

V353

Das Relaxionsverhalten eines RC-Kreises

Tim Modrow

tim.modrow@tu-dortmund.de

Paul Vennemann

paul.vennemann@tu-dortmund.de

Durchführung: 28.11-2023

Abgabe: 4.12.2023

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1 Theorie	3
1.1 allgemeine Relaxationsgleichung und praktisches Beispiel des RC-Kreises .	3
1.2 Relaxations bei periodischer Auslenkung aus Gleichgewichtslage Anhand eines RC-Kreise	3
1.3 Integrationsverhalten des RC-Kreises	4
2 Durchführung	5
2.1 Aufbau	5
2.2 Messreihe zur Entladekurve	5
2.3 Messreihe der Phasenverschiebung und der Spannungsamplitude	6
2.4 Messung zur Verifikation der Integratorfunktion	6
3 Auswertung	6
4 Diskussion	16
4.1 Bestimmung von RC mithilfe der Entladekurve	16
4.2 Bestimmung von RC mithilfe der relativen Amplitude und der Frequenz .	16
4.3 Bestimmung von RC mithilfe der Phasenverschiebung und der Frequenz .	17
4.4 Verifikation der Integratorfunktion des RC-Kreises	17
Literatur	17
5 Anhang	18

1 Theorie

1.1 allgemeine Relaxationsgleichung und praktisches Beispiel des RC-Kreises

Relaxation beschreibt die Effekte welche beim Entfernen eines Systems aus seinem oszillierenden Zustands und seiner anschließenden Rückkehr (ohne Oszillation) in selbigen Zustand zustande kommen. Im allgemeinen gilt dabei

$$\frac{dA}{dt} = c[A(t) - A(\infty)] \quad (1)$$

bzw. nach Integration und Auflösung nach A(t)

$$A(t) = A(\infty) + [A(0) - A(\infty)] \cdot e^{(-ct)} \quad (2)$$

Ein praktisches Beispiel für einen Relaxationsvorgang stellen die Auf- und Entladung eines Kondensators im RC-Kreis dar. Aus dem Zusammenhang

$$U_C = \frac{Q}{C} \quad (3)$$

folgt mit dem Ohmschen Gesetz $I = \frac{U_C}{R}$ und der Ladungsänderung

$$dQ = Idt \quad (4)$$

das $\frac{dQ}{dt} = (-)\frac{1}{RC} \cdot Q(t)$ gilt. Mittels Integration folgt dann unter Berücksichtigung der Randbedingung $Q(\infty) = 0$

$$Q(t) = Q(0) \cdot \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) \quad (5)$$

Die Randbedingung folgt dabei aus der Tatsache das der Kondensator sich asymptotisch gegen 0 nähert für t gegen unendlich. Für die Aufladefunktion des Kondensators bei Verbindung mit einer Spannungsquelle folgt mit ähnlichem Ansatz

$$Q(t) = CU_0\left(1 - \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)\right)$$

Die Größe RC wird als Zeitkonstante τ bezeichnet. Innerhalb eines dieser Zeitkonstanten ändert sich die Ladung um den Faktor $\frac{1}{e} \approx 36,8\%$.

1.2 Relaxations bei periodischer Auslenkung aus Gleichgewichtslage Anhand eines RC-Kreise

In diesem Fall des RC-Kreise wird eine Äußere Spannung mit $U(t) = U_0 \cdot \cos(\omega t)$ betrachtet. Für kleine Frequenzen ω ($\omega < \frac{1}{RC}$) ist die Kondensatorspannung U_c gleich der äußeren Spannung U_0 . Da der Auf- und Entladeprozess jedoch zeitlich durch die Zeitkonstante in seiner Dauer nicht beliebig schnell werden kann, ergibt sich bei steigender Frequenz ein Phasenunterschied zwischen U_0 und U_c . Da desweiteren die Äußere Spannung ein anderes Vorzeichen als die Kondensatorspannung hat, sinkt die Amplitude der Spannung am Kondensator.

