МАВЗУ

Чизиқли тенгламалар системасининг умумий назарияси. Кронекер-Капелли теорэмаси

Мавзунинг технологик модели

Ўқув соати – 2 соат	*Талабалар сони:* 58 та
Ўқув машғулот шакли	Ахборотли маъруза

Маъруза режаси	1. ЧТСни биргаликдалик аломати . Кронекер-Капелли теорэмаси. 2. Бир жинсли чизиқли тенгламалар системаси. Фундаментал ечимлар системаси. 3. Бир жинсли бўлмаган ЧТС ва унга мос бир жинсли ЧТС ечимлари орасидаги боғланиш. 4. ЧТСни ечиш усуллари бўйича таснифлаш (кластер). 5. ЧТСни компютер алгебраси тизимлари ёрдамида ечиш.

***Ўқув машғулотининг мақсади*:**	ЧТСни таснифлаш, ЧТСни ечишнинг бир неча усулларини ўргатиш, берилган ЧТСнинг биргаликдалик аломати бўйича ечиш усулини танлаш. ЧТСни ечишда компютер технологияларини қўллаш кўникмасини ҳосил қилиш..

Педагогик вазифалар:	***Ўқув фаолияти натижалари:***
▪ ЧТС нинг умумий кўриниши, терминологияси, элементар алмаштиришлари ва еквивалент системаларни эслатади; ▪ Гаусс усули ёрдамида ЧТСни зинапояли шаклга келтиришни эслатади; ▪ ЧТСни текшириш. ЧТСларни ечимлари бўйича таснифлашни кластер усули билан кўрсатади; ▪ Матрица рангини эсалатади. ЧТСни биргаликдалик аломати- Кронекер-Капелли теорэмасини исботини ўргатади. ▪ ЧТСни ечиш усуллари бўйича таснифлашни кластер учули билан кўрсатади. ▪ Бир жинсли бўлмаган ЧТС ва унга мос бир жинсли ЧТС ечимлари орасидаги боғланиш тўғрисида тушунчалар беради. ▪ олинган билимларни масалалар ечишга қўллай олишга ўргатади. ▪ ЧТСни компютер ёрдамида ечишни ўргатади.	▪ Чизиқли тенгламалар системасини тўғрисидаги маълумотларни эсга олади; ▪ Гаусс усули ёрдамида ЧТСни зинапояли шаклга келтиради ва текширади; ▪ асосий таъриф ва теоремалардан фойдалана олади, ▪ умумий ва хусусий ҳолларни ажрата олади; ▪ олинган билимларни масалалар ечишга қўллай олади. ▪ ЧТСни ечишга компютер технологияларини қўллай олади
Ўқитиш воситалари	*ЎУМ, маъруза матни, слайдлар, доска*
Ўқитиш усуллари	***маъруза, Пинборд, ақлий ҳужум***
Ўқитиш шакллари	***Фронтал, жамоавий иш, блиц-сўров***
Ўқитиш шароити	*Техник воситалар билан таъминланган, гуруҳларда ишлаш усулини қўллаш мумкин бўлган аудитория ва жиҳозлари.*
Мониторинг ва баҳолаш	*оғзаки саволлар, блиц-сўров*

Мавзунинг технологик харитаси

Иш босқич-лари	Ўқитувчи фаолиятининг мазмуни	Тингловчи фаолиятининг мазмуни
1-босқич. Мавзуга кириш (10 мин)	**1. Ўқув машғулоти мавзуси, саволларни ва ўқув фаолияти натижаларини, мустақил ишлаш учун адабиётларни айтади. 2. Баҳолаш мезонлари (2- иловада). 3. Пиндборд усулида мавзу бўйича маълум бўлган тушунчаларни фаоллаштиради. Пиндборд усулида натижасига кўра тингловчиларнинг нималарда адашишлари, хато қилишлари мумкинлигининг ташхисини амалга оширади (1-илова). 1.4. Мавзуни жонлантириш учун саволлар беради (3-илова).**	**Тинглайдилар. Тинглайдилар. Муҳим тушунчалар дафтарда қайд етилади. Саволлар берадилар. Тушунчаларни айтадилар**
2 -босқич. Асосий қисм (40мин)	**2.1. Маъруза матнини тарқатади, режа ва асосий тушунчалар билан таништиради. 2.2.Маъруза режасининг ҳамма саволлари бўйича тушунча беради. (4 - илова). Маърузада берилган саволлар юзасидан умумлаштирувчи хулоса беради. (5 - илова). 2.4. Таянч ибораларга қайтилади (Инсерт усули) – 6-илова. 2.5. Талабалар иштирокида улар яна бир бор такрорланади, асосий тушунчаларга келинади.**	**Тинглайдилар. ЎУМга қарайдилар Муҳим тушунчалар дафтарда қайд етилади. Таянч сўзлар муҳокама қилинади.**

