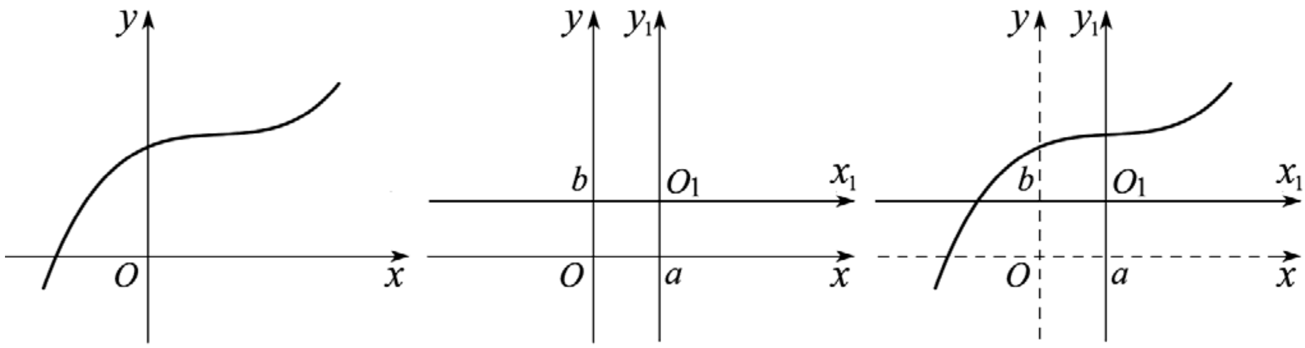
1. *Сдвиги вдоль координатных осей.*

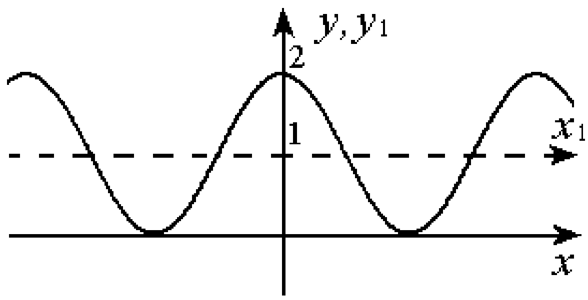
Пусть известен график функции $y = f(x)$ и требуется построить график функции $y = f(x-a)+b$. Преобразуем последнее равенство к виду $y-b = f(x-a)$. Вводя обозначения $x-a = x_1$ и $y-b = y_1$, получим равенство, задающее новую функцию в виде $y_1 = f(x_1)$. Известно, что системы координат, связанные равенствами $x-a = x_1$ и $y-b = y_1$ имеют сонаправленные координатные оси и точка O_1 - начало системы $X_1O_1Y_1$ имеет координаты (a,b) в системе XOY. Поэтому можно на одной плоскости построить систему XOY, затем найти на этой плоскости точку $O_1(a,b)$ и провести через нее новые координатные оси, сонаправленные старым осям. Теперь достаточно построить известный график функции $y = f(x)$ относительно новых осей.



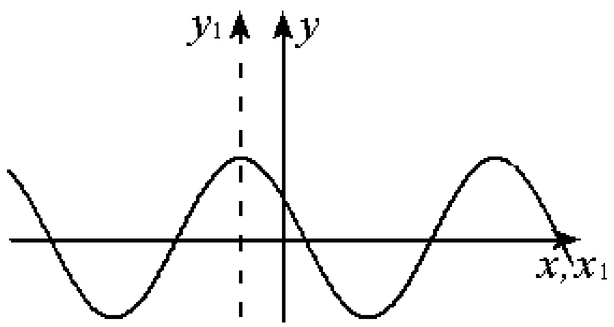
Пример 2.13. Построить графики функций

a) $y = \cos x + 1$; **b)** $y = \cos(x + 0{,}5)$; **c)** $y = \dfrac{2x-1}{x+2}$.

☺ **a)** Введем новые координаты по формулам $x_1 = x$ и $y_1 = y - 1$, и на координатной плоскости XOY построим новые координатные оси, сонаправленные со старыми и имеющие начало в точке $(0,1)$. Далее, рисуем график косинуса x по отношению к новым осям. Этот же график можно получить из исходного сдвигом вдоль оси ординат на 1 единицу вверх.



