MA’RUZA

FUNKSIYA. FUNKSIYANING LIMITI.
CHEKSIZ KICHIK VA CHEKSIZ KATTA FUNKSIYALAR

Ma’ruza rejasi

1. Funksiyaning nuqtadagi va cheksizlikdagi limiti
2. Cheksiz kichik va cheksiz katta funksiyalar.
3. Funksiya limiti haqidagi asosiy teoremalar. Aniqmasliklarni ochish.

Tayanch so’z va iboralar: Funksiyaning nuqtadagi limiti; funksiyaning cheksizlikdagi limiti; nuqtaning atrofi; cheksiz kichik va cheksiz katta funksiyalar; aniqmasliklarni ochish (yechish) ; funksiya limiti haqidagi asosiy teoremalar.
$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty-\infty, 0\cdot\infty, 1^{\infty}, 0^{0}$ ko’rinishidagi aniqmasliklar; aniqmasliklar ochish (yechish).

2. FUNKSIYA TUSHUNCHASI

X va Y haqiqiy sonlar to’plamlari berilgan bo’lsin.

Ta’rif. Agar har bir $x\in X$ ga biror qonun yoki qoida bo’yicha aniq bitta $y\in Y$ mos kelsa, *y miqdor x ning* funksiyasi deyiladi. Bu

$y=f(x)$ (yoki $u=\varphi(x)$ va h.k.)

ko’rinishda belgilanadi. *x* - *erkli o’zgaruvchi* yoki argument*; y* - funksiya yoki *bog’liq o’zgaruvchi* deyilib, *y* miqdor funksiyaning *x* nuqtadagi qiymatini ifodalaydi.

X - funksiyaning aniqlanish sohasi deyilib, *D(f)* kabi belgilanadi: *D(f)=X.*

Y- funksiyaning qiymatlar to’plami yoki *o’zgarish sohasi* deyilib, *E(f)* kabi belgilanadi: *E(f)=Y.*

Funksiyaning berilish usullari

Funksiya 3 xil usulda berilishi mumkin:

1. A*nalitik* usulda, ya’ni formula bilan. Masalan: $y=x^2$, $f(x)=2\sin x,\ g(x)=3^{2x}$.
2. *Jadval* yordamida. Masalan:

x	x_1	x_2	...	x_n
y	y_1	y_2	...	y_n

3. *Grafik* usulda. Masalan: 1-rasmdagi kabi.

Funksiyaning aniqlanish sohasini topish

Agar funksiya analitik usulda berilgan bo’lib, aniqlanish sohasi ko’rsatilmagan bo’lsa, argumentning shu analitik ifoda ma’noga ega bo’ladigan barcha qiymatlari to’plami funksiyaning aniqlanish sohasi deb tushuniladi. Bu holda funksiyaning aniqlanish sohasi *tabiiy aniqlanish sohasi* yoki *mavjudlik sohasi* ham deyiladi.

Masalan: $y=\frac{x+1}{x-1}$ funksiyaning aniqlanish sohasi: $x-1\neq 0;\ x\neq 1, ya'ni\ x\in(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$;

$y=x\sqrt{x}$ funksiyaning aniqlanish sohasi: $x\geq 0$, ya’ni $x\in[0;+\infty)$.

Agar funksiya ko’phaddan iborat bo’lsa, uning aniqlanish sohasi barcha haqiqiy sonlar to’plamidan iborat bo’ladi.

Masalan: $y=3x^2+x-7;\quad f(x)=9x^7+2x^3+1;\ F(x)=-0{,}3x^6$ funksiyalarning aniqlanish sohasi $x\in R$, ya’ni $x\in(-\infty;+\infty)$.

$y=f(x)$ funksiyaning grafigi deb koordinata tekisligining barcha $(x;\ f(x)),\ (x\in X)$ nuqtalari to’plamiga aytiladi. Bu nuqtalar, ko’p hollarda, chiziqni hosil qiladi.

Masalan, 1-rasmda $y = \lg(25 - x^2) + \dfrac{1}{x}$ funksiyaning grafigi tasvirlangan

1-misol

$y = \lg(25 - x^2) + \dfrac{1}{x}$ funksiyaning aniqlanish sohasini toping.

Δ Logarifm ostidagi ifoda $25 - x^2 > 0$ da, ikkinchi qo'shiluvchi esa $x \neq 0$ da mavjud. Unda berilgan funksiyaning aniqlanish sohasi quyidagi sistemaning yechimidan iborat:

$$\begin{cases} 25 - x^2 > 0, \\ x \neq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 < 25, \\ x \neq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} |x| < 5, \\ x \neq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} -5 < x < 5, \\ x \neq 0; \end{cases} \qquad \text{(A)}$$

$x \in (-5;0)U(0;5)$. *Javobi:* (-5; 0)U(0; 5)

(A) tengsizliklar sistemasining **Maple** KMS da yechlilshi quyidagicha:

```
> solve({25-x^2>0, x<>0}, x);
```

ya'ni Maple da sistema tengsizliklar to'plami deb qaraladi va qaysi o'zgruvchiga nisbatan yechilishi albatta ko'rsftiladi. Yechim quyidagi ko'rinishda hosil bo'ladi.

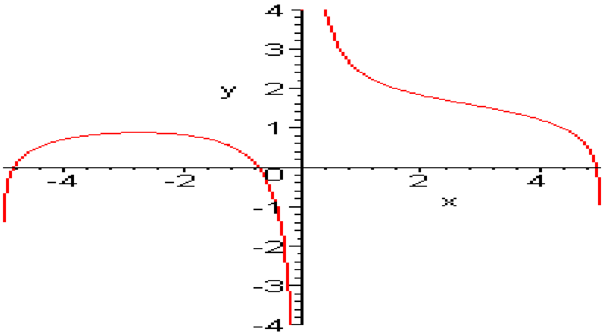
$$\{-5 < x, x < 0\}, \{x < 5, 0 < x\}$$

Bu funksiyaning grafigini **Maple** chizish quyidagicha:

```
f:=x->log10(25-x^2)+1/x;  plot(f(x), x=-5..5, y=-4..4);
```

Natijada quyidagi hosil bo'ladi: $f := x \to \log10(25 - x^2) + \dfrac{1}{x}$

Grafigi 1-rasmla keltirilgan. ▲



1-rasm.

Eslatma. plot(f(x), x=-5..5, y=-4..4)

f(x) funksiyning berilgan $x \in (-5, 5)$, $y \in (-4, 4)$ oraliqda grafigini chizish funksiyasidir.

Murakkab funksiya

Ta'rif. $y=f(u)$ funksiya E to'plamda, $u=\varphi(x)$ funksiya X to'plamda berilgan va $u=\varphi(x)$ ning qiymatlar to'plami E ning qism-to'plami bo'lsin. Unda

$$y=f[\varphi(x)]$$

- murakkab funksiya, yoki $y=f(u)$ va $u=\varphi(x)$ funksiyalarning kompozitsiyasi deyiladi.

Masalan: 1. $y=\sin u$ va $u=5x-3$ lardan tuzilgan murakkab funksiya, ya'ni bu funksiyalarning kompozisiyasi $y=\sin(5x-3)$ dir.

2. $y=tg^2x$ funksiya $y=u^2$ va $u=tgx$ funksiyalardan tuzilgan murakkab funksiyadir.

2-misol

$f(x)=x^2$, $g(x)=\lg x$ funksiyalar berilgan.

$f[g(x)]$, $f(g(10)$, $g[f(x)]$, $g[f(10)]$, $g[f(-2)]$ funksiyalarni toping.

Δ $y=f(x)=x^2$, $u=g(x)=\lg x$; $f[g(x)]=f(u)=u^2=\lg^2 x$; $f[g(10)]=\lg^2 10=1^2=1$;
$g[f(x)]=g(y)=\lg y=\lg(x^2)$; $g[f(10)]=\lg 10^2=2$; $g[f(-2)]=\lg(-2)^2=\lg 4=0{,}60206$.

