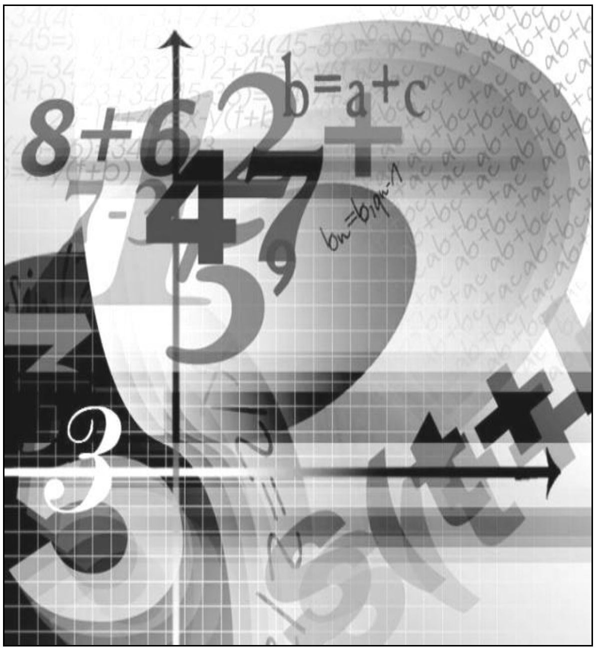
ТИПОВЫЕ РАСЧЕТЫ

ДЛЯ ЭКОНОМИЧЕСКИХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ

I КУРС (Математический анализ)

ПРЕДЕЛ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ



Санкт-Петербург

2011

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНФОРМАЦИОННЫХ И ОПТИЧЕСКИХ ТЕХНОЛОГИЙ «ИТМО»

ПРИОРИТЕТНЫЕ НАЦИОНАЛЬНЫЕ ПРОЕКТЫ «Образование»

ПОБЕДИТЕЛЬ КОНКУРСА ИННОВАЦИОННЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ПРОГРАММ ВУЗОВ

ТИПОВЫЕ РАСЧЕТЫ

для экономических специальностей

I КУРС (Математический анализ)

Предел и непрерывность функции. Дифференциальное исчисление

Методические указания и задачи для студентов

ИТМО
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Санкт-Петербург

2011

Типовые расчеты для студентов экономических специальностей. 1 курс (Математический анализ). Предел и непрерывность функции. Дифференциальное исчисление. С.Н.Кузнецова, М.В.Лукина, Е.В.Милованович, Ю.В.Танченко. Учебно-методическое пособие. – СПб: НИУ ИТМО, 2011. 51 с.

В пособии приведены типовые расчеты с методическими указаниями по темам «Предел и непрерывность функции» и «Дифференциальное исчисление». Пособие предназначено для студентов первого курса экономических специальностей, обучающихся в НИУ ИТМО.

Рекомендовано к печати Ученым советом естественнонаучного факультета, 29.09.09, протокол №2.

НИУ ИТМО стал победителем конкурса инновационных образовательных программ вузов России на 2007-2008 годы и успешно реализовал инновационную образовательную программу «Инновационная система подготовки специалистов нового поколения в области информационных и оптических технологий», что позволило выйти на качественно новый уровень подготовки выпускников и удовлетворять возрастающий спрос на специалистов в информационной, оптической и других высокотехнологичных отраслях науки. Реализация этой программы создала основу формирования программы дальнейшего развития вуза до 2015 года, включая внедрение современной модели образования.

Оглавление

ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Студенты, обучающиеся по специальностям экономического направления, изучают во втором семестре следующие темы:

1. Предел и непрерывность
2. Производная, ее геометрический смысл
3. Применение производной
4. Функция нескольких переменных

Данный типовой расчет содержит задачи по этим темам, которые предлагаются студентам по выбору преподавателя. В типовом расчете даются краткие методические указания, задания для самостоятельного выполнения и вопросы для самопроверки.

ТРЕБОВАНИЯ К ОФОРМЛЕНИЮ:

1. Типовой расчет выполняется в отдельной тетради.
2. На обложке необходимо указать фамилию, номер группы, номер варианта и дату сдачи типового расчета.
3. Каждое задание выполняется с новой страницы. Задания нумеруются. Условие задачи необходимо переписать.
4. Решение должно содержать все необходимые пояснения и рисунки.

Тема 1. ПРЕДЕЛ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ

Задание 1. *Вычислить предел последовательности:*

1.1 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3-n)^4-(2-n)^4}{(1-n)^4-(1+n)^4}$;

1.2 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3n-1)!+(3n+1)!}{(n-1)\cdot(3n)!}$;

1.3 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{8n^6-2}+5n^2}{\sqrt{4n^4+5}-\sqrt[5]{n^2+2}}$.

Решение.

1.1. Очевидно, что в данном примере следует раскрыть неопределенность вида $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$. В числителе и знаменателе дроби стоят многочлены от переменной n, выполним их преобразования, используя формулу бинома Ньютона.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(3-n)^4-(2-n)^4}{(1-n)^4-(1+n)^4}=\lim_{n\to\infty}\frac{81-108n+54n^2-12n^3+n^4-16+32n-24n^2+8n^3-n^4}{1-4n+6n^2-4n^3+n^4-1-4n-6n^2-4n^3-n^4}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{65-76n+30n^2-4n^3}{-8n-8n^3}.$$

Для раскрытия неопределенности вынесем за скобку старшие степени n.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{65-76n+30n^2-4n^3}{-8n-8n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3\left(\frac{65}{n^3}-\frac{76}{n^2}+\frac{30}{n}-4\right)}{n^3\left(-\frac{8}{n^2}-8\right)}.$$

Т.к. все слагаемые вида $\frac{a}{n^k}$ стремятся к 0 при $n\to\infty$, получаем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3\left(\frac{65}{n^3}-\frac{76}{n^2}+\frac{30}{n}-4\right)}{n^3\left(-\frac{8}{n^2}-8\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{-4\cdot\cancel{n^3}}{-8\cdot\cancel{n^3}}=\frac{1}{2}.^{(1)}$$

Ответ. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(3-n)^4-(2-n)^4}{(1-n)^4-(1+n)^4}=\frac{1}{2}$.

1.2. В этом задании также раскрывается неопределенность вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Для нахождения предела в числителе дроби вынесем за скобку $(3n-1)!$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(3n-1)!+(3n+1)!}{(n-1)\cdot(3n)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+3n(3n+1)\right)\cdot(3n-1)!}{(n-1)\cdot(3n)!}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+9n^2+3n\right)\cdot(3n-1)!}{(n-1)\cdot(3n)!}.$$

Выполнив сокращение дроби, получим в числителе и знаменателе многочлены второй степени. Как и в предыдущем примере, вынося за скобку наивысшую степень n, вычисляем предел

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+9n^2+3n\right)\cdot\cancel{(3n-1)}!}{(n-1)\cdot(3n)\cdot\cancel{(3n-1)}!}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+9n^2+3n}{3n(n-1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+9n^2+3n}{3n^2-3n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\left(\frac{1}{n^2}+9+\frac{3}{n}\right)}{n^2\left(3-\frac{3}{n}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{9\cancel{n^2}}{3\cancel{n^2}}=3.$$

Ответ. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(3n-1)!+(3n+1)!}{(n-1)\cdot(3n)!}=3$.

1.3. Обратим внимание на то, что и числитель, и знаменатель этой дроби имеет вторую степень. Поэтому выносим за скобку n^2, при этом выражения, стоящие под радикалами, будем делить на n^2 возведенный в со-

(1) **Замечание**. Предел отношения двух многочленов одинаковой степени равен отношению коэффициентов при наивысшей степени.

ответствующую степень.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{8n^6-2}+5n^2}{\sqrt{4n^4+5}-\sqrt[5]{n^2+2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{n^2}\left(\sqrt[3]{8-\frac{2}{n^6}}+5\right)}{\cancel{n^2}\left(\sqrt{4+\frac{5}{n^4}}-\sqrt[5]{\frac{1}{n^8}+\frac{2}{n^{10}}}\right)}.$$

Далее действуем как в предыдущих примерах. В результате получим

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{8-\frac{2}{n^6}}+5}{\sqrt{4+\frac{5}{n^4}}-\sqrt[5]{\frac{1}{n^8}+\frac{2}{n^{10}}}}=\frac{\sqrt[3]{8}+5}{\sqrt{4}}=\frac{7}{2}.$$

Ответ. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{8n^6-2}+5n^2}{\sqrt{4n^4+5}-\sqrt[5]{n^2+2}}=\dfrac{7}{2}$.

Задание 2. *Вычислить предел функции:*

2.1 $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^3+2x^2-4x-8}{x^3+8}$ *;*

2.2 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[7]{x}}$ *или* $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+5x+4}-\sqrt{x^2+x}\right)$ *;*

2.3 $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\ln(x+2)-\ln(2x-1)}{\sin\pi x}$*;*

2.4 $\lim\limits_{x\to2\pi}(\cos x)^{\frac{\operatorname{ctg}2x}{\sin3x}}$.

Решение.

2.1. Подстановка в данное выражение предельного значения аргумента $x=-2$ приводит к неопределенности вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. Разложим числитель и знаменатель дроби на множители. В числителе будем использовать метод группировки
$x^3+2x^2-4x-8=x^2(x+2)-4(x+2)=(x+2)(x^2-4)=(x+2)^2(x-2)$, а в знаменателе формулу суммы кубов $x^3+8=(x+2)(x^2-2x+4)$. Теперь преобразуем выражение, стоящее под знаком предела

$$\lim_{x\to-2}\frac{x^3+2x^2-4x-8}{x^3+8}=\lim_{x\to-2}\frac{(x+2)^{\cancel{2}}(x-2)}{\cancel{(x+2)}(x^2-2x+4)}=\lim_{x\to-2}\frac{(x+2)(x-2)}{x^2-2x+4}.$$

Здесь мы сокращаем дробь на множитель, который обращает и числитель, и знаменатель в ноль. Т.е. мы избавляемся от неопределенности $\left[\dfrac{0}{0}\right]$.
Теперь еще раз подставляем предельное значение аргумента и получаем

$$\lim_{x\to-2}\frac{(x+2)(x-2)}{x^2-2x+4}=\lim_{x\to-2}\frac{(-2+2)(-2-2)}{4-2\cdot(-2)+4}=\frac{0}{12}=0.^{(2)}$$

Ответ. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^3+2x^2-4x-8}{x^3+8}=0$.

2.2. В первом примере раскрывается неопределенность вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. Для этого умножаем числитель и знаменатель дроби на выражение сопряженное числителю $\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x}$, и воспользовавшись формулой разности квадратов, получаем

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[7]{x}}=\lim_{x\to0}\frac{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x}\right)}{\sqrt[7]{x}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x+1-1+x}{\sqrt[7]{x}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x}\right)}=\lim_{x\to0}\frac{2x}{\sqrt[7]{x}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x}\right)}=\lim_{x\to0}\frac{2\sqrt[7]{x^6}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x}}.$$

Сократив дробь на $\sqrt[7]{x}$, избавились от неопределенности $\left[\dfrac{0}{0}\right]$.

Подставляем предельное значение аргумента $x=0$ и окончательно имеем:

$$\lim_{x\to0}\frac{2\sqrt[7]{x^6}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x}}=\frac{0}{1+1}=0.$$

Ответ. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[7]{x}}=0$.

Во втором примере имеем неопределенность вида $[\infty-\infty]$. Для ее раскрытия воспользуемся тем же приемом (домножение на сопряженное выражение).

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+5x+4}-\sqrt{x^2+x}\right)=$$

---

(2) **Замечание 1**. Если при второй подстановке снова получается неопределенность вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$, процедуру следует повторить.

Замечание 2. Если возникают трудности в разложении многочленов на множители, можно поделить числитель и знаменатель дроби «уголком» на двучлен вида $x-a$, где a – предельное значение аргумента.

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+5x+4}-\sqrt{x^2+x}\right)\left(\sqrt{x^2+5x+4}+\sqrt{x^2+x}\right)}{\sqrt{x^2+5x+4}+\sqrt{x^2+x}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x^2}+5x+4-\cancel{x^2}-x}{\sqrt{x^2+5x+4}+\sqrt{x^2+x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{4x+4}{\sqrt{x^2+5x+4}+\sqrt{x^2+x}}.$$

После выполненных преобразований получили неопределенность вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Для ее раскрытия можно воспользоваться замечанием к заданию (1.1): разделить числитель и знаменатель дроби на x.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{4x+4}{\sqrt{x^2+5x+4}+\sqrt{x^2+x}} = \frac{4}{1+1} = 2.$$

Ответ. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+5x+4}-\sqrt{x^2+x}\right) = 2$.

2.3. В этом задании имеем неопределенность вида $\left[\frac{0}{0}\right]$. Для ее раскрытия будем использовать эквивалентные бесконечно малые (Приложение 1). Сначала выполним замену переменной $y = x-3$, тогда $x = y+3$. Очевидно, что если $x \to 3$, то $y \to 0$, поэтому

$$\lim_{x\to3}\frac{\ln(x+2)-\ln(2x-1)}{\sin\pi x} = \lim_{y\to0}\frac{\ln(y+3+2)-\ln(2(y+3)-1)}{\sin\pi(y+3)} =$$

$$= \lim_{y\to0}\frac{\ln(y+5)-\ln(2y+5)}{\sin(\pi y+3\pi)} = \lim_{y\to0}\frac{\ln\frac{y+5}{2y+5}}{\sin(\pi y+\pi)} = \lim_{y\to0}\frac{\ln\left(1+\frac{-y}{2y+5}\right)}{-\sin\pi y}.$$

При этих преобразованиях были использованы свойства логарифмической и тригонометрической функций.

Заменяем бесконечно малые на эквивалентные. При $y \to 0$ $\ln\left(1+\frac{-y}{2y+5}\right) \sim \frac{-y}{2y+5}$, а $\sin\pi y \sim \pi y$, поэтому окончательно получим

$$\lim_{y\to0}\frac{\ln\left(1+\frac{-y}{2y+5}\right)}{-\sin\pi y} = \lim_{y\to0}\frac{\frac{-y}{2y+5}}{-\pi y} = \lim_{y\to0}\frac{-\cancel{y}}{-\pi\cancel{y}(2y+5)} = \lim_{y\to0}\frac{1}{\pi(2y+5)} = \frac{1}{5\pi}.$$

Ответ. $\lim\limits_{x\to3}\frac{\ln(x+2)-\ln(2x-1)}{\sin\pi x} = \frac{1}{5\pi}$.

2.4. Подставляя в данное выражение предельное значение аргумента

$x=2\pi$ получим неопределенность вида $\left[1^{\infty}\right]$, для ее раскрытия воспользуемся вторым замечательным пределом $\lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e$.

Предварительно, как и в предыдущем примере, выполним замену переменной

$$\lim_{x\to 2\pi}(\cos x)^{\frac{\operatorname{ctg}2x}{\sin 3x}}=\left[y=x-2\pi,\ x=y+2\pi\right]=\lim_{y\to 0}\left(\cos(y+2\pi)\right)^{\frac{\operatorname{ctg}2(y+2\pi)}{\sin 3(y+2\pi)}}=$$

$$=\lim_{y\to 0}(\cos y)^{\frac{\operatorname{ctg}2y}{\sin 3y}}=\lim_{y\to 0}(\cos y)^{\frac{1}{\sin 3y\cdot\operatorname{tg}2y}}.$$

Теперь в пределе приведем основание степени к виду $1+\alpha$, а в показателе выделим множитель $\frac{1}{\alpha}$.

$$\lim_{y\to 0}(\cos y)^{\frac{1}{\sin 3y\cdot\operatorname{tg}2y}}=\lim_{y\to 0}\left(\left(1+(\cos y-1)\right)^{\frac{1}{\cos y-1}}\right)^{(\cos y-1)\cdot\frac{1}{\sin 3y\cdot\operatorname{tg}2y}}.$$

По второму замечательному пределу выражение, стоящее в основании степени равно e, поэтому

$$\lim_{y\to 0}\left(\left(1+(\cos y-1)\right)^{\frac{1}{\cos y-1}}\right)^{(\cos y-1)\cdot\frac{1}{\sin 3y\cdot\operatorname{tg}2y}}=e^{\lim\limits_{y\to 0}(\cos y-1)\cdot\frac{1}{\sin 3y\cdot\operatorname{tg}2y}}$$

При вычислении предела в показателе степени будем использовать эквивалентные бесконечно малые.

$$\lim_{y\to 0}(\cos y-1)\cdot\frac{1}{\sin 3y\cdot\operatorname{tg}2y}=\lim_{y\to 0}\frac{-\frac{y^2}{2}}{3y\cdot 2y}=\lim_{y\to 0}\frac{-\cancel{y^2}}{12\cancel{y^2}}=-\frac{1}{12}.$$

Тогда окончательно имеем $\lim\limits_{x\to 2\pi}(\cos x)^{\frac{\operatorname{ctg}2x}{\sin 3x}}=e^{-\frac{1}{12}}$

Ответ. $\lim\limits_{x\to 2\pi}(\cos x)^{\frac{\operatorname{ctg}2x}{\sin 3x}}=e^{-\frac{1}{12}}$.

