

FUNKSIYA DIFFERENSIALI. DIFFERENSIAL HISOBNING ASOSIY TEOREMALARI

Ma'ruza rejasi

1. Funksiyaning differensial.
2. Funksiyaning differensialining taqribiy hisoblashga tatbiqi.
3. Differensial hisobning asosiy teoremlari

Tayanch so'z va iboralar: differensial, yig'indi, ko'paytma va bo'linmaning differensial, differensial hisobning asosiy teoremlari.

1. Funksiyaning differensial

Differensial ham hosila kabi, qaysi o'zgaruvchi bo'yicha hisoblanishidan bog'lik bo'ladi. Qaysi o'zgaruvchi bo'yicha differensial hisoblanayotgan bo'lsa, bu o'zgaruvchi erkli o'zgaruvchi deyiladi. Differensialning qaysi o'zgaruvchi bo'yicha hisoblanayotganini ko'rsatish o'rniga, qaysi o'zgaruvchi erkli deb, tanlanganini aytish qabul qilingan.

Masalan, $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$ murakkab funksiya berilgan bo'lsin, x ni erkli o'zgaruvchi deb tanlash mumkin, biroq agar bizni faqat y ning u dan bog'lanishi qiziqтира, erkli o'zgaruvchi deb u ni olish mumkin.

Biz differensiallaymiz, differensiallash qoidalari, formulalari va hokazo iboralarni tez-tez ishlatgan edik, lekin qanday funksiya differensiallanuvchi deyiladi?, degan savolga hanuzgacha javob berganimiz yo'q.

Ta'rif: *Erkli o'zgaruvchi bo'yicha funksiya hosilasining erkli o'zgaruvchining ixtiyoriy orttirmasiga ko'paytmasi funksiyaning differensial deyiladi.*

Funksiya differensial dy yoki $df(x)$ bilan belgilanadi. Shunday qilib, agar x erkli o'zgaruvchi bo'lsa $dy = y' \Delta x$ (yoki $df(x) = f'(x) \Delta x$).

x ning tayinlangan qiymatini qaraymiz, Δx asosiy cheksiz kichik bulsin. Δy bilan dy orasida munosabat o'rnatamiz:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y - dy}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{\Delta y}{\Delta x} - \frac{f'(x)\Delta x}{\Delta x} \right] = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x) = f'(x) - f'(x) = 0 \Rightarrow$$

$$\Delta y - dy = o(\Delta x) \Rightarrow \Delta y = dy + o(\Delta x) \quad (1)$$

yoki

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + o(\Delta x);$$

bu yerda

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} \Rightarrow \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} = \alpha$$

cheksiz kichik

$$o(\Delta x) = \alpha \Delta x.$$

Shunday qilib $\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha \Delta x$. Bunda $f'(x)\Delta x$ qo'shiluvchi funksiya orttirmasining bosh chiziqli qismi deyiladi. Demak, funksiyaning differensial funksiya orttirmasining bosh chiziqli qismi ekan.

Δx ning yetarlicha kichik qiymatlarida (1) dan

$$\Delta y \cong dy \quad (2)$$

taqribiy tenglik hosil bo'ladi.

$$\text{Xato } \alpha \Delta x \text{ ga teng, nisbiy xato esa } \frac{\alpha \cdot \Delta x}{dy} = \frac{\alpha \cdot \Delta x}{f'(x) \cdot \Delta x} = \frac{1}{f'(x)}$$

Bundan ko'rinadiki Δx ning kichik qiymatlarida (2) – taqribiy tenglikning nisbiy xatosi $\Delta x \rightarrow 0$ da kichikdir.

Ta'rif: Erkli o'zgaruvchining differensial deb, $y=x$ funksiyaning differensialiga aytiladi.

$$\begin{aligned} dy &= dx = x' \Delta x = 1 \cdot \Delta x = \Delta x; \\ dx &= \Delta x \end{aligned} \quad (2^*)$$

Shunga asosan funksiya differensial

$$dy = f'(x) dx$$

ko'rinishni oladi.

