

Линейная алгебра. Продвинутый уровень. Программа экзамена.
Осенний семестр 2022-23 уч. г., лектор Р. А. Попков

1. Отображения, композиция отображений. Образ и прообраз. Сюръекция, биекция, инъекция. Бином Ньютона и треугольник Паскаля.

2. Основные алгебраические системы. Бинарная операция на множестве. Ассоциативность, коммутативность. Группоид, полугруппа, моноид, группа, абелева группа. Кольцо. Поле. Порядок группы/кольца/поля. Порядок элемента. Подгруппа, подкольцо, подполе. Идемпотенты и нильпотенты. Есть ли в поле делители нуля. Характеристика поля. Изоморфизм алгебраических систем.

3. Отношение эквивалентности. Фактормножество. Эквивалентность, согласованная с операциями. Кольцо вычетов \mathbb{Z}_n . Арифметика в кольце вычетов. Когда кольцо вычетов является полем. Бином Ньютона $(a + b)^p$ в поле \mathbb{Z}_p . Малая теорема Ферма. Линии на плоскости \mathbb{Z}_p^2 .

4. Группа подстановок: проверка аксиом, разложение на циклы, на транспозиции, декремент и четность подстановки, четность произведения, подгруппа четных подстановок. (Доказательства достаточно понимать наглядно, на уровне идеи, без громоздких общих выкладок.)

5. Арифметика матриц: сложение, умножение, транспонирование. Кольцо квадратных матриц над полем. Перестановочные матрицы. Разложение квадратной матрицы в произведение диагональной и трансвекций (на уровне идеи, без доказательства). Блочные матрицы.

6. Определители квадратных матриц и их свойства. Обратная матрица. Теорема Крамера. След квадратной матрицы и его свойства.

7. Поле комплексных чисел \mathbb{C} : определение, единственность, существование, геометрическое описание сложения и умножения, формула Муавра, извлечение корней, первообразные корни из 1.

8. Кольцо многочленов над полем. Делимость в кольце многочленов, алгоритм Евклида. НОД многочленов. Схема Горнера. Приводимые и неприводимые многочлены. Аналог основной теоремы арифметики. Алгебраически замкнутые поля. Основная теорема алгебры (без доказательства). Теорема Виета. Построение конечных полей.

9. Многочлены с рациональными коэффициентами. Лемма Гаусса. Признак Эйзенштейна.

10. Векторные (линейные) пространства. Аксиомы векторного пространства и следствия из них. Алгебры. Подпространства и подалгебры. Тело. Представление о теле кватернионов. Теорема Веддербёрна (естественно, без доказательства ☺).

11. Линейная (не)зависимость систем векторов и свойства линейно (не)зависимых систем. Линейная оболочка системы векторов.

12. Метод Гаусса. Классификация СЛАУ (определённые, неопределённые, совместные, несовместные). Структура решения СЛАУ. Метод Гаусса на языке умножения матриц.

13. Основная лемма о линейной зависимости. Базис и размерность векторного пространства. Описание конечномерных пространств с точностью до изоморфизма. Теорема о размерности пространства решений однородной СЛАУ. Базис пространства решений однородной СЛАУ — ФСР. Теорема о существовании однородной СЛАУ, задающей подпространство.

14. Переход от одного базиса к другому. Матрица перехода и её свойства.

15. Ранг и база системы векторов. Ранг матрицы, теорема о ранге матрицы (= теорема о базисном миноре). Лемма о вычислении ранга матрицы. Теорема Кронекера-Капелли.

16. Геометрия подпространств. Базис, согласованный с подпространством. Теорема о существовании базиса, согласованного с парой подпространств. Формула Грассмана. Линейно независимые подпространства. Прямая сумма подпространств. Проекция вектора на подпространство из прямой суммы. Поиск базиса суммы и пересечения подпространств.

17. Линейные отображения. Матрица линейного отображения. Ядро и образ линейного отображения. Теорема о сумме размерностей ядра и образа. Теорема о структуре прообраза линейного отображения ($\varphi^{-1}(y) = x + \ker \varphi$). Операции над линейными отображениями. Изменение матрицы линейного отображения при изменении базиса. Частные случаи линейных отображений: линейные операторы, линейные формы.

18. Линейные формы. Координатная строка линейной формы. Сопряжённое пространство. Сопряжённый базис. Второе сопряжённое пространство. Аннулятор подпространства. Теорема о размерности аннулятора. Критерий базисности для набора линейных форм.

19 Факторпространство. Теорема о размерности факторпространства. Коразмерность подпространства. Может ли быть так, что $\dim U = \infty$, $\dim V = \infty$, а $\operatorname{codim} U$ конечна?

20. Геометрические векторы. Коллинеарность, компланарность. Деление отрезка в заданном отношении. Правые и левые тройки векторов. Скалярное, векторное, смешанное произведения геометрических векторов и свойства этих произведений. Критерии ортогональности, коллинеарности и компланарности геометрических векторов. Выражения для произведений векторов в декартовых координатах. Тожества «бац минус цаб» и Якоби. Что такое кольцо Ли?

21. Прямые и плоскости. Различные уравнения прямых и плоскостей как следствия свойств произведений геометрических векторов. Основные задачи на прямые и плоскости: нахождение расстояния от точки до прямой/плоскости, расстояние между параллельными/скрещивающимися прямыми и т.п.

22. Кривые второго порядка. Эллипс, гипербола, парабола и их канонические уравнения. Полуоси, директрисы, эксцентриситет. Оптические свойства кривых второго порядка. Кривые второго порядка как конические сечения (сферы Данделена).

23. Общая теория кривых второго порядка. Теорема о 9 видах уравнений, к которым приводится уравнение любой кривой второго порядка. Ортогональные ин-

варианты кривой второго порядка. Классификация кривых второго порядка по инвариантам (без относительного инварианта K). Ортогональные преобразования на плоскости и их матрицы.

24. Аффинные пространства. Репер и аффинная система координат. Плоскость в аффинном пространстве. Аффинная оболочка множества точек. Аффинная зависимость и независимость точек. Аффинные плоскости как множества решений СЛАУ. Барицентрическая комбинация точек. Барицентрические координаты точки относительно заданных точек.

Примеры билетов:

№ 100

1. Точка $A(2, -1)$ принадлежит эллипсу, точка $F(1, 0)$ является его фокусом, соответствующая F директриса задана уравнением $2x - y - 10 = 0$. Составьте уравнение этого эллипса.

2. Приводим ли многочлен $x^5 + 9x^4 + 34x^3 + 56x^2 + 45x + 13$ над \mathbb{Q} ? Над \mathbb{R} ? Над \mathbb{C} ?

3. Аннулятор подпространства. Теорема о размерности аннулятора. Критерий базисности для набора линейных форм.

4. Ортогональные инварианты кривой второго порядка.

№ 200

1. Составьте уравнение кривой второго порядка, зная её эксцентриситет $\varepsilon = \sqrt{5}$, фокус $F(1, 1)$ и соответствующую директрису $x + 2y - 1 = 0$.

2. Найдите подстановку σ : $\sigma \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 1 & 7 & 2 & 8 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}^{155} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 8 & 3 & 7 & 2 & 4 & 6 & 1 \end{pmatrix}$, её декремент и чётность.

3. Теорема о структуре прообраза линейного отображения.

4. Теорема о существовании базиса, согласованного с парой подпространств. Формула Грассмана.