty)$ .

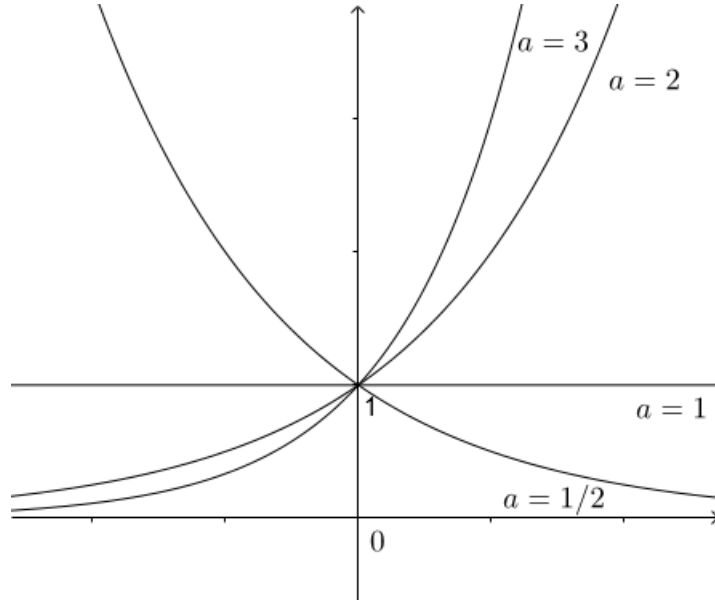


Рис. 8: Графики показательных функций

**Доказательство.** Пусть  $a > 1$ . Функция  $a^x$  строго возрастает, причем  $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$ , а  $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$ . Согласно теореме Больцано-Коши,  $E(a^x) = (0, +\infty)$ .

Случай  $0 < a < 1$  разбирается аналогично.  $\square$

Графики показательных функции при различных основаниях  $a$  представлены на рисунке 8.

**4. Логарифмическая функция.** Выше показано, что функция  $a^x$  является биекцией между  $\mathbb{R}$  и  $(0, \infty)$ .

**Определение 8.6.4** Пусть  $a > 0, a \neq 1$ . Функция, обратная к  $a^x$ , называется логарифмом по основанию  $a$  и обозначается  $\log_a x$ .

Из теоремы 8.4.4 следует, что  $\log_a x : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , непрерывна на области определения, возрастает при  $a > 1$  и убывает при  $0 < a < 1$ . Кроме того,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = \begin{cases} +\infty, & a > 1 \\ -\infty, & 0 < a < 1 \end{cases}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \log_a x = \begin{cases} -\infty, & a > 1 \\ +\infty, & 0 < a < 1 \end{cases}.$$

Из определения логарифмической функции и свойств показательной вытекают все свойства логарифма, хорошо известные из школы. Ниже приведены некоторые из них.

**Лемма 8.6.12** Справедливы следующие равенства

1.  $a^{\log_a x} = x$  при  $x > 0$ .
2.  $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$  при  $x, y > 0$ .

$$3. \log_a x^p = p \log_a x \text{ при } x > 0.$$

$$4. \log_{a^p} x = \frac{1}{p} \log_a x \text{ при } x > 0$$

$$5. \log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a} \text{ при } x > 0.$$

**Доказательство.** Все данные свойства доказываются одинаково, используя свойства показательной функции. Например, так как

$$a^{\log_a x + \log_a y} = a^{\log_a x} a^{\log_a y} = xy,$$

то  $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$ . □

Часто бывает удобно использовать логарифм по основанию  $e$ . Такой логарифм называется, как известно, натуральным логарифмом и обозначается  $\ln x$ .

Графики логарифмических функций при различных основаниях  $a$  изображены на рисунке 9.

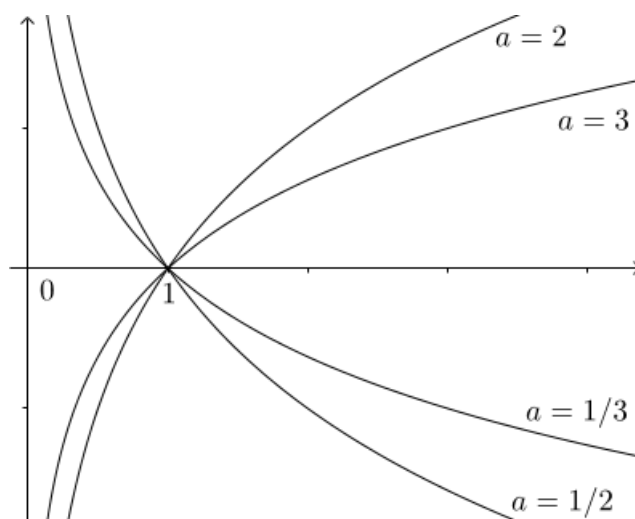


Рис. 9: Графики логарифмических функций

**2'. Степенная функция (продолжение).** При всех  $x > 0$  и  $\alpha \in \mathbb{R}$  верно представление

$$x^\alpha = e^{\alpha \ln x},$$

а значит степенная функция  $x^\alpha$  непрерывна на  $(0, \infty)$  при всех  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

**5. Тригонометрические функции.** Далее будут использованы школьные определения функций  $\sin x$  и  $\cos x$ , как ординаты и абсциссы точки единичной окружности, а также все формулы, выведенные на основе данного определения.

**Лемма 8.6.13** *Справедливо неравенство*

$$|\sin x| \leq |x|, \quad x \in \mathbb{R},$$

причем равенство имеет место только при  $x = 0$ .

**Доказательство.** При  $|x| \leq \frac{\pi}{2}$  неравенство доказано в доказательстве теоремы 8.5.1. При  $x \geq \frac{\pi}{2}$  получается

$$\sin x \leq 1 < \frac{\pi}{2} \leq x.$$

Аналогично рассматривается случай  $x \leq -\frac{\pi}{2}$ . □

**Теорема 8.6.1** *Функции  $\sin x$ ,  $\cos x$  непрерывны при  $x \in \mathbb{R}$ .*

**Доказательство.** Пусть  $x_0 \in \mathbb{R}$ , тогда

$$\begin{aligned} |\sin x - \sin x_0| &= 2 \left| \sin \frac{x - x_0}{2} \cos \frac{x + x_0}{2} \right| \leq 2 \left| \sin \frac{x - x_0}{2} \right| \leq \\ &\leq 2 \left| \frac{x - x_0}{2} \right| = |x - x_0| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Взяв  $\delta = \varepsilon$  получается требуемое.

Непрерывность функции  $\cos x$  доказывается аналогично, или используя представление  $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ . □

Графики функций  $\sin x$ ,  $\cos x$  представлены на рисунках 10, 11.

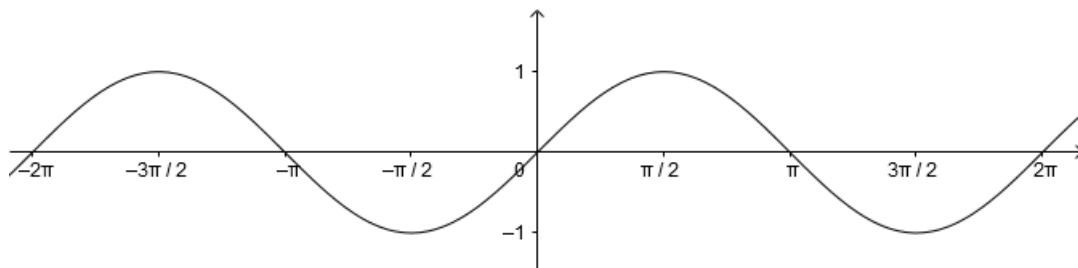


Рис. 10: График функции  $y = \sin x$

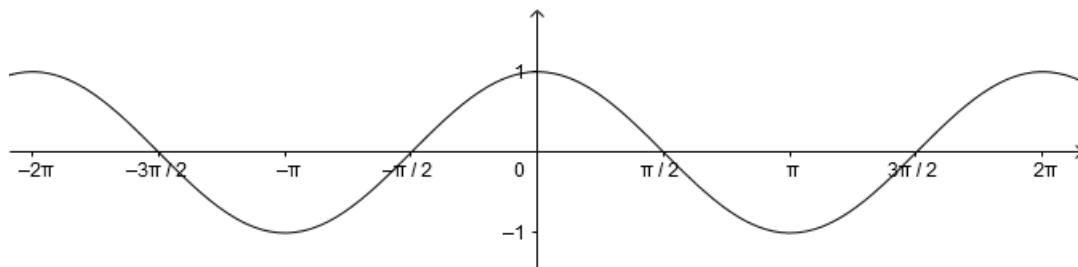


Рис. 11: График функции  $y = \cos x$

### Следствие 8.6.2 *Функции*

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + \pi k : k \in \mathbb{Z} \right\},$$

$$\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{ \pi k : k \in \mathbb{Z} \}$$

непрерывны на своих областях определения.

**Доказательство.** Доказательство немедленно следует из непрерывности функций  $\sin x$  и  $\cos x$  и теоремы о непрерывности частного.  $\square$

Графики функций  $\operatorname{tg} x$  и  $\operatorname{ctg} x$  представлены на рисунке 12.

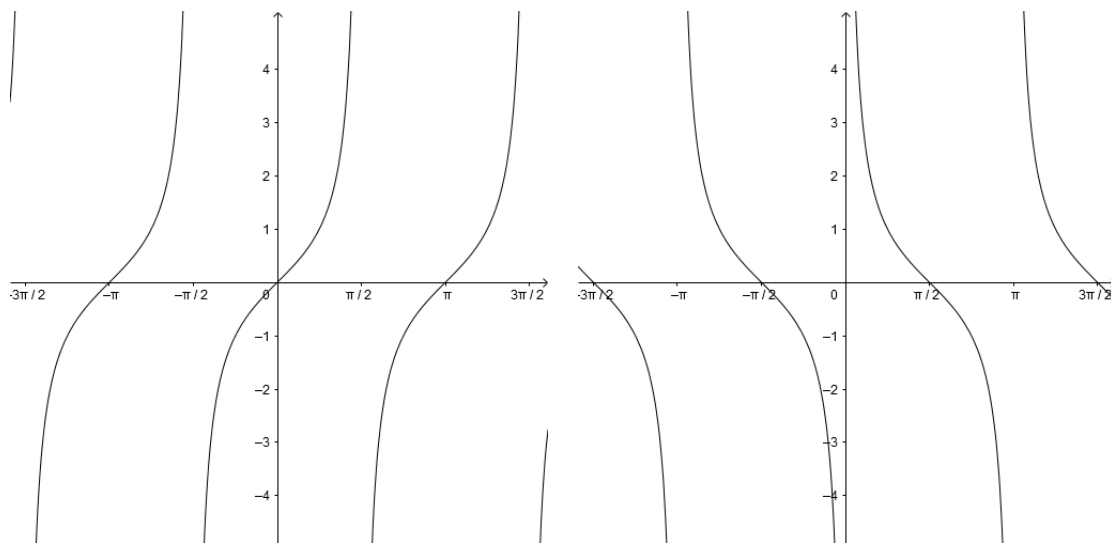


Рис. 12: Графики функций  $y = \operatorname{tg} x$  (слева) и  $y = \operatorname{ctg} x$  (справа)

**6. Обратные тригонометрические функции.** Функция  $\sin x : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$  не является обратимой, так как каждое свое значение она принимает более одного раза (даже бесконечное число раз). Однако функция  $\sin x : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$  возрастает и поэтому обратима.

**Определение 8.6.5** Пусть  $\sin x : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$ . Обратная к данной функции функция называется *арксинусом* и обозначается  $\arcsin x$ .

**Лемма 8.6.14** *Функция*

$$\arcsin x : [-1, 1] \rightarrow \left[ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$$

возрастает и непрерывна на всей области определения.

**Доказательство.** Немедленно следует из теоремы 8.4.4.  $\square$

График функции  $y = \arcsin x$  представлен на рисунке 13.

Функция  $\cos x : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$  не является обратимой, однако функция  $\cos x : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$  убывает и поэтому обратима.

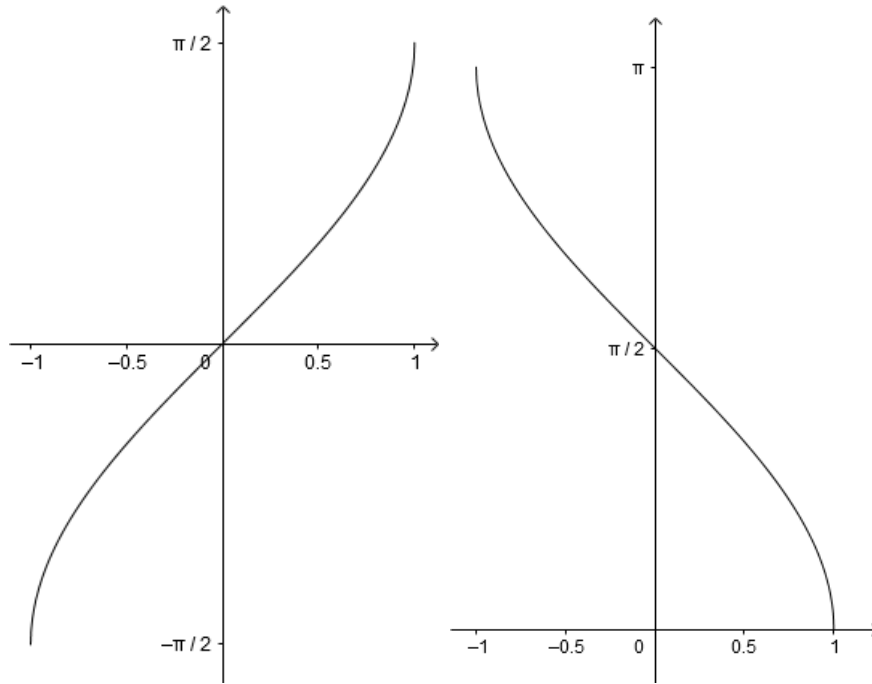


Рис. 13: Графики функций  $y = \arcsin x$  (слева) и  $y = \arccos x$  (справа)

**Определение 8.6.6** Пусть  $\cos x : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ . Обратная к данной функции функция называется арккосинусом и обозначается  $\arccos x$ .

**Лемма 8.6.15** Функция

$$\arccos x : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$$

убывает и непрерывна на всей области определения.

**Доказательство.** Немедленно следует из теоремы 8.4.4. □

График функции  $y = \arccos x$  представлен на рисунке 13.

Функция  $\operatorname{tg} x$  не является обратимой, однако функция  $\operatorname{tg} x : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$  возрастает и поэтому обратима.

**Определение 8.6.7** Пусть  $\operatorname{tg} x : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$ . Обратная к данной функции функция называется арктангенсом и обозначается  $\operatorname{arctg} x$ .

**Лемма 8.6.16** Функция

$$\operatorname{arctg} x : \mathbb{R} \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

возрастает и непрерывна на всей области определения.

**Доказательство.** Немедленно следует из теоремы 8.4.4. □

График функции  $y = \operatorname{arctg} x$  представлен на рисунке 14.

Функция  $\operatorname{ctg} x$  не является обратимой, однако функция  $\operatorname{ctg} x : (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$  убывает и поэтому обратима.

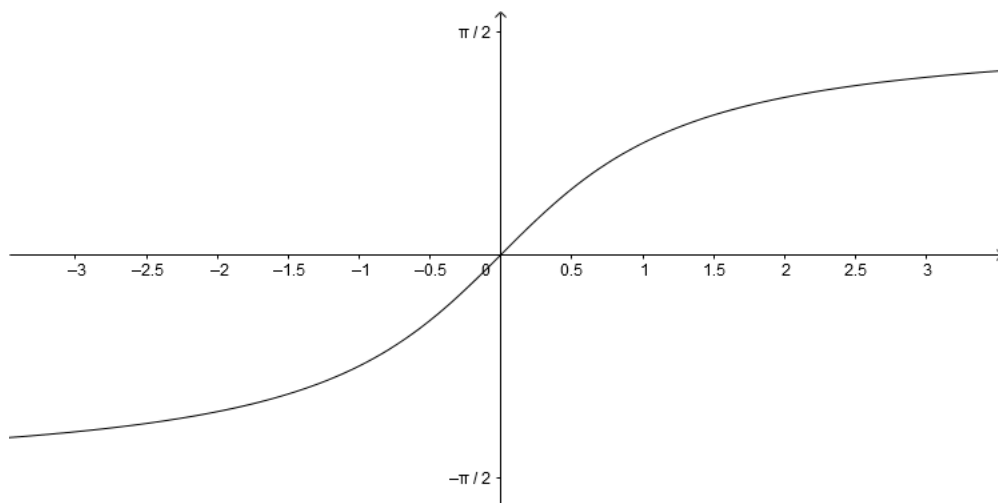


Рис. 14: График функции  $y = \operatorname{arctg} x$

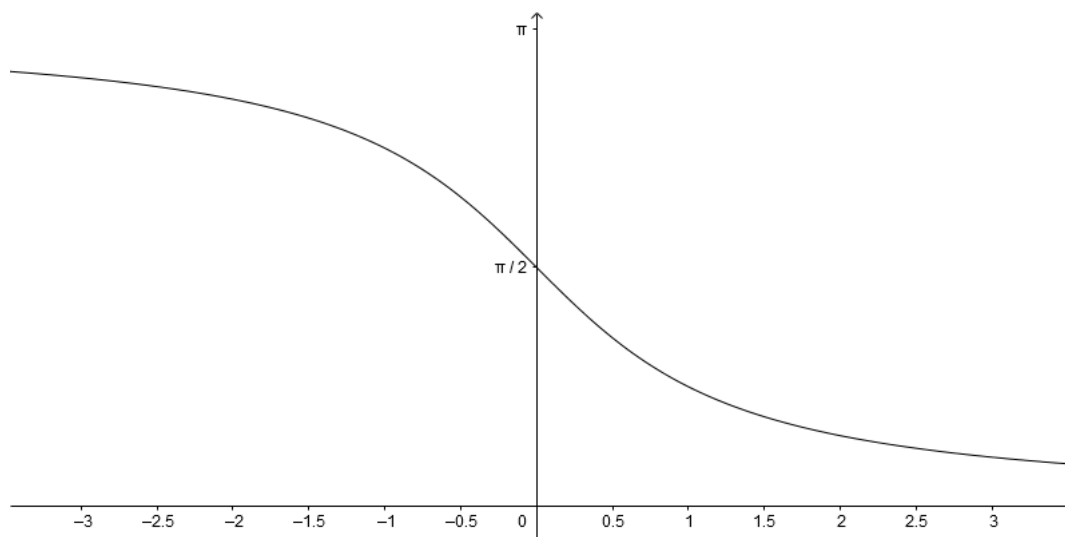


Рис. 15: График функции  $y = \operatorname{arcctg} x$

**Определение 8.6.8** Пусть  $\operatorname{ctg} x : (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ . Обратная к данной функции функция называется *арккотангенсом* и обозначается  $\operatorname{arcctg} x$ .