Задание 3. *Исследовать функцию на непрерывность. Установить тип точек разрыва и изобразить эскиз графика функции в окрестности точек разрыва:*

3.1 $f(x)=\begin{cases}\sin x, x<0\\ x^3, 0<x\le 2\\ \frac{1}{2-x}, x>2\end{cases};$

3.2 $f(x)=\dfrac{|x+2|}{x+2}+x.$

Решение.

Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0 если,

- $f(x)$ определена в некоторой окрестности этой точки;
- существуют конечные односторонние пределы $a=\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ и $b=\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$;
- эти пределы равны значению функции в точке x_0: $a=b=f(x_0)$.

Воспользуемся этим определением для исследования функций на непрерывность.

3.1. У данной функции две точки подозрительные на разрыв:

а) $x=0$. Вычислим пределы $\lim\limits_{x\to -0} f(x)=\lim\limits_{x\to -0}\sin x=0$ и $\lim\limits_{x\to +0} f(x)=\lim\limits_{x\to +0} x^3=0$. Поскольку в самой точке $x=0$ функция неопределена, это точка разрыва первого рода (устранимого).

б) $x=2$. Односторонние пределы $\lim\limits_{x\to 2-0} f(x)=\lim\limits_{x\to 2-0} x^3=8$ и $\lim\limits_{x\to 2+0} f(x)=\lim\limits_{x\to 2+0}\dfrac{1}{2-x}=-\infty$. Один из пределов равен бесконечности, значит это точка разрыва второго рода. (Рисунок 1)

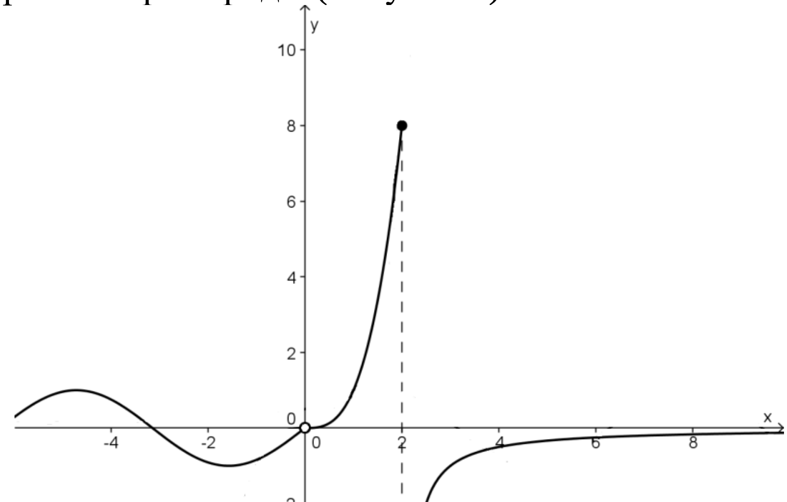


Рисунок 1

Ответ. В точке $x=0$ разрыв первого рода. В точке $x=2$ разрыв второго рода.

3.2. Будем исследовать функцию в точке $x=-2$, где функция не существует. Вычислим односторонние пределы

$$\lim_{x\to -2-0} f(x)=\lim_{x\to -2-0}\frac{|x+2|}{x+2}+x=\lim_{x\to -2-0}\frac{-\cancel{(x+2)}}{\cancel{x+2}}+x=-1-2=-3 \text{ и}$$

$$\lim_{x\to -2+0} f\left(x\right)=\lim_{x\to -2+0}\frac{\left|x+2\right|}{x+2}+x=\lim_{x\to -2+0}\frac{\cancel{x+2}}{\cancel{x+2}}+x=1-2=-1.$$

Здесь мы использовали определение модуля.

Поскольку $\lim\limits_{x\to -2-0} f\left(x\right)\neq \lim\limits_{x\to -2+0} f\left(x\right)$, то в точке $x=-2$ разрыв первого рода (неустранимый). (Рисунок 2)

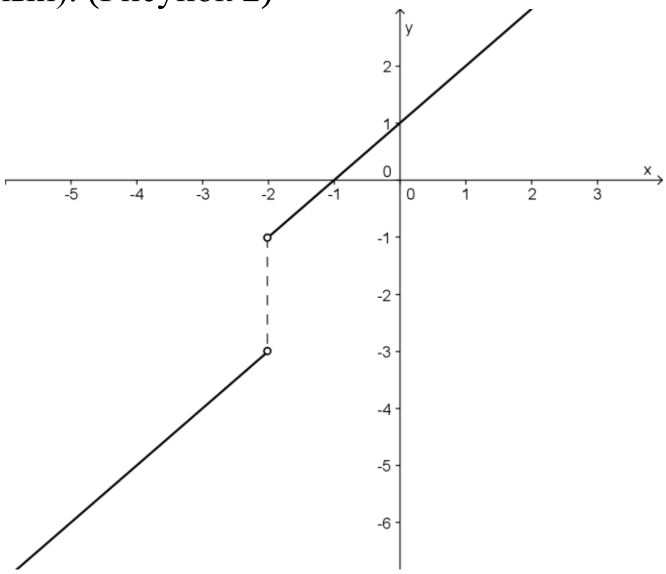


Рисунок 2

Ответ. В точке $x=-2$ разрыв первого рода.

Задачи для типовых расчетов

Задание 1.

Вычислить предел последовательности:

1.1 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(5-n)^2+(5+n)^2}{(5-n)^2-(5+n)^2}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(9n+1)!+(9n+2)!\left(11n-9\right)}{2(9n+3)!-(9n+2)!}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n\sqrt[3]{3n^2}+\sqrt[4]{4n^8+1}}{(n+\sqrt{n})(7-n+n^2)}$

1.2 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(4-n)^3-(2-n)^3}{(1-n)^2-(2+n)^2}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(7n-1)!\left(14n-1\right)+(7n+1)!}{(7n)!(11n+1)}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n-1}-\sqrt{2n^2+3}}{\sqrt[3]{n^3+3}+\sqrt[4]{n^4+2}}$

1.3 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(3-n)^3-(2-n)^3}{(1-n)^3-(1+n)^3}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(5n+1)!+2(5n+2)!}{(5n+3)!-(5n+2)!}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{2n^3+3}-\sqrt{n+5}}{\sqrt[3]{n^3+2}-\sqrt{n-1}}$

1.4 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2-n)^2+(1+n)^2}{(1+n)^2-(2-n)^2}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(7n+1)!+\left(11n+3\right)(7n+2)!}{(7n+3)!-(7n+2)!}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2+3}+3n^3}{\sqrt[4]{n^{12}+2n+1}-n^2}$

1.5

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(3+n)^2-(2+n)^2}{(2+n)^2-(1-n)^2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(9n-1)!+(9n+1)!}{(9n)!(7n+11)}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{3n+2}-\sqrt[3]{125n^3+n}}{\sqrt[5]{n}+n^2}$$

1.6

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)^3-(n+2)^2}{(n-2)^3-(n+2)^3}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(9n-1)!+(9n+1)!}{(9n)!(8n+14)}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n\sqrt{n}-\sqrt[3]{27n^6+n^4}}{(n+\sqrt[4]{n})\sqrt{4+n^2}}$$

1.7

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(1+3n)^3+(10-n)^3}{(6+2n)^3-(1+n)^3}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(8n+1)!\left(16n+3\right)+(8n+2)!}{(8n+3)!-(8n+2)!}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[6]{n^8+4}+\sqrt[10]{n^7+2n}}{\sqrt[3]{8n^4+5n}+\sqrt{n+3}}$$

1.8

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)^3+(3n-2)^3}{(2n-4)^3-(n+5)^3}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(19n+1)!+\left(4n-5\right)(19n+2)!}{(19n+3)!-(19n+2)!\left(12n-8\right)}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[4]{16n^4+2n}+\sqrt{\sqrt{n}+3n}}{\sqrt[3]{125n^3-5}+\sqrt{2n+1}}$$

1.9

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+3)^3-(n+5)^3}{(n+1)^3+(2n+2)^3}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(8n-1)!\left(22n-1\right)+(8n+1)!}{(8n)!(3-4n)}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5n\sqrt[3]{n}-\sqrt[4]{8\left(n^8+n^6\right)}}{\left(n+\sqrt[3]{n}\right)\left(\sqrt{2n^2+7}-3\right)}$$

1.10

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n-4)^3+(3n-3)^3}{(2n-7)^2+(2n+7)^3}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(19n+1)!+\left(3n-5\right)(19n+2)!}{(19n+3)!-(19n+2)!\left(2n-8\right)}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{8\sqrt{25n^4+3n^3+n}+\left(n-1\right)^2}{\sqrt[3]{16n^6+4n}+\sqrt[5]{n^6-7n^3}}$$

1.11

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3-(n-1)^3}{(n+1)^4-n^4}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!+(n+2)!}{(n-1)!+(n+2)!}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n\sqrt[4]{11n}+\sqrt{25n^4-81}}{(n-7\sqrt{n})(\sqrt{n^2-n+1})}$$

1.12

$$\lim_{n\to\infty}\frac{8n^3-2n}{(n+1)^4-(n-1)^4}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)!+(2n+2)!}{3n(2n+2)!+(2n)!}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{5n+2}-\sqrt[3]{8n^3+5}}{\sqrt[4]{n+7}-n}$$

1.13

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+6)^3-(n+1)^3}{(2n+3)^2+(n+4)^2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(3n-1)!+(3n)!}{(3n-1)!(n-1)}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[8]{n^8+6}-\sqrt{n-6}}{\sqrt[8]{n^8+6}+\sqrt{n-6}}$$

1.14

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)^3+(n-2)^3}{2n^3-1}$$

$$\lim_{\boldsymbol{n}\to\infty}\frac{(5\boldsymbol{n}-1)!+(5\boldsymbol{n})!}{(5\boldsymbol{n}+2)!}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{4n+1}-\sqrt[3]{27n^3+4}}{\sqrt[4]{n}-\sqrt[3]{n^5+n}}$$

1.15

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(3-4n)^2}{(n-3)^3-(n+3)^3}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+4)!-(n+2)!}{(n+3)!}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n\sqrt[6]{n}+\sqrt[5]{32n^{10}+1}}{(n+\sqrt[4]{n})(\sqrt[3]{n^3}-1)}$$

1.16

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)^3+(3n+2)^3}{(2n+3)^3-(n-7)^3}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)!+(2n+3)!}{(2n+2)!}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2+2}-5n^2}{n-\sqrt{n^4-n+1}}$$

1.17

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(1+2n)^3-8n^3}{(1+2n)^2+4n^2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(4n-1)!+(4n)!3^n}{(4n+2)!}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{6n^3-\sqrt{n^5+1}}{\sqrt{4n^6+3}-n}$$

1.18

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(1+3n)^{100}}{(3n-2)^{97}(n+2)^3}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(4n-5)!(4n+1)^2+(4n-4)!}{(4n-4)}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[7]{n^{10}+2n^5}-\sqrt[3]{8n^6-5n^9+2}}{\sqrt{n^3+4n^4+9n^6}}$$

1.19

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)^{50}}{(2n-1)^{48}(n+2)^2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(3n+1)!-5n^3(3n-2)!}{(3n+1)!}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[4]{n^6+16n^8-10n^5}+\sqrt[3]{8n^6-5n^4}}{2\sqrt{n^4+2n^3}}$$

1.20

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(1+2n)^4-(2n-3)^4}{(1+n)^3+(n-2)^3}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(14n-1)!+(14n+1)!}{(14n)!(3-2n)}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[5]{n^7+2n^{10}+3n}+\sqrt[3]{8n^6+5n}}{\sqrt{4n+25n^2}}$$

1.21

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2+3n)^4-(3n-3)^4}{(1+2n)^3+(n-2)^3}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(12n-1)!+(12n+1)!}{(12n)!(7+2n)}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[5]{n^4-32n^{15}+8n}+\sqrt[3]{8n^6+5n}}{\sqrt{4n+25n^6}}$$

1.22

$$\lim_{n\to\infty}\frac{8n^3-(n-1)^3}{(n+1)^4-n^4}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!+(2n+3)!}{(2n-1)!+(2n+3)!}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n\sqrt[4]{16n}+\sqrt{36n^6-81}}{(n-7\sqrt{n})(\sqrt{9n^2-n+6})}$$

1.23

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(3n+2)^3+(2n-2)^3}{9n^4+2n^3+5}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(4n+2)!+(4n)!}{(4n+1)!}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{4n+1}-\sqrt[3]{64n^5+4}}{\sqrt[4]{n^6}-\sqrt[3]{27n^5+3n^2}}$$

1.24

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(4-n)^3-(2-n)^3}{(1-n)^2-(2+n)^2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(5n+1)!+(5n+2)!}{(5n)!(11n+1)}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{7n\sqrt[3]{n}-\sqrt[4]{16(n^8+2n^5)}}{(2n+\sqrt[3]{n})(\sqrt{9n^2+7}-3}$$

1.25

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(3n+2)^3-(3n+2)^2}{(n-1)^3+(2n+3)^3}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(9n-1)!+(9n+3)!}{(9n)!(3n+14)}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2\sqrt{n}-\sqrt[3]{27n^6+n^4}}{(n+7\sqrt[4]{n})\sqrt{8n^4+9n^2}}$$

1.26

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n-2)^4-(2n+5)^4}{(2n-7)^2+(2n+7)^3}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(18n+1)!+(18n+2)!(6n-5)}{(18n+2)!+(18n+2)!(n-8)}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{8\sqrt{49n^4+36n^2+n}+(1-3n)^2}{\sqrt[3]{125n^6+4n}+\sqrt[5]{32n^6-7n^3}}$$

1.27

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(3n+2)^3+(n-1)^3}{5n^3+2n^2-1}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(3n-1)!3n+(3n)!}{(3n+2)!}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{4n^3+1}-\sqrt[3]{8n^3+3n+5}}{\sqrt[4]{n}-\sqrt[3]{n^5+n}}$$

1.28

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+3)^3+(5n-2)^3}{n^4+2n^3-1}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(7n+1)!+(7n)!}{(7n+2)!}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{9n+7}-\sqrt[3]{27n^3+8}}{\sqrt[4]{16n}-\sqrt[3]{n^5+3n}^{\,3}}$$

1.29

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3-(2n-1)^3}{(n-2)^4-n^4}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!-(n+2)!}{(n-1)!+3(n+2)!}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n\sqrt[4]{64n^3}+\sqrt{25n^4-81}}{(n-7\sqrt{n})(\sqrt{9n^2-9n+1})}$$

1.30

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^5-(n+2)^5}{(n+1)^4-3n^4}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n)!+(2n+2)!}{(2n-1)!-(2n+2)!}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n\sqrt[3]{27n^3+64n}+\sqrt{49n^4-49}}{(3n+2\sqrt{n})(\sqrt{3n^2-n+1})}$$

Задание 2.