3. JUFT, TOQ, CHEGARALANGAN, DAVRIY VA MONOTON FUNKSIYALAR

Juft va toq funksiyalarning ta'rifi

X to'plamga *x* son bilan birga *-x* ham tegishli bo'lsa, bunday to'plam *koordinata boshiga nisbatan simmetrik to'plam* deyiladi.

Ta'rif. Agar koordinata boshiga nisbatan simmetrik bo'lgan *X* to'plamda aniqlangan $y = f(x)$ funksiya uchun istalgan $x \in X$ da:

$f(-x) = f(x)$ bo'lsa - *juft funksiya;*

$f(-x) = -f(x)$ bo'lsa - *toq funksiya* deyiladi.

$f(-x) \neq \pm f(x)$ bo'lsa, bu funksiya *juft ham, toq ham emas* deyiladi.

Masalan: $y = 5x^2$ juft funksiya, chunki $y(-x) = 5(-x)^2 = 5x^2 = y(x)$;

$y = 4x^5 \cos 2x$ toq funksiya, chunki

$$y(-x) = 4(-x)^5 \cos 2(-x) = -4x^5 \cos(-2x) = -4x^5 \cos 2x = -y(x);$$

$f(x) = x + 7x^2$ juft funksiya ham, toq funksiya ham emas, chunki

$$f(-x) = -x + 7(-x)^2 = -x + 7x^2 \neq \pm f(x).$$

Juft va toq funksiyalarning xossalari

1. Juft funksiyalarning grafigi ordinata o'qiga nisbatan simmetrik bo'ladi.
2. Toq funksiyaning grafigi koordinatalar boshiga nisbatan simmetrik bo'ladi.
3. O'zgarmas funksiya: $f(x) = c$, (c – o'zgarmas son) - juftdir. Isboti: $f(-x) = c = f(x)$.
4. Juft funksiyalarning yig'indisi, ayirmasi, ko'paytmasi, nisbati va kompozitsiyasi ham yana juft funksiya bo'ladi. Masalan: 3, x^4, $\cos x$ juft funksiyalar bo'lgani uchun:

$3 + x^4 + \cos x,\ 3x^4 - \cos 2x,\ 3 + x^4 \cos 6x,\ \dfrac{3 + x^4}{x^4 + \cos x}$ funksiyalar ham juft bo'ladi.

5. Ikkita toq funksiyaning yig'indisi va ayirmasi toq, ko'paytmasi va nisbati juft funksiya bo'ladi.

Masalan: x^3, $\sin x$ juft funksiyalar bolgani uchun:

$x^3 + \sin x,\ x^3 - \sin x$ - toq, $x^3 \sin x,\ \dfrac{x^3}{\sin x},\ \dfrac{\sin x}{x^3}$ - juft funksiyalar bo'ladi.

6. Juft funksiya bilan toq funksiyaning ko'paytmasi va nisbati toq funksiya, yig'indisi va ayirmasi esa juft funksiya ham, toq funksiya ham bo'lmaydi.

Masalan: x^2 - juft, $\sin x$ - toq funksiyalar bolgani uchun:

$x^2 \sin x,\ \dfrac{x^2}{\sin x}$ - toq funksiyalar bo'ladi,

$x^2 + \sin x,\ x^2 - \sin x$ - juft funksiya ham, toq funksiya ham bo'lmaydi.

Ko'rinadiki, juft va toq funksiyalar ustidagi amallar musbat va manfiy sonlar ustidagi amallarga o'xshash.

Chegaralangan funksiyalar

Ta'rif. Agar *f(x)* funksiyaning aniqlanish sohasiga tegishli barcha *x* lar uchun biror *M>0* son topilib, $|f(x)| < M$ o'rinli bo'lsa, *f(x)* funksiya chegaralangan deyiladi.

Masalan: $x \in (-\infty, +\infty)$ oraliqda: $y = x^2$ funksiya chegaralanmagan, $y = \dfrac{1 - x^2}{1 + x^2}$ funksiya esa chegaralangandir.

3-misol.

$f(x)=2^{-x}$ va $g(x)=\dfrac{1}{x^2}$ funksiyalardan qaysi biri $x \in (0; +\infty)$ oraliqda chegaralangan.

Δ Qaralayotgan oraliqda

$$|\,f(x)\,| = |\,2^{-x}| = 1/2^x \leq 1,$$

bo'lgani uchun *f(x)* $x\in(0; +\infty)$ oraliqda chegaralangan funksiyadir.

$$|g(x)| = \left|\frac{1}{x^2}\right| < M; \qquad |x| > \frac{1}{\sqrt{M}}$$

tengsizlik x ning 0 ga yetarlicha yaqin qiymatlarida bajarilmaydi, yani g*(x)* - chegaralanmagan funksiya. ▲

Davriy funksiyalar

Ta'rif. Funksiya aniqlanish sohasining istalgan x nuqtasi va T haqiqiy son uchun $f(x\pm T) = f(x)$ tenglik bajarilsa, *f(x)* - davriy funksiya*;* T – uning davri, *T* ning eng kichik musbat qiymati T_0 esa bu funksiyaning asosiy davri yoki eng kichik musbat davri deyiladi.

Masalan: 1. $\sin x$ va $\cos x$ davrli $2\pi n,\ (n\in Z)$ ga, eng kichik musbat davri esa 2π ga teng davriy funksiyalardir: $\sin x = \sin(x+2\pi n),\ \cos x = \cos(x+2\pi n)$.

2. tgx va $ctgx$ davrli $\pi n,\ (n\in Z)$ ga, eng kichik musbat davri π ga teng davriy funksiyalardir: $tgx = tg(x+2\pi n),\ ctgx = ctg(x+2\pi n).$

Agar *f(x)* funksiyaning eng kichik musbat (asosiy) davri T_0 bo'lsa, *Af(kx+b)* funksiyaning asosiy davri $\frac{\grave{O}_0}{k}$ bo'ladi.

Masalan: *y=sinx* ning asosiy davri $T_0=2\pi$ bo'lgani uchun *y=-3sin(4x-1)* funksiyaning asosiy davri $\frac{\grave{O}_0}{4} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ bo'ladi.

Monoton funksiyalar

Ta'rif. Agar x_1 va x_2 *f(x)* funksiyaning aniqlanish sohasiga tegishli nuqtalar bo'lsin. Agar

- $x_2>x_1$ bo`lsa $f(x_2) > f(x_1)$ bo'lsa, funksiya - *o'suvchi;*
- $x_2>x_1$ bo`lsa $f(x_2) \ge f(x_1)$ bo'lsa - *kamaymaydigan;*
- $x_2>x_1$ bo`lsa $f(x_2) < f(x_1)$ bo'lsa - *kamayuvchi*;
- $x_2> x_1$ bo`lsa $f(x_2) \le f(x_1)$ bo'lsa - *o'smaydigan*

funksiya deyiladi. Bu xil funksiyalar *monoton (bir yo'nalishda o'zgaradigan) funksiyalar,* ulardan o'suvchi va kamayuvchi funksiyalar esa *qat'iy monoton funksiyalar* deyiladi.

Masalan: $y = x^2$ funksiya (parabola) o'zining mavjudlik sohasi $(-\infty;\infty)$ da monoton emas. Lekin bu funksiya $[0;+\infty)$ oraliqda o'suvchi, $(-\infty;0)$ da kamayuvchi bo'lib, ushbu oraliqlarda nonotondir.

