amaliy mashg'ulot. Kombinatorika elementlari, kombinatorikaning asosiy qoida va teoremalari

Ehtimollar nazariyasi tasodifiy voqea yoki hodisalarning qonuniyatlarini o'rgatuvchi fandir. Ehtimollar nazariyasi matematika fanining bir yo'nalishi bo'lib, u XVII asrning o'rtalaridan rivojlana boshlagan. XX asrga kelib ehtimollar nazariyasi alohida fan sifatida shakllandi hamda tabiatshunoslik va texnikaning ko'p sohalarida qo'llanila boshlandi.

Matematika fani, xususan ehtimollar nazariyasi O'zbekistonda rivojlangan bo'lib, bu sohada alohida maktab yaratilgan. Bu maktabning asoschilari V.I. Romanovskiy va uning shogirdi akad. S.X. Sirojiddinovni eslash o'rinlidir.

Ehtimollar nazariyasi ko'p sohalarda, xususan iqtisodiyot, muhandislik sohalarda ham muvaffaqiyatli qo'llanilmoqda. Shu sababdan ehtimollar nazariyasi va matematik statistika fani bo'yicha o'zbek tilida o'quv qo'llanma yozish taqozo etiladi.

Kombinatorikaning asosiy qoidalari.

Amaliyotda berilgan to'plamning elementlaridan ma'lum bir xossaga ega bo'lgan uning qism to'plamlarini tuzish mumkin. Masalan, har xil ko'rinishdagi ishlarni, muhandisning ishchilar orasida taqsimlashi, agronomning qishloq xo'jalik ekinlarini dalalarga joylashtirishi, zobitning askarlarni bo'limlarga taqsimlashi va h.k. Bunday masalalarda narsalarning (elementlarning) kombinatsiyasi haqida gap boradi. Bunday masalalarni **kombinatorika masalalari** deyiladi.[1]

Matematikaning kombinatorik masalalarni o'rganadigan sohasiga **kombinatorika** deyiladi. Kombinatorikada tartiblashgan chekli to'plamlar bilan ish ko'riladi. Istalgan kombinatorik masalani chekli to'plamlar va ularni akslantirish haqidagi masalaga keltirish mumkin. "Kombinatorikani" ko'pincha "*birlashmalar*" nomi bilan ham yuritiladi.

Har qanday narsalardan tuzilgan va bir-birlaridan yo shu narsalarning tartibi bilan, yoki shu narsalarning o'zlari bilan farq qiluvchi turli guruhlar umuman **birlashmalar** deb ataladi.

Masalan, 10 ta raqam: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 dan har birida bir necha raqamlar bo'lgan sonlar tuzish mumkin: 123, 312, 9576, 5460, 72 va h.k. Ulardan ba'zilari, masalan, 123 va 312 faqat narsalarning tartibi bilan farq qilsa, boshqalari esa, masalan, 5460 va 72 o'zlaridagi narsalar bilan farq qiladi.[2]

---

[1] V.Deaconu, D.Pfaff. A bridge course to higher mathematics. 2010.USA. 109-113 betlarning mazmum mohiyatidan foydalanildi.

[2] V.Deaconu, D.Pfaff. A bridge course to higher mathematics. 2010.USA. 109-113 betlarning mazmum mohiyatidan foydalanildi.

Birlashmalarni tuzgan narsalar elementlar deyiladi. Elementlarni *a, b, c,* .... harflar orqali belgilaymiz.

Birlashmalarning 3 ta xilini: o'rin almashtirish, o'rinlashtirish va gruppalash turlarini alohida-alohida qaraymiz.

O'rin almashtirishlar. O’rin almashtirishlar soni.

Bizga biror chekli to'plam berilgan bo'lsin. Bu to'plamda uning elementlarini ma’lum bir tartibda joylashtirgan bo'laylik. Natijada tartiblashgan to'plam olamiz.

Masalan, lotin yozuviga asoslangan o'zbek alifbosidagi 28 ta harf tartiblashgan to'plam tashkil qiladi. Sinfdagi o'quvchilar to'plami ham jurnalda qabul qilingan tartibga ko'ra tartiblashgan to'plam hosil qiladi. Sonlarning natural to'plami tartiblashgan cheksiz to'plamdir.

Kombinatorikada to'plamda o'rnatilgan tartib uning elementlarini ***o'rin almashtirish*** deyiladi.

Bitta elementdan iborat bo'lgan to'plamni bitta yagona usul bilan tartiblashtirish mumkin: to'plamdagi yagona elementni birinchi deb hisoblaymiz. Ikkita *a* va b elementdan iborat bo'lgan to'plamni ikki usul bilan uning elementlarini tartiblashtirib joylashtirish mumkin: *ab* yoki va 3 ta *a*,b,c elementlardan tashkil bo'lgan to'plamni 6 ta usul bilan tartiblashtirish mumkin, ya’ni 6 ta o'rin almashtirish hosil qilamiz: *abc; acb; bac; bca; cab; cba.*

n ta elementdan mumkin bo'lgan barcha o'rin almashtirishlar soni P_n orqali belgilanadi. Xususiy hollarda biz $P_1=1$, $P_2=2$, $P_3=6$ bo'lishligini o'rnatdik. P_n - o'rin almashtirishlar soni

$$P_n=nP_{n-1} \qquad (1)$$

formula bo'yicha hisoblanishini isbotlaymiz.

