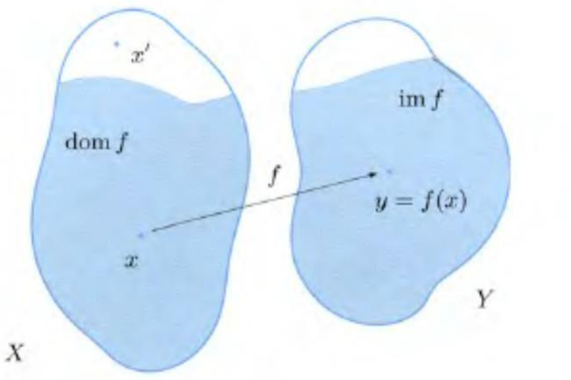
MA'RUZA. Funksiya. Funksiyaning limiti va uzluksizligi

Bizga ixtiyoriy X va Y to'plamlar berilgan bo'lsin.

1-ta'rif. Agar X to'plamdan olingan har bir x elementga biror qonunga binoan Y to'plamdan aniq bitta y element mos qo'yilgan bo'lsa, u holda X to'plamni Y to'plamga akslantirish berilgan deyiladi va u quyidagicha belgilanadi: $f\colon X \to Y$ $X \xrightarrow{f} Y$.



Bu yerda y element x ning aksi (obrazi) deyiladi va *y=f(x)* yoki $x \xrightarrow{f} y$ ko'rinishda yoziladi, *x* ni esa y ning asli (proobrazi) deyiladi.[1]

$$\boxed{\Gamma(f) = \{(x, f(x)) \in X \times Y \ :\ x \in \operatorname{dom} f\}.}$$

Hozirgi zamon fanida X to'plamni Y to'plamga akslantirish X to'plamda aniqlangan funksiya deyiladi.

Bu funksiyaning umumiy ta'rifi bo'lib, biz odatda X va Y lar haqiqiy sonlar to'plami bo'lgan holni qaraymiz, bunday funksiyalar haqiqiy argumentli haqiqiy funksiya deyiladi.

Shunday hol uchun ta'rifni keltiraylik.

2-ta'rif. Elementlari haqiqiy sonlardan iborat bo'lgan X va Y to'plamlar berilgan bo'lib, X to'plamdan olingan har bir haqiqiy x songa biror qoida yoki qonunga binoan Y to'plamda aniq bitta u element mos qo'yilgan bo'lsa, u holda X to'plamda aniqlangan funksiya berilgan deyiladi.

U y=f(x), y= φ (x), u=g(x), ... ko'rinishlada yoziladi.

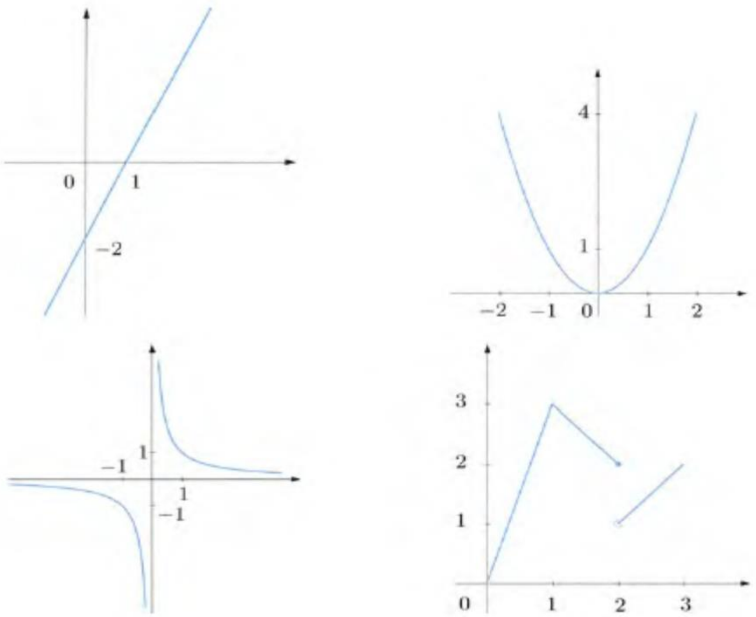
Bu yerda X funksiyaning aniqlanish yoki berilish sohasi, ba'zida borliq sohasi, Y esa uning o'zgarish sohasi deyiladi. x argument yoki erkli o'zgaruvchi, u esa erksiz o'zgaruvchi yoki funksiya deyiladi. $\{f(x) \mid x \in X\}$ to'plam funksiyaning qiymatlar to'plami deyiladi va Y(f) orqali belgilanadi. Funksiyaning aniqlanish sohasi D(f) orqali belgilanadi.

