MAVZU: To’plam va uning elementlai, to’plamkar ustida amallar va ularning xossalari. Eyler-Venn diagrammalari

Adabiyot: Herbert Gintis , Mathematical Literacy for Humanists, p.p11-12,14-15

To‘plam tushunchasi matematikaning boshlang‘ich tushunchalark bo‘lib, u ta’rifsiz qabul qilinadi. To‘plamni tashkil qiluvchi obyektlar uning elementlari deyiladi. To‘plamlarni *A, a*, a, A yoki A harflari bilan belgilaymiz. To’plam bir qancha elementlardan iborat bo’lishi mumkin, quyidagi yozuv:

$$a \in A \qquad (1)$$

a elementni A to’plamga tegishliligini bildiradi.

$$a \notin A \qquad (2)$$

a elementni A to’plamga tegishli emasligini bildiradi, yoki mantiq belgisidan foydalangan holda $\neg(a \in A)$ ko’rinishda yozishimiz mumkin. Agar $a \in A$ bo’lsa, u holda a element A to’plamga tegishli deyiladi.

To'plamlar nazariyasi aksiomalariga 3.15 paragrafda to'xtalib o'tamiz. Hajmlilik Aksiomasiga ko'ra to'plam elementlarini quyidagicha belgilashimiz ham mumkin,

$$A = \{1, a, t, x\}, \tag{3}$$

bunda, A to'plam tarkibida 1 soni va *a,t,x* harfiy belgilar kiradi.

To'liqlik Aksiomasiga ko'ra to'plam elementlari soni uning tarkibiga kiruvchi elementlar bilan aniqlanib ularning qanday tartiblanganiga bog'liq emas.

(3) A to'plam $\{a, x, 1, t\}$ to'plam bilan xam va $\{x, t, a, 1, 1, 1, t, a, t, x\}$ to'plam bilan xam bir xildir.

To'plamlar ustida amallar

Agar A va B to'plamlar bir xil elementlardan tashkil topgan bo'lsa bu to'plamlar teng deyiladi. U holda to'liqlik aksiomasiga ko'ra agar ikkita to'plam bir xil elemantlar jamlanmasidan tuzilgan bo'lsa ular teng bo'ladi. Masalan

$$\{1, 2, 3\} = \{2, 1, 3\} = \{1, 1, 2, 3\}.$$

Agar A to'plamning xar bir elementi B to'plamning ham elementi bo'lsa, A to'plam B to'plamning to'plamostisi deyiladi va $A \subset B$ yoki $A \subseteq B$ orqali belgilanadi.

Bu belgilshlardan birinchisi A to'plam B to'planning qismi va $A \neq B$ ekanligini ikkinchisi esa A to'plam B to'plamning qismi bo'lib ular teng bo'lishiyam va teng bo'lmasligiyam mumkinligini bildiradi. Masalan $\{x,t\} \subset \{x,t,1\}$. Ihtiyoriy A to'plam uchun $A \subseteq A$ munosabat o'rinli bo'ladi.

Yuqoridagilarni matematik tilda quyidagicha yozish mumkin:

$$A \subseteq B \equiv (\forall x \in A)(x \in B)$$
$$A \subsetneq B \equiv (\forall x \in A)(x \in B) \wedge (A \neq B)$$

Bu yozuvda $\wedge$ yozuvi "va" ma'nosini bildiradi. Ba'zida ayrimlar $\subset$ belgisi o'rniga $\subseteq$belgisini ayrimlar esa $\subsetneq$ belgisini ishlatadi. A $\subsetneq$B bo'lganda A to'plam B to'plamning xos to'plam ostisi deyiladi.

Ixtiyoriy A to'plam uchun $\varnothing \subseteq A$, agar $A \neq \varnothing$ u holda $\varnothing \subsetneqq A$.