3-босқич. Якунловчи (20мин)	**1. Машғулот бўйича якунловчи хулосалар қилади, олинган билимларнинг қаерда ишлатиш мумкинлигини маълум қилади.** **3.2. Дарсда олинган билимлар баҳоланади** **3.3. Мавзу бўйича билимларни чуқурлаштириш учун адабиётлар рўйхатини беради.** **3.4. Мустақил иш топшириқларини ва унинг баҳолаш мезонини беради. Кейинги мазвуга тайёрланиб келиш учун саволлар беради.**	**Саволлар берадилар.** **Тинглайдилар** **ЎУМга қарайдилар.** Вазифаларни ёзиб оладилар.

Режа:

1. ЧТСни биргаликдалик аломати. Кронекер-Капелли теорэмаси.
2. Бир жинсли чизиқли тенгламалар системаси. Фундаментал ечимлар системаси.
3. Бир жинсли бўлмаган ЧТС ва унга мос бир жинсли ЧТС ечимлари орасидаги боғланиш.

1. ЧТСни ечиш усуллари бўйича таснифлаш (кластер).
2. 6. ЧТСни компютер алгебраси тизимлари ёрдамида ечиш

Таянч иборалар: чизиқли тенгламалар системаси; биргаликдалик, матрицанинг ранги, бир жинсли система, фундаментал ечимлар системаси, умумий ечим, хусусий ечим

.

Фойдаланилган адабиётлар

1.Б.Л. Ван дер Варден. Алгебра. М., Наука, 1976.
2.Кострикин А.И. Введение в алгебру. М., 1977, 495 стр.
3.Ленг С. Алгебра. М. Мир, 1968.
4.Курош А.Г. Лексии по общей алгебре. М. Наука, 1976.
5.Фаддеев Д.К. Лексии по алгебре. М., Наука, 1984, 415 ст.
6.Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Сборник задач по высшей алгебре. М., Наука, 1977.
7.Сборник задач по алгебре под редаксией. А.И. Кострикина, М., Наука, 1985.
8.Хожиев Ж., Файнлеб А.С. Алгебра ва сонлар назарияси курси, Тошкент, «Ўзбекистон», 2001.
9.Нарзуллаев У.Х., Солеев А.С. Алгебра и теория чисел. И-ИИ част, Самарканд, 2002.

Chiziqli tenglamalar sistemasinig umumiy nazariyasi. Kroneker-Kapelli teoremasi

Quyidagi *n*- noma'lumli *m* - ta chiziqli tenglamalar sistemasini qaraymiz:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (1)$$

Bu sistemaning asosiy va kengaytirilgan matrisalarini yozib olamiz:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ - asosiy matrisa.

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$ - kengaytirilgan matrisa.

Endi bu o'tgan ma'ruazalardagi ma'lumotlarni eslaymiz:

- Chiziqli tenglamalar sistemasining elementar almashtirishlari deb nimaga aytiladi?
- Chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning qanday usullarini bilasizlar?
- Matrisaning rangi deb nimaga aytiladi?
- Matrisaning rangi haqidagi teorema qanday ifodalanadi?
- Matrisaning rangi qanday yo'llar bilan topiladi?
- A va B matrisalarning ranglari haqida nima deyish mumkin, ya'ni ular tengmi yoki qaysi birining rangi katta?
- Qanday o'ylasizlar, A va B matrisalarning ranglari bilan (1) sistemaning birgalikda bo'lishi orasida bog'lanish bormi yoki yo'qmi?

Oxirgi savolga javobni quyidagi Kroneker –Kapelli teoremasi beradi:

Teorema -1(Kroneker-Kapelli). *(1) sistema birgalikda bo'lishi uchun uning asosiy va kengaytirilgan matrisalarining ranglari teng bo'lishi zarur va yetarlidir, ya'ni*

(1) sistema yechimga ega $\Longleftrightarrow$ $rang\,A = rang\,B$.

Teoremani isbot qilamiz.