Mathematisch kann dieses Problem folgender Weise betrachtet werden:

Als Grundansatz wählt man

$$U_C(t) = A(\omega) \cos(\omega t + \varphi(\omega)) \quad (6)$$

Mit dem zweiten Kirchhoffschen Gesetz ergibt sich

$$U_0 \cos(\omega t) = I(t)R + A(\omega) \cos(\omega t + \varphi(\omega)) \quad (7)$$

Aus 3 und 4 folgt dann

$$I(t) = C \frac{dU_C}{dt} \quad (8)$$

Insgesamt ergibt sich dann durch einsetzen von 8 in 7

$$U_0 \cos(\omega t) = A\omega RC \sin(\omega t + \varphi) + A(\omega) \cos(\omega t + \varphi(\omega)) \quad (9)$$

Aus der Gültigkeit dieser Gleichung lässt sich durch die Auswahl spezieller Werte für t nach einigen Umformungen der Zusammenhang

$$\varphi(\omega) = \arctan(-\omega RC) \quad (10)$$

für die Phasenverschiebung zwischen U_C und U_0 herstellen.

Ebenfalls aus 9 folgt nach Umformung

$$A(\omega) = -\frac{\sin(\varphi)}{\omega RC} \cdot U_0 \quad (11)$$

oder durch Verwendung von 10

$$A(\omega) = \frac{U_0}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \quad (12)$$

als Zusammenhang zwischen der Amplitude von U_C .

Aus 10 lässt sich erkennen, dass die Phasendifferenz für kleine Frequenzen gegen 0 und für hohe Frequenzen gegen $\frac{\pi}{2}$ geht.

Für die Amplitude lässt sich aus 12 leicht erkennen, dass A für kleine Frequenzen gegen U_0 und für große Frequenzen gegen 0 geht.

1.3 Integrationsverhalten des RC-Kreises

Ein RC-Kreis, oder Tiefpass, kann als Integrator dienen, wenn die Bedingung $\omega >> \frac{1}{RC}$ erfüllt ist. Es kann die Proportionalität von U_c zu $\int U(t) dt$ gezeigt werden.

$$U(t) = U_R(t) + U_C(t) = I(t) \cdot R + U_c(t) \quad (13)$$

Mit 8 wird $I(t)$ ersetzt:

$$U(t) = RC \frac{dU_C}{dt} \quad (14)$$

Wegen der Bedingung $\omega >> \frac{1}{RC}$ folgt dann:

$$U_C(t) = \frac{1}{RC} \int_0^t U(t') dt' \quad (15)$$

Theorie entnommen aus [4]

2 Durchführung

2.1 Aufbau

Im Versuch ist ein Spannungsgenerator gegeben, der für die erste Messreihe nur über einen Tiefpass mit einem Oszilloskop verbunden ist, zu sehen in Abbildung 1. Für die Aufnahme der zweiten Messreihe und zur Bestätigung der Integratorfunktion wird auch noch eine direkte Verbindung zwischen dem Spannungsgenerator und dem Oszilloskop eingeführt, zu sehen in Abbildung 2.

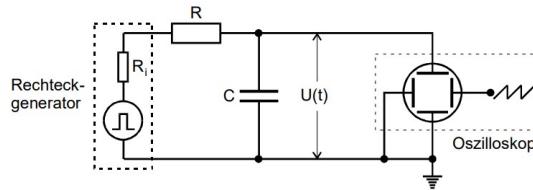


Abbildung 1: Aufbau für die erste Messreihe [4]

2.2 Messreihe zur Entladekurve

In der ersten messreihe werden Wertepaare der Spannung U_c und der Zeit t von der auf dem oszilloskop dargestellten Entladekurve abgelesen. Die Frequenz bleibt dabei konstant auf 77.2Hz.