Bundan

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

ya'ni, funksiya hosilasi funksiya differensialining argument differensialiga nisbatiga teng. dy - ni « y mikdorning elementi » deb aytiladi.

Elementar funksiyalarning differensial jadvali

1. $d(x^n) = nx^{n-1} dx \quad (x > 0)$;
2. $d(a^x) = a^x \ln a dx \quad (a > 0, a \neq 1)$;
3. $d(\log_a x) = \frac{1}{x} \log_a e dx \quad (x > 0, a > 0, a \neq 1)$;
4. $d(\ln x) = \frac{1}{x} dx$;
5. $d(\sin x) = \cos x dx$;
6. $d(\cos x) = -\sin x dx$;
7. $d(\operatorname{tg} x) = \frac{1}{\cos^2 x} dx$;
8. $d(\operatorname{ctg} x) = -\frac{1}{\sin^2 x} dx$;
9. $d(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$;
10. $d(\arccos x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$;
11. $d(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{1+x^2} dx$;
12. $d(\operatorname{arcctg} x) = -\frac{1}{1+x^2} dx$

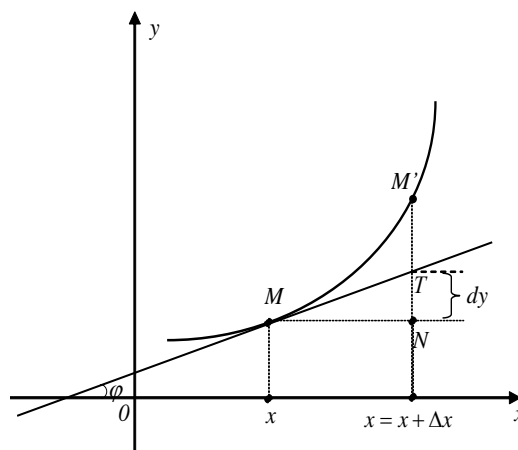
Differensialning geometrik ma'nosi

$y = f(x)$ funksiya va uning grafigini karaymiz. (4-shakl)

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = NM', \quad MN = \Delta x,$$

$$NT = MN \cdot \operatorname{tg} \varphi = f'(x) \cdot \Delta x = dy$$

Shunday qilib, $\Delta y = NM'$ - funksiya grafigi bo'ylab harakatdagi M' nuqta ordinatasining orttirmasi;



4-shakl

dy esa funksiya grafigiga o'tkazilgan urinma bo'ylab harakatdagi T nuqta ordinatasining orttirmasi.

Differensialning mexanik ma'nosi

Moddiy nuqta o'q bo'ylab $s=s(t)$ qonun bo'yicha harakat qilsin. t vaqtni erkli o'zgaruvchi deb qabul qilamiz. Bu holda $ds(t) = s'(t) \Delta t = v(t) \Delta t$.

Shunday qilib, yo'lning differensial, tezlik o'zgarmay qolganda, moddiy nuqtaning Δt vaqtda o'tadigan yo'lidir. Haqiqatda esa tezlik o'zgarmay qolmaydi va nuqtaning Δt vaqtda o'tgan haqiqiy yo'li $ds(t)$ ga emas, balki, $\Delta s(t)$ ga teng bo'ladi. ($ds(t)$ esa yo'lning taqribiy qiymati bo'lib, haqiqiy yo'ldan Δt ga nisbatan ham kam farq qiladi).

Misollar

1. Ish. A ishni, $F(x)$ ta'sir etuvchi kuch berilganda, siljishning funksiyasi deb qaraymiz. Kichik kesmada F kuchni doimiy deb faraz qilib, ish elementini hisoblaymiz:

$$dA = Fdx, \text{ yoki } \frac{dA}{dx} = F.$$

Ishdan olingan hosila ta'sir etuvchi kuchga teng

2. Ingichka sterjen massasi. Kichik kesmada chiziqli zichlikni o'zgarmas deb hisoblaymiz. Bu holda massa elementi uchun $dm = \gamma dl$ ga ega bo'lamiz. $\frac{dm}{dl} = \gamma$ massaning hosilasi – chizikli zichlik.

3. Zaryad. Vaqtning kichik oralig'ida tok kuchini doimiy deb hisoblash mumkin. Shu sababli $dq = idt$.

4. Qizdirilganda issiqlikni ajralishi. Daraja (temperatura)ning yetarlicha kichik o'zgarishida issiqlik sig'imini doimiy deb qisoblash mumkin. bu holda $dq = c dt$.

Yig'indi, ko'paytma va bo'linmaning differensial

$u = u(x)$, $v = v(x)$, $w = w(x)$ funksiyalar X sohada differensiallanuvchi bo'lsin, bu holda quyidagi qoidalar o'rinli:

1. Yig'indi differensial

$$d(u+v-w) = (u+v-w)' dx = (u' + v' - w') dx = u' dx + v' dx - w' dx = du + dv - dw$$

$$d(u+v-w) = du + dv - dw$$

2. Kupaytmaning differensial

$$d(uv) = (uv)' dx = (u'v + v'u) dx = vu' dx + uv' dx = vdu + u dv$$

ya'ni:

$$d(uv) = vdu + u dv$$

xususiyl holda, $u=C=sonst$ bo'lsa $du = 0$ va

$$d(Cv) = Cdv, \quad dC = 0$$

3. Nisbatning differensial

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - u dv}{v^2}$$

xususiy holda: $d\left(\frac{c}{v}\right) = -\frac{cdv}{v^2}$; ($C - \text{const}$).

Differensial formasining invariantligi

$y = f(x)$ funksiya X sohada aniqlangan va $x \in X$ nuqtada chekli hosilaga ega bo'lsin, bu holda ma'lumki

$$dy = y'_x dx \quad (1)$$

Endi murakkab funksiyaning hosilasini topamiz:

$y = f(x)$, $x = \varphi(t)$ yoki $y = f(\varphi(t))$ bo'lsin.

Ma'lumki

$$y'_t = y'_x \cdot x'_t \quad (2)$$

(2) tenglikning har ikki tomonini dt ga ko'paytiramiz:

$$y'_t \cdot dt = y'_x \cdot x'_t \cdot dt \quad (3)$$

Bundan, $x'_t dt = dx$; $y'_t dt = dy$ ekanligini hisobga olsak (3) dan:

$$dy = y'_x dx \quad (4)$$

hosil bo'ladi. (1) va (4) ifodalar ko'rinishi jihatidan bir-biridan hech narsa bilan farq qilmaydi, ya'ni x erkli o'zgaruvchi yoki boshqa o'zgaruvchidan bog'lik bo'lishiga qaramasdan differensialning ko'rinishi o'zgarmaydi. Boshqacha aytganda, murakkab funksiya differensial bilan funksiya differensial ko'rinishi bir xil bo'lar ekan. Differensialning bu xususiyatiga uning *invariantligi* deyiladi.

2. Differensialning taqribiy hisoblashlarga tadbiri

$y = f(x)$ funksiya x nuqtada chekli $f'(x) \neq 0$ hosilaga ega bo'lsa

$$\Delta y \cong dy \quad (1)$$

Ravshanki, $|\Delta x|$ qanchalik kichik bo'lsa (1) tenglik shunchalik aniq bo'ladi. Ma'lumki,

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x; \quad dy = f'(x)\Delta x \quad (2)$$

$$(1) \stackrel{(2)}{\Rightarrow} f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x; \Rightarrow$$

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x \quad (3)$$

Δy ni dy bilan almashtirganda $\Delta = |\Delta y - dy|$ absolyut xatoga va $\delta = \frac{\Delta}{|\Delta y|}$ nisbiy xatoga

yo'l qo'yiladi.

Absolyut xatoni baholash uchun, ushbu

$$|\Delta y - dy| < \max |f''(x)| \Delta x^2 \quad (4)$$

tengsizlikdan foydalaniladi. Bu yerda $\max |f''(x)|$ ikkinchi tartibli hosila modulining $[x, x + \Delta x]$ kesmadagi eng katta qiymati.

1-misol

$\sqrt{3,998}$ hisoblansin.

Yechilishi: To'g'ridan to'g'ri ildizni hisoblash murakkab. $x \in (0; +\infty)$ da $f(x) = \sqrt{x}$ funksiyani qaraymiz. Bu funksiya uchun (3) formula quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\sqrt{x + \Delta x} \approx \sqrt{x} + \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}} \cdot \Delta x.$$

Bu yerga $x + \Delta x = 3,998$, $x = 4$ ni qo'yamiz:

$$\sqrt{3,998} \approx \sqrt{4} - \frac{1}{2\sqrt{4}} \cdot 0,002 = 1,995.$$

2-misol

$\sqrt[5]{243,45}$ hisoblansin.

Yechilishi: $f(x) = \sqrt[5]{x}$, $x \in R$ funksiya uchun (3) formula $\sqrt[5]{x + \Delta x} \approx \sqrt[5]{x} + \frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}} \cdot \Delta x$

ko'rinishni oladi.

Bunga $x + \Delta x = 243,45$ va $x = 243 = 3^5$ larni qo'yib $\sqrt[5]{243,45} \approx 3 + \frac{1}{5 \cdot 81} \cdot 0,45 \approx 3,001$ hosil qilamiz.

3-misol

$\ln 1,1$ hisoblansin.

Yechilishi: $f(x) = \ln x$; $0 < x < +\infty$ funksiya uchun (3) formula $\ln(x + \Delta x) \cong \ln x + \frac{\Delta x}{x}$

ko'rinishni oladi. Bunga $x + \Delta x = 1,1$ yoki $x = 1$, $\Delta x = 0,1$ ni qo'ysak $\ln 1,1 \cong \ln 1 + \frac{1}{1} \cdot 0,1 = 0,1$.

Jadvaldan: $\ln 1,1 \cong 0,0953$.

4-misol

$\sin 45^{\circ}06'$ hisoblansin.

Yechilishi: $f(x) = \sin x$, $x \in R$ funksiyani qaraymiz.

(3) formula $\sin(x + \Delta x) \approx \sin x + \cos x \cdot \Delta x$ ko'rinishni oladi. Bu yerda $x + \Delta x = 45^{\circ}$ deb olamiz.

Eslatma: $1^{\circ} = \frac{\pi}{180}$; $1' = \frac{\pi}{180 \cdot 60}$.

Natijada: $\sin 45^{\circ}06' \approx \sin \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{4} \cdot \frac{\pi}{1800} \approx \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{3,14}{1800} \approx 0,7083$.

3. Yuqori tartibli hosilalar va differensiallar

$y = f(x)$ funksiya biror intervalning har bir nuqtasida differensiallanuvchi bo'lsin. Bu holda, funksiyaning $y' = f'(x)$ hosilasi x ning funksiyasi bo'ladi va u o'z navbatida hosilaga ega bo'lishi mumkin. Shu sababli, hosilaning hosilasi ikkinchi hosila yoki ikkinchi tartibli hosila deyiladi va

$y'' = f''(x)$ yoki $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d^2 f(x)}{dx^2}$ deb belgilanadi. Ikkinchi hosilaning hosilasi uchinchi hosila deyiladi va h.k.

Induksiya yordamida n - tartibli hosila $(n-1)$ - tartibli hosilaning hosilasi deb aniqlanadi.

$$y^{(n)} = f^{(n)}(x) \text{ yoki } \frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d^n f(x)}{dx^n} \text{ ya'ni } (y^{(n-1)})' = y^{(n)}.$$

Shunga o'xshash ravishda yuqori tartibli differensiallar tushunchasi kiritiladi.

Masalan, x erkli o'zgaruvchi $dy = y' dx$ bo'lganda:

$$d^2 y = d(dy) = y'' dx^2;$$

$$d^3 y = d(d^2 y) = y''' dx^3;$$

$$\dots\dots\dots$$

$$d^n y = d(d^{n-1} y) = y^n dx^n.$$

Shuni ta'kidlash zarurki, yuqori tartibli differensial invariantlik xususiyatiga ega emas.

1-misol

$$y = a^x; \quad y^{(n)} - \text{topilsin.}$$

Yechilishi:

$$y' = a^x \cdot \ln a; \quad y'' = a^x \cdot \ln^2 a; \quad \dots; \quad y^{(n)} = a^x \cdot \ln^n a.$$

2-misol

$$y = x^\alpha; \quad y^{(n)} - \text{topilsin.}$$

Yechilishi:

$$y' = \alpha x^{\alpha-1}; \quad y'' = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}; \quad y''' = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)x^{\alpha-3}; \quad \dots$$

$$y^{(n)} = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}.$$

3-misol

$$y = \sin x; \quad y^{(n)} - \text{topilsin.}$$

Yechilishi:

$$y' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right); \quad y'' = -\sin x = \sin\left(\pi + 2 \cdot \frac{\pi}{2}\right); \quad y''' = \sin\left(x + 3 \cdot \frac{\pi}{2}\right); \quad \dots$$

$$y^{(n)} = \sin\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right).$$

4. Differensial hisobning asosiy teoremlari

Funksiya xossalari tekshirishda, eng muhim tadbirlar asosida *Ferma*, *Roll*, *Lagranj* va *Koshi* teoremlari yotadi. Bu teoremlar odatda differensial hisobning asosiy teoremlari deyiladi.

1. Ferma teoremasi

Teorema: $f(x)$ funksiya $]a, b[$ oraliqda aniqlangan, uning ichki $x = c$ nuqtasida eng katta (eng kichik) qiymatini qabul qilsin. Agar bu c nuqtada chekli $f'(x)$ hosila mavjud bo'lsa, u holda $f'(c) = 0$ bo'ladi.

Isboti: $M = \sup\{f(x)\}$, $m = \inf\{f(x)\}$, $x \in]a, b[$ bulsin. $f(c) = M$ deb faraz qilaylik, ya'ni $\forall x \in]a, b[$ uchun $f(x) \leq f(c)$ bo'lsin.

Hosila ta'rifi ko'ra

$$f'(c) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}, \text{ (bunda } x = x_0 + \Delta x, x_0 = c \text{ deb olingan)}$$

$$\text{bunda: } \forall x \in]c, b[, \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0 \Rightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0;$$

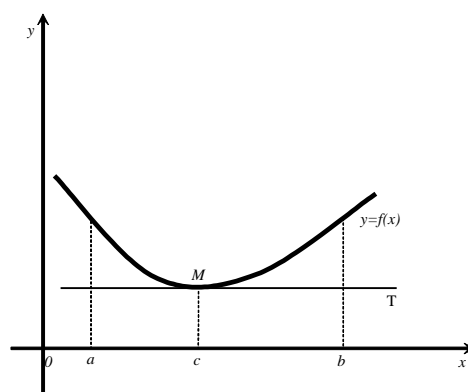
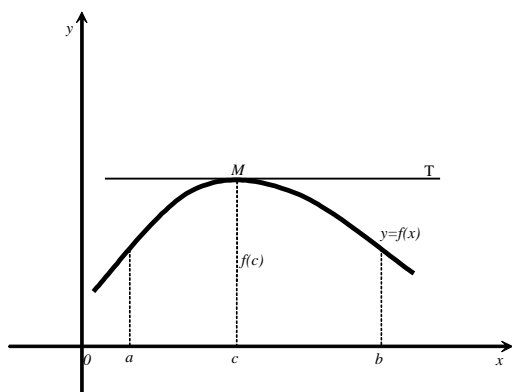
$$\forall x \in]a, c[, \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0 \Rightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0;$$

$x \rightarrow c + 0$ va $x \rightarrow c - 0$ limitlarni takkoslab $f'(c) = 0$ degan xulosaga kelamiz.

Teorema $f(c) = m$ bo'lgan holda ham shunga o'xshash isbotlanadi.

Teorema geometrik ma'nosi

$f'(c) = 0$ tenglik, funksiya grafigiga $M(c, f(c))$ nuqtadan o'tkazilgan urinma Ox o'qiga parallel ekanini bildiradi. (5-shakl)



5-shakl

Izoh: Teorema faqat funksiya oraliqning ichki nuqtasida eng katta (kichik) qiymatga erishgan hol uchun qo'llaniladi.

1-misol

$y = x^2$ funksiya Ferma teoremasi shartini $\left[0; \frac{1}{2}\right]$ kesmada qanoatlantiradimi?

Yechilishi: $m = f(0) = 0$, $M = f(1/2) = 1/4$ ekanligiga ishonch hosil qilish murakkab emas.

$$f'(x) = 2x|_{x=1/2} = 1 \neq 0; \quad f'(x) = 2x|_{x=0} = 0.$$

Shunday qilib, funksiya $x=1/2$ nuqtada eng katta qiymatga ega bo'lishiga qaramasdan, bu nuqtadagi chekli hosila nolga teng emas, ya'ni teorema bajarilmaydi.

2. Roll teoremasi

Teorema: Agar $f(x)$ funksiya: 1) $[a, b]$ kesmada uzluksiz; 2) $]a, b[$ oraliqda chekli hosilaga ega; 3) $f(a) = f(b)$ shartlarni qanoatlantirsa, u holda $]a, b[$ da hiech bo'lmaganda bitta s nuqta topiladiki, $f'(c) = 0$ bo'ladi.

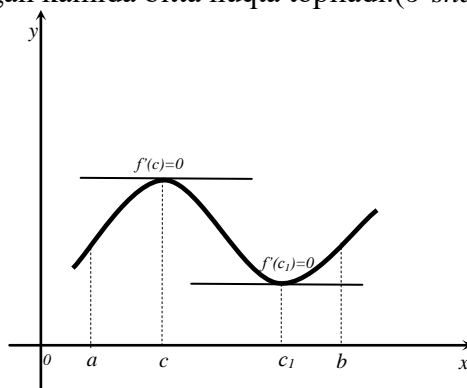
Isboti: Funksiya uzluksiz bo'lgani uchun u $[a, b]$ kesmada o'zining eng katta va eng kichik qiymatlariga erishadi. Ikkita holni qaraymiz: $M = m$ va $M \neq m$;

1. Agar $M = m$ bo'lsa, $f(x) = \text{const}$ va $\forall x \in]a, b[$ da $f'(x) = 0$.

2. Agar $M \neq m$ bo'lsa, $f(a) = f(b)$ bo'lgani uchun funksiya hiech bo'lmaganda M va m qiymatlarning biriga erishadi va Ferma teoremasiga asosan $\exists c \in]a, b[; f'(c) = 0$.

Teoremaning geometrik ma'nosi

Egri chiziqqa (funksiya grafigiga) teoremaning hamma shartlari bajarilganda, o'tkazilgan urinma Ox o'qiga parallel bo'lgan kamida bitta nuqta topiladi.(6-shakl).

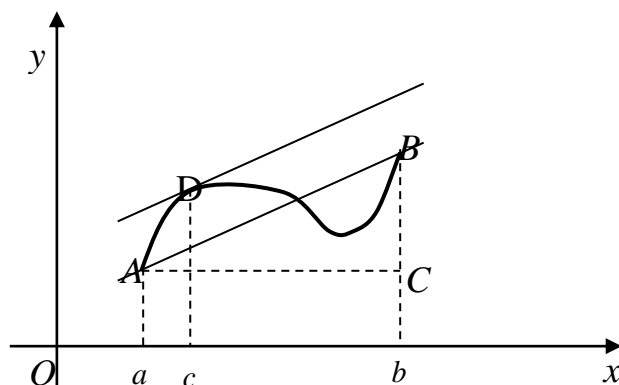


6-shakl

3. Lagranj teoremasi

Teorema: Agar $f(x)$ funksiya: 1) $[a, b]$ kesmada uzluksiz; 2) $]a, b[$ oraliqda chekli $f'(x)$ hosilaga ega bo'lsa, bu holda kamida bitta $c \in]a, b[$ nuqta topiladiki $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$ tenglik o'rinli bo'ladi.

