$\boxed{\mathrm{X}}$

Геометрические векторы

$\boxed{1}$ Дан треугольник ABC: $A(5,7)$, $B(-1,10)$, $C(8,-3)$. На стороне AB взята точка D так, что $AD : DB = 2 : 3$, на отрезке CD взята точка E так, что $CE : ED = 5 : 2$. Найдите координаты точки E.

$\boxed{2}$ Даны вершины треугольника ABC: $A(1,-1,2)$, $B(0,3,-2)$, $C(1,2,0)$. Найдите $\angle C$, проекцию $\overline{AB}$ на $\overline{AC}$, длину высоты BD, опущенной из вершины B.

$\boxed{3}$ На ребрах произвольного тетраэдра указали направления. Может ли сумма полученных таким образом шести векторов оказаться равной нулевому вектору?

$\boxed{4}$ Можно ли расположить на плоскости три вектора так, чтобы модуль суммы каждых двух из них был равен 1, а сумма всех трёх была равна нулевому вектору?

$\boxed{5}$ Дан вектор $\overline{a} = 2\overline{m} - \overline{n}$, где $\overline{m}$ и $\overline{n}$ — единичные векторы, угол между которыми $120°$. Найдите углы между векторам $\overline{a}$ и $\overline{n}$, $\overline{a}$ и $\overline{m}$.

$\boxed{6}$ При каком значении параметра α векторы $\overline{a} = \alpha\overline{i} - 3\overline{j} + 2\overline{k}$ и $\overline{b} = \overline{i} + 2\overline{j} - \alpha\overline{k}$ ортогональны?

$\boxed{7}$ Найдите проекции вектора $\overline{a} = (4,-3,2)$ на ось, составляющую с координатными осями равные острые углы.

$\boxed{8}$ Даны векторы $\overline{a} = (3,-1,5)$ и $\overline{b} = (1,2,-3)$. Найдите вектор $\overline{m}$, если $\overline{m} \perp Oz$, $\overline{m}\,\overline{a} = 9$, $\overline{m}\,\overline{b} = -4$.

$\boxed{9}$ В плоскости xOz найдите вектор, ортогональный вектору $(5,-3,4)$, и имеющий одинаковую с ним длину.

$\boxed{10}$ В квадратной матрице векторы-столбцы попарно ортогональны. Докажите, что модуль её определителя равен произведению длин её векторов-столбцов

$\boxed{11}$ Найдите угол между диагоналями смежных граней куба.

$\boxed{12^*}$ Непересекающиеся диагонали двух смежных боковых граней прямоугольного параллелепипеда наклонены к плоскости его основания под углами α и β. Найдите угол между этими диагоналями.

$\boxed{13}$ Единичные векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ удовлетворяют условию $\overline{a} + \overline{b} + \overline{c} = 0$. Вычислите $\overline{a}\,\overline{b} + \overline{b}\,\overline{c} + \overline{c}\,\overline{a}$.

$\boxed{14}$ Найдите угол между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a}$ и $\overline{b}$, если $|\overline{a}| = 2$, $|\overline{a}| = 1$, $\angle\,\overline{a}, \overline{b} = \frac{\pi}{3}$.

$\boxed{15}$ Какой угол образуют единичные векторы $\overline{p}$ и $\overline{q}$, если векторы $\overline{a} = \overline{p} + 2\overline{q}$, $\overline{b} = 5\overline{p} - 4\overline{q}$ перпендикулярны?

$\boxed{16^*}$ а) Чему равен наибольший угол между векторами (x, y, z) и (y, z, x)? б) Чему равен наименьший угол между векторами $(1 - 5x, 1, 3)$ и $(-1, 1 + 4x, 3 - 3x)$?

$\boxed{17}$ Найдите площадь треугольника ABC: $A(1, 2, 3)$, $B(3, 2, 2)$, $C(1, -1, 0)$. Вычислите длину высоты, опущенной из вершины A.

$\boxed{18}$ Вычислите площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a} = 2\overline{m} + \overline{n}$, $\overline{b} = \overline{m} - \overline{n}$, где $|\overline{m}| = 3$, $|\overline{n}| = 1$, $\angle \overline{m}, \overline{n} = \dfrac{2\pi}{3}$.

$\boxed{19}$ Зная две стороны треугольника ABC: $\overline{AB} = 3\overline{p} - 4\overline{q}$, $\overline{BC} = \overline{p} + 5\overline{q}$, вычислите длину его высоты CD, если $|\overline{p}| = 2$, $|\overline{q}| = 3$, $\angle \overline{p}, \overline{q} = \dfrac{\pi}{3}$.

