CONTINUITA'

Svolgendo molte azioni quotidiane ci accorgiamo che a piccole sollecitazioni corrispondono piccole risposte: se guidando l'auto, freniamo improvvisamente, la frenata sarà tanto più dolce quanto meno premiamo il freno e sarà molto brusca se schiacciamo molto il freno. Se, eseguendo una pesata di farina per fare una torta, aggiungiamo poca farina ad una quantità di farina già presente sulla bilancia, la variazione di massa sarà molto piccola e via dicendo. La nozione di continuità per una funzione è legata proprio a questa consequenzialità causa-effetto: se la x varia di poco, ci aspettiamo che anche le corrispondenti y abbiano piccole variazioni!
Ciò non sempre accade. Basta osservare il comportamento della funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 2 \\ 2500, & x = 2 \end{cases}$$

è chiaro che in $x = 2 - 10^{-9}$ la funzione f valga 1 mentre in 2 f vale 2500!
Formalizziamo con la tecnica epsilon-delta quanto abbiamo detto sopra:
diciamo che $f: D \subseteq R \to R$ è continua in $x_0 \in D$ se:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \; \delta = \delta(\varepsilon; x_0), \delta > 0: se\ x \in U_\delta(x_0) \cap D, f(x) \in U_\varepsilon\big(f(x_0)\big)$$

cioè:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \; \delta = \delta(\varepsilon; x_0), \delta > 0: se\ x \in D, |x - x_0| < \delta\, , allora\ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Se una funzione è continua in tutti i punti di un insieme A diciamo che è continua in A o che è di classe C ^{0} su A, $f(x) \in C^0(A)$.
Osserviamo che:
1) la continuità è un fatto LOCALE: una funzione è continua in un certo punto del suo dominio e, magari, discontinua, in un atro punto del suo dominio.
2) la frase "la funzione f è continua" non ha senso: la continuità NON è una proprietà della funzione ma una proprietà che la funzione ha oppure no solo in relazione al luogo in cui essa viene considerata. Con abuso di linguaggio si dirà "f è continua" sottintendendo "continua nel suo dominio".
3) la definizione di continuità differisce in modo quasi impercettibile ma sostanziale dalla definizione di limite, infatti:

i) la definizione di limite, a differenza di quella di continuità, non si preoccupa di ciò che accade nel punto x_0:

$\lim_{x \to x_0} f(x), f: D \subseteq R \to R, x_0\ punto\ di\ accumulazione\ per\ D$, significa che

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \; \delta = \delta(\varepsilon; x_0), \delta > 0: se\ x \in \boldsymbol{U_\delta(x_0)} \cap \boldsymbol{D} - \{\boldsymbol{x_0}\}, f(x) \in U_\varepsilon(l)$$

e equivalentemente :

$$se\ \ preso\ un\ intorno\ V\ di\ l\ \ esiste\ un\ intorno\ U\ di\ x_0 tale\ che\ f(U \cap D - \{x_0\}) \subseteq V$$

e si specifica proprio che $x \in \boldsymbol{U_\delta(x_0)} \cap \boldsymbol{D} - \{\boldsymbol{x_0}\}$.

ii) nella definizione di limite richiediamo che x_0 sia punto di accumulazione per D. Se così non fosse, $U_\delta(x_0) \cap D - \{x_0\}$ potrebbe risultare vuoto.

Il secondo punto costituisce un nodo cruciale per esaminare la definizione di continuità, infatti noi studiamo funzioni definite su sottoinsiemi D di R, cioè da insiemi di punti che sono di accumulazione per D oppure che sono isolati di D.

Nei punti isolati di D, la definizione di continuità è sicuramente è verificata:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists\ \delta = \delta(\varepsilon; x_0), \delta > 0: se\ x \in U_\delta(x_0) \cap D, f(x) \in U_\varepsilon\big(f(x_0)\big)$$
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists\ \delta = \delta(\varepsilon; x_0), \delta > 0: |x_0 - x_0| = 0 < \delta\ , allora\ |f(x_0) - f(x_0)| = 0 < \varepsilon$$
che sicuramente è verificata.

Se, invece, x_0 non è un punto isolato di D, allora è un suo punto di accumulazione per D e in tale punto la definizione di continuità presenta stretti legami con la definizione di limite:
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists\ \delta = \delta(\varepsilon; x_0), \delta > 0: se\ x \in D, |x - x_0| < \delta\ , allora\ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$
implica che
$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = l_- = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = l_+ = f(x_0).$$
La continuità risponde, quindi, alla domanda che, a un primo studio dei limiti, ci si può porre: se per calcolare un limite basta sostituire il valore di x nell'espressione di f, perché è necessario dare definizioni di limite così complicate e contorte? La risposta ora è semplice: i limiti per le funzioni continue hanno valori finiti e assumono proprio il valore di *f* nel punto al quale tendiamo calcolando il limite.
Infatti dire che *f* è continua in $x = x_0$ significa dire tre cose:

$$1)\ \lim_{x \to x_0^-} f(x) = l_-\quad esiste\ finito$$

$$2)\ \lim_{x \to x_0^+} f(x) = l_+\ \ esiste\ finito$$
$$3)\ l_- = l_+ = f(x_0)$$

La verifica della continuità di una funzione comporta, come per la verifica della definizione di limite, di saper operare con la tecnica epsilon-delta:

$$f(x) = mx + q, \qquad f: R \to R$$
è continua in ogni $x_0 \in R$:

$$se\ |x - x_0| < \delta = \frac{\varepsilon}{|m|}, |mx + q - (mx_0 + q)| = |m| \cdot |x - x_0| < \varepsilon$$