Zarurligi. Aytaylik (1) birgalikda bo'lsin, ya'ni shunday

sonlar mavjudki, ularni (1) sistemaning noma'lumlari o'rniga qo'ysak, sistema tengamalari ayniyatlarga aylanadi:

$$x_1 = \alpha_1, x_2 = \alpha_2, \cdots, x_n = \alpha_n$$

(2)

$$\begin{cases} a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \cdots + a_{1n}\alpha_n = b_1 \\ a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \cdots + a_{2n}\alpha_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}\alpha_1 + a_{m2}\alpha_2 + \cdots + a_{mn}\alpha_n = b_m \end{cases}$$

Endi *B* matrisaga quyidagi elementar almashtirishlarni qo'llaymiz: uning

1-nchi ustunini $-\alpha_1$ ga,

2-nchi ustunini $-\alpha_2$ ga

va hakoza,

n - nchi ustunini $-\alpha_n$ ga

ko'paytirib, ularning hammasini $n+1$ -nchi ustunga qo'shib yuboramiz. Natijada quyidagi matrisani hosil qilamiz:

$$C = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & -a_{11}\alpha_1 - a_{12}\alpha_2 - \cdots - a_{1n}\alpha_n + b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & -a_{21}\alpha_1 - a_{22}\alpha_2 - \cdots - a_{2n}\alpha_n + b_2 \\ & & & & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & - a_{m1}\alpha_1 = - a_{m2}\alpha_2 - \cdots - a_{mn}\alpha_n + b_m \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & 0 \end{pmatrix}$$

Elementar almashtirishlar haqidagi teoremaga asosan *C* matrisaning rangi *B* matrisaning rangiga teng. Lekin *C* matrisaning rangi *A* matrisaning ham rangiga teng, chunki, nollardan iborat ustunning qo'shilishi *A* matrisaning rangini o'zgartirmaydi.

Shunday qilib, $rang\ A = rang\ B$.

Yetarliligi. Endi (1) sistemaning asosiy va kengaytirilgan matrisalarining ranglari teng bo'lsin.

$$rang\ A = rang\ B = r.$$

Umumiylikka zarar keltirmasdan va qulayligi uchun A matrisaning rangini aniqlaydigan *r*-tartibli minor matrisaning yuqori chap burchagida joylashgan bo'lsin deb olamiz, yani

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0$$

U holda ***B*** matrisaning dastlabki -satri chiziqli bog'la r nmagan bo'ladi, chunki bu matrisaning rangi ga teng, *B* matrisaning qolgan ta satrlari dastlabki r -ta satrlari orqali chiziqli ifodalanadi. Bu esa $m-r$ (1) sistemaning dastlabki –ta r tenglamasi chiziqli bog'lanmaganligini, qolgan ta tenglamalari esa ularning chiziqli kombinasiyalaridan iborat ekanligini anglatadi. Demak, ChTSlarning elementar almashtirishlari yordamida r keyingi ta tenglamalar nolga aylantirilishi mumkin. Bu holda (1) sistemada $m-r$ ta tenglama qoladi. Bizga shu –ta tenglamadan iborat bo'lgan sistemani yechish yetarli. Topilgan yechimlar qolgan ta tenglamalarni ham qanoatlantiradi.

Bu yerda quyidagi hollar bo'lishi mumkin. $m-r$

1) . Bu holda (1) sistemaning dastlabki ta tenglamasidan ibor r at bo'lgan

r

$m-r$

(3)

$r=n$

$r-$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1r}x_r = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2r}x_r = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \cdots + a_{rr}x_r = b_r \end{cases}$$

sistemaning asosiy determinanti $D \neq 0$ bo'lib, bu sistemani Kramer formulalari bilan yechish mumkin. Bu holda (1) sistema birgalikda bo'lib, yagona yechimga ega bo'ladi.

2) $r < n$. Bu holda (1) sistemaning r – ta tenglamasini qoldiramiz. Bu tenglamalarda dastlabki r – ta noma'lumni tenglikning chap tomonida qoldirib qolganlarini o'ng tomonga o'tkazamiz:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1r}x_r = b_1 - a_{1,r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2r}x_r = b_2 - a_{2,r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{2n}x_n \\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \cdots + a_{rr}x_r = b_r - a_{r,r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{rn}x_n \end{cases} \quad (4)$$

(4) sistemadagi $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$ noma'lumlarni ozod noma'lumlar deb e'lon qilamiz va ularga ixtiyoriy qiymatlar beramiz. Natijada (4) sistemadan asosiy noma'lumlar $x_1, x_2, \cdots, x_r$ larning mos qiymatlarini hosil qilamiz. Bu holda (1) sistema birgalikda bo'lib, u cheksiz ko'p yechimga ega bo'ladi, ya'ni aniqmas sistemadan iborat bo'ladi.