4. ELEMENTAR VA ASOSIY ELEMENTAR FUNKSIYALAR

Asosiy elementar funksiyalar

Ta'rif. Asosiy elementar funksiyalar deb quyidagi funksiyalarga aytiladi:

1. O'zgarmas funksiya*: y=c (c-o'zgarmas son)*. Uning aniqlanish sohasi $x\in R$.
2. Darajali funksiya*:* $y=x^{\alpha}$ *(α - noldan farqli haqiqiy son).* Aniqlanish sohasi α ga bog'liq.
3. Ko'rsatkichli funksiya*:* $y=a^x$ $(a>0,\ a\neq 1)$. Aniqlanish sohasi: $x\in R$.
4. Logarifmik funksiya*:* $u=\log_a x$ $(a>0,\ a\neq 1)$. Aniqlanish sohasi: $x\in R_+$.
5. Trigonometrik funksiyalar*:*
   y=sinx va *y=cosx.* Aniqlanish sohasi: $x\in R$..
   y=tgx. Aniqlanish sohasi: $x\neq\pi/2+\pi n,\ n\in Z.$
   y=ctgx. Aniqlanish sohasi: $x\neq\pi n,\ n\in Z.$
6. Teskari trigonometrik funksiyalar*:*
   y=arcsinx va *y=arccosx.* Aniqlanish sohasi: $x\in[-1;1]$*;*
   y=arctgx va *y=arcctgx.* Aniqlanish sohasi: $x\in R.$

Elementar funksiyalar

Ta'rif. Elementar funksiyalar deb asosiy elementar funksiyalardan chekli sondagi arifmetik amallar hamda ularning kompozitsiyalari (murakkab funksiyalar tuzish) yordamida hosil bo'lgan funksiyalarga aytiladi.

Ta'rifdan ko'rinadiki, asosiy elementar funksiyalarning o'zi ham elementar funksiyalar sinfiga tegishli. Masalan: quyidagilar elementar funksiyalardir:

$y=\sin(4x-3)$, $y=2^{tgx}$, $y=\ln\cos x$, $y=\sqrt{x^2+\cos 2x}$.

1. FUNKSIYANING NUQTADAGI VA CHEKSIZLIKDAGI LIMITI

1- misol

$f(x)=\dfrac{2x^2-18}{x-3}$ funksiya berilgan bo`lsin. U $x=3$ nuqtada aniqlanmagan. Bu nuqtaning biror atrofida $f(x)$ funksiya va *12* soni orasida ayirmaning modulini qaraylik:

$$|f(x)-12|=\left|\frac{2x^2-18}{x-3}-12\right|=\left|\frac{2x^2-18-12x+36}{x-3}\right|=\left|\frac{2(x^2-6x+9)}{x-3}\right|=\frac{2(x-3)^2}{|x-3|}=2|x-3|.$$

Ko`rinadiki, x ni *3* ga intiltirib (ya'ni $|x-3|$ ni kichraytirib, masalan, biror $\delta>0$ sondan kichik qilib), $f(x)$ ni *12* ga intiltirish (ya'ni $|f(x)-12|$ ni *istalgan* $\varepsilon>0$ *sondan kichik qilish)* mumkin. Bunday holda $f(x)=\dfrac{2x^2-18}{x-3}$ funksiya "*x argument 3 ga intilganida 12 ga intiladi*" yoki "*x=3 nuqtada 12 ga teng limitga ega"* deyiladi. Bu $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2-18}{x-3}=12$ kabi yoziladi.

Funksiya nuqtadagi limitining ta'rifi

1-ta'rif. $f(x)$ funksiya $x=a$ nuqtaning biror atrofida aniqlangan bo`lsin, $x=a$ nuqtaning o`zida aniqlanmagan bo`lishi ham mumkin. Agar istalgan $\varepsilon>0$ son uchun shunday $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ son topilib, $|x-a|<\delta$ ni qanoatlantiruvchi barcha x lar uchun

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa, *A soni f(x) funksiyaning x=a nuqtadagi limiti* deyiladi. Bu quyidagicha yoziladi.

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$ yoki $x\to a$ *da* $f(x)\to A$.

Ta'rifni quyidagicha tushunamiz: $|x-a|$ ni tanlash (kichraytirish) hisobiga $|f(x)-A|$ ni istalgancha kichik qila olish mumkin bo`lsa, A soni $f(x)$ funksiyaning $x=a$ nuqtadagi limiti deyilar ekan. Boshqacha aytganda, x argument biror a songa intilganda $f(x)$ funksiya ham biror A songa intilsa, bu A son $f(x)$ ning $x=a$ nuqtadagi limiti deyiladi.

1-ta'rifdan kelib chiqadigan natija

$|x-a|<\delta \;\Leftrightarrow\; -\delta<x-a<\delta \;\Leftrightarrow\; a-\delta<x<a+\delta \;\Leftrightarrow\; x\in(a-\delta;\,a+\delta)$

$|f(x)-A|<\varepsilon \;\Leftrightarrow\; -\varepsilon<f(x)-A<\varepsilon \;\Leftrightarrow\; A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon \;\Leftrightarrow\; f(x)\in(A-\varepsilon;\,A+\varepsilon)$,

ya'ni, $f(x)$ funksiya $x=a$ nuqtada A soniga teng limitga ega bo`lsa, x ning $(a-\delta;\,a+\delta)$ oraliqdagi qiymatlariga mos *f(x)* funksiyaning qiymatlari $(A-\varepsilon;\ A+\varepsilon)$ oraliqda yotadi (1-rasm).

1-misolning **Maple KMS** da hisoblanishi quyidagicha:

```
> restart:
Limit((2*x^2-18)/(x-3), x=3)=limit((2*x^2-18)/(x-3), x=3);
```

$$\lim_{x \to 3} \frac{2\,x^2 - 18}{x - 3} = 12$$

$\varepsilon=0.001$ bo'lganida x uchun (A) tengsizlik bajariladigan oraliqni topamiz:

```
> eps:=0.001; solve(abs(x-3) < eps/2, x);
```

Natija quyidagicha chiqadi:

$$\lim_{x \to 3} \frac{2\,x^2 - 18}{x - 3} = 12$$

$$eps := 0.001 \quad \text{RealRange}(\text{Open}(2.999500000), \text{Open}(3.000500000))$$

Demak, izlangan oraliq $x \in (2.9995;\ 2.0005)$ ekan.

2-misol

$$\lim_{x\to -1} \frac{5-5x^2}{x+1} = 10 \text{ ekanini isbotlansin.}$$

Δ Isboti. Berilgan: $a=-1,\ A=10,\ f(x)=\dfrac{5-5x^2}{x+1}$. Isbotlash kerak: istalgan $\varepsilon>0$ uchun $|f(x)-A|<\varepsilon$ ni qanoatlantiruvchi $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ son topish mumkin ekanini.

$$|f(x)-A| = \left|\frac{5-5x^2}{x+1} - 10\right| = \left|\frac{5(1-x^2)}{x+1} - 10\right| = \left|\frac{5(1+x)(1-x)}{x+1} - 10\right| = |5(1-x)-10| = 5|x+1| < \varepsilon;$$

$|x-a|<\delta$ va $|x+1|<\dfrac{\varepsilon}{5}$ dan $\delta=\dfrac{\varepsilon}{2}$, ya'ni ta'rifda aytilgan δ sonni topish mumkin.Tenglik isbotlandi.

Agar ε=0,001 desak, δ=0,0005 bo'ladi. x ning $(a-\delta;\ a+\delta)=(-1{,}0005;-0{,}9995)$ intervalga tegishli qiymatlarida *f(x)* ning mos qiymatlari $(A-\varepsilon, A+\varepsilon)=(9{,}999;\ 10{,}001)$ intervalda yotadi. ▲

Funksiyaning cheksizlikdagi limiti ta'rifi

2-ta'rif. Agar *f(x)* funksiya *x* ning yetarlicha katta qiymatlarida aniqlangan bo`lib, istalgan $\varepsilon>0$ son uchun shunday $M=M(\varepsilon)>0$ soni topilsaki, $|x|>M$ ni qanoatlantiruvchi barcha *x* lar uchun $|f(x)-A|<\varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, *A* soni *f(x)* funksiyaning $x\to\infty$ dagi limiti deyiladi. Bu quyidagicha yoziladi:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A. \text{ yoki } \quad x\to\infty \ da \quad f(x)\to A.$$

Ta'rifni quyidagicha tushunamiz: agar $|x|$ ni yetarlicha katta qilib tanlash hisobiga $|f(x)-A|$ ni istalgancha kichik qilish mumkin bo`lsa, *A* soni *f(x)* ning $x\to\infty$ dagi limiti deyilar ekan.