A va B to'plamlarning ayirmasi deb, A to'plamning B to'plamga kirmagan barcha elementlardan tashkil topgan to'plamga aytiladi va $A \setminus B$ yoki A-B

Ko'rinishlarda belgilanadi. A va B to'plamlarning ayirmasini mantiq qoidalariga ko'ra bunday yozamiz:

$$A - B = A \setminus B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\}$$

A va B to'plamlarning kamida biriga tegishli bo'lgan barcha elementlardan tashkil topgan $A \cup B$ to'plam A va B to'plamlarning birlashmasi yoki yig'indisi deyiladi. Buni matematik tilda quyidagicha yozamiz

$$A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}.$$

Masalan: $\{1, x, a\} \cup \{2, 7, x\} = \{1, x, a, 2, 7\}$

A va B to'plamlarning kesishmasi yoki ko'paytmasi deb, A va B to'plamlarning barcha umumiy, ya'ni A ga ham, B ga ham tegishli elementlardan tashkil topgan $A\cap B$ to'plamga aytiladi. A va B to'plamlarning I kesishmasi mantiq qoidalariga ko'ra bunday yozamiz:

$$A\cap B=\{x|x\in A\wedge x\in B\}$$

Matematikaning ba'zi sohalarida faqatgina birorta to'plam va uning barcha to'plamostilari bilan ish ko'rishga to'g'ri keladi. Masalan, planimetriya tekislik va uning barcha to'plamostilari bilan, stereometriya esa fazo va uning barcha to'plamostilari bilan ish ko'radi.

Agar biror E to'plam va faqat uning to'plamostilari bilan ish ko'rsak, bunday E to'plamni <u>universal to'plam</u> deb ataymiz. Universal to'plamning barcha to'plamostilari to'plamini β (E) orqali belgilaymiz.

To'plamlar ustida bajariladigan algebraik amallar quyidagi xossalarga ega.

1^0. $A \cap A = A$ kesishmaning idempotentligi;

2^0. $A \cup A = A$ birlashmaning idempotentligi;

3^0. $\begin{array}{l} A\cap B=B\cap A \\ A\cup B=B\cup A \end{array}$ kesishma va birlashmaning kommutativligi;

$4^0.2^{\circ}$. $\begin{array}{l} (A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C) \\ (A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C) \end{array}$ kesishma va birlashmaning assosiativligi

5^0. Kesishmaning birlashmaga nisbatan distributivligi:

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C);$$

6^0. Birlashmaning kesishmaga nisbatan distributivligi:

$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C);$$

7^0. $(A\setminus B)\cap C=(A\cap C)\setminus B=(A\cap C)\setminus(B\cap C);$

$A_1 \cup A_2 \cup \dots A_n \cup \dots$ birlashmani $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, $A_1 \cap A_2 \cap \dots A_n \cap \dots$ kesishmani $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ deb belgilab olsak, yana quyidagi xossalarga ega bo'lamiz. $A_i, i = 1\dots$ to'plamlar birorta X to'plamning to'plamostilari bo'lsin, u holda

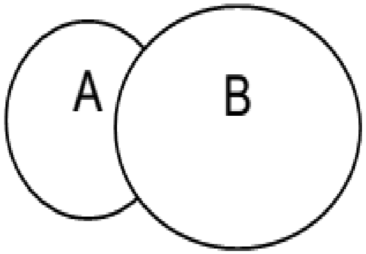
$$8^\circ. \quad X \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcap_{i=1}^{\infty} (X \setminus A_i);$$

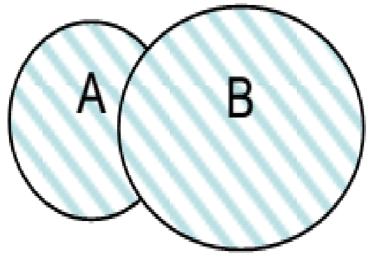
$$9^\circ. \quad X \setminus \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} (X \setminus A_i).$$

Bu tengliklarni isbotlash uchun, tengliklarning chap tomonidagi to'plamga tegishli ixtiyoriy element, tenglikning o'ng tomonidagi to'plamga tegishli va to'plamning chap tomonidagi to'plamga tegishli ixtiyoriy element chap tomonidagi to'plamga ham tegishli bo'lishini ko'rsatish etarli.