Вычислить предел функции:

2.1

$$\lim_{x\to-1}\frac{x^3+3x^2+7x+5}{x^2-x-2}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x-2}-\sqrt{x}\right)$$

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\,3\boldsymbol{x}}-1}{1-\cos 8\boldsymbol{x}}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(\mathrm{tg}\,x\right)^{\frac{1}{\cos\left(\frac{3\pi}{4}-x\right)}}$$

2.2

$$\lim_{x\to6}\frac{x^2-8x+12}{x^3-7x^2+6x}$$

$$\lim_{x\to5}\frac{x^2-25}{2-\sqrt{x-1}}$$

$$\lim_{x\to2\pi}\frac{\ln\left(1+\mathrm{tg}^2\,2\boldsymbol{x}\right)}{1-\cos 5\boldsymbol{x}}$$

$$\lim_{x\to0}\left(\cos x\right)^{\frac{1}{\mathrm{arctg}^2\,2x}}$$

2.3

$$\lim_{x\to-1}\frac{2x^2+x-1}{x^3-3x-2}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2-x}\right)$$

$$\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x^2-x-1}-1}{\ln\left(x-1\right)}$$

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{2x-1}{x}\right)^{\frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}}$$

2.4

$$\lim_{x\to0}\frac{\left(1+x\right)^3-\left(1+3x\right)}{x+x^5}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x^2+4}-2}{\sqrt{x^2+9}-3}$$

$$\lim_{x\to2}\frac{\ln\left(5-2x\right)}{\sqrt{10-3x}-2}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\sin x\right)^{6\,\mathrm{tg}\,x\cdot\mathrm{tg}\,3x}$$

2.5

$$\lim_{x\to-1}\frac{x^3+2x^2-x-2}{x^2+x}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+3x-2}-\sqrt{x^2-3}\right)$$

$$\lim_{x\to1}\frac{3^{5x-3}-3^{2x^2}}{\ln\left(5x^2-4x\right)}$$

$$\lim_{x\to1}\left(2e^{x-1}-1\right)^{\frac{x}{x-1}}$$

2.6

$$\lim_{x\to-3}\frac{\left(x^2+2x-3\right)^2}{x^3+4x^2-9}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\ln\mathrm{tg}\,x}{\cos 2x}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\mathrm{tg}\,\tfrac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x-\frac{\pi}{2}}}$$

2.7

$$\lim_{x\to1}\frac{\left(2x^2-x-1\right)^2}{x^3+2x^2-x-2}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2+9}\right)$$

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\cos 3x-\cos x}{\mathrm{tg}^2\,2x}$$

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{2-x}{x}\right)^{\frac{1}{\ln\left(2-x\right)}}$$

2.8	$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^4-x^3+x-1}{2x^2-x-1}$	$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{2^{\cos^2 x}-1}{\ln\sin x}$
	$\lim\limits_{x\to8}\dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x^2}-4}$	$\lim\limits_{x\to1}(2-x)^{\frac{\sin\frac{\pi x}{2}}{\ln(2-x)}}$
2.9	$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}$	$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{e^{\sin^2 6x}-e^{\sin^2 3x}}{\log_3\cos 6x}$
	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x(x+5)}-x\right)$	$\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{x+1}{2x}\right)^{\frac{\ln(x+2)}{\ln(2-x)}}$
2.10	$\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^2+2x-3}{x^3+4x^2+3x}$	$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{e^x-e}{\sin\left(x^2-1\right)}$
	$\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}$	$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\frac{18\sin x}{\operatorname{ctg} x}}$
2.11	$\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{\left(x^2+2x-3\right)^2}{x^3+4x^2+3x}$	$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\operatorname{tg} x-\operatorname{tg} 2}{\sin\ln(x-1)}$
	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-3x+2}-x\right)$	$\lim\limits_{x\to\pi}\left(\operatorname{ctg}\frac{x}{4}\right)^{\frac{1}{\cos\frac{x}{2}}}$
2.12	$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^4-1}{2x^4-x^2-1}$	$\lim\limits_{x\to0,5}\dfrac{(2x-1)^2}{e^{\sin\pi x}-e^{2x}}$
	$\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt[3]{16x}-4}{\sqrt{4+x}-\sqrt{2x}}$	$\lim\limits_{x\to2\pi}(\cos x)^{\frac{\operatorname{ctg} 2x}{\sin 3x}}$
2.13	$\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3-3x-2}{x^3+2x^2-x-2}$	$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{4\operatorname{tg} x}-e^{-2\sin x}}{2\operatorname{arctg} x-\sin x}$
	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+2x-1}-\sqrt{x^2-5x+3}\right)$	$\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{2x-1}{x}\right)^{\frac{1}{\sqrt[5]{x}-1}}$
2.14	$\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^3+4x^2+3x}{x^2+x-6}$	$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\operatorname{arctg}\left(x^2-2x\right)}{\sin 3\pi x}$
	$\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt[3]{9x}-3}{\sqrt{3+x}-\sqrt{2x}}$	$\lim\limits_{x\to2}\left(2e^{x-2}-1\right)^{x-2}$
2.15	$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^4-1}{x^3-x^2-x+1}$	$\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{\operatorname{tg}\left(e^{x+2}-e^{x^2-4}\right)}{\ln(3x+7)}$
	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+4x-2}-\sqrt{x^2-3x}\right)$	$\lim\limits_{x\to1}(2-x)^{\frac{\sin\frac{\pi x}{2}}{\ln(2-x)}}$
2.16	$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-8}{x^3+2x^2-4x-8}$	$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{2^{\sin\pi x}-1}{\ln\left(x^2-2x+1\right)}$
	$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1-2x-x^2}-(1+x)}{x}$	$\lim\limits_{x\to4\pi}(\cos x)^{\frac{5}{\operatorname{tg} 5x\cdot\sin 2x}}$

2.17	$\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{\left(x^3-2x-1\right)^2}{x^4+2x+1}$	$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x^2-x+1}-1}{\operatorname{tg}\pi x}$
	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+4}-\sqrt{x+3}\right)$	$\lim\limits_{x\to\pi}\left(\operatorname{ctg}\frac{x}{4}\right)^{\sin(x-\pi)}$
2.18	$\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^4+2x+1}{x^2-x-2}$	$\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{\operatorname{tg}(x+1)}{e^{\sqrt[3]{x^3-4x^2+6}}-e^2}$
	$\lim\limits_{x\to-8}\dfrac{10-x-6\sqrt{1-x}}{2+\sqrt[3]{x}}$	$\lim\limits_{x\to1}\left(2e^{x-1}-1\right)^{\frac{x}{x-1}}$
2.19	$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-3x^2+4}{x^4-4x^2}$	$\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\operatorname{tg}\left(3^{\frac{\pi}{x}}-3\right)}{3^{\cos\frac{3x}{2}}-1}$
	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{(x+1)^2}-\sqrt[3]{(x-1)^2}\right)$	$\lim\limits_{x\to2\pi}\left(4-\dfrac{3}{\cos x}\right)^{\frac{1}{\operatorname{tg}^2 x}}$
2.20	$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3x^3-4x^2}{5x^3+8x^2}$	$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\ln\left(x^2-1\right)-\ln(x+1)}{\sqrt[3]{x-1}-1}$
	$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{1+x}-\sqrt{2x}}$	$\lim\limits_{x\to0}\left(1-x\sin^2 x\right)^{\frac{1}{\ln\left(1+\pi x^3\right)}}$
2.21	$\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3-3x-2}{x^3+2x^2-x-2}$	$\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin\frac{x^2}{\pi}}{2^{\sqrt{\sin x+1}}-2}$
	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{(x+2)^2}-\sqrt[3]{(x-2)^2}\right)$	$\lim\limits_{x\to0}\left(2-e^{x^2}\right)^{\frac{1}{1-\cos\pi x}}$
2.22	$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{4x^2-5x-6}{3x^3-7x^2+2x}$	$\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{\ln(4x-1)}{\sqrt{1-\cos\pi x}-1}$
	$\lim\limits_{x\to-8}\dfrac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$	$\lim\limits_{x\to2\pi}\left(5-\dfrac{4}{\cos x}\right)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$
2.23	$\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^4+2x^3+x^2}{x^4++2x+1}$	$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x^2-3x+3}-1}{\sin\pi x}$
	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{(x+3)(x-2)}-x\right)$	$\lim\limits_{x\to0}\left(2-3^{\operatorname{arctg}^2\sqrt{x}}\right)^{\frac{2}{\sin x}}$
2.24	$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-8}{x^3-3x-2}$	$\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{\arcsin\frac{x+2}{2}}{3^{\sqrt{2+x+x^2}}-9}$
	$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+3x^2}-(1+x)}{\sqrt[3]{x}}$	$\lim\limits_{x\to0}\left(1-\ln\left(1+x^3\right)\right)^{\frac{3}{x^2\arcsin x}}$
2.25	$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+x)^3-(1+3x)}{x^2+x^5}$	$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\ln 2x-\ln\pi}{\sin\frac{5x}{2}\cdot\cos x}$
	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-5x+6}-x\right)$	$\lim\limits_{x\to0}\left(2-\cos 3x\right)^{\frac{1}{\ln\left(1+x^2\right)}}$

2.26 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^3-7x^2+2x}{4x^2-5x-6}$ $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{2^{\cos^2 x}-1}{\ln\sin x}$

$\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8}$ $\lim\limits_{x\to 2\pi}\left(6-\dfrac{5}{\cos x}\right)^{\operatorname{ctg}^2 x}$

2.27 $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-3x-2}{x+x^2}$ $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\ln 2x-\ln\pi}{e^{\operatorname{tg}2x}-e^{\sin 2x}}$

$\lim\limits_{x\to \infty}\left(x+\sqrt[3]{1-x^3}\right)$ $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-\ln\left(1+\sqrt[3]{x}\right)\right)^{\frac{x}{\sin^4\sqrt[3]{x}}}$

2.28 $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-2x-1}{\left(x^2-x-2\right)^2}$ $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\operatorname{tg}\ln(3x-5)}{e^{x+3}-e^{x^2+1}}$

$\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{25-2x}-3}{\sqrt[3]{x}-2}$ $\lim\limits_{x\to 0}\left(2-e^{\arcsin^2\sqrt{x}}\right)^{\frac{3}{x}}$

2.29 $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-3x-2}{x^2-x-2}$ $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\ln\cos x}{\operatorname{tg}(\cos x-1)}$

$\lim\limits_{x\to \infty}x\left(\sqrt{x^2+2}-x\right)$ $\lim\limits_{x\to 2\pi}(\cos x)^{\frac{\operatorname{ctg}3x}{\sin 5x}}$

2.30 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-3x-2}{x^2-5x+6}$ $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3^{x^2-9}-1}{\operatorname{tg}\ln\frac{x}{3}}$

$\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}$ $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{\sin(x-1)}{x-1}\right)^{\frac{\sin(x-1)}{x-1-\sin(x-1)}}$

Задание 3.

Исследовать функцию на непрерывность. Установить тип точек разрыва и изобразить эскиз графика функции в окрестности точек разрыва:

3.1 $f(x)=\begin{cases} e^x, & x\le 0;\\ 1-x, & 0<x\le 1;\\ \frac{1}{1-x}, & x>1.\end{cases}$ $f(x)=\dfrac{x-|x|}{2x}$

3.2 $f(x)=\begin{cases} 4-x^2, & x<0;\\ 4e^x, & 0<x\le 4;\\ \frac{1}{x-4}, & x>4.\end{cases}$ $f(x)=x+2\dfrac{|x-2|}{x-2}$

3.3 $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x+3}, & x<-3;\\ x+3, & -3\le x\le 0;\\ x^2, & x>0.\end{cases}$ $f(x)=\dfrac{x}{x^2-9}$

3.4 $f(x)=\begin{cases} x^2+2x, & x<0;\\ -x^3, & 0<x<2;\\ x+3, & x\ge 2.\end{cases}$ $f(x)=\dfrac{1}{(x-2)(x+1)}$

3.5 $$f(x)=\begin{cases} e^x, & x<0; \\ x+1, & 0<x\le 2; \\ \frac{1}{x-2}, & x>2. \end{cases} \qquad f(x)=\frac{\cos x-1}{x^2}$$

3.6 $$f(x)=\begin{cases} 0, & x<-1; \\ |x|, & |x|\le 1; \\ \ln(x-1), & x>1. \end{cases} \qquad f(x)=\frac{1}{5+2^{\frac{1}{x}}}$$

3.7 $$f(x)=\begin{cases} 3, & x<-3; \\ |x|, & -3\le x\le 3; \\ 6-x, & x>3. \end{cases} \qquad f(x)=\frac{1}{5+3^{\frac{1}{x}}}$$

3.8 $$f(x)=\begin{cases} x^2, & x\le 0; \\ \frac{1}{x^2}, & 0<x<\frac{1}{2}; \\ 4, & x>\frac{1}{2}. \end{cases} \qquad f(x)=\operatorname{arctg}\frac{1}{x^2-1}$$

3.9 $$f(x)=\begin{cases} \sin x, & x\le 0; \\ \cos x, & 0<x\le \pi; \\ \frac{1}{x-\pi}, & x>\pi. \end{cases} \qquad f(x)=\frac{x^2-x^3}{|x-1|}$$

3.10 $$f(x)=\begin{cases} x+1, & x\le 2; \\ x^2-6x+11, & 2<x<4; \\ 2x-5, & x>4. \end{cases} \qquad f(x)=2^{\frac{x}{x^2-1}}$$

3.11 $$f(x)=\begin{cases} -x, & x\le -1; \\ \frac{1}{x}, & -1<x<0; \\ -2x^2+x, & x\ge 0. \end{cases} \qquad f(x)=e^{x+\frac{1}{x}}$$

3.12 $$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x-2}, & x<-2; \\ 0, & -2\le x<0; \\ \sin x, & 0<x<\infty. \end{cases} \qquad f(x)=e^{\frac{1}{x+1}}$$

3.13 $$f(x)=\begin{cases} -x^2, & x\le 0; \\ \operatorname{tg} x, & 0<x<\frac{\pi}{2}; \\ x, & x\ge \frac{\pi}{2}. \end{cases} \qquad f(x)=\frac{e^{4x}-1}{x}$$

3.14 $$f(x)=\begin{cases} 3x+1, & x<1; \\ 2x+2, & 1<x\le 3; \\ \lg(x-3), & x>3. \end{cases} \qquad f(x)=2^{x-\frac{1}{x}}$$

3.15 $$f(x)=\begin{cases} 3, & x\le -3; \\ |x|, & -3<x\le 3; \\ \ln(x-3), & x>3. \end{cases} \qquad f(x)=\operatorname{arctg}\frac{1}{x+3}$$

3.16 $$f(x)=\begin{cases} 1, & x<0; \\ \cos x, & 0<x<\pi; \\ \frac{\pi}{x}, & x\ge \pi. \end{cases} \qquad f(x)=\frac{1}{x^2-4}$$

3.17 $f(x)=\begin{cases} x^3, & -\infty < x < 0; \\ x^2+1, & 0 \le x < 4; \\ \lg(x-4), & x > 4. \end{cases}$ $\qquad f(x)=x+\dfrac{x+2}{|x+2|}$

3.18 $f(x)=\begin{cases} 2, & x < -2; \\ |x|, & |x| < 2; \\ \frac{1}{x-2}, & x > 2. \end{cases}$ $\qquad f(x)=\dfrac{2x}{\sin x}$

3.19 $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x+1}, & x < -1; \\ |x|, & -1 \le x \le 1; \\ 1-x^2, & x > 1. \end{cases}$ $\qquad f(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}$

3.20 $f(x)=\begin{cases} -x^2, & x \le 0; \\ \operatorname{tg} x, & 0 < x \le \frac{\pi}{4}; \\ 2, & x > \frac{\pi}{4}. \end{cases}$ $\qquad f(x)=\dfrac{1}{(1-x)^2}$

3.21 $f(x)=\begin{cases} 4^x, & x < 1; \\ 5-x^2, & 1 < x \le 4; \\ \lg(x-4), & x > 4. \end{cases}$ $\qquad f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x+2}$

3.22 $f(x)=\begin{cases} e^x, & x \le 0; \\ \frac{1}{x}, & 0 < x < 5; \\ 3x+4, & x \ge 5. \end{cases}$ $\qquad f(x)=\dfrac{\pi}{2}\dfrac{(x-1)}{|x-1|}+\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x-1}$

3.23 $f(x)=\begin{cases} -1, & x \le -\frac{\pi}{2}; \\ \operatorname{tg} x, & -\frac{\pi}{2} < x < 0; \\ x, & x > 0. \end{cases}$ $\qquad f(x)=\dfrac{\sin 4x}{|x|}$

3.24 $f(x)=\begin{cases} \left(\frac{1}{3}\right)^x, & x < 0; \\ x+1, & 0 < x \le 3; \\ \lg(x-3), & x > 3. \end{cases}$ $\qquad f(x)=\dfrac{1}{1+6^{\frac{1}{x}}}$

3.25 $f(x)=\begin{cases} x-3, & x \le 0; \\ x-x^2, & 0 < x \le 1; \\ \lg(x-1), & x > 1. \end{cases}$ $\qquad f(x)=x+\dfrac{|x|}{x}$

3.26 $f(x)=\begin{cases} 2^{-x}, & x < 0; \\ \cos x, & 0 < x \le \frac{\pi}{2}; \\ \frac{1}{x-\frac{\pi}{2}}, & x > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$ $\qquad f(x)=\dfrac{1}{2+3^{-\frac{1}{x}}}$

3.27 $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x+2}, & x < -2; \\ |x|, & |x| < 2; \\ x, & x > 2. \end{cases}$ $\qquad f(x)=\dfrac{\sin x}{|x|}$

3.28
$$f(x)=\begin{cases} x^2-x, & x\le 1;\\ 2-x, & 1<x\le 4;\\ \frac{1}{x-4}, & x>4.\end{cases} \qquad f(x)=\frac{\operatorname{tg} 3x}{x}$$

3.29
$$f(x)=\begin{cases} 3-x, & x\le 3;\\ 8x-x^2-15, & 3<x\le 5;\\ 2x-12, & x>5.\end{cases} \qquad f(x)=\frac{x}{\ln x}$$

3.30
$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x}, & x<0;\\ 3x+1, & 0\le x<2;\\ 4-x^2, & x\ge 2.\end{cases} \qquad f(x)=\frac{e^{3x}-1}{x}$$

Вопросы для самопроверки

1. Что такое общий член последовательности?
2. Могут ли в числовой последовательности различным номерам соответствовать одинаковые числа?
3. Пусть все члены монотонной последовательности умножили на -1. Будет ли полученная последовательность монотонной?
4. Пусть число 4 является пределом числовой последовательности. Можно ли утверждать, что вне интервала $(3,5)$ содержится лишь конечное число членов последовательности?
5. Имеет ли предел последовательность 1, 0, 1, 0, 1, 0, …?
6. Пусть число 5 является пределом числовой последовательности. Может ли эта последовательность иметь отрицательные члены?
7. Может ли последовательность иметь два различных предела?
8. Доказать, что у одной последовательности не может быть двух разных пределов.
9. Может ли число -1 быть пределом числовой последовательности, все члены которой положительны?
10. Пусть для всех x выполняется неравенство $f(x)\ge 5{,}001$. Может ли в этом случае быть $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=5$?
11. Что такое число e?
12. Какая функция называется экспонентой? Какая кривая называется экспонентой?
13. Показать на примерах, что частное двух бесконечно малых при функций $x\to x_0$ может не быть бесконечно малой функцией.
14. Показать на примерах, что сумма бесконечно больших функций при $x\to x_0$ может быть даже бесконечно малой при $x\to x_0$.
15. Какие из основных элементарных функций непрерывны?
16. Как классифицируются точки разрыва функции?
17. На чем основано сравнение бесконечно малых?