(1) tenglikni matematik induktsiya usuli bilan isbotlaymiz.

1. n=1,2 bo'lgan hollar uchun (1) tenglik o'rinli:

   $P_1=1$ va $P_2=2\ P_1=21=2!$

2. Faraz qilaylik (1) tenglik n=k natural son uchun ham o'rinli bo'lsin. $P_k=k\ P_{k-1}$ $P_{k+1}=(k+1)P_k$ bo'lishligini isbotlaylik.

k ta elementli to'plamga yana bir elementni qo'shib olsak, har bir o'rin almashtirishga (ular P_k ta) bu elementni k+1 usul bilan qo'yib chiqish mumkin. haqiqatan, har bir o'rin almashtirish k ta elementning tartiblashgan to'plami bo'lgani uchun, bunday holda (k+1)-elementni bu qatorga k+1 usul bilan qo'yib chiqish mumkin: birinchi elementdan oldin, ikkinchi, uchinchi, ... , oxirgi va oxirgidan keyin. SHunday qilib, k+1 ta elementdan mumkin bo'lgan barcha o'rin almashtirishlar soni k ta elementdan tuzilgan P_k o'rin almashtirishlar soni bilan k+1 ning ko'paytmasiga teng: $P_{k+1}=(k+1)P_k$

(1) formulaning o'rinli ekanligi isbotlandi. Demak, n elementdan tuzilgan o'rinalmashtirishlar soni birinchi n ta natural sonlar ko'paytmasiga teng bo'lar ekan P_n=1 23 ... n (2)

Birinchi n ta natural sonlarning ko'paytmasi uchun maxsus belgilash qabul qilingan: n!=123 ... n (n!-"n faktorial" deb o'g'iladi). Shunday qilib, P=n! (3)

Masalan, Zavodga 6 ta yosh-tokar mutaxassislar keldi. Ularni 6 ta tokar stanogiga ishga joylashtirishning barcha mumkin bo'lgan imkoniyatlari soni qancha bo'ladi?

$$P_6 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$$

To'qqizta har xil qiymatli raqamlar bilan nechta to'qqiz xonali son yozish mumkin?

$$P_9 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 = 362880$$

Kombinatorikaning asosiy formulalari. O'rinlashtirishlar.

Berilgan chekli to'plamdan tuzilgan har bir o'rin almashtirishlarda bu to'plamning barcha elementlari ishtirok etadi. Endi n ta elementga ega bo'lgan to'plamning m ta (m<n) elementini tanlaylik. n ta elementga ega bo'lgan to'plamdan har birida m ta element bo'lgan qancha qism to'plamlar tuzish mumkin? degan savol ham paydo bo'lib qoladi.

Kombinatorikada har bir shunday tartiblashgan qism to'plam n elementni m tadan ***o'rinlashtirish*** deyiladi. [3]

Shunday qilib, n elementga ega bo'lgan to'plamdan m elementga ega bo'lgan nechta o'rinlashtirish tuzish mumkin degan savolning qo'yilishi tabiiy. Bunday o'rinlashtirishlarning sonini A_n^m orqali belgilaymiz.

M={*a*,*b*,*c*} to'plamdan quyidagi o'rinlashtirishlarni tuzish mumkin:

bittadan: *a*, *b*, *c*,

ikkitadan: *(a;b), (a;c), (b;c), (b,a), (c;a), (c;b);*

uchtadan: *(a;b;c), (a;c;b), (c;a;b), (c;b;a), (b;c;a), (b;a;c)*

chunki m<n (1<3, 2<3, 3m).

Shunday qilib, $A_3^1 = 3; \ A_3^2 = 6; A_3^3 = 6;$

$A_n^1 = n;$ (1) Bo'lishligi ravshan. 1<m<n bo'lganda o'rinlantirish uchun

$$A_n^{m+1} = (n-m)A_n^m \quad (2)$$

formulaninng o'rinli bo'lishligini isbotlaymiz..

Isboti: Faraz qilaylik k natural son uchun

[3] V.Deaconu, D.Pfaff. A bridge course to higher mathematics. 2010.USA. 109-113 betlarning mazmum mohiyatidan foydalanildi.

$A_n^k = (n-k)A_n^{k-1}$ (4) formula o’rinli bo’lsin.

