# Pohon Biner (Bagian 1)

IF1210 – Algoritma dan Pemrograman 1
Sekolah Teknik Elektro dan Informatika
Institut Teknologi Bandung

# Tujuan

Mahasiswa memahami definisi pohon dan pohon biner

Berdasarkan pemahaman tersebut, mampu membuat fungsi sederhana yang memanipulasi pohon

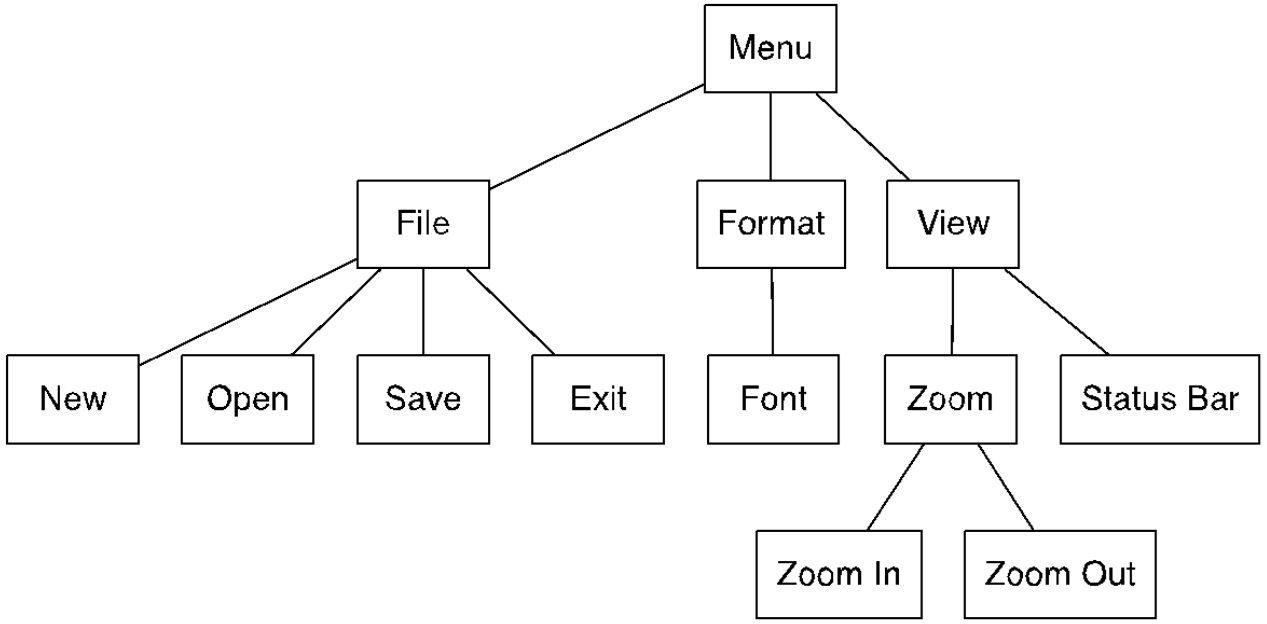
Mahasiswa mampu mengimplementasi fungsi pemroses pohon dalam bahasa C (melalui praktikum)

# Contoh Persoalan - 1

Menu dalam Aplikasi Komputer

Contoh (Notepad):

- File
  - New
  - Open
  - Save
  - Exit
- Format
  - Font
- View
  - Zoom
    - Zoom In
    - Zoom Out
  - Status Bar



# Contoh Persoalan - 2

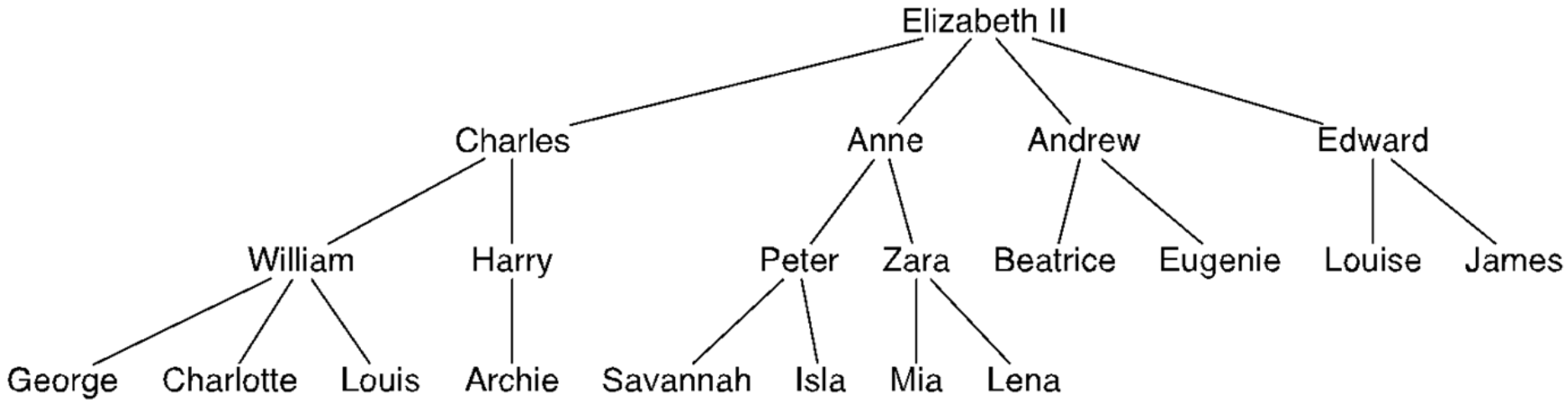
Susunan bab dalam buku
Contoh: Diktat Struktur Data

- Bagian I. Struktur Data
  - Abstract Data Type
    - ADT JAM dalam Bahasa Algoritmik
    - ADT POINT dalam Bahasa Algoritmik
    - ADT GARIS dalam Bahasa Algoritmik
    - Latihan Soal
  - Koleksi Objek
  - …
- Bagian II
  - Studi Kasus 1 Polinom

