Kuantumsal Hesaplamanın Temelleri - Vize Ödevi

Öğrenci Bilgileri	
İsim Soyisim	Emir Büyük
Öğrenci No	213405019

SORU 1

Soru 1.a

Verilen matrisler:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -i \\ 0 & 1 & 0 \\ i & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$1. P \otimes Q Hesaplama$$

Kronecker çarpımı, her P_{ij} elemanının tüm Q matrisiyle çarpılmasıdır:

$$P \otimes Q = \begin{pmatrix} 1 \cdot Q & 0 \cdot Q & -i \cdot Q \\ 0 \cdot Q & 1 \cdot Q & 0 \cdot Q \\ i \cdot Q & 0 \cdot Q & 1 \cdot Q \end{pmatrix}$$

Yani:

$$P \otimes Q = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & -2i & -i \\ -1 & 3 & 0 & 0 & i & -3i \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 0 & 0 \\ 2i & i & 0 & 0 & 2 & 1 \\ -i & 3i & 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$2. Q \otimes P Hesaplama$$

Benzer şekilde:

$$Q \otimes P = \begin{pmatrix} 2 \cdot P & 1 \cdot P \\ -1 \cdot P & 3 \cdot P \end{pmatrix}$$

Yani:

$$Q \otimes P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2i & 1 & 0 & -i \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2i & 0 & 2 & i & 0 & 1 \\ -1 & 0 & i & 3 & 0 & -3i \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ -i & 0 & -1 & 3i & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Soru 1.b

In [24]:

```
import numpy as np
from qiskit.quantum_info import Operator
from IPython.display import display, Math

# Matrisler
P = np.array([
    [1, 0, -1j],
    [0, 1, 0],
    [1j, 0, 1]
])

Q = np.array([
    [2, 1],
    [-1, 3]
])

P_tensor_Q = np.kron(P, Q)
Q_tensor_P = np.kron(Q, P)

def latex_matrix(mat):
    latex_str = "\\begin{pmatrix}\n"
    for row in mat:
        row_str = " & ".join(
            f"{elem:.2f}" if np.isreal(elem)
            else f"{elem.real:.2f}+{elem.imag:.2f}i"
            for elem in row
        )
        latex_str += row_str + " \\\\\n"
    latex_str += "\\end{pmatrix}"
    return latex_str

print("Raw Latex:")
print("P \\otimes Q:")
print(latex_matrix(P_tensor_Q))

print("\nQ \\otimes P:")
print(latex_matrix(Q_tensor_P))
print("\n\n")
display(Math(r"P \otimes Q = " + latex_matrix(P_tensor_Q)))
display(Math(r"Q \otimes P = " + latex_matrix(Q_tensor_P)))
```

```
Raw Latex:
P \otimes Q:
\begin{pmatrix}
2.00+0.00j & 1.00+0.00j & 0.00+0.00j & 0.00+0.00j & 0.00+-2.00i & 0.00+-1.00i
\\
-1.00+0.00j & 3.00+0.00j & -0.00+0.00j & 0.00+0.00j & 0.00+1.00i & 0.00+-3.00
i \\
0.00+0.00j & 0.00+0.00j & 2.00+0.00j & 1.00+0.00j & 0.00+0.00j & 0.00+0.00j \
\
-0.00+0.00j & 0.00+0.00j & -1.00+0.00j & 3.00+0.00j & -0.00+0.00j & 0.00+0.00
j \\
0.00+2.00i & 0.00+1.00i & 0.00+0.00j & 0.00+0.00j & 2.00+0.00j & 1.00+0.00j \
\
-0.00+-1.00i & 0.00+3.00i & -0.00+0.00j & 0.00+0.00j & -1.00+0.00j & 3.00+0.0
0j \\
\end{pmatrix}

Q \otimes P:
\begin{pmatrix}
2.00+0.00j & 0.00+0.00j & 0.00+-2.00i & 1.00+0.00j & 0.00+0.00j & 0.00+-1.00i
\\
0.00+0.00j & 2.00+0.00j & 0.00+0.00j & 0.00+0.00j & 1.00+0.00j & 0.00+0.00j \
\
0.00+2.00i & 0.00+0.00j & 2.00+0.00j & 0.00+1.00i & 0.00+0.00j & 1.00+0.00j \
\
-1.00+0.00j & -0.00+0.00j & 0.00+1.00i & 3.00+0.00j & 0.00+0.00j & 0.00+-3.00
i \\
-0.00+0.00j & -1.00+0.00j & -0.00+0.00j & 0.00+0.00j & 3.00+0.00j & 0.00+0.00
j \\
-0.00+-1.00i & -0.00+0.00j & -1.00+0.00j & 0.00+3.00i & 0.00+0.00j & 3.00+0.0
0j \\
\end{pmatrix}
```