**Лемма 8.6.17** Функция

$$\operatorname{arcctg} x : \mathbb{R} \rightarrow (0, \pi)$$

*убывает и непрерывна на всей области определения.*

**Доказательство.** Немедленно следует из теоремы 8.4.4. □

Выше определены основные элементарные функции и доказано, что все они непрерывны на своих областях определения. Так как арифметические операции и композиция не выводят за класс непрерывных функций (в силу локальных свойств), то справедлива следующая теорема.

**Теорема 8.6.3** Все элементарные функции непрерывны на своей области определения.

## 8.7 Второй замечательный предел

**Теорема 8.7.1**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

**Доказательство.** Функция

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x,$$

задана при  $x \in \mathbb{R} \setminus [-1, 0]$ . Пусть  $x_n \in \mathbb{R} \setminus [-1, 0]$ ,  $x_n \rightarrow \infty$ . Достаточно показать, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = e$ .

1. Пусть  $x_n \in \mathbb{N}$ . Пусть  $\varepsilon > 0$ . Согласно второму замечательному пределу для последовательностей,

$$\exists k_0 : \forall k > k_0 \Rightarrow |f(k) - e| < \varepsilon.$$

Так как  $x_n \in \mathbb{N}$ , то  $x_n \rightarrow +\infty$  и

$$\exists n_0 : \forall n > n_0 \Rightarrow x_n > k_0,$$

а значит

$$|f(x_n) - e| < \varepsilon,$$

что и означает, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = e$ .

2. Пусть  $x_n \rightarrow +\infty$ . Тогда, начиная с некоторого номера,  $x_n > 1$ . Не нарушая общности можно считать, что  $x_n$  всегда больше 1. Очевидна цепочка неравенств

$$\left(1 + \frac{1}{[x_n] + 1}\right)^{[x_n]} \leq \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} \leq \left(1 + \frac{1}{[x_n]}\right)^{[x_n] + 1},$$

которую можно переписать в виде

$$\frac{f([x_n] + 1)}{1 + \frac{1}{[x_n] + 1}} \leq f(x_n) \leq f([x_n]) \left(1 + \frac{1}{[x_n]}\right).$$

Так как  $[x_n] + 1$  и  $[x_n]$  — последовательности натуральных чисел, стремящиеся к  $+\infty$ , по доказанному в пункте 1 имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f([x_n] + 1) = e, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f([x_n]) = e,$$



а значит, по теореме о сжатой переменной,  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = e$ .

3. Пусть  $x_n \rightarrow -\infty$ . Можно считать, что  $x_n < -2$ . Если положить  $y_n = -x_n$ , то  $y_n \rightarrow +\infty$  и  $y_n - 1 \rightarrow +\infty$ . Так как

$$f(x_n) = \left(1 + \frac{1}{-y_n}\right)^{-y_n} = \left(\frac{y_n}{y_n - 1}\right)^{y_n} = \left(1 + \frac{1}{y_n - 1}\right) f(y_n - 1)$$

и по доказанному в пункте 2,  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n - 1) = e$ , получается требуемое.

4. Пусть  $x_n \rightarrow \infty$ ,  $x_n \in \mathbb{R} \setminus [-1, 0]$ . Если число отрицательных (положительных) членов последовательности  $x_n$  конечно, то  $x_n \rightarrow +\infty$  ( $x_n \rightarrow -\infty$ ). Если же количество положительных и отрицательных членов последовательности бесконечно, то натуральный ряд разбивается на две подпоследовательности  $n_k$  и  $n_p$  так, что  $x_{n_k} > 0$ ,  $x_{n_p} < 0$ . По доказанному,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = \lim_{p \rightarrow \infty} f(x_{n_p}) = e.$$

Пусть  $\varepsilon > 0$ , тогда

$$\exists k_0 : \forall k > k_0 \Rightarrow |f(x_{n_k}) - e| < \varepsilon,$$

$$\exists p_0 : \forall p > p_0 \Rightarrow |f(x_{n_p}) - e| < \varepsilon.$$

Тогда пусть  $n_0 = \max(n_{k_0}, n_{p_0})$ , тогда при  $n > n_0$  либо  $n = n_k$  при  $k > k_0$ , либо  $n = n_p$  при  $p > p_0$ , значит

$$|f(x_n) - e| < \varepsilon,$$

то есть  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = e$ . □

## 8.8 Следствия замечательных пределов

Ниже приведены важные следствия первого и второго замечательных пределов, часто используемые в дальнейшем.

### Лемма 8.8.1

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1.$$

**Доказательство.** Действительно,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \frac{1}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = 1,$$

где в последнем равенстве используется первый замечательный предел и непрерывность функции  $\cos x$ . □

### Лемма 8.8.2

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1.$$

**Доказательство.** Пусть  $y = \operatorname{arctg} x$ . Так как  $x \rightarrow 0$  и функция  $\operatorname{arctg} x$  непрерывна, то  $y \rightarrow 0$ . Тогда

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\operatorname{tg} y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\operatorname{tg} y}{y}} = 1$$

по только что доказанному. □

**Замечание 8.8.1** Замена, проведенная в доказательстве выше, требует обоснования. Пусть  $x_n \rightarrow 0$ ,  $x_n \neq 0$ . Нужно вычислить

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{arctg} x_n}{x_n}.$$

Обозначив  $y_n = \operatorname{arctg} x_n$ , в силу непрерывности функции  $\operatorname{arctg} x$  последовательность  $y_n$  стремится к 0. Кроме того, так как  $x_n \neq 0$ , то и  $y_n \neq 0$ . Тогда

$$\frac{\operatorname{arctg} x_n}{x_n} = \frac{y_n}{\operatorname{tg} y_n}.$$

Последний предел, как показано выше, равен 1, а значит для любой последовательности  $y_n$  такой, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$ ,  $y_n \neq 0$  выполняется

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n}{\operatorname{tg} y_n} = 1.$$

Тем самым выполнено определение по Гейне и

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$$

### Лемма 8.8.3

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1.$$

**Доказательство.** Пусть  $y = \sin x$ . Так как  $x \rightarrow 0$  и функция  $\sin x$  непрерывна, то и  $y \rightarrow 0$ . Тогда

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\sin y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\sin y}{y}} = 1.$$

Обоснование замены проводится аналогично замечанию 8.8.1. □

**Лемма 8.8.4**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

**Доказательство.** Домножив числитель и знаменатель на  $(1 + \cos x)$  и воспользовавшись первым замечательным пределом и непрерывностью функции  $\cos x$ , получается

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2(1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2(1 + \cos x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin x}{x} \right)^2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \cos x} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

□

**Лемма 8.8.5**

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

**Доказательство.** Пусть  $y = \frac{1}{x}$ , тогда  $y \rightarrow \infty$  и

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{y \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{y} \right)^y = e.$$

Замена обосновывается так же, как и в замечании 8.8.1.

□

**Лемма 8.8.6**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1 + x)}{x} = \frac{1}{\ln a}.$$

В частности,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1.$$

**Доказательство.** В силу формулы замены основания, достаточно доказать второе равенство. Так как логарифм непрерывен, то

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln(1 + x) = \lim_{x \rightarrow 0} \ln(1 + x)^{\frac{1}{x}} = \ln \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = \ln e = 1.$$

□

**Лемма 8.8.7**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + x)^s - 1}{sx} = 1, \quad s \in \mathbb{R}.$$

**Доказательство.** Пусть  $y = (1+x)^s - 1$ . В силу непрерывности степенной функции, при  $x \rightarrow 0$  и  $y \rightarrow 0$ . Кроме того,  $\ln(1+y) = s \ln(1+x)$  и

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^s - 1}{sx} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{y}{s \ln(1+y)} \frac{s \ln(1+x)}{x} \right) = 1.$$

Замена обосновывается так же, как и в замечании 8.8.1. □

### Лемма 8.8.8

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a.$$

В частности,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

**Доказательство.** Пусть  $y = a^x - 1$ , откуда  $x = \log_a(1+y)$  и при  $x \rightarrow 0$  выполняется и  $y \rightarrow 0$ . Тогда

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\log_a(1+y)} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\log_a(1+y)}{y}} = \ln a.$$

Замена обосновывается так же, как и в замечании 8.8.1. □

## 8.9 Асимптотическое сравнение функций

**Определение 8.9.1** Пусть  $f, g : E \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0$  – предельная для  $E$  и существует окрестность  $\overset{o}{U}(x_0)$  такая, что  $f(x) = \alpha(x)g(x)$  при  $x \in \overset{o}{U}(x_0) \cap E$ .

1. Если  $\alpha(x)$  ограничена на  $\overset{o}{U}(x_0) \cap E$ , то говорят, что функция  $f(x)$  есть *O* большое от функции  $g(x)$  при  $x \rightarrow x_0$  (или что функция  $f(x)$  ограничена по сравнению с функцией  $g(x)$  при  $x \rightarrow x_0$ ) и пишут

$$f(x) = O(g(x)), \quad x \rightarrow x_0.$$

2. Если  $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$ , то говорят, что функция  $f(x)$  есть *o* малое от функции  $g(x)$  при  $x \rightarrow x_0$  (или что функция  $f(x)$  бесконечно малая по сравнению с функцией  $g(x)$  при  $x \rightarrow x_0$ ) и пишут

$$f(x) = o(g(x)), \quad x \rightarrow x_0.$$

3. Если  $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 1$ , то говорят, что функция  $f(x)$  эквивалентна функции  $g(x)$  при  $x \rightarrow x_0$  и пишут

$$f(x) \sim g(x), \quad x \rightarrow x_0.$$

**Лемма 8.9.1** В случае, когда в  $\overset{o}{U}(x_0)$  выполняется  $g(x) \neq 0$ , то определениям можно дать более простой вид.

1.  $f(x) = O(g(x))$  при  $x \rightarrow x_0$  равносильно тому, что  $\frac{f(x)}{g(x)}$  ограничена на  $\overset{o}{U}(x_0) \cap E$ .
2.  $f(x) = o(g(x))$  при  $x \rightarrow x_0$  равносильно тому, что  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ .
3.  $f(x) \sim g(x)$  при  $x \rightarrow x_0$  равносильно тому, что  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ .

**Доказательство.** Первое утверждение. Пусть функция  $\alpha(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$  ограничена на  $\overset{o}{U}(x_0) \cap E$ . Тогда на  $\overset{o}{U}(x_0) \cap E$  выполняется

$$|\alpha(x)| = \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| \leq C,$$

а значит  $f(x) = \alpha(x)g(x)$  и  $\alpha(x)$  ограничена.

Обратно, пусть  $f(x) = \alpha(x)g(x)$  и  $\alpha(x)$  ограничена. Тогда и  $\alpha(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$  ограничена.

Остальные пункты доказываются аналогично и остаются в качестве упражнения.  $\square$

**Пример 8.9.1** Доказать, что

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{a^x} = 0, \quad a > 1,$$

то есть  $x = o(a^x)$  при  $x \rightarrow +\infty$ ,  $a > 1$ .

Действительно, справедливы неравенства

$$\frac{[x]}{a \cdot a^{[x]}} \leq \frac{x}{a^x} \leq \frac{[x] + 1}{a^{[x]+1}} a.$$

Известно, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{a^n} = 0, \quad a > 1,$$

значит если  $\varepsilon > 0$ , то найдется номер  $n_0$ , что при  $n > n_0$  выполняется

$$0 < \frac{n}{a^n} < \varepsilon.$$

Так как  $x \rightarrow +\infty$ , то найдется  $\delta$ , что при  $x > \frac{1}{\delta} \Rightarrow [x] > n_0$ , а значит

$$0 < \frac{[x]}{a \cdot a^{[x]}} \leq \frac{\varepsilon}{a}, \quad 0 < \frac{[x] + 1}{a^{[x]+1}} a < \varepsilon a,$$

что и означает требуемое.

**Пример 8.9.2** Используя предыдущий пример не сложно показать, что  $x^s = o(a^x)$  при  $x \rightarrow +\infty$ ,  $a > 1$ ,  $s \in \mathbb{R}$ .

**Пример 8.9.3** Доказать, что  $\log_a^\alpha x = o(x^s)$  при  $x \rightarrow +\infty$ ,  $s > 0$ . Пусть  $a > 1$ , тогда достаточно вычислить

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log_a^\alpha x}{x^s}.$$

Пусть  $t = \log_a x$ . Ясно, что  $t \rightarrow +\infty$  и

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log_a^\alpha x}{x^s} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^\alpha}{a^{ts}} = 0$$

по только что доказанному. Замена обосновывается так же, как и в замечании 8.8.1. Случай  $0 < a < 1$  остается в качестве упражнения.

**Определение 8.9.2** Если  $f(x) = o(g(x))$  при  $x \rightarrow x_0$  и функция  $g(x)$  является бесконечно малой при  $x \rightarrow x_0$ , то функция  $f(x)$  называется бесконечно малой более высокого порядка, чем функция  $g(x)$  при  $x \rightarrow x_0$ .

**Определение 8.9.3** Если  $f(x) = o(g(x))$  при  $x \rightarrow x_0$  и функция  $f(x)$  является бесконечно большой при  $x \rightarrow x_0$ , то функция  $g(x)$  называется бесконечно большой более высокого порядка, чем функция  $f(x)$  при  $x \rightarrow x_0$ .

Ниже приведены правила обращения с символами  $O$  и  $o$ .

**Лемма 8.9.2** При  $x \rightarrow x_0$  справедливы равенства:

1.  $o(f) + o(f) = o(f)$ .
2.  $O(f) + O(f) = O(f)$ .
3.  $o(f) + O(f) = O(f)$ .
4.  $o(f)$  является и  $O(f)$ , но не наоборот.
5.  $g(x)o(f(x)) = o(f(x)g(x))$  и  $g(x)O(f(x)) = O(f(x)g(x))$ .

**Доказательство.** Первый пункт. Первый символ в равенстве означает некоторую функцию  $\alpha_1(x)f(x)$ , а второй символ – некоторую функцию  $\alpha_2(x)f(x)$ . Тогда

$$o(f) + o(f) = \alpha_1(x)f(x) + \alpha_2(x)f(x) = (\alpha_1(x) + \alpha_2(x))f(x) = \alpha_3(x)f(x) = o(f(x)),$$

так как  $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha_3(x) = 0$ .

Остальные утверждения доказываются аналогично и остаются читателю в качестве упражнения.  $\square$

## 8.10 Таблица эквивалентностей

В связи с пунктом 8.8, можно выписать следующую таблицу эквивалентных функций при  $x \rightarrow 0$ .

1. $\sin x \sim x$	6. $a^x - 1 \sim x \ln a$
2. $\ln(1+x) \sim x$	7. $\arcsin x \sim x$
3. $\log_a(1+x) \sim \frac{x}{\ln a}$	8. $\operatorname{arctg} x \sim x$
4. $\operatorname{tg} x \sim x$	9. $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$
5. $e^x - 1 \sim x$	10. $(1+x)^s - 1 \sim sx$

На самом деле на практике часто используется следующее обобщение приведенной таблицы.