Fikrimizning m=k+1 hol uchun, ya’ni

$A_n^{k+1} = [n-(k+1)]A_n^k$ (5) bo’lishligini isbotlaylik.

k+2 ta elementlardan barcha o’rinlashtirishlarni tuzamiz. k+1 ta elementlardan tuzilgan o’rinlashtirishni tuzgandan keyin to’plamda (n-k-1) ta element qoladi. k+2 elementlardan iborat o’rinlashtirishlarni tuzayotganda ulardan istalganini birinchi o’rinlashtirishning (k+2)-o’ringa qo’yish kerak. Shunday qilib, (k+1) elementli har bir o’rinlashtirishdan (k+2) elementli (n-k-1) ta o’rinlashtirish olish mumkin. (k+1) elementli o’rinlashtirishlar soni $A_n^{k+1} = (n-k)A_n^k$ ta bo’lsa, u holda (k+2) elementli barcha o’rinlashtirishlar soni $A_n^{k+2} = (n-k-1)A_n^{k+1} \Rightarrow A_n^{k+2} = [n-(k+1)A_n^{k+1}]$ (6) ta bo’ladi. Olingan (6) tenglikni (2) tenglik bilan solishtirsak, ular m=k+1 bo’lganda ustma-ust tushadi. Shunday qilib, qilingan farazimiz to’g’ri ekan. [4]

$A_n^1 = n$ tenglik va (2) formuladan ketma-ket quyidagilarni olamiz.

$A_n^1 = n$ (n elementdan 1 tadan o’rinlashtirishlar soni);

$A_n^2 = n(n-1)$ (n elementdan 2 tadan o’rinlashtirishlar soni);

$A_n^3 = n(n-1)(n-2)...;$

$A_n^m = n(n-1)(n-2)...(n-m+1);$ (7)

(7) tenglikning o’ng qismini (n-m)!=(n-m)(n-m-1) ... 321 ga ko’paytirib va bo’lib, topamiz

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} \quad (8)$$

Bu formuladan $A_n^0 = 1$ bo’lishligi kelib chiqadi.

O’rinalmashtirishni o’rinlashtirishning xususiy holi deb hisoblash mumkin. Haqiqatdan m=n bo’lganda o’rinlashtirishlar sonining (7) formulasini so’z bilan quyidagicha aytish mumkin:

$A_n^n = P_n = n!$ (9)

---

[4] V.Deaconu, D.Pfaff. A bridge course to higher mathematics. 2010.USA. 109-113 betlarning mazmum mohiyatidan foydalanildi.

n ta elementdan m tadan olib tuzish mumkin bo'lgan barcha o'rinlashtirishlarning soni, eng kattasi n bo'lgan m ta ketma-ket butun sonlar ko'paytmasiga teng.

Masalan, $A_4^2 = 4\cdot 3;\quad A_4^3 = 4\cdot 3\cdot 2 = 24;\quad A_8^4 = 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5 = 1680$,

1-masala**.** Sinfda 10 ta fan o'g'iladi va har kuni 5 xil dars o'tiladi. Kunlik dars necha turli usul bilan taqsimlab qo'yilishi mumkin?

Echilishi: Darslarning barcha mumkin bo'lgan kunlik taqsimoti 10 elementdan 5 tadan olib tuzish mumkin bo'lgan barcha o'rinlashtirishlar soniga teng

$$A_{10}^5 = 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6 = 30240.$$

(7) va (8) formulalar shartda istalgan butun m va n sonlar uchun ma'noga ega.

2-masala**.** *a, b, c, d* elementlardan 2 tadan olib tuzish mumkin bo'lgan barcha o'rinlashtirishlar tuzilsin.

Echilishi: 4 ta elementdan 2 tadan olib tuzish mumkin bo'lgan barcha o'rinlashtirishlar soni $A_4^2 = 4\cdot 3 = 12$ ta bo'ladi:

(a,b), (b,a), (a,c), (c,a), (a,d), (d,a), (b,c), (c,b), (b,d), (d,b), (c,d), (d,c)

(8) formula bo'yicha hisoblaylik:

$$A_4^2 = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{1\cdot 2} = 12$$

X={1,3,5} toplam bo'yicha 135,315,351,153,531,513 o'rinlashtirishlar tuzilgan bo'lsin. Bu uchtaliklarda komponentlar takrorlanmagan, bir martadan kelgan, yozilish tartibi bilangina farq qiladi. Umuman, takrorsiz o'rinlashtirishlarda komponentlar soni k shu X to'plamning jami elementlari soni m ga teng, ya'ni m=k bo'lsa, o'rinlashtirishlar bir xil elementli bo'lib, elementlarning yozilish tartibi bilan farq qilinadigan bo'ladi. Bizning misolda ularning soni A_4^3 =3*2*1=6 ta. Ularda elementlar takrorlanmaydi, faqat o'rinlari almashadi.

m ta elementdan tuzilgantakrorsiz o'rin almashtirish deb, shu elementlardan m tadan olib tuzilgan o'rin almashtirishlarga aytiladi. Ularning soni R_m orqali belgilanadi (fransuzcha permutation-o'rin almashtirish). Ta'rif bo'yicha

P_m= A_m^m, yoki P_m=m(m-1)…(m-m+1)*…*1=m!, yoki P_m= m!(1)

1-misol. 3 detalni 3 qutiga necha xil tartibda joylashtirish mumkin ?

