3.2. TEKISLIKDAGI TO‘G‘RI CHIZIQ

Tekislikdagi chiziq. Tekislikdagi to‘g‘ri chiziq tenglamalari. Tekislikda ikki to‘g‘ri chiziqning o‘zaro joylashishi. Nuqtadan to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan masofa

3.2.1. *Oxy tekislikdagi chiziq tenglamasi* deb aynan shu chiziq barcha nuqtalarining x va y koordinatalarini aniqlovchi ikki o‘zgaruvchining $F(x,y)=0$ tenglamasiga aytiladi; koordinatalari ikki o‘zgaruvchining $F(x,y)=0$ tenglamasini qanoatlantiruvchi Oxy tekislikning barcha $M(x;y)$ nuqtalari to‘plamiga *tekislikda* shu tenglama bilan aniqlanuvchi *chiziq* (to‘g‘ri chiziq yoki egri chiziq) deyiladi.

Tekislikdagi chiziq qutb koordinatalar sistemasida $F(r,\varphi)=0$ tenglama bilan beriladi, bu yerda r,φ – chiziq nuqtalarining qutb koordinatalari.

Ayrim hollarda tekislikdagi chiziq $y=f(x)$ tenglama bilan beriladi. Bunda chiziq $y=f(x)$ funksiyaning grafigi deb ataladi.

Tekislikdagi chiziq ikkita $x=x(t), y=y(t), t\in T$ tenglamalar bilan ham berilishi mumkin. Bunda $x=x(t), y=y(t)$ tengliklarni qanoatlantiruvchi barcha $M(x;y)$ nuqtalar to‘plamiga tekislikdagi chiziqning parametrik berilishi, $x=x(t), y=y(t)$ funksiyalarga bu chiziqning parametrik tenglamalari, t ga parametr deyiladi. Chiziqning parametrik tenglamalaridan $F(x,y)=0$ tenglamasiga $x=x(t), y=y(t)$ tengliklarning har ikkalasidan qandaydir usul bilan t parametrni chiqarish orqali oʻtiladi.

Tekislikdagi chiziqning ikkita $x=x(t), y=y(t)$ parametrik (skalyar) tenglamalarini bitta $\vec{r}=\vec{r}(t)$ vektor tenglama bilan berish mumkin.

3.2.2. x,y oʻzgaruvchilarning har qanday birinchi darajali tenglamasi tekislikdagi biror toʻgʻri chiziqni ifodalaydi va aksincha, tekislikdagi har qanday toʻgʻri chiziq x,y oʻzgaruvchilarning biror birinchi darajali tenglamasi bilan aniqlanadi.

Toʻgʻri chiziqning tekislikdagi har xil oʻrni (berilish usuli) turli tenglamalar bilan aniqlanadi.

1. *Berilgan nuqtadan oʻtuvchi va berilgan vektorga perpendikular toʻgʻri chiziq tenglamasi*:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0, \qquad (2.1)$$

bu yerda $A,B-$ *toʻgʻri chiziq normal vektori* (toʻgʻri chiziqqa perpendikular boʻlgan vektor) $\vec{n}=\{A;B\}$ning koordinatalari; x_0, y_0-berilgan nuqtaning koordinatalari, $x,y-$ toʻgʻri chiziqda yotuvchi ixtiyoriy nuqtaning koordinatalari.

2. *Toʻgʻri chiziqning umumiy tenglamasi*:

$$Ax+By+C=0, \qquad (2.2)$$

bu yerda $C-$ozod had; $A^2+B^2\neq 0$.

Bu tenglama bilan aniqlanuvchi toʻgʻri chiziqning xususiy hollari:

$Ax+C=0\ (B=0)-Oy$ oʻqqa parallel yoki Ox oʻqqa perpendikular;

$By+C=0\ (A=0)-\ Ox$ oʻqqa parallel yoki Oy oʻqqa perpendikular;

$Ax+By=0\ (C=0)-$ koordinatalar boshidan oʻtuvchi;

$x=0\ (B=0, C=0)-Oy$ oʻqda yotuvchi;

$y=0\ (A=0, C=0)-Ox$ oʻqda yotuvchi.

3. *Toʻgʻri chiziqning kanonik tenglamasi* (yoki *berilgan nuqtadan oʻtuvchi va berilgan vektorga parallel toʻgʻri chiziq tenglamasi*):

$$\frac{x-x_0}{p}=\frac{y-y_0}{q}, \qquad (2.3)$$

bu yerda $p;q-$ *toʻgʻri chiziq yoʻnaltiruvchi vektori* (toʻgʻri chiziqqa parallel boʻlgan vektor) $\vec{s}=\{p;q\}$ ning koordinatalari.

4. *To‘g‘ri chiziqning parametrik tenglamalari*:

$$x = x_0 + pt, y_0 = y + qt, \tag{2.4}$$

bu yerda t – parametr.

5. *To‘g‘ri chiziqning vektor tenglamasi*:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{s}, \tag{2.5}$$

bu yerda $\vec{r}, \vec{r}_0$ – mos ravishda $M(x;y)$, $M_0(x_0;y_0)$ nuqtalarning radius vektorlari.

6. *Berilgan ikki nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasi*:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}, \tag{2.6}$$

bu yerda x_1, y_1, x_2, y_2 – berilgan ikki nuqtaning koordinatalari.

7. *To‘g‘ri chiziqning kesmalarga nisbatan tenglamasi*:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \tag{2.7}$$

bu yerda a,b – to‘g‘ri chiziqning moc ravishda Ox va Oy o‘qlarida ajratgan kesmalari.

8. *To‘g‘ri chiziqning burchak koeffitsiyentli tenglamasi*:

$$y = kx + b, \tag{2.8}$$

bu yerda $k = tg\varphi$ – *to‘g‘ri chiziqning burchak koeffitsiyenti*; φ – *to‘g‘ri chiziqning og‘ish burchagi* (Ox o‘qning musbat yo‘nalishdan berilgan to‘g‘ri chiziqqa soat strelkasiga teskari yo‘nalishda hisoblangan eng kichik burchak); b – to‘g‘ri chiziqning Oy o‘qda ajratgan kesmasi.

9. *Berilgan nuqtadan berilgan yo‘nalish bo‘yicha o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasi* (yoki *to‘g‘ri chiziqlar dastasi tenglamasi*):

$$y - y_1 = k(x - x_1), \tag{2.9}$$

bu yerda x_1, y_1 – berilgan nuqtaning koordinatalari.

10. *To‘g‘ri chiziqning qutb tenglamasi*:

$$r\cos(\alpha - \varphi) = p, \tag{2.10}$$

bu yerda p – qutbdan to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan masofa; α – qutb oqi bilan berilgan to‘g‘ri chiziqqa perpendikular o‘q orasidagi burchak; $r;\varphi$ – to‘g‘ri chiziqda yotuvchi ixtiyoriy nuqtaning qutb koordinatalari.

11. *To‘g‘ri chiziqning normal tenglamasi*:

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0 \tag{2.11}$$

bu yerda p – koordinatalar boshidan to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan masofa;

$\alpha - Ox$ o‘qi bilan berilgan to‘g‘ri chiziqqa perpendikular o‘q ($\vec{n}$ normal vektor) orasidagi burchak.

To‘g‘ri chiziqning (2.1)-(2.11) tenglamalaridan har birini qolganlaridan keltirib chiqarish mumkin.

$1-$misol. a ning qanday qiymatlarida $(a-2)x+(a^2-3a)y-2a+1=0$ to‘g‘ri chiziq: 1) Ox o‘qqa parallel bo‘ladi; 2) Ox o‘qqa perpendikular bo‘ladi; 3) koordinatalar boshidan o‘tadi.

