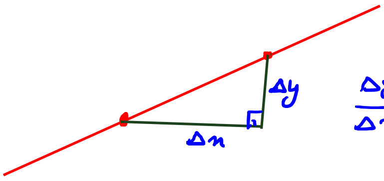
الاشتقاق

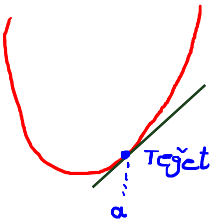
التعريف: هو نسبة التغير لميل المستقيم
التغير يرمز له بـ Δ

$$\Rightarrow \text{Türev} = \text{eğim} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

المشتقة = نسبة السرعة = نسبة التغير



$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$$

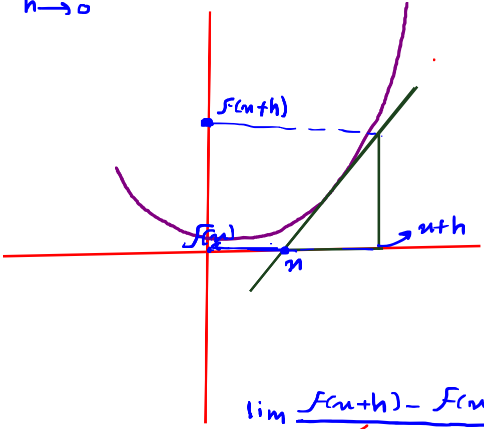


$f(x) = f'(a)$
$x = a$

يكتب الاشتقاق بعدة أشكال وهي ترمز بالتالي:

$- f(x) \rightarrow f'(x)$ ، $\frac{d}{dx}(f(x)) = f'(x)$ ، $\frac{dy}{dx}$ ، $y'(x)$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)$$



$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{\cancel{x} + h - \cancel{x}} = f'(x)$$

örnek:

1) $f(x) = x^2 + 5x - 6$
$\Rightarrow f'(x) = ?$ $\quad 2x + 5 = f'(x)$

البرهان

$$\lim_{h \to 0} \frac{\cancel{x^2} + 2xh + h^2 + \cancel{5x} + 5h \cancel{-6} \cancel{-x^2} \cancel{-5x} \cancel{+6}}{h}$$

$$\Rightarrow \lim_{h \to 0} \frac{h^2 + 5h + 2xh}{h} = \lim_{h \to 0} 2x + 5 + h$$

$$f'(x) = 2x + 5$$

2) $\lim_{x \to -2} \frac{x^2 + 5x - 6}{x + 1}$ $\quad$ l'hopital

$$\lim_{x \to -2} \frac{2x + 5}{1} \Rightarrow -4 + 5 = 1$$

KURALLAR:

1) sabit fonksiyon: $f(x) = c \Rightarrow f'(x) = 0$

2) polinom fonksiyon:
$- f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = n \cdot x^{n-1}$

3) kuvvet fonksiyon:
$- f(x) = \sqrt[n]{x^m} \Rightarrow f(x) = x^{\frac{m}{n}}$
$\Rightarrow f'(x) = \frac{m}{n} \cdot x^{\frac{m}{n} - 1}$

$- f(x) = \sqrt[n]{g(x)^m} \Rightarrow f'(x) = \frac{g'(x)}{n \cdot \sqrt[n]{g(x)^{m-n}}}$

4) $f(x) = a^{g(x)} \Rightarrow f'(x) = g'(x) \cdot a^{g(x)} \cdot \ln a$

5) $f(x) = e^{g(x)} \Rightarrow f'(x) = g'(x) \cdot e^{g(x)}$

6) $f(x) = \log_a g(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{g'(x)}{g(x) \cdot \ln a}$

7) $f(x) = \ln(g(x)) \Rightarrow f'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$

8) $f(x) = \sin(g(x)) \Rightarrow f'(x) = g'(x) \cdot \cos(g(x))$

9) $f(x) = \cos(g(x)) \Rightarrow f'(x) = -g'(x) \cdot \sin(g(x))$

10) $f(x) = [g(x)]^n \Rightarrow f'(x) = n\,[g(x)]^{n-1} \cdot g'(x)$

11) $f(x) = \sin^2 x \Rightarrow f'(x) = \sin 2x$

12) $f(x) = \cos^2 x \Rightarrow f'(x) = -\sin 2x$

13) $f(x) = \tan(g(x)) \Rightarrow f'(x) = g'(x)[1 + \tan^2(g(x))]$
$- f(x) = \tan x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$