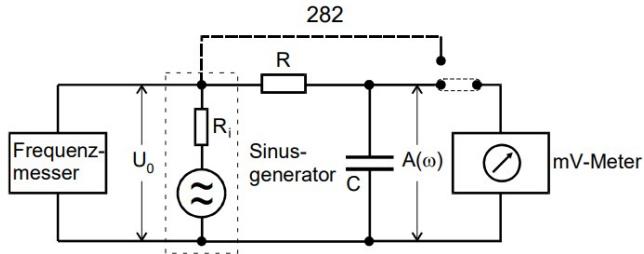


Abbildung 2: Aufbau für die zweite Messreihe [4]

2.3 Messreihe der Phasenverschiebung und der Spannungsamplitude

In der zweiten Messreihe werden die Werte für die Phasenverschiebung zwischen der Generator- und der Kondensatorspannung und die Spannungsamplitude der Kondensatorspannung bei einer variierenden Frequenz F von den auf dem Oszilloskop dargestellten Kurven abgelesen. Die Messung wurde bei $F = 22000\text{Hz}$ aus technischen Gründen vorzeitig abgebrochen. Gleichzeitig wird die Generatorenspannungsamplitude abgelesen um zu versichern dass diese konstant bleibt.

2.4 Messung zur Verifikation der Integratorfunktion

Nun werden verschiedene Spannungsformen vom Spannungsgenerator erzeugt, die generierte Spannung wird gemeinsam mit der durch den Tiefpass integrierten Spannung auf dem Oszilloskop angezeigt, die angezeigten Bilder werden Fotografiert. Es werden die Spannungen für eine Sinus- eine Dreieck- und eine Rechteckspannung fotografiert.

3 Auswertung

Die aus der auf dem Oszillator angezeigten Entladekurve entnommenen Messwerte werden in 1 dargestellt.

Nun wird in Abbildung 3 eine Fit-funktion mit polyfit [1] erstellt, gefittet wird eine Funktion der gestalt:

$$\log \frac{U_c}{U_0} = a \cdot t + b$$

Die Parameter ergeben sich zu:

$$a = -561.333 \pm 11.666$$

Tabelle 1: Messwerte zur Entladekurve

$t / \text{s} \cdot 10^{-3} [\pm 0.2]$	$U_c / \text{V} [\pm 0.4]$
0	13,6
0,4	11
0,6	10
0,8	9,2
1,0	8,4
1,2	7,6
1,4	6,8
1,6	5,0
2,5	4,0
3,0	3,0
3,7	2,0
4,0	1,6
4,4	1,2
4,8	1,0
5,0	0,9
5,2	0,8
6,0	0,4
6,4	0

$$b = 1.389 \pm 0.038$$

Um die Parameterberechnung und das plotten zu ermöglichen wurde der letzte Messwert aus der Tabelle ignoriert.

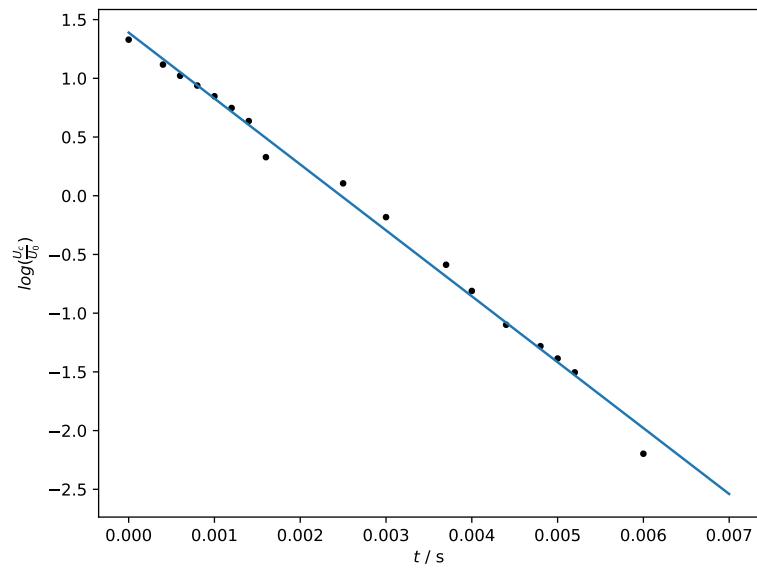


Abbildung 3: Lineare Regression zur Bestimmung der Zeitkonstante mithilfe der Entladungskurve

Da $a = -\frac{1}{RC}$, ist $RC = 0.00178 \pm 0.00004$.

