Ma’ruza.Tekislikda analitik geometriya elementlari.

Darsning rejasi va maqsadi

- 1. Tekislikda koordinatalar sistemasi.
- 2. Fazoda koordinatalar sistemasi.

- ***Maqsadi :*** Tekislikda va fazoda koordinatalar metodi haqida bilimlar berish, tasavvurlar hosil qilish.

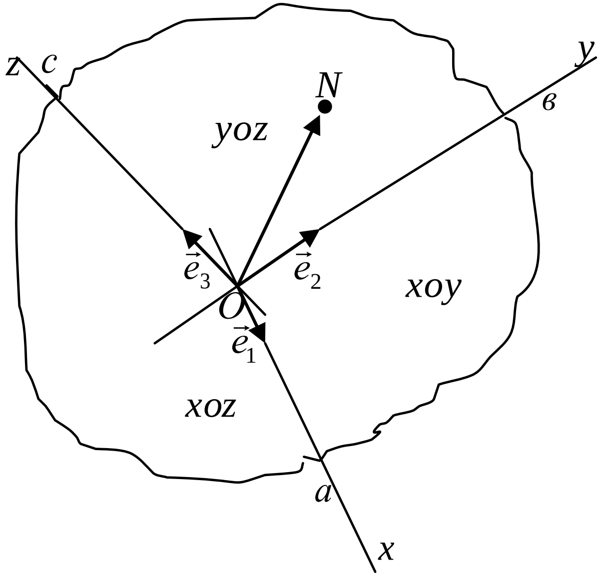
Asosiy tushunchalar:

Tekislik, fazo, koordinatalar sistemasi, tekisliklarning o’zaro vaziyati, vektor, affin koordinatalar sistemasi, siniq chiziq, dekart koordinatalar sistemasi

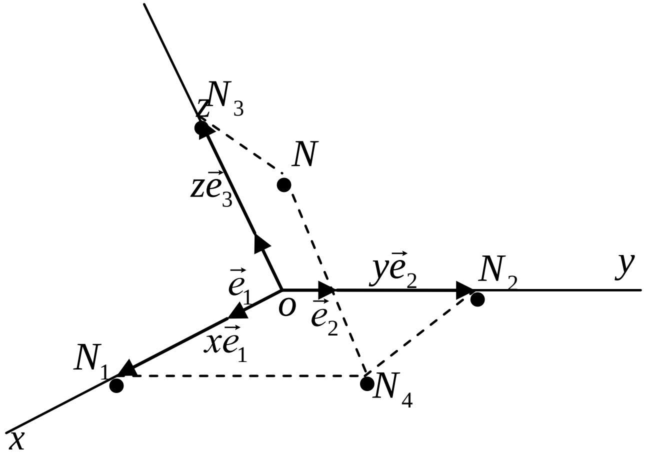
Bu va keyingi boblarda fazodagi geometriya bilan shug'ullanamiz, shuning uchun uch o'lchovli vektor fazo vektorlaridan foydalanamiz. Komplanar bo'lmagan ixtiyoriy uchta vektor bu fazoning bazis vektori bo'lishi ravshan.

Fazoga koordinatalar sistemasi, tekislikdka qanday kiritilgan bo'lsa, shunday kiritiladi.

Fazoning ixtiyoriy O nuqtasiga qo'yilgan uchta $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ va $\vec{e}_3$ bazis vektorlar berilgan bo'lsin (110-chizma).



110-chizma



111-chizma

Bu vektorlar orqali o'tuvchi a, b va c to'g'ri chiziqlarni olamiz ($a \cap b \cap c = 0$).

2-masala. $\vec{a}\left(x_1; y_1; z_1\right)$ va $\vec{b}\left(x_2; y_2; z_2\right)$ vektorlar berilgan. Ular orasidagi burchak kosinusini toping.

Echish. $\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$, $\vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$. Vektorlarning skalyar ko'paytmasidan

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}} \qquad (3.2)$$

3-masala. $N_1\left(x_1; y_1; z_1\right)$, $N_2\left(x_2; y_2; z_2\right)$ nuqtalar berilgan. Bu nuqtalar orasidagi masofani toping.

Echish. Bu nuqtalar orasidagi masofani $\rho\left(N_1, N_2\right)$ bilan belgilaymiz.
$\overrightarrow{N_1N}_2\left(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\right)$.

$$\rho\left(N_1, N_2\right) = \left|\overrightarrow{N_1N}_2\right| = \sqrt{\left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2 + \left(z_2 - z_1\right)^2} \qquad (3.3)$$

4-masala. Uchlari $A(7, 2, 4)$, $B(4, -2, 2)$, $C(6, -7, 8)$, $D(9, -1, 10)$ nuqtalarda bo'lgan to'rtburchakning kvadrat ekanligini isbotlang.

Isboti. $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AD}$ vektorlarning uzunliklarining tengliklarini va $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD}$ shartning o'rinli ekanligini ko'rsatish etarli.