# Contoh Persoalan - 3

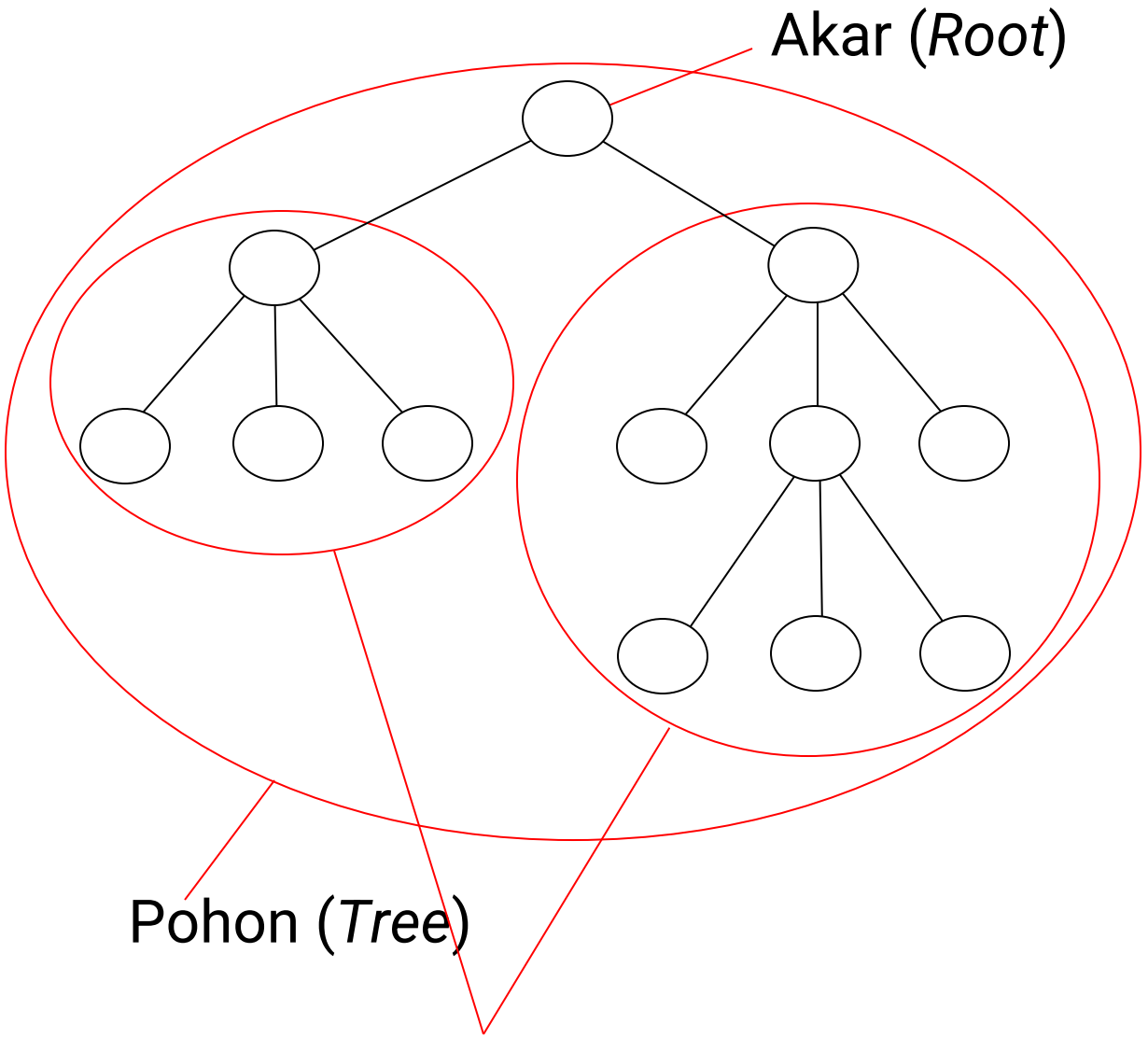
Pohon keluarga

**Contoh**: Pohon keluarga bangsawan Inggris



# Definisi






Akar

SubPohon

Definisi Rekursif Pohon:
- Akar → basis
- Sub Pohon (sub himpunan yang berupa pohon) → rekurens

# Definisi Rekursif Pohon

Pohon (tree) adalah himpunan terbatas, tidak kosong, dengan elemen sebagai berikut:

- Sebuah elemen yang dibedakan dari yang lain → AKAR
- Elemen yang lain (jika ada) dibagi-bagi menjadi beberapa sub himpunan yang disjoin dan masing-masing sub himpunan itu adalah pohon → SUBPOHON

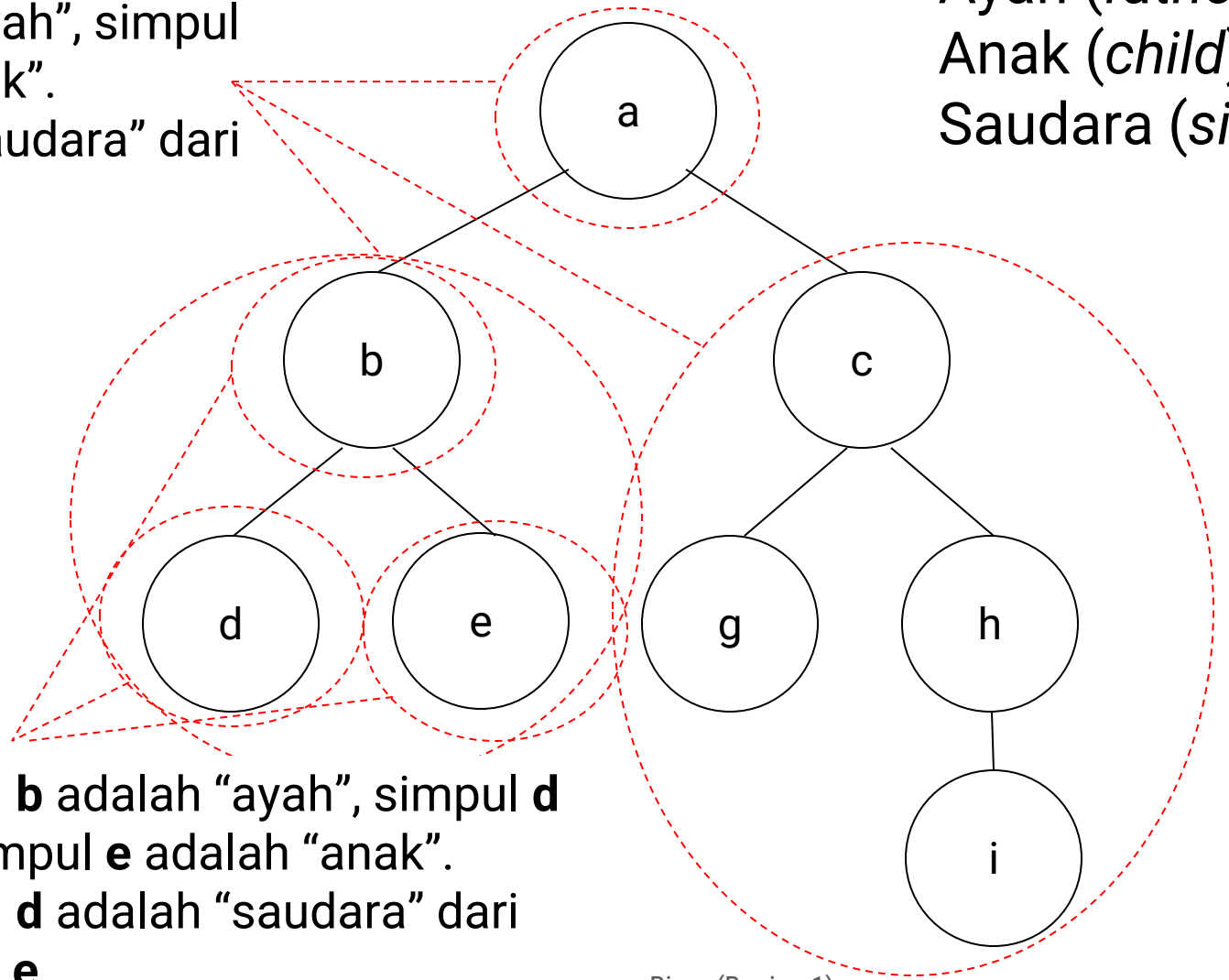
Suffiks -aire pada pohon menunjukkan berapa maksimum subpohon yang dapat dimiliki oleh suatu pohon

