# Capitolo 1

# Calcolo differenziale in una variabile

## 1.1 Derivata e differenziale

In questa sezione consideriamo funzioni reali di variabile reale definite su intervalli $I \subseteq \mathbb{R}$ e introduciamo dapprima il concetto di derivabilità (e derivata) e di differenziabilità (e differenziale). In questo modo possiamo dare una prima risposta a due problemi, quello geometrico della definizione della retta tangente al grafico di una funzione, quello analitico dell'approssimazione dell'incremento della variabile dipendente in termini dell'incremento della variabile indipendente.
Cominciamo ad esporre il primo e ricordiamo che il grafico di una funzione $f : E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è il sottinsieme del piano definito come

$$\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in E,\ y = f(x)\}.$$

Se $E = (a, b)$ è un intervallo e $P_0 = (x_0, f(x_0)) \in \Gamma$, possiamo procedere in questo modo: sia $h$ un incremento della variabile indipendente ($h \gtrless 0$), $h$ sufficientemente piccolo in modo che $(x_0 + h) \in (a, b)$, e consideriamo la retta passante per $(x_0, f(x_0))$ e $(x_0 + h, f(x_0 + h))$, che chiamiamo retta secante, cioè la retta di equazione

$$y = f(x_0) + \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}(x - x_0)\ ; \tag{1.1}$$

questa retta varia al variare di $h$ e se $h \to 0$ può capitare che tenda ad assestarsi su una posizione limite. Questo succede quando il coefficiente angolare della (1.1) ha limite (finito o infinito) per $h \to 0$. In particolare, se il coefficiente angolare diverge, la retta tende ad assumere la posizione verticale $x = x_0$, mentre se converge a $m \in \mathbb{R}$, la retta tende ad assestarsi sulla retta con coefficiente angolare $m$, passante per $P_0$. Introdurremo la retta tangente al grafico nella definizione (1.3).

Per quanto riguarda il secondo problema, ricordiamo che se $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ è una funzione continua in $x_0\in(a,b)$, allora l'incremento della variabile dipendente a partire da $x_0$, cioè $(f(x)-f(x_0))$, è controllato dall'errore (fissato) $\varepsilon$ a patto di considerare l'incremento della variabile indipendente, cioè $(x-x_0)$, sufficientemente piccolo. Se poi $f$ è continua su un intervallo compatto, il controllo è uniforme grazie al teorema di Heine-Cantor. In ogni caso, la continuità non ci permette di avere informazioni su che cosa succede di $|f(x)-f(x_0)|$ se, ad esempio, dimezziamo la distanza $|x-x_0|$, nè su che tipo di approssimazione fornisca il valore $f(x)$ del valore $f(x_0)$, anche in termini puramente qualitativi. Vogliamo quindi introdurre una proprietà più "forte" della continuità, che ci fornisca informazioni migliori. I risultati a riguardo saranno esposti alla fine di questa sezione e in quelle successive.

**Definizione 1.1** *Sia $f:(a,b)\to\mathbb{R}$. Diciamo che $f$ è derivabile nel punto $x_0\in(a,b)$ se esiste finito*

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\ . \tag{1.2}$$

*Se $f$ è derivabile in $x_0$, chiamiamo derivata (prima) di $f$ nel punto $x_0$ il limite (1.2) e la indichiamo con uno dei seguenti simboli*

$$f'(x_0) \qquad Df(x_0) \qquad \frac{df}{dx}(x_0)\,.$$

*In particolare il rapporto in (1.2) è detto rapporto incrementale di $f$ a partire dal punto $x_0$ corrispondente all'incremento $h$ della variabile indipendente.*

Come prima ed immediata conseguenza della definizione si ha

**Teorema 1.2** *Sia $f:(a,b)\to\mathbb{R}$. Se $f$ è derivabile in $x_0\in(a,b)$ allora $f$ è continua in $x_0$.*

**Dim.** Per $x\neq x_0$, si ha

$$f(x)-f(x_0)=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\,(x-x_0);$$

il secondo membro è il prodotto di una funzione convergente, poiché

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)\ ,$$

e di una funzione infinitesima e quindi è infinitesimo, cioè $f(x)\to f(x_0)$ se $x\to x_0$. ■

Il rapporto incrementale di $f$ a partire da $x_0$ non è altro che il coefficiente angolare della retta (1.1); siamo condotti alla seguente definizione.

**Definizione 1.3** *Sia* $f : (a,b) \to \mathbb{R}$. *Se* $f$ *è derivabile in* $x_0 \in (a,b)$, *chiamiamo retta tangente al grafico di* $f$ *nel punto* $P_0 = (x_0, f(x_0))$ *la retta di equazione*

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \ .$$

**Osservazione.** A differenza di quanto succede se il rapporto incrementale di $f$ a partire da $x_0$ converge (cioè se $f$ è derivabile), nel caso in cui diverge può capitare che $f$ sia discontinua in $x_0$. Basta considerare la funzione

$$f(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

Il suo rapporto incrementale a partire da $x_0 = 0$ vale

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = \begin{cases} -1/h & h < 0 \\ 1/h & h > 0 \end{cases}$$

e quindi diverge a $+\infty$; la funzione presenta ovviamente una discontinuità di prima specie in $x_0 = 0$.
Per questo motivo abbiamo scelto di definire la derivabilità in termini di convergenza del rapporto incrementale e non semplicemente di esistenza del limite per tale rapporto.
Quando il rapporto incrementale di $f$ a partire da $x_0$ diverge (a $+\infty$ oppure a $-\infty$), se $f$ è continua in $x_0$ (ma attenzione che nella letteratura non sempre viene posta questa condizione), diciamo che il grafico di $f$ presenta nel punto $P_0 = (x_0, f(x_0))$ tangente verticale di equazione $x = x_0$.