14) $f(x) = \cot(g(x)) \Rightarrow f'(x) = -g'(x)[1 + \cot^2(g(x))]$
$- f(x) = \cot x \Rightarrow f'(x) = \frac{-1}{\sin^2 x} = -\csc^2 x$

15) $f(x) = \arcsin(g(x)) \Rightarrow f'(x) = \frac{g'(x)}{\sqrt{1 + (g(x))^2}}$

16) $f(x) = \arccos(g(x)) \Rightarrow f'(x) = \frac{-g'(x)}{\sqrt{1 + (g(x))^2}}$

17) $f(x) = \arctan(g(x)) \Rightarrow f'(x) = \frac{g'(x)}{1 + (g(x))^2}$

18) $f(x) = \text{arccot}(g(x)) \Rightarrow f'(x) = \frac{-g'(x)}{1 + (g(x))^2}$

19) $(u \pm v)' = u' \pm v'$

20) $(u \cdot v)' = u' v + v' u$

21) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' v - v' u}{v^2}$

Uyarı: f, g ve h türevlenebilir fonksiyonlar olmak üzere,
$(f.g.h)' = f'.g.h + g'.f.h + h'.f.g$

NOT: $f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$ şeklinde ise
$f'(x) = \frac{a.(cx + d) - c.(ax + b)}{(cx + d)^2}$
$= \frac{ad - bc}{(cx + d)^2}$ bulunur.

22)
Bileşke Fonksiyonun Türevi

f(x) ve g(x) reel sayılarda türevlenebilir iki fonksiyon ise (fog)(x) fonksiyonu da türevlenebilir bir fonksiyondur.

$(fog)'(x) = [f(g(x))]' = f'(g(x)).g'(x)$

$(fogoh)'(x) = [f(g(h(x)))]'$
$= f'(g(h(x))).[g(h(x))]'$
$= f'(g(h(x))).g'(h(x)).h'(x)$

Uyarı: $c \in R$ olmak üzere,
$(fog)'(c) \neq [(fog)(c)]'$ dir.

Uyarı: Bileşke fonksiyonun türevi alınırken, önce fonksiyonların bileşkesi hesaplanıp sonra elde edilen ifadenin türevi de alınabilir.

Örnek Bileşke Fonksiyon:

$f(x) = x + 2$

$g(x) = x - 2$

$h(x) = x^2$

olduğuna göre, $(fogoh)'(1)$ kaçtır?

$f'(goh)(1) \cdot g'(h(1)) \cdot h'(1)$

$1 \cdot 1 \cdot 2 = 2$

---

23) Zincir kuralı:

$y = f(u)$

$u = g(v)$

$v = h(x)$

fonksiyonları için, y fonksiyonunun x değişkenine göre türevi

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}$$

olarak yazılır. Bu kurala, **zincir kuralı** denir.

Örnek:

$y = u + \sqrt{2u}$

$u = t^3 + 1$

$t = \sqrt{1+x}$

olduğuna göre, $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}$ **değeri kaçtır?**

$\frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$

$\frac{dy}{dx} = \left(1 + \frac{2}{2\sqrt{2u}}\right) \cdot 3t^2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{1+x}}$

$x = 0 \Rightarrow t = 1 \Rightarrow u = 2$

$\Rightarrow \frac{3}{2} \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{9}{4}$

---

24) Parametrik Fonksiyonun Türevi

Derivative of Parametric Function

$y = f(t)$

$x = h(t)$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}}$$

Örnek:

$y = t^3 - 1$

$x = \sqrt{t}$

$\Rightarrow \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=4} = ?$

$\Rightarrow \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{3t^2}{\frac{1}{2\sqrt{t}}} =$

$3 \cdot 64 = 192$

---

25) Kapalı Fonksiyonun Türevi

Derivative of Closed Function

$F(x, y) = 0 \quad (y = f(x))$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}}$$

$F_x \rightarrow$ y sabit.