- Binaire (binary), maksimum subpohon: 2
- N-aire, maksimum subpohon: N

# Istilah

Simpul **a** adalah “ayah”, simpul **b** dan simpul **c** “anak”.
Simpul **b** adalah “saudara” dari simpul **c**

Ayah (*father/parent*)
Anak (*child*)
Saudara (*sibling*)



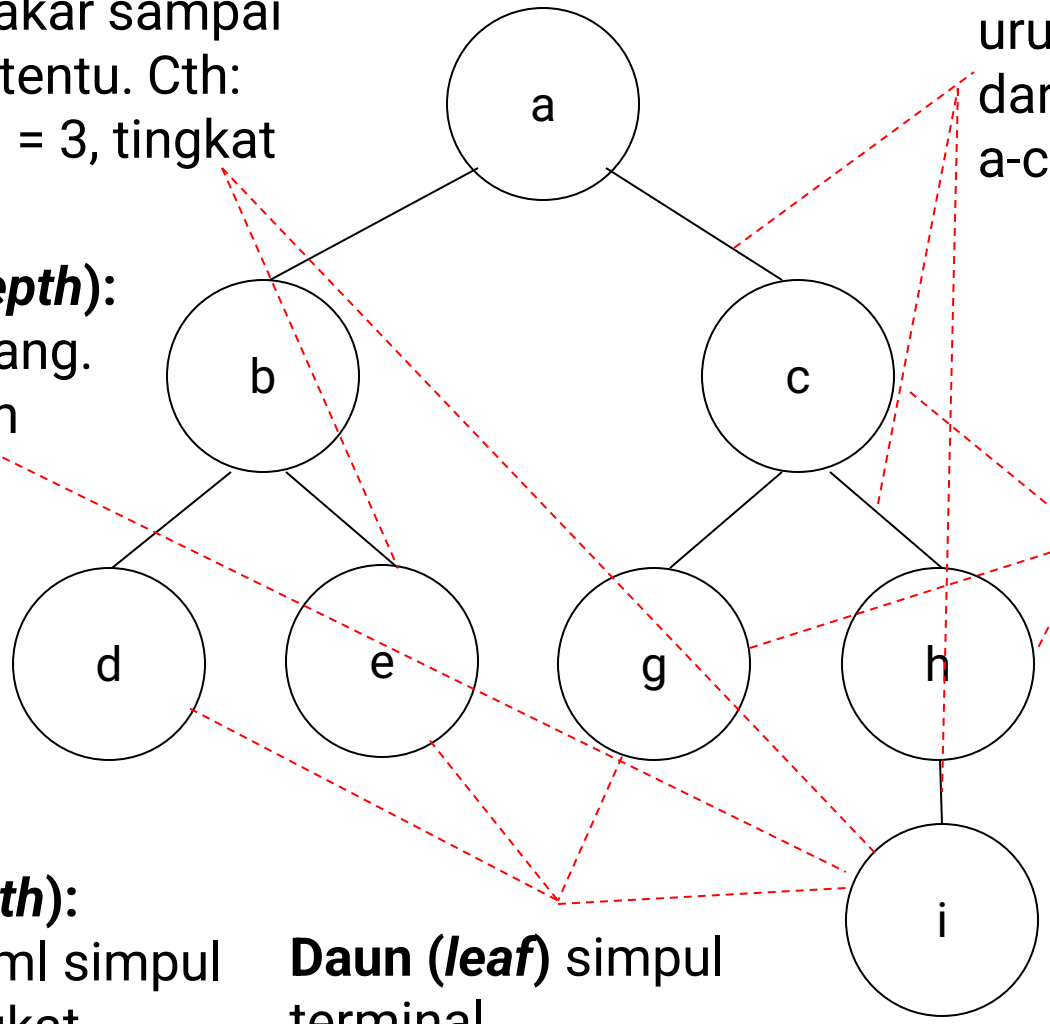

Simpul **b** adalah “ayah”, simpul **d** dan simpul **e** adalah “anak”.
Simpul **d** adalah “saudara” dari simpul **e**

# Istilah

**Tingkat (*level*):** panjang jalan dari akar sampai simpul tertentu. Cth: tingkat (e) = 3, tingkat (i) = 4,

**Jalan (*path*):** urutan tertentu dari cabang, cth: a-c-h-i

**Kedalaman (*depth*):** tingkat terpanjang. Cth: kedalaman pohon=4

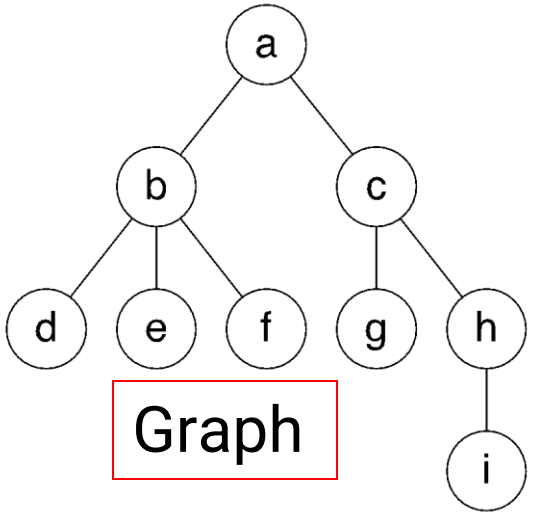



**Derajat (*degree*):** banyaknya anak sebuah simpul. Cth, derajat(c)=2, derajat(h)=1, derajat(g)=0

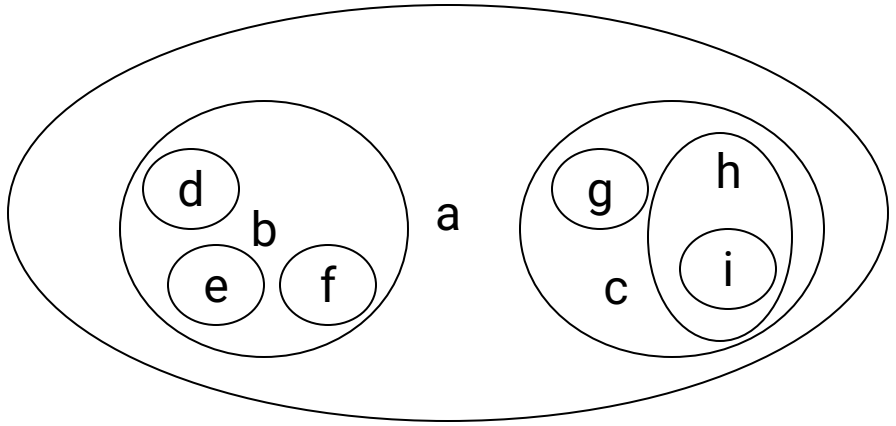
**Lebar (*breadth*):** maksimum jml simpul pd suatu tingkat.