Sono di uso comune le seguenti notazioni e terminologie: diciamo che $f$ è derivabile da destra oppure da sinistra in $x_0$ se il limite da destra oppure da sinistra del rapporto incrementale a partire da $x_0$ esiste finito e in questo caso poniamo

$$f'_+(x_0) = \lim_{h \to 0_+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \qquad f'_-(x_0) = \lim_{h \to 0_-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \ .$$

Ai numeri reali $f'_\pm(x_0)$ diamo il nome di derivata destra e derivata sinistra in $x_0$; ovviamente $f$ è derivabile se e solo se è derivabile da destra, da sinistra e vale

$$f'_+(x_0) = f'_-(x_0) \ .$$

Operando esattamente come nel teorema (1.2), si verifica che la derivabilità da destra (rispettivamente da sinistra) implica la continuità da destra (rispettivamente da sinistra).
Mediante le derivate destra e sinistra, possiamo estendere la definizione di derivabilità ai punti di frontiera. Se $f$ è definita su $[a,b]$, diciamo che $f$ è derivabile in $a$ se è derivabile da destra in $a$ e poniamo $f'(a) = f'_+(a)$;

analogamente diciamo che $f$ è derivabile in $b$ se è derivabile da sinistra in $b$ e poniamo $f'(b) = f'_-(b)$.
Prendiamo in considerazione alcune situazioni particolari, che introducono una terminologia di largo uso. Preferiamo supporre (anche se non è necessario) che $f$ sia continua nel punto $x_0$, in modo da dare luogo a casi evidenti dal punto di vista grafico.
Diciamo che $f$ ha in $x_0 \in (a,b)$ un **punto angoloso** se $f$ non è derivabile in $x_0$, ma esistono in $x_0$ le derivate sinistra e destra. Ad esempio, con semplici calcoli si ottiene che per la funzione $f(x) = |x|$ si ha $f'_\pm(0) = \pm 1$.
Diciamo che $f$ ha in $x_0 \in (a,b)$ una **cuspide** se

$$\lim_{h\to 0_+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = +\infty \qquad \lim_{h\to 0_-} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = -\infty$$

oppure

$$\lim_{h\to 0_+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = -\infty \qquad \lim_{h\to 0_-} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = +\infty.$$

Ad esempio, per la funzione $f(x) = \sqrt{|x|}$ si ha

$$\lim_{h\to 0_\pm} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0_\pm} \frac{\operatorname{sgn}(h)}{\sqrt{|h|}} = \pm\infty \ .$$

Non sono classificate univocamente le situazioni in cui il rapporto incrementale a partire da un punto diverge da sinistra e converge da destra oppure capita il viceversa, anche se noi le assimiliamo a punti angolosi. Ad esempio se consideriamo la funzione $f(x) = e^{1/x}$ per $x \neq 0$ e $f(0) = 0$, allora $f'_-(0) = 0$ mentre il rapporto incrementale a partire da $x = 0$ diverge se $h \to 0_+$.
In tutti questi casi la retta secante non ha una posizione limite per $h \to 0$ (non c'è la retta tangente al grafico), ma si assesta su posizioni differenti a secondo che $h \to 0_\pm$.
Osserviamo infine che può capitare che il rapporto incrementale a partire da $x_0$ non abbia limite, nè finito, nè infinito (oppure che questo capiti solo da destra o solo da sinistra); ad esempio questa situazione si presenta in $x_0 = 0$ se $f(x) = x \sin 1/x$ per $x \neq 0$ e $f(0) = 0$, quando la retta secante continua ad oscillare tra le bisettrici del primo e terzo quadrante.

**Definizione 1.4** *Sia $f : (a,b) \to \mathbb{R}$. Diciamo che $f$ è differenziabile in $x_0 \in (a,b)$ se esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - \lambda(x - x_0)}{x - x_0} = 0$$

*o equivalentemente per $x \to x_0$*

$$f(x) = f(x_0) + \lambda(x - x_0) + o(x - x_0) \ .$$

Il teorema seguente mostra come derivabilità e differenziabilità siano due facce della stessa medaglia.

**Teorema 1.5** *Sia $f : (a,b) \to \mathbb{R}$. La funzione $f$ è differenziabile in $x_0 \in (a,b)$ se e solo se $f$ è derivabile in $x_0$; in particolare $\lambda = f'(x_0)$.*

**Dim.** Supponiamo che $f$ sia differenziabile in $x_0$; allora

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lambda + \frac{o(x - x_0)}{x - x_0}$$

e quindi

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lambda = f'(x_0).$$

(In particolare questo prova l'unicità di $\lambda$).
Viceversa, se $f$ è derivabile in $x_0$, si ha

$$0 = \lim_{x \to x_0} \left( \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0}$$

e quindi $f$ soddisfa la definizione di differenziabilità in $x_0$ con $\lambda = f'(x_0)$. ■

Chiamiamo **differenziale** di $f$ in $x_0$ e lo denotiamo abitualmente con $df(x_0; \cdot)$ l'applicazione lineare (vale a dire addittiva e omogenea) di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ definita da

$$df(x_0; h) = f'(x_0)h \qquad h \in \mathbb{R}.$$

Dalla definizione e dal teorema precedenti possiamo scrivere che, se $f$ è derivabile (o differenziabile) in $x_0$,

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) \tag{1.3}$$

o anche

$$f(x) = f(x_0) + df(x_0; x - x_0) + o(x - x_0)\ . \tag{1.4}$$

Ricordando la definizione di retta tangente al grafico, possiamo leggere la (1.3) come l'uguaglianza, a meno di infinitesimi di ordine superiore all'incremento della variabile indipendente, tra l'ordinata sul grafico di $f$ e l'ordinata sul grafico della retta tangente in $x_0$. La (1.4) afferma che l'incremento della variabile dipendente $(f(x) - f(x_0))$ coincide con il differenziale applicato all'incremento della variabile indipendente $df(x_0; x - x_0)$, sempre a meno di infinitesimi di ordine superiore.
Localmente e in termini qualitativi, la differenziabilità ci permette di sostituire al grafico di $f$ quello della retta tangente al grafico e quindi di valutare in prima approssimazione l'incremento in maniera lineare.

## 1.2 Calcolo delle derivate

Cominciamo questa sezione calcolando le derivate di alcune funzioni elementari mediante la definizione; per altre, la derivata verrà ottenuta successivamente, utilizzando le regole di derivazione.
Per brevità, nel seguito denotiamo con $I(h)$ il rapporto incrementale a partire dal punto $x$ .

1. $f(x) = c \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$. Allora $f'(x) = 0$, poiché $I(h) = 0$ per ogni $h$.

2. $f(x) = x^n$, $n \geq 1$, $n$ intero, $x \in \mathbb{R}$. Allora $f'(x) = nx^{n-1}$, poiché

$$I(h) = \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \frac{1}{h}\sum_{j=1}^{n}\binom{n}{j}x^{n-j}h^j = nx^{n-1} + \sum_{j=2}^{n}\binom{n}{j}x^{n-j}h^{j-1}$$

e la sommatoria è infinitesima per $h \to 0$, in quanto ogni addendo è infinitesimo.

