Esempio di studio di funzione

$$f(x) = \frac{x^3 + 4x^2}{x^2 - 1}$$

<u>Dominio</u>

$$D = \{x \in R: x^2 - 1 \neq 0\} = (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$$

<u>Analisi del dominio</u>

Il dominio è simmetrico rispetto all'origine degli assi: $\forall x \in D, -x \in D$. Ne segue che possono esistere simmetrie notevoli per il grafico di f.

<u>Simmetrie notevoli</u>

$$f(-x) = \frac{(-x)^3 + 4(-x)^2}{(-x)^2 - 1} = \frac{-x^3 + 4x^2}{x^2 - 1} \begin{cases} \neq f(x) \\ \neq -f(x) \end{cases} \forall x, -x \in D$$

La funzione non presenta simmetrie notevoli.

<u>Limiti alla frontiera del dominio e asintoti</u>

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^3 + 4x^2}{x^2 - 1} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^3\left(1 + \frac{4}{x}\right)}{x^2\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)} = \pm\infty$$

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{x^3 + 4x^2}{x^2 - 1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{x^3 + 4x^2}{(x-1)(x+1)} = \frac{5}{2 \cdot 0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{x^3 + 4x^2}{x^2 - 1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{x^3 + 4x^2}{(x-1)(x+1)} = \frac{5}{2 \cdot 0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \to -1^+} \frac{x^3 + 4x^2}{x^2 - 1} = \lim_{x \to -1^+} \frac{x^3 + 4x^2}{(x-1)(x+1)} = \frac{5}{-2 \cdot 0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x \to -1^-} \frac{x^3 + 4x^2}{x^2 - 1} = \lim_{x \to -1^-} \frac{x^3 + 4x^2}{(x-1)(x+1)} = \frac{5}{-2 \cdot 0^-} = +\infty$$

La funzione presenta due asintoti verticali di equazioni $x = 1 \ e \ x = -1$ e può presentare asintoto obliquo.

<u>Ricerca dell'asintoto obliquo</u>

La funzione presenta sicuramente asintoto obliquo in quanto

$$\partial(numeratore) = \partial(denominatore) + 1.$$

Effettuando la divisione tra polinomi si ottiene

$$f(x) = x + 4 + \frac{x + 4}{x^2 - 1} = x + 4 + o(1), x \to \pm\infty$$

e concludiamo che $y = x + 4$ è l'asintoto obliquo al grafico di f per $x \to \pm\infty$.

Confronto con l'asintoto obliquo

Studiamo $f(x) > x + 4, x \in D$.

$$\frac{x^3 + 4x^2}{x^2 - 1} > x + 4 \implies \frac{x^3 + 4x^2 - (x + 4)(x^2 - 1)}{x^2 - 1} > 0$$

$$\frac{x + 4}{x^2 - 1} > 0 \Rightarrow x \in (-4; -1) \cup (1; +\infty).$$

La funzione giace sopra l'asintoto obliquo per $x \in (-4; -1) \cup (1; +\infty)$.

<u>Insieme di positività</u>

$$E = \{x \in D: f(x) > 0\} = (-4; -1) \cup (1; +\infty).$$

$$\frac{x^3 + 4x^2}{x^2 - 1} > 0 \implies x^2(x + 4) > 0; \quad x^2 - 1 > 0 \implies x \in (-4; -1) \cup (1; +\infty).$$

<u>Insieme degli zeri</u>

$$\Omega = \{x \in D: f(x) = 0\} = \{0, con\ molteplicit\grave{a}\ algebrica\ 2;\ -4\}$$

$$f(x) = 0 \iff x^2(x - 4) = 0 \iff x^2 = 0 \ \vee x + 4 = 0.$$

Comportamento di *f* in *x=0*
In *x=0* la funzione assume valore $f(0) = 0$ e tale punto è un punto con molteplicità algebrica 2.
Ciò significa che il grafico di *f* è tangente all'asse x nel punto x=0.

Riassumiamo le informazioni ottenute dallo studio in un grafico: