amaliy mashg'ulot. Sonli ketma-ketliklarlar va uning limiti

Ta'rif: Agar y=f(x) funksiyaning argumenti x ni qabul qiladigan qiymatlari natural sonlar to'plamidan iborat bo'lsa, bu holda bunday funksiyani N={1,2,3,...} natural argumentli funksiya deb ataladi va u quyidagicha yoziladi y=f(n) yoki y=f(N)

Ta'rif:Natural argumentli funksiya y=f(n) ning xususiy qiymatlarining f(1), f(2), f(3), ... , f(n) ketma-ketligiga cheksiz sonlar ketma-ketligi deb ataladi.

$f(1)=x_1$, $f(2)=x_2$, $f(3)=x_3,\dots$, $f(n)=x_n$ ….

Bu ta'rifdan ko'rinadiki, cheksiz sonlar ketma-ketligining har bir hadi ma'lum bir tartib nomeriga ega bo'layapti. Umuman olganda sonlar ketma-ketligi $\{a_n\}=a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$, $\{x_n\}=x_1, x_2, x_3, \dots, x_n,\dots$ ko'rinishlarda belgilanadi. Ketma-ketlikni tashkil qilgan sonlar shu ketma-ketlikning hadlari deyiladi. Bularga ko'ra x_1- ketma-ketlikning birinchi hadi, x_2- ikkinchi hadi x_n- ketma-ketlikni n chi hadi yoki umumiy hadi deb yuritiladi. Agar ketma-ketlikning n hadi berilgan bo'lsa shu hadga ega bo'lgan ketma-ketlikni tuzish mumkin.[1] Masalan, 1) $x_n=\frac{n}{n+1}$ berilganbo'lsa, $\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{4}{5}\dots$ ketma-ketliknituzishmumkin.

2) $x_n=aq^{n-1}$ bo'lsa, $a, aq, aq^2, \dots, aq^{n-1}, \dots$ ketma-ketliknituzishmumkin.

Ta'rif: Tartib nomeriga ega bo'lgan sonlar to'plami sonlar ketma-ketligi deyiladi.

Sonlar ketma-ketligi uch xil bo'ladi.

1.O'suvchi ketma-ketlik.

2.Kamayuvchi ketma-ketlik.

3.Tebranuvchi ketma-ketlik.

Biror $\{x_n\}$ ketma-ketlik hamda biror a son berilgan bo'lsin.

T a ' r i f :Agar a nuqtaning ixtiyoriy $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ atrofi $(\forall\varepsilon>0)$ olinganda ham $\{x_n\}$ ketma-ketlikning biror hadidan boshlab, keyingi barcha hadlari shu atrofga tegishli bo'lsa, a son $\{x_n\}$ ketma-ketlikning limiti deyiladi va

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \quad \text{(yoki } \lim x_n=a \text{ yoki } x_n\to a\text{)}$$

kabi belgilanadi.

$\{x_n\}$ ketma-ketlikning biror hadidan boshlab keyingi barcha hadlari a nuqtaning ixtiyoriy $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ atrofga tegishliligi, $\forall\varepsilon>0$ son olinganda ham shunday natural n_0 son topilib, barcha$n>n_0$ uchun $a-\varepsilon<x_n<a+\varepsilon$tengsizliklarning o'rinli bo'lishidan iboratdir.

Ravshanki, $a - \varepsilon< x_n< a + \varepsilon \Leftrightarrow - \varepsilon< x_n - a <\varepsilon \Leftrightarrow |x_n - a| <\varepsilon$.

a) Ketma-ketlik limiti ta'rifidan foydalanib, quyidagi tenglikni isbotlang

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n-1}{3n+1}=\frac{2}{3}$$

Yechish: Ketma-ketlik limiti ta'rifiga ko´ra biz ixtiyoriy $\varepsilon>0$ uchun shunday $n_0=n_0(\varepsilon)\in N$ bo'ib, barcha $n>n_0$ da $\left|\frac{2n-1}{3n+1} - \frac{2}{3}\right|<\varepsilon$ ekanligini ko´rsatishimiz lozim.