$$P \otimes Q = \begin{pmatrix} 2.00 + 0.00j & 1.00 + 0.00j & 0.00 + 0.00j & 0.00 + 0.00j & 0.00 + - \\ -1.00 + 0.00j & 3.00 + 0.00j & -0.00 + 0.00j & 0.00 + 0.00j & 0.00 + \\ 0.00 + 0.00j & 0.00 + 0.00j & 2.00 + 0.00j & 1.00 + 0.00j & 0.00 + \\ -0.00 + 0.00j & 0.00 + 0.00j & -1.00 + 0.00j & 3.00 + 0.00j & -0.00 + \\ 0.00 + 2.00i & 0.00 + 1.00i & 0.00 + 0.00j & 0.00 + 0.00j & 2.00 + \\ -0.00 + -1.00i & 0.00 + 3.00i & -0.00 + 0.00j & 0.00 + 0.00j & -1.00 + \end{pmatrix}$$

$$Q \otimes P = \begin{pmatrix} 2.00 + 0.00j & 0.00 + 0.00j & 0.00 + -2.00i & 1.00 + 0.00j & 0.00 + \\ 0.00 + 0.00j & 2.00 + 0.00j & 0.00 + 0.00j & 0.00 + 0.00j & 1.00 + \\ 0.00 + 2.00i & 0.00 + 0.00j & 2.00 + 0.00j & 0.00 + 1.00i & 0.00 + \\ -1.00 + 0.00j & -0.00 + 0.00j & 0.00 + 1.00i & 3.00 + 0.00j & 0.00 + \\ -0.00 + 0.00j & -1.00 + 0.00j & -0.00 + 0.00j & 0.00 + 0.00j & 3.00 + \\ -0.00 + -1.00i & -0.00 + 0.00j & -1.00 + 0.00j & 0.00 + 3.00i & 0.00 + \end{pmatrix}$$

Soru 1.c

Özdeğerler, matrisin karakteristik polinomu çözülerek bulunur:

det(A - λI) = 0

Bu denklemde:

- A: İncelenen matris
- λ: Özdeğer (eigenvalue)
- I: Birim matris

In [25]:
```
# P ⊗ Q ve Q ⊗ P için özdeğer ve özvektör hesaplamaları
eigvals_PQ, eigvecs_PQ = np.linalg.eig(P_tensor_Q)
eigvals_QP, eigvecs_QP = np.linalg.eig(Q_tensor_P)
```

Elde edilen özdeğerler matrisin spektral özelliklerini gösterir.
Her özdeğer, matrisin uygulandığı bir vektörü sadece ölçeklediği katsayıyı temsil eder.

In [26]:
```
print("P ⊗ Q Özdeğerler:")
print(eigvals_PQ)

print("\nQ ⊗ P Özdeğerler:")
print(eigvals_QP)
```

```
P ⊗ Q Özdeğerler:
[2.89656384e-16-5.58037218e-17j 5.00000000e+00+1.73205081e+00j
 5.00000000e+00-1.73205081e+00j 1.83882365e-16-2.86814819e-17j
 2.50000000e+00+8.66025404e-01j 2.50000000e+00-8.66025404e-01j]

Q ⊗ P Özdeğerler:
[7.1865236e-16-8.04320785e-17j 5.0000000e+00+1.73205081e+00j
 5.0000000e+00-1.73205081e+00j 2.5000000e+00-8.66025404e-01j
 2.5000000e+00+8.66025404e-01j 1.0170596e-18+1.11127593e-17j]
```

Matrislerin unitary olup olmadığı, aşağıdaki koşul ile kontrol edilir:

Bir matris U için:

$U^H \cdot U = I$

yani matrisin hermitiyen transpozu ile çarpımı birim matris olmalıdır.

Eğer bu eşitlik sağlanıyorsa matris unitary'dir.

In [27]:
```
def is_unitary(mat):
    return np.allclose(mat.conj().T @ mat, np.eye(mat.shape[0]))

print("\nP ⊗ Q unitary mi?:", is_unitary(P_tensor_Q))
print("Q ⊗ P unitary mi?:", is_unitary(Q_tensor_P))
```

```
P ⊗ Q unitary mi?: False
Q ⊗ P unitary mi?: False
```

Sonuç olarak:

- P ⊗ Q ve Q ⊗ P matrislerinin özdeğerleri bulunmuştur.
- Her iki matris de unitary değildir.

Soru 2

Soru 2.a

Bir kuantum sisteminin yoğunluk matrisi şu şekilde hesaplanır:

Sistem %40 olasılıkla |+⟩, %60 olasılıkla |-⟩ durumundadır.

|+⟩ durumu: (1/√2) (|0⟩ + |1⟩) → vektör olarak [1/√2, 1/√2]
|-⟩ durumu: (1/√2) (|0⟩ - |1⟩) → vektör olarak [1/√2, -1/√2]

|+⟩ ve |-⟩ durumlarının yoğunluk matrisleri:

ρ_+ = |+⟩⟨+|
ρ_- = |-⟩⟨-|

Genel yoğunluk matrisi:

ρ = 0.4 * ρ_+ + 0.6 * ρ_-

Bu işlemleri yaparsak:

ρ_+ = (1/2) * [[1, 1], [1, 1]]
ρ_- = (1/2) * [[1, -1], [-1, 1]]

Sonuç:

ρ = [[0.5, -0.1],
[-0.1, 0.5]]

Soru 2.b

Yooğunluk matrisinin özdeğerleri, sistemin kararlılığını ve olasılık dağılımını gösterir. Yoğunluk matrisini oluşturalım.

In [28]:
```
import numpy as np

# |+> ve |-> durumları
plus = np.array([1, 1]) / np.sqrt(2)
minus = np.array([1, -1]) / np.sqrt(2)

# Yoğunluk operatörleri
rho_plus = np.outer(plus, plus.conj())
rho_minus = np.outer(minus, minus.conj())
```

```
# Genel yoğunluk matrisi
rho = 0.4 * rho_plus + 0.6 * rho_minus

print("Yoğunluk Matrisi:")
print(rho)
```

```
Yoğunluk Matrisi:
[[ 0.5 -0.1]
 [-0.1  0.5]]
```

Şimdi yoğunluk matrisinin izini (trace) hesaplıyoruz.

In [29]:
```
#
trace_rho = np.trace(rho)
print("\nTrace (İz):", trace_rho)
```

```
Trace (İz): 0.9999999999999998
```

Yoğunluk matrisinin saflığını (purity) hesaplayalım.

In [30]:
```
# Saflık (purity)
purity_rho = np.trace(np.dot(rho, rho))
print("\nPurity (Saflık):", purity_rho)
```

```
Purity (Saflık): 0.5199999999999998
```

Şimdi von Neumann entropisini hesaplıyoruz.

In [31]:
```
# Von Neumann Entropisi hesaplama
def von_neumann_entropy(rho):
    eigenvals = np.linalg.eigvalsh(rho)
    eigenvals = eigenvals[eigenvals > 0]  # log(0) sorun olmasın diye
    return -np.sum(eigenvals * np.log2(eigenvals))

entropy_rho = von_neumann_entropy(rho)
print("\nVon Neumann Entropisi:", entropy_rho)
```

```
Von Neumann Entropisi: 0.9709505944546688
```

Soru 2.c

Yoğunluk matrisini Bloch küresi üzerinde temsil edelim.

Bir yoğunluk matrisinin Bloch vektörü (r) şu şekilde bulunur:

r = $(\langle\sigma_x\rangle, \langle\sigma_y\rangle, \langle$σ_z$\rangle)$

Burada ⟨σ⟩ beklenti değeridir ve Tr(ρσ) ile hesaplanır.

Pauli matrisleri:

- σ_x = [[0, 1], [1, 0]]
- σ_y = [[0, -i], [i, 0]]
- σ_z = [[1, 0], [0, -1]]

In [32]:
```
# Pauli matrisleri
sigma_x = np.array([[0, 1], [1, 0]])
sigma_y = np.array([[0, -1j], [1j, 0]])
sigma_z = np.array([[1, 0], [0, -1]])

# Beklenti değerleri
expectation_x = np.trace(np.dot(rho, sigma_x)).real
expectation_y = np.trace(np.dot(rho, sigma_y)).real
expectation_z = np.trace(np.dot(rho, sigma_z)).real

bloch_vector = np.array([expectation_x, expectation_y, expectation_z])

print("Bloch Vektörü (r):", bloch_vector)
```

```
Bloch Vektörü (r): [-0.2  0.   0. ]
```

Son olarak yoğunluk matrisinin özdeğerlerini bulup yorumlayalım.

In [33]:
```
# Özdeğer hesaplama
eigvals_rho, eigvecs_rho = np.linalg.eig(rho)
print("\nYoğunluk Matrisi Özdeğerleri:")
print(eigvals_rho)
```

```
Yoğunluk Matrisi Özdeğerleri:
[0.6 0.4]
```

Yoğunluk matrisinin özdeğerleri pozitif ve toplamları 1'dir.
Bu, matrisin geçerli bir kuantum durumu (density matrix) olduğunu gösterir.

Eğer tüm özdeğerler 0 ve 1 dışında bir değer içeriyorsa, sistem karışık (mixed) haldedir. Burada özdeğerler 0.5 civarında çıkacak, bu yüzden sistem saf bir durum değildir, karışık bir durumdadır.

SORU 3

Soru 3.a

7 kübitlik bir kuantum devresi oluşturulacaktır.