Yechilishi: Detallarni x_1, x_2, x_3 orqali, qutilarni 1,2,3 orqali belgilaylik. Natijada

(x_1, x_2, x_3), (x_1, x_3, x_2), (x_2, x_1, x_3), (x_2, x_3, x_1), (x_3, x_1, x_2), (x_3, x_2, x_1) o'rin almashtirishlar olinadi. Ularning soni R_3=3*2*1=6 ta.

Endi X to'plam elementlaridan k taliklar emas, balki qism-to'plamlar tuzaylik. Ular o'z tarkiblaridagi elementlari bilan bir-biridan farq qiladi. Masalan, X={a,b,d,e,f} to'plam bo'yicha tuzilgan k=3 ta elementli {a,d,f}, {a,e,f}, {b,d,e} uchtaliklar biz aytayotgan qism to'plamlardandir.

m ta elementli X to'plamning k ta elementli qism to'plamlari shu elementlardan k tadan olib tuzilgan *takrorsiz kombinatsiyalar* deyiladi. Ularning sonini C_m^k orqali ko'ramiz (fransuzcha *combination*-kombinatsiya).[5]

1-misol. {a,b,d,e,f} to'plam bo'yicha har uchtadan har xil element bo'lgan 10 ta kombinatsiya tuzish mumkin: {a,b,d}, {a,b,e},{a,b,f},{a,d,e},{a,d,f},{a,e,f},{b,d,e},{b,e,f},{b,d,f},{d,e,f}.

Kombinatsiyalar sonini hisoblash formulasini chiqaraylik. Yuqoridagi misolda ko'rsatilgancha berilgan 5 elementdan 3 tadan olib jami 10 kombinatsiya hosil qilinadi. Lekin har bir kombinatsiyadan oltitadan o'rin almashtirish tuzish mumkin. Masalan, bitta {a,b,d} kombinatsiyadan {a,b,d}, {a,d,b},{b,a,d},{b,d,a},{d,a,b},{d,b,a}, jami oltita o'rin almashtirishlar hosil bo'ladi. Bunga qaraganda jami 5 elementdan uchtadan olib tuzilgan takrorsiz o'rinlashtirishlar soni 6*10=60 ta, ya'ni (*) formulaga asosan A_5^3=5*4*3=60 ta bo'ladi. Biz A_5^3= C_5^3*3! ga ega bo'lamiz. Bundan C_5^3 topiladi.

Umuman, m elementdan k tadan olib tuzilgan o'rinlashtirishlar soni A_m^k=k!C_m^k bo'ladi, bundan kombinatsiyalar soni ucun ushbu formulalar olinadi :

$$C_m^k = A_m^k / k! = \frac{m(m-1)...(m-k+1)}{1*2*3*...*k} \quad (1) \text{ yoki } C_m^k = m!/k!(m-k)! (2)$$

Jami k=3 ta a_1, a_2, a_3 elementdan P_k=P_3= 3!=6 ta o'rin almashtirishlar tuzish mumkinligini bilamiz:

(a_1, a_2, a_3), (a_1, a_3, a_2),(a_2, a_1, a_3),(a_2, a_3, a_1),(a_3, a_1, a_2),(a_3, a_2, a_1).

Bu uchtaliklarda har bir element faqat bir martadan qatnashmoqda: k_1=k_2=k_3=1. Endi shu elementlardan (a_1, a_1, a_1, a_2, a_3, a_3), (a_1, a_2, a_3, a_1, a_1, a_3) oltiliklar tuzilgan bo'lsin. Bular ham faqat elementlerning tartibi bilangina farq qiluvchi o'rin almashtirishlardan iborat . Lekin bu holda a_1 element k_1 =3 marta, a_2 element k_2 =1 marta, a_3 element k_3=2 marta takrorlanmoqda va k=k_1, k_2, k_3=6.

Ta'rif: Takrorli o'rin almashtirish deb, tarkibida a_1 harfi k_1 marta, …,a_m harfi k_m marta qatnashuvchi k=k_1 +k_2 +…+k_m uzunlikdagi har qanday k talikka aytiladi. Takrorli o'rin almashtirishlar sonini P(k_1,…, k_m) orqali belgilanadi.

---

[5] V.Deaconu, D.Pfaff. A bridge course to higher mathematics. 2010.USA. 109-113 betlarning mazmum mohiyatidan foydalanildi.

P(3,1,2) sonini topishning yo'llaridan biri o'sha oltitaliklarning hammasini tuzish va sanash. Lekin a_j komponentlar soni va k_1 takrorlanishlar ko'p bo'lsa, bu yo'l noqulaydir. Umuman, $P(k_1, \dots, k_m)$ ni hisoblash uchun formula kerak bo'ladi.

K talik tarkibida k_1 ta o'ringa a_1 harfni $C_{л}^{л1}$ usul bilan o'rin almashtirish orqali yozish mumkin. U holda qolgan $k\text{-}k_1$ ta o'ringa a_2 ni $C_{л-л2}^{л2}$ usul bilan o'rin almashtirib yoziladi . Shu kabi, a_3 ni $C_{л-л1-л2}^{л3}$, …, a_m ni $C_{л-л1-,,,ль-1}^{л3}$ usul bilan o'rin almashtirib yozish mumkin.

Jami o'rin almashtirishlar soni ko'paytirish qoidasiga muvofiq, $P(k_1,\dots, k_m)=C_{л}^{л1} * C_{л-л1}^{л2}$ *…* $C_{л-л1-,,,ль-1}^{л3}$ ta bo'ladi. Topilgan munosabatni soddalashtiraylik. Shu maqsadda $C_{л}^{о}$ =k! / j!(k-j)!formuladan foydalanamiz. Natijada $P(k_1, \dots,k_m)=$ $\frac{k1}{k_1 1(k-k_1)1} * \frac{(k-k_1)1}{k_2 1(k-k_1-k_2)1} * \dots * \frac{(k-k_1 \dots -k_{m-1})1}{k_m 1(k-k_1-\dots-k_m)1}$, bunda $(k\text{-}k_1\text{-}\dots\text{-}k_m)!=0!=1!$ yoki qisqarttirishlardan so'ng $P(k_1,\dots, k_m)= k!/ k_1!*k2!*\dots*k_m!$, (1) bunda $k= k_1 +k_2 +k_3+\dots+k_m$.

Takrorsiz o'rin almashtirishlar (1) formulaning $k_1 =k_2 =\dots=k_m=1$ bo'lgan xususiy holidir.[6]

1-misol. Bandning boshida qaralgan misolda talab qilingan barcha oltiliklar soni: P(3,1,2)=6!/ 3!*1!*2!=60.

2-misol. 30 ta detalni 5 ta har xil qutiga 6 tadan necha xil usul bilan joylashtirish mumkin ?

YEchilishi: Masalaning shartiga ko'ra k=30, $k_1 =k_2 =\dots=k_5 =6$, m=5. (1) formula bo'yicha usullar soni: P(6,6,6,6,6)=30!/ (6!*6!*6!*6!*6!).

Gruppalashlar va ularning xossalari.

Chekli to'plamning qism to'plamlari sonini hisoblaymiz. a,b,s elementlardan tuzilgan to'plamning barcha qism to'plamlarini tuzsak, ular 8 ta bo'ladi: $\varnothing$- bo'sh to'plam;

$\{a\}, \{b\}, \{c\}$ - 3 ta bir elementli to'plamlar;

$\{a;b\}$, $\{a;c\}$, $\{b;c\}$-3 ta har birida 2 ta element bo'lgan, ikki elementli to'plamlar ($\{a;b\}$ va $\{b;a\}$, $\{a;c\}$ va $\{c;a\}$, $\{b,c\}$ va {c;b} qism to'plamlar ustma-ust tushadi); 1 ta $\{a, b, c\}$ uch elementli to'plam.

n ta elementdan m tadan olib tuzilgan barcha qism to'plamlar sonini $\boldsymbol{C_n^m}$ orqali belgilaylik.

---

[6] V.Deaconu, D.Pfaff. A bridge course to higher mathematics. 2010.USA. 109-113 betlarning mazmum mohiyatidan foydalanildi.

Kombinatorikada chekli to'plamlar *gruppalash* deyiladi.

Shuning uchun C_n^m yozuv n ta elementdan m ta dan olib tuzilgan gruppalashlar sonini bildiradi C_n^m uchun formula chiqish uchun o'rinlashtirish, o'rinalmashtirish va gruppalash orasidagi bog'lanishni o'rnataylik.

4 ta *a,b,s* va *d* elementlardan 3 tadan olib tuzilgan gruppalar 4 ta bo'ladi: {*a;b;c*}, {*a;b;d*}, {*a;c;d*}, {*b;c;d*}.

Bu o'rinlashtirishlar bir-biridan bir element bilan farq qiladi.

Agar bu gruppalarning har birida mumkin bo'lgan barcha o'rin almashtirishlarni qilsak (bular elementlarning tartibi bilan farq qiladi), to'rt elementdan 3 talab mumkin bo'lgan barcha o'rinlashtirishlarni hosil qilamiz:

{(a;b;c), (a;c;b), (b;a;c), (b;c;a), (c;a;b), (c;b;a)};
{(a;b;d), (a;d;b), (b;a;d), (b,d,a), (d;a;b), (d;b;a)};
{(a;c;d), (a;d;c), (c;a;d), (c;d;a), (d;a;c;), (d;c;a)};
{(b;c;d), (b;d;c), (c;b;d), (c;d;b), (d;b;c), (d;c;b)}.[7]