Eine weitere Methode die zeitkonstante RC zu bestimmen kann ausgeführt werden durch die Messung von der Amplitude unter variierender Frequenz der Wechselspannung. Die Messwerte sind in Tabelle 2 aufgeführt.

Tabelle 2: Messwerte zur Amplitude und Frequenz

		A / V	F / Hz[±1]
6,8	±	0,4	50
4,8	±	0,4	100
1,2	±	0,4	500
0,6	±	0,2	1000
0,2	±	0,04	3000
0,12	±	0,04	5000
0,08	±	0,04	7000
0,06	±	0,02	10 000
0,05	±	0,02	12 000
0,04	±	0,01	15 000
0,035	±	0,01	17 000
0,034	±	0,004	19 000
0,032	±	0,004	20 000
0,03	±	0,002	22 000

Anhand der Messwerte wird eine Ausgleichsfunktion der Gestalt:

$$U_c = \frac{1}{\sqrt{(1+(F \cdot 2\pi) \cdot a^2)}} \text{ siehe 12}$$

mit curve-fit [5] erstellt. U_c ist dabei die Realteilamplitude A/U_0

Die Parameter ergeben sich zu:

$$a = 0.00155 \pm 0.00007$$

Mit 12 gilt also $RC = 0.00155 \pm 0.00007$

Zum Zweck des Vergleichens wurde dieselbe Funktion noch einmal mit $RC = 0.00178$ geplottet. Der Graph ist zu sehen in Abbildung 4.

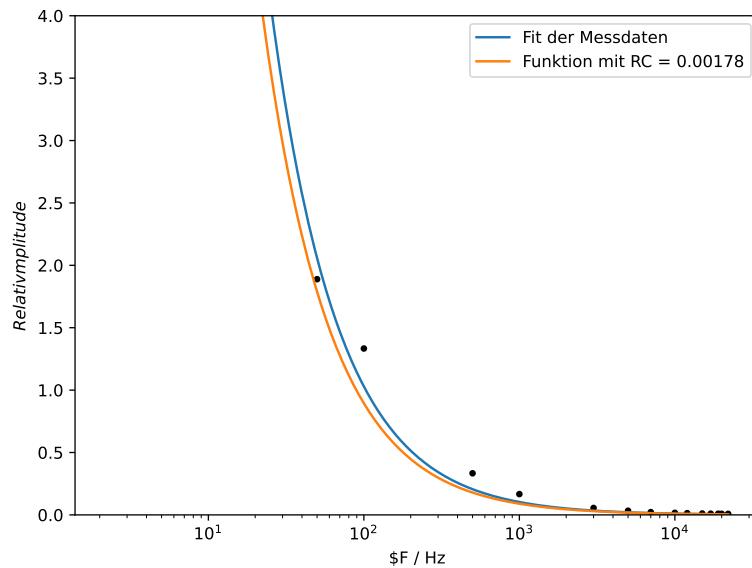


Abbildung 4: Fit der Messwerte der Relativamplitude und Frequenz im vergleich mit Graphen mit $RC = 0.00178$

Für eine dritte Variante der Berechnung von RC wird der Phasenunterschied zwischen der Generatorenspannung und der Kondensatorspannung abhängig von der Frequenz gemessen. Die Messergebnisse finden sich in Tabelle 3.

Tabelle 3: Messwerte zur Phasenverschiebung und Frequenz

	φ / rad	$F / \text{Hz}[\pm 1]$
3,77	$\pm 0,15$	50
2,2	$\pm 0,13$	100
1,6	$\pm 0,6$	500
1,3	$\pm 0,6$	1000
1,9	$\pm 0,8$	3000
1,9	$\pm 0,6$	5000
1,5	$\pm 0,4$	7000
1,9	$\pm 0,6$	10 000
1,5	$\pm 0,8$	12 000
1,9	$\pm 0,9$	15 000
1,7	$\pm 0,4$	17 000
1,4	$\pm 0,5$	19 000
1,5	$\pm 0,5$	20 000
1,38	$\pm 0,28$	22 000

Im folgenden Plot 5 werden die Messergebnisse dargestellt, zum vergleich sind auch die Kurven der eigentlich erwarteten arctan Funktion 10 mit den beiden vorher errechneten RC werten abgebildet.