***(4) sistemaning** $x_1, x_2, \cdots, x_r$ asosiy noma'lumlarini $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$ ozod noma'lumlar orqali ifodalangan yechimiga (1) sistemaning umumiy yechim deyiladi.*

Shunday qilib, agar $\boldsymbol{rang\ A = rang\ B}$ bo'lsa, (1) sistema birgalikda (aniq yoki aniqmas), $\boldsymbol{rang\ B} > rang\ A$ bo'lsa, (1) sistema birgalikda bo'lmaydi.

Teorema isbot bo'ldi.

BIR JINSLI TENGLAMALAR SISTEMASI

(1) sistemaning o'ng tomonidagi ozod hadlari nolga teng bo'lsa, unga bir jinsli deyiladi:

$$(5)\qquad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

(5) sistema har doim birgalikda bo'ladi, chunki u har doim nollardan iborat bo'lgan

$$x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_n = 0$$

yechimga ega. Bu Kroneker-Kapelli teoremasidan ham kelib chiqadi, bu yerda $\boldsymbol{rang\ A = rang\ B}$ bo'ladi.

Bu holda asosiy masala (5) sistemaning nolmas yechimlarini topishdan iborat. Bu masalaning yechimi quyidagi teorema bilan ifodalanadi.

Teorema-2. *(5) sistema nolmas yechimlarga ega bo'lishi uchun uning asosiy matrisasining rangi noma'lumlar sonidan kichik bo'lishi, ya'ni* **rang A < n** *bo'lishi zarur va yetarlidir.*

Haqiqatdan ham, agar $rang\ A = n$ bo'lsa, u holda Kroneker-Kapelli teoremasiga asosan (5) sistema yagona yechimga, ya'ni faqat nollardan iborat bo'lgan

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$$

yechimga ega bo'ladi. Agar bo'lsa, bu sistema yana shu teoremaga asosan aniqmas sistemadan iborat bo'lib cheksiz ko'p nolmas yechimlarga ham ega bo'ladi.

Bu yerdan quyidagi natija ham kelib chiqadi. $rang\ A < n$

Natija. *(5) sistema nolmas yechimlarga ega bo'lishi uchun uning asosiy matrisasining determinati D nolga teng bo'lishi zarur va yetarlidir.*

Haqiqatdan ham, agar

bo'lsa, (5) sistema asosiy matrisasining rangi *n* dan kichik bo'ladi. Yuqoridagi teoremaga asosan esa bu holda (5) sistema nolmas yechimlarga ega bo'ladi.

$$D = \det(A) = 0$$

FUNDAMENTAL YECHIMLAR SISTEMASI

Endi

$$x_1 = \alpha_1, x_2 = \alpha_2, \ldots, x_n = \alpha_n$$

sonlar (5) sistemaning qandaydir noldan farqli bo'lgan yechimi bo'lsin. Bu yechimlarni

$$\boldsymbol{e}_1 = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$$

vektor ko'rinishida tasvirlashimiz mumkin. U holda biror ***c*** son uchun

$$c\boldsymbol{e}_1 = (c\alpha_1, c\alpha_2, \ldots, c\alpha_n)$$

vektor ham (5) sistemaning yechimi bo'ladi. Agar

$$\boldsymbol{e}_2 = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$$

vektor (5) sistemaning boshqa bir yechimi bo'lsa, u holda ixtiyoriy c_1 *va* c_2 sonlar uchun e_1, e_2 yechimlarning chiziqli kombinasiyasi

$$c_1 e_1 + c_2 e_2 = (c_1\alpha_1 + c_2\beta_1, c_1\alpha_2 + c_2\beta_2, \ldots, c_1\alpha_n + c_2\beta_n)$$

ham (5) sistemaning yechimidan iborat bo’ladi. Haqiqatdan ham, (5) sistemaning i -nchi tenglamasi uchun

$$a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + \cdots + a_{in}\alpha_n = 0,$$
$$a_{i1}\beta_1 + a_{i2}\beta_2 + \cdots + a_{in}\beta_n = 0,$$

bo’lsa, bu tengliklarning birinchisini ga ikkinchisini esa ko’paytirib, qo’shib yuborsak c_1

c_2
$$a_{i1}(c_1\alpha_1 + c_2\beta_1) + a_{i2}(c_1\alpha_2 + c_2\beta_2) + \cdots + a_{in}(c_1\alpha_n + c_2\beta_n) = 0$$

tenglikni hosil qilamiz. Bu tenglik esa (5) sistema yechimlarining har qanday chiziqli kombinasiyasi ham uning yechimi bo’lishini ko’rsatadi.