**Теорема 8.10.1** Пусть  $\lim_{x \rightarrow x_0} \beta(x) = 0$ . Тогда при  $x \rightarrow x_0$  справедливы равенства

1. $\sin \beta(x) \sim \beta(x)$	6. $a^{\beta(x)} - 1 \sim \beta(x) \ln a$
2. $\ln(1+\beta(x)) \sim \beta(x)$	7. $\arcsin \beta(x) \sim \beta(x)$
3. $\log_a(1+\beta(x)) \sim \frac{\beta(x)}{\ln a}$	8. $\operatorname{arctg} \beta(x) \sim \beta(x)$
4. $\operatorname{tg} \beta(x) \sim \beta(x)$	9. $1 - \cos \beta(x) \sim \frac{\beta^2(x)}{2}$
5. $e^{\beta(x)} - 1 \sim \beta(x)$	10. $(1+\beta(x))^s - 1 \sim s\beta(x)$

**Доказательство.** Первое утверждение. Так как  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ , то  $\sin x = \alpha(x)x$  в некоторой проколотой окрестности  $\overset{o}{U}(0)$ , причем  $\lim_{x \rightarrow 0} \alpha(x) = 1$ . Пусть функция  $\alpha(x)$  доопределена по непрерывности в нуле значением 1. Тогда написанное равенство справедливо в  $U(0)$ . Так как  $\lim_{x \rightarrow x_0} \beta(x) = 0$ ,  $\beta(x) : E \rightarrow \mathbb{R}$ , то  $\exists \delta > 0 : \forall x \in E : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow \beta(x) \in U(0)$ . Тогда можно записать равенство

$$\sin \beta(x) = \alpha(\beta(x))\beta(x)$$

справедливое в  $\overset{o}{U}_\delta(x_0)$ . Осталось проверить, что  $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(\beta(x)) = 1$ . Это немедленно следует из следствия 8.3.3.

Остальные равенства доказываются аналогично. □

**Теорема 8.10.2 (О замене на эквивалентную)** Пусть  $f, g, \tilde{f} : E \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f \sim \tilde{f}$  при  $x \rightarrow x_0$ . Тогда

$$\lim_{x \rightarrow x_0} fg = \lim_{x \rightarrow x_0} \tilde{f}g.$$

**Доказательство.** Так как при  $x \in \overset{o}{U}(x_0) \cap E$  выполняется  $f(x) = \alpha(x)\tilde{f}(x)$  и  $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 1$ , то

$$\lim_{x \rightarrow x_0} fg = \lim_{x \rightarrow x_0} \alpha \tilde{f}g = \lim_{x \rightarrow x_0} \alpha \lim_{x \rightarrow x_0} \tilde{f}g = \lim_{x \rightarrow x_0} \tilde{f}g.$$

□

**Пример 8.10.1** Вычислить предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos(3x)}{\sqrt{1-x^2} - 1}.$$

Логарифм может быть переписан в виде

$$\ln \cos(3x) = \ln(1 + \cos(3x) - 1).$$

Так как  $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos(3x) - 1) = 0$ , то

$$\ln \cos(3x) \sim \cos(3x) - 1.$$

Так как  $\lim_{x \rightarrow 0} 3x = 0$ , то

$$\cos(3x) - 1 \sim -\frac{9x^2}{2}.$$

Кроме того, так как  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$ , то

$$(1 - x^2)^{1/2} - 1 \sim -\frac{x^2}{2}.$$

Согласно теореме о замене на эквивалентную,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos(3x)}{\sqrt{1-x^2} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(3x) - 1}{-\frac{x^2}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{9x^2}{2}}{-\frac{x^2}{2}} = 9.$$

**Пример 8.10.2** Пример ниже показывает, что замена на эквивалентную в сумме может привести к неверному результату. Пусть требуется вычислить предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 3x + x^2) + \ln(1 - 3x + x^2)}{x^2}.$$

Так как при  $x \rightarrow 0$  выполняется  $\ln(1 + 3x + x^2) \sim (3x + x^2)$  и  $\ln(1 - 3x + x^2) \sim (-3x + x^2)$ , то ошибочная выкладка дает

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x + x^2 + (-3x + x^2)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2}{x^2} = 2.$$



Проведем вычисление исходного предела иначе, выполнив преобразования

$$\ln((1+3x+x^2)(1-3x+x^2)) = \ln(1-7x^2+x^4) \sim (-7x^2+x^4).$$

Тогда

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+3x+x^2) + \ln(1-3x+x^2)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-7x^2+x^4}{x^2} = -7.$$

Причина ошибки будет понятна после изучения формулы Тейлора (пример 9.11.2).

### Теорема 8.10.3 (Необходимое и достаточное условие замены на эквивалент)

Две функции  $f(x)$ ,  $g(x)$  эквивалентны при  $x \rightarrow x_0$  в некоторой проколотой окрестности точки  $x_0$  тогда и только тогда, когда при  $x \rightarrow x_0$  справедливо равенство  $f(x) = g(x) + o(g(x))$ .

**Доказательство.** Пусть  $f(x) \sim g(x)$  при  $x \rightarrow x_0$ . Тогда в некоторой проколотой окрестности точки  $x_0$  справедливо равенство  $f(x) = g(x)\alpha(x)$ , где  $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 1$ . Отсюда получим  $f(x) - g(x) = g(x)(1 - \alpha(x))$ . Так как  $\lim_{x \rightarrow x_0} (1 - \alpha(x)) = 0$ , то  $f(x) - g(x) = o(g(x))$ .

Обратно, пусть  $f(x) = g(x) + o(g(x))$  при  $x \rightarrow x_0$ . Тогда в некоторой проколотой окрестности точки  $x_0$  будет  $f(x) - g(x) = g(x)\beta(x)$ , где  $\lim_{x \rightarrow x_0} \beta(x) = 0$ .

Отсюда  $f(x) = g(x)(1 + \beta(x))$  или  $f(x) = g(x)\alpha(x)$ , где  $\alpha(x) = 1 + \beta(x)$  и  $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 1$ . А следовательно,  $f(x) \sim g(x)$ .

□

**Следствие 8.10.4** Используя вышеописанную теорему, таблицу эквивалентностей можно переписать следующим образом, если при  $x \rightarrow x_0$  выполняется  $\lim_{x \rightarrow x_0} \beta(x) = 0$ .

1. $\sin \beta(x) = \beta(x) + o(\beta(x)).$ 2. $\operatorname{tg} \beta(x) = \beta(x) + o(\beta(x)).$ 3. $\arcsin \beta(x) = \beta(x) + o(\beta(x)).$ 4. $\operatorname{arctg} \beta(x) = \beta(x) + o(\beta(x)).$ 5. $1 - \cos \beta(x) = \frac{\beta(x)^2}{2} + o(\beta^2(x)).$	6. $\ln(1 + \beta(x)) = \beta(x) + o(\beta(x)).$ 7. $\log_a(1 + \beta(x)) = \frac{\beta(x)}{\ln a} + o(\beta(x)).$ 8. $e^{\beta(x)} - 1 = \beta(x) + o(\beta(x)).$ 9. $a^{\beta(x)} - 1 = \beta(x) \ln a + o(\beta(x)).$ 10. $(1 + \beta(x))^s - 1 \sim s\beta(x) + o(\beta(x)).$
--	---

**Пример 8.10.3** Вычислить:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos 2x} + \operatorname{tg} 3x \cdot e^{5x} - 1}{\ln(1 + 3x)}.$$

Используя выведенные соотношения,

$$\cos 2x = 1 - \frac{(2x)^2}{2} + o((2x)^2) = 1 - 2x^2 + o(x^2),$$

значит

$$\begin{aligned}\sqrt{\cos 2x} &= \sqrt{1 - 2x^2 + o(x^2)} = (1 + (-2x^2 + o(x^2)))^{\frac{1}{2}} = \\ &= 1 + \frac{1}{2}(-2x^2 + o(x^2)) + o(-2x^2 + o(x^2)) = 1 - x^2 + o(x^2).\end{aligned}$$

Кроме того,

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} 3x &= 3x + o(x), \\ e^{5x} &= 1 + 5x + o(x).\end{aligned}$$

Тогда

$$\sqrt{\cos 2x} + \operatorname{tg} 3x \cdot e^{5x} - 1 = 1 - x^2 + o(x^2) + (3x + o(x))(1 + 5x + o(x)) - 1 = 3x + o(x).$$

Так как

$$\ln(1 + 3x) \sim 3x,$$

то

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos 2x} + \operatorname{tg} 3x \cdot e^{5x} - 1}{\ln(1 + 3x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x + o(x)}{3x} = 1.$$

## 8.11 Контрольные вопросы и задачи

1. Сформулируйте геометрическую интерпретацию понятия непрерывной функции.
2. Покажите, что если  $f \in C(E_i)$ ,  $i = 1, 2$ , то не всегда  $f \in C(E_1 \cup E_2)$ .
3. Пусть  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  и  $f \in C[0, 1]$ . Покажите, что существует точка  $x$  такая, что  $f(x) = x$ .
4. Докажите, что любой многочлен непрерывен на множестве вещественных чисел.
5. Докажите все пункты леммы 8.9.2.
6. Поясните геометрически замену на эквивалентную.

## 9 ПРОИЗВОДНАЯ И ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИИ

### 9.1 Производная и дифференциал

**Определение 9.1.1** Пусть  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  и  $x_0$  – предельная точка для  $E$ . Функция  $f(x)$  называется дифференцируемой в точке  $x_0$ , если

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = A(x_0)\Delta x + o(\Delta x), \quad x_0 + \Delta x \in E, \quad \Delta x \rightarrow 0.$$

**Определение 9.1.2** Величины  $\Delta x$  и  $\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$  называют приращением аргумента и приращением функции, соответствующим приращению аргумента, соответственно.

**Определение 9.1.3** Выражение  $A(x_0)\Delta x$  называется дифференциалом функции  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  в точке  $x_0$  и обозначается  $df$ , то есть  $df(x_0, \Delta x) = A(x_0)\Delta x$ .

Как следует из определения, для функции  $f(x) = x$  выполняется  $x_0 + \Delta x - x_0 = 1 \cdot \Delta x$ , тем самым  $dx = \Delta x$  и можно переписать  $df(x_0) = A(x_0)dx$ .

**Определение 9.1.4** Говорят, что функция  $f(x)$  дифференцируема на множестве  $E$ , если она дифференцируема в каждой точке этого множества.

**Замечание 9.1.1** Если функция  $f(x)$  дифференцируема на множестве  $E$ , то на этом множестве возникает функция  $df(x, \Delta x) = A(x) \Delta x = A(x)dx$ .

**Определение 9.1.5** Пусть  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ . Предел

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x},$$

если он существует, называется производной функции  $f(x)$  в точке  $x_0$  и обозначается  $f'(x_0)$ .

**Пример 9.1.1** Вычислить производную функции  $f(x) = 5^{1-3x}$ .

$$\begin{aligned} (5^{1-3x})'(x_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{5^{1-3(x_0+\Delta x)} - 5^{1-3x_0}}{\Delta x} = \\ &= 5^{1-3x_0} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{5^{-3\Delta x} - 1}{\Delta x} = 5^{1-3x_0}(-3 \ln 5). \end{aligned}$$

**Замечание 9.1.2** Если функция  $f(x)$  имеет производную в каждой точке множества  $E$ , то на множестве  $E$  возникает функция  $f'(x)$ , равная значению производной функции  $f$ .

Далее установлена связь между понятиями дифференциала и производной.

**Теорема 9.1.1** *Функция  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  дифференцируема в точке  $x_0$  тогда и только тогда, когда она имеет в этой точке производную, причем  $A(x_0) = f'(x_0)$ .*

**Доказательство.**

Необходимость. Пусть функция  $f(x)$  дифференцируема в точке  $x_0$ , значит

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = A(x_0)\Delta x + o(\Delta x), \quad x_0 + \Delta x \in E, \quad \Delta x \rightarrow 0.$$

Поделив на  $\Delta x$ , получается

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = A(x_0) + o(1).$$

Переходя к пределу при  $\Delta x \rightarrow 0$ , получается, что правая часть стремится к  $A(x_0)$ , значит

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = A(x_0),$$

то есть, согласно определению,  $f'(x_0) = A(x_0)$ .

Достаточность. Согласно теореме о связи функции, ее предела и бесконечно малой, имеем

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha(\Delta x),$$

откуда

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x),$$

то есть функция дифференцируема в точке  $x_0$ . □

Ниже установлена связь между дифференцируемостью и непрерывностью

**Лемма 9.1.1 (О связи дифференцируемости и непрерывности)**

*Если функция  $f(x)$  дифференцируема в точке  $x_0$ , то она непрерывна в точке  $x_0$ .*

**Доказательство.** В представлении

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)$$

достаточно перейти к пределу при  $\Delta x \rightarrow 0$ . Тогда

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)) = 0,$$

откуда

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0).$$

□

**Замечание 9.1.3** Обратное, вообще говоря, неверно. Пусть  $y = |x|$  и  $x_0 = 0$ . Непрерывность очевидна, нужно проверить дифференцируемость. Пусть  $\Delta x > 0$ , тогда

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$$

При  $\Delta x < 0$  получается, что

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = -1,$$

а значит функция не дифференцируема.

**Определение 9.1.6** Пусть  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ . Предел

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0+0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0+0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x},$$

если он существует, называется правосторонней производной функции  $f(x)$  в точке  $x_0$  и обозначается  $f'(x_0 + 0)$ .

Аналогично, предел

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0-0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0-0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x},$$

если он существует, называется левосторонней производной функции  $f(x)$  в точке  $x_0$  и обозначается  $f'(x_0 - 0)$ .

## 9.2 Геометрический смысл производной и дифференциала. Касательная

Обратимся к рисунку 16. Пусть функция  $f(x)$  дифференцируема, а значит и непрерывна в точке  $x_0$ . Секунда  $AB$  проходит через точки графика функции  $(x_0, f(x_0))$  и  $(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$  (при этом  $\Delta x \geq 0$ , но может быть и отрицательным). Устремляя  $\Delta x \rightarrow 0$ , точка  $B$ , лежащая на графике функции, будет двигаться к точке  $A$ , а секунда  $AB$  будет стремиться занять предельное положение  $AC$ . Угловой коэффициент секунды  $AB$  равен

$$k_{AB} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \operatorname{tg}(BAD).$$

В силу непрерывности функции  $\operatorname{tg}(x)$  и дифференцируемости функции  $f(x)$  в точке  $x_0$ ,

$$k_{AC} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} k_{AB} = f'(x_0) = \operatorname{tg}(CAD).$$

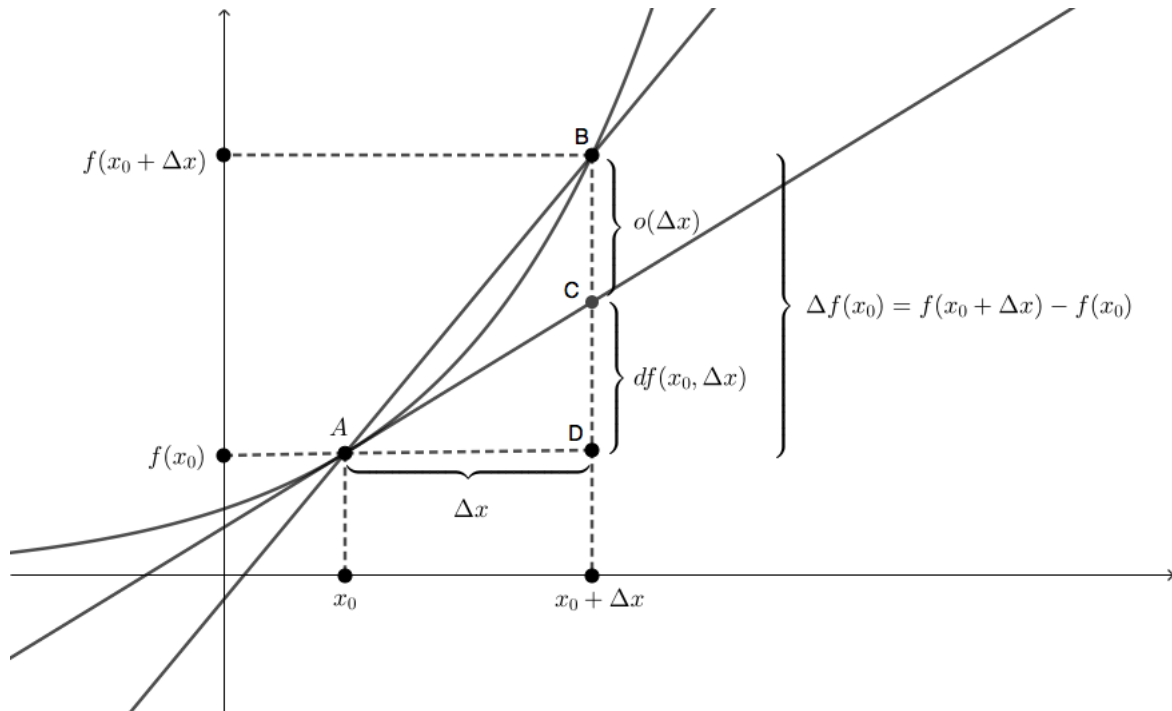


Рис. 16: Касательная и дифференциал

**Определение 9.2.1** *Предельное положение AC секущей AB графика функции  $y = f(x)$  в точке  $x_0$  называется касательной к графику функции  $y = f(x)$  в точке  $x_0$ .*

