$\boxed{\text{XII}}$

Кривые второго порядка

$\boxed{1}$ Постройте кривые в изначальной системе координат, найдите фокусы, директрисы и эксцентриситет:

а) $5x^2 + 9y^2 - 30x + 18y + 9 = 0$;

б) $4x^2 - 9y^2 - 24x - 36y - 36 = 0$

в) $25x^2 - 50x + 4y^2 + 16y - 59 = 0$;

г) $4x^2 - 8x - y + 7 = 0$;

д) $25x^2 - 50x - 4y^2 - 16y + 66 = 0$.

$\boxed{2}$ Дана вершины параболы $A(6, -3)$ и уравнение директрисы $3x - 5y + 1 = 0$. Найдите параметр параболы и её фокус.

$\boxed{3}$ Точка $A(2, -1)$ принадлежит эллипсу, точка $F(1, 0)$ является его фокусом, соответствующая F директриса задана уравнением $2x - y - 10 = 0$. Составьте уравнение этого эллипса.

$\boxed{4}$ Определите тип и составьте каноническое уравнение кривой:

а) $2x^2 - 4xy + 5y^2 + 8x - 2y + 9 = 0$;

б) $4xy - 3y^2 - 4x + 10y - 6 = 0$;

в) $9x^2 - 24xy + 16y^2 - 8x + 19y + 4 = 0$;

г) $4x^2 + 12xy + 9y^2 - 8x - 12y - 5 = 0$;

д) $15x^2 + 24xy + 15y^2 + 30x + 24y + 20 = 0$;

е) $15x^2 - 16xy - 15y^2 - 62x - 44y - 13 = 0$.

$\boxed{5^*}$ Какое наибольшее число рациональных точек может располагаться на окружности на плоскости, центр которой не является рациональной точкой? Точка на плоскости называется рациональной, если рациональными являются обе её координаты.

$\boxed{6^*}$ Найдите выпуклый многоугольник минимальной площади, который пересекается с обеими ветвями гиперболы $xy = 1$ и с обеими ветвями гиперболы $xy = -1$.

$\boxed{7^*}$ На круглом острове вырыли круглый пруд. Центры этих кругов не совпадают. Какую форму имеет дорожка, равноудалённая от берегов острова и пруда?

$\boxed{8^*}$ На плоскости даны две точки A и B, а третья точка X движется так, что угол XAB вдвое меньше угла XBA. Какую линию описывает точка X?

$\boxed{9^*}$ По концентрическим окружностям с одной и той же угловой скоростью, но в противоположных направлениях вращаются точки M_1 и M_2. Определите, какую кривую описывает середина отрезка M_1M_2.

$\boxed{10^*}$ Прямая пересекает гиперболу в точках M_1 и M_2, а её асимптоты — в точках N_1 и N_2. Докажите, что середины отрезков M_1M_2 и N_1N_2 совпадают.

$\boxed{11^*}$ На плоскости задан эллипс и две точки N_1 и N_2. Докажите, что на эллипсе найдутся две точки M_1 и M_2, симметричные относительно центра эллипса, для которых $|M_1N_1|^2 + |M_1N_2|^2 = |M_2N_1|^2 + |M_2N_2|^2$.

Аффинные пространства

$\boxed{12}$ Составьте параметрическое уравнение двумерной плоскости, проходящей через три точки: $A_1(-3, 1, 2, -2, -4)$, $A_2(-1, 5, 4, 1, -4)$, $A_3(3, 5, -5, 5, -1)$. Найдите систему линейных уравнений, задающую эту плоскость.

$\boxed{13}$ Найдите аффинную оболочку системы точек $(-1, 1, 0, 1)$, $(0, 0, 2, 0)$, $(-3, -1, 5, 4)$, $(2, 2, -3, -3)$.

$\boxed{14}$ Найдите аффинную оболочку объединения двух аффинных подпространств:

$$\Pi_1 : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 3 \\ 5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}; \ \Pi_2 : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 2 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 7 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{15}$ Исследуйте взаимное расположение двух трёхмерных плоскости в пространстве $\mathbb{R}^n$ при $n \geqslant 6$.

$\boxed{16}$ Определите взаимное расположение двух плоскостей:

$$\Pi_1 : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle; \ \Pi_2 : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -4 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 8 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

$\boxed{17^*}$ Используя барицентрические координаты, докажите *терему Чевы*: Пусть точки x, y, z лежащие на сторонах bc, ac, ab треугольника abc или их продолжениях, делят их в отношениях $\lambda : 1$, $\mu : 1$, $\nu : 1$ соответственно. Прямые ax, by и cz пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда $\lambda\mu\nu = 1$.

$\boxed{18^*}$ Докажите, что точки $p_0, p_1, \ldots, p_k$ аффинно независимы тогда и только тогда, когда ранг матрицы, составленной из их барицентрических координат, равен $k+1$.

$\boxed{19^*}$ Используя барицентрические координаты и результат задачи 18, докажите *теорему Менелая*: в обозначениях задачи 17, прямые ax, by и cz лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда $\lambda\mu\nu = -1$.

$\boxed{20^*}$ На стороне AB треугольника ABC отмечена точка M так, что $AM : MB = 2$, а на стороне BC – точка N так, что $BN : NC = 2$. X — точка пересечения отрезков CM и AN. Найдите $AX : XN$ и $CX : XM$.