(5) sistemaning vektor ko’rinishidagi shunday yechimlarini topish talab qilinadiki, uning boshqa yechimlari ular orqali chiziqli ifodalansin.

(5) sistemaning chiziqli bog'lanmagan** $e_1, e_2, \dots, e_k$ **yechimlari sistemasi fundamental yechimlar sistemasi deyiladi, agar (5) sistemaning har bir yechimi shu** $e_1, e_2, \dots, e_k$ **yechimlarning chiziqli kombinasiyasidan iborat bo'lsa.

(5) sistemaning fundamental yechimlarining mavjudligini quyidagi teorema o'rnatadi.

Teorema-3. *Agar (5) sistema asosiy matrisasining rangi noma'lumlar sonidan kichik bo'lsa, ya'ni* $rang\, A < n$ *bo'lsa, bu sistema fundamental yechimlar sistemasiga ega bo'ladi.*

Isbot. *A* matrisaning rangi noma'lumlar sonidan kichik bo'lib, uning rangini aniqlaydigan *r* – tartibli *D* minor matrisaning yuqori chap burchagida joylashgan bo'lsin.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} \end{bmatrix} \neq 0$$

(5) sistemaning dastlabki *r* -ta tenglamasini qoldirib, bu tenglamalarda

$$x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n$$

ozod noma'lumlarni ularning o'ng tomonlariga o'tkazamiz:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1r}x_r = -a_{1,r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2r}x_r = -a_{2,r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{2n}x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \cdots + a_{rr}x_r = -a_{r,r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{rn}x_n \end{cases} \qquad (6)$$

Bu sistemada ozod noma'lumlarga

$$x_{r+1} = 1, x_{r+2} = 0, \dots, x_n = 0$$

qiymatlarni berib, mos ravishda asosiy noma'lumlarning

$$x_1 = \alpha_1, x_2 = \alpha_2, \cdots, x_r = \alpha_r$$

qiymatlarini hosil qilamiz. Bu ikkala qiymatlar satrini birlashtirib, (5) sistemaning quyidagi vektor yechimini

$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, 1, 0, \dots, 0)$$

hosil qilamiz.

$$x_{r+1} = 0, x_{r+2} = 1, \dots, x_n = 0$$

Xuddi shunday ozod noma'lumlarga

$$x_1 = \beta_1, x_2 = \beta_2, \cdots, x_r = \beta_r$$

qiymatlarni berib, mos ravishda asosiy noma'lumlarning

$$(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r, 0, 1, 0, \dots, 0\ )$$

qiymatlarini va (5) sistemaning yana bir vektor yechimini

hosil qilamiz.

Bu jarayonni $\boldsymbol{k = n - r}$ marta davom ettirib, quyidagi vektor yechimlar sistemasini hosil qilamiz:

$$\boldsymbol{e}_1 = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, 1, 0, \dots, 0)$$
$$\boldsymbol{e}_2 = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r, 0, 1, \dots, 0)$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\boldsymbol{e}_k = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r, 0, 0, \dots, 1)$$

Bu vektor yechimlar o'zaro chiziqli bog'lanmagan sistemani tashkil qiladi, chunki ularning koordinatalaridan tuzilgan

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_r & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_r & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \xi_1 & \xi_2 & \dots & \xi_r & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad (7)$$

matrisaning rangi $\boldsymbol{k}$ ga teng. Unda noldan farqli $\boldsymbol{k}$ tartibli minor mavjud, bu minor matrisaning oxirgi $\boldsymbol{k}$-*ta* ustunida joylashgan.

$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots\dots, \boldsymbol{e}_k$

Endi $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots\dots, \boldsymbol{e}_k$ vektor yechimlar (5) sistemaning fundamental yechimlar sistemasidan iborat ekanligini ko'rsatamiz. Buning uchun (5) sistemaning har bir yechimi sistema orqali chiziqli ifodalanishini ko'rsatish kerak bo'ladi.