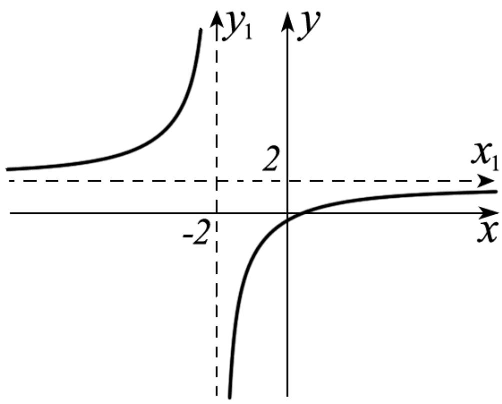
b) Введем новые координаты по формулам $x_1 = x + 0{,}5$ и $y_1 = y$. Новые оси будут иметь начало в точке $(-0{,}5;0)$. Теперь остается построить график косинуса по отношению к новой системе.



Для построения исходного графика можно график функции $y = \cos x$ сместить вдоль оси абсцисс на 0,5 единиц влево.

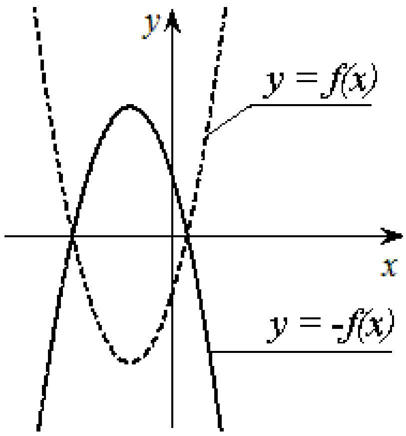
c) Преобразуем дробь $\dfrac{2x-1}{x+2}$, выделяя из нее целую часть: $\dfrac{2x-1}{x+2} = \dfrac{2x+4-5}{x+2} = 2 + \dfrac{-5}{x+2}$, и введем новые координаты по формулам

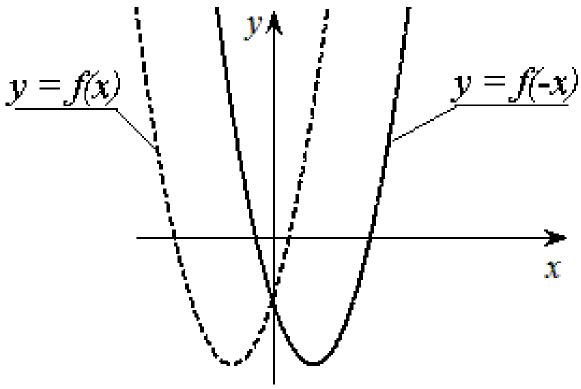
$x_1 = x + 2$ и $y_1 = y - 2$. В новых координатах функция будет иметь вид $y_1 = \frac{-5}{x_1}$. Графиком такой функции является гипербола. Строим новую систему координат с началом в точке $(-2,2)$ и данную гиперболу по отношению к этой системе. Для более точного построения можно определить точки пересечения гиперболы со старыми координатными осями $\left(0,-\frac{1}{2}\right)$ и $\left(\frac{1}{2},0\right)$. ☻



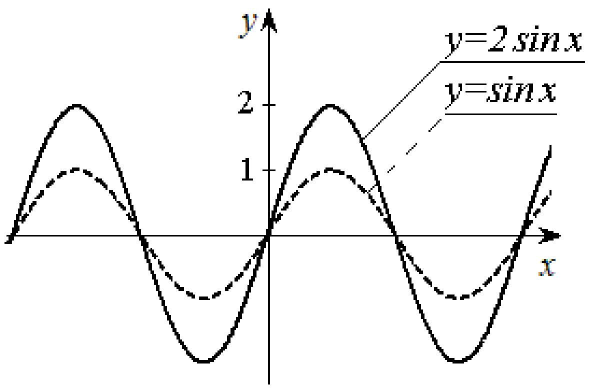
2. Симметричное отражение относительно осей OX и OY.

График функции $y = -f(x)$ получается из графика функции $y = f(x)$ симметричным отражением относительно оси абсцисс, а график функции $y = f(-x)$ получается из графика функции $y = f(x)$ симметричным отражением относительно оси ординат.