$\boxed{20}$ Вектор $\overline{m}$ перпендикулярен векторам $\overline{a} = (4, -2, -3)$ и $\overline{b} = (0, 1, 3)$ и образует с осью Oy тупой угол. $|\overline{m}| = 26$, Найдите координаты вектора $\overline{m}$.

$\boxed{21}$ Вычислите площадь параллелограмма, диагонали которого определяют векторы $\overline{d_1} = 3\overline{m} + \overline{n}$, $\overline{d_2} = \overline{m} - 5\overline{n}$, если $|\overline{m}| = |\overline{n}| = 1$, $\angle \overline{m}, \overline{n} = \dfrac{\pi}{4}$.

$\boxed{22}$ Проверьте, лежат ли точки $A(2, -3, 4)$, $B(2, 3, -4)$, $C(-2, 3, 4)$, $D(2, 3, 4)$ в одной плоскости. Если нет, найдите объем тетраэдра $ABCD$.

$\boxed{23}$ Дана пирамида $OABC$: $O(0, 0, 0)$, $A(5, 2, 0)$, $B(2, 5, 0)$, $C(1, 2, 4)$. Вычислите её объём, площадь грани ABC и высоту пирамиды, опущенную на эту грань.

$\boxed{24}$ Объём тетраэдра $ABCD$ равен 5. $A(2, 1, -1)$, $B(3, 0, 1)$, $C(2, -1, 3)$. Найдите координаты вершины D, если она лежит на оси Oy.

$\boxed{25^*}$ Для заданных векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ укажите критерий разрешимости уравнения $\overline{a} \times \overline{x} = \overline{b}$. Найдите общее решение этого уравнения.

$\boxed{26^*}$ Решите уравнение $\overline{x} = \overline{a} \times (\overline{x} + \overline{b})$.

$\boxed{27^*}$ Даны векторы $\overline{b} = \overline{i} + 2\overline{j} + 3\overline{k}$ и $\overline{c} = 2\overline{i} + 3\overline{j} + \overline{k}$. Найдите все векторы $\overline{a}$, для которых система уравнений $\begin{cases} \overline{a} \times \overline{x} &= \overline{b} \\ \overline{a} \times \overline{y} &= \overline{c} \end{cases}$ имеет хотя бы одно решение.

$\boxed{28^*}$ а) Найдите наибольшее значение $|\overline{x} \times \overline{a} + \overline{x}|$, если $|\overline{x}| = 1$ и $\overline{a}$ — фиксированный вектор; б) Найдите наибольшее значение $|\overline{x} \times \overline{a} + (\overline{x}\,\overline{a})\overline{x}|$, если $|\overline{x}| = 2$ и $\overline{a}$ — фиксированный вектор.

$\boxed{29^*}$ Каково наибольшее возможное число лучей в пространстве, выходящих из одной точки и образующих попарно тупые углы?

$\boxed{30^*}$ Дано восемь вещественных чисел a, b, c, d, e, f, g, h. Докажите, что хотя бы одно из шести чисел $ac+bd$, $ae+bf$, $ag+bh$, $ce+df$, $cg+dh$, $eg+fh$ неотрицательно.

$\boxed{31^*}$ Хорды AC и BD окружности с центром O пересекаются в точке K. Пусть M и N — центры окружностей описанных около треугольников AKB и CKD. Докажите, что $OM = KN$.

$\boxed{32^*}$ Внутри правильного n-угольника взята точка. Все её проекции на стороны попали во внутренние точки сторон и (вместе с вершинами) разбили периметр на $2n$ отрезков. Докажите, что сумма длин отрезков через один равна полупериметру этого n-угольника.

$\boxed{33^*}$ Докажите, что в выпуклом n-угольнике сумма расстояний от любой внутренней точки до сторон постоянна тогда и только тогда, когда сумма векторов единичных внешних нормалей равна нулю.

$\boxed{34^*}$ Докажите, что если векторы $\overline{a} \times \overline{b}$, $\overline{b} \times \overline{c}$, $\overline{c} \times \overline{a}$ компланарны, то они коллинеарны.

$\boxed{35^*}$ Пусть $\overline{a}$ и $\overline{b}$ — трёхмерные векторы, для которых $\overline{a}\,\overline{b} \neq 0$. Решите уравнение $\overline{a} \times (\overline{x} \times \overline{b}) = \overline{a}(\overline{x}\overline{b})$.

$\boxed{36^*}$ Даны неперпендикулярные векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$, причём $|\overline{a}| = 1$. Рассмотрим последовательность $\overline{x}_1 = \overline{a} \times \overline{b}$, $\overline{x}_2 = \overline{a} \times \overline{x}_1$, …, $\overline{x}_n = \overline{a} \times \overline{x}_{n-1}$, … Докажите, что эта последовательность является периодической.