2.55. $y=\left[\log_{1/2} x^2\right]$;

2.56. $y=\sin^2 x-1$;

2.57. $y=\cos^2 x+\sin 2x$;

2.58. $y=x+\sin x$;

2.59. $y=x\cdot\sin x$;

2.60. $y=\dfrac{\sin x}{x}$;

2.61. $y=3\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)-2$;

2.62. $y=\left|3\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)-2\right|$;

2.63. $y=3\sin\left(2|x|+\dfrac{\pi}{3}\right)-2$;

2.64. $y=3\left|\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)\right|-2$;

2.65. $y=3\sin\left|\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)\right|-2$;

2.66. $y=x+\operatorname{sign}\sin x$;

2.67. $y=\arcsin\dfrac{1}{x}$;

2.68. $y=\arccos(\cos x)$;

2.69. $y=\arccos|\cos x|$;

2.70. $y=\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$;

2.71. $y=\operatorname{arctg}\dfrac{x+1}{x+2}$;

2.72. $y=\operatorname{arctg}\dfrac{2x}{1-x^2}$;

2.73. $y=\arccos\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$;

2.74. $y=\dfrac{1}{\operatorname{arctg}\left||x|-1\right|}$;

2.75. $y=\operatorname{arctg}\left(x-[x]\right)$;

2.76. $y=\operatorname{arctg} x-[\operatorname{arctg} x]$;

2.77. $y=\dfrac{2^{1/x}}{1+2^{1/x}}$;

2.78. $y=[1/x]$;

2.79. $y=\operatorname{sign}\left(x^3-4x\right)$;

2.80. $y=\operatorname{sign}\dfrac{2-x}{2+x}$;

2.81. $y=\max\left(x^3, 1/x\right)$;

2.82. $y=\min(\cos x,\cos 2x)$.

2.3 Полярные координаты

Кроме декартовых координат используют и другие координаты точки на плоскости или в пространстве. В частности, на плоскости часто пользуются полярными координатами.

Будем говорить, что на плоскости заданы ***полярные координаты***, если заданы

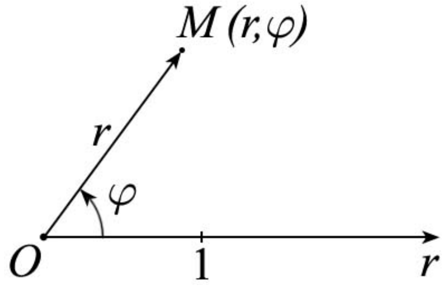
1) точка O, называемая ***полюс***;
2) луч с началом в этой точке, называемый ***полярной полуосью***;
3) отрезок, длина которого объявляется равной единице;
4) направление вращения полярной полуоси вокруг полюса.

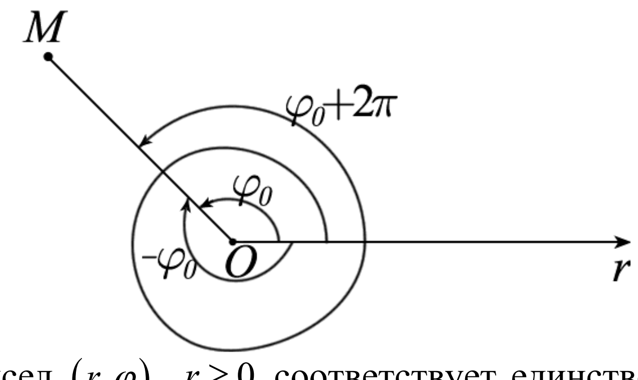
Тогда каждой точке плоскости M можно сопоставить два числа (см. рис.):

r - длина вектора $\overrightarrow{OM}$ - ***радиус*** и

φ - угол между вектором $\overrightarrow{OM}$ и полярной полуосью – ***полярный угол*** (положительный, если он отсчитывается в направлении вращения полуоси и отрицательный, если против).

Числа r и φ, соответствующие данной точке, будем называть ***полярными координатами*** этой точки.