**Daun (*leaf*)** simpul terminal

# Beberapa Ilustrasi Representasi




Graph




Himpunan

Indentasi

```
a
   b
      d
      e
      f
   c
      g
      h
         i
```

Bentuk Linier

Prefix:
- (a (b (d (), e (), f ()), c ( g (), h ( i ()))))
- (a (b (d) (e) (f)) (c (g) (h (i))))

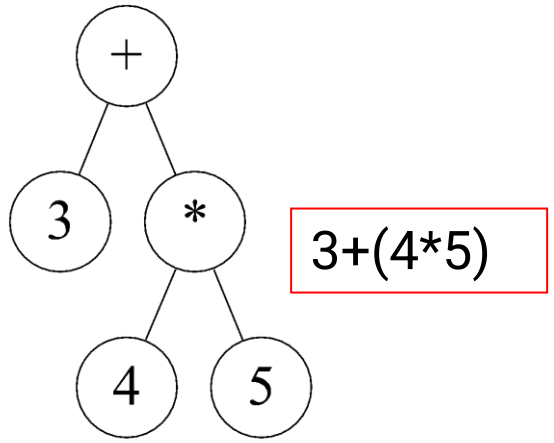
Postfix: (((d, e, f) b, (g, (i) h) c) a)

# Pohon Biner

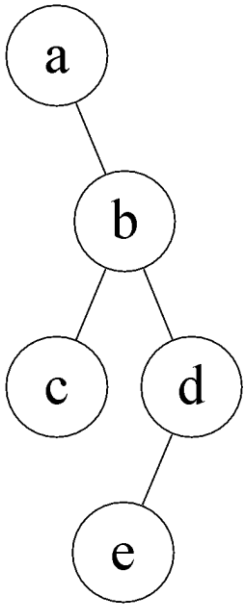
**pohon biner** adalah himpunan terbatas yang

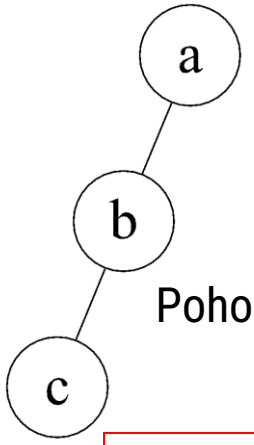
- mungkin **kosong**, atau
- terdiri atas sebuah simpul yang disebut **akar** dan dua buah himpunan lain yang *disjoint* yang merupakan pohon biner, yang disebut sebagai **sub pohon kiri** dan **sub pohon kanan** dari pohon biner tersebut

# Contoh Pohon Biner

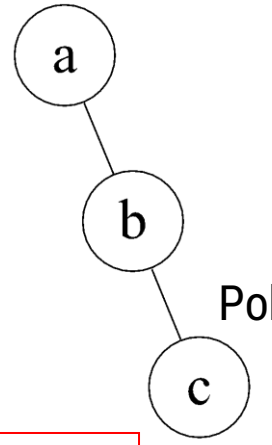



3+(4*5)




Pohon biner condong kiri




Pohon biner condong kanan

Pohon condong/skewed tree

# ADT Pohon Biner dengan Representasi Berkait

```
KAMUS
{ Deklarasi TYPE  POHON BINER }
    constant  NIL: ... { konstanta pohon kosong, terdefinisi }

    type   ElType: ... { terdefinisi }
    type  Address: ... { terdefinisi }
    { Type Pohon Biner }
    type  BinTree: Address
    type TreeNode: < info:  ElType,   { simpul/akar }
                     left:  BinTree,  { subpohon kiri }
                    right:  BinTree   { subpohon kanan } >

{ Tambahan struktur data list untuk pengelolaan elemen pohon }
    type Node: < info: ElType,
                 next: AddressList >
    type NodeList: AddressList
    { list linier yang elemennya adalah Node }
```

# Struktur Data Pohon Biner untuk Pemrosesan secara Rekursif (Bahasa C, pointer)

```
#define NIL NULL

/* Selektor */
#define  ROOT(p) (p)->info
#define  LEFT(p) (p)->left
#define RIGHT(p) (p)->right

typedef int ElType;
typedef struct treeNode* Address;
typedef struct treeNode {
     ElType info;
     Address left;
     Address right;
} TreeNode;
/* Definisi PohonBiner */
/* pohon Biner kosong p = NIL */

typedef Address BinTree;
```

# Konstruktor

```
function NewTree (akar: ElType, l: BinTree, r: BinTree) → BinTree
{ Menghasilkan sebuah pohon biner dari akar, l, dan r, jika alokasi
  berhasil }
{ Menghasilkan pohon kosong (NIL) jika alokasi gagal }

procedure CreateTree (input akar: ElType,
                      input l: BinTree,  input r: BinTree,
                      output p: BinTree)
{ I.S. Sembarang }
{ F.S. Menghasilkan sebuah pohon p }
{ Menghasilkan sebuah pohon biner p dari akar, l, dan r, jika alokasi
  berhasil }
{ Menghasilkan pohon p yang kosong (NIL) jika alokasi gagal }
```

# Selektor

Jika ***p*** adalah **BinTree**, maka:

**Akar dari *p*** adalah ***p*↑.info**

**Anak kiri *p*** atau **subpohon kiri *p*** adalah ***p*↑.left**

**Anak kanan *p*** atau **subpohon kanan *p*** adalah ***p*↑.right**

# Memory Management

```
function newTreeNode (x: ElType) → Address
{ Mengirimkan address hasil alokasi sebuah elemen bernilai x }
{ Jika alokasi berhasil, maka address tidak NIL, dan misalnya
  menghasilkan p, maka p↑.info=x, p↑.left=NIL, p↑.right=NIL }
{ Jika alokasi gagal, mengirimkan NIL }

procedure deallocTreeNode (input/output p: Address)
{ I.S. p terdefinisi }
{ F.S. p dikembalikan ke sistem }
{ Melakukan dealokasi/pengembalian address p }
```

**Catatan:** untuk NodeList harus dibuat primitif memory management sendiri

# Predikat Penting - 1

```
function isTreeEmpty (p: BinTree) → boolean
{ Mengirimkan true jika p adalah pohon biner yang kosong }
KAMUS LOKAL
  -
ALGORITMA
  → (p = NIL)


function isOneElmt (p: BinTree) → boolean
{ Mengirimkan true jika p tidak kosong dan hanya terdiri atas 1 elemen }
KAMUS LOKAL
  -
ALGORITMA
  if not(isTreeEmpty(p))
    → ((p↑.left = NIL) and (p↑.right = NIL))
  else
    → false
```

# Predikat Penting - 2

```
function isUnerLeft (p: BinTree) → boolean
{ Mengirimkan true jika pohon biner tidak kosong, p adalah pohon unerleft:
  hanya mempunyai subpohon kiri }

function isUnerRight (p: BinTree) → boolean
{ Mengirimkan true jika pohon biner tidak kosong, p adalah pohon unerright:
  hanya mempunyai subpohon kanan }

function isBiner (p: BinTree) → boolean
{ Mengirimkan true jika pohon biner tidak kosong, p adalah pohon biner:
  mempunyai subpohon kiri dan subpohon kanan }
```

# Pohon Basis-0

Definisi rekursif

**Basis**: pohon biner kosong adalah pohon biner {menggunakan predikat `isTreeEmpty`}

**Rekurens**: Pohon biner tidak kosong terdiri dari sebuah simpul akar dan dua anak: (i) sub pohon kiri dan (ii) sub pohon kanan. Sub pohon kiri dan sub pohon kanan adalah pohon biner