1-misol. 1. $y = 2x - 2$, 2. $y = x^2$, 3. $y = \dfrac{1}{x}$, 4. $f(x) = \begin{cases} 3x, & 0 \le x \le 1 \\ 4 - x, & 1 < x \le 2. \\ x - 1, & 2 < x \le 3 \end{cases}$ [2]

---

[1] Canuto, C., Tabacco, A. Mathematical Analysis I, 31-32 226 betlarning mazmun mohiyatidan foydalanildi.

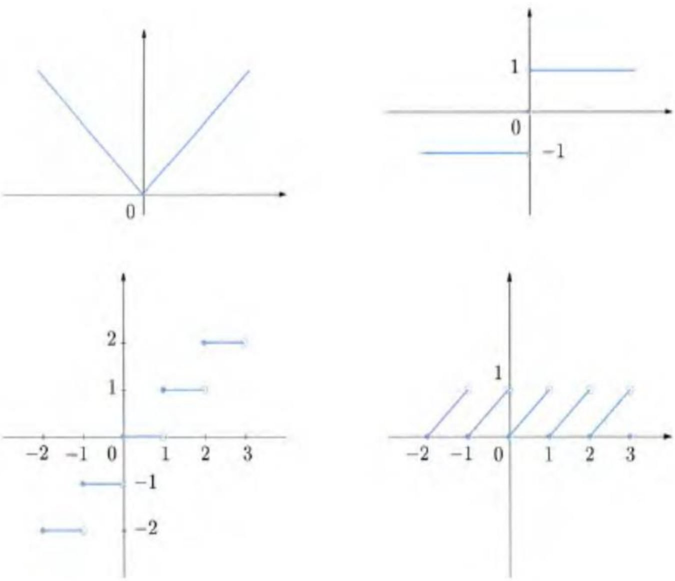
[2] Canuto, C., Tabacco, A. Mathematical Analysis I, 32-33 226 betlarning mazmun mohiyatidan foydalanildi.



2-misol. a) $f:R\to R, \quad f(x)=|x|=\begin{cases} x, & x>0 \\ -x, & x<0 \end{cases}$ **b)** $f:R\to Z, \quad f(x)=sign(x)=\begin{cases} 1, & x>0 \\ -1, & x<0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$

s) $f:R\to Z, \quad f(x)=[x],$ bu yerda $[x]$ -- x ning butun qismi.

d) $f:R\to R, \quad f(x)=x-[x]$[3]



[3] Canuto, C., Tabacco, A. Mathematical Analysis I, 33-34 226 betlarning mazmun mohiyatidan foydalanildi.

Quyidagi ikki holatda funksiya berilgan deyiladi:

a) funksiyaning aniqlanish sohasi,

b) x ga mos kelgan y ni topish qonuniyati berilgan bo'lsa.

Funksiyaning berilish usullari.

Funksiya asosan uch xil usulda beriladi.

1. Analitik usul. Agar u ni topish uchun x ni ustida bajarish kerak bo'lgan amallar majmuasi berilgan bo'lsa, u holda funksiya analitik usulda berilgan deyiladi. Bu yerda amallar deyilganda qo'shish, ayirish, bo'lish, ko'paytirish, darajaga ko'tarish, ildiz chiqarish, logarifmlash va hakozolar tushuniladi.

Qisqacha aytganda funksiya *y=f(x)* formula yordamida berilgan bo'lsa, u holda funksiya analitak usulda berilgan deyiladi. Bu yerda tenglikning o'ng tomoni *f(x)* funksiyaning analitik ifodasi deyiladi.

Funksiya analitik usulda berilganda uning aniqlanish sohasi berilmasligi mumkin. Bu holda aniqlanish sohasi analitik ifoda ma'noga ega bo'lishi uchun *x* ning qabul qilishi mumkin bo'lgan barcha qiymatalar to'plami tushuniladi. Bu soha funksiyaning tabiiy aniqlanish sohasi yoki borliq sohasi deyiladi.

3-misol. 1. $y=\frac{x}{x^2-1}$, $x^2-1\neq 0$, $x\neq\pm 1$, $D(f)=(-\infty;-1)\bigcup(-1;1)\bigcup(1;+\infty)$.