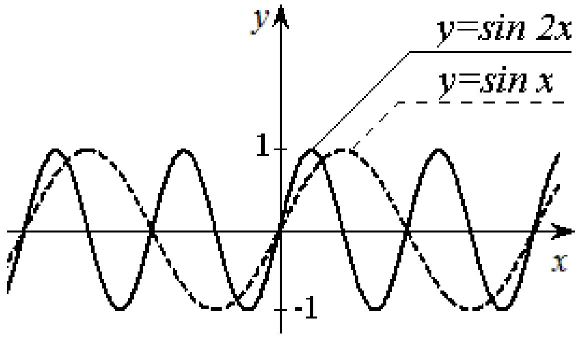
3. Растяжение и сжатие вдоль оси OY.



Рассмотрим функцию $y = k \cdot f(x)$ при $k \neq 1$. Если $k > 1$, то для построения её графика нужно растянуть вдоль оси OY в k раз график функции $y = f(x)$. Если $0 < k < 1$, то график функции $y = f(x)$ нужно сжимать вдоль оси OY в $\frac{1}{k}$ раз. Если $k < 0$, то вначале можно сделать отражение относительно оси OX и потом сжимать или растягивать вдоль оси OY. При всех указанных растяжениях и сжатиях точки графика, лежащие на оси абсцисс, остаются неподвижными.

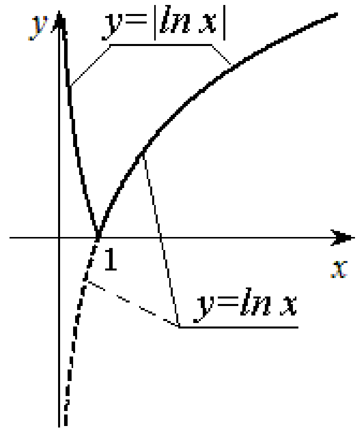
4. Растяжение и сжатие вдоль оси OX.

Рассмотрим функцию $y = f(kx)$, $k \neq 1$. При $k > 1$ график этой функции получается из исходного сжатием вдоль оси OX к оси OY в k раз. При $0 < k < 1$ исходный график требуется растягивать в $1/k$ раз вдоль оси OX. При отрицательных k вначале надо отразить график относительно оси ординат.



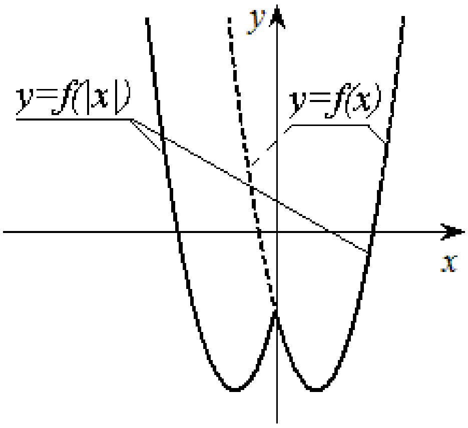
5. Модуль функции.

Рассмотрим построение графика функции $y = |f(x)|$. Часть графика функции $y = f(x)$, лежащая выше оси абсцисс, остается неизменной, а часть, лежащую ниже оси OX, требуется отразить относительно оси OX. Таким образом, результирующий график должен весь лежать в верхней полуплоскости, так как $|f(x)| \geq 0$.

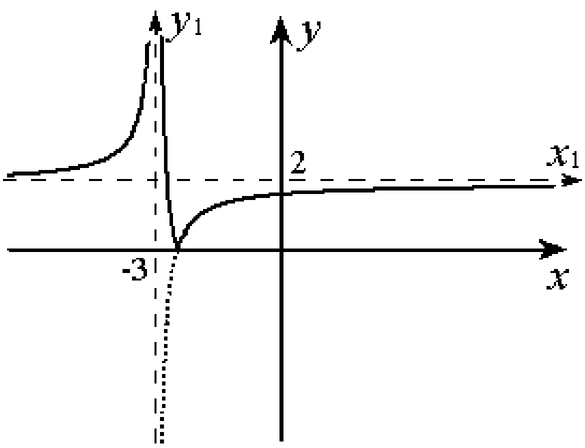


6. Модуль аргумента.

График функции $y = f(|x|)$ строится по графику функции $y = f(x)$ следующим образом. Все точки, лежащие левее оси OY, исчезают. Точки, находящиеся правее OY остаются на месте, и вся правая часть отражается относительно оси OY налево. Таким образом, получаем график, симметричный относительно оси ординат.



