MAVZU. VEKTORLAR ALGEBRASI ELEMENTLARI.

Darsning rejasi va maqsadi

- 1. Vektor tushunchasi.
- 2. Vektorlar ustidagi chiziqli amallar.
- 3. Vektorlarning chiziqli bog’liqligi.
- 4. Vektor fazo va bazis.
- 5. Vektorlarning skalyar ko’paytmasi.

- ***Maqsadi :*** Vektor tushunchasi, vektorlar ustidagi chiziqli amallar, vektorlarning chiziqli bog’liqligi, vektor fazo va bazis, vektorlarning skalyar ko’paytmasi haqida bilimlar berish, tasavvurlar hosil qilish.

Tayanch tushunchalar:

Yo'nalgan kesma, vector, ort, kollinear vektorlar, vektorlarning yig'indisi, vektorlarning ayirmasi, nol vector, vektorlarning chiziqli bog'liqligi, vektor fazo, vektorlarning skalyar ko'paytmasi

Евклид аксиомаларининг бирига кўра ҳар бир нуқталар жуфтлиги бир қийматли тарзда тўғри чизиқни аниқлайди. Алгебраик нуқтаи назаридан $\mathbf{v}_1 = (x_1, y_1)$ ва $\mathbf{v}_2 = (x_2, y_2)$ нуқталарга кўра қуйидаги тенгламалар жуфтлигини ечиш билан тўғри чизиқ тенгламасининг коэффицентларини топишимиз мумкин.

$$ax_i + by_i = c \qquad i = 1,2$$

a, b ва c лар орасида $x_1 y_2 \neq x_2 y_1$ муносабат бажарилганда қуйидаги боғланишлар мавжуд.

$$a = c\frac{y_2 - y_1}{x_1 y_2 - x_2 y_1}, \qquad b = c\frac{x_2 - x_1}{x_1 y_2 - x_2 y_1} \qquad (1)$$

Бу ерда c нол бўлмаган ҳақиқий сон. Агар $x_1 y_2 = x_2 y_1$ лекин $x_1 \neq x_2$, у ҳолда c=0 ва $a/b = (y_2 - y_1)/(x_2 - x_1)$ шу тарзда тўғри чизиқ координаталар бошидан ўтиб a/b. қияликга эга. Ниҳоят, агар $x_1 = x_2$, бўлса бу тўғри чизиқ горизантал тўғри чизиқдир.

One of Euclid's axioms is that every pair of points uniquely identifies a line. Algebraically we can find this line, given the two points $\mathbf{v}_1 = (x_1, y_1)$ and $\mathbf{v}_2 = (x_2, y_2)$, by solving the pair equations

$$ax_i + by_i = c \qquad i = 1, 2$$

for a, b, and c, getting, as long as $x_1 y_2 \neq x_2 y_1$,

$$a = c\frac{y_2 - y_1}{x_1 y_2 - x_2 y_1}, \qquad b = c\frac{x_2 - x_1}{x_1 y_2 - x_2 y_1}, \tag{6.1}$$

where c is any non-zero real number. If $x_1 y_2 = x_2 y_1$ but $x_1 \neq x_2$, then $c = 0$ and $a/b = (y_2 - y_1)/(x_2 - x_1)$, so the line is through the origin with slope a/b. Finally, if $x_1 = x_2$, then the line is the horizontal line $\{(x, y) | x = x_1\}$.

r ҳақиқий сон ва $\mathbf{v} = (x, y)$ нукта координаталари кўпайтмасини $r\mathbf{v} = r(x, y) = (rx, ry)$ кўринишида аниқлаймиз, икки нуқта координаталари йиғиндисини қуйидагича аниқлаймиз $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$, у ҳолда V_1 , V_2 лар билан аниқланган тўғри чизиқ нуқталар тўплами қуйидагича аниқланади.

$$\{\mathbf{v}^r = r\mathbf{v}_1 + (1 - r)\mathbf{v}_2 | r \in \mathbf{R}\}. \qquad (2)$$

As you can see, the description of the line between two points is quite inelegant and hard to use because we must discuss three distinct cases. Thus, every time we want to study something using a line, we have to deal with three separate cases. If we want to talk about k lines, we must deal with 3^k separate cases!