3. $f(x) = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $x > 0$. Allora $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$, poiché

$$I(h) = \frac{(x+h)^\alpha - x^\alpha}{h} = \frac{x^\alpha}{h}\left[\left(1+\frac{h}{x}\right)^\alpha - 1\right] = \frac{x^\alpha}{h}\left[\alpha\frac{h}{x} + o(h)\right] =$$
$$= \alpha x^{\alpha-1} + o(1) \ .$$

4. $f(x) = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$, $x \in \mathbb{R}$. Allora $f'(x) = a^x \log a$, poiché

$$I(h) = \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \frac{a^x}{h}\left[a^h - 1\right] = \frac{a^x}{h}\left[h \log a + o(h)\right] =$$
$$= a^x \log a + o(1) \ .$$

5. $f(x) = \log x$, $x > 0$. Allora $f'(x) = \frac{1}{x}$, poiché

$$I(h) = \frac{\log(x+h) - \log x}{h} = \frac{\log\left(1+\frac{h}{x}\right)}{h} = \frac{1}{h}\left[\frac{h}{x} + o\left(h\right)\right] =$$
$$= \frac{1}{x} + o(1) \ .$$

6. $f(x) = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$. Allora $f'(x) = \cos x$; infatti, via le formule di prostaferesi, si ha

$$I(h) = \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = 2\cos\left(x + h/2\right)\frac{\sin h/2}{h} =$$
$$= \cos\left(x + h/2\right)\left[1 + o(1)\right].$$

L'asserto segue ricordando che la funzione $g(x) = \cos x$ è continua su $\mathbb{R}$.

7. $f(x) = \cos x$, $x \in \mathbb{R}$. Allora $f'(x) = -\sin x$; infatti, ancora con le formule di prostaferesi, si ha

$$\begin{aligned} I(h) &= \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = -2\sin(x + h/2)\,\frac{\sin h/2}{h} = \\ &= -\sin(x+h/2)\,[1 + o(1)] \end{aligned}$$

e in questo caso basta ricordare che la funzione $g(x) = \sin x$ è continua su $\mathbb{R}$.

**Osservazione.** Se $\alpha$ è un numero razionale positivo, le potenze $f(x) = x^\alpha$ sono definite anche in $x = 0$; per il rapporto $I(h)$ a partire da $x = 0$, si ha $I(h) = h^{\alpha-1}$ e quindi $f$ è derivabile da destra in $x = 0$ se e solo se $\alpha \geq 1$ e $f'_+(0) = 0$ se $\alpha > 1$. Se $0 < \alpha < 1$, $I(h) \to +\infty$ per $h \to 0_+$ e quindi la tangente da destra si assesta sulla retta verticale $x = 0$. Se $f$ è definita anche sul semiasse negativo (ad esempio se $\alpha = 1/3$, $\alpha = 7/5$,...) in modo analogo si ottiene che $f$ è derivabile da sinistra se e solo se $\alpha \geq 1$.

Passiamo ora alle regole di derivazione; il seguente teorema riassume le formule che legano le operazioni algebriche alla derivabilità.

**Teorema 1.6** *Siano $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ e supponiamo che siano derivabili in $x_0 \in [a, b]$. Allora*

1. *la funzione somma $(f + g)$ è derivabile in $x_0$ e*

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

2. *la funzione prodotto $(fg)$ è derivabile in $x_0$ e*

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

*(in particolare, se $\lambda \in \mathbb{R}$, $(\lambda g)'(x_0) = \lambda g'(x_0)$)*

3. *se $g(x_0) \neq 0$, la funzione reciproca $(1/g)$ è derivabile in $(x_0)$ e*

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}$$

4. *se $g(x_0) \neq 0$, la funzione rapporto $(f/g)$ è derivabile in $(x_0)$ e*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}$$

**Dim.** Dimostriamo i primi tre punti scrivendo i rapporti incrementali

1.
$$\lim_{h\to 0}\frac{(f+g)(x_0+h)-(f+g)(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}+$$
$$+\lim_{h\to 0}\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}=f'(x_0)+g'(x_0)$$

2.
$$\lim_{h\to 0}\frac{(fg)(x_0+h)-(fg)(x_0)}{h}=$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{[f(x_0+h)-f(x_0)]\,g(x_0+h)+[g(x_0+h)-g(x_0)]\,f(x_0)}{h}=$$
$$=\left(\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\right)\left(\lim_{h\to 0}g(x_0+h)\right)+$$
$$+f(x_0)\left(\lim_{h\to 0}\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}\right)=f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)$$

(osserviamo che si usa la continuità di $g$ in $x_0$)

3.
$$\lim_{h\to 0}\frac{\left(\frac{1}{g}\right)(x_0+h)-\left(\frac{1}{g}\right)(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-\frac{1}{h}\left[g(x_0+h)-g(x_0)\right]}{g(x_0+h)g(x_0)}=$$
$$=-\frac{\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}}{g(x_0)\,\lim\limits_{h\to 0}g(x_0+h)}=-\frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

(osserviamo che per la continuità di $g$ in $x_0$, se $g(x_0)\neq 0$, allora $g(x)\neq 0$ in un intervallo contenente $x_0$ e quindi la funzione $(1/g)$ è ben definita)

4. segue combinando i due precedenti, poiché $f/g=f(1/g)$ e quindi
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0)=f'(x_0)\left(\frac{1}{g}\right)(x_0)+f(x_0)\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0)=$$
$$=\frac{f'(x_0)}{g(x_0)}-f(x_0)\frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)}.\ \blacksquare$$

**Osservazione.** Dal teorema precedente ricaviamo la derivabilità e l'espressione della derivata di altre funzioni elementari:
$$D\,\mathrm{Sh}\,x=D\frac{e^x-e^{-x}}{2}=\frac{e^x+e^{-x}}{2}=\mathrm{Ch}\,x\qquad x\in\mathbb{R}$$

$$D\,\mathrm{Ch}\,x = D\frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \mathrm{Sh}\,x \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$D\,\mathrm{Th}\,x = D\frac{\mathrm{Sh}\,x}{\mathrm{Ch}\,x} = \frac{\mathrm{Ch}^2\,x - \mathrm{Sh}^2\,x}{\mathrm{Ch}^2\,x} = \frac{1}{\mathrm{Ch}^2\,x} = 1 - (\mathrm{Th})^2 x \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$D\,\mathrm{tg}\,x = D\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + (\mathrm{tg})^2 x$$
$$x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$D\,\mathrm{cotg}\,x = D\frac{\cos x}{\sin x} = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x} = -1 - \mathrm{cotg}^2\,x$$
$$x \neq n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Per completare il quadro delle regole di derivazione, ci occupiamo ora della funzione composta e della funzione inversa.