2-ta'rifdan kelib chiqadigan natija

Agar *f(x)* funksiya $x \to \infty$ da A ga teng limitga ega bo'lsa, istalgan $\varepsilon>0$ uchun shunday $M=M(\varepsilon)>0$ topish mumkinri, $|x|>M$ ni qanoatlantiruvchi barcha x larda *f(x)* funksiyaning qiymatlari $(A-\varepsilon; A+\varepsilon)$ oraliqda yotadi.

3-misol

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x+2}{x} = 1$ ekanini isbotlang.

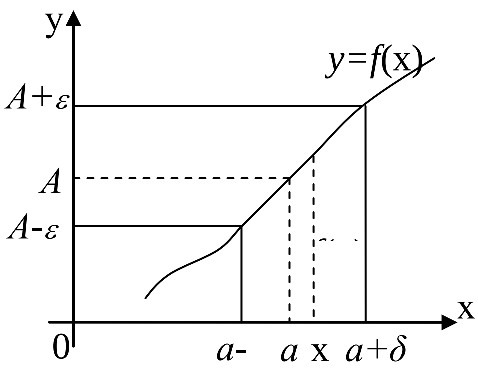
Δ $f(x)=\frac{x+2}{x}$; $A=1$ bo`lganidan istalgan $\varepsilon>0$ uchun biror $M>0$ son topilib, $|x|>M$ ni

qanoatlantiruvchi barcha x lar uchun $\left|\frac{x+2}{x-1}\right|<\varepsilon$ bajarilishini ko`rsatish kerak:

$|f(x)-A|<\varepsilon;$ $\left|\frac{x+2}{x-1}\right|<\varepsilon;$ $\frac{2}{|x|}<\varepsilon;$ $|x|>\frac{2}{\varepsilon}$.

Ko`rinadiki, $M=\frac{2}{\varepsilon}$ deb olsak, barcha $|x|>M$ ni qanoatlantiruvchi x lar uchun $|f(x)-1|<\varepsilon$ bajariladi. Bu 1 soni berilgan funksiyaning limiti ekanini bildiradi.

Misol uchun $\varepsilon=0.001$ desak, $M=2000$. Unda x ning $|x|>2000$ ni qanoatlantiruvchi barcha qiymatlarida *f(x)* ning mos qiymatlari $(A-\varepsilon;\ A+\varepsilon)=(0{,}999;\ 1{,}001)$ intervalda yotadi. ▲



1-rasm

2. CHEKSIZ KICHIK VA CHEKSIZ KATTA FUNKSIYALAR. FUNKSIYA LIMITI HAQIDAGI ASOSIY TEOREMALAR

Cheksiz kichik funksiyaning ta'rifi

1-ta'rif. $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$ bo`lsa, $\alpha(x)$ funksiya $x\to a$ da <u>cheksiz kichik funksiya</u> deyiladi.

Cheksiz katta funksiyaning ta'rifi

2-ta'rif. $\lim\limits_{x\to a}\beta(x)=\infty$ bo`lsa, $\beta(x)$ funksiya $x\to a$ da <u>cheksiz katta funksiya</u> deyiladi.

Demak, limiti nolga teng funksiya cheksiz kichik, limiti cheksiz bo`lgan funksiya esa cheksiz katta funksiya ekan.

Cheksiz kichik va cheksiz katta funksiyalarning xossalari:

1°. Agar $x\to a$ da: $\alpha(x)$ cheksiz kichik funksiya bo`lsa, $\dfrac{1}{\alpha(x)}$ cheksiz katta funksiya bo`ladi;

$\beta(x)$ cheksiz katta funksiya bo`lsa, $\dfrac{1}{\beta(x)}$ cheksiz kichik funksiya bo`ladi.

2°. Chekli sondagi cheksiz kichik(cheksiz katta) funksiyalarning yig`indisi, ayirmasi, ko`paytmasi, chekli songa va chegaralangan funksiyaga ko`paytmasi, chekli songa va chegaralangan funksiyaga nisbati (maxraj nolga teng bo`lmaganda) ham yana cheksiz kichik(cheksiz katta) funksiya bo`ladi.

3°. Agar $f(x)$ funksiya $x\to a$ da A limitga ega bo`lsa, uni $A$ soni va $x\to a$ da cheksiz kichik funksiyaning yig'indisi ko'rinishda ifodalash mumkin. Aksincha, agar $f(x)$ funksiyani biror $A$ soni va $x\to a$ da cheksiz kichik funksiyaning yig`indisi ko`rinishda yoezish mumkin bo`lsa, A soni $f(x)$ ning $x\to a$ dagi limiti bo`ladi, ya'ni

$$\lim_{x\to a} f(x)=A \quad \Leftrightarrow \quad f(x)=A+\alpha(x), \quad \lim_{x\to a}\alpha(x)=0.$$

Bu xossalardan quyidagi limitlar haqidagi asosiy teoremalarni isbotlashda foydalaniladi.

Limitlar haqidagi asosiy teoremalar

1-teorema(yig`indining limiti haqida). Ikki funksiya algebraik yig`indisining limiti shu funksiyalar limitlarining algebraik yig`indisiga teng:

$$\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)]=\lim_{x\to a} f(x)+\lim_{x\to a} g(x) \qquad (1)$$

Bu teorema istalgancha chekli sondagi funksiyalar algebraik yig`indisi uchun ham o`rinli.

2-teorema(ko`paytmaning limiti haqida)**.** Ikki funksiya ko`paytmasining limiti shu funksiyalar limitlarining ko`paytmasiga teng:

$$\lim_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)]=\lim_{x\to a} f(x)\cdot\lim_{x\to a} g(x) \qquad (2)$$

Natija. O`zgarmas ko`paytuvchini (bo`luvchini) limit belgisidan tashqariga chiqarish mumkin:

$$\lim_{x\to a}[C\cdot f(x)]=C\cdot\lim_{x\to a} f(x), \qquad (C - \text{o'zgarmas son}). \qquad (2')$$

3-teorema (bo`linmaning limiti haqida). Ikki funksiya nisbatining limiti, maxrajning limiti noldan farqli bo`lganda, bu funksiyalar limitlarining nisbatiga teng:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}, \qquad (\lim_{x\to a} g(x)\neq 0) \qquad (3)$$

4-teorema (tengsizlikda limitga o`tish haqida). Agar $f(x)$ funksiya $x=a$ nuqtada limitga ega va bu nuqtaning biror atrofida $f(x)>0$ bo`lsa, u holda

$$\lim_{x\to a} f(x)\geq 0 \qquad (4)$$

bo`ladi.

5-teorema (oraliq funksiyaning limiti haqida). Agar $x=a$ nuqtaning biror atrofidagi barcha nuqtalarda

$$f_1(x)\leq\varphi(x)\leq f_2(x) \quad \text{va} \quad \lim_{x\to a} f_1(x)=\lim_{x\to a} f_2(x)=A \qquad (5)$$

bo`lsa, $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=A$ bo`ladi.

Teoremalarning isbotlari

1-teoremaning isboti

f(x) va *g(x)* ning $x\to a$ dagi limitlari *A* va *B* bo`lsin:

$$\lim_{x\to a} f(x)=A, \qquad \lim_{x\to a} g(x)=B$$

3° - *xossa*ga asosan *f(x)* ni $A+\alpha(x)$, *g(x)* ni $B+\beta(x)$ deb yezish mumkin, bunda $\alpha(x)$ va $\beta(x)$ lar $x\to a$ da cheksiz kichik funksiyalar:

$$f(x) = A+\alpha(x),\quad g(x)=B+\beta(x), \qquad \lim_{x\to a}\alpha(x)=0, \qquad \lim_{x\to a}\beta(x)=0.$$

Unda $f(x)+g(x)=(A+B)+\alpha(x)+\beta(x)$. 2° - *xossa*ga ko`ra $\alpha(x)+\beta(x)$ ham cheksiz kichik miqdor, shuning uchun $A+B$ son $f(x)+g(x)$ ning limiti bo`ladi*(3°- xossaga ko`ra):*

$$\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)] = A+B = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$$

Teorema isbotlandi.

2-teoremaning isboti

1-teoremaning isboti kabi bajaramiz:

$$\lim_{x\to a} f(x)=A, \Rightarrow f(x) = A+\alpha(x), \qquad \lim_{x\to a}\alpha(x)=0, \qquad (4)$$

$$\lim_{x\to a} g(x)=B \Rightarrow g(x)= B+\beta(x), \qquad \lim_{x\to a}\beta(x)=0$$

$$f(x)\cdot g(x)=[A+\alpha(x)]\cdot[B+\beta(x)]=A\cdot B+[A\cdot\beta(x)+B\cdot\alpha(x)+\alpha(x)\cdot\beta(x)].$$

O`rta qavs ichidagi ifoda $2^\circ$- *xossa*ga ko`ra $x\to a$ da cheksiz kichik funksiya. Shuning uchun $A\cdot B$ 3°-*xossa*ga ko`ra $x\to a$ da $f(x)\cdot g(x)$ ning limiti bo`ladi:

$$\lim_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)]=A\cdot B = \lim_{x\to a} f(x)\cdot \lim_{x\to a} g(x)$$

Teorema isbotlandi.

3-teoremaning isboti

Shartga ko`ra $\lim\limits_{x\to a} g(x)= V\neq 0$. Oldingi teoremaning isbotiga o`xshash bajaramiz va (4) dan foydalanamiz:

$$\frac{\mathrm{f(x)}}{\mathrm{g(x)}} = \frac{A+\alpha(x)}{B+\beta(x)} = \frac{A}{B} + \frac{A+\alpha(x)}{B+\beta(x)-\frac{A}{B}} = \frac{A}{B} + \frac{B\cdot\alpha(x)-A\cdot\beta(x)}{B\cdot(B+\beta(x))}.$$

Oxirgi kasr $B\neq 0$ bo`lgani uchun $2^\circ$-*xossa*ga asosan cheksiz kichik. Shuning uchun $\frac{A}{B}$ son $\frac{\mathrm{f(x)}}{\mathrm{g(x)}}$ ning $x\to a$ dagi limitidir*($3^\circ$-xossa*ga ko`ra):

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}. \qquad (\lim_{x\to a} g(x)\neq 0)$$

Teorema isbotlandi.

Keyingi ikki teoremaning isbotini ko`rsatilgan adabiyotlardan topib o`rganishni tavsiya etamiz.

Eslatma. Yuqoridagi teoremalar *a* cheksiz bo`lganida ham o`rinli.

1-misol

Limitni hisoblang. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4+3x^2}{x^2}$

Δ $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4+3x^2}{x^2} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{4}{x^2} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{4}{x^2} + \lim\limits_{x\to\infty}3 = 0+3=3.$ *Javoib*: *3.* ▲

2-misol

Limitni hisoblang. $\lim\limits_{x\to 1}(x+1)(4x-7)$.

Δ

$$\lim_{x\to 1}(x+1)(4x-7) = \lim_{x\to 1}(x+1)\cdot\lim_{x\to 1}(4x-7) = (\lim_{x\to 1}x+1)\cdot(\lim_{x\to 1}4x-7) =$$

$$=(1+1)\cdot(4\lim_{x\to 1}x-7)=2\cdot(4-7)=2\cdot(-3)=-6. \quad \textit{Javobi}: -6. \quad \blacktriangle$$

3-misol

Limitni hisoblang. $\lim_{x\to 2}\frac{3x-2}{2x+1}$

Δ $\lim_{x\to 2}\frac{3x-2}{2x+1} = \frac{\lim_{x\to 2}(3x-2)}{\lim_{x\to 2}(2x+1)} = \frac{3\cdot 2-2}{2\cdot 2+1} = \frac{4}{5}.$ *Javob*: $\frac{4}{5}$. ▲

4-misol

Limitni hisoblang. $\lim_{x\to -1}\frac{x^2+3x+2}{x+1}.$

Δ $x\to -1$ da sura`tning ham, maxrajning ham limiti *0* ga teng. Shuning uchun nisbatning limiti haqidagi teoremani qo`llab bo`lmaydi. Oldin shakl almashtirish bajaramiz:

$$\frac{x^2+3x+2}{x+1} = \frac{(x+1)(x+2)}{x+2}.$$

Endi limitga o`tamiz:

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2+3x+2}{x+1} = \lim_{x\to -1}(x+2) = -1+2 = 1. \quad \textit{Javob}: 1 \quad \blacktriangle$$

3. ANIQMASLIKLARNI OCHISH (YECHISH)

0/0 va ∞/∞ aniqmasliklarning ta'rifi

1-ta'rif. Agar $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x)=\infty$ bo`lsa, $\frac{f(x)}{g(x)}$ ifoda $x=a$ da $\frac{\infty}{\infty}$ *ko`rinishdagi aniqmaslik*, $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ limitni hisoblash esa $\frac{\infty}{\infty}$ *aniqmaslikni ochish (yechish)* deyiladi.

Masalan: $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+5}{7-x+4x^2}$, $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2+3n^4}}{1+n-6n^2}$ lar $\frac{\infty}{\infty}$ aniqmasliklardir.

2-ta'rif. Agar $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) =0$ bo`lsa, $\frac{f(x)}{g(x)}$ ifoda $x=a$ da $\frac{0}{0}$ *ko`rinishdagi aniqmaslik*, $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ limitni hisoblash esa $\frac{0}{0}$ *aniqmaslikni ochish(yechish)* deyiladi.

Masalan: $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^2-3x+1}$, $\lim_{n\to 2}\frac{\sqrt{16-n^4}}{3n-6}$, $\lim_{x\to 0}\frac{x^2+x}{\sin 2x}$ lar $\frac{0}{0}$ aniqmasliklardir.

3-ta'rif. Agar $\lim_{x\to a} f(x) = 0$, $\lim_{x\to a} g(x)=\infty$ bo`lsa, $f(x)\cdot g(x)$ ifoda $x=a$ da $0\cdot\infty$ *ko`rinishdagi aniqmaslik*, $\lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x)$ limitni hisoblash esa $0\cdot\infty$ *aniqmaslikni ochish (yechish)* deyiladi.

Masalan: $\lim_{x\to 0} x\,ctgx$, $\lim_{n\to\infty} n(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1})$ lar $0\cdot\infty$ aniqmasliklardir.

Shu kabi: $\infty-\infty$, 1^∞, ∞^0, 0^0 aniqmasliklar ham ta'riflanadi.

1-eslatma

∞ /∞ aniqmaslikni ochishda, $x\to\infty$, $f(x)$ va $g(x)$ - ko`phadlar, $n$- ular darajalarng eng kattasi bo`lsa, avval kasrning surat va maxrajini x^n ga bo`lib, keyin limitga o'tiladi. Masalan:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^4-5x+2}{4x^4+7x+1}$$

∞/∞ ko`rinishdagi aniqmaslik. Uni ochish uchun, avval kasrning surat va maxrajini $x^4$ ga bo`lib, so'ng limitga o`tamiz:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^4-5x^2+2}{4x^4+7x^3+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{3-\frac{5}{x^2}+\frac{2}{x^4}}{4+\frac{7}{x}+\frac{1}{x^4}}=\frac{3-0+0}{4+0+0}=\frac{3}{4}.\ \ Javob:\ \frac{3}{4}$$

1-eslatmada aytilgan usulni surat yoki maxrajdagi ko'phadlar ildiz ostida kelganida ham qo'llash mumkin.

1-misol

Limitni hisoblang. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4-15x^2}{\sqrt{7+9x^4}}.$

Δ $$\lim_{x\to\infty}\frac{4-15x^2}{\sqrt{7+9x^4}}.=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{4-15x^2}{x^2}}{\frac{\sqrt{7+9x^4}}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{4}{x^2}-15}{\sqrt{\frac{7}{x^4}+9}}=\frac{0-15}{\sqrt{0+9}}=-\frac{15}{3}=-3.\ \ Javob:\ -3$$ ▲

2-eslatma

0/0 aniqmaslikni ochishda, $x\to a$, $f(x)$ va $g(x)$ – ko`phadlar bo'lsa, avval, kasrning surat va maxrajini 0 ga aylantiruvchi (bu ko'pincha $x-a$ yoki uning darajasi) ifodaga qisqartirib, keyin limitga o'tiladi. Masalan:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{2x-x^2}$$

limit ostidagi kasr $x=2$ da 0/0 aniqmaslikdir. Uni ochish uchun, avval kasrning surat va maxrajini $x-2$ ga qisqartirib, so'ng limitga o`tamiz:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{2x-x^2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{x(2-x)}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-1)}{x(2-x)}=\lim_{x\to 2}\frac{1-x}{x}=\frac{1-2}{2}=-\frac{1}{2}.$$

Bu yerda $x_1=2,\ x_2=1$ $x^2-3x+2=0$ kvadrat tenglamaning ildizlari.