**Лемма 9.2.1** *Уравнение касательной имеет вид*

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

**Доказательство.** Угловый коэффициент, согласно сказанному выше, равен  $k_{AC} = f'(x_0)$ . Осталось воспользоваться уравнением прямой, использующим точку и коэффициент наклона.  $\square$

**Замечание 9.2.1** *Рисунок 16 показывает связь приращения функции, производной этой функции, дифференциала и  $o(\Delta x)$ . Можно сформулировать следующий геометрический смысл дифференциала: дифференциал есть приращение касательной, когда аргумент принимает приращение  $\Delta x$ .*

## 9.3 Основные правила дифференцирования

**Теорема 9.3.1** *Пусть  $f(x), g(x) : E \rightarrow \mathbb{R}$ , дифференцируемы в точке  $x_0$ , тогда их сумма дифференцируема в точке  $x_0$  и*

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0),$$

их произведение дифференцируемо в точке  $x_0$  и

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0),$$

их частное дифференцируемо в точке  $x_0$  при условии, что  $g(x_0) \neq 0$  и

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

**Доказательство.** Согласно определению,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0), \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)}{\Delta x} = g'(x_0),$$

Первый пункт. Так как

$$\begin{aligned} \Delta(f + g)(x_0) &= f(x_0 + \Delta x) + g(x_0 + \Delta x) - f(x_0) - g(x_0) = \\ &= f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) + g(x_0 + \Delta x) - g(x_0), \end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned} (f + g)'(x_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta(f + g)(x)}{\Delta x} = \\ \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)}{\Delta x} &= f'(x_0) + g'(x_0). \end{aligned}$$

Второй пункт.

$$\begin{aligned} \Delta(fg)(x_0) &= f(x_0 + \Delta x)g(x_0 + \Delta x) - f(x_0)g(x_0) = \\ f(x_0 + \Delta x)g(x_0 + \Delta x) - f(x_0)g(x_0 + \Delta x) &+ f(x_0)g(x_0 + \Delta x) - f(x_0)g(x_0), \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} (f \cdot g)'(x_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta(fg)(x)}{\Delta x} = \\ \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x)g(x_0 + \Delta x) - f(x_0)g(x_0 + \Delta x)}{\Delta x} &+ \\ + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0)g(x_0 + \Delta x) - f(x_0)g(x_0)}{\Delta x}. \end{aligned}$$

Первый предел

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x)g(x_0 + \Delta x) - f(x_0)g(x_0 + \Delta x)}{\Delta x} &= \\ = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} g(x_0 + \Delta x) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} &= g(x_0)f'(x_0), \end{aligned}$$

где  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} g(x_0 + \Delta x) = g(x_0)$  в силу непрерывности функции  $g(x)$  в точке  $x_0$ , которая следует из ее дифференцируемости, согласно лемме 9.1.1. Второй предел

$$\begin{aligned} & \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0)g(x_0 + \Delta x) - f(x_0)g(x_0)}{\Delta x} = \\ & = f(x_0) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)}{\Delta x} = f(x_0)g'(x_0). \end{aligned}$$

Тем самым,

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).$$

Третий пункт предлагается доказать самостоятельно.  $\square$

Из связи производной и дифференциала сразу вытекает следующая теорема.

**Теорема 9.3.2** *В условиях предыдущей теоремы*

1.  $d(f + g)(x_0) = df(x_0) + dg(x_0);$
2.  $d(fg)(x_0) = f(x_0)dg(x_0) + g(x_0)df(x_0);$
3.  $d\left(\frac{f}{g}\right)(x_0) = \frac{g(x_0)df(x_0) - f(x_0)dg(x_0)}{g^2(x_0)},$  при  $g(x_0) \neq 0.$

**Доказательство.** Докажите эту теорему самостоятельно.  $\square$

**Теорема 9.3.3 (О производной сложной функции)** Пусть  $f(x) : E_1 \rightarrow E_2, g(y) : E_2 \rightarrow \mathbb{R}, E_1, E_2 \subset \mathbb{R}$  и пусть  $f(x)$  дифференцируема в точке  $x_0$ , а  $g(y)$  дифференцируема в точке  $y_0$ , где  $y_0 = f(x_0)$ . Тогда функция  $g(f(x))$  дифференцируема в точке  $x_0$  и  $(g(f))'(x_0) = g'(y_0)f'(x_0)$

**Доказательство.** Так как  $f(x)$  дифференцируема в точке  $x_0$ , то

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x), \quad x_0 + \Delta x \in E_1, \quad \Delta x \rightarrow 0.$$

Так как  $g(y)$  дифференцируема в точке  $y_0$ , то

$$g(y_0 + \Delta y) - g(y_0) = g'(y_0)\Delta y + o(\Delta y), \quad y_0 + \Delta y \in E_2, \quad \Delta y \rightarrow 0,$$

где в представлении  $o(\Delta y) = \Delta y \cdot \alpha(\Delta y)$  можно считать, что  $\alpha(0) = 0$ . Положив  $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - y_0$  можно заметить, что  $\Delta y \rightarrow 0$  при  $\Delta x \rightarrow 0$ , так как функция  $f(x)$  дифференцируема в точке  $x_0$ , а значит и непрерывна. Тогда

$$\begin{aligned} g(f(x_0 + \Delta x)) - g(f(x_0)) &= g'(y_0) \cdot (f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)) + o(f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)) = \\ &= g'(y_0) \cdot (f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)) + o(f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)) = \end{aligned}$$



$$g'(y_0) \cdot f'(x_0)\Delta x + g'(y_0) \cdot o(\Delta x) + o(f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)).$$

Легко убедиться (сделайте это), что

$$g'(y_0) \cdot o(\Delta x) + o(f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)) = o(\Delta x),$$

а значит  $g(f(x))$  дифференцируема в точке  $x_0$  и  $(g(f))'(x_0) = g'(y_0) \cdot f'(x_0)$ .  $\square$

**Теорема 9.3.4 (О производной обратной функции)** Пусть функции  $f(x) : E_1 \rightarrow E_2$  и  $f^{-1}(y) : E_2 \rightarrow E_1$  – взаимно обратные, причем  $f(x)$  непрерывна в точке  $x_0$ , а  $f^{-1}(y)$  непрерывна в точке  $y_0 = f(x_0)$ . Если  $f(x)$  дифференцируема в точке  $x_0$  и  $f'(x_0) \neq 0$ , то и  $f^{-1}(y)$  дифференцируема в точке  $y_0$ , причем

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

**Доказательство.** Необходимо вычислить

$$(f^{-1})'(y_0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f^{-1}(y_0 + \Delta y) - f^{-1}(y_0)}{\Delta y}.$$

Достаточно положить  $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ ,  $\Delta x = f^{-1}(y_0 + \Delta y) - f^{-1}(y_0)$ . В силу непрерывности функции  $f(x)$  в точке  $x_0$  и обратной функции  $f^{-1}(y)$  в точке  $y_0$ , выполнено  $\Delta x \rightarrow 0 \Leftrightarrow \Delta y \rightarrow 0$ . Кроме того, так как функции взаимно обратны, то  $\Delta x \neq 0 \Leftrightarrow \Delta y \neq 0$ . Тогда

$$(f^{-1})'(y_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

$\square$

## 9.4 Таблица производных простейших функций

Ниже приведена таблица производных простейших функций

1.	$(c)' = 0.$	$\forall x \in \mathbb{R}.$
2.	$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}.$	$\alpha \in \mathbb{R}, x > 0, \alpha \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$
3.	$(\sin x)' = \cos x.$	$\forall x \in \mathbb{R}$
4.	$(\cos x)' = -\sin x.$	$\forall x \in \mathbb{R}$
5.	$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$	$\forall x \in \mathbb{R}, x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$
6.	$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$	$\forall x \in \mathbb{R}, x \neq \pi k$
7.	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$	$\forall x \in (-1, 1)$
8.	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$	$\forall x \in (-1, 1)$
9.	$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}.$	$\forall x \in \mathbb{R}$
10.	$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$	$\forall x \in \mathbb{R}$
11.	$(\log_a  x )' = \frac{1}{x \ln a}.$	$\forall x \in \mathbb{R}, x \neq 0$
12.	$(\ln  x )' = \frac{1}{x}.$	$\forall x \in \mathbb{R}, x \neq 0$
13.	$(a^x)' = a^x \ln a.$	$x \in \mathbb{R}$
14.	$(e^x)' = e^x.$	$x \in \mathbb{R}$

### Доказательство.

1. Покажем, что производная функции  $f(x) = c$ , где  $c$  – некоторая константа, равна нулю. Действительно, так как

$$\Delta f(x_0) = c - c = 0,$$

то

$$(c)'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = 0.$$

Так как  $x_0$  – произвольное число, то

$$(c)' = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

2. Покажем, что  $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,  $x > 0$ . Так как

$$\Delta f(x_0) = (x_0 + \Delta x)^\alpha - x_0^\alpha = x_0^\alpha \left( \left( 1 + \frac{\Delta x}{x_0} \right)^\alpha - 1 \right),$$

то

$$(x^\alpha)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x_0^\alpha \left( \left( 1 + \frac{\Delta x}{x_0} \right)^\alpha - 1 \right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\alpha x_0^{\alpha-1} \Delta x}{\Delta x} = \alpha x_0^{\alpha-1}.$$

В силу произвольности  $x_0$  получаем требуемое.

3. Покажем, что  $(\sin x)' = \cos x$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ . Так как

$$\Delta f(x_0) = \sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0 = 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos \frac{2x_0 + \Delta x}{2},$$

то

$$(\sin x)'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 2 \cdot \frac{\sin \frac{\Delta x}{2} \cos \frac{2x_0 + \Delta x}{2}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 2 \cdot \frac{\frac{\Delta x}{2} \cos \frac{2x_0 + \Delta x}{2}}{\Delta x} = \cos x_0.$$

4. Аналогично п. 3.

5. Покажем, что  $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$ . По формуле производной частного и только что доказанным формулам производной функции  $\sin x$  и  $\cos x$ , имеем

$$\begin{aligned} (\operatorname{tg} x)' &= \left( \frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} = \\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}. \end{aligned}$$

6. Аналогично предыдущему доказывается, что  $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $x \neq \pi k$ .

7. Покажем, что  $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ,  $\forall x \in (-1, 1)$ . Воспользуемся теоремой о производной обратной функции. Обратная функция  $x = \sin y$ ,  $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ . Все условия теоремы выполнены, а значит

$$(\arcsin x)'(x_0) = \frac{1}{(\sin y)'(y_0)} = \frac{1}{\cos y_0} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y_0}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x_0^2}}.$$

8. Аналогично п. 7.

9. Аналогично п. 7.

10. Аналогично п. 7.

11. Покажем, что  $(\log_a |x|)' = \frac{1}{x \ln a}$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $x \neq 0$ . Пусть  $x_0 > 0$ , тогда так как

$$\Delta f(x_0) = \log_a (x_0 + \Delta x) - \log_a x_0 = \log_a \left( \frac{x_0 + \Delta x}{x_0} \right) = \log_a \left( 1 + \frac{\Delta x}{x_0} \right),$$

то

$$\begin{aligned} (\log_a |x|)'(x_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\log_a \left( 1 + \frac{\Delta x}{x_0} \right)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{x_0 \ln a \Delta x} = \frac{1}{x_0 \ln a}. \end{aligned}$$

Аналогично рассматривается случай  $x_0 < 0$ .

12. Покажем, что  $(\ln |x|)' = \frac{1}{x}$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $x \neq 0$ . Из предыдущего пункта, при  $a = e$ , получим

$$(\ln |x|)' = \frac{1}{x \ln e} = \frac{1}{x}.$$

13. Покажем, что  $(a^x)' = a^x \ln a$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Воспользуемся теоремой о производной обратной функции. Обратная функция  $x = \log_a y$ ,  $y > 0$ . Все условия теоремы выполнены, а значит

$$(a^x)'(x_0) = \frac{1}{(\log_a y)'(y_0)} = \frac{1}{\frac{1}{y_0 \ln a}} = y_0 \ln a = a^{x_0} \ln a.$$

14. Покажем, что  $(e^x)' = e^x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Из предыдущего пункта при  $a = e$ , получим

$$(e^x)'(x_0) = e^{x_0} \ln e = e^{x_0}.$$

□

## 9.5 Дифференцирование функций, заданных параметрически

**Теорема 9.5.1** Пусть функции  $x = x(t)$  и  $y = y(t)$  определены в окрестности  $U(t_0)$ , причем функция  $x = x(t)$  имеет в этой окрестности обратную функцию  $t = t(x)$ . Допустим, что  $x'(t_0) \neq 0$ . Тогда сложная функция  $y = y(t(x))$  дифференцируема по переменной  $x$  в точке  $x_0 = x(t_0)$ , причем

$$y'_x(x_0) = \frac{y'_t(t_0)}{x'_t(t_0)}.$$

**Доказательство.** По правилу дифференцирования сложной функции получим, что в точке  $x_0$  выполняется равенство  $(y(t(x)))'_x = y'_t \cdot t'_x$ . По теореме о производной обратной функции  $t'_x = \frac{1}{x'_t}$ , а следовательно

$$(y(t(x)))' = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

□

## 9.6 Теоремы Ферма, Ролля, Лагранжа и Коши

**Определение 9.6.1** Пусть  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ . Точка  $x_0 \in E$  называется точкой локального максимума (строгого локального максимума) функции  $f(x)$ , если существует проколота окрестность  $\overset{\circ}{U}(x_0)$  такая, что  $\forall x \in E : x \in \overset{\circ}{U}(x_0)$  выполняется  $f(x) \leq f(x_0)$  ( $f(x) < f(x_0)$ ).

**Определение 9.6.2** Пусть  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ . Точка  $x_0 \in E$  называется точкой локального минимума (строгого локального минимума) функции  $f(x)$ , если существует проколота окрестность  $\overset{\circ}{U}(x_0)$  такая, что  $\forall x \in E : x \in \overset{\circ}{U}(x_0)$  выполняется  $f(x) \geq f(x_0)$  ( $f(x) > f(x_0)$ ).

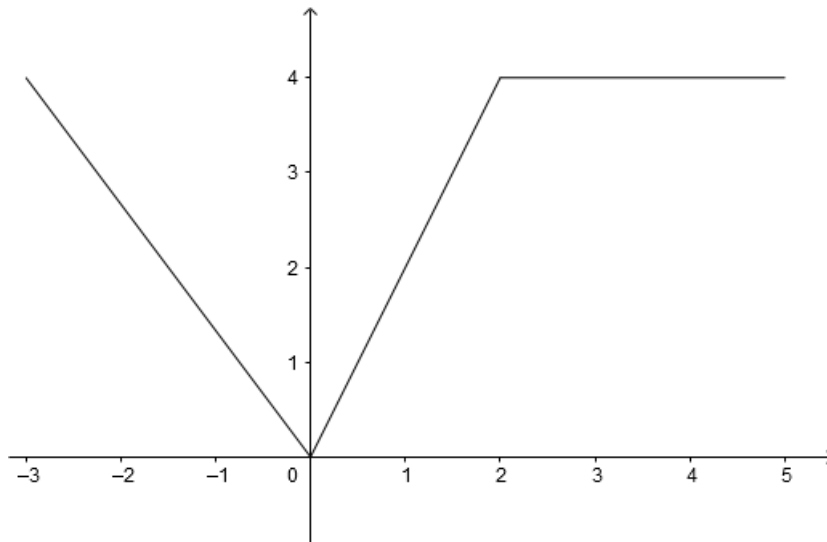


Рис. 17: Типы экстремумов

**Пример 9.6.1** На рисунке 17 видно, что точка  $x = 0$  – точка строгого локального минимума, а точка  $x = -3$  – точка строгого локального максимума. Все точки из множества  $(2, 5]$  можно считать как точками локального максимума, так и точками локального минимума. Точка  $x = 2$  – точка локального максимума (не строгого!).

**Определение 9.6.3** Точки локального максимума (строго локального максимума) и точки локального минимума (строгого локального минимума) называются точками экстремума (строгого экстремума).

**Определение 9.6.4** Точка  $x_0$  называется точкой внутреннего экстремума для функции  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ , если  $x_0$  – точка экстремума, являющаяся предельной как для множества  $E_- = \{x \in E : x < x_0\}$ , так и для  $E_+ = \{x \in E : x > x_0\}$ .

**Пример 9.6.2** На рисунке 17 точка  $x = -3$  не является точкой внутреннего экстремума, так как множество  $E_-$  пусто. Точка  $x = 5$  тоже не является точкой внутреннего экстремума, так как множество  $E_+$  пусто. Точка  $x = 0$  и все точки множества  $[2, 5)$  являются точками внутреннего экстремума.

**Теорема 9.6.1 (Ферма)** Пусть  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  дифференцируема в точке внутреннего экстремума  $x_0$ . Тогда  $f'(x_0) = 0$ .