18. Являются ли эквивалентные бесконечно малые бесконечно малыми одного порядка?
19. Пусть α и β – две бесконечно малые разных порядков. Какая их них быстрее стремится к нулю – та, что более высокого порядка, или та, что более низкого порядка?
20. Любые ли две бесконечно малые величины сравнимы между собой?

Тема 2. Производная, ее геометрический смысл

Задание 4. *Вычислить производную:*

4.1 $y=\ln\left(\sqrt{x}-2^{\operatorname{ctg}^3 x}\right)-3^{\sqrt{1-\sin x}}\cdot x$;

4.2 $y=\left(\sin x\right)^{5e^x}$;

4.3 $\begin{cases} x=\cos\ln t \\ y=\sin^2 t \end{cases}$;

4.4 $x^2+y^2-\sqrt{x^2+y^2}=0$.

Решение.

4.1. Для вычисления производной будем использовать правила вычисления производной суммы, произведения и сложной функции (Приложение 2).

Первое слагаемое представляет собой сложную функцию. Дифференцируя внешнюю функцию (натуральный логарифм), нельзя менять ее сложный аргумент. Эту производную необходимо умножить на производную от аргумента, который в свою очередь представляет собой разность элементарной и сложной функций. Ее производную вычисляем тем же способом.

Второе слагаемое является произведением двух функций, первая из которых сложная функция. Сначала вычисляем производную первого сомножителя (по правилу нахождения производной сложной функции) и умножаем ее на второй сомножитель, а затем производную второго сомножителя умножаем на первый сомножитель.

$$y'=\frac{1}{\sqrt{x}-2^{\operatorname{ctg}^3 x}}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}-2^{\operatorname{ctg}^3 x}\cdot\ln 2\cdot 3\operatorname{ctg}^2 x\cdot\left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right)\right)-$$
$$-3^{\sqrt{1-\sin x}}\cdot\ln 3\cdot\frac{1}{2\sqrt{1-\sin x}}\cdot\left(-\cos x\right)\cdot x-3^{\sqrt{1-\sin x}}.$$

4.2. Данная функция называется показательно-степенной, т.к. и в основании, и в показателе степени стоят функции от x. Для вычисления производной будем использовать логарифмическое дифференцирование.

Возьмем логарифм от обеих частей равенства $\ln y = \ln(\sin x)^{5e^x}$, используя свойство логарифма, перепишем его $\ln y = 5e^x \cdot \ln(\sin x)$.

Теперь продифференцируем обе части этого равенства. При этом учитываем, что слева от знака равенства стоит сложная функция (y является функцией от x), а справа — произведение двух функций.

$$\frac{1}{y} \cdot y' = 5e^x \cdot \ln(\sin x) + 5e^x \cdot \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x.$$

Из полученного равенства выразим производную y'.

$$y' = y\left(5e^x \cdot \ln(\sin x) + 5e^x \cdot \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x\right) \text{ или}$$

$$y' = (\sin x)^{5e^x} \cdot 5e^x \left(\ln(\sin x) + \operatorname{ctg} x\right).$$

Ответ. $y' = (\sin x)^{5e^x} \cdot 5e^x \left(\ln(\sin x) + \operatorname{ctg} x\right)$.

4.3. Если функция $y = y(x)$ задана параметрическими уравнениями $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$, где t – параметр, и если функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ дифференцируемы в точке t, то функция $y = y(x)$ также дифференцируема в точке $x(t)$ и ее производная вычисляется по правилу $y'_x = \dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$. В нашем случае производные $x' = (\cos\ln t)' = -\sin\ln t \cdot \dfrac{1}{t}$, $y' = (\sin^2 t)' = 2\sin t \cdot \cos t = \sin 2t$ вычисляются по ранее рассмотренным правилам. Тогда $y'_x = -\dfrac{t \cdot \sin 2t}{\sin\ln t}$.

Ответ. $y'_x = -\dfrac{t \cdot \sin 2t}{\sin\ln t}$.

4.4. Если дифференцируемая в точке x функция $y = y(x)$ задана соотношением $F(x, y) = 0$ и если при этом функция $F(x, y(x))$ дифференцируема в точке x, то производную $y'(x)$ можно определить из равенства $\left(F(x, y(x))\right)'_x = 0$. Продифференцируем равенство $x^2 + y^2 - \sqrt{x^2 + y^2} = 0$, учитывая, что y функция от x.

$$2x + 2y \cdot y' - \frac{2x + 2y \cdot y'}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = 0 \text{ или } 2x + 2y \cdot y' - \frac{x + y \cdot y'}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0.$$

Теперь выразим из этого равенства производную y'

$$y' = \frac{\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} - 2x}{2y - \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}} \text{ или } y' = \frac{x - 2x\sqrt{x^2+y^2}}{2y\sqrt{x^2+y^2} - y}.$$

Ответ. $y' = \dfrac{x - 2x\sqrt{x^2+y^2}}{2y\sqrt{x^2+y^2} - y}$.

Задание 5. *Составить уравнение касательной и нормали к линии* $y = \dfrac{x^2 - 3x + 6}{x^2}$ *в точке* $x = 2$.

Решение.

Если функция $y = y(x)$ дифференцируема в точке x_0, то уравнение касательной к графику этой функции в точке с абсциссой x_0 имеет вид $y = y'(x)(x - x_0) + y(x_0)$, а уравнение нормали – $y = -\dfrac{1}{y'(x)}(x - x_0) + y(x_0)$.

Вычислим значение функции в точке $x = 2$: $y(2) = \dfrac{4-6+6}{4} = 1$. Продифференцируем функцию $y' = \dfrac{(2x-3)x^2 - (x^2 - 3x + 6)\cdot 2x}{x^4} = \dfrac{3x-12}{x^3}$ и найдем значение производной в точке $x = 2$ – $y'(2) = \dfrac{6-12}{8} = -\dfrac{3}{4}$. Подставив найденные значения в формулы, получим уравнение касательной $y = -\dfrac{3}{4}(x-2)+1$ или $y = -\dfrac{3}{4}x + \dfrac{5}{2}$ и уравнение нормали $y = \dfrac{4}{3}(x-2)+1$ или $y = \dfrac{4}{3}x - \dfrac{5}{3}$.

Ответ. Уравнение касательной $y = -\dfrac{3}{4}x + \dfrac{5}{2}$, уравнение нормали $y = \dfrac{4}{3}x - \dfrac{5}{3}$.

Задачи для типовых расчетов

Задание 4.

Вычислить производную:

4.1

$$y=\sqrt[3]{\frac{\left(1+x^{3/4}\right)^2}{x^{3/2}}}+9^{7x-\ln 8x}$$

$$y=\left(\operatorname{arctg} x\right)^{\frac{1}{2}\ln x}$$

$$\begin{cases} x=\cos\ln t \\ y=\sin^2 t \end{cases}$$

$$x^2+y^2-\sqrt{x^2+y^2}=0$$

4.2

$$y=\frac{\left(x^2-8\right)\sqrt{x^2-8}}{6x^3}+\cos^3 6x$$

$$y=x^{\arcsin x}$$

$$\begin{cases} x=\arcsin\left(\sin t\right) \\ y=\arccos\left(\cos t\right) \end{cases}$$

$$x^4+y^4=4xy$$

4.3

$$y=\frac{x-1}{\left(x^2+5\right)\sqrt{x^2+5}}+\arccos\left(x-\ln 7x\right)^4$$

$$y=\left(\sin x\right)^{5e^x}$$

$$\begin{cases} x=\sqrt{2t-t^2} \\ y=\arcsin\left(t-1\right) \end{cases}$$

$$\ln x+\ln y=xy$$

4.4

$$y=\frac{1}{\left(x+2\right)\sqrt{x^2+4x+5}}+\ln^{-3}\left(3-5x\right)$$

$$y=\left(\sin x\right)^{e^{\sqrt{x}}}$$

$$\begin{cases} x=\cos\ln t \\ y=\sin^2 t \end{cases}$$

$$x^3-2x^2y^2+5x+y-5=0$$

4.5

$$y=\frac{4+3x^3}{x\sqrt[3]{\left(2+x^3\right)^2}}-2\operatorname{arctg} e^{\frac{x}{2}}$$

$$y=\left(\ln x\right)^{3^x}$$

$$\begin{cases} x=\dfrac{1}{\ln t} \\ y=\ln\dfrac{1+\sqrt{1-t^2}}{t} \end{cases}$$

$$x-y=\arcsin x-\arcsin y$$

4.6

$$y=\sqrt{\sin x+\cos x}+\frac{\sqrt{1-x^2}-3x}{\sqrt{e^{2x}+1}}$$

$$y=\left(\cos 5x\right)^{e^x}$$

$$\begin{cases} x=\ln\sqrt{\dfrac{1-t}{1+t}} \\ y=\sqrt{1-t^2} \end{cases}$$

$$\sin\left(xy\right)+\cos\left(xy\right)=0$$

4.7

$$y=\sqrt{1-\sqrt{2x}}+\ln\left(\frac{x}{\sqrt{2x-5}}\right)$$

$$y=\left(\operatorname{ctg} 3x\right)^{2e^x}$$

$$\begin{cases} x=\sqrt{1-t^2} \\ y=\dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}} \end{cases}$$

$$x^4+y^4=x^2y^2$$

4.8

$$y=\sqrt{1+\operatorname{tg} 2x}+\arcsin^2\left(\frac{x}{e^{-2x}}\right)$$

$$y=\left(x^3+4\right)^{\operatorname{tg} x}$$

$$\begin{cases} x=\operatorname{arctg} t \\ y=\ln\dfrac{\sqrt{1+t^2}}{t+1} \end{cases}$$

$$e^x\sin y-e^y\cos x=0$$

4.9 $y=\sqrt{1+3x}\ln^2(1-\cos 4x)-\dfrac{3^{4x}}{\operatorname{arctg} 3\sqrt{x}}$

$y=(\operatorname{tg} x)^{4e^x}$

$\begin{cases} x=t\sqrt{t^2+1} \\ y=\ln\dfrac{1+\sqrt{1+t^2}}{t} \end{cases}$

$\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$

4.10 $y=-2\ln\left(\dfrac{\sqrt{1+e^{-6x}}+7}{\sqrt{1+\sin^2 x}}\right)+2\operatorname{arctg} 4x$

$y=x^{3^x}2^x$

$\begin{cases} x=\left(1+\cos^2 t\right)^2 \\ y=\dfrac{\cos t}{\sin^2 t} \end{cases}$

$x^y=y^x$

4.11 $y=\dfrac{3+x}{2}\sqrt{x(2-x)}+3\arccos\sqrt{\dfrac{3x}{2}}$

$y=(x\sin x)^{8\ln(x\sin x)}$

$\begin{cases} x=\arccos\dfrac{1}{t} \\ y=\sqrt{t^2-1}+\arcsin\dfrac{1}{t} \end{cases}$

$x^3+\ln y-x^2e^y=0$

4.12 $y=\dfrac{-7\operatorname{arctg}\sqrt{\cos 4x}}{x^2}+\dfrac{1}{3x\sqrt{x}}$

$y=x^{2^x}5^x$

$\begin{cases} x=\operatorname{arctg}\dfrac{t+1}{t-1} \\ y=\arcsin\sqrt{1-t^2} \end{cases}$

$\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=e^x$

4.13 $y=e^{-\operatorname{tg}3x}\arccos\dfrac{x^2-4}{\sqrt{x^4+16}}+\ln^2 x$

$y=x^{\sin x^3}$

$\begin{cases} x=\ln\operatorname{tg} t \\ y=\dfrac{1}{\sin^2 t} \end{cases}$

$e^x+e^y-2^{xy}-1=0$

4.14 $y=\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}-\ln\dfrac{1-x^3}{\sqrt{2x+\cos^3 x}}$

$y=x^{e^{\cos x}}$

$\begin{cases} x=\operatorname{ctg}(\operatorname{tg} t) \\ y=\dfrac{1}{\cos^2 t} \end{cases}$

$e^y+xy=e$

4.15 $y=-\ln\left(1+e^{3x}\right)+\dfrac{\sqrt[3]{3x^5-2x}}{x+7}$

$y=\left(\sin\sqrt{x}\right)^{e^{-x}}$

$\begin{cases} x=t^2+2t \\ y=\ln(\sin t) \end{cases}$

$x^2\sin y+y^3\cos x=2x$

4.16 $y=\ln\dfrac{\sqrt{1+e^{6x}+\ln 3x}}{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[2]{x}+2}+2\operatorname{arctg}\left(1-x^4\right)$

$y=19^{x^{19}}x^{19}$

$\begin{cases} x=\sqrt{t^2+1} \\ y=\ln\left(t+\sqrt{t^2+1}\right) \end{cases}$

$\sin\left(y-x^2\right)-\ln\left(y-x^2\right)=2$

4.17 $y=\ln\sqrt[4]{\dfrac{1+2x}{1-2x}}+\arccos\left(2^{-x^2}\right)$

$y=x^{e^{\sin x}}$

$\begin{cases} x=\sqrt{t+1} \\ y=\ln\left(1+e^t\right) \end{cases}$

$x\sin y+y\sin x=0$

4.18 $y=\log_{16}\log_5 \operatorname{tg} x+\dfrac{18e^{2x}+11}{6(e^x+1)^3}$ $\quad \begin{cases} x=\arcsin^2 t \\ y=t\ln t \end{cases}$

$y=(\sin x)^{\frac{5x}{2}}$ $\quad x^4-6x^2y^2+9y^4=0$

4.19 $y=\dfrac{2\sqrt{1-x}\arcsin\sqrt{x}}{x}+\dfrac{2}{\sqrt[4]{x+2}}$ $\quad \begin{cases} x=\sqrt{2t-t^2} \\ y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{(t-1)^2}} \end{cases}$

$y=(x^2+1)^{\cos x}$ $\quad x^3+y^3-3xy=0$

4.20 $y=e^{\operatorname{ctg}^2 x}\dfrac{\sqrt{x}}{3}+2\sin^2\left(x+\ln 7x^{-3}\right)$ $\quad \begin{cases} x=(\arcsin t)^2 \\ y=\dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}} \end{cases}$

$y=x^{e^{\operatorname{arcctg} x}}$ $\quad 3^{\frac{x}{y}}=\left(\dfrac{x}{y}\right)^3$

4.21 $y=\sqrt{\dfrac{2}{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{3x-1}{\sqrt{6x}}-\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}+e^{-x}}$ $\quad \begin{cases} x=\arcsin\sqrt{1-t^2} \\ y=\arccos^2 t \end{cases}$