2-misol

Limitni toping. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{x^2-9}$

Δ

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{x^2-9}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x-2)}{(x-3)(x+3)}=\lim_{x\to 3}\frac{x-2}{x+3}=\frac{3-2}{3+3}=\frac{1}{6}.\ \ Javob:\ \frac{1}{6}.$$ ▲

2-eslatmada aytilgan usulni surat yoki maxrajdagi ko'phadlar ildiz ostida kelganida ham qo'llash mumkin.

3-misol

Limitni toping. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2+x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}.$

Δ

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}=\lim_{x\to 0}\frac{x(x+1)(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x(x+1)(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{(1+x)-(1-x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x(x+1)(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{2x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x(x+1)(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{2}=\frac{1\cdot(1+1)}{2}=1.\quad \text{Javob}:\ 1.$$

▲

∞-∞, 0·∞, 0^0, 1^∞, ∞^0 aniqmasliklar, ko`p hollarda *0/0* yoki *∞/∞* aniqmasliklarga keltirilib yechiladi (ochiladi).

4-misol

Limitni toping. $\lim\limits_{x\to\infty} x(\sqrt{x^2+4}-\sqrt{x^2+1})$

Δ Bu $x\to\infty$ da *∞-∞* aniqmaslik. Limitga o`tishdan oldin limit ostidagi kasrning surat va maxrajini $\sqrt{x^2+4}+\sqrt{x^2+1}$ ga ko`paytiramiz:

$$\lim_{x\to\infty} x(\sqrt{x^2+4}-\sqrt{x^2+1}) = \lim_{x\to\infty}\frac{x(\sqrt{x^2+4}-\sqrt{x^2+1})(\sqrt{x^2+4}+\sqrt{x^2+1})}{\sqrt{x^2+4}-\sqrt{x^2+1}} =$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x((x^2+4)-(x^2+1))}{\sqrt{x^2+4}+\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to\infty}\frac{3x}{\sqrt{x^2+4}+\sqrt{x^2+1}}.$$

Hosil bo`lgan *∞/∞* aniqmaslikni ochish uchun kasrning surat va maxrajini *x* ga bo`lamiz, keyin limitga o`tamiz:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3}{\frac{\sqrt{x^2+4}+\sqrt{x^2+1}}{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{3}{\sqrt{x+\frac{4}{x^2}}+\sqrt{x+\frac{1}{x^2}}} = \frac{3}{1+1} = 1{,}5. \quad ▲$$

1-misoldagi limitning **Maple KMS** da hisoblablanishi quyidagicha:

```
> restart:
Limit((4-15*x^2)/sqrt(7+9*x^4),x=infinity)=
limit((4-15*x^2)/sqrt(7+9*x^4), x=infinity);
```

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4-15x^2}{\sqrt{7+9x^4}} = -5$$

FUNKSIYANING UZLUKSIZLIGI

Mavzuning rejasi

1. Funksiyaning nuqtadagi uzluksizligi.
2. Uzilish nuqtalari va ularning turlari.
3. Kesmada uzluksiz funksiyalar va ularning xossalari.

Tayanch so'z va iboralar: funksiyaning nuqtadagi uzluksizligi; uzluksiz va uzilishga ega funksiyalar; birinchi va ikkinchi tur uzilish nuqtalari; yo'qotiladigan(to'g'rilanuvchi) uzilish nuqtasi; sakrash nuqtasi; funksiyaning berilgan nuqtadagi sakrashi; funksiyaning chapdan va o'ngdan uzluksizligi; kesmada uzluksiz funksiyalar.

1. FUNKSIYANING NUQTADAGI UZLUKSIZLIGI

Funksiyaning grafiqi bitta tutash chiziqdan iborat bo`lishi, yoki bir necha (yoki cheksiz ko`p) uzuq-yuluq chiziqlardan iborat bo`lishi mumkin. Birinchi holda chiziq uzluksiz funksiyaning grafigi, ikkinchi holda esa uzluksiz bo`lmagan, yani uzilishga ega funksiya grafigidir (1-2 – rasmlar).

E'tibor berilsa, $y=f(x)$ funksiay grafigining tutash qismiga mos keluvchi istalgan $x=x_0$ nuqtada funksiya chekli limitga ega va u $f(x_0)$ ga teng: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Ya'ni chap va o`ng limitlar mavjud va ular $f(x_0)$ ga teng: $f(x_0-0) = f(x_0+0) = f(x_0)$

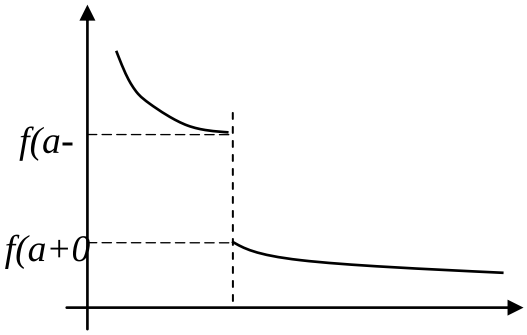
qo'sh tenglik o`rinli. Bunday nuqtalarda funksiya uzluksizdir. Uzuq-yuluq qismlardan iborat grafik qismlarining chegaralariga mos keluvchi nuqtalarda esa bu tengliklar bajarilmaydi (masalan, 1-2-rasmlarda $x=a$ va $x=1$ nuqtalarda). Bunday nuqtalar funksiyaning uzilish nuqtalaridir.

Funksiya nuqtada uzluksizligining ta'rifi

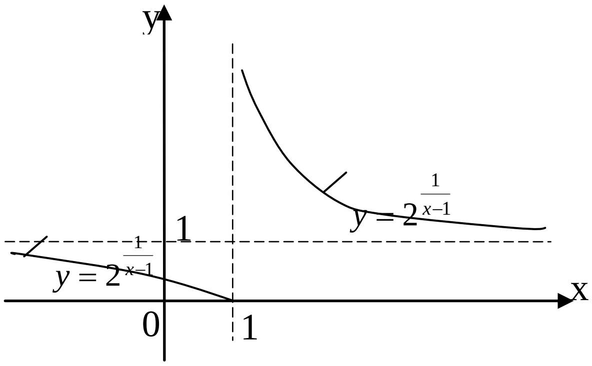
1-ta'rif. $y=f(x)$ funksiyaning aniqlanish sohasiga tegishli x_0 nuqtada

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0) \qquad (1)$$

bo`lsa, funksiya bu *nuqtada uzluksiz* deyiladi.



1-rasm.



2-rasm

$\lim\limits_{x\to x_0} x = x_0$ bo'lganidan, (1) ni $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)= f(\lim\limits_{x\to x_0} x)$ deb yozish ham mumkin. Bundan kelib chiqadiki, uzluksiz funksiyaning limitini topishda funksiyaning ifodasida x o'rniga x_o ni qo'yish mumkin.

Eslatma.

<u>1-ta'rif quyidagilarni bildiradi:</u>

1) funksiya x_0 nuqta va uning biror atrofida aniqlangan;

2) $x=x_0$ nuqtada chap va o`ng limitlar mavjud va teng;

3) bu limitlar funksiyaning x_0 nuqtadagi qiymatiga teng.

Ya'ni

$$f(x_0-0)=f(x_0+0)=f(x_0) \qquad (2)$$

Masalan:

1. $f(x)=x^2$ funksiya istalgan $x=x_0$ nuqtada uzluksiz. Chunki,

$f(x_0-0)=(x_0-0)^2=x_0^2;\ f(x_0+0)=(x_0+0)^2=x_0^2;\quad f(x_0)=x_0^2.$ (2) qo'sh tenglik bajariladi.