# Pohon Basis-1

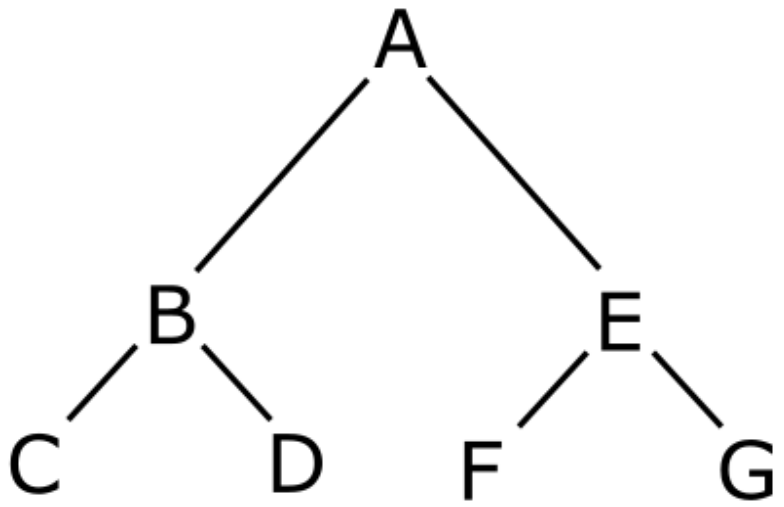
Definisi rekursif

**Basis**: pohon biner yang hanya terdiri dari akar {menggunakan predikat **`isOneElmt`**}

**Rekurens**: Pohon biner tidak kosong terdiri dari sebuah simpul akar dan dua anak yang **salah satunya pasti tidak kosong**: sub pohon kiri dan sub pohon kanan.

Gunakan **`isUnerLeft`**, **`isUnerRight`**, **`isBiner`** untuk memastikan tidak terjadi pemrosesan pada pohon kosong

# Pemrosesan Traversal




**pre-order:** pemrosesan dengan urutan "**akar – kiri – kanan**"

- Urutan pemrosesan:
  A-B-C-D-E-F-G

**in-order:** pemrosesan dengan urutan "**kiri – akar– kanan**"

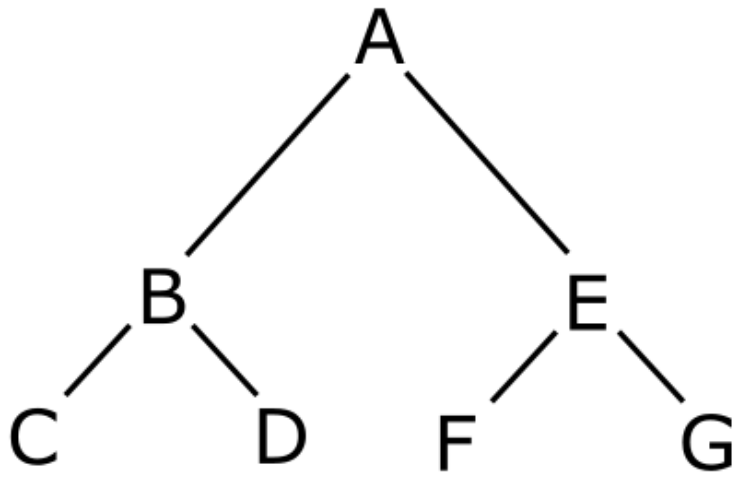
- Urutan pemrosesan:
  C-B-D-A-F-E-G

**post-order:** pemrosesan dengan urutan "**kiri – kanan – akar**"

- Urutan pemrosesan:
  C-D-B-F-G-E-A

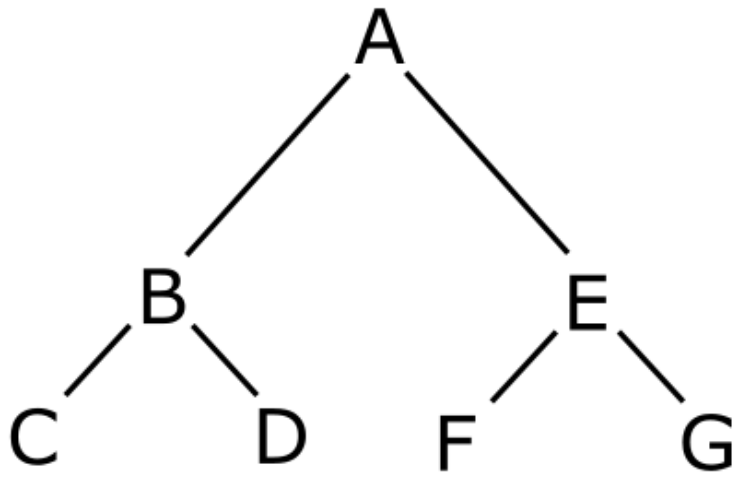
# Traversal - Preorder

```
procedure preOrder (input p: BinTree)
{ I.S. Pohon p terdefinisi }
{ F.S. Semua node pohon p sudah diproses secara pre-order:
       akar, kiri, kanan }
{ Basis Pohon kosong tidak ada yang diproses }
{ Rekurens Proses akar p;
           Proses subpohon kiri p secara pre-order
           Proses subpohon kanan p secara pre-order }
KAMUS LOKAL
  -
ALGORITMA
  if isTreeEmpty(p) then { Basis-0 }
    { do nothing }
  else { Rekurens, tidak kosong }
    proses(p)
    preOrder(p↑.left)
    preOrder(p↑.right)
```



# Contoh - PrintPreOrder

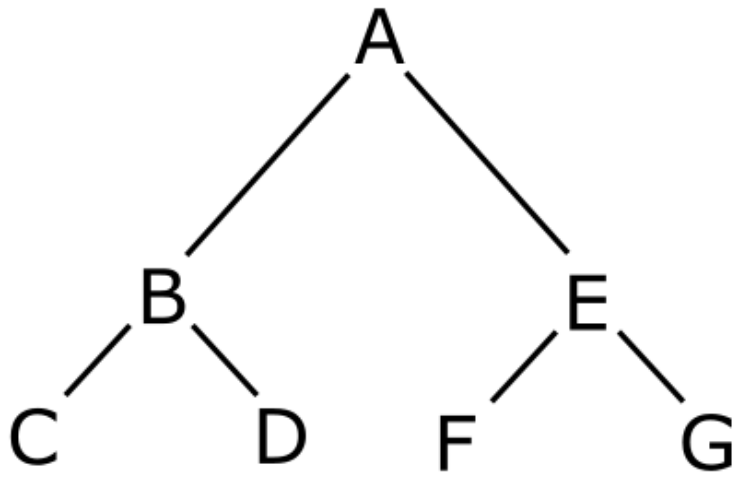
```
procedure printPreOrder (input p: BinTree)
{ I.S. Pohon p terdefinisi }
{ F.S. Semua node pohon p sudah dicetak secara pre-order:
       akar, kiri, kanan }
{ Basis Pohon kosong tidak ada yang diproses }
{ Rekurens Cetak akar p;
           Cetak subpohon kiri p secara pre-order
           Cetak subpohon kanan p secara pre-order }
KAMUS LOKAL
  -
ALGORITMA
  if isTreeEmpty(p) then { Basis-0 }
    { do nothing }
  else { Rekurens, tidak kosong }
    output(p↑.info)
    printPreOrder(p↑.left)
    printPreOrder(p↑.right)
```