Se una funzione non è continua in un punto $x=x_0$ del suo dominio, diciamo che in tale punto è DISCONTINUA. Le discontinuità sono classificate in base al salto che si osserva passando dalla sinistra alla destra del punto. Il salto, definito come $S = |l_+ - l_-|$, può assumere solo tre tipi di valori:

S è nullo ***S è finito, non nullo*** ***S è infinito***

Si hanno, quindi, discontinuità di tre specie:

Discontinuità di prima specie in $x_0 \in D$:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = l_-\ esiste\ finito$$

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = l_+\ esiste\ finito$$

$$l_- \neq l_+$$

Discontinuità di seconda specie in $x_0 \in D$

Uno dei due limiti $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = l_-$, $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = l_+$ non esiste o è infinito

Discontinuità di terza specie in $x_0 \in D$

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = l_-\ esiste\ finito$$

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = l_+\ esiste\ finito$$

$$l_- = l_+ \neq f(x_0)$$

Esempi

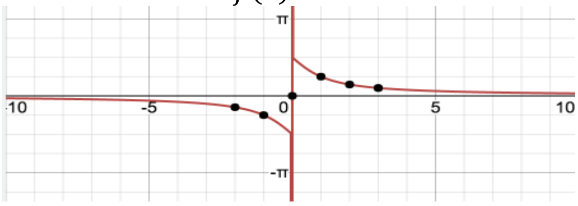
$$f(x) = \begin{cases} arctg\left(\frac{1}{x}\right), x \neq 0 \\ 0, \qquad\qquad x = 0 \end{cases}$$

<u>presenta una discontinuità di prima specie in x=0, infatti:</u>

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = arctg\left(\frac{1}{0^+}\right) = arctg(+\infty) = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = arctg\left(\frac{1}{0^-}\right) = arctg(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$$

$$f(0) = 0$$



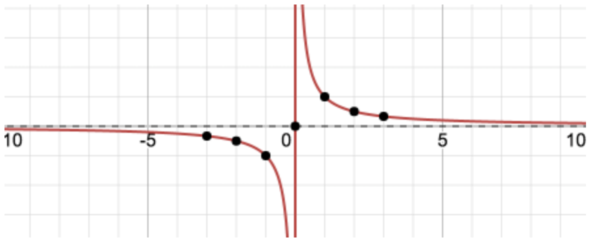
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, \qquad x \neq 0 \\ 0, \qquad x = 0 \end{cases}$$

<u>presenta una discontinuità di seconda specie in x=0, infatti:</u>

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \left(\frac{1}{0^+}\right) = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \left(\frac{1}{0^-}\right) = -\infty$$

$$f(0) = 0$$



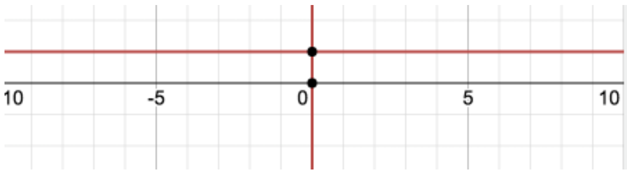
$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x}, \qquad x \neq 0 \\ 0, \qquad x = 0 \end{cases}$$

<u>presenta una discontinuità di prima specie in x=0, infatti:</u>

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 1$$

$$f(0) = 0$$



Osserviamo che non ha alcun senso chiedersi se, ad esempio, $f(x) = \frac{1}{x}$ sia continua in x=0… Il punto x=0 è un punto di accumulazione per il dominio di D di questa funzione, ma non vi appartiene. Non è , quindi, proprio possibile dire nulla circa la continuità o la non continuità di f in questo punto la funzione non esiste e non è possibile fare affermazioni circa presunte proprietà di f in x=0.

Con abuso di linguaggio però, si sente spesso dire che questa funzione è discontinua in x=0.

Come è possibile conciliare la teoria delle funzioni continue con i punti di accumulazione di D non appartenenti a D?

Possiamo operare in questo modo:

$$f: D \subset R \to R, D\ sottoinsieme\ prorpio\ di\ R, D \neq \{\ \}$$

sia $x_0 \notin D, x_0 di\ accumulazione\ per\ D$.

Considero la chiusura di D:

$$\overline{D} = D \cup \{x_0\}$$

e definisco la nuova funzione:

$$\tilde{f}(x): \overline{D} \to R$$

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq x_0 \\ \lambda, & x = x_0 \end{cases} \quad \lambda \in R$$

questa funzione può presentare, tutti e tre i casi di discontinuità visti sopra:

i) se $\tilde{f}$ risulta avere una discontinuità di prima specie per ogni valore di $\lambda \in R$, per estensione diciamo che anche f ha una discontinuità di prima specie in x_0

ii) se $\tilde{f}$ risulta avere una discontinuità di seconda specie per ogni valore di $\lambda \in R$, per estensione diciamo che anche f ha una discontinuità di seconda specie in x_0
iii) se esiste un valore di $\lambda \in R$ per cui la funzione $\tilde{f}$ è continua, per estensione diciamo che f ha in tale punto una discontinuità di terza specie.

