Seriler

*Tanım: $a_k \to$ dizisinin terimlerinin $k \in N^+$

$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + - + a_n$

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$

$$\boxed{S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + - + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k}$$

$$\boxed{\lim_{n \to \infty} S_n = S \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k = S}$$

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = P$

$P < \infty \to$ yakınsak

$P = \infty \to$ ıraksak

örnek: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$

$\lim_{n \to \infty} \frac{n}{n+1} = 1 \to$ kural

$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{A}{k} + \frac{B}{k+1}$

$1 = Ak + A + Bk$

$A + B = 0$

$A = 1$

$\Rightarrow B = -1$

$S_n = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \left(1 - \cancel{\frac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \cancel{-} \cancel{-} \left(\cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1}\right)$

$\lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{n}{n+1}\right) = 1$ şu halde kısmi toplamlar dizisi yakınsak olduğundan $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ serisi'de yakınsaktır

örnek: $\sum_{k=1}^{\infty} \log\left(\frac{k}{k+1}\right)$

$$\boxed{\to \text{formül: } \sum_{k=p}^{n} \log\left(\frac{k}{k+1}\right) = \log\left(\frac{p}{n+1}\right) \to \text{sınav testse kullanabilirsin}}$$

$S_n = \sum_{k=1}^{n} \log k - \log(k+1)$

$= (\underbrace{\log 1}_{0} - \cancel{\log 2}) + (\cancel{\log 2} - \cancel{\log 3}) + - - + (\cancel{\log n} - \log(n+1))$

$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} (-\log(n+1)) = \infty$. şu halde kısmi toplamlar dizisi ıraksaktır. olduğundan $\sum_{k=1}^{\infty} \log\left(\frac{k}{k+1}\right)$ serisi'de ıraksaktır

*Geometrik dizi:

$\sum_{k=1}^{\infty} a.r^{k-1}$ $\qquad r =$ esas

$S_n = \sum_{k=1}^{n} a.r^{k-1} = a(r^0 + r^1 + r^2 + — + r^{n-1}) = a\left(\frac{r^n - 1}{r - 1}\right)$

$\lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} a\left(\frac{r^n - 1}{r - 1}\right)$: $|r| < 1$ ✓ $\quad |r| > 1$ ✗

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} a\left(\frac{r^n-1}{r-1}\right)$$

$$\boxed{|r|<1 \quad \text{için} \quad \sum_{k=1}^{\infty} a\cdot r^{k-1} = a\left(\frac{1}{1-r}\right)}$$

Örnek: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{2k}}{5^{k-1}}$.

1.yol $\Rightarrow$ $5\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^k = \left(\frac{4}{5}+\left(\frac{4}{5}\right)^2+\left(\frac{4}{5}\right)^3+ \cdots +\left(\frac{4}{5}\right)^n\right)$

$$5\cdot\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{4}{5}}{1-\frac{4}{5}}\right) = \frac{\frac{4}{\cancel{5}}}{\frac{1}{\cancel{5}}} = 4\cdot 5 = 20$$

2.yol $\Rightarrow 5\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^k = \left(\frac{4}{5}+\left(\frac{4}{5}\right)^2+\left(\frac{4}{5}\right)^3+ \cdots +\left(\frac{4}{5}\right)^n\right)$

$$= \cancel{5}\cdot\frac{4}{\cancel{5}}\left(1+\frac{4}{5}+\left(\frac{4}{5}\right)^2+ \cdots +\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}\right)$$

$$= 4\left(\frac{1}{1-\frac{4}{5}}\right)$$

$$= 4\left(\frac{1}{\frac{1}{5}}\right) = 4\cdot 5 = 20$$

Örnek:

$$1+\left(\frac{2}{3}\right)^3+\left(\frac{2}{3}\right)^5+ \cdots +\left(\frac{2}{3}\right)^{2n+1}+ \cdots = ?$$

$$= 1+\left(\frac{2}{3}\right)\left[\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^4+\left(\frac{2}{3}\right)^6+ \cdots +\left(\frac{2}{3}\right)^{2n}\right]$$

$$= 1+\left(\frac{2}{3}\right)\left[\frac{4}{9}+\left(\frac{4}{9}\right)^2+\left(\frac{4}{9}\right)^3+ \cdots +\left(\frac{4}{9}\right)^n\right]$$

$$= 1+\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{9}\left[1+\left(\frac{4}{9}\right)+\left(\frac{4}{9}\right)^2+ \cdots +\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}\right]$$