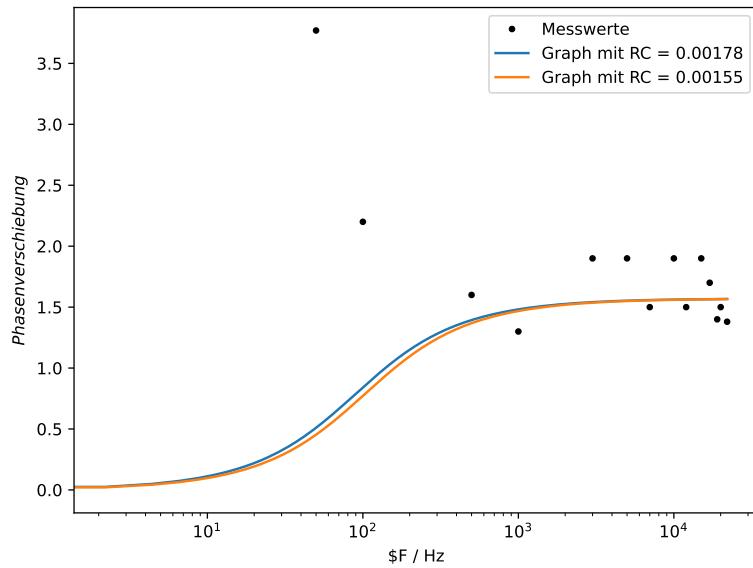


Abbildung 5: Messwerte im Vergleich mit erwarteter Funktion

Nun werden die Messwerte für die relative Amplitude $A_{(\omega)}/U_0$ abhängig von der Phase dargestellt in einem Polarplot. Zum Vergleich wird ausserdem die eigentliche Funktion geplottet, die die gestalt $A/U_0 = \frac{\sin(\varphi)}{\tan(\varphi)}$ hat.

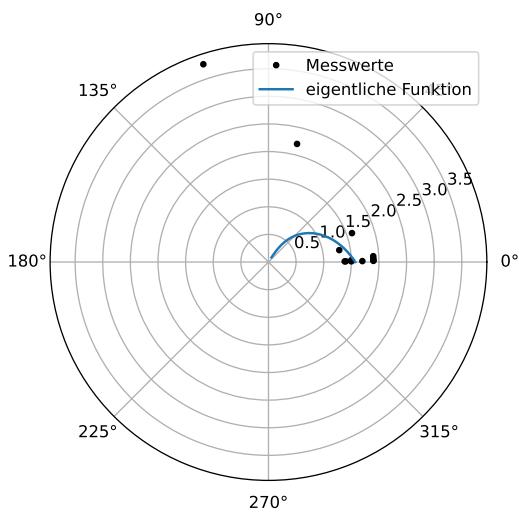


Abbildung 6: Polarplot der relativen Amplitude abhängig von der Phasenverschiebung

Zur Verifikation der Integratorfunktion werden nun 3 Abbildungen 7, 8 und 9 gezeigt, die jeweils eine generierte Spannung gemeinsam mit der vom Tiefpass integrierten Spannung abbilden.

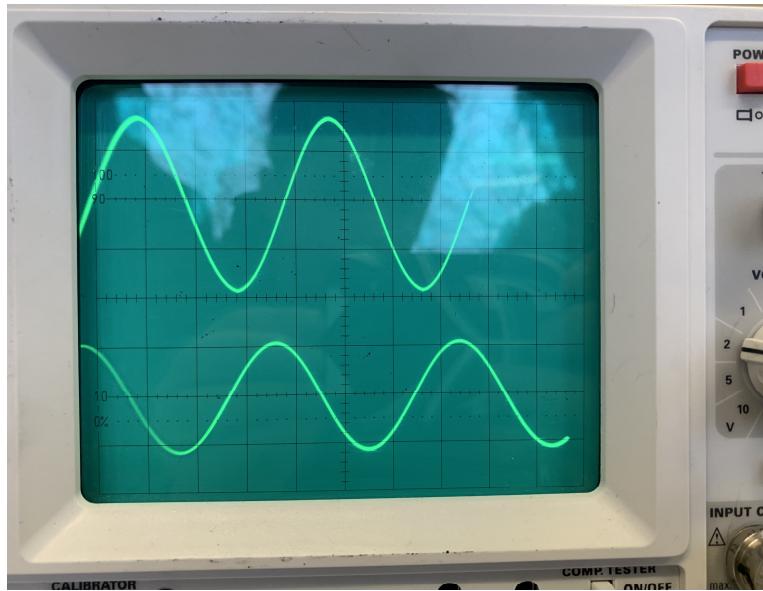


Abbildung 7: Sinusspannung Integriert

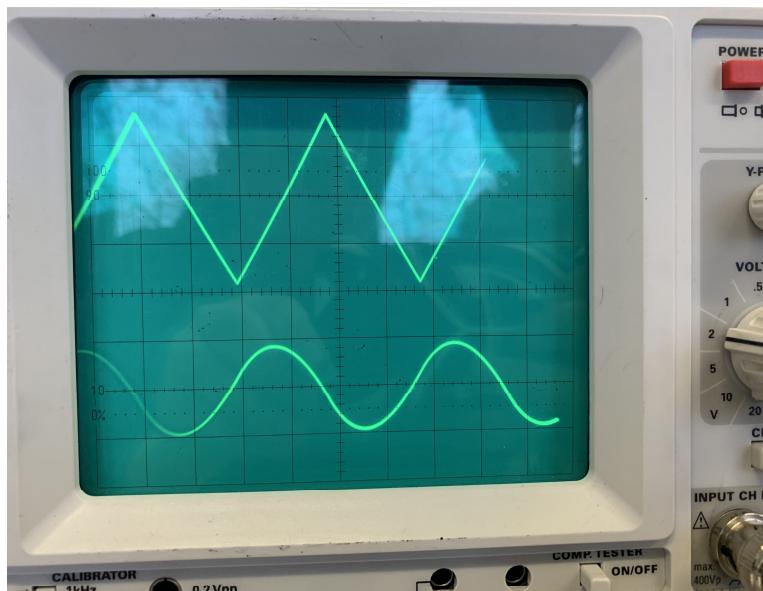


Abbildung 8: Dreiecksspannung Integriert

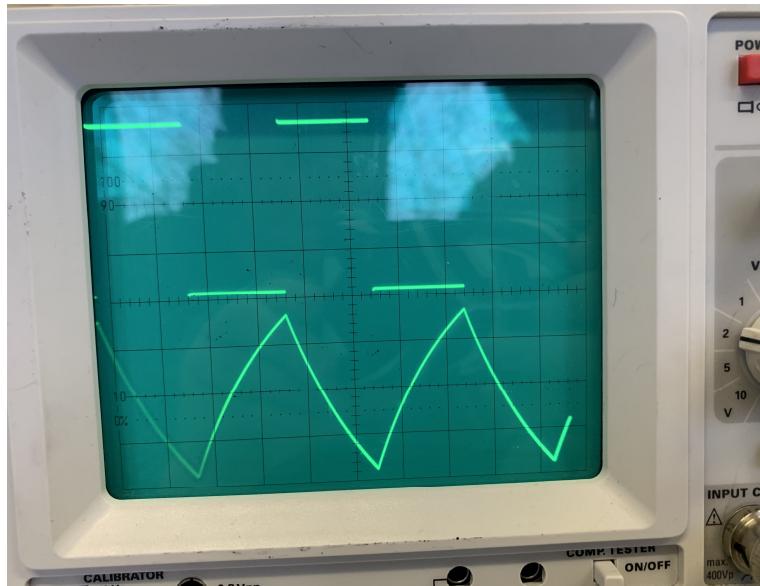


Abbildung 9: Rechtecksspannung Integriert

4 Diskussion

4.1 Bestimmung von RC mithilfe der Entladekurve

Die Messwerte die aus der Entladekurve abgelesen wurden, haben einen relativ kleinen Fehler, da dieser über die ganze Messung gleich bleibt, fällt er bei den niedrigeren Werten stärker ins Gewicht. Die Messwerte unterliegen aufgrund des Ablesens von Hand und mit Augenmaß einer natürlichen Ungenauigkeit. Im Graphen der Messwerte ist zu erkennen, dass sie jedoch ziemlich nah an der Trendlinie liegen. Aus den sich aus dem aus dem Fit ergebenden Parametern lässt sich problemlos die Zeitkonstante $RC = 0.00178 \pm 0.00004$ bestimmen.

4.2 Bestimmung von RC mithilfe der relativen Amplitude und der Frequenz

Auch bei dieser Messreihe ließ sich problemlos $RC = 0.00155 \pm 0.00007$ bestimmen, auch wenn die Messwerte hier einer erhöhten Unsicherheit unterliegen, da dass Ablesen am Gerät durch immer kleinere Werte schwieriger und ungenauer wurde. Aus dem Fit ließ sich problemlos der RC-wert bestimmen, auch wenn die Kurve die Messwerte nur mit weniger guter Genauigkeit approximiert. Im Vergleich mit dem Graphen derselben Funktion aber mit dem vorher errechneten $RC = 0.00178 \pm 0.00004$ lässt sich erkennen dass es im Grunde keine Abweichung zwischen den beiden Kurven gibt die sich nicht durch einfache Messfehler und ungenauigkeiten erklären ließe. Eine fehlerquelle könnte außerdem sein, dass der Innenwiderstand nicht mit eingerechnet wurde, dieser könnte die Amplitude beeinflussen.

4.3 Bestimmung von RC mithilfe der Phasenverschiebung und der Frequenz