2. $y=2^{\frac{1}{x-1}}$ funksiya x=1 nuqtada uzluksiz emas. Chunki,

$$f(1-0)=\lim_{x\to 1-0} f(x)=\lim_{x\to 1-0} 2^{\frac{1}{x-1}}=2^{\frac{1}{1-0-1}}=2^{-\infty}=\frac{1}{2^{\infty}}=0;$$

$$f(1+0)=\lim_{x\to 1+0} f(x)=\lim_{x\to 1-0} 2^{\frac{1}{x+1}}=2^{\frac{1}{1+-0-1}}=2^{+\infty}=\infty;\qquad f(1-0)\neq f(1+0),$$ ya'ni

$\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ mavjud emas. Lekin funksiya istalgan $x\neq 1$ nuqtada uzluksiz.

Funksiyaning nuqtadagi orttirmasi

$y=f(x)$ funksiya uchun $x=x_0$ nuqtada: $\Delta x=x-x_0$ - argument orttirmasi;

$\Delta y=\Delta f=f(x)-f(x_0)$ - funksiya orttirmasi deyiladi.

x va $f(x)$ ni ular yordamida: $x=x_0+\Delta x,\ f(x)=f(x_0)+\Delta f$ ko'rinishda yozish mumkin.

Masalan:

1. $f(x)=3x+5$ funksiyaning $x=1$ nuqtadagi argument va funksiya orttirmalari:

$$\Delta x = x-1;\ \ \Delta f = f(x)-f(1)=3x+5-(3\cdot 1+5)=3x-3.$$

Unda $x=1+\Delta x,\quad f(x)=f(1+\Delta x)=3(1+\Delta x)+5=3\Delta x+8$ deyish mumkin.

2. $y=x^2+2$ funksiyaning istalgan x nuqtadagi orttirmasi:

$$\Delta y = f(x+\Delta x)-f(x)=(x+\Delta x)^2+2-((x^2+2)=x^2+2x\Delta x+(\Delta x)^2+2-(x^2+2)=$$

$$=2x\Delta x+(\Delta x)^2;\qquad \Delta y=\Delta x(2x+\Delta x).$$

$x-x_0=\Delta x,\quad f(x)-f(x_0)=\Delta y$ tengliklardan $x\to x_0$ da $\Delta x\to 0$, $f(x)\to f(x_0)$ da $\Delta y\to 0$ va $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0) \Leftrightarrow \lim\limits_{x-x_0\to 0}[f(x)-f(x_0)]=0,$ ya'ni funksiya uzluksizligi ta'rifi (1) ni

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=0.$$

deb yozish mumkin. Bundan quyidagi ta'rif kelib chiqadi.

Funksiya nuqtada uzluksizligining orttirma yordamidagi ta'rifi

2–ta'rif. Funksiya berilgan nuqtada uzluksiz deyiladi, agar bu nuqtada argumentning cheksiz kichik orttirmasiga funksiyaning ham kichik orttirmasi mos kelsa, yani

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=0. \qquad (3)$$

Masalan: $y=\dfrac{1}{x}$ funksiyani (3) dan foydalanib, x nuqtada uzluksizlikka quyidagicha tekshirish mumkin:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}(f(x+\Delta x)-f(x))=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{1}{x+\Delta x}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{x(x+\Delta x)}=\frac{0}{x^2}=0.\ (x\neq 0).$$

Demak, berilgan funksiya barcha $x\neq 0$ nuqtalarda uzluksiz.

Nuqtada uzluksiz funksiylarning xossalari

1-teorema. Biror nuqtada uzluksiz bo'lgan funksiyalarning yig'indisi, ko'paytmasi, nisbani (agar qaralayotgan nuqtada maxraj nolga aylanmasa) ham shu nuqtada uzluksiz bo'ladi.

2-teorema. Agar $f(u)$ funksiya $u=A$ nuqtada uzluksiz, $u=g(x)$ funksiya $x=x_0$ nuqtada uzluksiz va $g(x_0)=A$ bo'lsa, $f(g(x))$ murakkab funksiya $x=x_0$ nuqtada uzlusiz bo'ladi.

3-teorema. Barcha elementar funksiyalar o'z aniqlanish sohasida uzluksizdir.

Bu teoremalarning isbotlari limitning xossalaridan kelib chiqadi.

1-misol

$f(x)=x^3$ funksiyani x_o=2 nuqtada uzluksizlikka tekshiring.

Δ *1-usul.* 1-ta'rifdan foydalanib tekshiramiz:

1) $f(x_0)=f(2)=2^3=8$. Funksiya $x_0=2$ nuqtada aniqlangan.
2) $f(2-0)=\lim\limits_{x\to 2-0} f(x)=2^3=8;\quad f(2+0)=\lim\limits_{x\to 2+0} f(x)=2^3=8;\quad f(2-0)=f(2+0);$
3) $f(2-0)=f(2+0)=f(2).$

(2) shart bajariladi, funksiya x_o=2 nuqtada uzluksiz.

2-usul. Orttirma yordamida tekshiramiz: $\Delta x=x-x_0,\ x=x_0+\Delta x,$

$$\Delta y = f(x)-f(x_0)=x^3-x_0^3=(x_0+\Delta x)^3-x_0^3=x_0^3+3x_0^2\Delta x+3x_0(\Delta x)^2+$$

$$+(\Delta x)^3-x_0^3=3x_0\Delta x\cdot(x_0+\Delta x).$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}3x_0\Delta x\cdot(x_0+\Delta x)=0,$$

(3) shart bajariladi, funksiya x_o=2 nuqtada uzluksiz. ▲

Funksiyaning chapdan va o'ngdan uzluksizligi

3-ta'rif. Agar *f(x)* funksiya x_0 nuqtada aniqlangan bo`lib,

$$f(x_0-0)=f(x_0)\ \ [f(x_0+0)=f(x_0)]$$

bo`lsa, funksiya x_0 nuqtada **chapdan(o'ngdan) uzluksiz** deyiladi.

Masalan: [0; 1] kesmada aniqlangan $f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{1-x}$ funksiya x=0 nuqtada o'ngdan, x=1 nuqtada chapdan uzluksizdir. Haqiqatan:

$$f(1-0)=\sqrt{1-0}+\sqrt{1-(1-0)}=1=f(1);\quad f(+0)=\sqrt{+0}+\sqrt{1-(+0)}=0+1=1=f(1).$$

2. UZILISH NUQTALARI VA ULARNING TURLARI

Uzilish nuqtalarining ta'riflari

1- ta'rif. Uzluksizlik shartlari bajarilmaydigan nuqtalar funksiyaning uzilish nuqtalari deyiladi.

2 - ta'rif. Agar $f(x_0\text{-}0)$ va $f(x_0+0)$ limitlar mavjud, lekin $f(x_0\text{-}0)=f(x_0+0)=f(x_0)$ tenglik bajarilmasa, x_0 - $f(x)$ funksiyaning birinchi tur uzilish nuqtasi deyiladi. Bunda, agar $f(x_0\text{-}0)=f(x_0+0)\neq f(x_0)$ bo`lsa, $x_0$ - yo`qotiladigan yoki chetlatiladigan uzilish nuqtasi; $f(x_0\text{-}0)\neq f(x_0+0)$ bo'lsa - sakrash nuqtasi deyilasi. $f(x_0+0)$ - $f(x_0\text{-}0)$ ayirma esa $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi sakrashi deb ataladi.

3 - ta'rif. 1-turga tegishli bo`lmagan uzilish nuqtasi ikkinchi tur uzilish nuqtasi deyiladi. Bunday uzilish nuqtasida bir tomonlama limitlardan kamida biri mavjud emas yoki cheksiz bo'ladi.

1-misol.

$f(x)=\dfrac{x-1}{|x-1|}$ funksiya uzilish nuqtasining turini aniqlang.