$$= 1+\frac{8}{27}\left[\frac{1}{1-\frac{4}{9}}\right]$$

$$= 1+\frac{8}{27}\left[\frac{9}{5}\right]$$

$$= 1+\frac{8}{15} = \frac{23}{15}$$

$$0,\overline{7} : 0,777\ldots = 0,7+0,07+0,007+ \cdots$$

$$= \frac{7}{10}+\frac{7}{100}+\frac{7}{1000}+ \cdots$$

$$= 7\left[\frac{1}{10}+\left(\frac{1}{10}\right)^2+\left(\frac{1}{10}\right)^3+ \cdots\right]$$

$$= 7\cdot\frac{1}{10}\left[1+\frac{1}{10}+\left(\frac{1}{10}\right)^2+ \cdots\right]$$

$$= \frac{7}{10}\left[\frac{1}{1-\frac{1}{10}}\right] \Rightarrow \frac{7}{\cancel{10}}\cdot\frac{\cancel{10}}{9} = \frac{7}{9}$$

***Notlar:**

$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{-2}{5}\right)^k = 1+\left(\frac{-2}{5}\right)+\left(\frac{-2}{5}\right)^2+\ldots = \left(\frac{1}{1-\left(\frac{-2}{5}\right)}\right) = 5/7$ dir. **((Dikkat burada serinin $k=0$ dnan başladığına dikkat ediniz. Bu farklılık serinin yakınsaklığını değiştirmez ancak toplamını etkiler. Çünkü $\sum_{k=1}^{\infty} ar^{k-1} = a\left(\frac{1}{1-r}\right)$ eşitliğinin aslında sol tarafın "1" ile başlaması yani $1+r+r^2+\ldots$ biçiminde olması durumunda doğru olduğuna dikkat ediniz. Aşağıdaki örnekler bu durumla ilgilidir.))**

Not. Dizilerin özellikleri düşünüldüğünde aşağıdaki özelliklerin ispatı kolayca yapılabilir. $\sum a_k$ ve $\sum b_k$ serileri yakınsak ve $\sum a_k = a$, $\sum b_k = b$ olsun. Bu durumda

(1) $\sum (a_k + b_k) = a + b$

(2) c bir reel sayı olmak üzere $\sum c.a_k = ca$

Teorem. $\sum a_k$ yakınsak bir seri ise $\lim_{n\to\infty} a_k = 0$ dır.

Bu önermenin aşağıda sonuç olarak verilen karşt tersi de doğrudur ve birçok serinin yakınsak yada ıraksaklığını belirlemede çok kullanışlıdır.

Sonuç. $\lim_{n\to\infty} a_k \neq 0$ ise $\sum a_k$ serisi ıraksaktır.

Örnekler.

$\sum 2^{1/n}$ ıraksak seridir çünkü $\lim_{n\to\infty} 2^{1/n} = 1 \neq 0$ dır.

$\sum \frac{2+n}{3+5n}$ ıraksak seridir çünkü $\lim_{n\to\infty}\frac{2+n}{3+5n} = 1/5 \neq 0$ dır.

$\sum \frac{n^2}{1+n}$ ıraksak seridir çünkü $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{1+n} = \infty \neq 0$ dır.

$\sum \cos n$ ıraksak seridir çünkü $\lim_{n\to\infty} \cos n \neq 0$ dır.

Benzer şekilde $\sum (-1)^n$, $\sum n^n$, $\sum n!$, v.b serileri de ıraksaktır.

Uyarı. $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$ olması $\sum a_k$ serisinin yakınsak olmasını gerektirmez. Örneğin $\sum_{k=1}^{\infty}\log\left(\frac{k}{k+1}\right)$ serisi için $\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty}\log\left(\frac{k}{k+1}\right) = 0$ fakat seri ıraksaktır.

2) Seriler Testi:

$k \geq 0 \Rightarrow a_k \geq 0$ ise $\sum a_k \to$ pozitif terimli seri denir

***Testler kuralları:**

1) interal testi:

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \longrightarrow [1, +\infty)$ sürekli

azalan $\Rightarrow a_k = f(x)$

$\Rightarrow \int_1^{\infty} f(x)\,dx$ integral yakınsak ise $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ serisi yakınsaktır

$\Rightarrow \int_1^{\infty} f(x)\,dx$ 〃 ıraksaktır 〃 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ 〃 ıraksaktır.

