$\boxed{\text{IX}}$

Линейные отображения. Линейные формы

$\boxed{1}$ Найдите базис ядра линейного отображения, заданного матрицей:

а) $\begin{pmatrix} 3 & 5 & -4 & 2 \\ 2 & 4 & -6 & 3 \\ 11 & 17 & -8 & 4 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 6 & 9 & 2 \\ -4 & 1 & 1 \\ 5 & 7 & 4 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 & -2 & 2 \\ 8 & 9 & 9 & -3 & 4 \\ 7 & 1 & 6 & -2 & 6 \\ 4 & -1 & 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

$\boxed{2}$ Линейное отображение $\varphi : \mathbb{Q}^3 \to \mathbb{Q}^2$ заданое матрицей $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. В $\mathbb{Q}^3$ выбран новый базис $e_1 = (1, -1, 0)^T$, $e_2 = (0, 2, -1)^T$, $e_3 = (1, 0, 1)^T$. Найдите матрицу отображения в этом базисе.

$\boxed{3}$ Найти матрицу отображения из предыдущей задачи, если в $\mathbb{Q}^2$ выбран новый базис $f_1 = (3, 2)^T$, $f_2 = (1, 1)^T$, а базис в $\mathbb{Q}^3$ оставлен без изменений.

$\boxed{4}$ Пусть линейное отображение $\varphi : U \to V$ в базисах (e_1, e_2, e_3) пространства U и (f_1, f_2) пространства V имеет матрицу $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$. Найдите матрицу этого отображения в базисах $(e_1, e_1 + e_2, e_1 + e_2 + e_3)$ и $(f_1, f_1 + f_2)$.

$\boxed{5}$ Найдите матрицу линейного отображения $\varphi : \mathbb{F}[x]_1 \to M_2(\mathbb{F})$, $g(x) \mapsto g(S)$, где $S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ — фиксированная матрица, если в $\mathbb{F}[x]_1$ выбран базис $(1, x)$, а в $M_2(\mathbb{F})$ — базис из стандартных матричных единиц $(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$.

$\boxed{6^*}$ $\mathbb{F}_q$ — поле из q элементов. Найдите:

а) число линейных отображений из пространства $\mathbb{F}_q^n$ в пространство $\mathbb{F}_q^k$;

б) число инъективных линейных отображений из $\mathbb{F}_q^n$ в $\mathbb{F}_q^k$;

в) число сюръективных линейных отображений из $\mathbb{F}_q^n$ в $\mathbb{F}_q^k$;

$\boxed{7}$ Какие из отображений пространства $\mathbb{R}[x]_n$ в себя являются линейными:

а) $f(x) \mapsto f(1)$; б) $f(x) \mapsto 2 \cdot f(1)$;

в) $f(x) \mapsto x^2 \cdot \int\limits_0^1 f(t)dt$, $n \geqslant 2$;

г) $f(x) \mapsto f(0) \cdot f(1) \cdot x$; д) $f(x) \mapsto \dfrac{d^n}{dx^n} f\left(x^2\right)$;

е) $f(x) \mapsto x^n \cdot f\left(\dfrac{1}{x}\right)$; ё) $f(x) \mapsto \dfrac{\int_0^x f(t)dt}{x}$?

$\boxed{8}$ Рассмотрим линейное пространство всех сходящихся числовых последовательностей (a_n). Какие из функций $(a_n) \mapsto \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, $(a_n) \mapsto \sup a_n$, $(a_n) \mapsto a_1$ являются линейными?

$\boxed{9}$ В пространстве $M_n(\mathbb{R})$ рассмотрим функции следа и определителя. Являются ли они линейными?

$\boxed{10}$ Найдите базис ядра линейного функционала $\varphi = 2x^1 - 3x^2 + x^4$, где $x^k : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ — функционал взятия k-той координаты вектора $\mathbb{R}^4$ в стандартном базисе.

$\boxed{11}$ Докажите, что линейные формы $\varphi_1 = x^1 + 2x^2 + 3x^3$, $\varphi_2 = 4x^1 + 5x^2 + 6x^3$, $\varphi_3 = 7x^1 + 8x^2 + x^3$ образуют базис пространства $\left(\mathbb{Q}^3\right)^*$, и найдите сопряжённый ему базис в $\mathbb{Q}^3$. Найдите координаты вектора $(4, -2, 13)^T \in \mathbb{Q}^3$ в этом базисе. Каковы коэффициенты формы $5x^1 - 4x^2 + 2x^3$ относительно этого базиса?

$\boxed{12^*}$ Пусть k — натуральное число. Сопоставим каждому многочлену степени не выше n значение его k-той производной в точке a. Проверьте, что этим определена линейная функция. Найдите ее координатную строку в базисах:

а) $1, x, x^2, \ldots, x^n$;

б) $1, x - a, (x - a)^2, \ldots, (x - a)^n$.

$\boxed{13^*}$ В пространстве многочленов степени не выше n с вещественными коэффициентами линейные функции l^k, $k = 0, 1, \ldots, n$ заданы формулой $l^i(f) = f^{(i)}(a)$ для всех многочленов этого пространства, где a — произвольная точка числовой прямой. Докажите, что эти функции образуют базис в сопряжённом пространстве, и найдите двойственный базис изначального пространства.

$\boxed{14^*}$ В пространстве $\mathbb{R}[x]_n$ линейные функции l^k, $k = 0, 1, \ldots, n$ заданы формулой $l^i(f) = \int\limits_0^{i+1} f(t)dt$. Докажите, что эти функции образуют базис в пространстве $(\mathbb{R}[x]_n)^*$.

$\boxed{15^*}$ В пространстве $\mathbb{R}[x]_n$ линейные функции l^k, $k = 0, 1, \ldots, n$ заданы формулой $l^i(f) = f(a_i)$, где $a_0, a_1, \ldots, a_n$ — различные точки числовой прямой. Докажите, что эти функции образуют базис в пространстве $(\mathbb{R}[x]_n)^*$. Найдите двойственный базис в пространстве $\mathbb{R}[x]_n$.

$\boxed{16^*}$ Докажите, что k линейных функций на n-мерном линейном пространстве линейно независимы тогда и только тогда, когда пересечение их ядер является подпространством размерности $n - k$.

$\boxed{17^*}$ Докажите, что векторное пространство $(\mathbb{R}[x])^*$ не изоморфно пространству $\mathbb{R}[x]$.