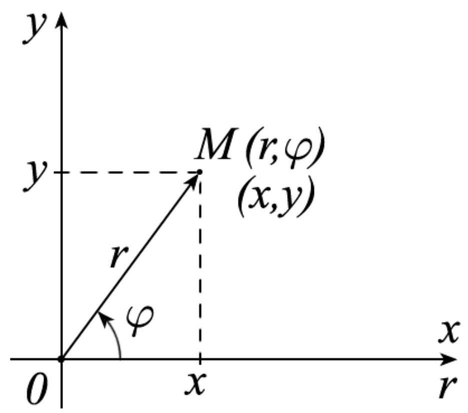




Очевидно, что каждой паре чисел (r,φ), $r \geq 0$ соответствует единственная точка на плоскости, но каждой точке можно сопоставить бесконечное множество углов вида $\{\varphi_0 + 2\pi n,\, n \in \mathbb{N}\}$, где φ_0 - какой-нибудь угол, соответствующий данной точке. Иногда для взаимной однозначности соответствия точек плоскости и пар полярных координат (r,φ) полагают, что φ лежит в пределах одного оборота полярной полуоси, например, что $0 \leq \varphi < 2\pi$ или $-\pi < \varphi \leq \pi$.

Часто на одной и той же плоскости вводят полярную и декартову системы координат, где начало декартовой системы совпадает с полюсом, положительная полуось OX совпадает с полярной полуосью и совпадают единицы длины и направление отсчета угла. Такие системы будем называть ***согласованными системами***. Для каждой точки плоскости существуют две пары координат (x,y) и (r,φ), между которыми существует очевидная зависимость:

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \operatorname{tg}\varphi = y/x, \end{cases} \qquad \text{или} \qquad \begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi. \end{cases}$$



Пример 2.17. На плоскости заданы согласованные полярная и декартова системы координат. Найти полярные координаты точек, если известны их декартовы координаты. (Считать, что $-\pi < \varphi \leq \pi$).

a) $A(2,2)$; **b)** $B(5,0)$; **c)** $C(-5,0)$; **d)** $D(0,0)$; **e)** $E\left(-1,\sqrt{3}\right)$; **f)** $F(-3,-4)$.

☺ **a)** Вычислим радиус и тангенс полярного угла:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}, \quad \operatorname{tg}\varphi = y/x = 1.$$

Так как точка A находится в первой четверти, то $\varphi = \pi/4$. Таким образом, полярные координаты точки A будут $\left(2\sqrt{2}, \pi/4\right)$.

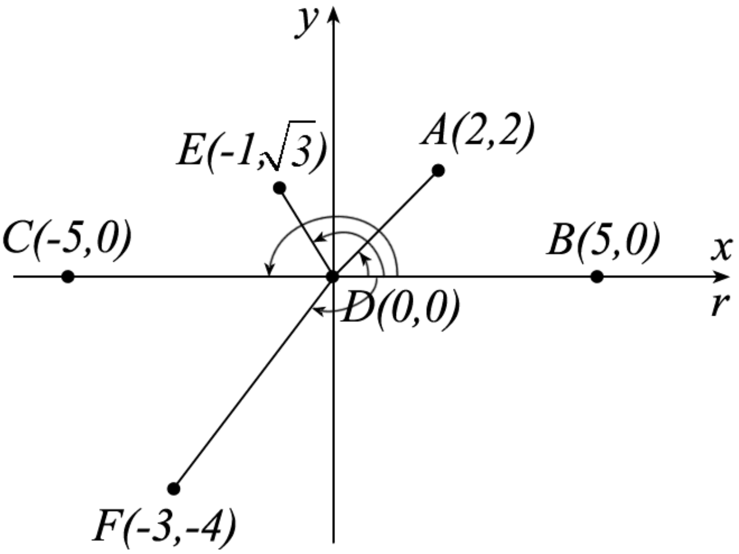
b) Здесь можно использовать графические соображения: длина вектора $\overrightarrow{OB}$ равна 5 и угол, который составляет вектор с полярной полуосью, равен нулю, поэтому полярные координаты точки $B(5,0)$.

c) Аналогично, используя графические соображения, получим $C(5,\pi)$.

d) Длина вектора $\overrightarrow{OD}$ равна нулю. Что касается угла, то угол в данной ситуации не определен. Будем считать, что этой точке соответствует любой угол.

e) $r=\sqrt{1+3}=2$, $\operatorname{tg}\varphi = y/x = -\sqrt{3}$. Так как точка E находится во второй четверти, то $\varphi = 2\pi/3$.

f) $r=\sqrt{9+16}=5$, $\operatorname{tg}\varphi = 4/3$. Так как точка F находится в третьей четверти, то $\varphi = \operatorname{arctg}\dfrac{4}{3}-\pi$. (см. рис.) ☻



Пример 2.18. На плоскости заданы согласованные полярная и декартова системы координат. Найти декартовы координаты точек, если известны их полярные координаты. **a)** $M\left(2,{}^{\pi}\!/_{6}\right)$; **b)** $N\left(4,-{}^{5\pi}\!/_{6}\right)$.

