1. Dastlbaki tushunchalar

Differensial tenglama deb x erkli o‘zgaruvchini, izlanayotgan $y = f(x)$ funksiyani va uning $y', y'',\ldots, y^{(n)}$ hosilalarini o‘z ichiga olgan tenglamaga aytiladi. Differensial tenglama

$$F(x, y, y', y'',\ldots, y^{(n)}) = 0\,,$$

kabi belgilanadi, bu yerda n – eng yuqori tartibli hosila bo‘lib, u *differensial tenglamaning tartibi* deb ataladi. Agar izlanayotgan funksiya faqat bitta erkli o‘zgaruvchidan bog‘liq bo‘lsa, u *oddiy differensial tenglama* deb ataladi.

Bu differensial tenglamaning aniq yechimini topish uchun qo‘shimcha shartlar zarur bo‘ladi. Bu shartlar ikki turda bo‘lishi mumkin:

- *boshlang‘ich shartli Koshi masalasi*, bunda qo‘shimcha shart erkli o‘zgaruvchining bitta qiymatida berilgan bo‘ladi, masalan, $x=a$ nuqtada funksiyaning y_0 qiymati, balki y_0', y_0'' va hokazo qiymatlari ham berilgan bo‘lishi mumkin;
- *chegaraviy masala* – chegaraviy shartlar bilan berilgan masala, bunda qo‘shimcha shartlar erkli o‘zgaruvchining ikki yoki undan ortiq nuqtalarda beriladi, masalan, $x=a$ nuqtada funksiyaning y_a qiymati va $x=b$ nuqtada funksiyaning y_b qiymati.

Chegaraviy masalaning qo‘yilishi uchun kamida ikkita birinchi tartibli differensial tenglamalar sistemasi yoki tartibi ikkidan kam bo‘lmagan bitta differensial tenglama berilgan bo‘lishi lozim. Chegaraviy masalanig qo‘shimcha shartlari kesmaning chetlarida yoki uning ichki nuqtalarida (bunday shartlar *ichki chegaraviy shartlar* deb ataladi) berilishi mumkin. Chegaraviy shartlar bir necha funksiyalarning, ularning hosilalarining yoki funksiya va uning hosilalari kombinasiyalarining yechim izlanayotgan kesmaning bitta yoki bir nechta nuqtalaridagi qiymatlarini o‘zaro bog‘lashi mumkin.

Endi chegaraviy masalaning umumiy qo‘yilishini keltiraylik.

Faraz qilaylik, ushbu

$$F(x, y(x), y'(x), y''(x),\ldots, y^{(n)}(x)) = 0\,,\quad a \le x \le b,$$

oddiy differensial tenglama quyidagi *chegaraviy shartlar* bilan berilgan bo‘lsin:

$$\varphi_i(y(a), y'(a),\ldots,y^{(n-1)}(a))=0,\quad i=1,2,\ldots,L,$$
$$\psi_j(y(b), y'(b),\ldots,y^{(n-1)}(b))=0,\quad j=L+1,\ldots,n,$$

bu yerda $F(x, y, y',\ldots, y^{(n)})$, $\varphi_i(y, y',\ldots, y^{(n)})$, $i=1,2,\ldots,L$, $\psi_j(y, y',\ldots, y^{(n)})$, $j=L+1,\ldots,n$ – ularning o‘zgarish sohasida berilgan va ko‘rsatilgan argumentlarning funksiyalari bo‘lsin. L va $(n-L)$ kesmaning o‘ng va chap chegaralarida berilgan mos shartlar soni. Bu shartlarning umumiy soni berilgan differensial tenglamaning tartibiga teng. Berilgan $[a,b]$ kesmada yuqoridagi differensial tenglamani va uning mos chegaraviy shartlarini qanoatlantiruvchi $y = y(x)$ funksiyani topish talab etiladi.

Agar bu tenglama va uning chegaraviy shartlari izlanayotgan funksiya va uning hosilalariga nisbatan chiziqli bo‘lsa, u holda bunday chegaraviy masala *chiziqli chegraviy masala* deb ataladi.