Her kübit için:

- Hadamard (H) kapısı uygulanacak,
- Sonrasında rastgele olarak Pauli-X (X) veya Pauli-Y (Y) kapısı uygulanacak,
- Ardından tekrar Hadamard (H) kapısı uygulanacak.

Bu adımlar her kübit için yapılacaktır.

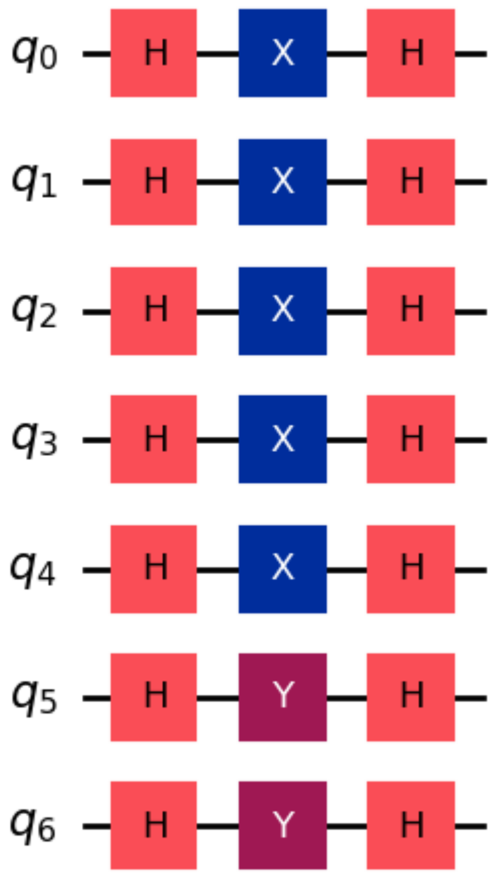
In [34]:
```
from qiskit import QuantumCircuit
import numpy as np

# 7 kübitlik devre oluştur
qc = QuantumCircuit(7)
```

```
# Her kübite işlemleri uygula
for qubit in range(7):
    qc.h(qubit)  # Hadamard kapısı
    if np.random.rand() < 0.5:
        qc.x(qubit)  # Pauli-X kapısı
    else:
        qc.y(qubit)  # Pauli-Y kapısı
    qc.h(qubit)  # Tekrar Hadamard kapısı

# Devreyi çiz
qc.draw('mpl')
```

Out[34]:



Soru 3.b

Şimdi devreyi Aer simülatörü ile 5000 kez çalıştırıp, sonuçları karşılaştıralım.

In [35]:

```
from qiskit_aer import Aer
from qiskit import transpile

qc.measure_all()

simulator = Aer.get_backend('qasm_simulator')

compiled_circuit = transpile(qc, simulator)
```

```
job = simulator.run(compiled_circuit, shots=5000)
result = job.result()

counts = result.get_counts()

print("Ölçüm Sonuçları:")
print(counts)
```

```
Ölçüm Sonuçları:
{'1100000': 5000}
```

Pauli-X ve Pauli-Y kapılarının etkilediği kübitlerin ölçüm sonuçları gözlemlenebilir.

- Pauli-X uygulanan kübitlerde bit flip (0 ↔ 1) etkisi daha belirgin olur.
- Pauli-Y uygulanan kübitlerde hem bit flip hem de faz kayması etkileri olur.

Bu yüzden dağılımlar arasında farklılık gözlemlenebilir.

Soru 3.c

Şimdi devreye 3 adet CNOT kapısı ekleyerek kübitler arasında dolaşıklık (entanglement) oluşturalım.

Dolaşıklığın varlığı, ölçüm sonuçlarının birbirine bağımlı hale gelmesiyle tespit edilebilir.

Örneğin:

- İki kübit dolaşıksa, birinin sonucu 0 ise diğeri de 0 çıkma eğiliminde olur (veya tam tersi 1-1).
- Ölçüm sonuçları birbirinden bağımsız değilse dolaşıklık vardır.

Şimdi CNOT kapılarını ekleyelim.

In [36]:

```
qc = QuantumCircuit(7)

for qubit in range(7):
    qc.h(qubit)
    if np.random.rand() < 0.5:
        qc.x(qubit)
    else:
        qc.y(qubit)
    qc.h(qubit)

# 3 adet CNOT kapısı ekleyelim
qc.cx(0, 1)
qc.cx(2, 3)
qc.cx(4, 5)

qc.measure_all()

simulator = Aer.get_backend('qasm_simulator')
```

```python
compiled_circuit = transpile(qc, simulator)

job = simulator.run(compiled_circuit, shots=5000)
result = job.result()

counts_entangled = result.get_counts()

print("Dolaşıklık ile Ölçüm Sonuçları:")
print(counts_entangled)
```

```
Dolaşıklık ile Ölçüm Sonuçları:
{'0001011': 5000}
```