Δ Uzilish nuqtasi x=1 da bir tomonli limitlarni topamiz:

$$f(1-0)=\lim_{x\to1-0}\frac{x-1}{|x-1|}=\lim_{\substack{x\to1\\x<1}}\frac{x-1}{|x-1|}=\lim_{\substack{x\to1\\x<1}}\frac{x-1}{-(x-1)}=-1;$$

$$f(1+0)=\lim_{x\to1+0}\frac{x-1}{|x-1|}=\lim_{\substack{x\to1\\x>1}}\frac{x-1}{|x-1|}=\lim_{\substack{x\to1\\x>1}}\frac{x-1}{x-1}=1.\quad f(1-0)\neq f(1+0).$$

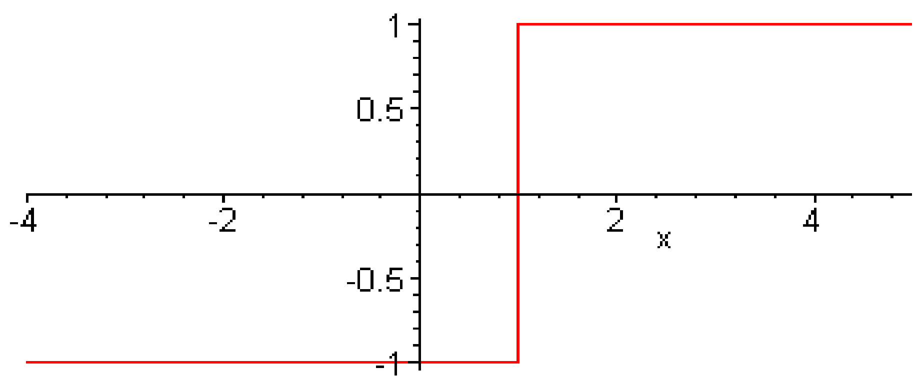
Demak, x=1 birinchi tur uzilish nuqtasi, uning xususiy holi sakrash nuqtasi ekan. Bu nuqtadagi funksiyaning sakrashi: $f(1+0)-f(1-0)=1-(-1)=2.$ ▲

1-misolning **Maple KMS** da yechilishi

Maple KMS da *f(x)* funksiyaning uzilish nuqtasi > **singular(f(x),x);** funksiyasi yordamida topiladi. Turini esa grafikka qarab aniqlash mumkin (1-rasm).

\> **f:=x->(x-1)/abs(x-1);** $f:=x\to\dfrac{x-1}{|x-1|}$

\> **singular(f(x),x);** $\{x=1\}$ > **plot(f(x), x=-4..5);**



3-rasm

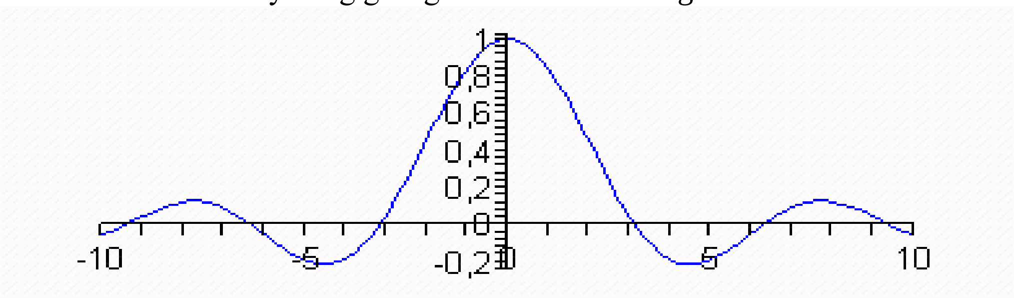
2-misol.

$f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ funksiya uzilish nuqtasining turini aniqlang.

Δ Uzilish nuqtasi *x=0* bolib, *f(0)* aniqlanmagan (0/0 aniqmaslik). *x=0* da bir tomonlama limitlarni topamiz:

$$f(-0)=\lim_{x\to -0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{\sin x}{x}=1;\quad f(+0)=\lim_{x\to +0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{\sin x}{x}=1;\quad f(-0)=f(+0).$$

Uzilish nuqtasida bir tomonli limitlar teng, lekin funksiya aniqlanmagan. Demak, *x=0* birinchi tur, uning xususiy holi yo'qotiladigan uzilish nuqtasidir. Agar *f(0)*=1 deb olsak, funksiya *x=0* da uzluksiz bo'ladi. Funksiyaning grafigi 4-rasmda keltirilgan. ▲



4-rasm.

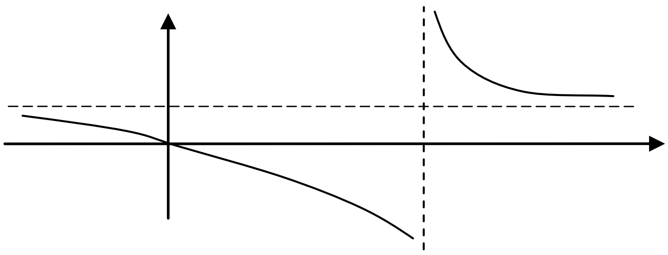
3-misol

x=3 nuqta *f(x)*= $\dfrac{x}{x-3}$ funksiyaning uzilish nuqtasi ekanini ko`rsating.

Δ *f(3-0)* va *f(3+0)* chap va o`ng limitlarni hisoblaymiz:

$$f(3-0)=\lim_{x\to 3-0}\frac{x}{x-3}=\frac{3-0}{3-0-3}=\frac{3}{-0}=-\infty;\qquad f(3+0)=\lim_{x\to 3+0}\frac{x}{x+3}=\frac{3+0}{3+0-3}=\frac{3}{+0}=+\infty.$$

x=3 nuqtada bir tomonli limitlar cheksiz. Shuning uchun *x=3* ikkinchi tur uzilish nuqtasi. Funksiyaning grafigi 3-rasmda keltirilgan. ▲



5-rasm

3. KESMADA UZLUKSIZ FUNKSIYALAR VA ULARNING XOSSALARI

Funksiyaning intervalda va kesmada uzluksizligi ta'riflari

1-ta'rif. (*a, b*) intervalning har bir nuqtasida uzluksiz funksiya shu *intervalda uzluksiz* deyiladi.

2-ta'rif. Funksiya *[a, b]* *kesmada uzluksiz* deyiladi, agar u (*a, b*) intervalda uzluksiz, *x=a* nuqtada o`ngdan, *x=b* nuqtada chapdan uzluksiz bo`lsa.

Ko'rsatish mumkinki, biror oraliqda uzluksiz funksiyalarning algebraik yig`indisi, ko`paytmasi, nisbati(kasr maxraji nolga aylanmaydigan nuqtalarda) va kompozitsiyasi ham shu oraliqda uzluksizdir.

Kesmada uzluksiz funksiyaning xossalari.

1- teorema. $[a, b]$ kesmada uzluksiz *f(x)* funksiya bu kesmada chegaralangandir, ya'ni shunday $K>0$ son mavjudki, bu kesmada $|f(x)| \le K$ bo'ladi.

2- teorema (Veyershtrass teoremasi). $[a, b]$ kesmada uzluksiz *f(x)* funksiya bu kesmada kamida bir marta o'zining eng kichik m va katta M qiymatiga erishadi, ya'ni shunday m va M sonlar mavjudki, $m \le f(x) \le M$ bo'ladi.

3- teorema. Agar $[a, b]$ kesmada uzluksiz *f(x)* funksiya kesmaning uchlarida turli ishorali qiymatar qabul qilsa, a va b orasida kamida bitta c son topiladiki, bu nuqtada $f(c) = 0$ bo'ladi.

Natija. Agar $f(a) \cdot f(b) < 0$ bo'lsa, $f(x) = 0$ tenglama (a; b) oraliqda kamida bitta ildizga ega bo'ladi.

4- teorema. Agar *f(x)* funksiya $[a, b]$ kesmada uzluksiz, $f(a)=A$, $f(b)=B$ $(A \ne B)$, C son A va B orasida bo'lsa, $(a; b)$ intervaldagi kamida bitta c nuqtada $f(c)=C$ bo'ladi.

Natija. Kesmada uzluksiz funksiya bu kesmada o'zining eng katta va eng kichik qiymatlarini va ular orasidagi barcha qiymatlarni qabul qiladi.