Die Messwerte der Phasenverschiebung abhängig von der Frequenz haben sehr große Fehler, ausserdem entsprechen sie im geplotteten Graphen nicht dem erwarteten Verlauf von 10 und 11, die ersten beiden Messwerte sind sehr weit von dem Graphen der Funktion entfernt und haben auch ein gegensätzliches Verhalten, die anderen messwerte sind so ungenau und verstreut, dass insgesamt eine RC-berechnung hier nicht möglich war, mögliche Gründe für die starken Abweichungen und das fehlerhafte Verhalten könnten die extrem ungenauen Ablesemethoden sein. Das ablesen auf dem Oszilloskop war extrem schwierig, aufgrund der kleinen Werte und den wechselnden skalen, außerdem haben sich die Kurven mit der Zeit ab und zu verschoben, und das genaue Ablesen wurde dadurch erschwert. Andere schwierigkeiten waren technischer Natur, so ging das Oszilloskop mehrfach einfach aus, oder die Kurven sprangen hin und her, nach einer gewissen Zeit, und bei hohen frequenzen hat das Oszilloskop überhaupt nichts mehr angezeigt beziehungsweise nur sporadische anscheinend zufällige Kurven. Ein weiterer Grund könnte sein, dass vor allem im Bereich großer Frequenzen gemessen wurde, bei denen die skalen nicht mehr ausgereicht haben um genaue Ergebnisse abzulesen. Es wäre auch möglich, dass die ersten messwerte nicht von Extremum zu Extremum abgelesen wurden, das könnte eine hohe Abweichung hervorrufen.

4.4 Verifikation der Integratorfunktion des RC-Kreises

Da die Werte der Phasenverschiebung so unzuverlässig und nahezu nicht zu gebrauchen sind, ist auch auf dem polarplot nichts verwertbares erkennbar, im Vergleich mit dem dargestellten Graphen lässt sich kaum übereinstimmung erkennen. Die am Oszilloskop aufgenommenen Bilder zeigen allerdings relativ eindeutig dass die eingegebene Spannung vom Tiefpass integriert wird.