1) To‘g‘ri chiziqning umumiy tenglamasida $A=0$ bo‘lsa to‘g‘ri chiziq Ox o‘qqa parallel bo‘ladi. Bundan $a-2=0$ yoki $a=2$.

2) (2.2) tenglamada $B=0$ bo‘lsa to‘g‘ri chiziq Ox o‘qqa perpendikular bo‘ladi. U holda $a^2-3a=0$ yoki $a=0, a=3$.

3) To‘g‘ri chiziq koordinatalar boshidan o‘tishi uchun to‘g‘ri chiziqning umumiy tenglamasida $C=0$ bo‘lishi kerak. Bundan $-2a+1=0$ yoki $a=\frac{1}{2}$.

$2-$misol. $3x-2y-6=0$ tenglama bilan berilgan to‘g‘ri chiziqni chizing.

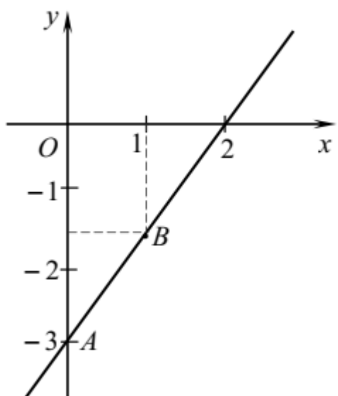
Tekislikdagi to‘g‘ri chiziqni chizish uchun uning ikkita nuqtasini bilish yetarli.

To‘g‘ri chiziq tenglamasida, masalan $x=0$ deb, $y=-3$ ni, ya’ni $A(0;-3)$ nuqtani va shu kabi $B\left(1;-\frac{3}{2}\right)$ nuqtani topamiz. Bu nuqtalarni tutashtirib, berilgan tenglamaga mos to‘g‘ri chiziqni chizamiz. (3-shakl).

Bu masalani boshqacha, ya’ni to‘g‘ri chiziq tenglamasini kesmalarga nisbatan tenglamaga keltirib yechish mumkin. Buning uchun tenglamaning ozod hadi (-6) ni o‘ng tomonga o‘tkazamiz va hosil bo‘lgan tenglikning har ikkala tomonini 6 ga bo‘lamiz:

$$3x-2y=6,\quad \frac{3x}{6}-\frac{2y}{6}=1 \quad \text{yoki}$$

$$\frac{x}{2}+\frac{y}{(-3)}=1.$$



3-shakl.

Bu tenglama bilan aniqlanuvchi to‘g‘ri chiziq koordinatalar boshiga nisbatan Ox o‘qida o‘ng tomonga 2 ga teng kesma va Oy o‘qida pastga 3 ga teng kesma ajratadi (3-shakl).

$3-$misol. To‘g‘ri chiziq tenglamasini tuzing: 1) $M_1(2;-3)$ nuqtadan o‘tuvchi va $\vec{a}=\{-3;4\}$ vektorga perpendikular; 2) $M_2(-2;2)$ nuqtadan o‘tuvchi va $\vec{b}=\{3;-2\}$ vektorga parallel; 3) $M_3(4;-1)$ va $M_4(1;-3)$ nuqtalardan o‘tuvchi; 4) Ox o‘qi bilan $\varphi=\dfrac{\pi}{4}$ burchak hosil qiluvchi va Oy o‘qni $M_5(0;4)$ nuqtada kesuvchi; 5) $M_5(2;-2)$ nuqtadan o‘tuvchi va Ox o‘q bilan $\varphi=\dfrac{3\pi}{4}$ burchak hosil qiluvchi; 6) koordinata o‘qlarida 3 va (-4) ga teng kesma ajratuvchi.