Bunday o'rinlashtirishlarning soni 4*6=24 ta bo'ladi. Shunday qilib, n ta elementdan m tadan olib tuzilgan barcha o'rinlashtirishlar soni n ta elementdan m ta dan olib tuzilgan barcha gruppalashlar soni bilan m ta elementdan tuzish mumkin bo'lgan barcha o'rinalmashtirishlar sonining ko'paytmasiga teng, ya’ni

$$A_n^m = C_n^m P_m \quad (10)$$

Bunday gruppalashlarning quyidagi formulasini olamiz:

$$C_n^m = A_n^m : P_m \quad (11)$$

(11) ga (3) va (8) ni qo'yib,

$$C_n^m = \frac{n!}{m!\,(n-m)!} \quad (12)$$

formulani topamiz. Faktoriallarning qiymatlarini qo'yib, (12) dan

$$C_n^m = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots m} \quad (13)$$

formulani olamiz. Xususiy holda m=1 bo'lganda $C_n^1 = n$ bo'ladi $C_n^0 = 1$ bo'lishini ham shartlashamiz.

---

[7] V.Deaconu, D.Pfaff. A bridge course to higher mathematics. 2010.USA. 109-113 betlarning mazmum mohiyatidan foydalanildi.

3-masala. Bir vazifaga ko'rsatilgan 10 nomzoddan uch kishi saylanishi kerak. Saylovdagi turli ehtimollar qancha bo'lishi mumkin?

Echilishi: Saylovdagi ehtimollar soni 10 elementni 3 tadan joylashtirib tuzish mumkin bo'lgan barcha gruppalashlar soniga teng bo'ladi, ya'ni

$$\boldsymbol{C}_{10}^{3}=\frac{10\cdot 9\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3}=120$$

1. $0<m\leq n$ shartda $\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{n}}^{\boldsymbol{m}}$ ning qiymatlari jadvalini keltiraylik. O'ng tomondagi ustunda $\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{n}}^{\boldsymbol{m}}$ ning qiymatlarining yig'indisi keltirilgan.

Bu jadval buyuk frantsuz matematigi B. Paskal nomi bilan atalib "***Paskal uchburchagi***" deyiladi. Paskal uchburchagidagi har bir satrda uning boshidan va oxiridan bir xil uzoqlikda turgan sonlar teng bo'ladi. Masalan,

$$\boldsymbol{C}_5^2=\boldsymbol{C}_5^{5-2}=\boldsymbol{C}_5^3=\frac{5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3}=10$$

Bu xossa umumiy xususiyatga ega: istalgan n va m uchun $(0\leq \boldsymbol{m}\leq \boldsymbol{n})$

$$\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{n}}^{\boldsymbol{m}}=\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{n}}^{\boldsymbol{n}-\boldsymbol{m}}$$

(14) tenglik o'rinli bo'ladi. Bu formulani isbotlaylik

$$C_n^m=\frac{n!}{m!(n-m)!}=\frac{n!}{(n-m)!\left[n-(n-m)\right]!}=C_n^{n-m}$$

(14) tenglik ning qiymatini topishni juda osonlashtiradi.

$$\boldsymbol{C}_{100}^{97}=\boldsymbol{C}_{100}^{3}=\frac{100\cdot 99\cdot 98}{1\cdot 2\cdot 3}=161700$$

2. Gruppalashda

$$\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{n}}^{\boldsymbol{m}}+\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{n}}^{\boldsymbol{m}+1}=\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{n}+1}^{\boldsymbol{m}+1}$$

(15) tenglik ham o'rinli bo'ladi.

Agar (13) formuladan foydalansak

$$\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{n}}^{\boldsymbol{m}}=\frac{\boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}-1)(\boldsymbol{n}-2)\cdots(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{m}+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots \boldsymbol{m}},$$

$$\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{n}}^{\boldsymbol{m}+1}=\frac{\boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}-1)(\boldsymbol{n}-2)\cdots(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{m}+1)(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{m})}{1\cdot 2\cdot 3\cdots \boldsymbol{m}(\boldsymbol{m}+1)}$$

Bu tengliklarni qo'shib, umumiy maxrajga keltirib, olamiz:

$$C_n^m+C_n^{m+1}=\frac{\left[n(n-1)\cdots(n-m+1)\right](1+m)+\left[n(n-1)\cdots(n-m+1)\right](n-m)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots m(m+1)}=$$

$$=\frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)(m+1+n-m)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots m(m+1)}=\frac{(n+1)n(n-1)\cdots(n-m+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots m(m+1)}=C_{n+1}^{m+1}$$

3. $\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{n}}^0+\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{n}}^1+\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{n}}^2+....+\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{n}}^{\boldsymbol{n}}$ yig'indi n ta elementdan iborat bo'lgan to'plamning barcha qism to'plamlarining yig'indisini ifodalaydi. Shuninguchun

$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^n = 2^n$

tenglik quyidagi teoremaning natijasi bo'ladi.