Aytaylik , $\boldsymbol{e} = (\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_r, \vartheta_{r+1}, \dots, \vartheta_n)$

Quyidagi vektorni kiritamiz.

$$\begin{aligned} e_0 &= e - \vartheta_{r+1}e_1 - \vartheta_{r+2}e_2 - \dots - \vartheta_n e_k = \\ &= (\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_r, \vartheta_{r+1}, \dots, \vartheta_n) - \\ &-\vartheta_{r+1}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, 1, 0, \dots, 0) - \\ &-\vartheta_{r+2}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r, 0, 1, \dots, 0) - \\ &\dots\dots\dots\dots\dots \\ &-\vartheta_n(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r, 0, 0, \dots, 1) = \end{aligned}$$

$$=\begin{pmatrix} \vartheta_1 - \vartheta_{r+1}\alpha_1 - \vartheta_{r+2}\beta_1 - \dots - \vartheta_n\xi_1, \\ \vartheta_2 - \vartheta_{r+1}\alpha_2 - \vartheta_{r+2}\beta_2 - \dots - \vartheta_n\xi_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \vartheta_r - \vartheta_{r+1}\alpha_r - \vartheta_{r+2}\beta_r - \dots - \vartheta_n\xi_r, \\ 0, \dots, 0 \end{pmatrix}$$

Bu vektorning dastlabki r ta koordinatalarini ρ lar bilan belgilab olsak

$$e_0 = (\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_r, 0, 0, \dots, 0)$$

e_0 vektorni hosil qilamiz. e_0 (5) sistema yechimlarining chiziqli kombinatsiyasidan iborat bo'lganligi uchun u ham shu sistemaning yechimidan iborat bo'ladi. Lekin e_0 vektorda barcha ozod noma'lumlarga mos keluvchi koordinatalar nolga teng. Bu holda e_0 (6) sistemaning ham yechimi bo'ladi. (6) sistemaning o'ng tomoni faqat nollardan iborat bo'lib, uning asosiy matrisasining determinanti

$$D = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} \end{bmatrix} \neq 0$$

noldan farqli, shu sababli bu holda (6) sistema faqat nol yechimga ega bo’ladi. Demak, e_0 vektorning barcha koordinatalari nolga teng ekan. Bu yerdan

$$e_0 = e - \vartheta_{r+1}e_1 - \vartheta_{r+2}e_2 - \dots - \vartheta_n e_k = (0,0,\dots,0)$$

ni hosil qilamiz. Va bu yerdan e vektorni topsak, uning $e_1, e_2, \dots\dots, e_k$ vektorlar orqali chiziqli ifodasi hosil bo’ladi

$$e = \vartheta_{r+1}e_1 + \vartheta_{r+2}e_2 + \dots + \vartheta_n e_k$$

Bu esa $e_1, e_2, \dots\dots, e_k$. vektorlar sistemasining fundamental yechimlar sistemasidan iborat ekanligi kelib chiqadi.

Teorema isbot bo’ldi. Teorema isbotidan fundamental yechimlar sistemasini qurish usuli ham kelib chiqadi. Buning uchun umumiy yechimdagi ozod noma’lumlarga navbati bilan birinchisiga 1 qiymatni, qolganlariga esa 0 qiymatni, so’ngra ikkinchisiga 1 qiymatni, qolganlariga esa 0 qiymatni va hakoza, oxirgisiga 1 qiymatni, qolganlariga esa nol qiymatni berib, asosiy noma’lumlarning ham qiymatlarini hisoblash kerak ekan. Umuman olganda, bunday qiymatlarni ham berish shart emas, biror usul bilan yechimlar orasidan chiziqli bog’lanmagan barcha yechim

Shunday qilib, (5) bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasining umumiy yechimi

$$c_1 e_1 + c_2 e_2 + \dots + c_k e_k$$

ko’rinishda bo’ladi, bu yerda $e_1, e_2, \dots \dots, e_k$ (5) sistemaning birorta fundamental yechimlari sistemasi, $c_1, c_2, \dots \dots, c_k$ -lar esa ixtiyoriy sonlardan iborat.