However, you could also note that if we define the product of a real number r and a point $\mathbf{v} = (x, y)$ as $r\mathbf{v} = r(x, y) = (rx, ry)$, and if we define the *addition* of two points as $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$, then the line including $\mathbf{v}_1$ and $\mathbf{v}_2$ simply as the set of points

$$\{\mathbf{v}^r = r\mathbf{v}_1 + (1 - r)\mathbf{v}_2 | r \in \mathbf{R}\}. \qquad (6.2)$$

Буни кўрсатиш учун ҳар учала ҳолатни қараб чиқишимиз зарур, агар биз тўғри чизиқ ҳақиқатда V_1 , V_2 нуқталар орасида ётишига ишонч ҳосил қилсак, биз хусусий ҳолларга қайтмаймиз. Фараз қилайлик $x_1 y_2 \neq x_2 y_1$ бўлсин. У ҳолда (1) ўринли эканлигидан ихтиёрий нуқтани $(x, y) = r\mathbf{v}_1 + (1-r)\mathbf{v}_2$ кўринишида ифодаласак сиз аслида $ax_i + by_i = c \qquad i = 1, 2$ эканлигини текширишингиз мумкин бу ерда a, b лар (1) да берилган ва c ни соддлаштириш билан топамиз. Мен ўқувчига $x_1 y_2 = x_2 y_1$ лекин $x_1 \neq x_2$, ва $x_1 = x_2$. бўлган ҳолатларни текширишни қолдираман. V_1 , V_2 нуқталар орасидаги кесма доим $\{r\mathbf{v}_1 + (1-r)\mathbf{v}_2 | r \in [0, 1]\}$. нуқталар тўплами кўринишида ишодаланиши мумкин. Ҳақиқатда ҳам $r\mathbf{v}_1 + (1-r)\mathbf{v}_2$ нуқта V_1 , V_2 нуқталар орасидаги кесмани $r : 1-r$ нисбатда бўлади. Мисол учун $\mathbf{v}^0 = \mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}^1 = \mathbf{v}_1$. $\mathbf{v}^{1/2}$ -бу тўғри чизиқ сегментининг ўрта нуқтаси.

To show this, we do have to consider all three cases, but when we are satisfied that this set really is the line between $\mathbf{v}_1$ and $\mathbf{v}_2$, we will never again have to consider special cases. So, suppose $x_1 y_2 \neq x_2 y_1$. Then the formulas (6.1) hold, and if we substitute in any point $(x, y) = r\mathbf{v}_1 + (1-r)\mathbf{v}_2$, you can check that indeed $ax + by = c$, where a and b are given by (6.1), and simplify, we get c. I leave it to the reader to check the cases $x_1 y_2 = x_2 y_1$ but $x_1 \neq x_2$, and $x_1 = x_2$.

It is also true that the line segment between $\mathbf{v}_1$ and $\mathbf{v}_2$ is just the set of points $\{r\mathbf{v}_1 + (1-r)\mathbf{v}_2 | r \in [0, 1]\}$.[1] Indeed, the point $r\mathbf{v}_1 + (1-r)\mathbf{v}_2$ divides the line segment between $\mathbf{v}_1$ and $\mathbf{v}_2$ in the ratio $r : 1 - r$, so, for instance, $\mathbf{v}^0 = \mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}^1 = \mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}^{1/2}$ is the midpoint of the line segment, and so on.

Бу тасдиқнинг энг содда исботи нуқталардан бирини энг қулай вазиятда жойлаштирамиз. Натижа нуқтанинг қаерда жойлашганлигига эмас, балки уларнинг бир-бирига нисбатан қандай жойлашганлигига боғлиқ бўлади.

Юқорида айтилган вазиятда v_2 нинг координаталар бошига кўчирилган вазиятини оламиз, у ҳолда $\mathbf{v}_2 = \mathbf{0} = (0, 0)$ бўлиб буни ноль вектор деб аталади. Бундан $\mathbf{v}^r = r\mathbf{v}_1$ нинг координаталар бошидан ва $\mathbf{v}_1$ нуқтадан ўтувчи $\mathbf{v}^r$ тўғри чизиқ эканлиги келиб чиқади. Шунинг учун бу тўғри чизиқлар битта ва фақат битта. $\mathbf{v}^r$ тўғри чизиқ 0 ва $\mathbf{v}_1$ нуқталар орасидаги кесмани $r : 1 - r$ нисбатда бўлишини исботлашимиз учун нуқта ва нол вектор орасидаги масофани аниқлашимиз керак. Маълумки, $\mathbf{0}$ ва $\mathbf{v} = (x, y)$ орасидаги масофа $|\mathbf{v}| = \sqrt{x^2 + y^2}$ билан аниқланади. Бундан агар $r \geq 0$ бўлса, у ҳолда $r|\mathbf{v}| = |r\mathbf{v}|$ бўлади. Демак, $\mathbf{v}^r$ нуқта $\mathbf{0}$ ва $\mathbf{v}_1$ кесмани $r : 1 - r$ нисбатда бўлар экан.

Иккита ҳар хил $\mathbf{v}_2$ ва $\mathbf{v}_1$ нуқталар орасидаги масофа $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ формула орқали топилади.