☺ **a)** Координаты вычисляем по формулам: $x=r\cos\varphi = 2\cos\dfrac{\pi}{6}=\sqrt{3}$,

$y=r\sin\varphi = 2\sin\dfrac{\pi}{6}=1$.

b) Аналогично $x=r\cos\varphi=4\cos\left(-\dfrac{5\pi}{6}\right)=-2\sqrt{3}$ и $y=r\sin\varphi=4\sin\left(-\dfrac{5\pi}{6}\right)=-2.$ ☻

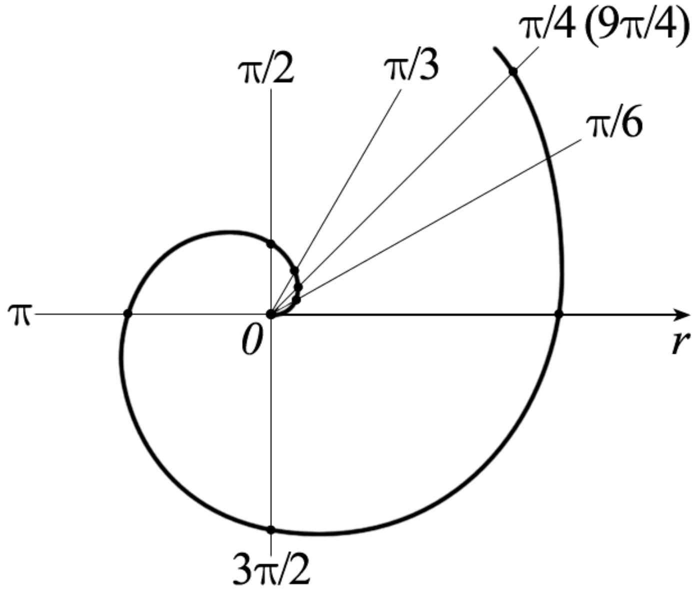
Функция $r=r(\varphi)$ задает кривую на плоскости. Рассмотрим несколько примеров построения таких кривых.

Пример 2.19. Построить кривую $r=2\varphi$ (спираль Архимеда).

☺ Заметим, что в силу определения $r\ge 0$, поэтому аргумент φ изменяется на промежутке $[0,+\infty)$, т.е. вращение полярной полуоси происходит только в положительном направлении и при этом радиус точки возрастает с ростом угла φ. Вычислим координаты нескольких точек:

φ	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π	$9\pi/4$
r	0	$\pi/3\approx 1$	$\pi/2\approx 1{,}5$	$2\pi/3\approx 2$	$\pi\approx 3$	$2\pi\approx 6$	$3\pi\approx 9{,}4$	$4\pi\approx 12{,}5$	$9\pi/2\approx 14$

Теперь по этим точкам строим кривую. ☻



Пример 2.20. Построить кривую $r=\sin 3\varphi$ (Трехлепестковая роза).

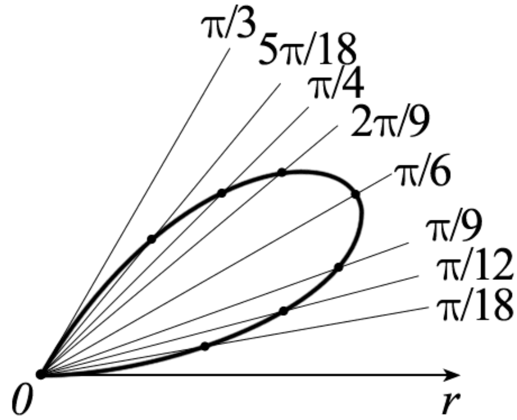
☺ Из условия $r \geq 0$ следует, что кривая определена в секторах $0 \leq \varphi \leq \pi/3$, $2\pi/3 \leq \varphi \leq \pi$ и $4\pi/3 \leq \varphi \leq 5\pi/3$, причем, очевидно, что в каждом секторе кривая выглядит одинаково, поэтому достаточно построить ее только в одном секторе.