To‘g‘ri chiziq tenglamalarini misol bandlarining shartlariga mos holda tuzamiz:

1) berilgan nuqtadan o‘tuvchi va berilgan vektorga perpendikular to‘g‘ri chiziq tenglamasi (2.1) ga ko‘ra

$$-3(x-2)+4(y+3)=0,\ \ -3x+6+4y+12=0 \ \text{ yoki}$$
$$3x-4y-18=0;$$

2) berilgan nuqtadan o‘tuvchi va berilgan vektorga parallel to‘g‘ri chiziq tenglamasi (2.3) ga asosan

$$\frac{x+2}{3}=\frac{y-2}{-2},\ -2(x+2)=3(y-2),\ 2x+4+3y-6=0 \ \text{ yoki}$$
$$2x+3y-2=0;$$

3) berilgan ikki nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasi ga binoan

$$\frac{x-4}{1-4}=\frac{y+1}{-3+1},\ \frac{x-4}{-3}=\frac{y+1}{-2},\quad 2x-8=3y+3 \ \text{ yoki}$$
$$2x-3y-11=0;$$

4) to‘g‘ri chiziqning burchak koeffitsiyentli tenglamasi (2.8) ga binoan

$$y=tg\frac{\pi}{4}x+4 \ \text{ yoki}$$
$$y=x+4;$$

5) to‘g‘ri chiziqlar dastasi tenglamasi (2.9) ga ko‘ra

$$y+2=tg\frac{3\pi}{4}(x-2),\ y+2=-(x-2),\ x-2+y+2=0 \ \text{ yoki}$$
$$x+y=0;$$

6) to‘g‘ri chiziqning kesmalarga nisbatan tenglamasi (2.7) ga ko‘ra

$$\frac{x}{3}+\frac{y}{(-4)}=1 \ \text{ yoki}$$
$$4x-3y-12=0.$$

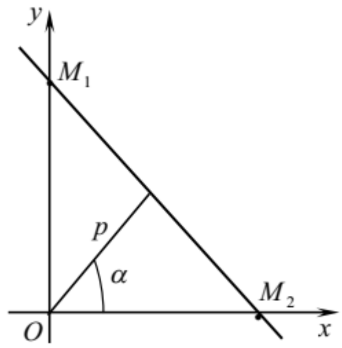
$4-$misol. $M_1\left(4;\frac{\pi}{2}\right)$ va $M_2(4;0)$ nuqtalardan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqning qutb tenglamasini tuzing.

To‘g‘ri chiziqning M_1 va M_2 nuqtalar orasidagi kesmasi katetlari 4 ga teng bo‘lgan to‘g‘ri burchakli uchburchakning gipotenuzasi bo‘ladi (4-shakl). Bunda qutbdan to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan masofa to‘g‘ri burchak uchidan gipotenuzaga tushirilgan balandlikdan iborat. Uning uzunligini (p ni) va yo‘nalishini (α ni) topamiz:

$$p=\frac{|OM_1|\cdot|OM_2|}{\sqrt{|OM_1|^2+|OM_2|^2}}=\frac{4\cdot 4}{\sqrt{4^2+4^2}}=2\sqrt{2},\quad \alpha=\frac{\pi}{4}.$$

Bundan (2.10) formulaga ko‘ra

$$r\cos\left(\varphi-\frac{\pi}{4}\right)=2\sqrt{2}.$$



4-shakl.

$5-$misol. To‘g‘ri chiziqning $5x-12y+8=0$ tenglamasini normal ko‘rinishga keltiring.

Berilgan tenglamani normal ko‘rinishga keltiramiz. Buning uchun tenglamaning chap va o‘ng tomonini *normallovchi ko‘paytuvchi* deb ataluvchi $M=\pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}$ soniga ko‘paytiramiz. Bunda M ning ishorasi C ning ishorasiga qarama-qarshi qilib tanlanadi.

U holda $M=-\frac{1}{\sqrt{5^2+(-12)^2}}=-\frac{1}{13}$, chunki $C>0$. Bundan

$$-\frac{5x}{13}+\frac{12y}{13}-\frac{8}{13}=0,$$

bu yerda $\cos\alpha=-\frac{5}{13}$, $\sin\alpha=\frac{12}{13}$, $p=\frac{8}{13}$.