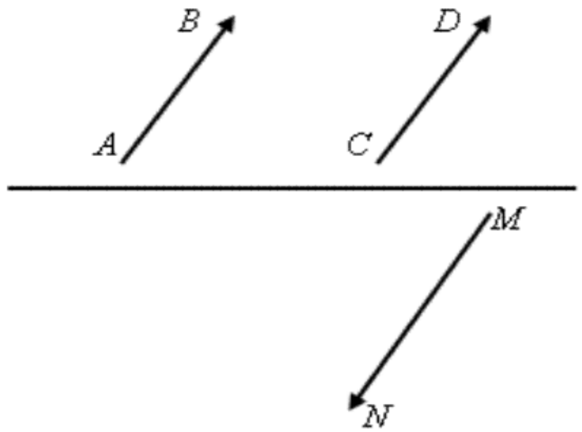
The easiest way to prove these statements is to move one of the points to a position where the calculations are easy, prove the statements there, and then show that the result does not depend on the absolute location of the points, but only on their relative location to each other. In this case, let's move $\mathbf{v}_2$ to the origin, so $\mathbf{v}_2 = \mathbf{0} = (0, 0)$ the so-called *zero vector*. In this case, $\mathbf{v}^r = r\mathbf{v}_1$, for which it is obvious that $\mathbf{v}^r$ is on a line with the same slope as the line through the origin and $\mathbf{v}_1$, so the two lines must be the same. To prove the assertion that $\mathbf{v}^r$ cuts the line segment between $\mathbf{0}$ and $\mathbf{v}_1$ in the ratio $r : 1 - r$, we must define the *distance* between a point and the zero vector $\mathbf{0}$. We define this just as you learned in algebra: the length of the line segment from $\mathbf{0}$ to $\mathbf{v} = (x, y)$ is $|\mathbf{v}| = \sqrt{x^2 + y^2}$. From this definition, you can see that $r|\mathbf{v}| = |r\mathbf{v}|$ if $r \geq 0$. This shows that $\mathbf{v}^r$ divides the line segment between $\mathbf{0}$ and $\mathbf{v}_1$ in the ratio $r : 1 - r$.

Endi vector tushunchasini va uning hossalarini ko’rib chiqamiz.

1 - ta’rif. Agar berilgan kesmaning uchlari tartiblangan bo’lsa, u holda bunday kesma yo’nalgan kesma deyiladi. Yo’nalgan kesmaning birinchi uchi uning boshi, ikkinchi uchi esa oxiri deyiladi.

Boshi A va oxiri B nuqtada bo’lgan yo’nalgan kesmani $\overrightarrow{AB}$ bilan belgilaymiz (1-chizma).

Yo’nalgan $\overline{AB}$ kesmaning uzunligi deb, AB kesma uzunligiga aytiladi va $|\overline{AB}|$ yoki AB bilan belgilanadi.



1-chizma

2 - ta'rif. Agar AB va CD nurlar bir xil (qarama-qarshi) yo'nalgan bo'lsa, $\overline{AB}$ va $\overline{CD}$ yo'nalgan kesmalar bir xil (qarama-qarshi) yo'nalishli deyiladi.

3 - ta'rif. Uzunliklari teng yo'nalishi bir xil bo'lgan barcha yo'nalgan kesmalar to'plamini ozod vektor yoki qisqacha vektor deb ataladi.(2-chizma)

Vektor ustiga "$\rightarrow$" belgi qo'yilgan kichik lotin harflari $\vec{a}, \vec{в}, \vec{c}, \ldots$ bilan yoki qo'yiq qilib yozilgan kichik lotin harflari $a, в, c, \ldots$ bilan belgilanadi.

Vektor so'zi lotincha vector – so'zidan olingan bo'lib, tashuvchi, olib yuruvchi degan ma'noni bildiradi.

Ta'rifdan vektor, uzunliklari teng bir xil yo'nalgan kesmalar to'plamidan iborat, ekanligi ravshan. Bu to'plamga tegishli har bir yo'nalgan kesma to'plamni to'liq aniqlaydi. Shuning uchun

2-chizma

agar $\overline{AB} \in \vec{a}$ bo'lsa, $\vec{a}$ vektorni $\overline{AB} = \vec{a}$ ko'rinishda yozishimiz mumkin.

9-Ta’rif. Ikkita $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning yig’indisi deb, ixtiyoriy A nuqtadan $\vec{a}$ vektorni qo’yib, uning oxiri B nuqtaga $\vec{b}$ vektorni qo’yganda boshi $\vec{a}$ vektorning boshi A nuqtada oxiri $\vec{b}$ vektorning oxiri C nuqtada bo’lgan $\overrightarrow{AC}$ vektorga aytiladi.

$\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning yig’indisi $\vec{a}+\vec{b}$ kabi belgilanadi.