Urutan output = A-B-C-D-E-F-G

# Traversal - Inorder

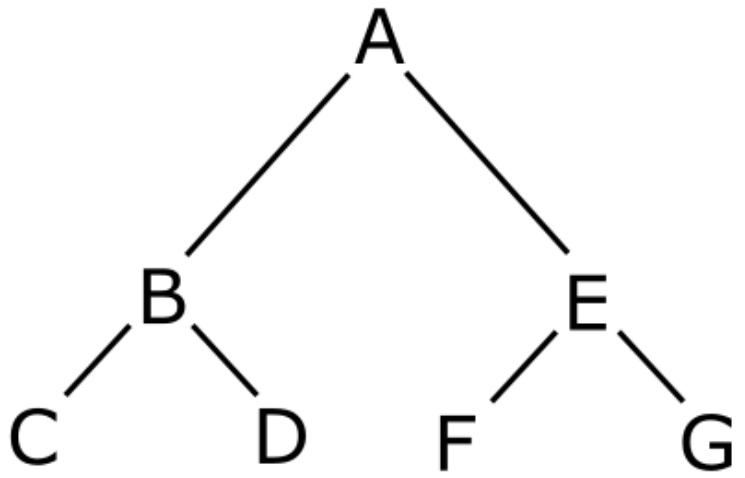
```
procedure inOrder (input p: BinTree)
{ I.S. Pohon p terdefinisi }
{ F.S. Semua node pohon p sudah diproses secara InOrder:
       kiri, akar, kanan }
{ Basis Pohon kosong tidak ada yang diproses }
{ Rekurens Proses subpohon kiri p secara in-order
           Proses akar p;
           Proses subpohon kanan p secara in-order }
KAMUS LOKAL
  -
ALGORITMA
  if isTreeEmpty(p) then { Basis-0 }
    { do nothing }
  else { Rekurens, tidak kosong }
    inOrder(p↑.left)
    proses(p)
    inOrder(p↑.right)
```




Urutan proses = C-B-D-A-F-E-G

# Traversal – Post-order

```
procedure postOrder (input p: BinTree)
{ I.S. Pohon p terdefinisi }
{ F.S. Semua node pohon p sudah diproses secara postOrder:
       kiri, kanan, akar }
{ Basis Pohon kosong tidak ada yang diproses }
{ Rekurens Proses subpohon kiri p secara post-order
           Proses subpohon kanan p secara post-order
           Proses akar p; }
KAMUS LOKAL
  -
ALGORITMA
  if isTreeEmpty(p) then { Basis-0 }
    { do nothing }
  else { Rekurens, tidak kosong }
    postOrder(p↑.left)
    postOrder(p↑.right)
    proses(p)
```

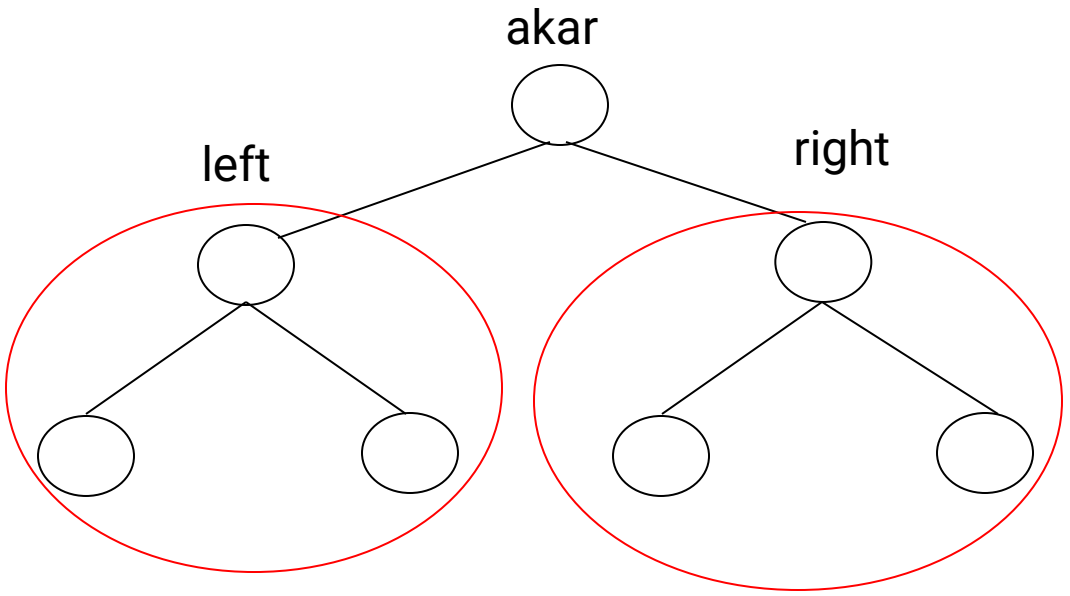



Urutan proses = C-D-B-F-G-E-A

# Menghitung Jumlah Elemen

```
function nbElmt (p: BinTree) → integer
{ Mengirim jumlah elemen dari pohon }
```

Berapa jumlah elemen pohon dilihat dari elemen current?




jumlah_elemen =
1 (utk akar) + jumlah_elemen(subpohon kiri) + jumlah_elemen(subpohon kanan)

# Menghitung Jumlah Elemen, nbElmt (basis 0)

Rekursif

**Basis 0**: jika pohon kosong, maka jumlah elemen adalah 0

**Rekurens**: jumlah elemen = 1 (current element) + jumlah elemen subpohon kiri
+ jumlah elemen subpohon kanan

```
function nbElmt (p: BinTree) → integer
{ Pohon Biner mungkin kosong. Mengirim jumlah elemen dari pohon }
KAMUS LOKAL
  -
ALGORITMA
  if isTreeEmpty(p) then { Basis 0 }
    → 0
  else { Rekurens }
    → 1 + nbElmt(p↑.left) + nbElmt(p↑.right)
```

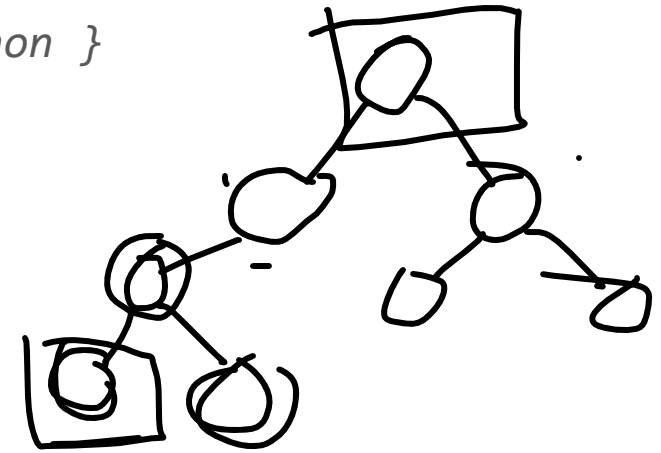
# Menghitung Jumlah Elemen, nbElmt (basis 1)