BIR JINSLI BO'LMAGAN VA UNGA MOS BO'LGAN BIR JINSLI TENGLAMALAR SISTEMALARINING YECHIMLARI ORASIDAGI BOG'LANISH

Endi bir jinsli bo'lmagan

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{222}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{1}$$

tenglamalar sistemasini va unga mos bo'lgan bir jinsli

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{222}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \tag{5}$$

tenglamalar sistemasini qaraymiz.

$$\boldsymbol{e_1} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$$

vektor (1)sistemaning tayinlangan biror xususiy yechimi,

$$\boldsymbol{e_2} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$$

esa shu sistemaning boshqa bir ixtiyoriy yechimi bo'lsin. U holda

$$\boldsymbol{e_1} - \boldsymbol{e_2} = (\alpha_1 - \beta_1, \alpha_2 - \beta_2, \dots, \alpha_n - \beta_n)$$

ayirma (5) sistemaning yechimi bo'ladi. Haqiqatdan ham, agar ularni (1) sistemaning ixtiyoriy bir tenglamasiga qo'ysak

$$a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + \cdots + a_{in}\alpha_n = b_i$$

va

$$a_{i1}\beta_1 + a_{i2}\beta_2 + \cdots + a_{in}\beta_n = b_i$$

ayniyatlarni hosil qilamiz, u holda bu tengliklarni hadma-had ayirib,

$$a_{i1}(\alpha_1 - \beta_1) + a_{i2}(\alpha_2 - \beta_2) + \cdots + a_{in}(\alpha_n - \beta_{n)} = b_i - b_i = 0$$

ni hosil qilamiz. Bu esa $\boldsymbol{e_1} - \boldsymbol{e_2}$ ayirmani (5) sistemaning yechimidan iborat ekanligini ko'rsatadi.

Bundan tashqari, agar

$$\boldsymbol{e_3} = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$$

vektor (5) sistemaning ixtiyoriy yechimi bo'lsa, u holda $\boldsymbol{e_1} + \boldsymbol{e_3}$ yig'indi esa (1)sistemaning yechimi bo'ladi. Haqiqatdan ham,

$$a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + \cdots + a_{in}\alpha_n = b_i$$

va

$$a_{i1}\gamma_1 + a_{i2}\gamma_2 + \cdots + a_{in}\gamma_n = 0$$

tengliklarni hadma-had qo'shib

$$a_{i1}(\alpha_1 + \gamma_1) + a_{i2}(\alpha_2 + \gamma_2) + \cdots + a_{in}(\alpha_n + \gamma_n) = b_i + 0 = b_i$$

ni hosil qilamiz. Bu esa $\boldsymbol{e_1} + \boldsymbol{e_3}$ yig'indi (1)sistemaning yechimi ekanligini ko'rsatadi.

Bu yerdan (1) sistemaning barcha yechimlarini hosil qilish uchun uning bitta xususiy yechimiga (5) sistemaning mumkin bo'lgan barcha yechimlarini qo'shish kerak ekanligi kelib chiqadi. Ya'ni, (1)sistemaning umumiy yechimi uning bitta xususiy yechimi bilan (5) sistemaning umumiy yechimlari yig'inidisiga teng bo'ladi. Agar e_0 vektor (1) sistemaning ixtiyoriy bir xususiy yechimi, $e_1, e_2, \dots \dots, e_k$ lar esa (5) sistemaning qandaydir fundamental yechimlari sistemasi bo'lsa, u holda (1) sistemaning umumiy yechimi

$$e_0 + c_1 e_1 + c_2 e_2 + \cdots + c_k e_k$$

ko'rinishda bo'ladi, bu yerda $c_1, c_2, \dots \dots, c_k$ -lar ixtiyoriy sonlardan iborat.

n-номаълумли m-та чизиқли тенгламалар системаси

асосий матрицасининг ранги =r , кенгайтирилган матрицасининг ранги=k.

r=k=n бўлса, ЧТС биргаликда ва ягона ечимга эга бўлади.

Ечиш усуллари,

- Гаусс усули
- Крамер формулалари,
- Тескари матрица усули

$r=k<n$ бўлса, ЧТС биргаликда ва чексиз кўп ечимга эга бўлади.