Isboti: Geometrik tasvirdan foydalanamiz.(7- shakl)



7-shakl

Uzluksiz egri chiziqning $A(a, f(a))$, $B(b, f(b))$ nuqtalarini (AV) kesuvchi bilan tutashtiramiz. Ravshanki, bu kesuvchining burchak koeffisienti $(f(b) - f(a))/(b - a)$ ga teng. Egrilikning ixtiyoriy $M(x, y)$ nuqtasidan urinma o'tkazamiz va uning Ox uqqa og'gan burchagini φ bilan belgilaymiz va φ ni α ga intiltiramiz. Natijada, egrilikda shunday $N(c, f(c))$ nuqta topiladiki, bu nuqtadan o'tkazilgan NT urinma (AV) ga parallel bo'ladi ($\varphi=\alpha$ bo'lgan hol). Urinma burchak koeffisiyenti $k=tg\varphi=f'(c)$ bo'ladi. To'g'ri chiziq-larning parallellik shartidan:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c) \Rightarrow f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$$

Izoh: Roll teoremasi Lagranj teoremasining xususiy holidir.

4. Koshi teoremasi

Teorema: Agar ikkita $\varphi(x)$ va $g(x)$ funksiylarning har biri $[a, b]$ kesmada uzluksiz, $]a, b[$ oraliqda differensiallanuvchi, hamda barcha $x \in]a, b[$ da $g'(x) \neq 0$ bo'lsa, u holda shunday $c \in]a, b[$ nuqta topiladiki, bu nuqtada

$$\frac{\varphi(b) - \varphi(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{\varphi'(c)}{g'(c)} \quad (1)$$

tenglik o'rinli bo'ladi (Koshi formulasi).

Isboti: Dastlab $g(b) \neq g(a)$ ni isbotlaymiz. Haqiqatan ham, agar bu urinsiz bo'lsa, u holda $g(x)$ funksiya uchun $[a, b]$ kesmada Roll teoremasining hamma shartlari bajariladi, va shu teoreмага asosan $[a, b]$ kesma ichida shunday s nuqta topiladiki, $g'(c) = 0$ bo'ladi. Bu esa teoremaning shartiga ziddir. Demak, $g(b) \neq g(a)$ va ushbu yordamchi funksiyani qaraymiz:

$$F(x) = \varphi(x) - \varphi(a) - \frac{\varphi(b) - \varphi(a)}{g(b) - g(a)} [g(x) - g(a)] \quad (2)$$

$\varphi(x)$ va $g(x)$ funksiyalarga qo'yilgan shartlarga asosan, $F(x)$ funksiya $[a, b]$ kesmada uzluksiz va shu kesmaning hamma ichki nuqtalarida differensiallanuvchi. Bundan tashqari, o'z-o'zidan ko'rinadiki, $F(a) = F(b) = 0$. Shunday qilib, $F(x)$ funksiya uchun Roll teoremasining barcha shartlari bajariladi. Shu teoreмага asosan kesma ichida shunday s nuqta topiladiki,

$$F'(c) = 0 \quad (3)$$

bo'ladi.

$$F'(x) = \varphi'(x) - \frac{\varphi(b) - \varphi(a)}{g(b) - g(a)} g'(x)$$

ekanini nazarda tutib va (3) tenglikdan foydalanib,

$$\varphi'(c) - \frac{\varphi(b) - \varphi(a)}{g(b) - g(a)} g'(c) = 0 \quad (4)$$

ga ega bo'lamiz. $g'(x) \neq 0$ ekanini hisobga olib, (4) tenglikdan (1) - Koshi formulasini hosil qilamiz.

1- eslatma: (1) formulada $b > a$ deb hisoblash mutlaqo shart emas.

2- eslatma: Lagranj formulasi Koshi formulasining $g(x) = x$ bulgandagi xususiy xolidir.