**Доказательство.** Для определенности предполагается, что  $x_0$  – точка локального максимума. При достаточно малом  $\Delta x < 0$ , из определения точки максимума получаем, что

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} > 0,$$

значит, по теореме 7.3.1 о предельном переходе в неравенствах,

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0-0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \geq 0.$$

При достаточно малом  $\Delta x > 0$ , из определения точки максимума получаем, что

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} < 0,$$

значит, по теореме о предельном переходе в неравенствах 7.3.1,

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0+0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \leq 0.$$

Сравнивая два неравенства, получаем  $f'(x_0) = 0$ . □

**Замечание 9.6.1** Геометрически теорема Ферма означает, что касательная в точке внутреннего экстремума дифференцируемой функции параллельна оси  $Ox$ . Этот факт проиллюстрирован на рисунке 18,  $x_0 = \xi$ .

**Замечание 9.6.2** То, что рассматривается внутренний экстремум, важно. На рисунке 17 видно, что в точке  $x = -3$  производная нулю не равна.

**Теорема 9.6.2 (Ролля)** Пусть  $f \in C[a, b]$  и дифференцируема на  $(a, b)$ , причем  $f(a) = f(b)$ . Тогда  $\exists \xi \in (a, b) : f'(\xi) = 0$ .

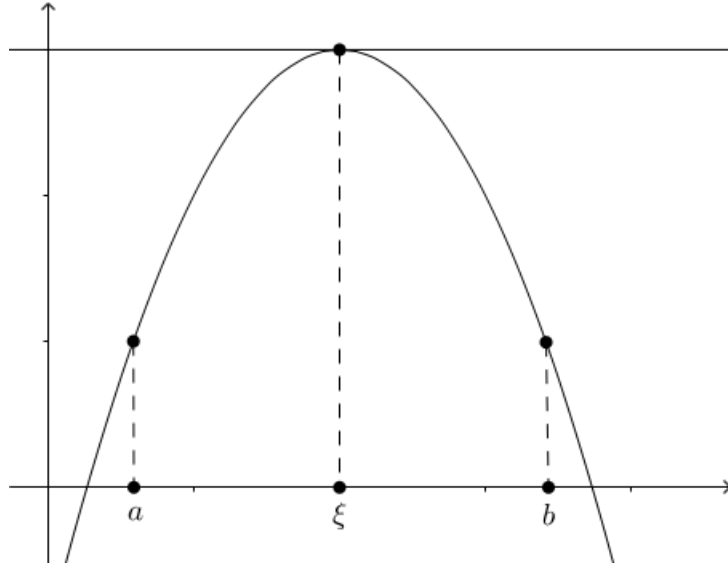


Рис. 18: Теорема Ролля

**Доказательство.** Если  $f(x)$  постоянна на отрезке  $[a, b]$ , то утверждение, очевидно, верно. Если  $f(x)$  не постоянна, то по теореме Вейерштрасса 8.4.3 на отрезке  $[a, b]$  существуют точки, в которых функция принимает свои наибольшее  $M$  и наименьшее  $m$  значения, причем  $M \neq m$ , а значит, хотя бы одно из них принимается внутри интервала  $(a, b)$  в некоторой точке  $\xi$ . Значит, по теореме Ферма,  $f'(\xi) = 0$ .  $\square$

**Замечание 9.6.3** Геометрически теорема Ролля означает, что если дифференцируемая функция на концах отрезка принимает равные значения, то на этом отрезке существует хотя бы один экстремум, см. рисунок 18.

**Теорема 9.6.3 (Лагранжа)** Пусть  $f \in C[a, b]$  и дифференцируема на  $(a, b)$ . Тогда  $\exists \xi \in (a, b)$ , что выполняется

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a).$$

**Доказательство.** Пусть

$$y(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Прямым вычислением проверяется, что  $y(a) = y(b)$ , причем функция  $y(x) \in C[a, b]$ , как разность непрерывных функций, и дифференцируема на  $(a, b)$ , как разность дифференцируемых функций. Значит, согласно теореме Ролля 9.6.2, найдется  $\xi \in (a, b) : y'(\xi) = 0$ , то есть

$$f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0 \Leftrightarrow f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a).$$

$\square$

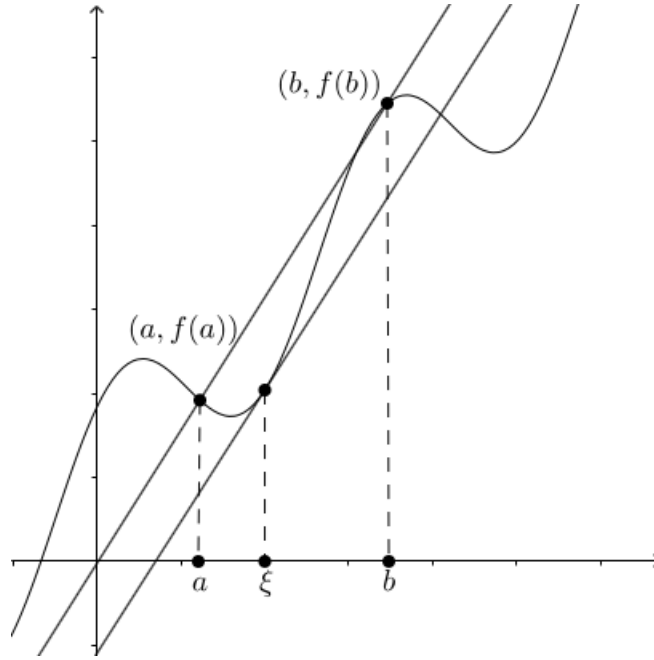


Рис. 19: Теорема Лагранжа

**Замечание 9.6.4** Геометрически теорема Лагранжа означает, что на интервале  $(a, b)$  существует касательная к графику функции  $y = f(x)$ , параллельная секущей, проходящей через точки  $(a, f(a))$  и  $(b, f(b))$ , см. рисунок 19.

**Следствие 9.6.4 (Критерий монотонности функции)** Пусть  $f \in C[a, b]$  и дифференцируема на  $(a, b)$ . Для того чтобы функция  $f(x)$  не убывала (не возрастала) на  $[a, b]$  необходимо и достаточно, чтобы  $f'(x) \geq 0$  ( $f'(x) \leq 0$ ). Для возрастания (убывания) функции на  $[a, b]$  достаточно, чтобы  $f'(x) > 0$  ( $f'(x) < 0$ ).

**Доказательство.** Пусть функция  $f(x)$  не убывает. Необходимость. Пусть  $x \in (a, b)$ , тогда при  $\Delta x \neq 0$  имеем

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \geq 0,$$

значит, по теореме 7.3.1 о предельном переходе в неравенстве,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \geq 0.$$

Достаточность. Пусть  $x_1, x_2 \in [a, b]$ ,  $x_1 < x_2$ . По теореме Лагранжа 9.6.3 найдется  $\xi \in (a, b)$ , что

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1).$$



Так как  $f'(x) \geq 0$  на  $(a, b)$  и  $x_2 - x_1 > 0$ , то  $f(x_2) \geq f(x_1)$ . Так как  $x_1, x_2$  — произвольные, получаем определение неубывающей функции. Если же  $f'(x) > 0$  на  $(a, b)$ , то  $f(x_2) > f(x_1)$  и получается определение возрастающей функции.  $\square$

**Замечание 9.6.5** Полезно заметить, что из того, что функция возрастает (убывает), вообще говоря не следует положительность (отрицательность) производной. Пусть  $y = x^3$ . Очевидно, что функция возрастает, но  $y' = 3x^2$  обращается в ноль при  $x = 0$ .

**Следствие 9.6.5 (Критерий постоянства функции)** Пусть  $f \in C[a, b]$  и дифференцируема на  $(a, b)$ . Для того чтобы  $f(x)$  была постоянной на  $[a, b]$  необходимо и достаточно, чтобы  $f'(x) = 0$  на  $(a, b)$ .

**Доказательство.** Необходимость очевидна. Достаточность. Если  $f'(x) = 0$  на  $(a, b)$ , то для любых двух точек  $x_1, x_2 \in [a, b]$  таких, что  $x_1 < x_2$  по теореме Лагранжа 9.6.3

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) = 0,$$

то есть  $f(x_2) = f(x_1)$ . В силу произвольности точек  $x_1, x_2$  функция постоянна.  $\square$

**Теорема 9.6.6 (Коши)** Пусть  $f, g \in C[a, b]$  и дифференцируемы на  $(a, b)$ . Тогда  $\exists \xi \in (a, b)$ , что выполняется

$$(f(b) - f(a))g'(\xi) = (g(b) - g(a))f'(\xi).$$

Если, кроме того,  $g'(x) \neq 0$  на  $(a, b)$ , то

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

**Доказательство.** Пусть

$$\varphi(x) = g(x)(f(b) - f(a)) - f(x)(g(b) - g(a)).$$

Прямые вычисления показывают, что  $\varphi(a) = \varphi(b)$ . Кроме того, из условий теоремы следует, что функция  $\varphi(x) \in C[a, b]$  и дифференцируема на  $(a, b)$ . Значит, по теореме Ролля 9.6.2 найдется  $\xi \in (a, b)$ , что  $\varphi'(\xi) = 0$ , то есть

$$g'(\xi)(f(b) - f(a)) = f'(\xi)(g(b) - g(a)).$$

Если  $g'(x) \neq 0$  на  $(a, b)$ , то  $g(b) \neq g(a)$  (иначе по теореме Ролля нашлась бы точка из интервала  $(a, b)$ , в которой производная бы обращалась в ноль), а значит

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

$\square$

**Замечание 9.6.6** Теорема Лагранжа является частным случаем теоремы Коши, если взять  $g(x) = x$ .

**Замечание 9.6.7** Не каждая функция, определенная на  $\langle a, b \rangle$ , имеет на этом промежутке первообразную. Функция  $y = \operatorname{sign} x$  не имеет первообразной на отрезке  $[0, 1]$ .

Предположим, что  $F(x)$  – первообразная функции  $y = \operatorname{sign} x$  на  $[0, 1]$ , тогда  $F(x)$  дифференцируема на  $[0, 1]$ . По теореме Лагранжа при  $\Delta x \in (0, 1]$ ,

$$F(\Delta x) - F(0) = F'(\xi) \cdot \Delta x = \operatorname{sign}(\xi)\Delta x, \quad \xi \in (0, \Delta x)$$

или

$$\frac{F(\Delta x) - F(0)}{\Delta x} = \operatorname{sign}(\xi) = 1 \quad \forall \Delta x \in (0, 1)$$

Однако, при  $\Delta x \rightarrow 0+0$  получаем (в силу дифференцируемости)  $F'(0) = 1$ , что приводит к противоречию, так как  $\operatorname{sign} 0 = 0$ .

Последнее замечание может быть получено и из более общих соображений, касающихся дифференцируемых функций.

**Теорема 9.6.7 (Теорема Дарбу)** Пусть функция  $f$  дифференцируема на отрезке  $[a, b]$ , причем  $A = f'(a) < f'(b) = B$ . Тогда

$$\forall C \in (A, B) \exists c \in (a, b) : f'(c) = C.$$

Итак, дифференцируемая на отрезке функция, принимая какие-либо два различных значения на его концах, принимает и все промежуточные значения внутри отрезка. Полезно сравнить это утверждение с теоремой Больцано-Коши для непрерывных функций. В теореме Дарбу непрерывность производной не предполагается.

**Доказательство.** Докажем для начала следующее: пусть  $A < 0$ ,  $B > 0$ . Тогда найдется  $c \in (a, b) : f'(c) = 0$ .

Согласно определению производной,

$$A = \lim_{\Delta x \rightarrow 0+0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}.$$

Так как  $A < 0$ , то в некоторой окрестности  $(a, a + \delta)$  выполняется

$$\frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} < 0 \Rightarrow f(a + \Delta x) - f(a) < 0,$$

то есть значения функции в рассматриваемой окрестности меньше, чем  $f(a)$ .

Согласно определению производной,

$$B = \lim_{\Delta x \rightarrow 0-0} \frac{f(b + \Delta x) - f(b)}{\Delta x}.$$

Так как  $B > 0$ , то в некоторой окрестности  $(b - \delta, b)$  выполняется

$$\frac{f(b + \Delta x) - f(b)}{\Delta x} > 0 \Rightarrow f(b + \Delta x) - f(b) < 0,$$

то есть значения функции в рассматриваемой окрестности меньше, чем  $f(b)$ .

Так как функция дифференцируема, то она непрерывна, а значит достигает на  $[a, b]$  наименьшего значения, причем не в  $a$  и не в  $b$ . Значит, во внутренней точке  $c$  отрезка  $[a, b]$ . Тогда по теореме Ферма  $f'(c) = 0$ .

Для доказательства общей теоремы, достаточно применить только что доказанное к функции

$$\varphi(x) = f(x) - Cx.$$

□

Из доказанной теоремы следует, что производная дифференцируемой функции не может иметь разрывов первого рода. Итак, справедлива следующая лемма.

**Лемма 9.6.1 (О разрывах производной)** *Производная дифференцируемой функции не может иметь разрывов первого рода.*

**Доказательство.** Доказательство остается в качестве упражнения. □

## 9.7 Правило Лопиталя

Ниже будет сформулирована и доказана теорема, позволяющая раскрывать неопределенности вида  $[0/0]$  и  $[?/\infty]$ .

**Теорема 9.7.1 (Правило Лопиталя)** *Пусть функции  $f, g$  дифференцируемы на интервале  $(a, b)$ ,  $g'(x) \neq 0$  на  $(a, b)$  и существует*

$$\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A,$$

где  $A$  может равняться  $\pm\infty$ . Тогда в любом из двух случаев:

$$1. \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+0} g(x) = 0.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow a+0} |g(x)| = +\infty.$$

выполняется

$$\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = A.$$

**Доказательство.**

1. Так как  $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+0} g(x) = 0$ , то функции  $f, g$  можно доопределить по непрерывности, положив  $f(a) = g(a) = 0$ . Пусть  $c \in (a, b)$ . Тогда доопределенные функции  $f, g \in C[a, c]$  и дифференцируемы на  $(a, c)$ . Так как  $g'(x) \neq 0$ , то по теореме Коши 9.6.6

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}, \quad a < \xi < x < c.$$

При  $x \rightarrow a + 0$  выполняется, что  $\xi \rightarrow a + 0$ , а значит

$$\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = A \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = A.$$

2.1. Пусть  $A$  конечно. Пусть  $\varepsilon > 0$ , тогда найдется  $\delta_0 < b$ , что при  $x \in (a, a + \delta_0)$  справедливо неравенство

$$\left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - A \right| < \varepsilon.$$

В частности, при  $x \in (a, a + \delta_0)$  функция  $\frac{f'(x)}{g'(x)}$  ограничена, то есть

$$\left| \frac{f'(x)}{g'(x)} \right| \leq M.$$

Пусть  $x \in (a, a + \delta_0)$ , рассмотрим преобразования

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{f(x) - f(a + \delta_0)}{g(x)} + \frac{f(a + \delta_0)}{g(x)} = \\ &= \frac{g(x) - g(a + \delta_0)}{g(x)} \cdot \frac{f(x) - f(a + \delta_0)}{g(x) - g(a + \delta_0)} + \frac{f(a + \delta_0)}{g(x)} = \\ &= \left( 1 - \frac{g(a + \delta_0)}{g(x)} \right) \frac{f(x) - f(a + \delta_0)}{g(x) - g(a + \delta_0)} + \frac{f(a + \delta_0)}{g(x)}. \end{aligned} \quad (5)$$

На отрезке  $[x, x + \delta_0]$  функции  $f, g$  непрерывны, а на интервале  $(x, x + \delta_0)$  дифференцируемы, значит по теореме Коши 9.6.6

$$\frac{f(x) - f(a + \delta_0)}{g(x) - g(a + \delta_0)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}, \quad a < x < \xi < a + \delta_0.$$

Так как  $|g(x)| \rightarrow +\infty$ , то по ранее заданному  $\varepsilon$  можно найти  $\delta_1 < \delta_0$ , что при  $x \in (a, a + \delta_1)$  справедливы оценки

$$\left| \frac{g(a + \delta_0)}{g(x)} \right| < \varepsilon \quad \left| \frac{f(a + \delta_0)}{g(x)} \right| < \varepsilon.$$

Тогда из (5) при  $x \in (a, a + \delta_1)$ ,

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(x)}{g(x)} - A \right| &= \left| \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - A - \frac{g(a + \delta_0)}{g(x)} \cdot \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} + \frac{f(a + \delta_0)}{g(x)} \right| \leq \\ &= \left| \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - A \right| + \left| \frac{g(a + \delta_0)}{g(x)} \cdot \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \right| + \left| \frac{f(a + \delta_0)}{g(x)} \right| \leq \\ &= \varepsilon + \varepsilon \cdot M + \varepsilon = \varepsilon(2 + M). \end{aligned}$$

В силу произвольности  $\varepsilon$  отсюда следует требуемое, т. е.

$$\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = A.$$

2.2. Пусть  $A = +\infty$ . Пусть  $\varepsilon > 0$ , тогда найдется  $\delta_0 < b$ , что при  $x \in (a, a + \delta_0)$  справедливо неравенство

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Так как  $\lim_{x \rightarrow a+0} |g(x)| = +\infty$ , можно найти  $\delta_1$  так, чтобы при  $x \in (a, a + \delta_1)$  выполнялось

$$\left| \frac{g(a + \delta_0)}{g(x)} \right| < \frac{1}{2} \quad \left| \frac{f(a + \delta_0)}{g(x)} \right| < \frac{1}{2}.$$

Используя аналогичные выкладки, что в пункте 2.1,

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \left( 1 - \frac{g(a + \delta_0)}{g(x)} \right) \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} + \frac{f(a + \delta_0)}{g(x)} > \left( 1 - \frac{1}{2} \right) \frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2\varepsilon} - \frac{1}{2}.$$

В силу произвольности  $\varepsilon$  получается, что

$$\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty.$$

2.3 Случай  $A = -\infty$  доказывается аналогично пункту 2.2. □

**Замечание 9.7.1** Теорема справедлива и для  $a = -\infty$ . Для доказательства достаточно сделать замену  $t = \frac{1}{x}$  и применить доказанную теорему.