- Гаусс усули

$r\neq k$ бўлса, ЧТС биргаликда бўлмайди

Talabalar bilimini baholashning blis-so’rov texnologiyasi

Talabaning familiyasi va ismi: ______________________________ ______(ball)

Savollar nomerlari	Yakka baxo	Yakka xato	To’g’ri javob	Guruh xatosi	Guruh bahosi
1-savol					
2-savol					
3-savol					
4-savol					
5-savol.					
6-savol.					
7-savol.					
8-savol.					
9-savol.					
10-savol.					
	Jami yakka xatolar soni		Jami gurux xatolari soni		

Talaba masalalarni dastavval individual ishlab, ularning javoblarini jadvalning **yakka baho** grafasiga yozadi. So'ngra guruh bilan maslahatlashib javoblarni aniqlashtiradi va aniqlashtirilgan javoblarni **guruh bahosi** grafasiga yozadi.

O'qituvchi tomonidan berilgan javoblar jadvalning **to'g'ri javob** grafasiga yoziladi.

Yakka yoki guruh xatosini hosil qilish uchun to'g'ri javob sonidan yakka yoki guruh bahosi (kattasidan kichigi) ayriladi.

Yakka bahoni hosil qilish uchun savollar sonidan jami yakka xatolar soni ayriladi:

10 – yakka xatolar soni = yakka baho.

Guruh bahosini hosil qilish uchun savollar sonidan jami guruh xatolari soni ayriladi:

10 – guruh xatolari soni = guruh bahosi.

Ushbu baholar topilgandan so'ng talaba varaqning yuqori qismidagi o'z familiyasi to'g'risiga to'plagan balini yozib qo'yadi.

TESTLAR

1. Noma'lumlari soni tenglamalari soniga teng bo'lgan bir jinsli tenglamalar sistemasining nechta yechimi bor?

1) Faqat 1 ta;

2) 1 tadan ko'p;

3) kamida 1 ta.

2. Noma'lumlari soni tenglamalari soniga teng bo'lgan bir jinsli bo'lmagan tenglamalar sistemasining nechta yechimi bor?

1) Faqat 1 ta;

2) To'g'ri javob berilmagan;

3) cheksiz ko'p.

3. Asosiy matrisasining rangi tenglamalari soniga teng bo'lgan bir jinsli tenglamalar sistemasining nechta yechimi bor?

1) kamida 1 ta;

2) 1 tadan ko'p;

4. $x_1 + x_2 + x_3 = 3$ tenglamaning barcha yechimlarini toping.

1) (1, 1, 1);

2) $(3 - c_1 - c_2,\ c_1,\ c_2)$, бу ерда c_1, c_2 лар ихтиёрий сонлар;

3) (2, 1, 0).

5. $x_1 - x_2 + x_3 = 0$ tenglamaning barcha yechimlarini toping.

1) (2, 1, -1);

2) (0, 0, 0);

3) $(c_1,\ c_1 + c_2,\ c_2)$, бу ерда c_1, c_2 лар ихтиёрий сонлар;

6. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ va $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ matrisalar ko'paytmasining rangini toping.

1) 1;

2) 0 ;

3) 2.

7. $\begin{vmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 3 & 4 & -7 \\ 4 & 6 & -4 \end{vmatrix}$ determinantni hisoblang.

1) 12;

2) 0 ;

3) 3.

8. $$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ -x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasining fundamental yechimlari sistemasini toping.

1) (1, 0, 1) va (0, 1, 1);

2) (1, -1, 0) va (-1, 1, 0);

3) (1, 0, 1) va (2, 0, 2).

9. $$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ -x_1 - x_2 + x_3 = -1 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasi yechimlari sonini toping.

1) 1 ta;

2) yechimi yo'q;

3) yechimlari cheksiz ko'p.

10. Bir jinsli bo'lmagan tenglamalar sistemasi yechimga ega bo'lmasligi uchun qanday shart bajarilishi kerak?

1) Asosiy matrisasining determinanti noldan farqli bo'lishi kerak.

2) Asosiy matrisasining rangi kengaytirilgan matrisasining rangiga teng bo'lishi kerak.

3) Asosiy matrisasining rangi kengaytirilgan matrisasining rangiga teng bo'lmasligi kerak.

Talabalar bilimini baholashning blits-so'rov texnologiyasi

To'g'ri javoblar

Savollar nomerlari	**Yakka baxo**	**Yakka xato**	**To'g'ri javob**	**Guruh xatosi**	**Guruh bahosi**
1-savol			3		
2-savol			2		
3-savol			1		
4-savol			2		
5-savol.			3		
6-savol.			2		
7-savol.			2		
8-savol.			1		
9-savol.			3		
10-savol.			3		
	Jami yakka xatolar soni	2	Jami gurux xatolari soni		