amaliy mashg'ulot. Fazoda ikkinchi tartibli sirtlar va ularni tenglamalari

1-misol. To'g'ri burchakli dekart koordinatalar sistemasida $\gamma: Ax+Cz=0$, $y=0$, $(A\neq 0, C\neq 0)$ chiziqni (oz) o'qi atrofida aylanishdan hosil bo'lgan sirt tenglamasini yozing.

Echish. Tenglamani Qo'yidagi ko'rinishda yozib olamiz:

$x=-\dfrac{C}{A}z$, $y=0$.

Sirttenglamasi: $y^2+x^2=\dfrac{C^2}{A^2}z^2$ yoki $\dfrac{x^2}{C^2}+\dfrac{y^2}{C^2}-\dfrac{z^2}{A^2}=0$ ko'rinishdabo'ladi.

1-misol. $x^2+y^2+z^2-2x+4y+2z-5=0$ sferaning markazini va radiusini toping.

Yechish. Tenglamadan

$x^2-2x+1+y^2++4y+4+z^2+2z+1-5-1-4-1=0$

$(x-1)^2+(y+2)^2+(z+1)^2-11=0$

Demak, sfera markazi $M(1,-2,-1)$ nuqtada, radiusi $R=\sqrt{11}$ ga teng.

Fazoda to'g'ri burchakli dekart koordinatalar sistemasi, $M(a,b,c)$ nuqta va R kesma berilgan bo`lsin.

Ta'rif. Fazoda berilgan M nuqtadan ma'lum R masofada yotuvchi barcha nuqtalarning geometrik o`rni sfera deyiladi.

M nuqta sfera markazi, R masofa sfera radiusi deyiladi.

Sferik sirt tenglamasini chiqaraylik. Sfera ustida yotgan ixtiyoriy $N(x,y,z)$ nuqtani olaylik , u holda $\overrightarrow{MN}(x-a,\, y-b,\, z-c,)$ vektor uzunligi ta'rifga ko`ra radiusga, ya'ni

$\left|\overrightarrow{MN}\right|=R$. Bundan $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2-R^2=0$ markazi $M(a,b,c)$ nuqtada, radiusi R ga teng bG`lgan sferaning kanonik tenglamasi deyiladi. Agar $M=0$ ustma-ust tushsa, quyidagicha yozamiz:

$x^2+y^2+z^2-R^2=0$

Fazoda to'g'ri burchakli dekart koordinatalar sistemasi berilgan bo`lsin.

Ta'rif. Koordinatalari $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ tenglamani qanoatlantiruvchi fazodagi barcha nuqtalar to`plamini ellipsoid deyiladi. Bu tenglamani ellipsoidning kanonik tenglamasi deyiladi. Musbat $a, b, c$ sonlarni ellipsoidning yarim o`qlari deyiladi.[1]

Ellipsoidning shaklini va geometrik xossalarini uning kanonik tenglamasidan foydalanib, kesish metodi orqali o'rganamiz.

Xususan: 1) Agar $a=b\neq c$ bo'lsa, oz G`qi atrofida aylanishdan hosil bo`lgan sirtni aylanma ellipsoid deyiladi. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$

2) Agar $a=b=c$ bo'lsa, $x^2+y^2+z^2=a^2$ bo`lib, markazi koordinatalar boshida va radiusi $a$ ga teng bo`lgan sferani aniqlaydi.

3) Agar $a\neq b\neq c$ bo'lsa, u holda ellipsoidni uch o`qli ellipsoid deyiladi.

[1] C.Vincre.L.Kozma.Collej Geometry. 2014. 177-178 betlarning mazmun mohiyatidan foydalanildi.

Giperboloid sirtlar ikki xil bo‘ladi. Bir pallali va ikki pallali giperboloidlar. To’g’ri burchakli dekart koordinatalar sistemasi berilgan bo’lsin.

Ta’rif. Koordinatalari

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

tenglamani qanoatlantiruvchi fazodagi barcha nuqtalarning geometrik o’rni bir pallali giperboloid deyiladi. Ushbu tenglamani bir pallali giperboloidning kanonik tenglamasi deyiladi.