Rekursif

**Basis 1**: jika pohon satu elemen, maka jumlah elemen adalah 1

**Rekurens**: jumlah elemen = 1 (current element) + jumlah elemen subpohon kiri (jika ada)
+ jumlah elemen subpohon kanan (jika ada)

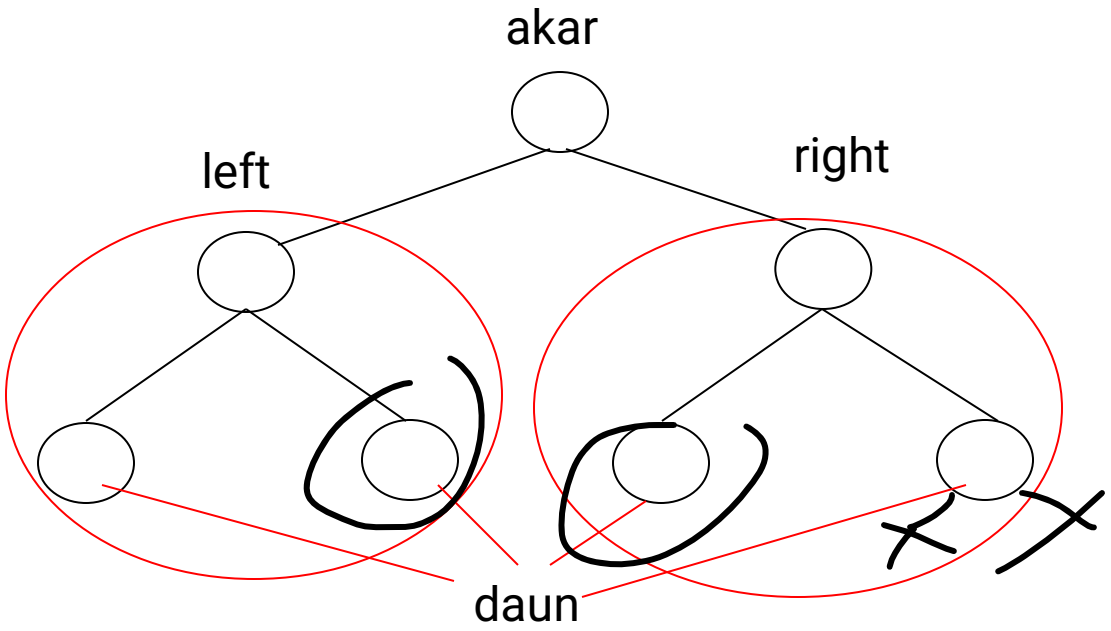
```
function nbElmt (p: BinTree) → integer
{ Pohon Biner tidak kosong. Mengirim jumlah elemen dari pohon }
KAMUS LOKAL
ALGORITMA
  if isOneElmt(p) then { Basis-1 }
    → 1
  else { Rekurens }
    depend on p
      isUnerLeft(p) : → 1 + nbElmt(p↑.left)
      isUnerRight(p): → 1 + nbElmt(p↑.right)
      isBiner(p)    : → 1 + nbElmt(p↑.left) + nbElmt(p↑.right)
```



# Menghitung Jumlah Daun

```
function nbLeaf (p: BinTree) → integer
{ Prekondisi: Pohon Biner tidak mungkin kosong.
  Mengirimkan banyaknya daun pohon }
```

Berapa jumlah daun pohon dilihat dari elemen current?




Jumlah daun =
0 (utk akar) + Jumlah_daun(pohon kiri) + Jumlah_daun(pohon kanan)

# Menghitung Jumlah Daun, nbLeaf

Analisis Kasus

**Pohon kosong** jumlah daun = 0

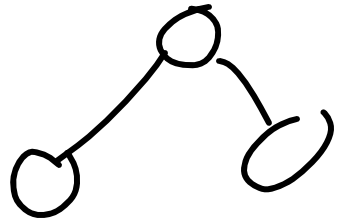
**Pohon tidak kosong**: jumlah daun dihitung dengan fungsi menghitung jumlah daun dengan **basis-1**

```
function nbLeaf (p: BinTree) → integer
{ Mengirimkan banyaknya daun pohon }
{ Proses perhitungan daun menggunakan nbLeaf basis 1 }
KAMUS LOKAL

ALGORITMA
   if (isTreeEmpty(p)) then
      → 0
   else
      → nbLeaf1(p)
```

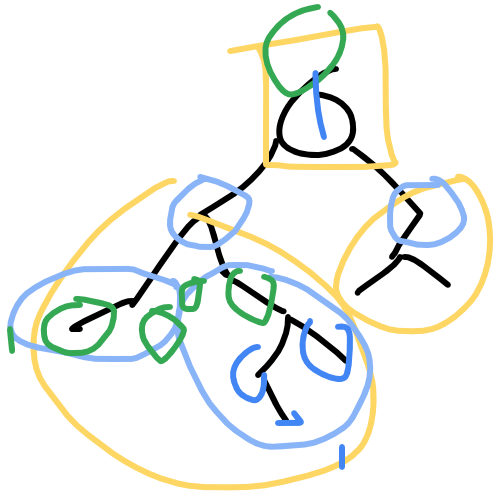
# nbLeaf1 (Basis-1)

```
function nbLeaf1 (p: BinTree) → integer
{ Prekondisi: Pohon Biner tidak mungkin kosong.
  Mengirimkan banyaknya daun pohon }
{ Basis: Pohon yang hanya mempunyai akar: 1 }
{ Rekurens:
  Punya anak kiri dan tidak punya anak kanan: nbLeaf1(p↑.left)
  Tidak Punya anak kiri dan punya anak kanan: nbLeaf1(p↑.right)
  Punya anak kiri dan punya anak kanan      : nbLeaf1(p↑.left) + nbLeaf1(p↑.right) }
KAMUS LOKAL
  -
ALGORITMA
  if (isOneElmt(p)) then { Basis 1 akar }
    → 1
  else { Rekurens }
    depend on (p)
      isUnerLeft(p) : → nbLeaf1(p↑.left)
      isUnerRight(p): → nbLeaf1(p↑.right)
      isBiner(p)    : → nbLeaf1(p↑.left) + nbLeaf1(p↑.right)
```