$F_y \rightarrow$ x sabit.

Örnek:

$\frac{xy + y^2}{x^2 - xy} = \frac{1}{3}$

$\frac{dy}{dx} = ?$

$\Rightarrow x^2 - xy = 3xy + 3y^2$

$x^2 - 4xy - 3y^2 = 0$

$F(x, y) = 0 \Rightarrow -\frac{F'(x)}{F'(y)}$

$-\frac{2x - 4y}{-4x - 6y}$

---

26) Ters Fonksiyonun Türevi

Derivative of Inverse Function

$f: R \to R$

$f(x_0) = y_0$

$$\boxed{(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}}$$

$f: R^- \to R$

$f(x) = x^2 + 5x - 18$

$\Rightarrow (f^{-1})'(-4) = ?$

لإيجاد المشتق العكسي :

1) إيجاد قيمة x

2) الاشتقاق

3) التعويض

4) أخذ الدالة كلية

1) $x = -7$

2) $f'(x) = 2x + 5$

3) $f'(-7) = -9$

4) $(f^{-1})'(-4) = -\frac{1}{9}$

---

27) Logaritmik Türev

Logarithmic Derivative

$f(x) = g(x)^{h(x)}$

$\ln(f(x)) = \ln(g(x))^{h(x)}$

$\ln(f(x)) = h(x) \cdot \ln(g(x))$

$\frac{f'(x)}{f(x)} = h'(x) \cdot \ln(g(x)) + \frac{g'(x)}{g(x)} \cdot h(x)$

$f'(x) = f(x) \cdot \left[h'(x) \cdot \ln(g(x)) + \frac{g'(x)}{g(x)} \cdot h(x)\right]$

Örnek:

$f(x) = x^x \quad f(x) = y$

$\Rightarrow \ln y = x \cdot \ln x$

$\Rightarrow \frac{y'}{y} = \ln x + \frac{x}{x}$

$\Rightarrow y' = x^x(\ln x + 1)$

---

28) Yüksek Mertebeden Türev

High Order Derivative

$y = f(x)$

$\frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx} = f'(x)$ 1. Türev (*first derivative*)

$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2f(x)}{dx^2} = f''(x)$ 2. Türev (*second derivative*)

$\frac{d^ny}{dx^n} = \frac{d^nf(x)}{dx^n} = f^{(n)}(x)$ n. Türev (*n^{th} derivative*)

NoT: $\frac{d^ny}{dx^n} \neq \left(\frac{dy}{dx}\right)^n$

NOTS:

1) $f(x) = x^n \Rightarrow \frac{d^ny}{dx^n} = n!$

örnek: $f(x) = x^9 \Rightarrow \frac{d^9y}{dx^9} = 9!$

2) $f(x) = e^{2x}$

$\Rightarrow \frac{d^{10}f(x)}{dx^{10}} = ?$

$e^{nx} \Rightarrow \frac{d^ny}{dx^n} = n^n \cdot e^{nx}$

$= 2^{10} \cdot e^{2x}$

3) $f(x) = \frac{1}{x}$

$\Rightarrow \frac{d^{20}f(x)}{dx^{20}} = ?$

$\frac{1}{x} \rightarrow$ البسط 1

+ العدد المشتق زوجية

− " فردية " "

$n =$ عدد المشتق

إشارة $\Rightarrow \frac{n!}{x^{n+1}} \Rightarrow \frac{20!}{x^{21}}$

4) $f(x) = \ln x$

$\Rightarrow \frac{d^{14}f(x)}{dx^{14}} = ?$

$\rightarrow f'(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{1}{x} \rightarrow -\frac{13!}{x^{14}}$

البسط 1 والباقي 13

البسط 1

13 فردي يعني سالب

5) $f(x) = \ln(x)^{10}$

$\Rightarrow \frac{d^{10}f(x)}{dx^{10}} = ?$

$\Rightarrow f(x) = 10 \cdot \ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{10}{x}$