Xususiy holda, soddalik uchun, hisoblash amaliyotida ko‘p uchraydigan ikkinchi tartibli (n=2) differensial tenglama uchun quyidagi ko‘rinishda yoziladigan chiziqli chegaraviy masala holini qaraylik:

$$y''+p(x)\,y'+q(x)y = f(x), \quad a \le x \le b, \quad (\Omega \equiv [a,b]),$$

$$\alpha_0 y(a)+\beta_0\, y'(a) = A, \quad \alpha_1 y(b)+\beta_1\, y'(b) = B,$$

bu yerda $p(x)$, $q(x)$, $f(x) \in C_2[a,b]$ – berilgan funksiyalar; α_0, α_1, β_0, β_1, A, B – berilgan sonlar, $\alpha_j^2+\beta_j^2>0$, $|\,\alpha_j\,|+|\,\beta_j\,|\neq 0$, j=0,1.

Bu berilgan tenglama va chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi $y(x)$ funksiyani topish talab qilinadi. Chegaraviy shartlarda $\alpha_j \neq 0$, $\beta_j \neq 0$, j=0,1, bajarilganda kesmanig oxirlarida izlanayotgan funksiya va uning hosilasi qiymatlarini o‘zaro bog‘lovchi chiziqli bo‘lanish beriladi.

Sodda holda, agar $\beta_0=0$, $\beta_1=0$ bo‘lsa, u holda kesmaning oxirlarida funksiyaning faqat $y(a)$, $y(b)$ qiymatlarigina beriladi. Bunday funksional shartlar *birinchi tur chegaraviy shartlar* va bunga mos masala esa *birinchi chegaraviy masala* deb ataladi.

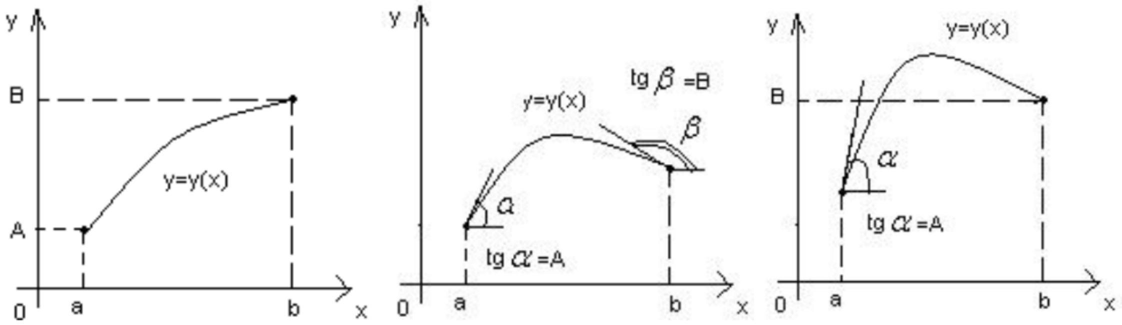
Agar $\alpha_0=0$, $\alpha_1=0$ bo‘lib, kesmaning oxirlarida faqat funksiya hosilasining qiymatlari berilgan bo‘lsa, u holda bunday shartlar differensial shartlar, chegaraviy shartlar esa *ikkinchi tur* yoki «*yumshoq*» *chegaraviy shartlar* deb ataladi. Bu chegaraviy shartlarning «*yumshoq*» deb atalishining sababi bunday shartlar kesmaning oxirlarida $y(x)$ funksiyaning qiymatini emas, balki integral egri chiziqlarning og‘ishini ifodalaydi. Bunga mos chegaraviy masala *ikkinchi chegaraviy masala* deb ataladi.

Umuman olganda, α_0 va (yoki) α_1; β_0 va (yoki) β_1 nolga teng bo‘lmasa, u holda chegaraviy shartlar *funksional-differensial xarakterga ega* yoki *uchinchi tur chegaraviy shartlar*, chegaraviy masalaning o‘zi esa *uchinchi chegaraviy masala* deb ataladi.

Masalan, $y(a) = A$, $y(b) = B$ shartlar birinchi tur chegaraviy shartlar. Geometrik nuqtai nazardan bu shuni anglatadiki, bu birinchi chegaraviy masalada ikkinchi tartibli chiziqli differensial tenglamaning (a,A) va (b,B) nuqtalardan o‘tuvchi integral egri chizig‘ini topish talab etiladi (1,a-rasm).