**Teorema 1.7** *Siano* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *e* $g : [c,d] \to \mathbb{R}$ *tali che* $f([a,b]) \subseteq [c,d]$. *Se* $f$ *è derivabile in* $x_0 \in [a,b]$ *e* $g$ *è derivabile in* $y_0 = f(x_0)$*, allora la funzione composta* $(g \circ f)$ *è derivabile in* $x_0$ *e*

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(y_0)f'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0)\ . \tag{1.5}$$

**Dim.** Dimostriamo che $(g \circ f)$ è differenziabile in $x_0$. Facciamo uso della differenziabilità di $g$ in $y_0$, che scriviamo nella forma

$$g(y) - g(y_0) = g'(y_0)(y - y_0) + \varepsilon(y)(y - y_0),$$

dove $\varepsilon(y) \to 0$ per $y \to y_0$.
Posto $y = f(x)$, per l'incremento della funzione composta, via anche la differenziabilità di $f$ in $x_0$, si ha

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) - (g \circ f)(x_0) &= g(f(x)) - g(y_0) = g'(y_0)\,[f(x) - y_0] + \varepsilon(f(x))\,(f(x) - y_0) = \\ &= g'(y_0)[f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)] + \varepsilon(f(x))\,(f(x) - y_0) = \\ &= g'(y_0)f'(x_0)(x - x_0) + g'(y_0)o(x - x_0) + \varepsilon(f(x))\,(f(x) - y_0)\,.\end{aligned}$$

Osserviamo che il primo addendo è lineare nell'incremento $(x - x_0)$ e il secondo è un infinitesimo di ordine superiore all'incremento $(x - x_0)$; se dimostriamo che anche il terzo è $o(x - x_0)$, abbiamo che $(g \circ f)$ è differenziabile in $x_0$ (per definizione) e contemporaneamente che vale la formula (1.5). Poiché $f$ è continua in $x_0$, $f(x) \to y_0$ se $x \to x_0$ e quindi $\varepsilon(f(x)) \to 0$ se $x \to x_0$; ne segue

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\varepsilon(f(x))\,(f(x) - y_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \varepsilon(f(x)) \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0.f'(x_0) = 0$$

e quindi la tesi. ■

**Teorema 1.8** *Sia $f$ una funzione continua che applica biunivocamente l'intervallo $[a,b]$ sull'intervallo $[c,d]$. Se $f$ è derivabile in $x_0 \in [a,b]$ e $f'(x_0) \neq 0$, allora la funzione inversa $f^{-1}$ è derivabile in $y_0 = f(x_0)$ e*

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))} \ .$$

**Dim.** Scriviamo il rapporto incrementale per $f^{-1}$ a partire da $y_0$; denotiamo con $(x_0+k)$ l'antimmagine di $(y_0+h)$ (cioè $f(x_0+k) = (y_0+h)$), ottenendo $k = f^{-1}(y_0+h) - f^{-1}(y_0)$. Osserviamo che le ipotesi del teorema garantiscono la continuità di $f^{-1}$ nel punto $y_0$ (anzi su $[c,d]$) e quindi

$$\lim_{h\to 0} f^{-1}(y_0+h) - f^{-1}(y_0) = 0 = \lim_{h\to 0} k.$$

Allora

$$\lim_{h\to 0} \frac{f^{-1}(y_0+h) - f^{-1}(y_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{k}{f(x_0+k) - f(x_0)} =$$
$$= \frac{1}{\lim\limits_{k\to 0} \frac{f(x_0+k)-f(x_0)}{k}} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

e quindi la tesi. ■

**Osservazione.** Consideriamo le inverse delle funzioni trigonometriche. Mediante il teorema precedente otteniamo

$$\begin{aligned} D \arcsin x &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} && x \in (-1,1) \\ D \arccos x &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} && x \in (-1,1) \\ D \operatorname{artg} x &= \frac{1}{1+x^2} && x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Infatti, poiché la funzione $f(x) = \sin x$ applica biunivocamente $[-\pi/2, \pi/2]$ su $[-1,1]$ e $f'(x) = \cos x \neq 0$ per ogni $x \in (-\pi/2, \pi/2)$, la funzione inversa $f^{-1}$ è derivabile per ogni $y \in (-1,1)$; utilizzando le notazioni del teorema, otteniamo

$$(f^{-1})'(y) = \left[\frac{1}{\cos x}\right]_{\sin x = y} = \left[\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}}\right]_{\sin x = y} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

cioè la prima formula. La seconda segue dall'uguaglianza

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x.$$

Per quanto riguarda la terza formula, se vogliamo calcolare la derivata in un punto $y \in \mathbb{R}$, scegliamo un intervallo compatto $[c, d]$ contenente $y$ e applichiamo il teorema all'intervallo $[a, b]$ che la funzione $f(x) = \operatorname{tg} x$ applica biunivocamente su $[c, d]$. Si ha

$$(f^{-1})'(y) = \left[\frac{1}{f'(x)}\right]_{x=f^{-1}(y)} = \left[\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x}\right]_{\operatorname{tg} x = y} = \frac{1}{1+y^2} \ .$$

## 1.3 I teoremi fondamentali

In questa sezione ci occupiamo dei teoremi su cui si fonda il calcolo differenziale; oltre alla loro importanza teorica, essi risultano fondamentali anche nello studio dell'andamento del grafico di una funzione, stabilendone lo stretto collegamento con lo studio della derivata. Abbiamo scelto di dimostrare per primo il teorema di Fermat e successivamente di dedurne a "cascata" gli altri. Premettiamo alcune definizioni.