Esempi
1) Consideriamo $f: R - \{0\} \to R$, $f(x) = arctg\left(\frac{1}{x}\right)$. Il punto x=0 è di accumulazione per $D = R - \{0\}$ ma $0 \notin D$. Possiamo costruire la chiusura di D, cioè l'insieme $\overline{D} = D \cup \{0\}$ e su tale insieme definire la funzione

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} arctg\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ \lambda, & x = 0 \end{cases} \quad \lambda \in R$$

<u>presenta una discontinuità di prima specie in x=0, per qualsiasi valore di $\lambda \in R$, infatti:</u>

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = arctg\left(\frac{1}{0^+}\right) = arctg(+\infty) = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = arctg\left(\frac{1}{0^-}\right) = arctg(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$$

$$f(0) = \lambda$$

2) Consideriamo $f: R - \{0\} \to R$, $f(x) = \frac{1}{x}$. Il punto x=0 è di accumulazione per $D = R - \{0\}$ ma $0 \notin D$. Possiamo costruire la chiusura di D, cioè l'insieme $\overline{D} = D \cup \{0\}$ e su tale insieme definire la funzione

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ \lambda, & x = 0 \end{cases} \quad \lambda \in R$$

<u>presenta una discontinuità di seconda specie in x=0, per qualsiasi valore di $\lambda \in R$, infatti:</u>

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \left(\frac{1}{0^+}\right) = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \left(\frac{1}{0^-}\right) = -\infty$$
$$f(0) = 0$$

3) Consideriamo $f: R - \{0\} \to R,\ f(x) = \frac{x}{x}$. Il punto x=0 è di accumulazione per $D = R - \{0\}$ ma $0 \notin D$. Possiamo costruire la chiusura di D, cioè l'insieme $\overline{D} = D \cup \{0\}$ e su tale insieme definire la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x}, & x \neq 0 \\ \lambda, & x = 0 \end{cases} \qquad \lambda \in R$$

<u>risulta continua in x=0 se $\lambda = 1$ e presenta, quindi, una discontinuità eliminabile in tale punto:</u>

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = 1$$
$$f(0) = \lambda$$
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = 1 = \lambda \ sse\ \lambda = 1$$

Esempi di funzioni definiti in punti isolati del dominio:
1) Si consideri

$$f: (-\infty; -1) \cup \{0\} \cup (1; +\infty) \to R$$

definita da

$$f(x) = \begin{cases} x, & se\ x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty) \\ 3, & se \qquad x = 0 \end{cases}$$

risulta continua anche nel suo punto isolato x=0.

2) La funzione $f(x) = \sqrt{x^4 - x^2}$ ha dominio naturale

$$D = \{x \in R: x^4 - x^2 \geq 0\}$$

Risulta $D = (-\infty; -1] \cup \{0\} \cup [1; +\infty)$ e f è continua in x=0, punto isolato del suo dominio.

3) La funzione $f(x) = \sqrt{\ln|cos\pi x|}$ ha dominio naturale

$$D = \{x \in R: |cos\pi x| \geq 1\} = \{x \in R: \pi x = k\pi, k \in Z\} = Z.$$

Ne segue che tutti i punti del dominio di f sono punti isolati ed f risulta continua su D.

Dopo aver studiato continuità e discontinuità, possiamo chiederci quali sono le funzioni continue. La risposta è semplice: tutte le funzioni elementari, dove esistono. Si potrebbe, quindi, pensare che la definizione di continuità sia inutile… ma non è così, infatti esistono, come visto, funzioni che presentano discontinuità di prima, seconda e terza specie e funzioni che, addirittura, risultano discontinue in tutti i punti del loro dominio come la funzione di Dirichlet:

$$f(x)=\begin{cases}0, se\ x\in R-Q\\ 1, \quad\quad se\ x\in Q\end{cases}$$

Il grafico di questa funzione apparirebbe come due rette orizzontali y=0 e y=1, "sbiadite" perché private di infiniti punti…

In generale, componendo due o più funzioni continue sui rispettivi domini, si ottiene una funzione continua sul dominio della funzione composta:

siano $g: D_g \subseteq R \to R$, $f: D_f \subseteq R \to R$ allora preso un valor c tale che $c \in D_f, f(c) \in D_g$, in cui f e g risultano continue, si ha:

$$\lim_{x\to c} g\big(f(x)\big) = g\left(\lim_{x\to c} f(x)\right) = g\big(f(c)\big)$$

e quindi si ha la continuità di $g \circ f$ nel punto *x=c*.

In questo teorema non basta che esiste il $\lim_{x\to c} f(x)$, la funzione deve proprio essere continua. Osserviamo, infatti il seguente controesempio:

$$g: R \to R, \qquad g(x) = 0\ \forall x \in R,\ \ f: R \to R,\ \ f(x) = \begin{cases}0, se\ x \neq 0\\ 1, se\ x = 0\end{cases}$$

Per ogni x si ha:

$$\lim_{x\to c} g(x) = 0$$

e in particolare

$$\lim_{x\to 0} g(x) = 0$$

ma

$$\lim_{x\to 0} f\big(g(x)\big) = f\left(\lim_{x\to 0} g(x)\right) = f(0) = 1$$

mentre

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$$

In sostanza, se esiste finito in limite per $x \to 0$ di f ma f non è continua in *x=0* (ha una discontinuità di prima specie), il teorema di composizione delle funzioni continue non è più valido nel punto *x=0*.

È, poi, interessante osservare che la composizione di due funzioni che presentano delle discontinuità nel loro dominio, può portare a funzioni continue:

$$g: R \to R, \qquad g(x) = \begin{cases}0, & x \neq 0\\ -1, & x = 0\end{cases}$$

presenta una discontinuità di prima specie in *x=0* mentre $f(x) = |g(x)|$ risulta continua su tutto *R*.