$y=(x^4+5)^{\operatorname{ctg} x}$ $\quad xy=\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$

4.22 $y=\arcsin\sqrt{\dfrac{7\cos x}{x+1}}+\ln\dfrac{(x+6)^5}{x+8}$ $\quad \begin{cases} x=\arcsin\sqrt{t} \\ y=\sqrt{1+\sqrt{t}} \end{cases}$

$y=\left(\dfrac{x}{\operatorname{tg} x}\right)^{e^{\cos x}}$ $\quad 2y\ln y=x$

4.23 $y=\sqrt{x}\sin\left(xe^{\cos x}\right)-\dfrac{\ln(1+3x)}{2-x}$ $\quad \begin{cases} x=\operatorname{arctg} e^t \\ y=\sqrt{e^t+1} \end{cases}$

$y=x^{e^{\operatorname{ctg} x}}$ $\quad \sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}=\sqrt[3]{a^2}$

4.24 $y=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1}{x^2}-5^{-x}}-\dfrac{\arccos x}{2x^2}$ $\quad \begin{cases} x=\ln(1-t^2) \\ y=\arcsin\sqrt{1-t^2} \end{cases}$

$y=\left(\dfrac{\sin^2 x}{\sqrt{x}}\right)^{x+1}$ $\quad 2^x+2^y=2^{x+y}$

4.25 $y=\log_6\operatorname{arctg}\dfrac{1}{-x}+\dfrac{7\operatorname{ctg} 3x}{1+e^{\frac{x}{4}}}$ $\quad \begin{cases} x=\dfrac{3t^2+1}{3t^3} \\ y=\sin\left(\dfrac{t^3}{3}+t\right) \end{cases}$

$y=x^{e^{\operatorname{tg} x}}$ $\quad \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}=\ln\sqrt{x^2+y^2}$

4.26 $y=\ln\arcsin\sqrt{1-e^{2x}}+\dfrac{\sqrt[6]{5x^4-x}}{-x+8}$

$y=(\operatorname{tg}x)^{\operatorname{ctg}^2 x}$

$\begin{cases} x=\ln\dfrac{1}{\sqrt{1-t^4}} \\ y=\arcsin\dfrac{1-t^2}{\sqrt{1+t^2}} \end{cases}$

$\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$

4.27 $y=\dfrac{(x^2-3)\sqrt{(4+x^2)^3}}{\cos\dfrac{\pi}{4}+x}-\cos^2 x$

$y=\sin 3x^{\ln(1-2x^2)}$

$\begin{cases} x=\operatorname{ctg}(2e^t) \\ y=\ln(\operatorname{tg}e^t) \end{cases}$

$7x^2+8xy+3y^2+6y=0$

4.28 $y=3\sqrt[7]{\dfrac{(2x-\ln 1)}{(x+9)^3}}+8^{4x+5}$

$y=(\operatorname{tg}x)^{\ln\operatorname{tg}\frac{x}{4}}$

$\begin{cases} x=\ln\left(t+\sqrt{t^2+1}\right) \\ y=t\sqrt{t^2+1} \end{cases}$

$\cos(x+y)=xy$

4.29 $y=\operatorname{arctg}\left(e^{3\cos^2 x}\right)+\dfrac{(3x-7)^{-8}}{\ln(8-x)}$

$y=\left(\dfrac{\cos^2 x}{1+2x}\right)^{\sin x}$

$\begin{cases} x=\cos^3 t \\ y=\sin^3 t \end{cases}$

$\ln(x+y)=x-y$

4.30 $y=\ln\left(e^x+\sqrt{e^{2x}-4}\right)+\dfrac{\operatorname{arcctg}^2 3x}{(5x+2)^3}$

$y=(\arcsin x)^{e^x}$

$\begin{cases} x=\arccos t \\ y=\ln(1+t^2) \end{cases}$

$x^4+y^4=4xy$

Задание 5.

Составить уравнение касательной и нормали к линии в заданной точке.

5.1 $y=\dfrac{x^2-3x+6}{x^2}$ в точке $x=2$

5.2 $y=\dfrac{1}{1+x^2}$ в точке $x=1$

5.3 $y=\ln x$ в точке $x=1$

5.4 $y=\dfrac{x-4}{x-2}$ в точке $x=3$

5.5 $y=\dfrac{x^2-x+1}{x}$ в точке $x=-1$

5.6 $y=x-\dfrac{1}{x}$ в точке $x=2$

5.7 $y=x^2+e^{2x}$ в точке $x=0$

5.8 $y=\dfrac{x+9}{x+5}$ в точке $x=3$

5.9 $y=\dfrac{8}{4+x^2}$ в точке $x=2$

5.10 $y=\dfrac{-8}{4+x^2}$ в точке $x=-2$

5.11 $y^2=x^3$ в точке $x=0$

5.12 $y=\dfrac{x^3}{3}$ в точке $x=-1$

5.13 $y=4x-x^2$ в точке $x=4$

5.14 $y^2=4-x$ в точке $x=0$

5.15 $y^2=(4+x)^3$ в точке $x=-4$

5.16 $y=x^2+4x$ в точке $x=1$

5.17 $y=\frac{2}{1+x^2}$ в точке $x=1$

5.18 $y=\sqrt{x^2-1}$ в точке $x=3$

5.19 $y=(x+1)\sqrt{3-x}$ в точке $x=-1$

5.20 $y=x^3+4x^2-1$ в точке $x=-1$

5.21 $y=\frac{x+1}{x-1}$ в точке $x=2$

5.22 $y^2=(4+x)^3$ в точке $x=0$

5.23 $y=x-x^3$ в точке $x=-1$

5.24 $y=x^2+8\sqrt{x}-32$ в точке $x=4$

5.25 $y=x+\sqrt{x^3}$ в точке $x=1$

5.26 $y=\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$ в точке $x=4$

5.27 $y=8\sqrt[4]{x}-70$ в точке $x=16$

5.28 $y=\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}$ в точке $x=64$

5.29 $y=\frac{x^3+2}{x^3-2}$ в точке $x=2$

5.30 $y=\frac{x}{x^2+1}$ в точке $x=-2$

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. В чем заключается геометрический смысл производной?
2. Пусть для функции $y=f(x)$ производная $f'(3)=\sqrt{3}$. Под каким углом к оси Ox расположена касательная к графику функции при $x=3$?
3. Как определяется понятие дифференцируемости функции $y=f(x)$ в точке x_0?
4. Будет ли функция, дифференцируемая в точке $x=2$, непрерывной в этой точке?
5. Пусть функция $y=f(x)$ непрерывна в точке $x=5$. Можно ли утверждать, что эта функция имеет производную в указанной точке?
6. Будет ли прямая $y=4x-4$ касательной к параболе $y=x^2$? А прямая $y=-4x-4$?
7. Равносильны ли утверждения: «функция $y=f(x)$ дифференцируема в точке x_0» и «функция $y=f(x)$ имеет в точке x_0 конечную производную»?
8. Доказать, что производная четной функции – нечетная функция.
9. Доказать, что если $u(x)$ и $v(x)$ имеют вторые производные, то $(uv)''=u''v+2u'v'+uv''$.
10. Каков геометрический смысл дифференциала?
11. Может ли дифференциал функции $f(x)$ быть больше приращения этой функции?
12. Производная y' нередко обозначается в виде $\frac{dy}{dx}$. Каков смысл этого обозначения?
13. На чем основано применение дифференциала в приближенных вычислениях?

Тема 3. Применение производной

Задание 6. *Вычислить приближенное значение функции* $y=\dfrac{1}{\sqrt[4]{x}}$ *в точке* $x=1{,}03$.

Решение.

Представим $x=x_0+\Delta x$ так, чтобы значение функции в точке x_0 легко вычислялось, а Δx было бы достаточно малым. Ясно, что в нашем случае удобно взять $x_0=1$ и $\Delta x=0{,}03$. Теперь значение функции в точке x представим в виде $y=y_0+\Delta y$, где $y_0=y(x_0)$, Δy – приращение функции, соответствующее приращению аргумента Δx. Приращение функции Δy приближенно заменим дифференциалом $dy=y'dx$ в точке x_0 при приращении аргумента на $\Delta x=0{,}03$. Получим

$$y_0=y(1)=1,\ y'=-\frac{1}{4\sqrt[4]{x^5}},\ y'(1)=-\frac{1}{4}.$$

Поскольку $\Delta y\approx dy=-\dfrac{1}{4}\cdot 0{,}03=-0{,}0075$, то $y=1-0{,}0075=0{,}9925$.

Ответ. $\dfrac{1}{\sqrt[4]{1{,}03}}\approx 0{,}9925$.

Задание 7. *Провести полное исследование функции* $y=\dfrac{x^2-6x+13}{x-3}$ *и построить ее график.*

Решение.

Исследование функции будем вести по следующему плану:

1. Область определения функции.

Поскольку в знаменателе дроби стоит выражение $x-3$, то $D(y): x\neq 3$.

2. Четность, нечетность функции. Периодичность.

Область определения функции несимметричный относительно нуля интервал, поэтому функция не может быть ни четной, ни нечетной. Т.о. имеем функцию общего вида.[3]

Периодичность функции устанавливают проверкой условия $y(x+T)=y(x)$. Как правило, это необходимо делать в случае тригонометрических функций. В нашем случае функция непериодическая.

---

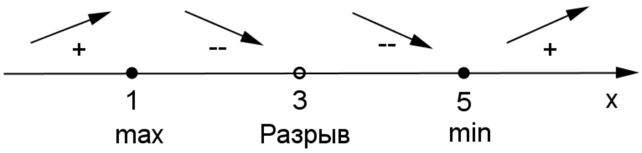
[3] **Замечание.** В случае симметричной ООФ проверяем выполнение одного из условий $y(-x)=y(x)$ (четная) или $y(-x)=-y(x)$ (нечетная).

3. Исследование с помощью первой производной (монотонность и экстремумы).

Вычислим первую производную функции

$$y' = \frac{(2x-6)(x-3)-(x^2-6x+13)}{(x-3)^2} = \frac{x^2-6x+5}{(x-3)^2} = \frac{(x-1)(x-5)}{(x-3)^2}.$$

Критическими точками функции являются стационарные точки (производная равна нулю) $x_1 = 1$, $x_2 = 5$ и точка разрыва $x_3 = 3$. Отметим их на числовой оси и определим знак производной на каждом из полученных интервалов.



При переходе через точку $x = 3$ знак производной не меняется, поскольку этот корень знаменателя дроби имеет кратность равную двум.

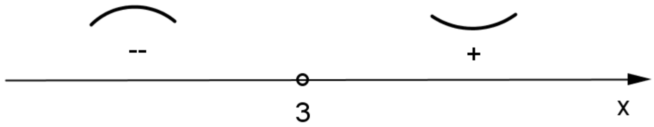
Из рисунка видно, что на интервалах $(-\infty;1)$ и $(5;+\infty)$ функция возрастает, а на $(1;3)$ и $(3;5)$ – убывает. В точке $x = 1$ максимум функции равный $y_{\max} = y(1) = -4$, а в точке $x = 5$ – минимум, равный $y_{\min} = y(5) = 4$.

4. Исследование функции с помощью второй производной (выпуклость, вогнутость, точки перегиба).

Вычислим вторую производную функции

$$y' = \frac{(2x-6)(x-3)^2 - 2(x^2-6x+5)(x-3)}{(x-3)^4} = \frac{8}{(x-3)^3}.$$

На числовой прямой отметим точки, в которых эта производная равна нулю или не существует.



Т.о., на интервале $(-\infty;3)$ функция выпукла вверх, на $(3;+\infty)$ – выпукла вниз. Точка $x = 3$ не является точкой перегиба, поскольку в этой точке функция не существует.

5. Асимптоты графика функции

а) Вертикальные асимптоты следует искать в точках бесконечного разрыва функции. Вычислим пределы $\lim\limits_{x\to 3-0} y(x) = \lim\limits_{x\to 3-0} \frac{x^2-6x+13}{x-3} = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 3+0} y(x) = \lim\limits_{x\to 3+0} \frac{x^2-6x+13}{x-3} = \infty$. Значит $x = 3$ вертикальная асимптота.

б) Наклонная асимптота вида $y = kx + b$ существует тогда и только тогда, когда существуют конечные пределы $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{y(x)}{x}=k$ и $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(y(x)-kx\right)=b$.

Вычислим пределы

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-6x+13}{(x-3)x}=1=k \quad \text{и} \quad \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2-6x+13}{x-3}-x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-3x+13}{x-3}=-3=b,$$

тогда прямая $y=x-3$ является наклонной асимптотой.[4]

6. Точки пересечения с осями координат.

Пересечение с осью Oy найдем, если подставим в функцию $x=0$, тогда $y=y(0)=-\frac{13}{3}$.

Пересечение с осью Ox найдем, решив уравнение $y=0$, т.е. $\dfrac{x^2-6x+13}{x-3}=0$. В нашем случае уравнение корней не имеет.

Рисунок. Отметим на координатной плоскости все найденные точки, проведем асимптоты и построим эскиз графика. (Рисунок 3)

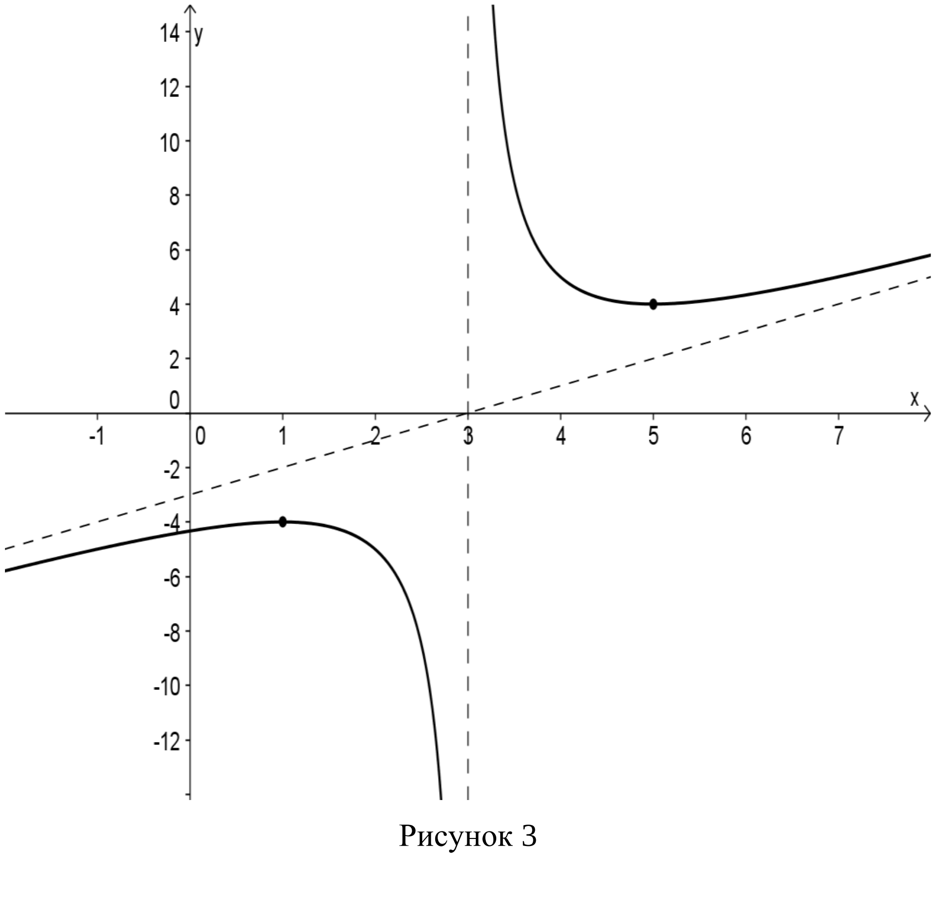


Рисунок 3

---

[4] **Замечание 1.** В случае если $k=0$, имеем горизонтальную асимптоту вида $y=b$.

Замечание 2. Если пределы при $x\to+\infty$ и $x\to-\infty$ различны, получим уравнения двух асимптот (при $x\to+\infty$ и $x\to-\infty$).

Задание 8. *Найти наибольшее и наименьшее значение функции* $y=\sqrt[3]{(x+2)^2(1-x)}$ *на отрезке* $[-3;4]$.

Решение.