Teorema. n ta elementdan iborat bo'lgan to'plam barcha qism to'plamlarining soni 2^n ga teng bo'ladi.

Bu teoremaning tasdig'ini yuqorida 3 ta elementli to'plam uchun barcha qism to'plamlarining soni 8 ta, ya'ni 2^3 ga tengligini ko'rsatgan edik. n=0 bo'lganda bo'sh to'plamni olamiz. Bo'sh to'plam o'zidan iborat bo'lgan yagona qism to'plamga ega. n>1 uchun esa teoremani matematik induktsiya usuli yordamida isbotlaymiz.[8]

1) Bitta elementdan iborat bo'lgan to'plam, masalan $\{a\}$ to'plam ikkita qism to'plamga ega: bo'sh to'plam va $\{a\}$ to'plamning o'zidan iborat. n=1 bo'lganda teorema isbotlandi; chunki $2^1=2$.

2) A(k)=A(k+1) bo'lishligini, ya'ni k ta elementga ega bo'lgan to'plam 2^k ta qism to'plamga ega bo'lishligidan k+1 ta elementga ega bo'lgan to'plamning 2^{k+1} ta qism to'plamga ega bo'lishligining kelib chiqishligini ko'rsataylik.

k+1 ta elementga ega bo'lgan $B=\{b_1, b_2, ..., b_k, b_{k+1}\}$ to'plamni qaraylik. B^1 to'plam esa B to'plamning b_{k+1} elementidan boshqa barcha elementlaridan tashkil topgan bo'lsin.

$B1=\{b_1, b_2, ..., b_k\}$

A(k) mulohazaga ko'ra B^1 to'plam 2^k ta to'plam ostiga ega. Bu qism to'plamlarning har biridan, ularning har biriga b_{k+1} elementni qo'shib, yangi to'plamlar hosil qilamiz. Natijada B to'plamning yana 2^k ta qism to'plamlarini olamiz. Bunday holda B to'plamning $2^k+2^k=2x2^k=2^{k+1}$ ta qism to'plamlarini olamiz.

Matematik induktsiya printsipiga ko'ra teorema isbotlandi. Fikrimizning n=k hol uchun to'g'riligidan uning n=k+1 hol uchun to'g'riligini ko'rsata oldik. Shuning uchun fikrimiz istalgan N natural son uchun o'rinli bo'ladi.

Nyuton binomi formulasi.

"Paskal uchburchagini" quyidagi ko'rinishda ham tasvirlash mumkin:

Oldin chiqarilgan (15) formula C_n^m va C_n^{m+1} ni bilgan holda C_{n+1}^{m+1} ni hisoblashga imkon beradi. (15) rekurrent munosabatdan tashqari $C_0^0 = C_1^0 = C_1^1 = ... = C_n^0 = C_n^n = 1$ munosabatlardan foydalanib, Paskal uchburchagini tuzish mumkin.

---

[8] V.Deaconu, D.Pfaff. A bridge course to higher mathematics. 2010.USA. 109-113 betlarning mazmum mohiyatidan foydalanildi.

Bizga

$(a+b)^0=1,$

$(a+b)^1=a+b,$

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2,$

$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$,

$(a+b)^5=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$

formulalar ma'lum.formulalarni hisoblab topish qiyin emas.

Ko'rish qiyin emaski, bu formulalar o'ng qismlarining koeffitsiyentlari "Paskal uchburchagi" ning mos satridagi sonlarga tengligini, ya'ni 1, 2, 1 sonlar 3-satrdagi C_2^0, C_2^1, C_2^2 sonlarga, 1, 3, 3, 1 sonlar 4-satrdagi $C_2^0, C_2^1, C_2^2, C_3^3$ sonlarga mos keladi.

Bu mos tushishlik tasodifiy emas, balki istalgan N uchun

$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \ldots + C_n^k a^{n-k} b^k + \ldots + C_n^n b^n$ formula o'rinli bo'ladi.

(16) formulani matematik induktsiya usuli bilan isbotlaymiz.

1. n=1 bo'lganda (16) tenglik $(a+b)= C_1^0 a + C_1^1$ b ko'rinishni oladi $C_1^0 = C_1^1 = 1$. Bo'lgani uchun (16) formula o'rinli bo'ladi.

2. Faraz qilaylik (16) tenglik n=k hol uchun ham to'g'ri bo'lsin, ya'ni

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^{\boldsymbol{k}} = \boldsymbol{C}_{\boldsymbol{k}}^0 \boldsymbol{a}^{\boldsymbol{k}} + \boldsymbol{C}_{\boldsymbol{k}}^1 \boldsymbol{a}^{\boldsymbol{k}-1} \boldsymbol{b} + \boldsymbol{C}_{\boldsymbol{k}}^{\boldsymbol{m}} \boldsymbol{a}^{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{m}} \boldsymbol{b}^{\boldsymbol{m}} + \ldots + \boldsymbol{C}_{\boldsymbol{k}}^{\boldsymbol{k}} \boldsymbol{b}^{\boldsymbol{k}} \quad (17)$$

Bu tenglikning n=k+1 hol uchun to'g'riligini isbotlaylik

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^{\boldsymbol{k}+1} = (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^{\boldsymbol{k}} (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) \quad (18)$$

Nyuton formulasidagi $\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{n}}^{\boldsymbol{k}}$ koeffitsiyentlar binomial koeffitsiyentlar deyiladi.