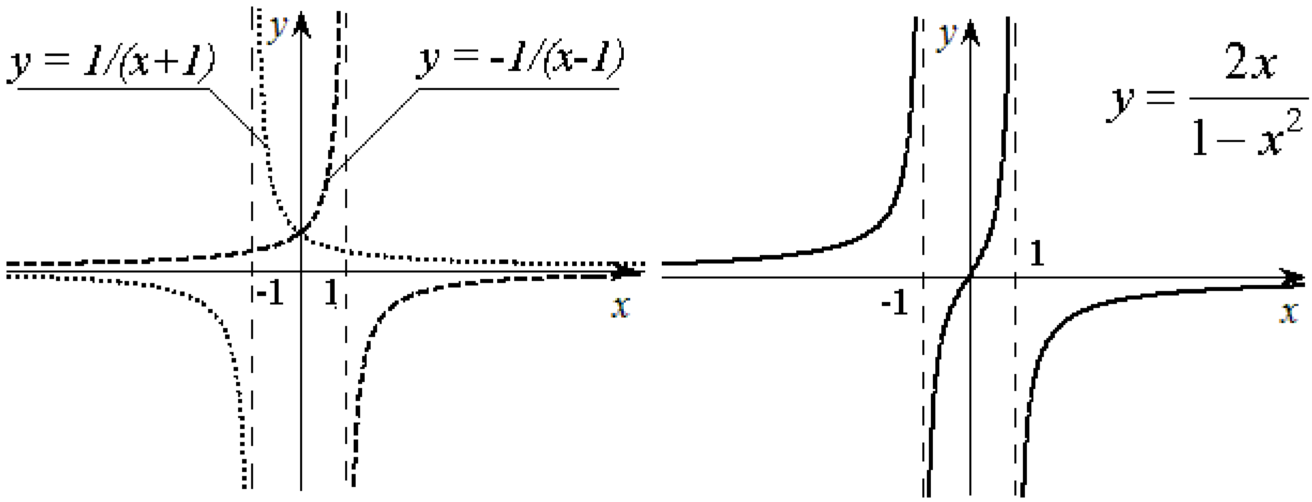
Пример 2.14. Построить график функции $y = \left|\dfrac{5+2x}{x+3}\right|$.



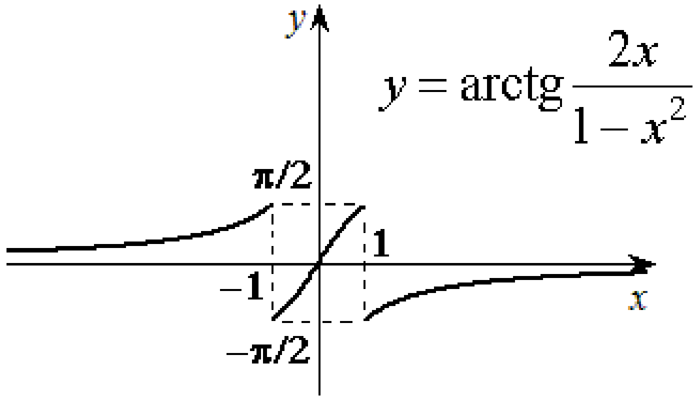
☺ Преобразуем выражение внутри модуля: $\dfrac{5+2x}{x+3} = 2 - \dfrac{1}{x+3}$. Чтобы построить график функции $f(x) = 2 - \dfrac{1}{x+3}$ нужно построить систему координат с началом $(-3,2)$ и на ней построить гиперболу $y = -1/x$ и выполнить преобразование $y = |f(x)|$, то есть, часть графика, лежащую ниже оси OY симметрично отобразить в верхнюю полуплоскость (результат – сплошной линией). Заметим, что функция не определена при $x=-3$, значит, прямая $x=-3$ является ее вертикальной асимптотой (см. рис.). ☻

Пример 2.15. Построить график функции $y=\operatorname{arctg}\dfrac{2x}{1-x^2}$.

☺ Для начала заметим, что функция является нечетной. Это означает, что ее график будет симметричным относительно начала координат. Построим график функции $f(x)=\dfrac{2x}{1-x^2}$. Для этого представим ее в виде суммы двух дробей: $\dfrac{2x}{1-x^2}=-\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}$. Графиками функций $f_1(x)=-\dfrac{1}{x-1}$ и $f_2(x)=\dfrac{1}{x+1}$ являются гиперболы (см. рис.). Для получения графика функции $f(x)$ необходимо построить «разность» $f(x)=f_1(x)-f_2(x)$ (см. рис.) Теперь к полученному

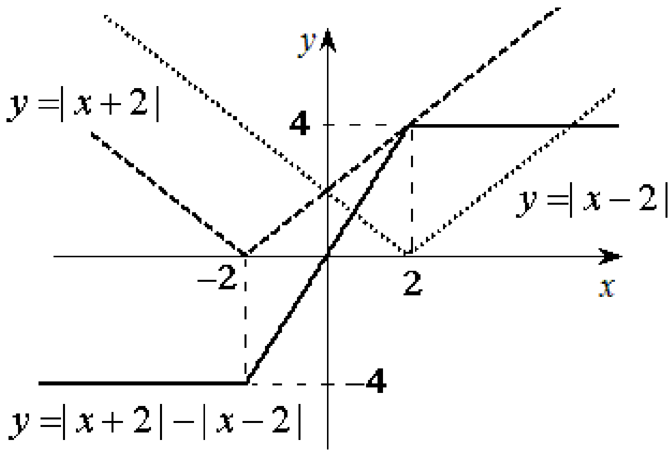


графику нужно «применить» функцию $\operatorname{arctg}(x)$ (см. график $\operatorname{arctg}(x)$). Вспомним, что функция $\operatorname{arctg}(x)$ является возрастающей. Это означает, что при возрастании аргумента $f(x)$ значения функции также будут возрастать. Также учтем, что при $x\to+\infty$ $\operatorname{arctg}(x)\to\dfrac{\pi}{2}$, а при $x\to-\infty$ $\operatorname{arctg}(x)\to-\dfrac{\pi}{2}$. Значит, вблизи точек $x=\pm1$ значение функции $y=\operatorname{arctg}\dfrac{2x}{1-x^2}$ будут приближаться к точкам $y=\pm\dfrac{\pi}{2}$ (см. рис.) ☻



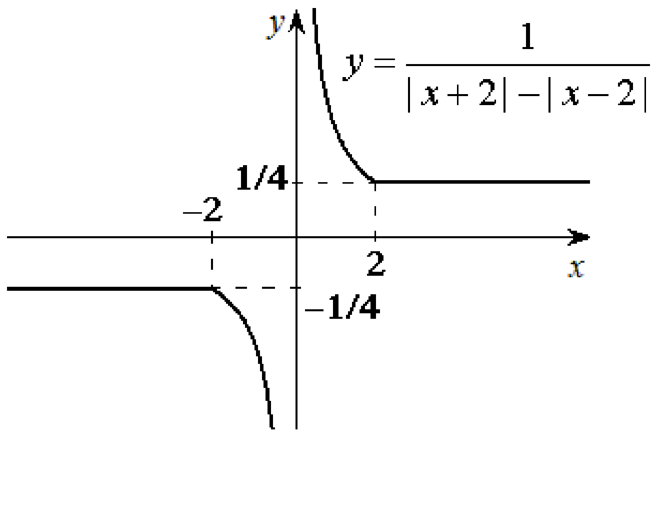
Пример 2.16. Построить график функции $y = \dfrac{1}{|x+2|-|x-2|}$.

☺ *Первый способ*. Построим график функции $f(x) = |x+2| - |x-2|$. Для этого построим графики $f_1(x) = |x+2|$, $f_2(x) = |x-2|$ и «вычтем» их (см. рис.). Далее нужно к полученному графику применить преобразование $\dfrac{1}{f(x)}$.



Так как функция $1/x$ является убывающей (при $x > 0$ и $x < 0$), то возрастающий участок графика заменится на убывающие. При этом вблизи точки $f(x) = 0$ значения функции y будут стремиться к бесконечности с таким же знаком. Участки, на которых $f(x)$ постоянна заменятся на участки постоянного значения функции y.

Второй способ. Раскроем знаки модулей, для этого разобьем числовую ось на три промежутка $(-\infty; -2)$, $(-2; 2)$ и $(2; +\infty)$. Получаем



$$\frac{1}{|x+2|-|x-2|} = \begin{cases} -\dfrac{1}{4}, & x \in (-\infty; -2), \\ \dfrac{1}{2x}, & x \in (-2; 2), \\ \dfrac{1}{4}, & x \in (2; \infty). \end{cases}$$

☻