**Definizione 1.9** *Sia $f : E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in E$.*
*Diciamo che $x_0$ è un punto di minimo relativo se esiste un intorno $U$ di $x_0$ tale che*

$$f(x) \geq f(x_0) \qquad \text{per ogni } x \in U \cap E \ . \tag{1.6}$$

*Se la (1.6) vale per ogni $x \in E$ diciamo che $x_0$ è un punto di minimo assoluto.*
*Se nella (1.6) il segno di uguale vale solo per $x = x_0$, diciamo che $x_0$ è un punto di minimo forte.*
*I punti di massimo relativo, massimo assoluto e massimo forte vengono definiti in modo analogo sostituendo al segno di $\geq$ quello di $\leq$.*
*I punti di minimo e massimo relativo (o assoluto) sono detti punti estremanti relativi (o assoluti) e i valori in essi assunti vengono detti estremi relativi (o assoluti).*

**Teorema 1.10** ***(Fermat)*** *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Se $x_0$ è un punto estremante relativo per $f$, se $x_0 \in (a, b)$ e se $f$ è derivabile in $x_0$, allora $f'(x_0) = 0$.*

**Dim.** Per fissare le idee, supponiamo che $x_0$ sia un punto di massimo e consideriamo il rapporto incrementale a partire da $x_0$, cioè

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Il numeratore ha segno costante (è non positivo in un intorno di $x_0$), mentre il denominatore cambia segno con $h$. Dai teoremi di permanenza del segno nel calcolo dei limiti, otteniamo

$$f'_-(x_0) \geq 0 \qquad f'_+(x_0) \leq 0 \tag{1.7}$$

e quindi $f'(x_0) = 0$. ■

I punti in cui la derivata si annulla sono generalmente chiamati **punti stazionari** o **punti critici**.
Sottolineiamo che il teorema di Fermat afferma che i punti estremanti, interni all'intervallo di definizione, in cui la funzione è derivabile sono stazionari; se il punto estremante, ad esempio il punto di massimo, è sulla frontiera dell'intervallo, manca una delle due informazioni (1.7) e quindi si può ottenere solamente un informazione sul segno della derivata prima, ma non che il punto sia stazionario. Valga come esempio la funzione $f(x) = x$, definita su $[a, b]$, che assume il suo massimo in $x = b$ e $f'(b) = 1 \geq 0$. È poi immediato costruire esempi di funzioni con estremi in punti interni in cui la derivata non esiste: basti pensare a $f(x) = |x|$ che assume minimo assoluto nel punto angoloso $x = 0$ oppure alla funzione $f(x) = |x| \sin^2(1/x)$ definita con continuità in $x = 0$ ponendo $f(0) = 0$, che assume anch'essa minimo assoluto nel punto $x = 0$ in cui non esiste il limite del rapporto incrementale.
È poi evidente che l'annullarsi della derivata in un punto $x_0$ non implica che $x_0$ sia un punto estremante, ma soltanto che la tangente al grafico in $(x_0, f(x_0))$ è una retta orizzontale; a titolo d'esempio, basta considerare $f(x) = x^3$ e $x_0 = 0$ .

**Teorema 1.11** ***(Rolle)*** *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Supponiamo che $f$ sia continua su $[a, b]$, derivabile su $(a, b)$ e $f(b) = f(a)$. Allora esiste almeno un punto $c \in (a, b)$ in cui $f'(c) = 0$.*

**Dim.** La funzione $f$ ha massimo assoluto $M$ e minimo assoluto $m$, per il teorema di Weierstrass, poiché è continua sull'intervallo compatto $[a, b]$. Se $m = M$, allora $f$ è costante e quindi $f'(c) = 0$ per ogni $c \in (a, b)$. Se $m < M$, allora almeno uno dei due valori deve essere assunto in un punto interno $c$. La tesi segue dal teorema di Fermat. ■

Osserviamo che in molti casi può essere utile formulare la tesi del teorema di Rolle con le parole usate nella dimostrazione, cioè ⋘la funzione $f$ ha almeno un punto estremante (di massimo o di minimo) interno all'intervallo $[a, b]$ ⋙.

**Teorema 1.12** ***(Lagrange)*** *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Supponiamo che $f$ sia continua su $[a, b]$ e derivabile su $(a, b)$. Allora esiste almeno un punto $c \in (a, b)$ tale che*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a). \tag{1.8}$$

**Dim.** Consideriamo la funzione

$$h(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \qquad x \in [a, b].$$

Ovviamente $h$ è continua su $[a,b]$ e derivabile su $(a,b)$; inoltre

$$h(b) = f(b) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a) = f(a) = h(a).$$

Dal teorema di Rolle segue che esiste almeno un punto $c \in (a,b)$ in cui

$$0 = h'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

da cui la (1.8). ■

La tesi del teorema precedente, noto anche come **teorema dell'incremento finito,** può essere letta anche come l'uguaglianza tra i coefficienti angolari di due rette: la retta passante per i punti del grafico $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$, cioè il rapporto $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, e la retta tangente al grafico nel punto $(c, f(c))$. Da questo punto di vista possiamo formulare la tesi nella forma: ⋘esiste almeno un punto sul grafico in cui la tangente è parallela alla retta congiungente gli estremi del grafico stesso⋙.
Ritornando ai problemi che ci eravamo posti all'inizio del capitolo, dal teorema di Lagrange è possibile ricavare informazioni di tipo quantitativo sull'incremento della variabile dipendente, se si possiede qualche informazione aggiuntiva sulla derivata. Ad esempio, se $f'$ è limitata su $(a,b)$ e $|f'(x)| \le L$ per ogni $x \in (a,b)$, allora

$$|f(x) - f(x_0)| \le L\,|x - x_0| \qquad \text{per ogni } x, x_0 \in [a,b].$$

Infine il teorema di Lagrange è un caso particolare del seguente teorema.

**Teorema 1.13** ***(Cauchy)*** *Siano $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$; supponiamo che siano continue su $[a,b]$ e derivabili su $(a,b)$. Allora esiste almeno un punto $c \in (a,b)$ tale che*

$$(f(b) - f(a))\, g'(c) = f'(c)(g(b) - g(a)). \tag{1.9}$$

**Dim.** Se $g(b) = g(a)$, dal teorema di Rolle segue l'esistenza di un punto $c$ tale che $g'(c) = 0$; tale punto rende valida la (1.9). Se invece $g(b) \ne g(a)$, è sufficiente applicare il teorema di Rolle alla funzione

$$h(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x) - g(a))$$

per ottenere la tesi. ■

Dal teorema di Lagrange seguono facilmente importanti risultati che collegano l'andamento del grafico alla derivata.