Непрерывная на отрезке функция принимает наибольшее и наименьшее значение либо на концах отрезка, либо в точках экстремума. Поэтому вычислим производную функции

$$y'=\frac{\left(2(1-x)-(x+2)\right)}{3\sqrt[3]{(x+2)(1-x)^2}}=\frac{\cancel{2}-2x-x-\cancel{2}}{3\sqrt[3]{(x+2)(1-x)^2}}=\frac{-x}{\sqrt[3]{(x+2)(1-x)^2}}$$

Критическими точками являются $x_1=0$, $x_2=-2$ и $x_3=1$, все они принадлежат рассматриваемому отрезку. Устанавливать какие из них являются точками экстремума необязательно. Достаточно посчитать значение функции в каждой из них и сравнить со значениями функции на концах отрезка

$$y(0)=\sqrt[3]{(0+2)^2(1-0)}=\sqrt[3]{4},$$

$$y(-2)=\sqrt[3]{(-2+2)^2(1+2)}=0,$$

$$y(1)=\sqrt[3]{(1+2)^2(1-1)}=0,$$

$$y(-3)=\sqrt[3]{(-3+2)^2(1+3)}=\sqrt[3]{4},$$

$$y(4)=\sqrt[3]{(4+2)^2(1-4)}=-3\sqrt[3]{4}.$$

Т.о. $y_{\text{наим.}}=y(-2)=y(1)=0$, а $y_{\text{наиб.}}=y(4)=3\sqrt[3]{4}$.

Ответ. $y_{\text{наим.}}=y(-2)=y(1)=0$, $y_{\text{наиб.}}=y(4)=3\sqrt[3]{4}$.

Задание 9. *Вычислить предел функции* $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-e^{-2x}-4x}{x-\sin x}$ *по правилу Лопиталя.*

Решение.

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в некоторой окрестности точки x_0 и если выполняется условие $f(x_0)=g(x_0)=0$, причем $f'(x_0)\neq 0$ и $g'(x_0)\neq 0$ одновременно, то существует предел $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\left[\frac{0}{0}\right]=\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$. Правило Лопиталя можно применять несколько раз.

В нашем случае вычисляем производные числителя и знаменателя дроби по ранее рассмотренным правилам.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-e^{-2x}-4x}{x-\sin x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{2e^{2x}+2e^{-2x}-4}{1-\cos x}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{4e^{2x}-4e^{-2x}}{\sin x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{8e^{2x}+8e^{-2x}}{\cos x}=\frac{16}{1}=16.$$

Ответ. $\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-e^{-2x}-4x}{x-\sin x}=16$.

Задачи для типовых расчетов

Задание 6.

Вычислить приближенное значение функции в данной точке.

6.1 $y=\lg x$, $x=11$

6.2 $y=\sqrt[3]{x^2}$, $x=1{,}03$

6.3 $y=x^5$, $x=1{,}02$

6.4 $y=\sqrt[3]{x}$, $x=1{,}21$

6.5 $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$, $x=4{,}16$

6.6 $y=\frac{x+\sqrt{5-x^2}}{2}$, $x=0{,}98$

6.7 $y=\sqrt[3]{x^2+7}$, $x=0{,}97$

6.8 $y=\sqrt[3]{x}$, $x=27{,}46$

6.9 $y=x^7$, $x=1{,}996$

6.10 $y=x^6$, $x=2{,}01$

6.11 $y=\frac{1}{\sqrt{2x^2+x+1}}$, $x=1{,}016$

6.12 $y=\sqrt{x^3}$, $x=0{,}98$

6.13 $y=\sqrt[5]{x^2}$, $x=1{,}03$

6.14 $y=\sqrt[3]{3x+1}$, $x=0{,}01$

6.15 $y=\frac{1}{\sqrt{2x+1}}$, $x=1{,}58$

6.16 $y=\sqrt[3]{x^3+7x}$, $x=1{,}012$

6.17 $y=\sqrt{1+\sin x}$, $x=0{,}01$

6.18 $y=x^5$, $x=2{,}997$

6.19 $y=\sqrt[3]{1+13x}$, $x=2{,}01$

6.20 $y=\sqrt{4x-1}$, $x=2{,}06$

6.21 $y=\sqrt[3]{x}$, $x=8{,}24$

6.22 $y=\sqrt{x^2+x+3}$, $x=1{,}97$

6.23 $y=\sqrt[3]{x}$, $x=27{,}54$

6.24 $y=\arcsin x$, $x=0{,}08$

6.25 $y=x^{11}$, $x=1{,}021$

6.26 $y=\sqrt[3]{x^2}$, $x=1{,}03$

6.27 $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$, $x=1{,}02$

6.28 $y=\sqrt[3]{3x^2+1}$, $x=0{,}02$

6.29 $y=x^5$, $x=1{,}02$

6.30 $y=\frac{1}{\sqrt[4]{x}}$, $x=1{,}03$

Задание 7.

Провести полное исследование функции и построить ее график.

7.1 $y=\frac{x^2-2x+2}{x+3}$

7.2 $y=\frac{x^3}{2(x-1)^2}$

7.3 $y=\frac{4x^2+9}{4x+8}$

7.4 $y=\frac{x^3-5x}{5-3x^2}$

7.5 $y=\frac{x^2-6x+4}{3x+2}$

7.6 $y=\frac{4x^2-3x}{4x^2-1}$

7.7 $y=\frac{21-x^2}{7x+9}$

7.8 $y=\frac{x^2+2x-1}{2x+1}$

7.9 $y=\frac{x^2-1}{x^2+1}$

7.10 $y=\frac{x^3}{x^2-1}$

7.11 $y=\frac{x}{x^2-4}$

7.12 $y=\frac{x^2}{x-2}$

7.13 $y=\frac{x^2}{1-x^2}$

7.14 $y=\frac{x^2+3x+1}{x^2+1}$

7.15 $y=\left(\frac{x-3}{x+3}\right)^2$

7.16 $y=\frac{x^2-6x+13}{x-3}$

7.17 $y=\frac{x}{16-x^2}$

7.18 $y=\frac{3x}{1+x^2}$

7.19 $y=\frac{3x^2}{x^2+9}$

7.20 $y=\frac{x^3+4}{2x^2}$

7.21 $y=\frac{x+1}{x(x+2)}$

7.22 $y=\frac{2x-1}{(x-1)^2}$

7.23 $y=\frac{x^3}{3-x^2}$

7.24 $y=\frac{x^2+4}{x}$

7.25 $y=\frac{x^3}{x^2-4}$

7.26 $y=\frac{x^2-x-6}{x-2}$

7.27 $y=\frac{x^2}{x-1}$

7.28 $y=\frac{x^2-3}{x+2}$

7.29 $y=\frac{(x-1)^2}{x^2+1}$

7.30 $y=\frac{x^2-2x}{x-1}$

Задание 8.

Найти наибольшее и наименьшее значение функции на данном отрезке.

8.1 $y=\frac{2(x^2+3)}{x^2-2x+5}$ при $x\in[-3;3]$

8.2 $y=1+\sqrt[3]{2(x-1)^2(x-7)}$ при $x\in[-1;5]$

8.3 $y=\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-1}$ при $x\in[-1;5]$

8.4 $y=2x^2+\frac{108}{x}-59$ при $x\in[2;4]$

8.5 $y=\sqrt[3]{2x^2(x-3)}$ при $x\in[-1;6]$

8.6 $y=x^2+\frac{16}{x-1}-2x$ при $x\in[2;5]$

8.7 $y=\sqrt[3]{2(x-1)^2(x-4)}$ при $x\in[0;4]$

8.8 $y=-\frac{x^2}{2}+\frac{8}{x}+8$ при $x\in[-4;-1]$

8.9 $y=\sqrt[3]{2(x-2)^2(5-x)}$ при $x\in[1;5]$

8.10 $y=\frac{x^2}{2}+2x+\frac{8}{x-2}$ при $x\in[-2;1]$

8.11 $y=\sqrt[3]{2x^2(x-3)}$ при $x\in[-1;3]$

8.12 $y=\frac{x-1}{x+1}$ при $x\in[0;4]$

8.13 $y=x-2\sqrt{x}$ при $x\in[0;4]$

8.14 $y=\sqrt[3]{2x^2(x-6)}$ при $x\in[-2;1]$

8.15 $y=x^4-2x^2+5$ при $x\in[-2;2]$

8.16 $y=\sqrt[3]{100-x^2}$ при $x\in[-6;8]$

8.17 $y=\frac{10x}{1+x^2}$ при $x\in[0;3]$

8.18 $y=-\frac{2(x^2+3)}{x^2+2x+5}$ при $x\in[-5;1]$

8.19 $y=\dfrac{4x}{4+x^2}$ при $x\in[-4;2]$

8.20 $y=x-4\sqrt{x+2}+8$ при $x\in[-1;7]$

8.21 $y=2\sqrt{x-1}-x+2$ при $x\in[1;5]$

8.22 $y=\dfrac{-2x(2x+3)}{x^2+4x+5}$ при $x\in[-2;1]$

8.23 $y=\dfrac{2(-x^2+7x-7)}{x^2-2x+2}$ при $x\in[1;4]$

8.24 $y=3-x-\dfrac{4}{(x+2)^2}$ при $x\in[-1;2]$

8.25 $y=\sqrt[3]{2(x+1)^2(5-x)}-2$ при $x\in[-3;3]$

8.26 $y=x-4\sqrt{x}+5$ при $x\in[1;9]$

8.27 $y=2\sqrt{x}-x$ при $x\in[0;4]$

8.28 $y=\sqrt[3]{2(x-2)^2(8-x)}-1$ при $x\in[0;6]$

8.29 $y=x^2+\dfrac{16}{x}-16$ при $x\in[1;4]$

8.30 $y=\dfrac{x^2}{3}-\sqrt[3]{x^2}$ при $x\in[-8;8]$

Задание 9.

Вычислить предел функции по правилу Лопиталя.

9.1 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{e^{x^2}-1}$

9.2 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{2x}-2x-1}{1-\cos 3x}$

9.3 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x}-\cos x-x}{\ln(1+x)-x}$

9.4 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x}-e^{-x}-2x}{\sin x-x}$

9.5 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2e^{2x}+\ln(1-x^2)}{x\cos x-\sin x}$

9.6 $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\ln\operatorname{tg}3x}{\ln\sin 2x}$

9.7 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x^2}-\cos x-1{,}5x^2}{\sin x-x}$

9.8 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x^2}-1-x^2}{\ln(1+x^2)-x^2}$

9.9 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 2x-2\sin x}{x\ln\cos 5x}$

9.10 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos 2x+\operatorname{tg}^2 x}{x\sin 3x}$

9.11 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}}$

9.12 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x}-1}{\ln(1+2x)}$

9.13 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\operatorname{arctg}3x}{2x^3}$

9.14 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{tg}2x-\sin 3x}{x-\sin 5x}$

9.15 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos 2x}{x\sin x}$

9.16 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin 3x}{x-\operatorname{tg}4x}$

9.17 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x^2}-1}{\cos 4x-1}$

9.18 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{\sin x\cos x}$

9.19 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{\operatorname{tg}x}-e^{x}}{\operatorname{tg}x-x}$

9.20 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x^3}-1-x^3}{\sin^3 x}$

9.21 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2(e^{x}-e^{-x})}{e^{x^3+1}-e}$

9.22 $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\cos x\ln(x-3)}{\ln(e^{x}-e^{3})}$

9.23 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}+\ln(1-x)}{\operatorname{ctg}\pi x}$

9.24 $\lim\limits_{x\to1+0}\dfrac{\ln(x^2-x)}{\ln(3^{x}-3)}$

9.25 $\lim\limits_{x\to1-0}\dfrac{\ln\sin\frac{\pi x}{2}}{\ln(2-x)}$

9.26 $\lim\limits_{x\to1+0}\dfrac{\ln\sin 2\pi x}{\ln\operatorname{tg}\pi x}$

9.27 $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3+1}{\sin(x+1)}$

9.28 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{3x}-e^{2x}}{\sin 3x-\operatorname{tg}2x}$

9.29 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2^{3x}-3^{2x}}{x+\arcsin x^3}$

9.30 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{\sin 2x}-e^{\sin x}}{\operatorname{tg}x-x}$

Вопросы для самопроверки

1. Что такое локальный экстремум?
2. Какая точка называется критической (стационарной) точкой данной

функции?

3. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на X, $x_0 \in X$, $f'(x) < 0$ при $x < x_0$ и $f'(x) > 0$ при $x > x_0$, а в точке $x = x_0$ производной $f'(x)$ не существует. Имеется ли в точке x_0 экстремум, и если имеется, то какой?
4. Пусть производная функции $y = f(x)$ равна единице на интервале $(-1,3)$. Будет ли функция возрастающей на этом интервале?
5. Функция $y = f(x)$ дифференцируема на (a,b) и в шести точках этого интервала $f'(x) = 0$. Может ли $f(x)$ иметь на (a,b) четыре минимума?
6. Если функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 максимум, то будет ли иметь максимум функция $y = \left(f(x)\right)^2$ в этой точке?
7. Может ли функция $y = f(x)$ в некоторой точке $x \in (a,b)$ иметь значение меньшее, чем любой из минимумов этой функции на (a,b)?
8. Может ли наименьшее значение функции $y = f(x)$, $x \in [a,b]$ находиться в точке $x = b$?
9. Пусть функция $y = f(x)$ имеет на $[a,b]$ локальный максимум и локальный минимум. Может ли ее наибольшее значение не совпадать с локальным максимумом, а наименьшее – с локальным минимумом?
10. Можно ли найти наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке, не исследуя ее на локальный экстремум, а зная только ее значения в критических точках?
11. Пусть x_0 – критическая точка функции $y = f(x)$ и пусть $f''(x) = 0$. Можно ли утверждать, что в точке x_0 есть экстремум?
12. Пусть график функции $y = f(x)$ имеет выпуклость, направленную вверх. Куда направлена выпуклость кривой $y = \lambda f(x)$:

    а) при $\lambda > 0$; б) при $\lambda < 0$?
13. Пусть график функции $y = f(x)$ имеет на интервале (a,b) три точки перегиба: x_1, x_2 и x_3 $(x_1 < x_2 < x_3)$, и пусть $y = f(x)$ является выпуклой кривой на (a, x_1). Выпуклой или вогнутой является эта кривая на (x_3, b)?
14. Пусть $f''(x) = 0$. Можно ли утверждать, что x_0 – точка перегиба?
15. Пусть $y = f(x)$ имеет горизонтальную асимптоту при $x \to +\infty$. Чему равен предел $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$?
16. Могут ли у графика функции $y = f(x)$ быть две различные наклонные асимптоты?

Тема 4. Функция нескольких переменных

Задание 10. *Вычислить все частные производные второго порядка для функции* $u = x^3y^2z + z^4y^3x + y^4x^2z$.

Решение.

Данная функция является степенной функцией относительно каждой переменной. При вычислении производной по какой-то одной переменной остальные переменные считаем константами. Поэтому можно написать

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u'_x = 3x^2y^2z + z^4y^3 + 2y^4xz,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = u'_y = 2x^3yz + 3z^4y^2x + 4y^3x^2z,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = u'_z = x^3y^2 + 4z^3y^3x + y^4x^2.$$

Для данной функции можно составить всего девять производных второго порядка, однако смешанные производные не зависят от порядка дифференцирования. Поэтому имеем только шесть производных второго порядка

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = u''_{xx} = 6xy^2z + 2y^4z,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = u''_{yy} = 2x^3z + 6z^4yx + 12y^2x^2z,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) = u''_{zz} = 12z^2y^3x,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = u''_{xy} = u''_{yx} = 6x^2yz + 3z^4y^2 + 8y^3xz,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = u''_{yz} = u''_{zy} = 2x^3y + 12z^3y^2x + 4y^3x^2,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) = u''_{xz} = u''_{zx} = 3x^2y^2 + 4z^3y^3 + 2y^4x.$$

Задание 11. *Вычислить дифференциал второго порядка* d^2u *для функции* $u = (x+y)e^{x+y}$.

Решение.

Учитывая независимость частных производных от порядка дифференцирования, дифференциал d^2u можно записать

$$d^2u=\frac{\partial^2u}{\partial x^2}(dx)^2+2\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}(dy)^2.$$

Найдем частные производные второго порядка. Производные вычисляются как производные от произведения.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=e^{x+y}+(x+y)e^{x+y}=(x+y+1)e^{x+y},$$

$$\frac{\partial^2u}{\partial x^2}=e^{x+y}+(x+y+1)e^{x+y}=(x+y+2)e^{x+y}.$$

Поскольку переменные x и y входят в аналитическое выражение функции симметрично, то частные производные по переменной y можно получить, заменяя в $\frac{\partial^2u}{\partial x^2}$ x на y, а y – на x, т.е. $\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=(x+y+2)e^{x+y}$.