Esercizi vari sulla continuità:

1)Classifica i punti di discontinuità delle seguenti funzioni:

$$f(x) = arctg\frac{1}{\sqrt[3]{x}} \qquad g(x) = \frac{|4-x|}{16x-x^3} \qquad f(x) = arctg\frac{1}{x^2} \qquad f(x) = \frac{x}{e^{\frac{1}{x}}+1}$$

$$f(x) = \sqrt{sin\frac{2x}{\pi}-1} \qquad f(x) = \frac{|x-\sqrt{5}|}{5-x^2} \qquad f(x) = \left|arctg\left(\frac{1}{x}\right)\right|, \qquad f(x) = \frac{|x^2-1|}{x^2-x}$$

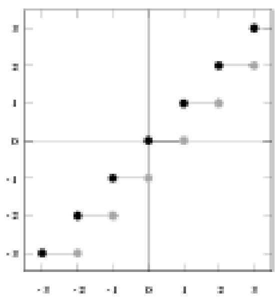
2)Si consideri la funzione f così definita:

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in Z \\ -x, & x \in R-Z \end{cases}$$

Discutere la continuità di y=f(x) e di y=|f(x)|.

3)Si consideri la funzione f così definita: $f(x) = \begin{cases} -x^2, & x \in Z \\ x^2, & x \in R-Z \end{cases}$. Discutere la continuità di y=f(x) e di y=|f(x)|.

4)Si consideri la funzione y=floor(x), che fornisce la parte intera di un numero.
Il grafico è riportato in figura:



Sia *n* un numero intero. Si calcolino

$$\lim_{x\to n^+} floor(x) \qquad\qquad \lim_{x\to n^-} floor(x)$$

e si discuta il tipo di discontinuità della funzione in tali punti.

5)Determinare a, b reali in modo che la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \log(1+x) & ,-1 \le x < 0 \\ asinx + bcosx & ,0 < x < \frac{\pi}{2} \\ x & ,x \ge \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

sia continua sul suo dominio.

6) tracciare un grafico qualitativo della funzione e classificarne le discontinuità:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+1}, & x < 0, x \neq -1 \\ 0, & x \in \{-1; 0; +1\} \\ \frac{1}{x-1}, & x > 0, x \neq 1 \end{cases}$$

7) Determinare $a, b, c \in R^+$ in modo che la funzione

$$g(x) = \left(\frac{x^2 - ax}{x^2 - c}\right) b$$

presenti una discontinuità di terza specie in x=2, una discontinuità di seconda specie in x=2 e che

$$\lim_{x \to 2^\pm} g(x) = 7$$

Classifica le discontinuità in x=0 delle funzioni:

$$f(x) = arctgx + arctg\frac{1}{x}$$
$$g(x) = |f(x)|$$

7)La funzione signum è così definita: $sgn(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x}, x \neq 0 \\ 0, x = 0 \end{cases}$

La funzione di Heaviside viene definita tramite la funzione signum in questo modo:

$$H(x) = \frac{1}{2}(1 + sgn(x))$$

Si rappresentino i grafici della funzione signum e della funzione di Heaviside e se ne studino le discontinuità in x=0.

8) Per quali valori di A e B la funzione

$$g(x) = \begin{cases} 3e^x - B, & x \in (-\infty, 0) \\ Acosx, & x \in [0, \pi] \\ x^2 - B\pi x + \pi^2 - 1, & x \in (\pi, +\infty) \end{cases}$$

è continua su tutto R?

9)Stabilire per quali valori di a, b reali le seguenti funzioni $f: R \to R$ risultano continue su R:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 3bx - 1, se\ x < 0 \\ 2bx - 5a + 4, se\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} ax^2 - bx + 9, se\ x < 2 \\ a - bx, se\ 2 < x \leq 4 \\ bx^2 - a + 14, se\ x > 4 \end{cases}$$

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{10}{\pi} arctg\left(\frac{1}{x}\right), se\ x < 0 \\ 3b + 1 - x, se\ 0 < x \leq 2 \\ \ln|e^2 - sin\pi x|, se\ x > 2 \end{cases}$$

10) si consideri la seguente funzione $f: R \to R$:

$$f(x) = \begin{cases} x - 1, & se\ x < 1 \\ lnx, & se\ 1 \leq x \leq e^2 \\ \frac{2e^2}{x}, & se\ x > e^2 \end{cases}$$

a) verificare che si tratta di una funzione continua su R.

b) tracciare un grafico qualitativo di f e discutere il numero di soluzioni dell'equazione f(x)=k, al variare del parametro reale k.
c) determinare l'immagine dell'intervallo $[0; 2e^2]$ mediante f.

11) Determina per quali valori di $\lambda \in R$ la funzione $f: R \to R$ così definita

$$f(x) = \begin{cases} 2^x - 2 + \lambda, & se\ x < 1 \\ \dfrac{\lambda}{ln2} \ln(x+1), & se\ x \geq 1 \end{cases}$$

risulta continua.

12) La funzione $f: R - \{-1; +1\} \to R$,

$$f(x) = \frac{x|x| - 1}{|x| - 1}$$

[A] ha una discontinuità di terza specie in x=1 e una di seconda specie in x=-1.

[B] ha una discontinuità di seconda specie in x=1 e una di terza specie in x=-1.

[C] ha due discontinuità di terza specie in x=1 e in x=-1.

[D] ha due discontinuità di seconda specie in x=1 e in x=-1

14) a) Per quali valori dei parametri $\lambda, \mu \in R$ la funzione $f: R \to R$

$$f(x) = \begin{cases} x + \dfrac{1}{x}, & se\ x > 1 \\ \lambda, & se\ 0 \leq x \leq 1 \\ -1 + \dfrac{\mu}{x^2+1}, & se\ x < 1 \end{cases}$$

è continua su R?
b) Quante sono, al variare del parametro reale k, le soluzione dell'equazione:

$$f(x) = k$$

se l'espressione di f è determinata con la coppia di valori di $\lambda, \mu \in R$ che la rendono continua?
c) Quante sono, al variare del parametro reale k, le soluzione dell'equazione:

$$f(x) = k$$

se l'espressione di f è determinata con la coppia di valori $\lambda = 3, \mu = 1$?