البسط الباقي وفردي

$\Rightarrow 10 \left(\frac{-9!}{x^{10}}\right)$

10 ثابت

$\Rightarrow \frac{-10!}{x^{10}}$

6) $f(x) = \ln(x + 3)$

$\Rightarrow \frac{d^8f(x)}{dx^8} = ?$

$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{(x+3)}$

البسط 1، الباقي 7 فردي سالب

$\Rightarrow y^{(8)} = \frac{-7!}{(x+3)^8}$

---

29) Sağdan ve Soldan Türev

$A \subseteq R$, $f: A \to R$ ve $a \in A$ **için**

$f'(a^+) = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$

limit varsa bu limit değerine f fonksiyonunun $x = a$ noktasındaki sağdan türevi denir.

$f'(a^-) = \lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$

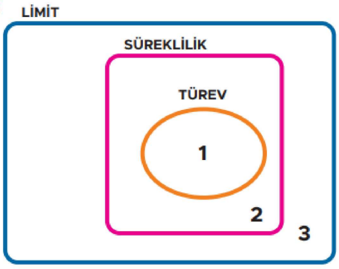
limit varsa bu limit değerine f fonksiyonunun $x = a$ noktasındaki soldan türevi denir.

- $A \subset R$, $f: A \to R$ ve $a \in A$ için f sürekli olmak üzere,
- Bir fonksiyon $x = a$ noktasındaki sağdan ve soldan türevleri birbirine eşit ise f fonksiyonu $x = a$ noktasında türevlidir.

Bir fonksiyonun bir noktada türevinin var olabilmesi için o noktada

- Fonksiyon o noktada sürekli olmalıdır.
- Fonksiyonun o noktada sağdan ve soldan türevleri birbirine eşit olmalıdır.

30)



1) Fonksiyonun bir noktada türevi varsa o noktada süreklidir.

2) Sürekli her fonksiyon türevli olmaya bilir.

3) Fonksiyon bir noktada sürekli değilse, o noktada türevli değildir.

$f(x)=\begin{cases} g(x), & x<a \\ h(x), & x \geq a \end{cases}$

x=a kritik noktadır.

- f fonksiyonu x=a için süreksiz ise f′(a) yoktur.
- f fonksiyonu x=a için sürekli ise

1) $g'(a) \neq h'(a)$ ise $f'(a)$ yoktur.

2) $g'(x)=h'(x)$ ise $f'(a)=g'(a)=h'(a)$ olur.

$f(x)=\begin{cases} 6x+1 & , \ x \leq 3 \\ x^2+1 & , \ x>3 \end{cases}$

fonksiyonunun $x=3$ noktasındaki türevinin değeri kaçtır?

1) süreklilik

$\lim_{x \to 3^+} = 10$

$\lim_{x \to 3^-} = 19$

sürek sizdir

2) $f'(3^+) = f'(3^-)$

$f'(3^+) = 2x = 6$

$f'(3^-) = 6$

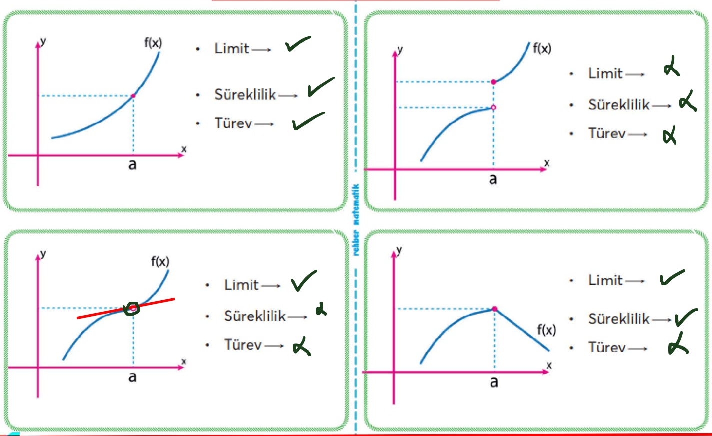
$x=3 \Rightarrow$ Türev $= \varnothing$

Türev - Süreklilik İlişkisi

- Bir fonksiyon bir x = a apsisli noktasında sürekli değilse x = a apsisli noktada türevli de değildir.
- Bir fonksiyon sürekli olduğu bir noktada türevi olmayabilir.
- Bir fonksiyon türevli olduğu her noktasında süreklidir.