Смешанную производную найдем дифференцируя $\frac{\partial u}{\partial x}$ по y

$$\frac{\partial^2u}{\partial y\partial x}=e^{x+y}+(x+y+1)e^{x+y}=(x+y+2)e^{x+y}.$$

Подставим найденные производные в формулу для d^2u и получим

$$d^2u=(x+y+2)e^{x+y}(dx)^2+2(x+y+2)e^{x+y}dxdy+(x+y+2)e^{x+y}(dy)^2$$

или после вынесения за скобку

$$d^2u=(x+y+2)e^{x+y}\left((dx)^2+2dxdy+(dy)^2\right).$$

Ответ. $d^2u=(x+y+2)e^{x+y}\left((dx)^2+2dxdy+(dy)^2\right).$

Задание 12. *Написать уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности* $z-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=0$ *в точке* $M_0(1,1,2)$.

Решение.

Если поверхность задана неявно $F(x,y,z)=0$ [5], то уравнение касательной плоскости, проходящей через точку M_0, имеет вид $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$, где $A=F'_x(x_0,y_0,z_0)$, $B=F'_y(x_0,y_0,z_0)$, $C=F'_z(x_0,y_0,z_0)$.

Найдем частные производные от функции $F(x,y,z)$ по каждой переменной, используя правила дифференцирования.

---

[5] В случае явного задания функции $z=f(x,y)$, переносим z в правую часть равенства и получаем, что $A=f'_x(x_0,y_0)$, $B=f'_y(x_0,y_0)$, $C=-1$.

$$F'_x = -\frac{1}{2\left(1+\left(\frac{y}{x}\right)^2\right)} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) = \frac{y}{2\left(x^2+y^2\right)},\ A = F'_x(1,1,2) = \tfrac{1}{4},$$

$$F'_y = -\frac{1}{2\left(1+\left(\frac{y}{x}\right)^2\right)} \cdot \frac{1}{x} = -\frac{x}{2\left(x^2+y^2\right)},\ B = F'_y(1,1,2) = -\tfrac{1}{4},$$

$$F'_z = 1,\ C = F'_z(1,1,2) = 1.$$

Подставляем в уравнение плоскости $\frac{1}{4}(x-1) - \frac{1}{4}(y-1) + (z-2) = 0$ и после преобразований получаем $x - y + 4z - 8 = 0$.

В качестве направляющего вектора для нормали можно взять вектор $\vec{S} = (1,-1,4)$. Тогда каноническое уравнение прямой проходящей через точку $M_0(1,1,2)$ принимает вид $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{4}$.

Ответ. Касательная плоскость $x - y + 4z - 8 = 0$ и нормаль к поверхности $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{4}$.

Задание 13. *Исследовать функцию двух переменных $z = 3x^2 - x^3 + 3y^2 + 4y$ на экстремум.*

Решение.

Запишем необходимое условие экстремума функции двух переменных $z = z(x,y)$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{cases} \text{ для данной функции } \begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 6x - 3x^2 = 3x(2-x) = 0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 6y + 4 = 2(3y+2) = 0 \end{cases}.$$

Решение системы уравнений дает две стационарные точки (точки подозрительные на экстремум) $M_1\left(0,-\frac{2}{3}\right)$, $M_2\left(2,-\frac{2}{3}\right)$.

Найдем частные производные второго порядка $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6 - 6x$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6$ и вычислим их значения в точках M_1 и M_2:

$$A_1 = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(M_1) = 6;\ B_1 = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(M_1) = 0,\ C_1 = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(M_1) = 6.$$

$$A_2 = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(M_2) = 6 - 6 \cdot 2 = -6;\ B_2 = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(M_2) = 0,\ C_2 = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(M_2) = 6.$$

Достаточные условия экстремума функции $z = z(x, y)$ в стационарной точке M имеют вид: пусть $\Delta = AC - B^2$, где $A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(M)$; $B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(M)$, $C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(M)$. Тогда

1. если $\Delta > 0$, то в точке M экстремум функции, причем, если $A > 0$ (или $C > 0$ при $A = 0$), то функция имеет минимум, а если $A < 0$ (или $C < 0$ при $A = 0$), то функция имеет максимум;
2. если $\Delta < 0$, то в точке M экстремума нет;
3. если $\Delta = 0$, то требуется дополнительное исследование.

Вычислив значение Δ, получим в точке M_1 $\Delta = 36 > 0$ и поскольку $A_1 = 6 > 0$ имеем минимум, а в точке M_2 $\Delta = -36 < 0$, поэтому экстремума нет.

Ответ. $z(M_1) = z\left(0; -\frac{2}{3}\right) = -\frac{4}{3}$ – минимум функции $z(x, y)$.

Задание 14. *Найти наибольшее и наименьшее значение функции* $z = x^2 + y^2 - xy - x - y$ *в области* $0 \le x \le 3,\ 0 \le x + y \le 3$.

Решение.

Стационарные точки функции определяются из системы

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x - y - 1 = 0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 2y - x - 1 = 0 \end{cases}$$

. Решая систему, находим точку $M(1;1)$, которая находится внутри области (Рисунок 4). Значение функции в этой точке равно $z(M) = -1$.

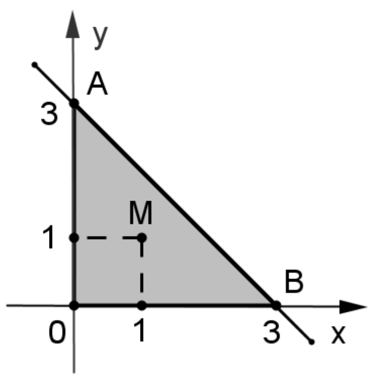


Рисунок 4

.

Далее исследуем поведение функции на границах области, которая в нашем случае является прямоугольным треугольником.

1. Граница OA имеет уравнение $x=0$ при этом $y\in[0,3]$. На этой части границы $z=y^2-y$ – функция одной переменной. Так как $z'=2y-1=0$ при $y=0,5$, то наименьшее и наибольшее значения функции могут быть в точке $M_1(0;0,5)$, а также в граничных точках $M_2(0;0)$ и $M_3(0;3)$. Вычислим значения функции во всех этих точках: $z(M_1)=-0,25$, $z(M_2)=0$, $z(M_3)=6$.

2. Граница OB имеет уравнение $y=0$ при $x\in[0,3]$. На этой части границы $z=x^2-x$. Так как $z'=2x-1=0$ при $x=0,5$, то наименьшее и наибольшее значения функции могут быть в точке $M_4(0,5;0)$, а также в граничных точках $M_2(0;0)$ и $M_5(3;0)$. Вычислим значения функции в точках: $z(M_4)=-0,25$, $z(M_5)=6$.

3. Граница AB имеет уравнение $y=3-x$ при $x\in[0,3]$. На этой части границы $z=x^2+(3-x)^2-x(3-x)-x-(3-x)$ или после преобразования $z=3x^2-9x+6$. Так как $z'=6x-9=0$ при $x=1,5$, то наименьшее и наибольшее значения могут быть в точке $M_6(1,5;1,5)$ и в граничных точках $M_3(0;3)$ и $M_5(3;0)$. Вычислим $z(M_6)=-0,75$.

Следовательно, наибольшее значение функции $z_{\text{наиб}}=z(0;3)=z(3;0)=6$, а наименьшее $z_{\text{наим}}=z(1;1)=-1$.

Ответ. $z_{\text{наиб}}=z(0;3)=z(3;0)=6$, $z_{\text{наим}}=z(1;1)=-1$.

Задание 15. *Исследовать функцию* $z=10-5x-7y$ *на экстремум при условии* $x^2+y^2=16$.

Решение.

Будем решать задачу методом Лагранжа. Для этого составим функцию Лагранжа $L(x,y,\lambda)=10-5x-7y+\lambda\left(x^2+y^2-16\right)$.

Найдем стационарные точки этой функции, решив систему
$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial x}=0\\ \dfrac{\partial L}{\partial y}=0\\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda}=0\end{cases}$ в нашем случае $\begin{cases}-5+2x\lambda=0\\ -7+2y\lambda=0\\ x^2+y^2-16=0\end{cases}$. Выразив из первого и второго уравнения x и y, подставим их в третье уравнение. Найдем два зна-

чения множителя Лагранжа $\lambda_1 = \frac{\sqrt{74}}{8}$ и $\lambda_2 = -\frac{\sqrt{74}}{8}$ и соответствующие им стационарные точки $M_1\left(\frac{20}{\sqrt{74}};\frac{28}{\sqrt{74}};\frac{\sqrt{74}}{8}\right)$ и $M_2\left(-\frac{20}{\sqrt{74}};-\frac{28}{\sqrt{74}};-\frac{\sqrt{74}}{8}\right)$.

Определим наличие условного экстремума в соответствии с достаточными условиями. Составим определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \\ \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial z}{\partial y} & \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} \end{vmatrix}.$$ В нашем случае он имеет вид

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & -5 & -7 \\ -5 & 2\lambda & 0 \\ -7 & 0 & 2\lambda \end{vmatrix} = -98\lambda - 50\lambda = -148\lambda .$$

Так как при $\lambda_1 = \frac{\sqrt{74}}{8}$ определитель $\Delta = -148\lambda = -148 \cdot \frac{\sqrt{74}}{8} = -\frac{37\sqrt{74}}{2} < 0$, точка $N_1\left(\frac{20}{\sqrt{74}};\frac{28}{\sqrt{74}}\right)$ является точкой условного минимума. А при $\lambda_2 = -\frac{\sqrt{74}}{8}$ определитель $\Delta = -148\lambda = -148 \cdot \left(-\frac{\sqrt{74}}{8}\right) = \frac{37\sqrt{74}}{2} > 0$, точка $N_2\left(-\frac{20}{\sqrt{74}};-\frac{28}{\sqrt{74}}\right)$ является точкой условного максимума.

Ответ. $N_1\left(\frac{20}{\sqrt{74}};\frac{28}{\sqrt{74}}\right)$ – точка условного минимума, $N_2\left(-\frac{20}{\sqrt{74}};-\frac{28}{\sqrt{74}}\right)$ –точка условного максимума.

Задачи для типовых расчетов

Задание 10.

Вычислить все частные производные второго порядка для данной функции.

10.1	$u = z\sin(xy) + \dfrac{xy}{1-z}$	10.2	$u = \dfrac{xz}{y+2\sqrt{z}} - \ln(xy - z^2)$
10.3	$u = e^{x^2y - z^3} + \dfrac{1}{5}x^5y^6z^7$	10.4	$u = \sin^2(xy - z) + \dfrac{z-\sqrt{x}}{2y}$
10.5	$u = x^{y^2} + x^6y^7z^8$	10.6	$u = \cos^2(zxy) + z^{xy}$
10.7	$u = (\cos yx)^z - \dfrac{z^2}{x-y}$	10.8	$u = 2^{xzy} - \sin\left(\dfrac{\sqrt{x-y}}{z}\right)$
10.9	$u = xe^{zy} - \cos(x+y-z)$	10.10	$u = \cos^2\left(\sqrt{x} - yz\right) - x^{yz}$
10.11	$u = (\sin yz)^{x^2} - \dfrac{\sqrt{y-x}}{1-z}$	10.12	$u = \dfrac{1}{2}\sin^2(1 - xzy) + \dfrac{x}{y-3z}$

10.13 $u=\ln\left(xy-z^2\right)+\frac{1}{2}\sqrt{x-\sqrt{y-\sqrt{z}}}$

10.14 $u=\sqrt{x^2-y^3z^4}-4^{xyz}$

10.15 $u=\mathrm{tg}\left(\frac{x}{y+z}\right)+\sqrt{x^2-yz}$

10.16 $u=3\cos^2\left(xzy\right)-\frac{\sqrt{x}}{z-2y}$

10.17 $u=\frac{xy}{y-2z^2}-\sin\left(xy-z^2\right)$

10.18 $u=\left(\cos z\right)^{xy}-\frac{2}{5}\frac{\sqrt{y-x}}{z}$

10.19 $u=\left(\sin x\right)^{yz}+xy\sqrt{z}$

10.20 $u=z^{y^x}-\sqrt{\sin\left(y\sqrt{x}-z\right)}$

10.21 $u=\ln\left(x+y^2+z\right)+z^4x^5y^3$

10.22 $u=\frac{\mathrm{tg}\left(xy\right)}{1-x}-\frac{2z}{\sqrt{x}}$

10.23 $u=x^{yz}+y^{xy}+z^{xy}$

10.24 $u=2x^{\cos x}-\frac{\sqrt{y}-\sqrt[3]{x}}{3z}$

10.25 $u=\cos^2\left(xyz\right)-\frac{1}{5}\frac{z}{x-y}$

10.26 $u=x\cos\left(yz^2\right)-\frac{\sqrt{x-2z}}{\sqrt[5]{y}}$

10.27 $u=z^{x^y}+\sqrt{x-\sqrt{y-\sqrt{z}}}$

10.28 $u=z^2\sin\left(\frac{y}{x}\right)-\sqrt[3]{1-xy}$

10.29 $u=\sin^2(x+yz)+2^x3^y4^z$

10.30 $u=\frac{x-y^2}{3\sqrt{z}}-\cos^2\left(\frac{x}{y}\right)$

Задание 11.

Вычислить дифференциал второго порядка d^2u для данной функции.

11.1 $u=\left(x+y\right)e^{x+y}$

11.2 $u=\left(y-x\right)e^{\frac{y}{x}}$

11.3 $u=\frac{y}{x}+x^4\sqrt{y}$

11.4 $u=e^{x-y}\left(x-2y^2\right)$

11.5 $u=\left(x+2y\right)e^{x-y}$

11.6 $u=\cos^2\left(x-2y\right)$

11.7 $u=\frac{1}{3}\sin^2\left(xy\right)$

11.8 $u=e^{x^2+y^2}$

11.9 $u=e^{2x-3y}\left(x-4y\right)$

11.10 $u=\frac{x}{x-y}$

11.11 $u=y\ln\left(x+y\right)$

11.12 $u=\left(x-y\right)e^{x^2+3y}$

11.13 $u=\left(2x+y\right)\cos\left(xy\right)$

11.14 $u=\frac{y^2}{3x}$

11.15 $u=3xy\sin\left(x-y\right)$

11.16 $u=\cos\left(x-y\right)x$

11.17 $u=\cos\left(\frac{y}{x}\right)\left(x^2-y^2\right)$

11.18 $u=\frac{5x}{y^3}$

11.19 $u=\frac{2x}{y-1}$

11.20 $u=\sin^2\left(x-2y\right)$

11.21 $u=\left(x-y\right)e^{\frac{x}{y}}$

11.22 $u=e^{x-y}x$

11.23	$u=\sin\left(\frac{x}{y}\right)\left(x^2+y^2\right)$	11.24	$u=\left(x-2y\right)\sin\left(xy\right)$
11.25	$u=\left(x+y\right)e^{\frac{2y}{x}}$	11.26	$u=x^2e^{xy}$
11.27	$u=xy^6-\cos\left(x^4y^3\right)$	11.28	$u=\frac{y}{y-x}$
11.29	$u=\sin^2\left(3x+y\right)$	11.30	$u=\left(y-x\right)e^{x+7y^2}$

Задание 12.

Написать уравнение касательной плоскости и нормали к данной поверхности в точке M_0.