$\overrightarrow{AB}(-3, -6, -2)$, $\overrightarrow{BC}(2, -3, 6)$, $\overrightarrow{CD}(3, 6, 2)$, $\overrightarrow{AD}(2, -3, 6)$.

Bundan $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{BC}\right| = \left|\overrightarrow{CD}\right| = \left|\overrightarrow{AD}\right| = 49$, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = -6 + 18 - 12 = 0$, demak $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD}$.

7-ma’ruza.Fazoda analitik geometriya elementlari

Ta’rif. Musbat yo’nalishlari mos ravishda $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ va $\vec{e}_3$ vektorlar bilan aniqlangan $a,$ b va c to’g’ri chiziqlardan iborat bo’lgan sistemani fazodagi affin koordinatalar sistemasi deyiladi. $(O, \vec{e}_1\, \vec{e}_2\, \vec{e}_3)$ bilan belgilanadi (111-chizma).

O nuqtani koordinatalar boshi, $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ va $\vec{e}_3$ vektorlarni koordinata vektorlari deyiladi. a to’g’ri chiziqni ox bilan belgilab absissalar o’qi, b to’g’ri chiziqni oy bilan belgilab ordinatalar o’qi, c to’g’ri chiziqni esa oz bilan belgilab aplikata o’qi deb ataymiz. Bu o’qlarning har ikkitasi bilan aniqlangan uchta $xoy,$ $xoz,$ yoz tekisliklarni koordinata tekisliklari deyiladi.

$(O, \vec{e}_1\, \vec{e}_2\, \vec{e}_3)$ - affin koordinatalar sistemasi, N - fazoning ixtiyoriy nuqtasi bo’lsin. $\overrightarrow{ON}$ vektorni bazis $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ vektorlar yordamida yoyib yozish mumkin, ya’ni

$$\overrightarrow{ON} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3 \qquad (1.1)$$

Bu erdagi x, y, z haqiqiy sonlar $\overrightarrow{ON}$ vektorning $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ bazislarga nisbatan koordinatalari deyiladi va $\overrightarrow{ON}(x; y; z)$ ko’rinishda yoziladi. $\overrightarrow{ON}$ vektorning x, y, z koordinatalari N nuqtaning ham koordinatalari deyiladi. x soni N nuqtaning absissasi, y soni ordinatasi, z soni aplikatasi deyiladi va $N(x; y; z)$ ko’rinishda yoziladi.

Agar affin koordinatalar sistemasining koordinata $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ vektorlari o'zaro ortogonal va birlik vektorlar bo'lsa, u holda bunday affin koordinatalar sistemasini to'g'ri burchakli dekart yoki qisqacha dekart koordinatalar sistemasi deyiladi.

Boshi O nuqtada bo'lgan bunday koordinatalar sistemasini $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ bilan belgilaymiz (113-chizma), bu erda $\vec{i}^{\,2} = \vec{j}^{\,2} = \vec{k}^{\,2} = 1$, $\vec{i}\vec{j} = \vec{i}\vec{k} = \vec{j}\vec{k} = 0$.

Bu to'g'ri burchakli dekart koordinatalar sistemasidan foydalanib, metrik masalalar echiladi.

1-masala. $\vec{a}(x; y; z)$ vektor uzunligini toping.

Echish. $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ yozib olsak, u holda I bob 6-§ ga asosan uning uzunligi

$$|\vec{a}| = \sqrt{\left(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\right)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \qquad (3.1)$$

ga teng bo'ladi.

Fazoda affin koordinatalar sistemasi berilgan bo'lsa, u holda fazo nuqtalari to'plami bilan ma'lum tartibda olingan haqiqiy sonlar $(x, y, z) \in R^3$ uchliklari to'plami orasida biektiv moslik mavjud bo'ladi.

Agar $z = 0$ bo'lsa, u holda N nuqta xoy koordinata tekisligida yotadi, chunki $\overrightarrow{ON} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$, $\vec{e}_1$ va $\vec{e}_2$ vektorlar bir tekislikda yotadi. Shunga o'xshash $y = 0$ bo'lsa, N nuqta xoz tekisligida yotadi, $x = 0$ bo'lsa, N nuqta yoz tekisligida yotadi.

Agar $y = z = 0$ bo'lsa, u holda N nuqta absissa o'qida yotadi, agar $x = z = 0$ bo'lsa, u holda N nuqta ordinata o'qida, agar $x = y = 0$ bo'lsa, u holda N nuqta aplikata o'qida yotadi, agar $x = y = z = 0$ bo'lsa, u holda N nuqta koordinatalar boshi bilan ustma-ust tushadi.