15) Studiare, al variare dei parametri, la continuità delle funzioni:

$$f(x)=\begin{cases} ax^2-3b, & se\ x\leq 0 \\ 5x-a+b, & se\ 0<x\leq 2 \\ \dfrac{2}{x}, & se\ x\geq 2 \end{cases} \qquad a,b\in R$$

$$g(x)=\begin{cases} ln2x, & x>2 \\ \ln(-2x), & x<-2 \\ ax+b, & x\in[-2;2] \end{cases} \qquad a,b\in R$$

16) La funzione $f: R\to R$ definita da $f(x)=\begin{cases} 2x^2+ax-1, & x\leq 0 \\ -x^2+2x+b, & x>0 \end{cases}$ è continua e mappa il compatto $[-2;1]$ nel compatto $[-1;0]$. Determina i valori dei parametri reali *a,b*.

ASPETTI TOPOLOGICI DELLA CONTINUITÀ

Occupiamoci, ora, di una caratterizzazione molto profonda delle funzioni continue: le funzioni continue hanno la caratteristica di trasformare insiemi con importanti proprietà in insiemi che possiedono ancora queste proprietà!

Studiando gli insiemi, li abbiamo classificati in base al comportamento dei loro punti rispetto agli intorni:

***m* punto di frontiera di E**: se ogni intorno di m contiene sia punti di E, sia punti di E^c.

***y* punto interno di E**:

se esiste un intorno di y che contiene solo punti di E $(y\in E,\ \exists\rho>0: V_\rho(y)\cap E=V_\rho(y))$.

***z* punto di accumulazione per E:**

se ogni intorno di z contiene almeno un punti di E distinto da z ($\forall\rho>0, V_\rho(z)\cap E-\{z\}\neq\emptyset$).

***x* punto isolato di E:**

se esiste almeno un intorno che contiene solo x $(x\in E, \exists\rho>0: V_\rho(x)\cap E-\{x\}=\emptyset)$.

***a* punto di aderenza di E**:

se ogni intorno di a contiene punti di E ($\forall\rho>0, V_\rho(a)\cap E\neq\emptyset$).

insieme aperto: ogni punto è punto interno

insieme chiuso: se contiene tutti i suoi punti di accumulazione

insieme derivato di E: insieme E' costituito da tutti i punti di accumulazione per E, non appartenenti ad E

chiusura di E: $\bar{E}=E\cup E'$.

Le nozioni di insieme aperto e di insieme chiuso sono molto importanti per l'analisi matematica ed è, quindi, normale che ci si chieda come si comportino le funzioni continue in intervalli chiusi o aperti.

Osserviamo che in generale l'immagine di un aperto mediante una funzione continua, non è aperto.

I due seguenti esempi sono molto interessanti:

$$f:(-1;1)\to R,\ \ f(x)=2x$$

è continua e si ha:

$$f\big((-1;1)\big)=(-2;2)$$

ovvero l'immagine dell'intervallo aperto (-1;1) è l'intervallo aperto (-2;2) . La funzione inversa è tale che $f^{-1}(-2;2) = (-1;1)$.

La funzione

$$f: (-1;1) \to R, \quad f(x) = x^2$$

è continua e si ha:

$$f\big((-1;1)\big) = [0;1)$$

ovvero l'immagine dell'intervallo aperto (-1;1) è l'intervallo [0;1), che non è né aperto né chiuso . La funzione inversa, invece, è tale che $f^{-1}(0;1) = (-1;1)$.

Questo fatto non è casuale, ma è una proprietà importantissima delle funzioni continue: se f è continua, la controimmagine di un intervallo aperto è un aperto e, analogamente, la controimmagine di un intervallo chiuso è un chiuso. Accade anche il viceversa: se la controimmagine di un aperto è un aperto, allora la funzione f è continua (e idem per i chiusi). Sussiste, infatti, in seguente importante teorema:

Teorema:
Una funzione $f: D \subseteq R \to R$ è continua se e solo se la controimmagine $f^{-1}(V)$ di ogni aperto $V \subset f(D)$ è un aperto in D.

Con i sottoinsiemi chiusi e limitati di R (insiemi compatti) le funzioni continue hanno un comportamento ancora migliore:

Teorema (di Weierstrass generalizzato):

Sia $f: D \subseteq R \to R$ una funzione continua su $U \subseteq D$, U compatto. Allora $V = f(U)$ è un compatto.

Osservazione:
La compattezza è una proprietà davvero complicata e davvero importante in diversi ambiti della matematica e il fatto che le funzioni continue preservino una proprietà tanto complicata è davvero notevole!
Un insieme E si dice compatto se da ogni famiglia al più numerabile di insiemi aperti la cui unione contiene E (la cosiddetta copertura aperta di E) è possibile scegliere un certo numero di insiemi aperti la cui unione contiene ancora E (la cosiddetta sottocopertura finita).
Negli spazi metrici, cioè negli insiemi dotati di una metrica (nozione di distanza), è possibile dimostrare l'importante teorema di Heine-Borel che ci assicura che tutti e soli gli insiemi compatti negli spazi metrici sono gli insiemi chiusi e limitati.

Teorema di Heine Borel:
Sia $E \subset R^n$, allora E è compatto se e solo se E è chiuso e limitato.

Tale teorema afferma, in sostanza, che gli intervalli chiusi e limitati di R o l'unione di intervalli chiusi e limitati sono insiemi compatti.

Si può dimostrare, inoltre, che ogni insieme discreto è compatto se e solo se è finito.