12.1	$z-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=0$, $M_0\left(1;1;\frac{\pi}{8}\right)$	12.2	$z=e^{\frac{x}{y}}+e^{\frac{x}{z}}-y$, $M_0\left(0;1;1\right)$
12.3	$z=y\cdot\operatorname{tg}\frac{x}{3}$, $M_0\left(\frac{3\pi}{4};3;3\right)$	12.4	$x^2+y^2-z^2=-1$, $M_0\left(2;2;3\right)$
12.5	$z=\sin x\cdot\cos y$, $M_0\left(\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4};\frac{1}{2}\right)$	12.6	$z=\operatorname{arctg}\frac{x}{y}$, $M_0\left(1;1;\frac{\pi}{4}\right)$
12.7	$z=e^x\cdot\cos y$, $M_0\left(1;\pi;-e\right)$	12.8	$z^2+4y+x^2=0$, $M_0\left(0;1;-4\right)$
12.9	$z=\sqrt[3]{4xz-y^2+4}$, $M_0\left(1;-2;2\right)$	12.10	$x^2+y^2+z^2=3$, $M_0\left(1;1;1\right)$
12.11	$z=y+\ln\frac{x}{y}$, $M_0\left(1;1;1\right)$	12.12	$x^2+y^2+z^2=169$, $M_0\left(3;4;12\right)$
12.13	$z=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$, $M_0\left(1;1;\frac{\pi}{4}\right)$	12.14	$z=x\cdot\operatorname{tg}\frac{y}{x}$, $M_0\left(1;\frac{\pi}{4};1\right)$
12.15	$z=\ln\left(x^2+y^2\right)$, $M_0\left(1;0;0\right)$	12.16	$z=x^2-2xy+y^2-x+2y$, $M_0\left(1;1;1\right)$
12.17	$x\left(y+z\right)\left(xy-z\right)=-8$, $M_0\left(2;1;3\right)$	12.18	$x^2+2y^2-3z^2+xy+yz-2xz+16=0$, $M_0\left(1;2;3\right)$
12.19	$z=x^2+y^2$, $M_0\left(1;2;5\right)$	12.20	$2x^2+y^2-z^2+xy-yz+2zx=2$, $M_0\left(1;0;0\right)$
12.21	$\frac{1}{3}\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)=1$, $M_0\left(1;1;1\right)$	12.22	$x\left(x-y\right)+y\left(x-z\right)+z\left(x+y\right)-2=0$, $M_0\left(1;0;1\right)$
12.23	$2^{\frac{x}{z}}+2^{\frac{y}{z}}=8$, $M_0\left(2;2;1\right)$	12.24	$x^2+y^2+xy-yz+z^2+xz=3$, $M_0\left(1;1;0\right)$

12.25 $z-2x+\ln\frac{y}{x}+1=0$, $M_0(1;1;1)$

12.26 $x^2+2y^2+3z^2+2xy+xz+4yz=6$, $M_0(1;0;1)$

12.27 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{16}=1$, $M_0(0;0;4)$

12.28 $x^2+y^2+z^2-xy=1$, $M_0(1;1;0)$

12.29 $z=1+x^2+y^2$, $M_0(1;1;3)$

12.30 $x^2+y^2-z^2+3xy+3yz-2xz=4$, $M_0(1;1;3)$

Задание 13.

Исследовать данную функцию двух переменных на экстремум.

13.1 $z=e^{x^2-y}(5-2x+y)$, $y>0, \quad x>0$

13.2 $z=y^2+x^2-xy+2x-y$

13.3 $z=xy^2(1-x-y)$

13.4 $z=e^{x-2y}(2x+y^2)$

13.5 $z=3x^2-x^3+3y^2+4y$

13.6 $z=y^2+3x^2+y-x$

13.7 $z=x^3+3xy^2-15x-12y$

13.8 $z=2x^2-x+(y+1)^2$

13.9 $z=2x^3-xy^2+5x^2+y^2$

13.10 $z=x^2y(2-x+y)$

13.11 $z=(2x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)}$

13.12 $z=2x^4+y^4-x^2-2y^2$

13.13 $z=x^3+8y^3-6xy+1$

13.14 $z=x^4+y^4-x^2-2xy-y^2$

13.15 $z=y\sqrt{x}-y^2-x+6y$

13.16 $z=x^2+xy+y^2-3x-6y$

13.17 $z=x^3+y^2-3xy$

13.18 $z=e^{2x+3y}(8x^2-6xy+3y^2)$

13.19 $z=(x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)}$

13.20 $z=x^2+y^2+(x+y-2)^2$

13.21 $z=1-\sqrt{x^2+y^2}$

13.22 $z=3x^2-2x\sqrt{y}+y-8x+8$

13.23 $z=3y^2+(2x-1)^2$

13.24 $z=xy\ln(x^2+y^2)$

13.25 $z=e^{x+2y}(x^2-xy+2y^2)$

13.26 $z=y^3-(x-4)^2$

13.27 $z=x^3+y^3-6xy$

13.28 $z=2x^3-xy^2+5x^2+y^2$

13.29 $z=y^2x^3(4-y-x)$

13.30 $z=yx^2(1+x+y)$

Задание 14.

Найти наибольшее и наименьшее значение функции двух переменных в заданной области.

14.1 $z=x^3+y^3-9xy+27$, $0\le x\le 4$, $0\le y\le 4$

14.2 $z=1-x-y$, $x^2+y^2\le 4$

14.3 $z=x^2+3y^2+x-y$, $x\ge 0$, $y\ge 0$, $x+y\le 1$

14.4 $z=x-x^2+y^2$, $x^2+y^2\le 9$

14.5 $z=x^2+y^2-12x+16y$, $x^2+y^2\le 25$

14.6 $z=5x-3y$, $y\ge x$, $y\ge -x$, $y\le 4$

14.7 $z=x^2+y^2+xy$, $|x|+|y|\le 1$

14.8 $z=2x^2+y^2+y$, $x^2+4y^2\le 4$

14.9 $z=4x^2+y^2-2y$, $|x|\le 1$, $0\le y-x\le 1$, $0\le x+y\le 1$

14.10 $z=\frac{1}{2}x^2-y^2+5x-y$, $0\le x\le 1$, $0\le y\le 1$

14.11 $z = xy - x - y$,
$x \ge 0$, $y \ge 0$, $x + y \le 3$

14.12 $z = 4 - 3x + 2y$,
$x^2 + y^2 \le 9$

14.13 $z = 3x + 4y - 2$,
$|x| \le 1$, $0 \le y - x \le 1$, $0 \le x + y \le 1$

14.14 $z = 2x^2 + 4y^2 - xy$,
$0 \le x \le 1$, $-1 \le y \le 0$

14.15 $z = 2x^2 - y^2$,
$x^2 + y^2 \le 16$

14.16 $z = x^2 - 2x + y^2 - 2y + 2$,
$x \ge 0$, $y \ge 0$, $3x + 4y \le 12$

14.17 $z = y^2 - x^2$,
$x^2 + y^2 \le 9$

14.18 $z = xy$,
$x^2 + y^2 \le 1$

14.19 $z = x^2 + y^2 - 3xy$,
$|x| + |y| \le 1$

14.20 $z = x^3 + y^3 - 3xy$,
$0 \le x \le 2$, $-1 \le y \le 2$

14.21 $z = x^2 - xy + y^2 - 4x$,
$x \ge 0$, $y \ge 0$, $2x + 3y - 12 \le 0$

14.22 $z = x^2 + 3y^2 + x - y$,
$x \ge 0$, $y \ge 0$, $x + y \le 1$

14.23 $z = x^2 - y^2$,
$|x| + |y| \le 2$

14.24 $z = x^2 y(4 - x - y)$, $x \ge 0$,
$y \le 0$, $x + y \le 6$

14.25 $z = x^2 + y^2 + 5xy$,
$x \ge 0$, $y \ge 0$, $0 \le x + y \le 3$

14.26 $z = xy + x + y$,
$1 \le x \le 2$, $2 \le y \le 3$

14.27 $z = 2y + x$,
$y \ge x^2$, $y - 2x \le 3$

14.28 $z = x^3 + y^3 - 3xy$,
$0 \le x \le 2$, $-1 \le y \le 2$

14.29 $z = y^2 - 2x^2$,
$x^2 + y^2 \ge 1$, $x^2 + y^2 \le 100$

14.30 $z = x^2 + 2xy - 4x + 8y$,
$0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 2$

Задание 15.

Исследовать данную функцию на условный экстремум методом множителей Лагранжа.

15.1 $z = 1 - x^2 - y^2$
при условии $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$

15.2 $z = x^2 + xy + y^2$
при условии $x^2 + y^2 = 1$

15.3 $z = x^2 + y^2 - xy + 1$
при условии $y = x^2 - 1$

15.4 $z = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$
при условии $x + y = 6$

15.5 $z = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$
при условии $x + y = 2$

15.6 $z = xy$
при условии $x^2 + y^2 = 1$

15.7 $z = x - y$
при условии $x^2 + y^2 = 1$

15.8 $z = 6 - 4x - 3y$
при условии $x^2 + y^2 = 1$

15.9 $z = xy^2$
при условии $x + 2y = 4$

15.10 $z = x^2 + y^2 - 12x + 16y$
при условии $x^2 + y^2 = 25$

15.11 $z = \dfrac{x - y - 4}{\sqrt{2}}$
при условии $x^2 + y^2 = 1$

15.12 $z = 2x + y$
при условии $x^2 + y^2 = 5$

15.13 $z = xy$
при условии $x + y = 1$

15.14 $z = 1 - 4x - 8y$
при условии $x^2 - 8y^2 = 8$

15.15 $z = x + 2y$
при условии $x^2 + y^2 = 5$

15.16 $z = xy^2$
при условии $x + 2y = 1$

15.17 $z = x^2 + y^2$
при условии $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$

15.18 $z = x + 2y$
при условии $x^2 + y^2 = 1$

15.19 $z = xy$
при условии $x^2 + y^2 = 8$

15.20 $z = x + y$
при условии $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{2}$

15.21 $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$
при условии $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{9}$

15.22 $z = x^2 + xy + y^2$
при условии $x^2 + y^2 = 1$

15.23 $z = x^2 + y^2 - xy + x + y - 4$
при условии $x + y + 3 = 0$

15.24 $z = 3 + 2xy$
при условии $x^2 + y^2 = 1$

15.25 $z = 1 - 4x - 8y$
при условии $x^2 - 8y^2 = 8$

15.26 $z = x^2 - y^2$
при условии $x^2 + y^2 = 2x$

15.27 $z = xy$
при условии $2x + 3y - 5 = 0$

15.28 $z = x^2 y$
при условии $x^2 + y^2 = 1$

15.29 $z = 10 - 5x - 7y$
при условии $x^2 + y^2 = 16$

15.30 $z = x^2 + 2xy - 10$
при условии $y = x^2 - 4$

Вопросы для самопроверки

1. Что называется частной производной функции нескольких аргументов по одному из аргументов?
2. Что такое смешанные частные производные?
3. Что называется полным дифференциалом функции двух аргументов?
4. Можно ли утверждать, что функция двух аргументов, имеющая в данной точке частные производные по обоим аргументам, непрерывна в этой точке?
5. На чем основано применение полного дифференциала в приближенных вычислениях?
6. Что такое локальный максимум (минимум) функции двух переменных?
7. Если $f'_x(x_0, y_0) = 0$, то можно ли утверждать, что (x_0, y_0) – точка экстремума для $f(x, y)$?
8. Что такое критическая (стационарная) точка для функции двух переменных?
9. В чем заключается достаточное условие экстремума для функции двух переменных?
10. Что такое условный экстремум функции двух переменных?

Приложение 1

Таблица эквивалентных бесконечно малых

$\sin x \sim x$ при $x \to 0$

$\operatorname{tg} x \sim x$ при $x \to 0$

$\arcsin x \sim x$ при $x \to 0$

$\operatorname{arctg} x \sim x$ при $x \to 0$

$1-\cos x \sim \frac{x^2}{2}$ при $x \to 0$

$e^x - 1 \sim x$ при $x \to 0$

$a^x - 1 \sim x \cdot \ln a$ при $x \to 0$

$\ln(1+x) \sim x$ при $x \to 0$

$\log_a(1+x) \sim x \cdot \log_a e$ при $x \to 0$

$(1+x)^k - 1 \sim k \cdot x$ при $x \to 0$, в частности $\sqrt{1+x} - 1 \sim \frac{x}{2}$ при $x \to 0$

Приложение 2

Правила дифференцирования

$$(cy)' = cy'$$

$$(y_1 + y_2)' = y_1' + y_2'$$

$$(y_1 \cdot y_2)' = y_1' \cdot y_2 + y_1 \cdot y_2'$$

$$\left(\frac{y_1}{y_2}\right)' = \frac{y_1' \cdot y_2 - y_1 \cdot y'}{y_2^2}$$

Таблица производных

$(x^n)' = nx^{n-1}$, в частности $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$(a^x)' = a^x \ln a$, в частности $(e^x)' = e^x$

$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$, в частности $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1 + x^2}$$

$$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1 + x^2}$$

НИУ ИТМО стал победителем конкурса инновационных образовательных программ вузов России на 2007–2008 годы и успешно реализовал инновационную образовательную программу «Инновационная система подготовки специалистов нового поколения в области информационных и оптических технологий», что позволило выйти на качественно новый уровень подготовки выпускников и удовлетворять возрастающий спрос на специалистов в информационной, оптической и других высокотехнологичных отраслях науки. Реализация этой программы создала основу формирования программы дальнейшего развития вуза до 2015 года, включая внедрение современной модели образования.

КАФЕДРА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Кафедра высшей математики (ВМ) была организована в 1931 году. Первым заведующим кафедрой был профессор Г.Д. Гродский. С конца 1936 года кафедрой ВМ заведовал профессор И.П. Натансон, известный специалист по теории функций действительной переменной. В 1944 году заведующим кафедрой ВМ становится профессор В.А. Тартаковский (1901-1973), замечательный математик и педагог. Владимир Абрамович Тартаковский является одним из крупнейших советских алгебраистов. Им получены пользующиеся мировой известностью результаты по проблеме тождества в теории бесконечных групп. Известность получили также его работы по использованию теоретико-числовых методов в теории изгибания поверхностей, теории диофантовых уравнений.

Обладая исключительной энергией, В.А. Тартаковский уделял много внимания научной и общественной работе. Ещё в тридцатые годы он в составе комиссии Наркомпроса участвовал в разработке программы по математике для средней школы. В течение долгого времени был членом президиума учебно-методического совета при Министерстве высшего и среднего специального образования СССР, входил в комиссию по реформе математического образования в стране. Был одним из инициаторов проведения среди школьников Ленинграда первой математической олимпиады. В.А. Тартаковский участвовал в организации Ленинградского отделения математического института им. В.А. Стеклова и был первым его директором.

В разное время на кафедре ВМ преподавали академик В.И. Смирнов, член-корреспонпент АН АН СССР Д.К. Фаддеев, проф. И.С. Соминский, проф. Ф.И. Харшиладзе, проф. А.Ф. Андреев, проф. Ю.В. Аленицын, проф. И.А. Молотков. В 1979 году кафедру возглавил доктор технических наук, профессор В.Г. Дегтярёв, специалист по теории устойчивости и теории движения космических аппаратов. С 1997 года кафедрой руководит доктор физико-математических наук, профессор И.Ю. Попов, в область научных интересов которого входят теория рассеяния, теория операторов, моделирование сложных физических систем.

Кафедра ВМ осуществляет обучение студентов всех специальностей университета по дисциплине "Высшая математика" и читает ряд специальных дисциплин математического цикла. Кафедра ведет подготовку бакалавров и магистров по направлению "Прикладная математика и информатика". Кафедра ВМ является самой большой кафедрой в университете по числу преподавателей. Среди её сотрудников 8 докторов и 19 кандидатов наук. Преподаватели кафедры активно участвуют как в фундаментальных исследованиях по математике и теоретической физике, так и в прикладных научно-технических исследованиях, принимают активное участие в работе российских и международных научных конференций, выступают с докладами и преподают за рубежом. За последние 5 лет сотрудниками кафедры опубликовано более 300 работ в отечественных и зарубежных научных изданиях. Областью научных интересов профессора А.Г.Петрашеня является теория взаимодействия излучения с веществом, оптика и спектроскопия. Профессор В.П. Смирнов – специалист по теории твёрдого тела и применению теории групп в квантовой механике. Профессор Жук В.В. – один из ведущих в мире ученых в области дифференциальных уравнений. Профессор В.Ю. Тертычный занимается теорией оптимального управления механическими системами. Профессор Уздин В.М. является известным специалистом в физике магнитных наносистем. Профессор Мирошниченко Г.П. активно занимается изучением взаимодействия излучения с веществом. Область научных интересов профессора Качалова А.П. – современные методы теории дифракции.

Светлана Николаевна Кузнецова
Марина Владимировна Лукина
Екатерина Воиславовна Милованович
Юлия Валерьевна Танченко

ТИПОВЫЕ РАСЧЕТЫ
для гуманитарных специальностей
I курс (Математический анализ)

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Методические указания и задачи для студентов

В авторской редакции
Дизайн М.В. Лукина
Верстка М.В. Лукина
Редакционно-издательский отдел Санкт-Петербургского государственного университета информационных технологий, механики и оптики
Зав. РИО Н.Ф. Гусарова
Лицензия ИД № 00408 от 05.11.99
Подписано к печати 20.10.2009
Заказ № 2150
Тираж 500
Отпечатано на ризографе

Редакционно-издательский отдел
Санкт-Петербургского государственного университета информационных технологий, механики и оптики
197101, Санкт-Петербург, Кронверкский пр., 49

ИТМО
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