- A, B, C ve D noktalarında süreklilik olmasına rağmen türev yoktur.
  Grafikte köşelerinde kırık veya sivrilik oluşmuşsa sağdan ve soldan çizilen teğetlerin eğimi yani türev değerleri eşit değildir. Dolayısıyla bu noktalarda türev yoktur.
- E ve F noktalarından tek teğet çizildiği için bu noktalarda türev vardır ve türev değeri 0'dır.

Türevlenebilirliğin Grafik Yorumu



31)

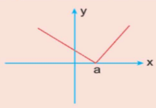
Mutlak Değer Fonksiyonunun Türevi

$f(x)=|x-a|$

- Türevi istenen nokta kritik nokta değil ise fonksiyonun işaretine göre ifade mutlak değerden çıkarılır ve türev alınır.
- Türevi istenen nokta $(x=a)$ kritik nokta ise
  - $x=a$ bir katlı kök ise türev yoktur.
  - $x=a$ birden çok katlı kök ise türev vardır ve sıfırdır.

- n, 1 den büyük tam sayı olmak üzere, $|(x-a)^n|$ şeklindeki fonksiyonlarda x=a noktasında türev vardır ve sıfırdır.

★ n = 1 olduğu durumda fonksiyonun x = a apsisli noktasında kırılma vardır.



örnekler:

1) $f(x)=|x-2|$. $x \to 2^+ \Rightarrow x-2=y \Rightarrow y'=1$; $x \to 2^- \Rightarrow 2-x=y \Rightarrow y'=-1$ $\}\ \varnothing$

$\Rightarrow f'(2)=?$

2) $f(x)=|x^2-4x+4| \Rightarrow f(x)=|(x-2)^2|$; $(x-2)^2=y$

$\Rightarrow y'=2(x-2)\ldots$

$y'(2)=0$

$\Rightarrow f'(2)=?$

3) $f(x)=|x^2-(a-3)x+11-a|$

fonksiyonları $\forall x \in R$ için türevli olduğuna göre, a kaç farklı tam sayı değeri alır?

$\Delta \leq 0$

$\Rightarrow (a-3)^2-4(11-a) \leq 0$

$-5 \quad 7$

$+ \quad - \quad +$

$7+5+1=13$

4) I. $f(x)=|x-1|$ ∝

II. $g(x)=|(x-1)^2|$ → رتبة زوجية ✓

III. $h(x)=(x-1).|x-1|$ → $-(x-1)(x-1)$ ✓ ; $+(x-1)(x-1)$ ✓ } ✓ = 0

IV. $t(x)=|(x-1)^3|$ ✓

V. $n(x)=(x-1).|(x-1)^2|$ ✓

Yukarıda verilen fonksiyonların hangileri x = 1 için türevlidir?

5) $f(x)=\begin{cases} x^2-x & , \ x<1 \\ 4x+1 & , \ x \geq 1 \end{cases}$

$g(x)=x.|x| \to -2x = 2$

olduğuna göre, (fog)′ (–1) kaçtır?

$f'[g(-1)] . g'(-1)$

$-3 \quad . \quad 2 \quad = -6$

A) – 8 B) – 6 C) – 4

D) 6 E) 8

6) $f(x)=|4x^2-x^4|$

$|x^2|.|2-x|.|2+x|$

∝ ✓ ✓

çiftkat

fonksiyonunun kaç farklı noktada türevi yoktur?

A) 1 B) 2 C) 3

D) 4 E) 5

7) $f(x)=|x^2+ax-15|$ $x=3$

$\rightarrow |x^2+2x-15|$

fonksiyonunun x = 3 için türevi olmadığına göre, f′ (2) kaçtır?

$\Rightarrow x=2$

$\Rightarrow -2x-2$

$x=2$

$\Rightarrow -4-2=-6$

A) – 6 B) – 4 C) – 2

D) 4 E) 8