$\left|\frac{2n-1}{3n+1} - \frac{2}{3}\right|=\left|\frac{6n-3-6n-2}{3(3n+1)}\right|=\frac{5}{3(3n+1)}<\frac{5}{9n}$. Agar $\frac{5}{9n}<\varepsilon$ bo´lsa, u holda, albatta, $\left|\frac{2n-1}{3n+1} - \frac{2}{3}\right|<\varepsilon$ tengsizlik bajariladi. $\frac{5}{9n}<\varepsilon$ tengsizlik $n>\frac{5}{9\varepsilon}$ bo´lganda o´rinli. Demak, n_0 sifatida $\left[\frac{5}{9\varepsilon}\right]$ ni tanlashimiz mumkin. Shunday qilib, biz ixtiyoriy ε uchun $n_0=\left[\frac{5}{9\varepsilon}\right]$, barcha $n>n_0$ bo´lganda $\left|\frac{2n-1}{3n+1} - \frac{2}{3}\right|<\varepsilon$ tengsizlik o´rinli bo´ladi.

b) Funktsiya limiti ta'rifidan foydalanib quyidagi tenglikni isbotlang:

---

[1] Susanna S.Epp. Discrete Mathematics with Applications. 2010. USA.760-800 betlarning mazmum mohiyatidan foydalanildi.

$\lim\limits_{x\to 2} x^2=4$

Yechish: Funktsiyaning nuqtadagi limiti ta'rifiga ko´ra biz ixtiyoriy $\varepsilon>0$ uchun shunday $\delta>0$ topishimiz kerakki, $0<|x-2|<\delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi x larda $|x^2-4|<\varepsilon$ bo´lishi kerak. $\delta<1$ deb qarashimiz mumkin. U holda $|x-2|<1$ bo´lishi uchun $1<x<3$ bo´lishi kerak.

$|x^2-4|=|x-2|\cdot|x+2|<5|x-2|$, chunki $x\in(1;3)$ da $|x+2|<5$ o´rinli. Agar $5|x-2|<\varepsilon$ bo´lsa, u holda $|x^2-4|<\varepsilon$ tengsizlik albatta bajariladi. $5|x-2|<\varepsilon$ tengsizlikdan

$|x-2|<\frac{\varepsilon}{5}$ ga ega bo´lamiz. Demak, $\delta=\min\{1, \frac{\varepsilon}{5}\}$ deb olishimiz mumkin.

3. Quyidagi limitlarni hisoblang: a) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+x^2+3x^3}{1-2x+x^3}$

Yechish: Bu yerda kasrning surat va maxrajining limitlari ∞ ga teng. Quyidagicha shakl almashtiramiz:

$$\frac{1+x^2+3x^3}{1-2x+x^3}=\frac{\frac{1+x^2+3x^3}{x^3}}{\frac{1-2x+x^3}{x^3}})=\frac{\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x}+3}{\frac{1}{x^3}-\frac{2}{x^2}+1}.$$

Demak, $$\lim_{x\to\infty}\frac{1+x^2+3x^3}{1-2x+x^3}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x}+3}{\frac{1}{x^3}-\frac{2}{x^2}+1}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x}+3)}{\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{1}{x^3}-\frac{2}{x^2}+1)}=\frac{3}{1}=3$$

Javob: 3

b) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x+3}-2}$

Yechish: Bu misolda $\frac{0}{0}$ ko'rinishdagi aniqmaslikni ochishimiz kerak.

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x+3}-2}=\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x+3}+2)}{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)(\sqrt{x}+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}+2}{\sqrt{x}+1}=\frac{2+2}{1+1}=\frac{4}{2}=2$$

Javob: 2

v) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3^x-1}{\sin 3x}$

Yechish: Bu $\frac{0}{0}$ ko'rinishdagi aniqmaslikni ochish uchun ajoyib limitlardan foydalanamiz:

$$\lim_{x\to 0}\frac{3^x-1}{\sin 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{3^x-1}{x}\cdot x}{\frac{\sin 3x}{3x}\cdot 3x}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}\frac{3^x-1}{x}}{3\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}}=\frac{\ln 3}{3\cdot 1}=\frac{1}{3}\ln 3$$

Javob: $\frac{1}{3}\ln 3$