**Corollario 1.14** *Sia $f$ derivabile su un intervallo $I$. Allora*
*se $f'(x) \ge 0$ per ogni $x \in I$, $f$ è monotona non decrescente su $I$*

*se* $f'(x) > 0$ *per ogni* $x \in I$, $f$ *è monotona crescente su* $I$
*se* $f'(x) \leq 0$ *per ogni* $x \in I$, $f$ *è monotona non crescente su* $I$
*se* $f'(x) < 0$ *per ogni* $x \in I$, *allora* $f$ *è monotona decrescente su* $I$
**Dim.** A titolo d'esempio, verifichiamo la seconda. Siano $x_1, x_2 \in I$ tali che $x_1 < x_2$; poiché $f$ è derivabile su $[x_1, x_2]$, esiste $c \in (x_1, x_2)$ tale che

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) > 0,$$

cioè $f(x_1) < f(x_2)$. ■

**Corollario 1.15** *Sia* $f$ *continua su* $[a, b]$ *e derivabile su* $(a, b]$; *supponiamo che esista*

$$\lim_{x \to a_+} f'(x) \ . \tag{1.10}$$

*Allora, se il limite è finito,* $f$ *è derivabile in* $x = a$ *e* $f'_+(a)$ *coincide con il limite; se invece il limite in (1.10) è infinito, il grafico di* $f$ *presenta tangente verticale in* $(a, f(a))$. *(Un risultato analogo si ha scambiando i ruoli di* $a$ *e* $b$*)*

**Dim.** Consideriamo il rapporto incrementale (destro) a partire da $x = a$, cioè $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ ; per il teorema di Lagrange, esiste un punto $c_x \in (a, x)$ tale che

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(c_x).$$

Il punto $c_x$ dipende in generale da $x$ e ovviamente $c_x \to a_+$ se $x \to a_+$. La tesi segue passando al limite per $x \to a_+$, via la definizione di derivata destra o di tangente verticale al grafico. ■

**Corollario 1.16** *Se* $f$ *è derivabile in* $[a, b]$ *e la funzione* $f'$ *presenta una discontinuità nel punto* $x_0 \in (a, b)$, *allora non esistono* $\lim_{x \to x_{0\pm}} f'(x)$ *(se* $x_0 = a$ *oppure* $x_0 = b$ *non esistono rispettivamente il limite da destra o il limite da sinistra). In particolare* $x = x_0$ *è una discontinuità di seconda specie per* $f'$.

**Dim.** È sufficiente osservare che se uno dei limiti fosse infinito, allora $f$ non sarebbe derivabile in $x_0$ per il corollario precedente, poiché il grafico di $f$ avrebbe tangente verticale in $(x_0, f(x_0))$. Se invece i limiti fossero finiti, allora coinciderebbero con le derivate sinistra e destra sempre per il corollario precedente; ma allora coinciderebbero con la derivata in $x_0$ e quindi sarebbero uguali. ■

Presentiamo ancora un risultato riguardante una importante proprietà della funzione derivata: in termini topologici essa afferma che l'applicazione derivata porta connessi in connessi (si ricordi che in $\mathbb{R}$ i connessi sono tutti e soli gli intervalli).

**Teorema 1.17** *Sia $f$ una funzione derivabile su $[a, b]$; sia $f'(a) \neq f'(b)$ e $\lambda$ un numero reale nell'intervallo di estremi $f'(a)$ e $f'(b)$. Allora esiste almeno un punto $c \in (a, b)$ tale che $f'(c) = \lambda$.*

**Dim.** Sia, ad esempio, $f'(a) < f'(b)$. Consideriamo la funzione

$$h(x) = f(x) - \lambda x \qquad x \in [a, b]\ .$$

Per il teorema di Weierstrass $h$ ha estremi assoluti su $[a, b]$: in particolare $h$ deve avere almeno un punto di minimo, che denotiamo con $c$. Il punto $c$ non può essere sulla frontiera dell'intervallo: infatti, se $c = a$, necessariamente $h'(a) \geq 0$, mentre $h'(a) = f'(a) - \lambda < 0$. Analogamente se $c = b$, necessariamente $h'(b) \leq 0$, mentre $h'(b) = f'(b) - \lambda > 0$. In conclusione, $c \in (a, b)$ e quindi per il teorema di Fermat deve essere $h'(c) = 0$, cioè la tesi. ■

**Osservazione.** Grazie ai risultati esposti in questa sezione, possiamo affrontare il problema della determinazione degli estremi di una funzione $f$. Cominciamo dagli estremi assoluti e mettiamoci nelle condizioni di conoscerne l'esistenza, supponendo ad esempio (si veda il teorema di Weierstrass) che $f$ sia continua su un intervallo compatto $[a, b]$. Dove andare a cercarli?
Prima di tutto gli estremi possono essere assunti sulla frontiera, e quindi prendiamo in considerazione i punti $a$ e $b$, o all'interno dell'intervallo. Secondariamente, se sono assunti in $(a, b)$, possono essere in punti in cui $f$ non è derivabile oppure (si veda il teorema di Fermat) in punti stazionari.
Quindi la strategia potrebbe essere così esposta:
-individuare i punti di $(a, b)$ in cui $f$ non è derivabile, siano $t_1, t_2, ..., t_h$
- determinare i punti stazionari in $(a, b)$, siano $x_1, x_2, ..., x_k$
-confrontare i valori numerici

$$f(a), f(b), f(t_1), f(t_2), ...f(t_h), f(x_1), f(x_2), ..., f(x_k).$$

Il minimo e il massimo trovati sono gli estremi assoluti di $f$ su $[a, b]$.
Ovviamente tra il dire e il fare c'è di mezzo la risoluzione dell'equazione $f'(x) = 0$............
Quanto alla determinazione dei punti estremanti relativi (in genere più significativi dei valori in essi assunti) su un intervallo non necessariamente compatto, vanno presi in considerazione i punti di frontiera dell'intervallo (sempre che appartenga all'intervallo stesso), i punti critici e i punti di non derivabilità; il segno della derivata (si veda il corollario (1.14)) permette tramite la monotonia la determinazione dei punti di minimo e di massimo relativo. Ritorneremo sull'argomento nel seguito, quando presenteremo un criterio sufficiente per stabilire se un punto critico è estremante per funzioni dotate però di una regolarità maggiore.