Ta’rif. Koordinatalari

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ tenglamani qanoatlantiruvchi fazodagi barcha nuqtalarning geometrik o’rni ikki pallali giperboloid deb aytiladi.

Ikkinchi tartibli sirtlarning yana bir sinfi paraboloidlar. Bu sirtlar ham ikki turli bo’lib, ular bilan tanishib chiqamiz.

Ta’rif. Koordinatalari $\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z\ (p>0,\quad q>0)$ tenglamani qanoatlantiruvchi fazodagi barcha nuqtalarning geometrik o’rni elliptik paraboloid deb aytiladi. Ushbu tenglama elliptik paraboloidning kanonik tenglamasi deyiladi.

Ta’rif. Koordinatalari $\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z\ (p>0,\quad q>0)$ qanoatlantiruvchi fazodagi barcha nuqtalarning geometrik o’rnini giperbolik paraboloid deb aytiladi.[2] Ushbu tenglama giperbolik paraboloidning kanonik tenglamasi deyiladi.

1. Ellipsoid ta`rifini ayting va kanonik tenglamasini yozing.
2. Giperboloid ta`rifini ayting va kanonik tenglamasini yozing.
3. Giperboloidning qanday turlarini bilasiz? Ularning ta’rifi.
4. Paraboloidning ta’rifi va tenglamasini yozing.
5. Paraboloidning qanday turlari bor?
6. $x^2+y^2+z^2-2x+4y+2z-5=0$ sferaning markazini va radiusini toping.

   Yechish. Tenglamadan

   $x^2-2x+1+y^2++4y+4+z^2+2z+1-5-1-4-1=0$

   $(x-1)^2+(y+2)^2+(z+1)^2-11=0$

   Demak, sfera markazi $M(1,-2,-1)$ nuqtada, radiusi $R=\sqrt{11}$ ga teng.
7. $x^2+u^2=R^2$ aylanani OX o’q atrofida aylanishidan hosil bo’lgan aylanma sirtning tenglamasini tuzing. Yechish. Berilgan aylanani OX o’q atrofida aylantirsak, x o’zgarmaudi, u o’zgaradi, hosil bo’lgan aylanma sirtning tenglamasini yozish uchun $F(\pm\sqrt{x^2+y^2}\ ;\ z)=0$ formulaga asosan , u ni $\pm\sqrt{y^2+z^2}$ bilan almashtirish kerak. Buni e;tiborga olsak, berilgan tenglamaning ko’rinishi:

   $x^2+(\pm\sqrt{y^2+z^2})^2=R^2$ yoki $x^2+y^2+z^2=R^2$

Qo’yidagi berilgan sirtlarning turini aniqlang.

[2] Herbert Gintis, Mathematical Literacy for Humanists. 99-102 betlarning mazmun mohiyatidan foydalanildi.

$a)\ \frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{12}+\frac{z^2}{4}=1$ $\quad b)\ \frac{x^2}{32}+\frac{y^2}{18}+\frac{z^2}{2}=1$

$c)\ -\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{3}=1$ $\quad d)\ \frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{6}=22$

$e)\ \frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=2z$ $\quad f)\ \frac{x^2}{9}+\frac{z^2}{4}=2y$

Bu tenglama markazi koordinatalar boshida bo’lgan sferani tasvirlaydi.

8. Qo’yidagi tenglamalar bilan berilgan sirtlarning shaklini aniqlang:

a) $13x^2 + 36y^2 + 81z^2 - 324 = 0$

b) $2x^2 - 5y^2 - 8 = 0$;

c) $4x^2 - 8y^2 - 16z^2 = 0$;

d) $8x^2 - 4y^2 + 24z - 48 = 0$;

e) $^{y2} = 6x - 4$;

f) $2x^2 - y^2 - z^2 = 0$.

9. Quyidagi berilgan sirtlarning turini aniqlang.

$a)\ \frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{12}+\frac{z^2}{4}=1$ $\quad b)\ \frac{x^2}{32}+\frac{y^2}{18}+\frac{z^2}{2}=1$

$c)\ -\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{3}=1$ $\quad d)\ \frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{6}=22$

$e)\ \frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=2z$ $\quad f)\ \frac{x^2}{9}+\frac{z^2}{4}=2y$