10 - Ta’rif. $\vec{a}$, $\vec{b}$ vektorlarning ayirmasi deb, shunday $\vec{x}$ vektorga aytiladiki, ular uchun $\vec{b}+\vec{x}=\vec{a}$ tenglik o’rinli bo’ladi. U holda $\vec{x}=\vec{a}-\vec{b}$.

11 - Ta’rif. $\vec{a}\neq\vec{0}$ vektorning $\alpha\in R$ songa ko’paytmasi deb quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi $\vec{p}$ ga aytiladi va $\vec{p} = \alpha\cdot\vec{a}$ ko’rinishda yoziladi.

1) $|\vec{p}|=|\alpha|\cdot|\vec{a}|$;

2) $\vec{p}$ vektor $\vec{a}$ ga kollinear.

3) Agar α >0 bo’lsa $\vec{p}$ va $\vec{a}$ vektorlar bir xil yo’nalgan, agar α <0 bo’lsa, $\vec{p}$ va $\vec{a}$ vektorlar qarama- qarshi yo’nalgan bo’ladi.

Vektorlarning chiziqli bog’liqligi.

Ixtiyoriy $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ... \vec{a}_n$ (3.1) vektorlar sistemasi va $\alpha_1, \ \alpha_2, \dots, \alpha_n$ haqiqiy sonlar berilgan bo’lsin.

$$\vec{p} = \alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \dots + \alpha_n\vec{a}_n \qquad (3.2)$$

vektorni berilgan (3.1) vektorlarning chiziqli kombinatsiyasi deyiladi. Bunda $\vec{p}$ vektor (3.1) vektorlar sistemasi orqali chiziqli ifodalangan deyiladi, $\alpha_1, \ \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sonlar chiziqli kombinatsiya koeffitsentlari deyiladi.

12-ta’rif. Agar koeffitsentlarning kamida bittasi noldan farqli bo’lganda

$$\vec{p} = 0 \qquad (3.3)$$

bo’lsa, u holda (3.1) vektorlar sistemasi chiziqli bog’liq deyiladi.

Agar (3.3) tenglik $\alpha_1, \ \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sonlarning hammasi nolga teng bo’lgandagina o’rinli bo’lsa, (3.1) vektorlar sistemasi chiziqli erkli deyiladi.

1. Vektor fazoning bazisi

Vektor fazoda ma'lum tartibda olingan chiziqli erkli vektorlar

$$\vec{e}_1,\ \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n \qquad (4.1)$$

berilgan bo'lsin.

Ta'rif. Vektor fazoning har bir vektori (4.1) vektorlar sistemasi orqali chiziqli ifodalansa, (4.1) sistema vektor fazo bazisi deyiladi.

Ya'ni $\forall \vec{a} \in V, \quad \vec{a} = \alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + ... + \alpha_n \vec{e}_n$

Ta'rif. Agar bazis vektorlarning har bir vektori birlik vektor bo'lib, ularning har ikkitasi o'zaro perpendikulyar bo'lsa, bunday bazisni ortogonal bazis deyiladi.

Bazis vektorlar soni vektor fazoning o'lchovi deyiladi.

1-tarif. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning uzunliklari bilan ular orasidagi burchak kosinusini ko'paytirishdan hosil bo'lgan son bu vektorlarning skalyar ko'paytmasi deb aytiladi.

Vektorlarning skalyar ko'paytmasi $\vec{a}\cdot\vec{b}$ yoki $(\vec{a}\vec{b})$ ko'rinishida yoziladi.

Ta'rifga ko'ra

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\varphi \qquad (5.1)$$

Misol. $|\vec{a}|=3,\ |\vec{b}|=4$ bo'lib, $\varphi=60^0$ bo'lsa, $\vec{a}\cdot\vec{b}$ ni toping.

Echish: $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\varphi=3\cdot4\cos60^0=12\cdot\frac{1}{2}=6$.

Natija. Nol vektorning har qanday vektorga skalyar ko'paytmasi nolga teng.

Glossary	
A vector	**Vektor.** Uzunliklari teng yo'nalishi bir xil bo'lgan barcha yo'nalgan kesmalar to'plamini ozod vektor yoki qisqacha vektor deb ataladi
A unit vector	**Birlik vektor.** Uzunligi birga teng bo'lgan vektor birlik vektor yoki ort deyiladi.
Zero vector	**Nol vektor.** Boshi bilan oxiri ustma – ust tushgan vektor nol vektor deyiladi.
A point	Nuqta

A line	**To'g'ri chiziq**
Distance	**Masofa**
Operations on vectors	**Vektorlar ustida amallar**
Adding	**Qo'shish**
Subtraction	**Ayirish**
Multiplying by a scalar to a vector	Vektorni songa ko'paytirish
Length	Uzunlik