Ushbu $y'(a) = A$, $y'(b) = B$ shartlar ikkinchi tur chegaraviy shartlar. Geometrik nuqtai nazardan bu ikkinchi chegaraviy masalada ikkinchi tartibli chiziqli differensial tenglamaning $x=a$ va $x=b$ to‘g‘ri chiziqlarni kesib o‘tuvchi va α, β burchak koeffisiyentlariga ega, bu yerda tgα=A, tgβ=B, integral egri chizig‘ini topish talab etiladi (1,*b*-rasm).

Ushbu $y'(a) = A$, $y(b) = B$ shartlar uchinchi tur chegaraviy shartlarning xususiy holi bo‘lib, ular *aralash chegaraviy shartlar*, ularga mos masala esa *aralash chegaraviy masala* deb ataladi, bunda α_0=0, β_0=1, α_1=1, β_1=0. Geometrik nuqtai nazardan bu chegaraviy masalada ikkinchi tartibli chiziqli differensial tenglamaning x=a to‘g‘ri chiziq bilan kesishuvchi, α burchak koeffisiyentlariga ega, bu yerda tgα=A, integral egri chizig‘ini topish talab etiladi (1,*c*-rasm).



a *b* *c*

1-rasm. Chegaraviy shartlarning geometrik talqini.

2. Oddiy differensial tenglamalarning normal sistemasi uchun otishmalar usuli

Oddiy differensial tenglamalarning normal sistemasi uchun otishmalar usulini qaraylik. Buni shunday tushuntirish mumkinki, ixtiyoriy tartibli differensial tenglama unga ekvivalent bo‘lgan oddiy differensial tenglamalarning normal sistemasiga keltiriladi. Buni tushuntirish uchun yuqori tartibli hosilaga nisbatan yechilgan m-tartibli oddiy differensial tenglama uchun quydagi ikki nuqtali chegaraviy masalani misol qilib keltiraylik:

$$u^{(m)} = f\,(x,u,u',u'',...,u^{(m-1)}), \qquad x\in [a, b] \tag{1}$$

$$g_i\,(u(a),u'(a),u''(a),..., u^{(m-1)}(a)) = 0, \qquad i= 1, 2,..., k;$$

$$g_i\,(u(b),u'(b),u''(b),..., u^{(m-1)}(b)) = 0, \qquad i = k + 1, k + 2, ...,m; \tag{2}$$

bu yerda g_i – funksiya bo‘lib, $u(x)$ yechimning va uning hosilasining $[a,b]$ kesma oxirlaridagi qiymatlaridan bog‘liq.

Ushbu

$$u_1(x) = u(x),\;\; u_2(x) = u'(x), \;... \;,\;\; u_m(x) = u^{(m-1)}(x)$$

almashtirish (1) ni quyidagi oddiy differensial tenglamalarning normal sistemasi ko‘rinishida yozish imkonini berdi:

$$\begin{cases} u'_1 = u_2 \\ u'_2 = u_3 \\ \ldots \\ u'_{m-1} = u_m \\ u'_m = f(x, u_1, u_2, \ldots, u_m) \end{cases} \tag{3}$$

yoki vektor shaklida

$$\bar{u}' = \bar{F}(x, \bar{u}) \tag{4}$$

bu yerda

$$\bar{F}(x, \bar{u}) = \big(u_2, \ldots, u_m, f(x, \bar{u})\big), \bar{u} = (u_1, u_2 \ldots, u_m) -$$

m o‘lchovli vektor-funksiya. (2) chegaraviy shartlarni quyidagicha yozish mumkin:

$$g_{\mathrm{i}}(\bar{u}(a)) = 0\,, \quad i = 1,2,\ldots,k, \quad g_i(\bar{u}(b)) = 0\,, \quad i = k+1, k+2, \ldots, m. \tag{5}$$

(4)-(5) masala yechimining birinchi komponentasi (1)-(2) chegaraviy masalaning izlanayotgan yechimi bo‘ladi.

Xuddi shunday ixtiyoriy tartibli differensial tenglamalar sistemasini unga ekvivalent bo‘lgan tenglamalarning normal sistemasi bilan almashtirish mumkin. Buni shunday tushuntirish mumkinki, ko‘pgina standart usullar, ularning algoritmlari va ularga mos dasturlar (4) ga o‘xshash sistemalar uchun quriladi.