**Пример 9.7.1** Вычислить предел

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2} (\sin x)^{\operatorname{tg} x}.$$

Так как  $(\sin x)^{\operatorname{tg} x} = e^{\operatorname{tg} x \ln \sin x}$ , то достаточно вычислить предел

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2} (\operatorname{tg} x \ln \sin x) = \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\ln \sin x}{\operatorname{ctg} x} = \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\operatorname{ctg} x}{-\frac{1}{\sin^2 x}} = 0$$

Значит, ответом будет  $e^0 = 1$ .

## 9.8 Производные и дифференциалы высших порядков

Если функция  $f(x)$  дифференцируема на некотором множестве  $E$ , то на этом множестве возникает функция  $f' : E \rightarrow \mathbb{R}$ , равная значению производной функции  $f$  в точке  $x \in E$ . Эта функция, в свою очередь, сама может быть дифференцируемой.

**Определение 9.8.1** По индукции, если определена производная  $f^{(n-1)}(x)$  порядка  $n - 1$ , то производная порядка  $n$  определяется равенством

$$f^{(n)}(x) = \left( f^{(n-1)}(x) \right)'.$$

Аналогично, если определен дифференциал  $d^{n-1}f(x)$  порядка  $n - 1$ , то

$$d^n f(x) = d(d^{n-1}f(x)).$$

**Определение 9.8.2** Если функция  $f(x)$  имеет на множестве  $E$  непрерывные производные до порядка  $n$  включительно, то пишут, что  $f(x) \in C^n(E)$ .

**Замечание 9.8.1 (Инвариантность формы первого дифференциала)**

Известно, что  $df = f'(x)dx$  в случае, когда  $x$  – независимая переменная. Пусть  $x = x(t)$  – некоторая дифференцируемая функция от независимой переменной  $t$ . Тогда

$$df(x(t)) = (f(x(t)))' dt = f'(x(t))x'(t)dt = f'(x(t))dx(t) = f'(x)dx.$$

Это свойство называют инвариантностью первого дифференциала.

**Замечание 9.8.2 (Неинвариантность формы дифференциалов высших порядков)**

Отметим, что у дифференциалов высших порядков инвариантность, вообще говоря, не сохраняется. Действительно,

$$d^2 f(x(t)) = d(f'(x(t))dx(t)) = f''(x(t))(d(x(t)))^2 + f'(x(t))d^2(x(t))$$

и второе слагаемое равно нулю только в случае, когда  $x(t)$  – линейная функция.

## 9.9 Формула Лейбница

**Теорема 9.9.1** Пусть функции  $f, g : E \rightarrow \mathbb{R}$  имеют  $n$  производных в точке  $x_0$ , тогда

$$(fg)^{(n)}(x_0) = \sum_{k=0}^n C_n^k f^{(k)}(x_0) g^{(n-k)}(x_0).$$

**Доказательство.** Доказательство аналогично доказательству формулы бинома Ньютона и остается в качестве упражнения.  $\square$

## 9.10 Формула Тейлора

Из вышесказанного могла возникнуть верная идея, что чем больше производных совпадает у двух функций в некоторой точке, тем лучше эти функции «приближают» друг друга в окрестности этой точки. В связи с этим возникает идея приблизить функцию в окрестности некоторой точки многочленом.

**Определение 9.10.1** Пусть функция  $f(x)$  имеет в точке  $x_0$  все производные до порядка  $n$  включительно. Многочлен

$$P_n(x, x_0) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

называется *многочленом Тейлора порядка  $n$  функции  $f$  в точке  $x_0$* . В случае  $x_0 = 0$  многочлен Тейлора часто называют *многочленом Маклорена*.

Многочлен Тейлора обладает описанным выше свойством, а именно справедлива следующая лемма.

**Лемма 9.10.1** Пусть  $P_n(x, x_0)$  – многочлен Тейлора порядка  $n$  функции  $f$  в точке  $x_0$ . Тогда

$$(P_n(x, x_0))^{(k)} = f^{(k)}(x_0), \quad k = 0 \dots n.$$

**Доказательство.** Проверка осуществляется прямым дифференцированием и остается в качестве упражнения.  $\square$

**Замечание 9.10.1** При  $n = 0$  многочлен Тейлора превращается в  $P_0(x, x_0) = f(x_0)$ , а при  $n = 1$  в  $P_1(x, x_0) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ , что является уравнением касательной к графику функции  $y = f(x)$  в точке  $x_0$ .

**Пример 9.10.1** Пусть  $y(x) = x + \sin(2x)$  и многочлены  $P_i(x, 0)$  – многочлены Тейлора при  $i = 0, 1, 3, 5$ , см. рисунок 20. Видно, что при увеличении  $i$  график функции все лучше приближается многочленами  $P_i(x, 0)$ .

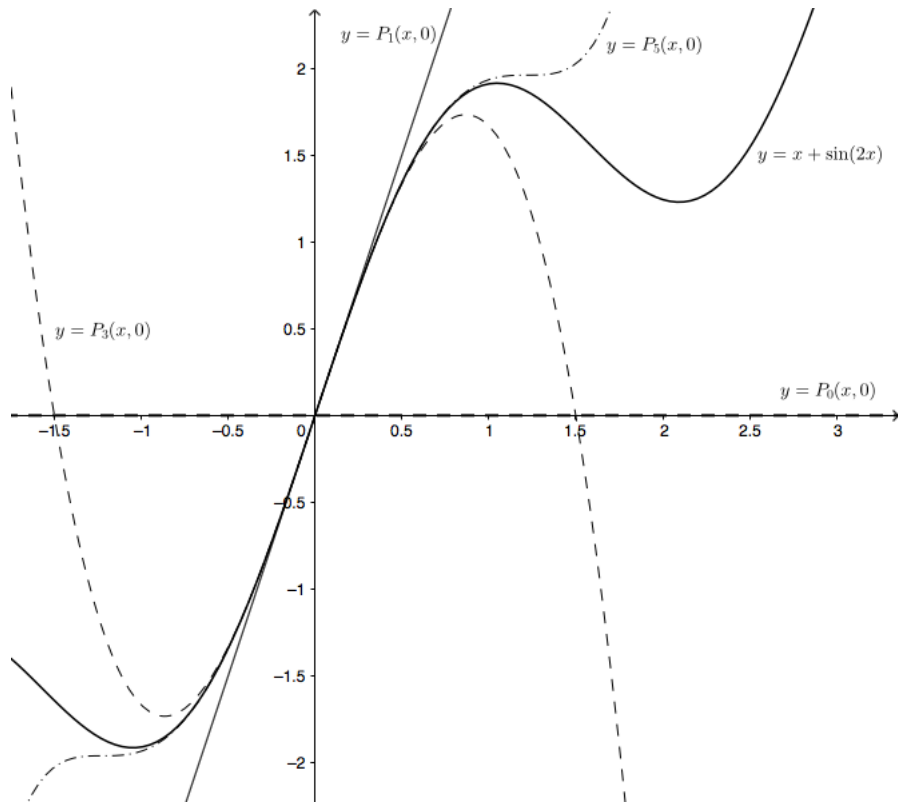


Рис. 20: Многочлены Тейлора для  $y = x + \sin(2x)$

Важно получить информацию о величине

$$r_n(x, x_0) = f(x) - P_n(x, x_0),$$

которая характеризует отклонение многочлена Тейлора от заданной функции. Достаточную характеристику остаточного члена дает теорема.

**Теорема 9.10.1** Пусть функция  $f$  непрерывна вместе со своими первыми  $n$  производными на отрезке, с концами  $x_0, x$ , а во внутренних точках этого отрезка имеет производную порядка  $(n+1)$ . Тогда для любой функции  $\varphi$ , непрерывной на данном отрезке и имеющей отличную от нуля производную во внутренних точках данного отрезка, найдется точка  $\xi$ , лежащая между  $x_0$  и  $x$ , такая, что

$$r_n(x, x_0) = \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{\varphi'(\xi)n!} f^{(n+1)}(\xi)(x - \xi)^n.$$

**Доказательство.** Пусть на отрезке  $I$  с концами  $x_0$  и  $x$  введена функция  $F(t) = f(x) - P_n(x, t)$ .  $F$  непрерывна на данном отрезке и имеет производную в его внутренних точках. Функция  $F(t)$  имеет вид

$$F(t) = f(x) - \left( f(t) + \frac{f'(t)}{1!}(x-t) + \frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n \right).$$



Прямым вычислением проверяется, что

$$F'(t) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n.$$

Легко заметить, что  $F(x) = 0$ , а  $F(x_0) = r_n(x, x_0)$ . Применяя на отрезке  $I$  к функциям  $F(t)$  и  $\varphi(t)$  теорему Коши, получается

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{\varphi(x) - \varphi(x_0)} = \frac{F'(\xi)}{\varphi'(\xi)},$$

откуда

$$r_n(x, x_0) = \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{\varphi'(\xi)n!} f^{(n+1)}(\xi)(x - \xi)^n.$$

□

**Следствие 9.10.2 (Остаточный член в форме Лагранжа)** Пусть  $\varphi(t) = (x-t)^{n+1}$ . Данная функция удовлетворяет условиям теоремы. Тогда  $\varphi'(\xi) = -(n+1)(x-\xi)^n$ ,  $\varphi(x) = 0$ , а значит

$$r_n(x, x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

Данный остаточный член называется остаточным членом в форме Лагранжа.

**Следствие 9.10.3 (Остаточный член в форме Коши)** Пусть  $\varphi(t) = (x-t)$ . Данная функция удовлетворяет условиям теоремы. Тогда  $\varphi'(\xi) = -1$ ,  $\varphi(x) = 0$ , а значит

$$r_n(x, x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n(x-x_0).$$

Данный остаточный член называется остаточным членом в форме Коши.

Рассмотренные выше остаточные члены будут полезны в дальнейшем при рассмотрении рядов. Сейчас же зададимся целью локального приближения функции (в окрестности точки  $x_0$ ). Именно, справедлива следующая теорема

**Теорема 9.10.4 (Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано)** Пусть функция  $f : U(x_0) \rightarrow \mathbb{R}$  в точке  $x_0$  имеет производные до порядка  $n$  включительно, тогда

$$f(x) = P_n(x, x_0) + o((x-x_0)^n), \quad x \rightarrow x_0, \quad x \in U(x_0).$$

Данная формула называется формулой Тейлора с остаточным членом в форме Пеано.

**Доказательство.** Пусть  $\varphi(x) = f(x) - P_n(x, x_0)$ . Согласно лемме 9.10.1,  $\varphi^{(k)}(x_0) = 0$  при  $k = 0 \dots n$ . Нужно показать, что  $\varphi(x) = o((x - x_0)^n)$  при  $x \rightarrow x_0$ . Так как функция  $\varphi(x)$  имеет  $n$  производных, то все производные до  $(n - 1)$  порядка включительно определены на некотором интервале  $(\alpha, \beta)$ , причем  $x_0 \in (\alpha, \beta)$ . Используем теорему Коши несколько раз

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{(x - x_0)^n - (x_0 - x_0)^n} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\varphi'(\xi_1)}{n(\xi_1 - x_0)^{n-1}} = \\ \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\varphi'(\xi_1) - \varphi'(x_0)}{n((\xi_1 - x_0)^{n-1} - (x_0 - x_0)^{n-1})} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\varphi''(\xi_2)}{n(n-1)(\xi_1 - x_0)^{n-2}} = \dots \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\varphi^{(n-1)}(\xi_{n-1})}{n!(\xi_{n-1} - x_0)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\varphi^{(n-1)}(\xi_{n-1}) - \varphi^{(n-1)}(x_0)}{n!(\xi_{n-1} - x_0)} = \frac{\varphi^{(n)}(x_0)}{n!} = 0, \end{aligned}$$

где  $\xi_1$  лежит между  $x$  и  $x_0$ ,  $\xi_2$  между  $\xi_1$  и  $x_0$ ,  $\dots$ ,  $\xi_{n-1}$  между  $\xi_n$  и  $x_0$ , а значит  $\xi_{n-1} \rightarrow x_0$ , когда  $x \rightarrow x_0$ .  $\square$

Оказывается, верна теорема единственности.

**Теорема 9.10.5 (О единственности многочлена Тейлора)** Если существует многочлен

$$Q_n(x, x_0) = a_0 + a_1(x - x_0) + \dots + a_n(x - x_0)^n,$$

удовлетворяющий условию

$$f(x) = Q_n(x, x_0) + o((x - x_0)^n), \quad x \rightarrow x_0,$$

то он единственен.

**Доказательство.** Последовательно можно найти

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0} (Q_n(x, x_0) + o((x - x_0)^n)) = a_0, \\ \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - a_0}{x - x_0} &= \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} (a_1 + a_2(x - x_0) + \dots + a_n(x - x_0)^{n-1} + o((x - x_0)^{n-1})) = a_1, \\ &\dots \\ \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - (a_0 + a_1(x - x_0) + \dots + a_{n-1}(x - x_0)^{n-1})}{x - x_0} &= \lim_{x \rightarrow x_0} (a_n + o(1)) = a_n. \end{aligned}$$

Единственность коэффициентов следует из единственности предела.  $\square$

**Следствие 9.10.6** Если функция  $f$  имеет производную до порядка  $n$  включительно в точке  $x_0$ , то  $Q_n(x, x_0) = P_n(x, x_0)$ , то есть рассмотренный выше многочлен является многочленом Тейлора.

## 9.11 Разложение элементарных функций по формуле Маклорена

Ниже приведены разложения основных элементарных функций по формуле Маклорена.

1.  $y = e^x$ ,  $x_0 = 0$ ,  $y^{(n)} = e^x$ ,  $y^{(n)}(0) = 1$ , тогда

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n).$$

2.  $y = a^x$ ,  $x_0 = 0$ ,  $y^{(n)} = a^x \ln^n a$ ,  $y^{(n)}(0) = \ln^n a$ , тогда

$$a^x = 1 + \frac{\ln a}{1!}x + \frac{\ln^2 a}{2!}x^2 + \dots + \frac{\ln^n a}{n!}x^n + o(x^n).$$

3.  $y = \sin x$ ,  $x_0 = 0$ ,  $y^{(n)} = \sin\left(x + \frac{\pi n}{2}\right)$ ,  $\sin^{(2n)}(0) = 0$ ,  $\sin^{(2n-1)}(0) = (-1)^{n-1}$ , тогда

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n-1}).$$

4.  $y = \cos x$ ,  $x_0 = 0$ ,  $y^{(n)} = \cos\left(x + \frac{\pi n}{2}\right)$ ,  $\cos^{(2n+1)}(0) = 0$ ,  $\cos^{(2n)}(0) = (-1)^n$ , тогда

$$y = \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}).$$

5.  $y = \ln(1+x)$ ,  $x_0 = 0$ ,  $y^{(0)}(0) = 0$ ,  $y^{(n)} = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(x+1)^n}$ ,  $y^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!$ , тогда

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} + o(x^n).$$

6.  $y = (1+x)^\alpha$ ,  $x_0 = 0$ ,  $y^{(n)} = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2) \cdot \dots \cdot (\alpha-(n-1))(1+x)^{\alpha-n}$ ,  $y^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-(n-1))$ , тогда

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)x^2}{2!} + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1) \cdot \dots \cdot (\alpha-(n-1))x^n}{n!} + o(x^n).$$

7.  $y = \operatorname{arctg} x$ ,  $x_0 = 0$ . В силу предыдущего примера легко заметить, что

$$\frac{1}{(1+x)} = (1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + o(x^n),$$

тогда

$$\varphi(x) = \frac{1}{1+x^2} = (1+x^2)^{-1} = 1 - x^2 + (x^2)^2 - (x^3)^2 + \dots + (-1)^n (x^2)^n + o((x^2)^n)$$

и

$$\operatorname{arctg}'(x) = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots + (-1)^{2n}x^{2n} + o(x^{2n}).$$

С другой стороны, так как

$$f(x) = \operatorname{arctg} x = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + o(x^n),$$

то в силу следствия 9.10.6,

$$\varphi(0) = f'(0), \varphi'(0) = 2f''(0), \dots, \varphi^{(n-1)}(0) = nf^{(n)}(0).$$

получается разложение

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1}).$$

**Пример 9.11.1** Вычислить предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - \sqrt{1+x^2} - x \cos x}{\ln^3(1-x)}.$$

Используя разложения, полученные выше,

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3).$$

Тогда (по теореме единственности)

$$\begin{aligned} e^{\sin x} &= e^{x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)} = 1 + \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) + \\ &\frac{\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^2}{2} + \frac{\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^3}{6} + o\left(\frac{\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^3}{6}\right). \end{aligned}$$

Так как точность разложения равна  $x^3$ , то

$$\frac{\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^2}{2} = \frac{x^2}{2} + o(x^3),$$

и

$$\frac{\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^3}{6} = \frac{x^3}{6} + o(x^3).$$

Кроме того,

$$o\left(\frac{\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^3}{6}\right) = o(x^3),$$

а значит

$$e^{\sin x} = 1 + x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^3).$$

Далее,

$$\begin{aligned}\sqrt{1+x^2} &= (1+x^2)^{1/2} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{1/2(1/2-1)x^4}{2} + \\ &+ o\left(\frac{1/2(1/2-1)x^4}{2}\right) = 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\end{aligned}$$

и

$$x \cdot \cos x = x \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) = x - \frac{x^3}{2} + o(x^3).$$

Окончательно, воспользовавшись тем, что  $\ln^3(1-x) \sim -x^3$ , получается

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - \sqrt{1+x^2} - x \cos x}{\ln^3(1-x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^3}{2} + o(x^3)}{-x^3} = -\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2} + o(1)\right) = -\frac{1}{2}.$$

**Пример 9.11.2** Вернемся к задаче (пример 8.10.2) вычисления предела

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+3x+x^2) + \ln(1-3x+x^2)}{x^2}.$$

Согласно выведенным соотношениям,

$$\ln(1+3x+x^2) = 3x + x^2 - \frac{(3x+x^2)^2}{2} + o((3x+x^2)^2) = 3x - \frac{7}{2}x^2 + o(x^2),$$

$$\ln(1-3x+x^2) = -3x + x^2 - \frac{(-3x+x^2)^2}{2} + o((-3x+x^2)^2) = -3x - \frac{7}{2}x^2 + o(x^2).$$

Значит,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+3x+x^2) + \ln(1-3x+x^2)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-7x^2 + o(x^2)}{x^2} = -7.$$

## 9.12 Исследование функций с помощью производных

Ниже приведена теорема (которая, впрочем, уже известна), связывающая возрастание/убывание функции со знаком производной.