**Esempio.** Si vogliono determinare gli estremi assoluti sull'intervallo $[-3, 2]$ della funzione

$$f(x) = |x|\,(x^2 + x - 1).$$

La funzione non è derivabile in $x = 0$; inoltre

$$f'(x) = [3x^2 + 2x - 1] \,\text{signum}(x) \qquad x \neq 0 \tag{1.11}$$

e quindi i punti $x = 1/3$ e $x = -1$ sono punti critici. Si ha

$$\begin{aligned}\max_{x\in[-3,2]} f(x) &= \max\{f(-3), f(-1), f(0), f(1/3), f(2)\} = \\ &= \max\{15, -1, 0, -5/27, 10\} = 15 \\ \min_{x\in[-3,2]} f(x) &= \min\{f(-3), f(-1), f(0), f(1/3), f(2)\} = -1\end{aligned}$$

Della stessa funzione si vogliono calcolare gli estremanti relativi sull'intervallo $[-4, +\infty)$. Dalla (1.11) segue

$$\begin{array}{lll} f'(x) > 0 & \text{se e solo se} & x \in (-1, 0) \cup (1/3, +\infty) \\ f'(x) < 0 & \text{se e solo se} & x \in [-4, -1) \cup (0, 1/3) \end{array}$$

Dal corollario (1.14) otteniamo che $f$ decresce sugli intervalli $[-4, -1)$ e$(0, 1/3)$ e cresce su $(-1, 0)$ e su $(1/3, +\infty)$. Il punto $x = -4$ è un punto di massimo relativo (non è stazionario) e così pure il punto $x = 0$ (è un punto angoloso); $x = 1/3$ è un punto di minimo relativo e così pure il punto $x = -1$ (anzi assoluto).

**Esempio.** Si vuole stabilire quante soluzioni reali ha l'equazione

$$f(x) \equiv x^3 - 6x^2 + 9x - 3 = 0 \ .$$

Sicuramente l'equazione ha una soluzione reale positiva, poiché $f$ è continua, $f(0) = -3 < 0$ e $f$ diverge a $+\infty$ per $x \to +\infty$. È immediato verificare che i punti stazionari di $f$ sono $x = 1$ e $x = 3$, e risultano essere rispettivamente un punto di massimo relativo a quota $f(1) = 1$ e un punto di minimo relativo a quota $f(3) = -3$. Quindi l'equazione ha tre soluzioni: $\alpha \in (0, 1)$, $\beta \in (1, 3)$ e $\gamma > 3$.

Terminiamo questa sezione con un noto teorema, dovuto al matematico seicentesco **Antoine de L'Hôpital**, che ci limitiamo ad enunciare: esso fornisce un utile strumento per trattare le forme indeterminate nel calcolo dei limiti.

**Teorema 1.18** *Siano $f, g : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$, dove $-\infty \leq \alpha < \beta \leq +\infty$; supponiamo che il rapporto delle funzioni $f/g$ si presenti nella forma di indecisione $\frac{0}{0}$ oppure $\frac{\infty}{\infty}$ per $x \to \alpha$, che $f$ e $g$ siano derivabili su $(\alpha,\beta)$ e $g'(x) \neq 0$ per ogni $x \in (\alpha,\beta)$. Allora, se esiste (finito o infinito) il limite*

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{f'(x)}{g'(x)} \tag{1.12}$$

*esiste anche*

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{f(x)}{g(x)} \tag{1.13}$$

*e sono uguali. (Un risultato analogo vale per $x \to \beta$).*

Vogliamo sottolineare che se il limite (1.12) non esiste, non è possibile trarre conclusioni sul limite (1.13); ad esempio, siano

$$(\alpha, \beta) = (0, 1) \qquad f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x} \qquad g(x) = \sin x.$$

Per $x \to 0$ il rapporto

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}}{\cos x}$$

non ha limite, mentre per $x \to 0$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x} = \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{x + o(x)} \sim x \sin \frac{1}{x} \to 0 \ .$$

## 1.4 Derivate di ordine superiore Formula di Taylor

In questa sezione definiamo le derivate di ordine superiore per una funzione reale di variabile reale: dal loro studio è possibile ricavare informazioni sul comportamento locale di una funzione e su alcune proprietà del suo grafico. Faremo uso di un metodo iterativo; in quello che segue l'intervallo $(a, b)$ svolge il ruolo di un intorno del punto $x_0$, dal momento che stiamo definendo una proprietà locale nel punto $x_0$.
Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in (a, b)$; supponiamo che $f$ sia derivabile in $(a, b)$ e che la sua derivata $f'$ sia derivabile in $x_0$. In questo caso diciamo che $f$ è derivabile due volte in $x_0$ e chiamiamo con il nome di derivata seconda in $x_0$ la derivata prima in $x_0$ della derivata prima, cioè

$$\left(f'\right)'(x_0) \qquad \text{oppure} \qquad \frac{df'}{dx}(x_0)$$

e la denotiamo con uno dei simboli

$$f''(x_0) \quad f^{(2)}(x_0) \quad D_2 f(x_0) \quad \frac{d^2 f}{dx^2}(x_0) \ .$$

Diciamo poi che $f$ è derivabile due volte su $(a, b)$ se è derivabile due volte in ogni punto di $(a, b)$.
Iterando il procedimento, se $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ è derivabile $(n-1)$-volte in $(a, b)$ e la sua derivata di ordine $(n-1)$ è a sua volta derivabile in $x_0$, diciamo che $f$ è derivabile $n$-volte in $x_0$ e chiamiamo derivata $n$-esima in $x_0$ la derivata prima in $x_0$ della derivata di ordine $(n-1)$, vale a dire

$$\left(f^{(n-1)}\right)'(x_0) = \frac{d(f^{(n-1)})}{dx}(x_0)$$

e la denotiamo con

$$f^{(n)}(x_0) \qquad D_n f(x_0) \qquad \frac{d^n f}{dx^n}(x_0) \ .$$

È immediato verificare che se $f$ è derivabile n-volte in $x_0$ la derivata di ordine $(n-1)$ è continua in $x_0$, mentre tutte le derivate sino all'ordine $(n-2)$ sono continue in $(a,b)$. In particolare se $f$ è derivabile $n$-volte su $(a,b)$, cioè in ogni punto di $(a,b)$, allora tutte le derivate sino all'ordine $(n-1)$ sono continue su $(a,b)$.
Per indicare una regolarità più forte della derivabilità $n$-volte su $(a,b)$, è invalso l'uso di dire che una funzione reale di variabile reale è $\lll$di classe $C^n$ su $(a,b)$ $\ggg$ se esistono su $(a,b)$ tutte le derivate sino all'ordine n e sono continue in ogni punto di $(a,b)$; con l'affermazione $\lll$ $f$ è di classe $C^\infty$ su $(a,b)$ $\ggg$ si intende che $f$ ha derivate di qualsiasi ordine su $(a,b)$, che quindi risultano tutte continue su $(a,b)$.
Ovviamente i polinomi di qualsiasi grado sono di classe $C^\infty$ su $\mathbb{R}$, poiché i polinomi sono funzioni continue e le derivate di un polinomio sono a loro volta polinomi (identicamente nulli quando si supera con l'ordine di derivazione il grado del polinomio stesso). Allo stesso modo sono di classe $C^\infty$ le funzioni razionali fratte dove sono definite (cioè dove non si annulla il denominatore) e, più in generale, le funzioni composte di funzioni di classe $C^\infty$, via il teorema di composizione (1.7).
Nel seguito si vedrà che questa terminologia viene estesa anche a funzioni reali $f$ definite (ed è fondamentale) su insiemi aperti $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Talvolta, per le funzioni di una sola variabile, si usa anche dire che una funzione $f$ è di classe $C^n$ su un intervallo $I$, senza precisarne la natura topologica, intendendo che le derivate nei punti di frontiera, se questi punti appartengono a $I$, sono derivate sinistre o destre.
Dedichiamo il seguito della sezione ad introdurre una formula che, attraverso l'uso delle derivate di ordine superiore, generalizza la formula (1.3) o la formula (1.8), vale a dire la valutazione "qualitativa" dell'incremento mediante la differenziabilità (o derivabilità una volta) e la valutazione "quantitativa" dell'incremento mediante il teorema di Lagrange.
Sia $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in (a,b)$; supponiamo che $f$ sia derivabile $n$-volte in $x_0$. Consideriamo il polinomio