Da quanto detto possiamo enunciare (ma non dimostrare, in quanto non possediamo la nozione di "compattezza sequenziale", fondamentale per la dimostrazione) il seguente importante teorema
Osserviamo che il teorema generalizzato di Weierstrass esprime solo una condizione sufficiente ma non necessaria affinché l'immagine di un compatto sia un compatto. Infatti la funzione:

$$f:[0;1]\to R, \qquad f(x)=\begin{cases}1, se\ x\in(0;1)\\ 0, se\ x\in\{0;1\}\end{cases}$$

ha come immagine $f([0;1])=\{0;1\}$ che è compatto in quanto discreto e finito, ma f non è continua su [0;1].

La versione generalizzata del teorema di Weiestrass parla in generale di compatti. Noi abbiamo bisogno di lavorare con gli intervalli e abbiamo quindi bisogno di un teorema meno generale ma più utile ai nostri scopi: il **teorema di Weierstrass** parla proprio di INTERVALLI compatti, cioè intervalli chiusi e limitati.

Teorema di Weierstrass

Sia $f: D\subseteq R\to R$ una funzione continua su $I\subseteq D$, I *intervallo* compatto. La funzione f ammette, allora, massimo e minimo assoluti su I, ovvero

$$\exists\ m=\min_{x\in I} f(x)\in R\,,\exists\ M=\max_{x\in I} f(x)\in\ R: m\le f(x)\le M.$$

Le funzioni continue conservano molte altre proprietà che in questa sede non possiamo discutere, come ad esempio la connessione.
Un insieme Ω si dice connesso se non può essere rappresentato come unione disgiunta di insiemi non vuoti. In altri termini Ω è connesso se gli unici insiemi la cui intersezione sia vuota e la cui unione sia tutto Ω sono l'insieme vuoto e l'insieme Ω. Detto in altri termini ancora, Ω è connesso se l'unico sottoinsieme non vuoto di Ω che è contemporaneamente aperto e chiuso è Ω stesso. La connessione in R caratterizza gli intervalli aperti e chiusi in modo speciale e valgono risultati come questi: tutti e soli i connessi di R sono gli intervalli, ogni intervallo $(a;b)\subset R$ è connesso, la chiusura di $(a;b)$ è un connesso.
Questa strana proprietà si rivela cruciale in molti campi avanzati dell'analisi matematica e le funzioni continue hanno la bella proprietà di trasformare insiemi connessi in insiemi connessi.

Teorema: Sia $f: X\subseteq R\to Y\subseteq R$ una funzione continua su $U\subseteq X$, U connesso. Allora $V=f(U)$ è un connesso.

La dimostrazione è molto tecnica ma relativamente semplice: si assume $f: X\subseteq R\to Y\subseteq R$ continua e suriettiva e X connesso. Si considera, poi, $A\subseteq Y, A\neq\emptyset$, A aperto e chiuso contemporaneamente e si dimostra che $Y=A$.. Infatti $f^{-1}(A)\neq 0$ poiché f è suriettiva ed è aperto e chiuso in quanto f è continua. Inoltre $f^{-1}(A)=X$ poiché X è connesso. Infine si osserva che $A=f\left(f^{-1}(A)\right)=f(X)=Y$. Questo significa che Y è connesso. Si prende, poi, la restrizione di f a U e per quanto detto sopra, $V=f(U)$ è un connesso.

In sostanza, le funzioni continue vanno studiate perché sono davvero dei mattoni fondamentali per lo sviluppo della matematica: esse, infatti, ci riportano sempre in una sorta di "confort zone"… dato che conservano parecchie proprietà importanti dell'insieme che mappano.

Vediamo un importantissimo risultato che mette in luce l'importanza del rapporto stretto che le funzioni continue hanno con la proprietà della connessione:

Teorema di Darboux (o teorema dei valori intermedi):
Sia $f: D \subseteq R \to R$ una funzione continua su $I \subseteq D$, I *intervallo* compatto. Fissato un qualsiasi $y_0 \in f(I)$, esiste almeno un valore $x_0 \in I$ tale che $y_0 = f(x_0)$.

Osserviamo che dal teorema di Weiestrass sappiamo che

$$\begin{cases} f \ continua \ su \ I \\ I \ intervallo \ compatto \end{cases} \Rightarrow f(I) = [m; M]$$

Il teorema asserisce, quindi, che f assume almeno una volta tutti i valori compresi tra il so minimo e il suo massimo assoluti.
Il teorema ha un suggestiva interpretazione grafica che ha suggerito anche un nomignolo per questo teorema: "il teorema della matita".

Se una funzione si può tracciare su un intervallo senza staccare la matita dal foglio, allora è continua su quell'intervallo.
Questa interpretazione grafica spesso è travisata, infatti spesso si sente dire che "le funzioni continue sono quelle si tracciano senza staccare la matita dal foglio". Questa affermazione è sbagliata per tre motivi importanti:
1) non ha senso dire "funzione continua", poiché la continuità non è una proprietà delle funzioni ma una proprietà che le funzioni hanno a seconda del punto in cui vengono considerate
2) il teorema di Darboux si riferisce a un intervallo e non a un dominio generico, che può anche non risultare un intervallo
2) se una funzione presenta punti isolati nel suo dominio, il suo grafico si traccia staccando la matita dal foglio ma la funzione è comunque continua.

Esistono molte dimostrazioni differenti del teorema di Darboux ma la più importante è quella che mette in evidenza il legame tra continuità e connessione. Non scendiamo nel dettaglio di una dimostrazione molto tecnica m facciamo notare che se per assurdo esistesse un $y_0 \in [m; M]$ che non è immagine di nessun $x_0 \in I \neq [a; b]$, l'immagine di I mediante la funzione f non sarebbe connessa e , quindi, si potrebbe esprimere come unione di insiemi disgiunti, contro l'ipotesi di connessione.