Agar N nuqtaning x, y, z koordinatalari berilgan bo'lsa, $(O, \vec{e}_1\ \vec{e}_2\ \vec{e}_3)$ affin koordinatalar sistemasiga nisbatan N nuqtaning fazodagi vaziyatini (1.1) formuladan foydalanib aniqlasa bo'ladi. Koordinatalar boshidan $\overrightarrow{ON_1} = x\vec{e}_1$ vektorni qo'yamiz (111-chizma), undan keyin $\overrightarrow{N_1N_4} = \overrightarrow{ON_2} = y\vec{e}_2$ vektorni qo'yamiz, oxirida $\overrightarrow{N_4N} = \overrightarrow{ON_3} = z\vec{e}_3$ vektorni qo'yamiz. Vektorlarni qo'shish qoidasiga ko'ra, $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{ON}_1 + \overrightarrow{N_1N_4} + \overrightarrow{N_1N} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$. Shunday qilib, N nuqta izlangan nuqta. ON_1N_4N siniq chiziqni koordinata siniq chizig'i deyiladi. Demak, fazodagi N nuqtani yasash uchun uning koordinata siniq chizig'ini yasash kifoya.

Uchta koordinata tekisligi birgalikda fazoni sakkiz qismga ajratadi, ularning har biri oktanta deb ataladi. Quyidagi jadvalda oktantalar va undagi koordinatalarning ishoralari belgilangan.

октанта / координаталар	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
x	+	-	-	+	+	-	-	+
y	+	+	-	-	+	+	-	-
z	+	+	+	+	-	-	-	-

$A_0(x_0, y_0, z_0)$ нуқта текисликда берилган нуқта ва n вектор текисликга перпендикуляр бўлган нол бўлмаган вектор бўлсин. Текисликнинг ихтиёрий $A(x, y, z)$ нуқтаси бўлиб, $\overrightarrow{A_0A}$ ва n векторлар ўзаро перпендикуляр. Натижада

$$\overrightarrow{A_0A} \cdot \mathbf{n} = 0. \qquad (1)$$

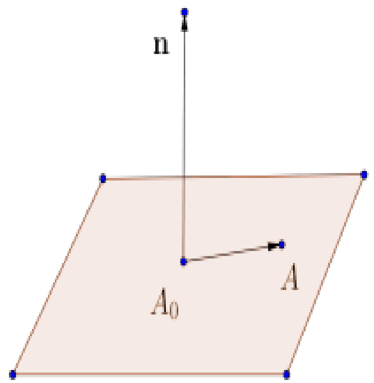
тенглик ўринли бўлади.

a, b, c лар e_x e_y, e_z базис векторлар билан ҳосил қилинган n векторнинг координаталари бўлсин.

У ҳолда $\overrightarrow{A_0A} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OA_0}$, бўлиб, (1) тенгликдан

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0. \qquad (2)$$

келиб чиқади.



Текислик тенгламаси

Бу тенглама шартли тенгламадир.

Form the equation of an arbitrary plane in the rectangular Cartesian coordinates xyz.

Let $A_0(x_0, y_0, z_0)$ be a point in a plane and $\mathbf{n}$ a nonzero vector perpendicular to the plane. Then whatever the point of the plane $A(x, y, z)$ is, the vectors $\overrightarrow{A_0A}$ and $\mathbf{n}$ are mutually perpendicular (Fig. 19.1). Hence,

$$\overrightarrow{A_0A} \cdot \mathbf{n} = 0. \qquad (\bullet)$$

Let a, b, c be the coordinates of the vector $\mathbf{n}$ with respect to the basis $\mathbf{e}_x$ $\mathbf{e}_y$, $\mathbf{e}_z$.

Then, since $\overrightarrow{A_0A} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OA_0}$, it follows from $(\bullet)$

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0. \qquad (\bullet\bullet)$$

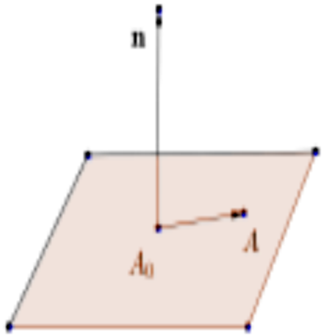


Figure 19.1: Equation of a plane

Glossary	
A point	**Nuqta**
A plain	**Tekislik**
The normal vector of the plain	**Tekislikning normal vektori. $Ax + By + Cz + D = 0$ tenglama bilan berilgan tekisliknnig normal vektori deb $n = \{A, B, C\}$ vektorga aytiladi.**
The equation of a plain	**Tekislik tenglamasi.** $Ax + By + Cz + D = 0$ tenglikni qanoatlantiruvchi fazodagi barcha $A(x_0, y_0, z_0)$ nuqtalar toplamiga aytiladi.

Perpendicular lines	**Perpendikulyar to'g'ri chiziqlar.** O'zaro 90^0 burchak ostida kesishuvchi to'g'ri chiziqlarga aytiladi.
A system of coordinates	**Koordinatalar sistemasi**
Parallel lines	**Parallel to'g'ri chiziqlar.**
The system of Affine coordinates	**Affin koordinatalar sistemasi**
The position of planes on space	**Tekisliklarning fazodagi vaziyati**