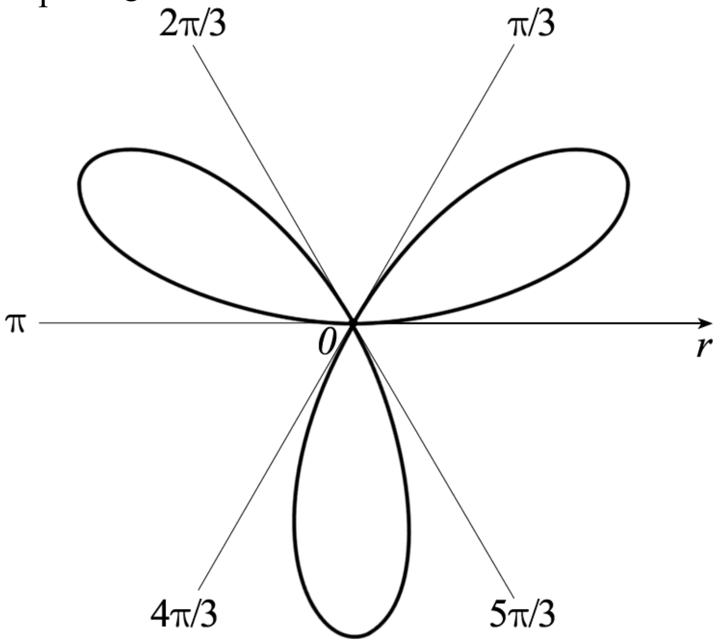
Составим таблицу значений радиуса для углов, находящихся в первом секторе.

φ	0	$\pi/18$	$\pi/12$	$\pi/9$	$\pi/6$	$2\pi/9$	$\pi/4$	$5\pi/18$	$\pi/3$
r	0	0,5	$\sqrt{2}/2 \approx 0{,}7$	$\sqrt{3}/2 \approx 0{,}9$	1	$\sqrt{3}/2 \approx 0{,}9$	$\sqrt{2}/2 \approx 0{,}7$	0,5	0

По этим точкам построим кривую. Лучи $\varphi=0$ и $\varphi=\pi/3$ являются касательными к кривой.

Достроим ее в остальных секторах. ☻





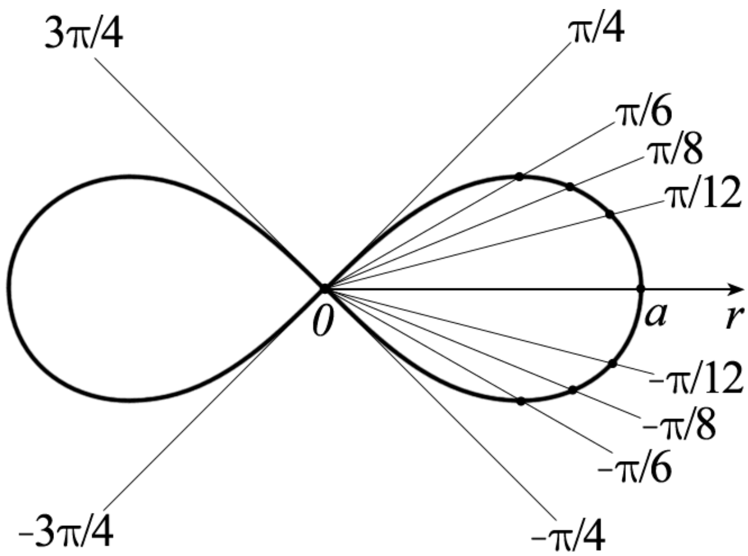
Пример 2.21. Построить кривую $\left(x^2+y^2\right)^2=a^2\left(x^2-y^2\right),\ a>0$, перейдя к полярным координатам. (Лемниската Бернулли).

☺ Положим $x=r\cos\varphi, y=r\sin\varphi$. Тогда уравнение кривой примет вид $r^4=a^2r^2\cos 2\varphi$ или $r=a\sqrt{\cos 2\varphi}$. Кривая определена в секторах $-\pi/4\le\varphi\le\pi/4$ и $3\pi/4\le\varphi\le 5\pi/4$, причем, как и в предыдущем примере, она одинаково выглядит в каждом из этих секторов.

Составим таблицу значений в секторе $-\pi/4\le\varphi\le\pi/4$:

φ	$-\pi/4$	$-\pi/6$	$-\pi/8$	$-\pi/12$	0	$\pi/12$	$\pi/8$	$\pi/6$	$\pi/4$
r	0	$a/\sqrt{2}$	$a/\sqrt[4]{2}$	$a\sqrt[4]{3}/\sqrt{2}$	a	$a\sqrt[4]{3}/\sqrt{2}$	$a/\sqrt[4]{2}$	$a/\sqrt{2}$	0

Теперь кривую можно построить. ☻



Пример 2.22. Построить кривую $x^4+y^4=x^2+y^2$, перейдя к полярным координатам.