2. $y=\sqrt{x^2-5x+6}$, $x^2-5x+6\geq 0$, (x-2)(x-3)$\geq$0, $D(f)=(-\infty;2]\bigcup[3;\infty))$

2. Jadval usuli. Ba'zi hollarda x argumentning ba'zi bir qiymatlariga mos keladigan funksiya qiymatlari jadvali beriladi. Bunga to'rt xonali matematik jadval misol bo'la oladi.

3. Grafik usul. y=f(x) funksiya *X* to'plamda berilgan bo'lsin. *XOY* koordinatalar tekislikdagi *{M(x,f(x))| x*$\in$*X}* nuqtalar to'plami funksiyaning grafigi deyiladi.

Agar tekislikda funksiyaning grafigi berilgan bo'lsa, u holda funksiya grafik usulda berilgan deyiladi.

Funksiya grafik usulda berilgan bo'lsa, u holda $f(x_0)$ qiymatni topish uchun absissa o'qidan x_0 nuqtani olib, undan ordinata o'qiga parallel to'g'ri chiziq o'tkazib, uni grafik bilan kesishish nuqtasining ordinatasi y_0 ni olamiz, o'sha son $f(x_0)$ dan iborat bo'ladi.

Matematik tahlilda uchraydigan ba'zi bir funksiyalarni sanab o'taylik:

1. $D(x)=\begin{cases}1, & агар \quad x\in Q,\\ 0, & агар \quad x\in R\setminus Q\end{cases}$

Bu Dirixle funksiyasi deyiladi.

2. $y=signx=\begin{cases}-1, агар\ x<0,\\ 0, агар\ x=0,\\ 1, агар\ x>0\end{cases}$

3. y=[x], x ning butun qismi. [1,5]=1, [1,4]=-2, [2]=2.

4. y={x}, x ning kasr qismi, ya'ni {x}=x-[x]

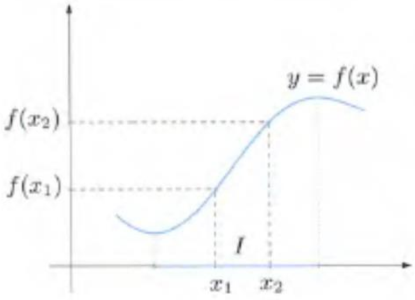
[1,4]=0,4; [3]=0, [1,4]=-1,4-(-2)=0,6.

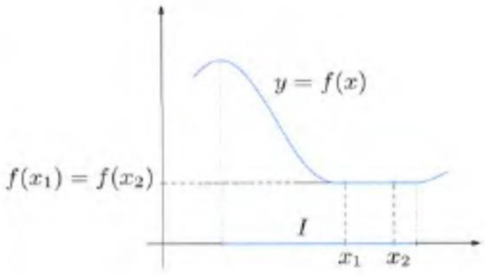
2.Monoton funksiyalar.

1-ta'rif. Agar *X* to'plamdan olingan ixtiyoriy x_1, x_2 lar uchun $x_1< x_2$ tengsizlikdan $f(x_1)<f(x_2)$ tengsizlik kelib chiqsa, *f(x)* funksiya *X* to'plamda o'suvchi deb ataladi.

Bunday funksiyalarni qat'iy o'suvchi deb ham yuritiladi.

2-ta'rif. Agar X to'plamdan olingan ixtiyoriy x_1, x_2 lar uchun $x_1<x_2$ tengsizlikdan $f(x_1)>f(x_2)$ tengsizlik kelib chiqsa, $f(x)$ funksiya X to'plamda kamayuvchi deb ataladi.





Bunday funksiyalarni qat'iy kamayuvchi deb ham yuritiladi.

3-ta'rif. Agar X to'plamdan olingan ixtiyoriy x_1, x_2 lar uchun $x_1<x_2$ tengsizlikdan $f(x_1)\leq f(x_2)$ $(f(x_1)\geq f(x_2))$ tengsizlik kelib chiqsa, $f(x)$ funksiya X to'plamda kamaymovchi (o'smovchi) deb ataladi.

Mana shu to'rt xil funksiyalar bir so'z bilan monoton funksiyalar deyiladi.[4]

1-misol. $f(x)=x^3$ funksiya $X=(-\infty;+\infty)$ da o'suvchi. O'aqiqatan, $x_1<x_2$bo'lsin, u holda

$$f(x_2)-f(x_1)=x_2^3-x_1^3=(x_2-x_1)(x_2^2+x_1x_2+x_1^2)=(x_2-x_1)((x_2+\frac{x_1}{2})^2+\frac{3x_1^2}{4})>0 .$$

Demak $x_1<x_2$ bo'lganda $f(x_1)<f(x_2)$ bo'ladi.