(16) Nyuton formulasi quyidagi xossalarga ega:

1. $(a+b)^n$ ikkihadning Nyuton formulasi bo'yicha yoyilmasida n+1 ta qo'shiluvchi (had) bo'ladi. Chunki yoyilmada *a* ning(b ning) 0 dan n gacha barcha darajalari bor.

2. $(a+b)^n$ ning yoyilmasida *a* ning daraja ko'rsatgichi n dan 0 gacha kamayadi, b ning daraja ko'rsatgichi esa 0 dan n gacha ortadi. SHunday qilib yoyilmaning har bir hadida *a* va b ning ko'rsatgichlari yig'indisi bir xil bo'lib, binom darajasining ko'rsatgichiga, ya'ni n ga teng bo'ladi.

3. Yoyilmaning boshidan va oxiridan teng uzoqliqda turgan koeffitsiyentlari o'zaro teng bo'ladi.[9] Bu (14) formuladan kelib chiqadi.

---

[9] V.Deaconu, D.Pfaff. A bridge course to higher mathematics. 2010.USA. 109-113 betlarning mazmum mohiyatidan foydalanildi.

4. Binomial koeffitsiyentlar Paskal uchburchagining mos satridagi sonlar bilan ustma-ust tushadi.

5. $(a+b)^n$ ning yoyilmasida binomial koeffitsiyentlarning yig'indisi 2^n ga teng.

Haqiqatan (16) formulada a=b=1 desak,

$$2^n = C_n^0 + C_n^1 + ... + C_n^k + ... + C_n^{n-1} + C_n^n \qquad (19)$$

tenglikni olamiz. Bu tenglik xossaning o'rinli bo'lishligini ko'rsatadi.

6. $(a+b)^n$ yoyilmaning qo'shiluvchilarini (hadlarini)

$$T_{k+1} = C_n^k a_n^{n-k} b^k \text{ (k=0,1,2,3...n)} \qquad (20)$$

umumiy formula bo'yicha olish mumkin. Bu yerdagi T_{k+1}-(k+1)- qo'shiluvchi.

7. Binom formulasida b ni -b ga almashtirsak, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$(a+b)^n = C_n^0 a + C_n^1 a^{n-1}(-b) + ... +$$
$$+ C_n^k a^{n-k}(-b)^k + ... + C_n^n(-b)^n$$

yoki

$$(a-b)^n = C_n^0 a^n - C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + ... +$$
$$+ (-1)^k C_n^k a^{n-k} b^k + ... + (-1)^n b^n$$

8. Agar oxirgi tenglikda a=b=1 desak, u holda

$$0 = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 + ... + (-1)^k C_n^k + ... + (-1)^n$$

kelib chiqadi.

Toq o'rinda turuvchi binomial koeffitsiyentlar yig'indisi juft o'rinda turuvchi binomial koffitsiyentlar yig'indisiga teng.[10]

4-misol. $(a+b)^{10}$ ifodaning yoyilmasini toping.

Yechilishi:

$$(a+b)^{10} = a^{10} + 10a^9 b + 45a^8 b^2 + 120a^7 b^3 + 210a^6 b^4 +$$
$$+ 252a^5 b^5 + 210a^4 b^6 + 120a^3 b^7 + 45a^2 b^8 + 10ab^9 + b^{10}$$

5-misol. $(3-a)^5$ ifodaning yoyilmasini toping.

Echilishi:

---

[10] V.Deaconu, D.Pfaff. A bridge course to higher mathematics. 2010.USA. 109-113 betlarning mazmum mohiyatidan foydalanildi.

$$(3-a)^5 = 3^5 + 5\cdot 3^4(-a) + 10\cdot 3^3(-a)^2 + 10\cdot 2(-a)^3 + 5\cdot 3(-a)^4 +$$
$$+(-a)^5 = 243 - 405a + 270a^2 - 90a^3 + 15a^4 - a^5$$

6-misol. $(x^2+2y)^{10}$ ifoda yoyilmasining 5-hadini toping.

Yechilishi: (20) formuladan foydalanamiz

$$\boldsymbol{T}_5 = \boldsymbol{T}_{4+1} = \boldsymbol{C}_{10}^4(\boldsymbol{x}^2)^{10-4}(2\boldsymbol{y})^4 = 210(\boldsymbol{x}^2)^6(2\boldsymbol{y})^4 = 3360\boldsymbol{x}^{12}\boldsymbol{y}^4 \,:$$