**Теорема 9.12.1** Пусть функция  $f \in C[a, b]$  и дифференцируема на  $(a, b)$ . Тогда справедливы соотношения:

1.  $f'(x) > 0$  на  $(a, b) \Rightarrow f(x)$  возрастает на  $[a, b] \Rightarrow f'(x) \geq 0$  на  $(a, b)$ .
2.  $f'(x) \geq 0$  на  $(a, b) \Rightarrow f(x)$  не убывает на  $[a, b] \Rightarrow f'(x) \geq 0$  на  $(a, b)$ .
3.  $f'(x) < 0$  на  $(a, b) \Rightarrow f(x)$  убывает на  $[a, b] \Rightarrow f'(x) \leq 0$  на  $(a, b)$ .
4.  $f'(x) \leq 0$  на  $(a, b) \Rightarrow f(x)$  не возрастает на  $[a, b] \Rightarrow f'(x) \leq 0$  на  $(a, b)$ .

**Доказательство.** Данная теорема есть не что иное, как подробно записанное следствие 9.6.4 с учетом последующего замечания 9.6.5.  $\square$

### Теорема 9.12.2 (Необходимое условие внутреннего экстремума)

Для того чтобы точка  $x_0$  была точкой внутреннего экстремума функции  $f(x)$  необходимо, чтобы выполнялось одно из двух условий: либо функция не дифференцируема в точке  $x_0$ , либо  $f'(x_0) = 0$ .

**Доказательство.** Эта теорема – прямое следствие леммы Ферма 9.6.1.  $\square$

**Замечание 9.12.1** Это условие не является достаточным, что показывает, например, функция  $f(x) = x^3$ , производная которой равна нулю в точке  $x = 0$ , но которая не имеет экстремума в этой точке.

Ниже приведено удобное для практического применения достаточное условие экстремума.

**Теорема 9.12.3 (Первое достаточное условие экстремума)** Пусть  $f(x) : U(x_0) \rightarrow \mathbb{R}$ , непрерывна в точке  $x_0$  и дифференцируема на множествах  $U_- = \{x \in U(x_0) : x < x_0\}$  и  $U_+ = \{x \in U(x_0) : x > x_0\}$ . Тогда:

1. Если  $f'(x) > 0$  при  $x \in U_-$  и  $f'(x) < 0$  при  $x \in U_+$ , то  $x_0$  является точкой строгого локального максимума функции  $f(x)$ .
2. Если  $f'(x) < 0$  при  $x \in U_-$  и  $f'(x) > 0$  при  $x \in U_+$ , то  $x_0$  является точкой строгого локального минимума функции  $f(x)$ .

3. Если  $f'(x) > 0$  при  $x \in U_-$  и  $f'(x) > 0$  при  $x \in U_+$ , то  $x_0$  не является точкой экстремума функции  $f(x)$ .

4. Если  $f'(x) < 0$  при  $x \in U_-$  и  $f'(x) < 0$  при  $x \in U_+$ , то  $x_0$  не является точкой экстремума функции  $f(x)$ .

**Доказательство.** Первое утверждение. Так как  $f'(x) > 0$  при  $x \in U_- = (x_0 - \varepsilon, x_0)$  и функция непрерывна в точке  $x_0$ , то согласно теореме 9.12.1 функция  $f(x)$  возрастает на  $(x_0 - \varepsilon, x_0]$ . Значит,  $f(x_0) < f(x)$  при  $x \in U_-$ . Аналогично, так как  $f'(x) < 0$  при  $x \in U_+ = (x_0, x_0 + \varepsilon)$  и функция непрерывна в точке  $x_0$ , то функция  $f(x)$  возрастает на  $[x_0, x_0 + \varepsilon)$ . Тем самым проверено, что точка  $x_0$  — точка строгого локального максимума.

Доказательство остальных пунктов проводится аналогично и остается в качестве упражнения.  $\square$

**Пример 9.12.1** Функция  $f(x) = |x|$  имеет строгий локальный минимум в точке  $x = 0$ , так как она непрерывна в точке  $x = 0$  и, кроме того,  $f'(x) = -1$  при  $x < 0$ , и  $f'(x) = 1$  при  $x > 0$ .

**Пример 9.12.2** Важно отметить, что отказаться от непрерывности функции в точке  $x_0$  в вышеизложенной теореме нельзя. Например, для функции

$$f(x) = \begin{cases} x + 2, & x < 0 \\ -x + 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

при  $x < 0$  выполняется  $f'(x) = 1$ , а при  $x > 0$  выполняется  $f'(x) = -1$ , но экстремума в точке  $x = 0$ , очевидно, нет.

**Замечание 9.12.2** Важно отметить, что вышеизложенное достаточное условие не является необходимым. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Очевидно, что данная функция имеет строгий локальный минимум в точке  $x = 0$ , однако ее производная

$$f'(x) = 4x + 2x \sin \frac{1}{x} - \sin \frac{1}{x}$$

не сохраняет знак ни в какой проколотой окрестности нуля.

**Определение 9.12.1** Если в точке экстремума функция дифференцируема, то экстремум называется гладким.

**Определение 9.12.2** Если  $x_0$  – точка экстремума функции, а  $f'(x_0 - 0) = +\infty$ ,  $f'(x_0 + 0) = -\infty$ , или  $f'(x_0 - 0) = -\infty$ ,  $f'(x_0 + 0) = +\infty$ , то экстремум называется острым.

**Определение 9.12.3** Если  $x_0$  – точка экстремума функции, хотя бы одна из односторонних производных конечна, но  $f'(x_0 - 0) \neq f'(x_0 + 0)$ , то экстремум называется угловым.

**Пример 9.12.3** На рисунке 17 в точке  $x = 0$  функция имеет угловой экстремум.

**Пример 9.12.4** Исследовать на экстремумы функцию

$$y = \sqrt[3]{(1-x)(x-2)^2}.$$

Легко заметить, что данная функция непрерывна на  $\mathbb{R}$ . Ее производная равна

$$y'(x) = \frac{(4-3x)}{3(1-x)^{2/3}(x-2)^{1/3}}.$$

Методом интервалов легко определить, что производная отрицательна при  $x > 2$  и  $x < \frac{4}{3}$  и положительна при  $\frac{4}{3} < x < 2$ .

Так как функция дифференцируема в точке  $\frac{4}{3}$  и слева от этой точки производная отрицательна, а справа положительна, то  $x = \frac{4}{3}$  – точка строгого локального минимума, причем минимум гладкий.

Так как  $f'(2-0) = +\infty$ ,  $f'(2+0) = -\infty$  и слева от точки 2 производная положительна, а справа отрицательна, то точка  $x = 2$  – точка строгого локального максимума, причем максимум острый.

Можно заметить, что в точке  $x = 1$  знак производной не меняется, а сама производная обращается в бесконечность. Значит, в точке  $x = 1$  касательная к графику функции вертикальна. График функции изображен на рисунке 21.

**Теорема 9.12.4 (Второе достаточное условие экстремума)** Пусть функция  $f(x) : E \rightarrow \mathbb{R}$  имеет производные в точке  $x_0$  до порядка  $n$  включительно, причем  $f'(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ , а  $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ . Тогда если  $n$  нечетно, то в точке  $x_0$  экстремума нет, а если четно, то в точке  $x_0$  локальный минимум, если  $f^{(n)}(x_0) > 0$  и локальный максимум, если  $f^{(n)}(x_0) < 0$ .



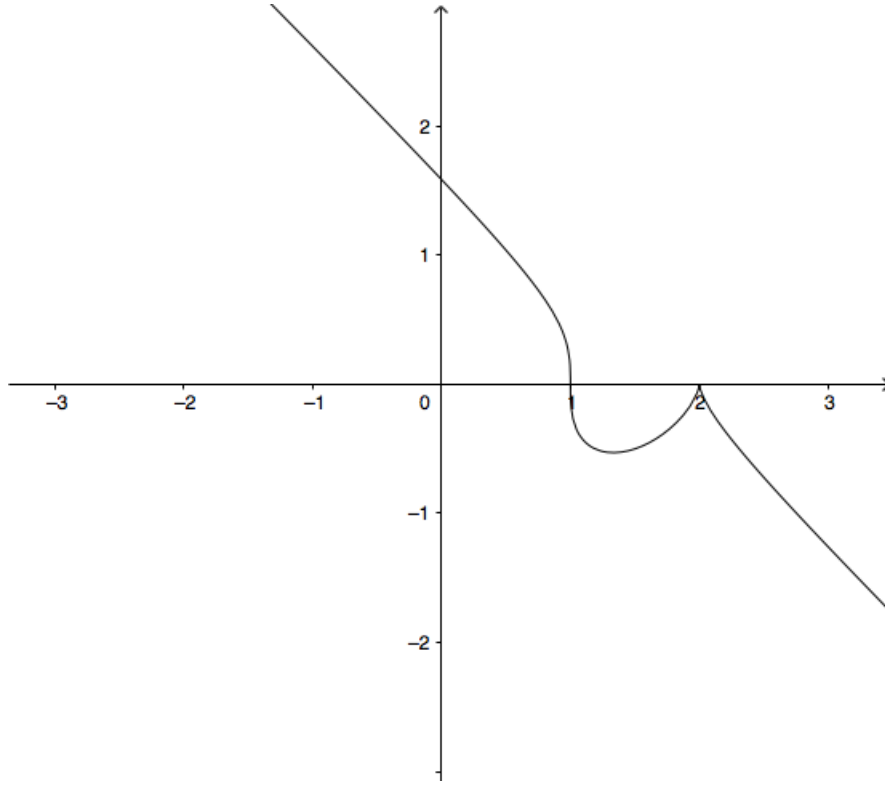


Рис. 21: График функции  $y = \sqrt[3]{(1-x)(x-2)^2}$ .

**Доказательство.** Используя формулу Тейлора с остаточным членом в форме Пеано, получается

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n).$$

При достаточной близости  $x$  к  $x_0$  знак разности  $f(x) - f(x_0)$  определяется лишь знаком  $\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$ .

Если  $n$  нечетно, то при  $x > x_0$  знак разности совпадает со знаком  $f^{(n)}(x_0)$ , а при  $x < x_0$  противоположен знаку  $f^{(n)}(x_0)$ , значит экстремума нет.

Если  $n$  четно, то как при  $x > x_0$ , так и при  $x < x_0$  знак разности совпадает со знаком  $f^{(n)}(x_0)$ . Тогда, если разность положительна, то в точке  $x_0$  локальный минимум, если отрицательна, то локальный максимум.  $\square$

**Определение 9.12.4** Функция  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  называется *выпуклой вверх* на  $(a, b)$ , если  $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$ ,  $\alpha_1, \alpha_2 \in [0, 1]$  и  $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ , выполняется условие

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \geq \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2).$$

Если при тех же условиях выполнено

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \leq \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2),$$

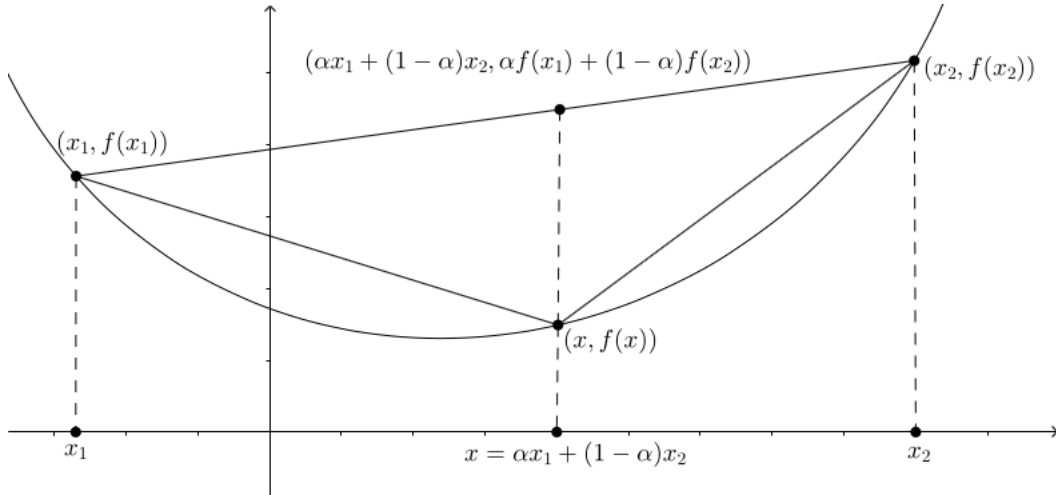


Рис. 22: Выпуклая вниз функция

то функция называется выпуклой вниз на  $(a, b)$ .

Если при  $x_1 \neq x_2$  и  $\alpha_1, \alpha_2 \neq 0$  неравенство строгое, то функция называется строго выпуклой вверх (вниз).

**Замечание 9.12.3** Геометрически выпуклость вниз функции на интервале  $(a, b)$  означает, что какую бы хорду графика функции, проходящую через точки  $(x_1, f(x_1))$  и  $(x_2, f(x_2))$  не провести, все точки графика функции  $(x, f(x))$ , стягиваемые данной хордой, лежат не выше точек хорды, см. рисунок 22.

Выведем эквивалентное условие выпуклости вниз. Из условий

$$x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \in (a, b), \quad \alpha_2 = 1 - \alpha_1$$

получим

$$\alpha_1 = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}, \quad \alpha_2 = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

Определение выпуклой вниз функции переписывается в виде

$$f(x) \leq \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2).$$

Пусть  $x_2 > x_1$ , тогда

$$(x_2 - x_1) f(x) \leq (x_2 - x) f(x_1) + (x - x_1) f(x_2),$$

$$(x_2 - x) f(x_1) - (x_2 - x_1) f(x) + (x - x_1) f(x_2) \geq 0,$$

$$(x_2 - x) f(x_1) + (x_1 - x_2) f(x) + (x - x_1) f(x_2) \geq 0.$$

Перепишав  $x_1 - x_2 = (x_1 - x) + (x - x_2)$ , получается

$$(x_2 - x)f(x_1) + (x_1 - x)f(x) + (x - x_2)f(x) + (x - x_1)f(x_2) \geq 0,$$

$$(x_2 - x)f(x_1) - (x - x_1)f(x) - (x_2 - x)f(x) + (x - x_1)f(x_2) \geq 0,$$

$$(x_2 - x)(f(x_1) - f(x)) + (x - x_1)(f(x_2) - f(x)) \geq 0,$$

$$(x - x_1)(f(x_2) - f(x)) \geq (x_2 - x)(f(x) - f(x_1))$$

или

$$(x_2 - x)(f(x) - f(x_1)) \leq (x - x_1)(f(x_2) - f(x)),$$

где  $x_1 < x < x_2$ . Тем самым получаем эквивалентное условие выпуклости вниз при  $x_1 < x < x_2$

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}.$$

**Замечание 9.12.4** Полученное условие означает, что хорда, соединяющая точки  $(x_1, f(x_1))$  и  $(x, f(x))$  имеет коэффициент наклона не больше, чем хорда, соединяющая точки  $(x, f(x))$  и  $(x_2, f(x_2))$  (см. рисунок 22).