<u>Örnek:</u> $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2+1}$ serisi yakınsak mı? $\frac{1}{k^2+1} < \frac{1}{k^2} \to$ Azalan

$f(x) = \frac{1}{k^2+1}$ fonksiyonu $[1, +\infty)$ aralığında sürekli, azalan

$\int_1^{\infty}\frac{1}{k^2+1}\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_1^t \frac{1}{x^2+1}\,dx = \arctan x \Big|_1^t$

$= \arctan t - \arctan 1$

$= \lim_{t\to\infty}\left(\arctan(\infty) - \frac{\pi}{4}\right)$

$= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$

$p < \infty \longrightarrow$ yakınsak

$p = \infty \longrightarrow$ ıraksak

$\frac{\pi}{4} < \infty \rightarrow$ old. dan seri integral testine göre yakınsaktır

<u>örnek:</u> $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \cdot \ln k}$ serisi yakınsak mı?

$f(x) = \frac{1}{x \cdot \ln x}$ fonksiyonu $[2, \infty)$ aralığında sürekli

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x \ln x} dx = \lim_{t \to \infty} \int_2^t \frac{1}{x \cdot \ln x} dx \qquad \Rightarrow \ln x = u, \quad \frac{1}{x} dx = du$$

$$\int_m^n \frac{1}{u} du = \ln|u|$$

$$\Rightarrow \lim_{t \to \infty} \ln(\ln x)\Big|_2^t = \lim_{t \to \infty} \left(\ln(\ln t) - \ln(\ln 2)\right)$$

$= \infty$ ıraksaktır

$p = \infty$ old. dan seri integral testine göre ıraksaktır.

$\ast \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ p-testi $\quad 1 < p \rightarrow$ yakınsaktır

$p \leqslant 1 \longrightarrow$ ıraksaktır

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{4/3}}$ $\quad p = 4/3 > 1 \longrightarrow$ yakınsak

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$ $\quad p = \frac{1}{2} < 1 \longrightarrow$ ıraksak

2) Limit Testi: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ $\quad \lim_{k \to \infty} k^p \cdot a_k = b$

1) $0 \leqslant b < +\infty$, $p > 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ yakınsaktır (a_k'nın paydası payından 1 dereceden daha büyüktür)

2) $0 < b \leqslant \infty$, $p \leqslant 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ıraksaktır (a_k'nın pay ile payda derece farkı 1 den küçüktür)

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n \cdot x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_0} = \begin{cases} m = n \Rightarrow \frac{a_n}{b_m} \\ n < m \Rightarrow 0 \\ m < n \Rightarrow \pm\infty \end{cases}$$

<u>örnek:</u> $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^3 + 3k + 1}{k^6 + 5}$

$p = 3$, $p = 3 > 1$ $\quad b = 1$ $\quad$ old. dan seri limit testine göre yakınsaktır.

$$\lim_{k \to \infty} k^p \cdot \frac{k^3 + 3k + 1}{k^6 + 5}$$

$$\frac{k^3(k^3 + 3k + 1)}{k^6 + 5} = \frac{k^6}{k^6} = 1 = b$$

örnek: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{3k+1}}{k+5}$ $\quad \lim_{k\to\infty} k^p \cdot \frac{\sqrt{3k+1}}{k+5}$ $\quad p=\frac{1}{2}<1,\ b=\sqrt{3}$

old. dan seri limit testine göre ıraksaktır

örnek: $\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot e^{-k}$ $\quad \lim_{k\to\infty} k^p \cdot k \cdot e^{-k}$ $\quad p=1,\ \lim_{k\to\infty} \frac{k^2}{e^k} = \frac{\infty}{\infty}$ belirsizlik

1. l'Hospital $\lim_{k\to\infty} \frac{2k}{e^k}$

2. l'Hospital $\lim_{k\to\infty} \frac{2}{e^k} = 0$

$p=1\leqslant 1,\ b=0$ old. dan seri limit testine göre uymamaktadır

3) Karşılaştırma Testi:

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ve $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ $\quad k\in\mathbb{N}$ için $a_k \leqslant b_k$

1) $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ yakınsak ise $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ yakınsaktır.

2) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ıraksak ise $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ ıraksaktır

örnek: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^2 k}{k(k+1)}$ $\quad \sin^2 k \leqslant 1$

$\frac{\sin^2 k}{k(k+1)} \leqslant \frac{1}{k(k+1)}$

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$

old. dan seri integral testine göre yakınsaktır

b_k yakınsak ise a_k yakınsaktır

old. dan $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^2 k}{k(k+1)}$ karşılaştırma testine göre yakınsaktır

örnek: $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[5]{k^2-1}}$ $\quad \sqrt[5]{k^2-1} < \sqrt[5]{k^2}$

$\frac{1}{\sqrt[5]{k^2-1}} > \frac{1}{\sqrt[5]{k^2}}$

$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[5]{k^2}}$ $\quad p=\frac{2}{5}<1$ ıraksaktır p- testine göre

$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[5]{k^2-1}}$ ıraksaktır

4) Oran Testi: $\sum a_k$ $\quad \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|$

1) $r<1$ ise $\sum a_k$ yakınsaktır

2) $r>1$ ise $\sum a_k$ ıraksaktır

3) $r=1$ ise $\sum a_k$ Test sonuç vermez.

5) Kök testi: $\sum a_k$, $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = r$

1) $r<1$ ise $\sum a_k$ yakınsaktır

2) $r>1$ ise $\sum a_k$ ıraksaktır

3) $r=1$ ise $\sum a_k$ Test sonuç vermez.

örnek: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k!}$ $\quad \lim_{k\to\infty} \left|\frac{c_{k+1}}{c_k}\right| = \lim_{k\to\infty} \frac{2\,\cancel{2^{k+1}}\cdot\cancel{(k)!}}{\underbrace{\cancel{(k+1)!}}_{(k+1)}\cdot\cancel{2^k}} = \frac{2}{k+1} = 0<1$

old. dan seri oran testine göre yakınsaktır

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{c_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{\sqrt[k]{2^k}}{k!} = \frac{2}{\sqrt[k]{k!}} = 0<1$$

old. dan seri kök testine göre yakınsaktır

Örnek. $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k+1}{k}\right)^{k^2}$, $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{5}{k}+\frac{2}{3}\right)^{k}$, $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{3}{k}\right)^{k}$, serileri için kök testi uygulanabilir.

$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k+1}{k}\right)^{k^2}$ için; $\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{a_k} = \lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{\left(\frac{k+1}{k}\right)^{k^2}} = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{k+1}{k}\right)^{k} = e > 1$ olduğundan seri ıraksak . $e \simeq 2{,}7$

$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{5}{k}+\frac{2}{3}\right)^{k}$ için; $\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{a_k} = \lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{\left(\frac{5}{k}+\frac{2}{3}\right)^{k}} = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{5}{k}+\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3} < 1$ olduğundan seri yakınsak

$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{3}{k}\right)^{k}$ için;..yakınsak

Örnek. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}$ serisinin karakterini araştıralım. Oran testinden

$$\lim_{k\to\infty}\frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k\to\infty}\frac{1/(k+1)!}{1/k!} = \lim_{k\to\infty}\frac{k!}{(k+1)!} = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{k+1} = 0 < 1$$

olduğundan seri yakınsaktır.

Örnek. $\sum n\left(\frac{3}{n}\right)^n$ karakteri? Oran testinden

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\left(\frac{3}{n+1}\right)^{n+1}}{n\left(\frac{3}{n}\right)^{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\left(\frac{3}{n+1}\right)^{n+1}}{n\left(\frac{3}{n}\right)^{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n} = 0.\frac{1}{e} = 0 < 1$$

olduğundan yakınsaktır.

Veya kök testi ile $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n\left(\frac{3}{n}\right)^n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{3}{n}\right)^n} = 1.\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n} = 0 < 1$ olduğundan seri yakınsaktır.

6) Alterne Seriler:

$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}$ → işaret değiştiren Alterne seriler denir.

$1-1+1-1+1-1+\ldots$

1) Lebnitz testi:

$k \geq 0$

1) $0 \leq a_{k+1} < a_k \Rightarrow \quad k<k+1 \Rightarrow \frac{1}{k+1} < \frac{1}{k}$ a_k azalan

2) $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$

örnek: $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}$

1) $\frac{1}{k+1} < \frac{1}{k}$ ✓ Azalan

2) $\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k} = 0$ ✓

old. dan seri Alterne seri Lebnitz testine göre yakınsaktır.

Örnek. $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{2k+1}{5k-1}$ serisi için ise $\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty}\frac{2k+3}{5k-4} = \frac{2}{5} \neq 0$ olduğundan seri ıraksaktır.