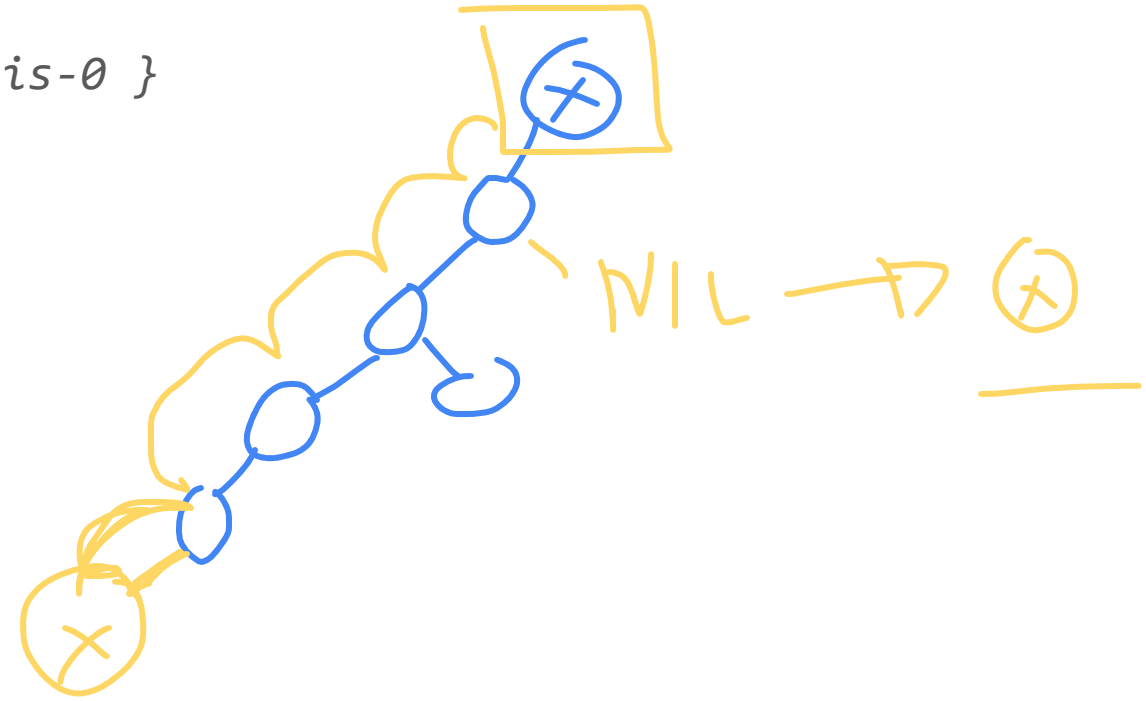
# Tinggi/Kedalaman Pohon

```
function depth(p: BinTree) → integer
{ Pohon Biner mungkin kosong.
  Mengirim "depth", yaitu tinggi dari pohon }
{ Basis: Pohon kosong, yang mana tingginya nol }
{ Rekurens: 1 + maksimum (depth(anak kiri), depth(anak kanan)) }
KAMUS LOKAL
  -
ALGORITMA
  if isTreeEmpty(p) then { Basis 0 }
    → 0
  else { Rekurens }
    → 1 + max(depth(p↑.left), depth(p↑.right))
```



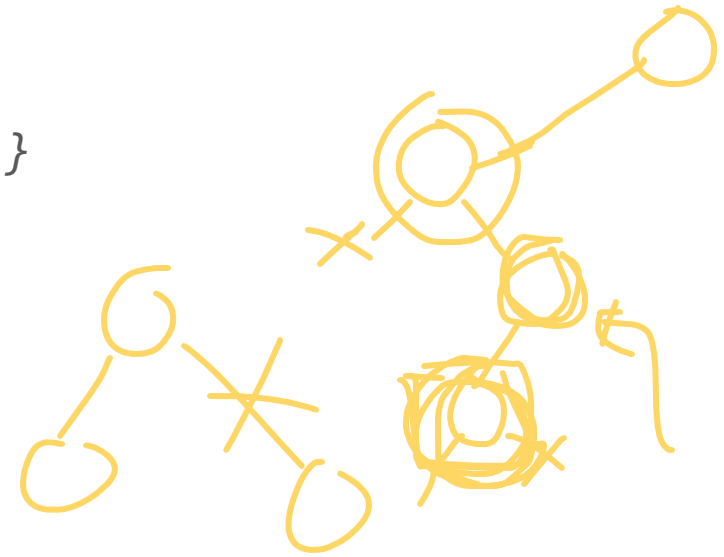
# addLeft

```
procedure addLeft (input/output p: BinTree,
                   input x: ElType)
{ I.S. p boleh kosong }
{ F.S. p bertambah simpulnya, dengan x sebagai simpul daun terkiri }
KAMUS LOKAL
  -
ALGORITMA
  if (isTreeEmpty(p)) then { Basis-0 }
    p ← newTreeNode(x)
  else { Rekurens }
    addLeft(p↑.left,x)
```



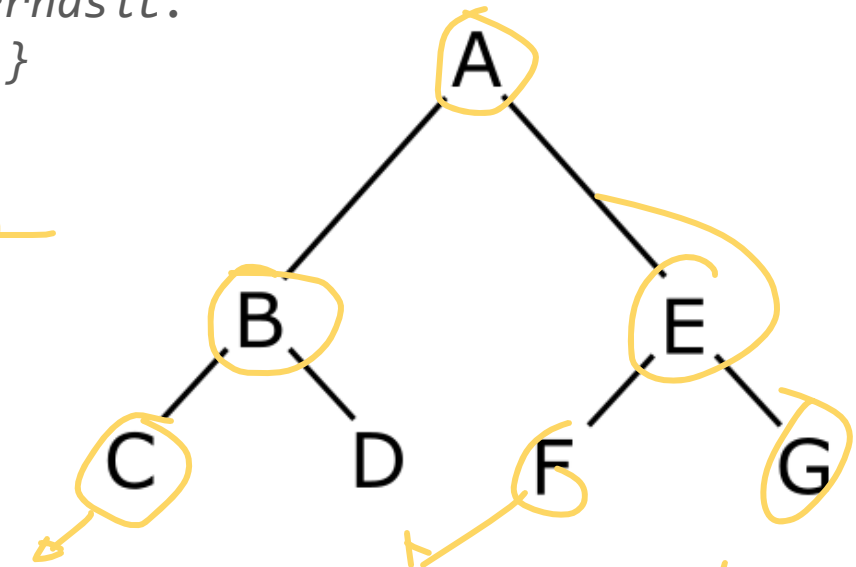
# DelDaunTerkiri

```
procedure delLeft (input/output p: BinTree,
                                output x: ElType)
{ I.S. p tidak kosong }
{ F.S. Daun terkiri p dihapus, nilai daun ditampung di x }
KAMUS LOKAL
  n: Address
ALGORITMA
  if (isOneElmt(p)) then { Basis-1 }
    x ← p↑.info
    n ← p
    p ← NIL
    deallocTreeNode(n)
  else { Rekurens }
    depend on (p)
      isUnerRight(p): delLeft(p↑.right,x)
      else: delLeft(p↑.left,x)
```



# MakeListPreorder

```
function makeListPreorder (p: BinTree) → NodeList
{ Jika p adalah pohon kosong, maka menghasilkan list kosong. }
{ Jika p bukan pohon kosong: menghasilkan list yang elemennya adalah semua elemen
  pohon p dengan urutan Preorder, jika semua alokasi berhasil.
  Menghasilkan list kosong jika ada alokasi yang gagal }
KAMUS LOKAL
  e: AddressList
  l: NodeList
ALGORITMA
  if (isTreeEmpty(p)) then { Basis-0 }
    → NIL
  else { Rekurens }
    e ← newTreeNode(p↑.info)
    if (e ≠ NIL) then
      e↑.next ← makeListPreOrder(p↑.left)
      → concat(e, makeListPreOrder(p↑.right)) {Concat is given}
    else { e gagal dialokasi }
      → NIL
```




Urutan proses = A-B-C-D-E-F-G