3.Juft va toq funksiyalar. Teskari funksiyalar.

7-ta'rif. Agar ixtiyoriy $x\in X$ uchun $-x\in X$ bo'lsa, u holda X to'plam *simmetrik to'plam* (O nuqtaga nisbatan) deyiladi.

3-misol. $X_1=(-a;a)$, $X_2=(-\infty;+\infty)$, $X_3=[-a;a]$ lar simmetrik to'plam bo'ladi. $X_4=[-2;3]$, $X_5=(0;+\infty)$ to'plamlar simmetrik to'plam emas.

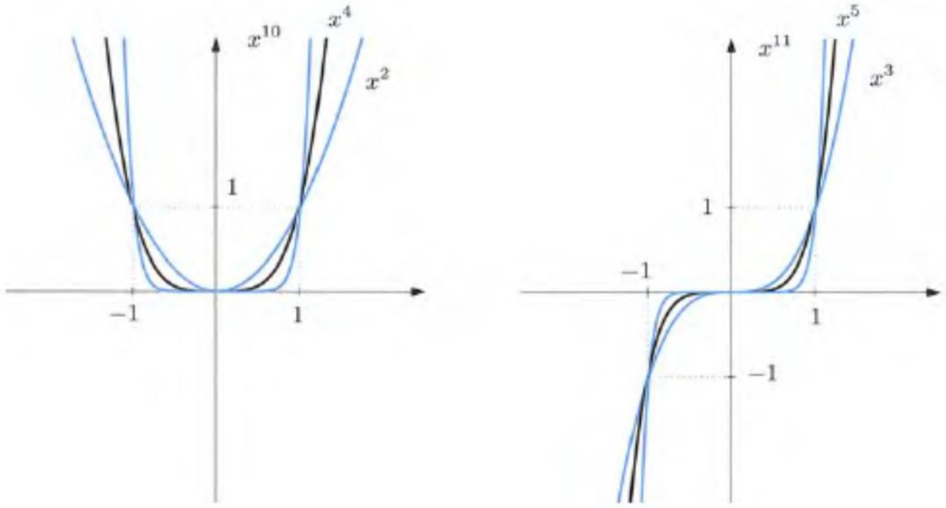
Aytaylik $f(x)$ funksiya X simmetrik to'plamda berilgan bo'lsin.

8-ta'rif. Agar ixtiyoriy $x\in X$ uchun $f(-x)=f(x)$ bo'lsa, u holda $f(x)$ *juft funksiya* deyiladi.

9-ta'rif. Agar ixtiyoriy $x\in X$ uchun $f(-x)=-f(x)$ bo'lsa, u holda $f(x)$ *toq funksiya* deyiladi.

---

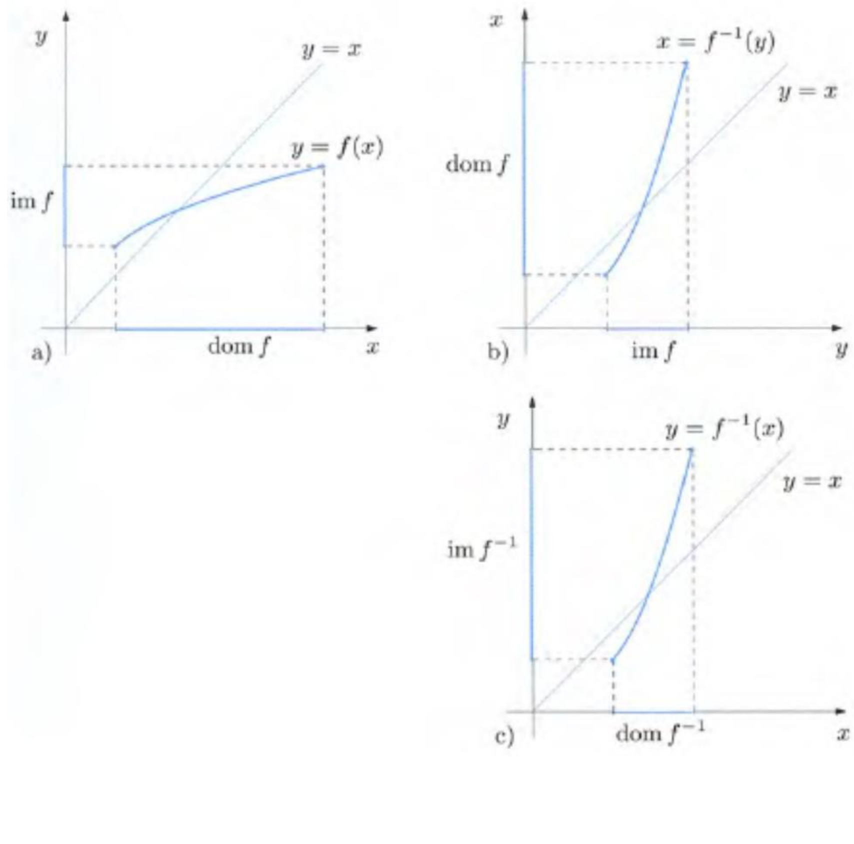
[4] Canuto, C., Tabacco, A. Mathematical Analysis I, 42-44226 betlarning mazmun mohiyatidan foydalanildi.