2) $\sum |a_k|$ yakınsak ise $\sum a_k$ serisi mutlak yakınsaktır denir

3) $\sum a_k$ yakınsak ve $\sum |a_k|$ ıraksak ise $\sum a_k$ serisi şartlı yakınsaktır denir

Mutlak yakınsak her seri yakınsaktır.

Örnek. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ serisi yakınsak, fakat $\sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^k}{k}\right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ serisi ıraksak olduğundan $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ serisi şartlı yakınsaktır.

Örnek. $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{2^k}{k!}$ serisini ele alalım. $\sum_{k=0}^{\infty} \left|(-1)^k \frac{2^k}{k!}\right| = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{k!}$ serisinin yakınsak olduğu oran testi yardımıyla kolayca görülebilir. Şu halde $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{2^k}{k!}$ serisi mutlak yakınsak ve dolaysıyla da yakınsaktır.

7) Kuvvet serileri:

$a \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$ için $c_k \in \mathbb{R}$

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-a)^k = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots c_n(x-a)^n$$

örnek:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^k (x-1)^k = (x-1) + 2^2(x-1)^2 + 3^3(x-1)^3 + \cdots$$

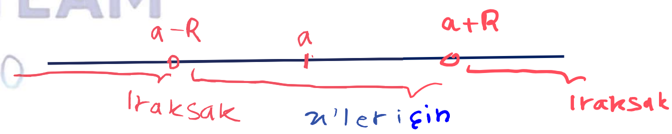
$n \in \mathbb{N}$, $k > n$, $c_k = 0$ ise kuvvet serisi bir polinomdur

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-a)^k = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots c_n(x-a)^n$$

R yakınsaklık yarıçapı

$|x-a| < R \Rightarrow -R < x-a < R$

$a-R < x < a+R$



Uçlar Noktalar: $\left.\begin{matrix} a-R \\ a+R \end{matrix}\right\}$ Acaba yakınsak mı?

$\sum c_k \cdot (x-a)^k$, $|x-a| < R \rightarrow$ yakınsaklık yarıçapı

#. $\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = L$ veya $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = L$

1) $L \neq 0$ ise $R = \frac{1}{L}$'dir $\Rightarrow |x-a| < R$ yakınsak

2) $L = 0$ ise $R = \frac{1}{L} = \infty \Rightarrow \forall x$ için yakınsak

3) $L = \infty$ ise $R = \frac{1}{L} = 0 \Rightarrow x = a$ noktalarında yakınsak

örnek: $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \Rightarrow c_k = \frac{1}{k!}$

$$\lim_{k\to\infty} \left|\frac{c_{k+1}}{c_k}\right| = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{(k+1)!}}{\frac{1}{k!}} = \lim_{k\to\infty} \frac{\cancel{k!}}{(k+1)\cancel{(k)!}} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k+1} = 0, \; L = 0$$

$L = 0 \Rightarrow R = \infty$ o halde seri her x için yakınsaktır

Örnek: $\sum_{k=1}^{\infty} k^k (x-1)^k$, $C_k = k^k$, $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{C_k} = \lim_{k\to\infty} k = \infty$

$L = \infty \Rightarrow R = 0 \Rightarrow x = 1$ noktasında seri yakınsaktır

Örnek: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x-2)^k}{k}$

$C_k = \frac{1}{k} \Rightarrow \lim_{k\to\infty} \left|\frac{C_{k+1}}{C_k}\right| = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{k+1}}{\frac{1}{k}} = \frac{k}{k+1} = 1$

$L = 1 \neq 0 \Rightarrow R = \frac{1}{L} = 1$ yakınsaklık yarıçapı

$|x-a| < R$

$|x-2| < 1 \Rightarrow -1 < x-2 < 1$

$1 < x < 3$

$(1,3)$ aralığında seri yakınsaktır

Acaba $x=1$, $x=3$ yakınsak mı?

$x=1$ için $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x-2)^k}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1-2)^k}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \rightarrow$ Alterne serisi

Alterne serisi: 1) $\frac{1}{k+1} < \frac{1}{k} \Rightarrow \frac{1}{k}$ Azalandır

2) $\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} = 0 \Rightarrow$ o halde Alterne seri Leibnitz testine göre yakınsaktır o zaman $x=1$ kapalıdır

$x=3$ için $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x-2)^k}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(3-2)^k}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1)^k}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ $\quad p=1$

$p \leq 1 \rightarrow$ ıraksaktır

$1 \leq 1$ 'dir ıraksaktır p testine göre, o halde serinin

yakınsaklık Aralığı $[1,3)$