Osserviamo infine che il teorema di Darboux è solamente una condizione sufficiente ma non sufficiente a garantire la "proprietà dei valori intermedi". Consideriamo, infatti, la seguente funzione $f: [0; 1] \to R$ così definita:

$$f(x) = \begin{cases} 2(1 - x), & se \ x \in (0; 1) \\ 2, & se \ x = 1 \\ 0, & se \ \ x = 0 \end{cases}$$

Questa funzione non è continua su [0;1], ma scelto un qualsiasi $y_0 \in f([0; 1]) = [0; 2]$ è possibile trovare almeno un valore $x_0 \in [0; 1]$: $f(x_0) = y_0$.
Esiste anche un controesempio "canonico":

$$f: [0; 1] \to R \ , \ f(x) = \begin{cases} 0, se \ x = 0 \\ \sin\left(\frac{1}{x}\right), se \ x \in (0; 1] \end{cases}$$

essa risulta discontinua nell'origine ma assume ugualmente tutti i valori tra $y = 0$ e $y = sin1$. Basta, infatti, considerare la restrizione di f all'intervallo $\left[\frac{1}{\pi}; 1\right]$ ed applicare il teorema di Darboux.

Un'applicazione davvero interessante del teorema di Darboux è il teorema di Bolzano o teorema degli zeri:

Teorema di Bolzano (o degli zeri):
Sia $f: D \subseteq R \to R$ una funzione continua su $I = [a; b] \subset D$. Sia inoltre $f(a)f(b) < 0$. Esiste almeno un valore $x_0 \in I$ tale che $f(x_0) = 0$.

Dim:
Senza ledere la generalità del ragionamento, assumiamo $f(a) < 0, f(b) > 0$. Dal teorema di Weierstrass sappiamo che

$$\begin{cases} f \text{ } continua \text{ } su \text{ } I \\ I \text{ } intervallo \text{ } compatto \end{cases} \Rightarrow f(I) = [m; M] \supseteq [f(a); f(b)]$$

Dal teorema di Darboux possiamo concludere che $\forall y_0 \in [f(a); f(b)] \; \exists x_0 \in (a; b): f(x_0) = y_0$. In particolare $f(a) < y_0 = 0 < f(b)$ da cui la tesi.

Le ipotesi del teorema degli zeri si possono anche attenuare senza perdere la validità della tesi. Consideriamo, infatti, una funzione $f: D \subseteq R \to R$ tale che l'Inf e il Sup di f su D abbiamo abbiamo segni opposti. Il teorema della permanenza del segno permette di costruire due intorni opportuni nei quali è possibile scegliere gli estremi di un intervallo su cui risultano soddisfatte le ipotesi del teorema degli zeri.

Esempio:
Ad esempio verifichiamo che l'equazione $x^2 e^x - 1 + arctgx = 0$ ammette almeno una soluzione reale.
Per prima cosa definisco la funzione $f(x) = x^2 e^x - 1 + arctgx, f: R \to R, f \in C^0(R)$ (la simbologia $C^0(A)$, con A aperto, significa f continua su A aperto) .

$$Sup_{x \in R} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty, \;\; Sup_{x \in R} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x) = -1 - \frac{\pi}{2} < 0$$

Per il teorema della permanenza del segno, esiste un intorno $U(+\infty)$su cui f assume definitivamente segno negativo. In modo analogo di determina un intorno V(+∞) sul quale f assume definitivamente segno positivo. Presi allora $a \in U, b \in V$ si ha sicuramente $f(a)f(b) < 0, f$ $continua$ su $[a; b]$ e quindi risultano soddisfatte le ipotesi del teorema di Darboux. Esiste, quindi, almeno un zero di f sull'insieme R, e possiamo garantire che esiste una soluzione dell'equazione proposta.

Corollario (teorema del punto fisso di Brouwer in una dimensione):
Sia $f: D \subseteq R \to R$ una funzione continua su $I = [a; b] \subseteq D$ e tale che $f([a; b]) = [a; b]$. Esiste almeno un valore $x_0 \in I$ tale che $f(x_0) = x_0$.

Dim:
Se $f(a) = a$ oppure se $f(b) = b$ allora non vi è nulla da dimostrare.
Se $a < f(a) \leq b$ e $a \leq f(b) < b$ allora $g(x) = f(x) - x$ è tale che $g(a) = f(a) - a > 0$, $g(b) = f(b) - b < 0$ e sono soddisfatte le ipotesi del teorema degli zeri. Esiste quindi $x_0 \in I$ tale che $f(x_0) = x_0$.

I "teoremi del punto fisso" di cui il teorema di Brouwer in una dimensione è il più elementare dei risultati, sono di estrema importanza negli sviluppi dell'analisi matematica, dalla teoria delle equazioni differenziali a sviluppi importanti dell'analisi funzionale.

Esercizi di tipo teorico sui teoremi fondamentali delle funzioni continue su intervalli

1) Sia $f: R \to R$ continua su R e tale che $\forall c \in R, f(c) \cdot f(-c) = 2$. Dimostrare che f ha segno costante su R.

Se per assurdo esistessero $x = a$, $x = b \in R : f(a)f(b) < 0$ allora esisterebbe $\gamma \in (a; b)$: $f(\gamma) = 0$ ma in tale punto dovrebbe risultare anche $f(\gamma) \cdot f(-\gamma) = 2$. Siamo giunti ad un assurdo, poiché $f(\gamma) \cdot f(-\gamma) = 0 \cdot f(-\gamma) = 0 \neq 2$.

2) Sia $f: R \to R$ continua su R e tale che

$$f(x) \neq 2 \ \forall x \in R, \quad f(-3) = 0$$

Dimostra che $\exists M \in R: f(x) < M \ \forall x \in R$.