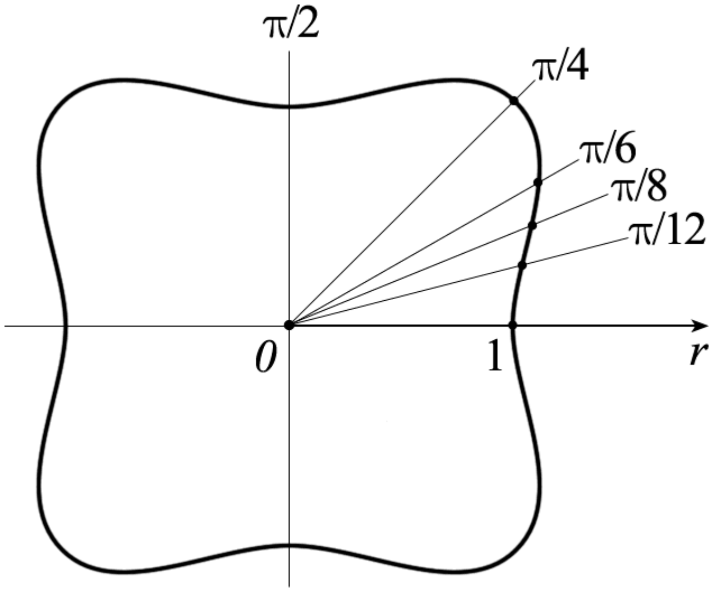
☺ Полагая, $x=r\cos\varphi,\ y=r\sin\varphi$, получим

$$r=\frac{1}{\sqrt{\cos^4\varphi+\sin^4\varphi}}=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2 2\varphi}}.$$

Очевидно, что r существует для любого значения φ и период данной функции равен $\pi/2$. Кроме того, заметим, что график функции $\sin^2 2\varphi$ будет симметричен относительно прямой $\varphi=\pi/4$. Поэтому достаточно проследить изменение радиуса в промежутке от нуля до $\pi/4$:

φ	0	$\pi/12$	$\pi/8$	$\pi/6$	$\pi/4$
r	1	$\sqrt{8/7}\approx 1{,}07$	$\sqrt{4/3}\approx 1{,}16$	$\sqrt{8/5}\approx 1{,}27$	$\sqrt{2}\approx 1{,}41$

Теперь строим кривую в секторе от нуля до $\pi/4$, отображаем ее симметрично относительно луча $\varphi = \pi/4$ и поворачиваем полученную кривую на угол $\pi/2$ три раза, пока не получим замкнутую кривую.



Упражнения

2.83. Построить точки в полярной системе координат и найти их согласованные декартовы координаты:

a) $A(1,\pi/4)$; **b)** $B(2,-\pi/3)$; **c)** $C(\sqrt{2},3\pi/4)$; **d)** $D(3,7\pi/6)$; **e)** $E(7,-\pi)$; **f)** $F(2,7\pi/2)$; **g)** $G(6,0)$; **h)** $H(0,\sqrt{\pi})$; **i)** $I(2,-\pi/2)$.

2.84. Найти полярные координаты точек, заданных в согласованной декартовой системе:

a) $A(3,4)$; **b)** $B(-4,3)$; **c)** $C(0,-2)$; **d)** $D(-\sqrt{2},-\sqrt{2})$; **e)** $E(1,-\sqrt{3})$; **f)** $F(-1,0)$; **g)** $G(-\sqrt{6},\sqrt{2})$; **h)** $H(-1,-2)$; **i)** $I(2,-1)$.

2.85. Нарисовать кривую, заданную в полярных координатах

a) $r=1$; **b)** $r=\cos 3\varphi$; **c)** $r=e^{\varphi}$; **d)** $r=\pi/\varphi$; **e)** $r=1+\cos\varphi$; **f)** $r=\cos 4\varphi$; **g)** $r=|\sin 2\varphi|$; **h)** $r=\varphi^2-\pi^2$; **i)** $r=a\sqrt{\varphi}$; **j)** $\varphi=(r-1)^2$.

2.86. Записать в полярных координатах уравнения, задающие следующие множества точек:

a) окружность с центром в полюсе;

b) прямая, проходящая через полюс;

c) окружность, проходящая через полюс, с центром на полярной полуоси;