Literatur

- [1] Charles R. Harris u. a. „Array programming with NumPy“. In: *Nature* 585.7825 (Sep. 2020), S. 357–362. DOI: 10.1038/s41586-020-2649-2. URL: <https://doi.org/10.1038/s41586-020-2649-2>.
- [2] John D. Hunter. „Matplotlib: A 2D Graphics Environment“. Version 1.4.3. In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 90–95. DOI: 10.1109/MCSE.2007.55. URL: <http://matplotlib.org/>. Current version 3.7.2, DOI: 10.5281/zenodo.8118151.
- [3] Eric O. Lebigot. *Uncertainties: a Python package for calculations with uncertainties*. Version 3.1.7. URL: <http://pythonhosted.org/uncertainties/>.
- [4] *V353 Relaxionsverhalten eines RC-Kreises*. TU Dortmund. 2023.
- [5] Pauli Virtanen u. a. „SciPy 1.0: Fundamental Algorithms for Scientific Computing in Python“. In: *Nature Methods* 17 (2020), S. 261–272. DOI: 10.1038/s41592-019-0686-2.

Die verwendeten plots wurden mithilfe von matplotlib [2] erstellt, die berechnungen wurden mit Python-numpy [1], Python-Scipy [5] und die fehlerrechnung wurde mit Python-uncertainties [3] gemacht.

5 Anhang

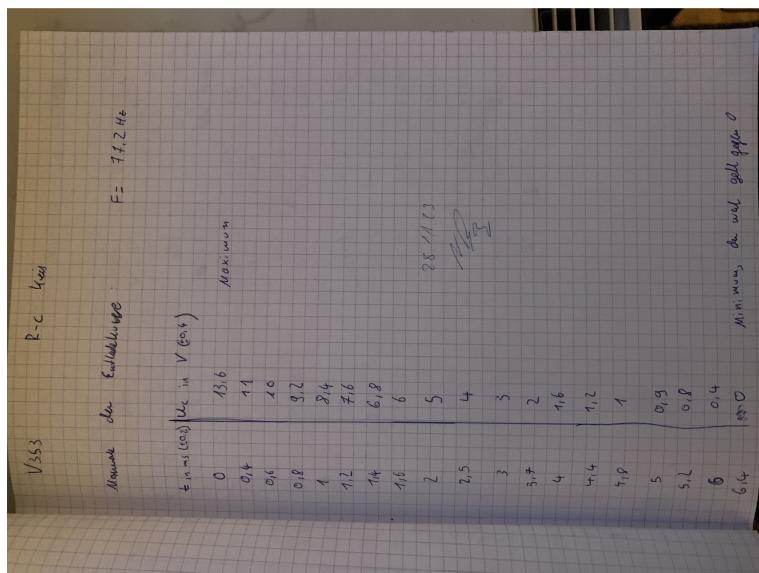


Abbildung 10: Original Messwerte Seite 1

Messwert	ω_0	b)	$a \omega$	$c)$	Amplitude in V	Frequency in Hz (Hz^{-1})	U_{ref} (V)	Δf in Hz Spannungs Spannung	U_{ref} (V)
0,14					6,0	5,0	12,4 ($\pm 0,9$)	3,6	12,4 ($\pm 0,9$)
0,12					5,00	1,00	0,5 ($\pm 0,1$)	3,6	
0,10					1,00	1,00	3,5	3,6	
0,16					1,000	1,000	0,2	3,6	
0,12					3,000	0,4	2,956	3,6	
0,12					5,000	0,40	2,956	3,6	
0,10					7,000	0,40	2,956	3,6	
0,06					1,0000	1,0000	3,5	$\pm 0,035$	
0,05					1,2000	0,402	2,956	3,6	
0,04					1,5000	0,402	2,956	3,6	
0,035					1,7000	0,406	2,956	3,6	
0,034					1,8000	0,406	2,956	3,6	
0,032					2,0000	0,402	2,956	3,6	
0,03					2,2000	0,401	2,956	3,6	

Abbildung 11: Original Messwerte Seite 2