Procediamo per assurdo. Consideriamo i due insiemi $A = \{x \in R: f(x) < 2\}$, $B = \{x \in R: f(x) > 2\}$. L'insieme A è non vuoto perché $-3 \in A$. Supponiamo che B sia non vuoto e prendiamo $x = b \in B$. Poiché f è $continua\ su\ R$, risulta soddisfatto il teorema dei valori intermedi di Darboux sull'intervallo $I = [-3; b]$ e quindi f assume tutti i valori tra il massimo e il minimo di f su I. In particolare f assume tutti i valori tra $f(-3) = 0\ e\ f(b) > 2$. la funzione deve assumere quindi, in particolare, il valore y=2. Siamo giunti ad un assurdo. Dobbiamo necessariamente concludere che $B = \emptyset$ e quindi che $f(x) < 2 \ \forall x \in R$.

3) Sia $f: [0; 1] \to [0; 1]$ continua. Dimostrare che $\exists c \in [0; 1]$ tale che $f(c) = 1 - c$.

Se $f(1) = 0$ oppure se $f(0) = 1$ allora $f(0) = 1 - 0$, oppure $f(1) = 0 + 1 - 1 = 0$ e ci siamo.
Se $0 < f(0) \leq 1$ e $0 \leq f(1) < 1$ allora $g(x) = f(x) + x - 1$ è tale che $g(0) = f(0) - 1 < 0$, $g(1) = f(1) + 1 - 1 > 0$ e sono soddisfatte le ipotesi del teorema degli zeri ed esiste quindi $c \in [0; 1]$ tale che $f(c) = 1 - c$.

ESERICIZI VARI SULLE FUNZIONI CONTINUE E SU ELEMENTI DI TOPOLOGIA DI R

1)Dato l'insieme $A = [0; 3] \cup \{4\} \cup (5; 6) \subset R$
Individuane i punti di accumulazione, specificando se appartengo o no ad A.
Individuane gli eventuali punti isolati
Individua la frontiera ∂A dell'insieme A..
Scrivi la chiusura dell'insieme A.

2) Un punto y di aderenza ad un insieme $E \subseteq R, E \neq \emptyset$ se

$$\forall \varepsilon > 0, \qquad U_\varepsilon(y) \cap E \neq \emptyset.$$

Un punto di accumulazione per E è sempre un punto di aderenza ad E? Un punto di aderenza ad E è sempre punto di accumulazione per E? Cosa si può dire dei punti isolati? È vero che l'insieme dei punti di aderenza di un insieme coincide con la sua chiusura?

3) Determina il dominio naturale della funzione $f(x) = \sqrt{x^3 - x^2}$ specificandone i punti di accumulazione e i punti isolati.

4) In R, l'insieme $E = \left\{x(n) \in R: x(n) = \frac{1}{n}, n \in N - \{0\}\right\}$ è compatto?
In R, l'insieme $T = E \cup \{0\}$ è compatto? Individua l'insieme dei maggioranti e l'insieme dei minoranti di E e stabilisci se E ammette massimo, minimo, estremo inferiore, estremo superiore.

5) Il teorema di Heine –Borel ci garantisce che, in R, gli intervalli chiusi e limitati siano compatti (l'unione di due intervalli compatti è un compatto ma non è un intervallo…). Il teorema generalizzato di Weierstrass afferma che l'immagine di un intervallo compatto mediante una funzione $f: [a; b] \to R$ continua è un intervallo compatto. Spiega perché in ognuno dei seguenti casi il teorema fallisce:

$$f: [0; 1] \to R, \qquad f(x) = \begin{cases} 0, x = 0, x = 1 \\ 1, 0 < x < 1 \end{cases}$$

$$f: [0; 1] \cup [2; 3] \to R, \qquad f(x) = x$$

$$f: (0; 1] \to R, f(x) = \frac{1}{x}$$

$$f: [1; +\infty) \to R, \qquad f(x) = \frac{1}{x}$$

6) Determina $\lambda, \mu \in R$ in modo che $f: R \to (\mu; \lambda]$ così definita:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi} arctg\left|\dfrac{1}{x}\right|, & x < 0 \\ 2e^{-x} - 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

risulti suriettiva (sfrutta il teorema di Darboux in forma debole per garantire che ogni y compresa tra l'inf di f e il max di f su R sia immagine di almeno un x reale…).

7) Considera la funzione $f: R \to R$, così definita

$$f(x) = \begin{cases} 3kx - 5, & x \geq 1 \\ x^2 - (2k + 1)x, & x < 1 \end{cases}$$

a)Determina k reale in modo che soddisfi le ipotesi del teorema di Weierstrass su $I = [-2; 3]$.
b)Per il valore di k determinato al punto precedente, verifica che f non soddisfa le ipotesi del teorema degli zeri su I. La funzione si annulla su I in due punti. Quali? Questo fatto è in contraddizione con il fatto che non siano verificate le ipotesi del teorema degli zeri?
c) Per quali valori di k la funzione presenta, in *x=1*, una discontinuità di prima specie con salto S=10?

8) Dimostra che la seguente equazione ammette soluzioni reali

$$e^{2x} - arctg(\pi x) + 10x - 1 = 0, \qquad x \in R$$

9) Classifica le discontinuità della funzione $f(x) = \frac{|x^2-4|}{x-2} \cdot arctg\left(\frac{1}{x^2}\right)$ considerata nel suo dominio naturale.

10) Sia $f: R \to\ R, f(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi x}{12}\right) + x$. Utilizzando opportunamente il teorema di Darboux dimostra che esiste almeno un valore $x_0 \in [4; 6]$ in cui $f(x_0) = 5$.