**Теорема 9.12.5** Для того чтобы дифференцируемая на интервале  $(a, b)$  функция  $f(x)$  была выпуклой вниз (вверх) на  $(a, b)$  необходимо и достаточно, чтобы ее производная  $f'(x)$  не убывала (не возрастала) на  $(a, b)$ . При этом для строгой выпуклости вниз (вверх) необходимо и достаточно возрастание (убывание) производной.

**Доказательство.** Необходимость. В неравенстве

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x},$$

переходя к пределу при  $x \rightarrow x_1$ , получается

$$f'(x_1) \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Теперь, переходя к пределу при  $x \rightarrow x_2$ ,

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq f'(x_2).$$

Тогда получается

$$f'(x_1) \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq f'(x_2),$$

откуда и следует неубывание производной. Используя это, для строго выпуклой вниз функции, используя теорему Лагранжа получим

$$f'(x_1) \leq f'(\varepsilon_1) = \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} < \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} = f'(\varepsilon_2) \leq f'(x_2),$$

при  $a < x_1 < \varepsilon_1 < x < \varepsilon_2 < x_2 < b$ . Следовательно, строгая выпуклость вниз влечет возрастание производной.

Достаточность. Пусть производная  $f'(x)$  не убывает на интервале  $(a, b)$ . Пусть  $x_1 < x_2$ , тогда по теореме Лагранжа

$$f'(\varepsilon_1) = \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}, \text{ где } \varepsilon_1 \in (x_1, x)$$

и

$$f'(\varepsilon_2) = \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}, \text{ где } \varepsilon_2 \in (x, x_2).$$

Так как производная не убывает, то  $f'(\varepsilon_1) \leq f'(\varepsilon_2)$ , откуда

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}$$

и функция  $f(x)$  выпукла вниз. Если же производная  $f'(x)$  возрастает, то  $f'(\varepsilon_1) < f'(\varepsilon_2)$ , откуда

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} < \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}$$

и функция  $f(x)$  строго выпукла вниз. □

Комбинируя только что доказанную теорему и теорему 9.12.1 получается следующее следствие.

**Следствие 9.12.6** Пусть функция  $f(x)$  дважды дифференцируема на интервале  $(a, b)$ . Тогда, для того чтобы  $f(x)$  была выпукла вниз (вверх) необходимо и достаточно, чтобы  $f''(x) \geq 0$  на  $(a, b)$  ( $f''(x) \leq 0$  на  $(a, b)$ ). Причем, если  $f'(x) > 0$  ( $f'(x) < 0$ ), то этого достаточно для строгой выпуклости вниз (вверх).

Ниже установлена связь между выпуклостью вверх (вниз) и касательной к графику функции.

**Теорема 9.12.7** Пусть функция  $f(x)$  дифференцируема на интервале  $(a, b)$ . Функция  $f(x)$  выпукла вниз (вверх) на интервале  $(a, b)$  тогда и только тогда, когда все точки графика функции лежат не ниже (не выше) касательной, проведенной в произвольной точке интервала  $(a, b)$ . При этом для строгой выпуклости вниз (вверх) необходимо и достаточно, чтобы все точки графика, за исключением точки касания, лежали строго выше (ниже) касательной.

**Доказательство.** Необходимость. Пусть  $x_0 \in (a, b)$ . Уравнение касательной к графику функции в точке  $x_0$  имеет вид

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Разность функции и касательной

$$f(x) - y(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = (f'(\varepsilon) - f'(x_0))(x - x_0),$$

где  $\varepsilon$  между  $x$  и  $x_0$ . Так как  $f(x)$  выпукла вниз, то  $f'(x)$  не убывает на  $(a, b)$  и знак выражения  $f'(\varepsilon) - f'(x_0)$  совпадает со знаком  $x - x_0$ , а следовательно,  $f(x) - y(x) \geq 0$  в любой точке интервала  $(a, b)$ . Если  $f(x)$  строго выпукла, то  $f'(x)$  возрастает на  $(a, b)$  откуда  $f(x) - y(x) > 0$ .

Достаточность. Пусть

$$f(x) - y(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) \geq 0.$$

Тогда при  $x < x_0$  выполняется

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq f'(x_0),$$

а при  $x > x_0$  выполняется

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq f'(x_0).$$

Тем самым, для любого набора точек  $x_1, x_2, x \in (a, b)$  таких, что  $x_1 < x < x_2$  получается

$$\frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x},$$

тем самым получаем определение выпуклой функции. Можно заметить, что строгое неравенство влечет строгую выпуклость.  $\square$

**Определение 9.12.5** Пусть функция  $f : U(x_0) \rightarrow \mathbb{R}$  имеет в точке  $x_0$  производную. Если при переходе через точку  $x_0$  функция меняет направление выпуклости, то точка  $x_0$  называется точкой перегиба.

**Замечание 9.12.5** Точки перегиба дважды дифференцируемой функции нужно искать там, где существует первая производная, а вторая производная либо равна нулю, либо не существует.

**Пример 9.12.5** Исследовать на выпуклость функцию

$$y = \frac{1}{1 - x^2}.$$

Первая производная данной функции имеет вид

$$y' = \frac{2x}{(1-x^2)^2},$$

а вторая

$$y'' = -\frac{2(3x^2+1)}{(x^2-1)^3}.$$

Методом интервалов легко установить, что вторая производная отрицательна на промежутках  $(-\infty, -1)$ ;  $(1, +\infty)$ , а значит на этих промежутках функция выпукла вверх, и положительна на промежутке  $(-1, 1)$ , а значит на этом промежутке функция выпукла вниз. Точек перегиба у данной функции нет.

### 9.13 Асимптоты графика функции

**Определение 9.13.1** Прямая  $l$  называется асимптотой графика функции  $y = f(x)$ , если расстояние от точки  $(x, f(x))$ , лежащей на кривой, до прямой стремится к нулю, при удалении точки  $(x, f(x))$  на бесконечность от начала координат.

**Замечание 9.13.1** Удаление точки  $(x, f(x))$  на бесконечность может происходить тремя путями:

1. Величина  $x$  ограничена, а  $f(x) \rightarrow \infty$ .
2. Величина  $f(x)$  ограничена, а  $x \rightarrow \infty$ .
3. Одновременно  $x \rightarrow \infty$  и  $f(x) \rightarrow \infty$ .

**Определение 9.13.2** Прямая  $x = x_0$  называется вертикальной асимптотой графика функции  $y = f(x)$ , если выполнено хотя бы одно из условий

$$\lim_{x \rightarrow x_0 \pm 0} f(x) = \infty.$$

**Замечание 9.13.2** Так как функция, непрерывная в точке, ограничена в некоторой окрестности этой точки, то вертикальные асимптоты следует искать в точках разрыва и на границах области определения.

**Лемма 9.13.1** Вертикальная асимптота является асимптотой в смысле определения 9.13.1.

**Доказательство.** Пусть, например,  $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = \infty$ . Тогда расстояние от точки, лежащей на графике функции, до точки  $x = x_0$  равно  $|x - x_0|$ . При  $x \rightarrow x_0 + 0$  точка  $(x, f(x))$  уходит на бесконечность от начала координат, так как  $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = \infty$ , при этом  $|x - x_0| \rightarrow 0$ , то есть выполнено определение 9.13.1.  $\square$

**Определение 9.13.3** Прямая  $y = kx + b$  называется наклонной асимптотой графика функции  $y = f(x)$  при  $x \rightarrow \pm\infty$ , если

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - (kx + b)) = 0.$$

**Лемма 9.13.2** Наклонная асимптота является асимптотой в смысле определения 9.13.1.

**Доказательство.** Пусть

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (kx + b)) = 0.$$

По формуле расстояния от точки  $(x, f(x))$ , лежащей на графике функции, до прямой  $y - kx - b = 0$ , получим

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|f(x) - kx - b|}{\sqrt{1 + k^2}} = 0,$$

тем самым проверено определение 9.13.1.  $\square$

Коэффициенты  $k$  и  $b$  наклонной асимптоты  $y = kx + b$  определяются с помощью следующей теоремы.

**Теорема 9.13.1** Для того чтобы прямая  $y = kx + b$  была асимптотой графика функции  $y = f(x)$  при  $x \rightarrow \pm\infty$ , необходимо и достаточно, чтобы существовали два конечных предела

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = k,$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx) = b.$$

**Доказательство.** Необходимость. Пусть прямая  $y = kx + b$  является асимптотой графика функции  $y = f(x)$  при  $x \rightarrow +\infty$ . Тогда выполняется условие  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (kx + b)) = 0$  или соотношение

$$f(x) = kx + b + \alpha(x), \text{ где } \lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha(x) = 0.$$

Обе части последнего равенства разделим на  $x$ , тогда

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{kx + b + \alpha(x)}{x} = k + \frac{b}{x} + \frac{\alpha(x)}{x}.$$

Переходя к пределу при  $x \rightarrow +\infty$ , получается

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( k + \frac{b}{x} + \frac{\alpha(x)}{x} \right) = k.$$

Далее соотношение  $f(x) = kx + b + \alpha(x)$  переписывается в виде  $f(x) - kx = b + \alpha(x)$ . Переходя к пределу при  $x \rightarrow +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (b + \alpha(x)) = b.$$

Достаточность. Пусть существуют конечные пределы

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = k, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx) = b.$$

Тогда второй предел можно записать в виде:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx) - b = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - (kx + b)) = 0,$$

что соответствует определению наклонной асимптоты. Случай  $x \rightarrow -\infty$  разбирается аналогично.  $\square$

**Определение 9.13.4** В случае, если  $k = 0$ , асимптота называется горизонтальной и описывается уравнением  $y = b$ .

Наличие горизонтальной асимптоты можно установить непосредственно, используя следующее следствие.

**Следствие 9.13.2** Для того, чтобы прямая  $y = b$  была горизонтальной асимптотой графика функции  $y = f(x)$  при  $x \rightarrow \pm\infty$  необходимо и достаточно, чтобы существовал конечный предел

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = b.$$

**Пример 9.13.1** График функции  $y = e^{-x}$  имеет только правую асимптоту  $y = 0$ , действительно

$$k_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{xe^x} = 0,$$



$$k_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x}}{x} = -\infty.$$

Так как при  $x \rightarrow -\infty$   $k_1 = -\infty$ , то левой асимптоты не существует. Для правой асимптоты

$$b_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{-x} - 0 \cdot x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{-x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{e^x} \right) = 0.$$

Таким образом  $k = 0$  и  $b = 0$ , а следовательно асимптота имеет уравнение  $y = 0$ .

**Пример 9.13.2** Найти асимптоты графика функции  $y = x + \operatorname{arctg} x$ . Данная функция непрерывна на всем множестве действительных чисел, поэтому у нее нет вертикальных асимптот.

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x + \operatorname{arctg} x}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left( 1 + \frac{\operatorname{arctg} x}{x} \right) = 1 + \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1,$$

так как функция  $\operatorname{arctg} x$  ограничена, то последний предел при  $x \rightarrow \pm\infty$  равен 0. Коэффициент  $b$  вычисляется отдельно при  $x \rightarrow +\infty$  и при  $x \rightarrow -\infty$ .

$$b_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \operatorname{arctg} x - 1 \cdot x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2},$$

$$b_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}.$$

Таким образом, график функции имеет две наклонные асимптоты

$$y_1 = x + \frac{\pi}{2}, \quad y_2 = x - \frac{\pi}{2}.$$

## 9.14 Исследование функции и построение графика

Для построения и изучения функции целесообразно придерживаться следующей последовательности действий:

1. Найти область определения функции и ее точки разрыва. Найти точки пересечения графика функции с осями координат.
2. Отметить такие свойства, как четность, нечетность, периодичность.
3. Найти первую производную и промежутки возрастания и убывания функции, а также экстремумы.

4. Найти вторую производную и промежутки выпуклости, а также точки перегиба.
5. Найти асимптоты графика функции.
6. Построить график.

Ясно, что при решении конкретной задачи некоторые пункты могут быть расширены, а некоторые могут быть излишними или вовсе невыполнимыми.

**Пример 9.14.1** Построить график функции

$$y = \frac{x^5}{x^4 - 1}.$$

1. В область определения функции не входят те точки, которые удовлетворяют уравнению  $x^4 - 1 = 0$ , то есть  $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ . Кроме того, если  $y = 0$ , то  $x = 0$ , и наоборот, так что  $(0, 0)$  – единственная точка пересечения графика функции с осями координат.
2. Функция является нечетной, так как

$$y(-x) = \frac{(-x)^5}{(-x)^4 - 1} = -\frac{x^5}{x^4 - 1} = -y(x).$$

3. Первая производная функции:

$$y'(x) = \frac{x^4(x^4 - 5)}{(x^4 - 1)^2}.$$

Методом интервалов легко получить, что функция возрастает при  $x \in (-\infty, -\sqrt[4]{5}]; [\sqrt[4]{5}, +\infty)$  и убывает при  $x \in [-\sqrt[4]{5}, -1); (-1, 1); (1, \sqrt[4]{5}]$ . В точке  $x = -\sqrt[4]{5}$  функция имеет строгий локальный максимум, причем  $y(-\sqrt[4]{5}) = -\frac{5\sqrt[4]{5}}{4}$ , а в точке  $x = \sqrt[4]{5}$  строгий локальный минимум, причем  $y(\sqrt[4]{5}) = \frac{5\sqrt[4]{5}}{4}$ .

4. Вторая производная функции:

$$y'' = \frac{x^3(12x^4 + 20)}{(x^4 - 1)^3}.$$

Методом интервалов легко получить, что функция выпукла вниз при  $x \in (-1, 0]; [1, +\infty)$  и выпукла вверх при  $x \in (-\infty, -1); [0, 1)$ . Кроме того, точка  $x = 0$  является точкой перегиба, причем  $y(0) = 0$ .

5. Функция непрерывна на множестве  $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ . Так как

$$\lim_{x \rightarrow -1-0} \frac{x^5}{x^4 - 1} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -1+0} \frac{x^5}{x^4 - 1} = +\infty$$

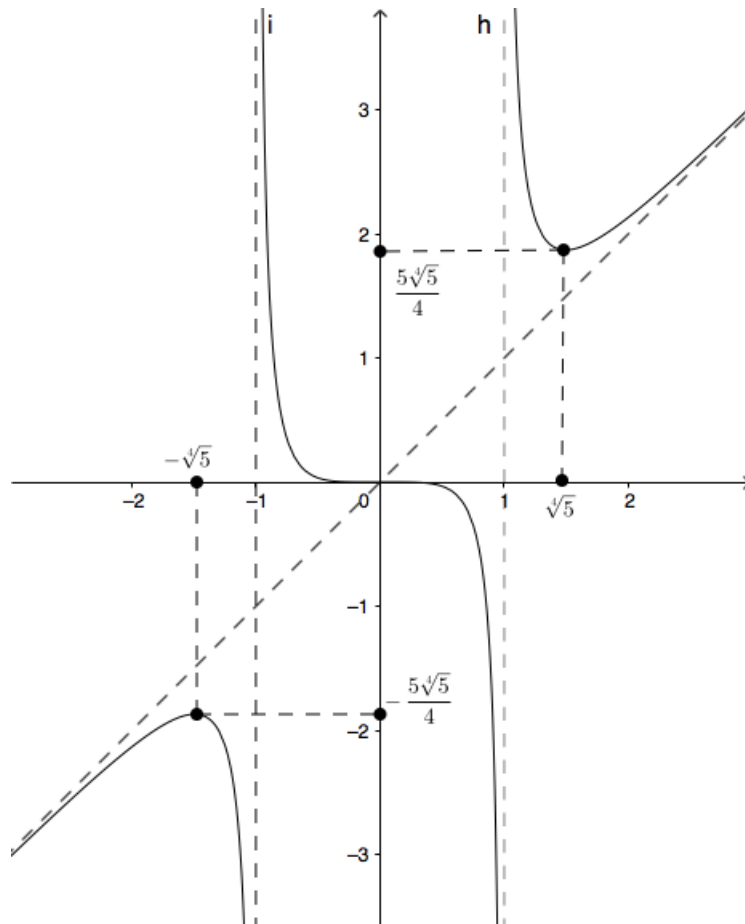


Рис. 23: График функции  $y = \frac{x^5}{x^4-1}$ .

и

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{x^5}{x^4-1} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{x^5}{x^4-1} = +\infty,$$

то можно заключить, что  $x = 1$  и  $x = -1$  – вертикальные асимптоты. Кроме того, так как

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^4}{x^4-1} = 1$$

и

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left( \frac{x^5}{x^4-1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left( \frac{x}{x^4-1} \right) = 0,$$

то прямая  $y = x$  является асимптотой графика функции как на  $-\infty$ , так и на  $+\infty$ .

6. Вся полученная информация теперь используется для построения графика функции.

## 9.15 Контрольные вопросы и задачи

1. Какова связь между наличием предела функции в точке и ее дифференцируемостью в этой точке?
2. Поясните, почему в теореме Ферма условие, что рассматривается внутренний экстремум, важно.
3. Выведите теорему Лагранжа из теоремы Коши. Как с помощью формулы Тейлора вычислить  $\sin 2$  с наперед заданной точностью?
4. Может ли функция быть непрерывной, но недифференцируемой?