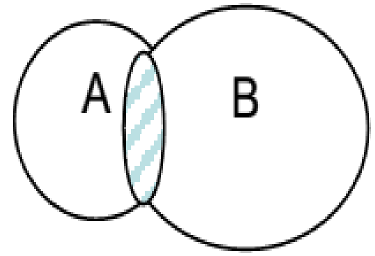
To'mlamlar ustida amallarni Eyler-Venn diagrammalari deb ataladigan quyidagi shakllar yordamida ifoda qilish, amallarning xossalarini isbot qilishni ancha engillashtiradi.

Universal to'plam to'g'ri to'rt burchak shaklida, uning to'plamostilarini to'g'ri to'rtburchak ichidagi doiralar orqali ifoda qilinadi. U xolda, ikki to'plam birlashmasi, kesishmasi, ayirmasi, to'lduruvchi to'plamlar, ikki to'plamning simmetrik ayirmasi mos ravishda quyidagicha ifodalanadi:

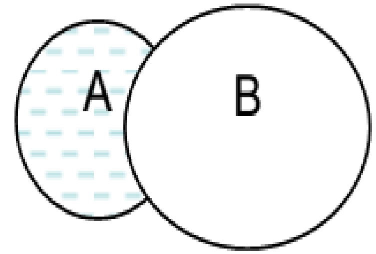




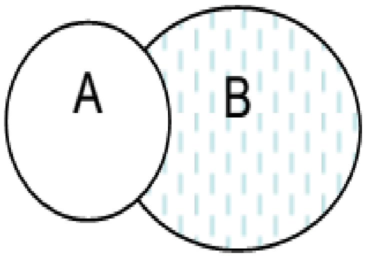
$A \cup B$



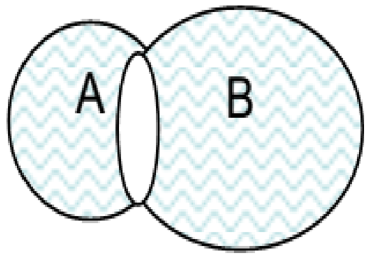
$A \cap B$



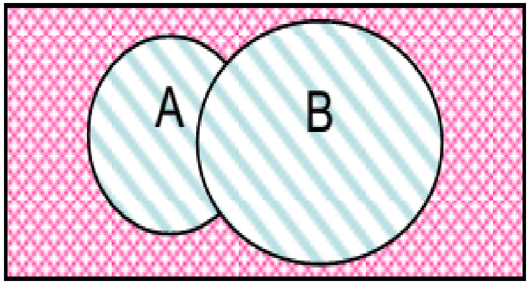
$A \setminus B$



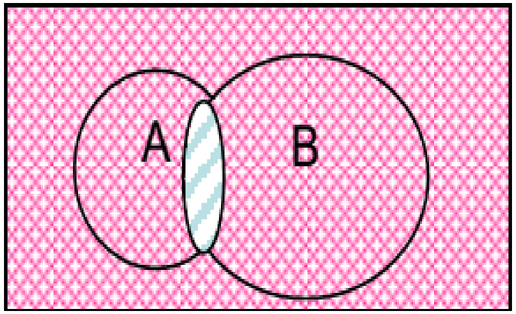
$B \setminus A$



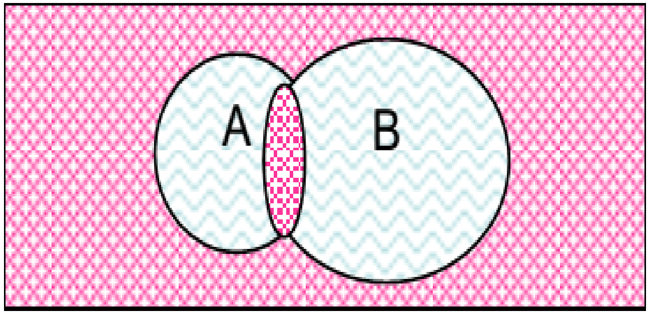
$A \Delta B$



$(A \cup B)'$



$(A \cap B)'$



$(A \triangle B)'$