Juft funksiya uchun $f(-x)=f(x)$ bo‘lgani sababli, uning grafigi ordinata o‘qiga nisbatan simmetrik bo‘ladi. Toq funksiya uchun $f(-x)=-f(x)$ bo‘lgani sababli, toq funksiyaning grafigi koordinata boshiga nisbatan simmetrik bo‘ladi. Shuning uchun, juft funksiyalar grafigini chizishda, grafikning $x\geq 0$ ga mos kelgan qismini chizish kifoya. Grafikning ikkinchi qismi esa, shu chizilgan grafikni ordinata o‘qiga nisbatan simmetrik almashtirish yordamida hosil qilinadi. Toq funksiyada ham shunday bo‘ladi, faqat simmetrik almashtirish, koordinatalar boshi 0 ga nisbatan olinadi. Shunday funksiyalar borki, ularni toq ham, juft ham deb bo‘lmaydi.

Teskari funksiya.

Faraz qilaylik $y=f(x)$ funksiya X to’plamda berilgan bo’lib, Y to’plam uning barcha qiymatlar to’plami bo’lsin. Agar Y dan olingan har bir y uchun X to’plamdagi $y=f(x)$ tenglikni qanoatlantiruvchi x faqat bitta bo’lsa, u holda har bir $y\in Y$ uchun $y=f(x)$ tenglikni qanoatlantiruvchi $x\in X$ ni mos qo’yamiz. Natijada Y to’plamda aniqlangan $x=\varphi(y)$ funksiyaga ega bo’lamiz, bu funksiya $y=f(x)$ funksiyaga teskari funksiya deyiladi. Teskari funksiyani $f^{-1}(y)$ orqali ham belgilanadi.



Funksiyalarning kompozisiyasi (murakkab funksiya).

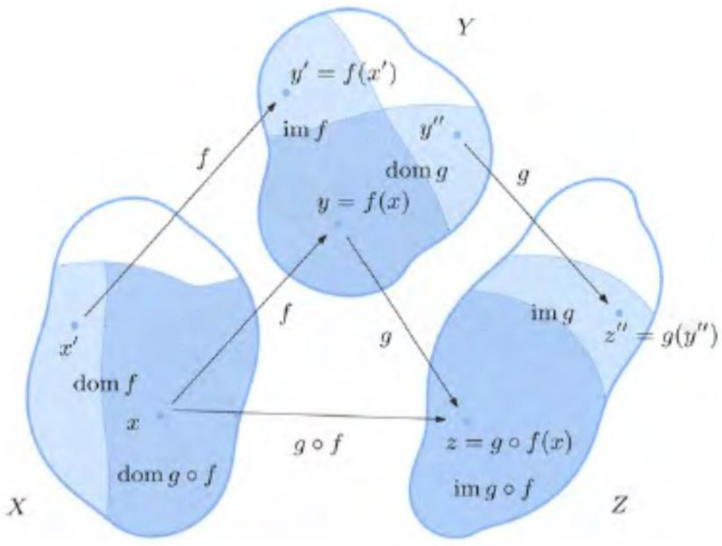


Figure 2.10. Representation of a composite function via Venn diagrams

Agar $y = \varphi(x)$ funksiya *Y* sohada y=f(y) funksiya *E*(φ) sohada aniqlangan bo'lsa, u holda $y = f(\varphi(x))$ funksiyani *Y* sohada aniqlangan murakkab funksiya yoki f bilan φ ning kompozisiyasi deyiladi va $f \circ \varphi$ orqali belgilanadi, ya'ni $(f \circ \varphi)(x) = f(\varphi(x))$[5]

[5] Canuto, C., Tabacco, A. Mathematical Analysis I, 46-48226 betlarning mazmun mohiyatidan foydalanildi.