$$\begin{aligned} P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \\ +\ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x-x_0)^j \ , \end{aligned}$$

dove si è posto $f^{(0)}(x_0) = f(x_0)$. Esso ha grado non superiore a n ed è noto con il nome di **polinomio di Taylor di $f$ di ordine n con centro in $x_0$.**
Ci proponiamo di stabilire se il valore $P_n(x)$ fornisca una approssimazione e che tipo di approssimazione per il valore $f(x)$, nelle ipotesi dichiarate o eventualmente con ipotesi aggiuntive su $f$; in altre parole vogliamo valutare (qualitativamente? quantitativamente?) la differenza $(f(x) - P_n(x))$,che denotiamo con $T_n(f, x_0; x)$ e chiamiamo **resto** o **termine complementare.**

Come conseguenza, si possono ottenere una o più formule del tipo

$$f(x) = P_n(x) + T_n(f, x_0; x) \tag{1.14}$$

in cui è precisata la forma analitica o le proprietà del resto: tali formule sono note come **formule di Taylor di $f$ arrestate all'ordine n con centro in $x_0$.**
Noi presentiamo due forme del resto, quello di Peano e quello di Lagrange, informando però dell'esistenza di altre forme (prima fra tutte quella integrale), delle quali in questo contesto non abbiamo necessità nè tempo di occuparci.

**Teorema 1.19** *Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in (a, b)$.*

1. **(Resto di Peano)** *Se $f$ è derivabile $n$ volte in $x_0 \in (a, b)$, allora vale la (1.14) con*
$$T_n(f, x_0; x) = o((x - x_0)^n).$$
2. **(Resto di Lagrange)** *Se $f$ è derivabile $(n + 1)$ volte su $(a, b)$, allora esiste $\vartheta \in (0, 1)$ tale che valga la (1.14) con*
$$T_n(f, x_0; x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \vartheta(x - x_0))}{(n + 1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

**Dim.** Dimostrare la formula con il resto di Peano significa dimostrare che il rapporto

$$\frac{f(x) - P_n(x)}{(x - x_0)^n} = \tag{1.15}$$
$$= \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) - \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 ... - \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n}{(x - x_0)^n}$$

è infinitesimo per $x \to x_0$. Procediamo per induzione: se $n = 1$, l'affermazione è vera: infatti, se $f$ è derivabile (una volta) in $x_0$, allora $f$ è differenziabile in $x_0$ e vale la (1.3).
Supponiamo vera la tesi per $n = k$, cioè supponiamo che se una funzione $f$ è definita su un intervallo contenente $x_0$ ed è derivabile $k$ volte in $x_0$, allora vale la (1.15) con $n = k$ e dimostriamo la tesi per $n = k + 1$. Applicando il teorema di de L'Hopitâl (si veda il teorema 1.18), si ha (sempre che il secondo limite esista!!)

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) - \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 ... - \frac{f^{(k+1)}(x_0)}{(k+1)!}(x - x_0)^{k+1}}{(x - x_0)^{k+1}} =$$
$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0) - f^{(2)}(x_0)(x - x_0) + ... - \frac{f^{(k+1)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k}{(k + 1)(x - x_0)^k}.$$

Ma la funzione $f'$ è definita in un intorno di $x_0$, è derivabile $k$ volte in $x_0$ e quindi ad essa si può applicare l'ipotesi di induzione: ne segue che quest'ultimo limite esiste ed è nullo.
Dimostriamo ora la formula con il resto di Lagrange: per fissare le idee supponiamo $x > x_0$ e facciamo uso del teorema di Cauchy (si veda il teorema 1.13) sull'intervallo $[x_0, x]$. Consideriamo il rapporto

$$\frac{f(x) - P_n(x)}{(x - x_0)^{n+1}}$$

e osserviamo che sia il numeratore che il denominatore si annullano per $x = x_0$; quindi esiste almeno un punto $\eta_1 \in (x_0, x)$ tale che

$$\frac{f(x) - P_n(x)}{(x - x_0)^{n+1}} = \frac{f'(\eta_1) - P_n'(\eta_1)}{(n+1)(\eta_1 - x_0)^n} .$$

Applicando ora il teorema di Cauchy sull'intervallo $[x_0, \eta_1]$, possiamo affermare che esiste $\eta_2 \in (x_0, \eta_1)$ tale che

$$\frac{f'(\eta_1) - P_n'(\eta_1)}{(n+1)(\eta_1 - x_0)^n} = \frac{f''(\eta_2) - P_n''(\eta_2)}{n(n+1)(\eta_2 - x_0)^{n-1}}.$$

Iterando il procedimento, esistono $\eta_3, ...\eta_{n+1}$ tali che $x > \eta_1 > \eta_2 > \eta_3 > ...\eta_{n+1} > x_0$ e

$$\begin{aligned}\frac{f(x) - P_n(x)}{(x - x_0)^{n+1}} &= \frac{f'(\eta_1) - P_n'(\eta_1)}{(n+1)(\eta_1 - x_0)^n} = \frac{f''(\eta_2) - P_n''(\eta_2)}{n(n+1)(\eta_2 - x_0)^{n-1}} = ... = \\ &= \frac{f^{(n+1)}(\eta_{n+1}) - P_n^{(n+1)}(\eta_{n+1})}{(n+1)!} = \frac{f^{(n+1)}(\eta_{n+1})}{(n+1)!}\end{aligned}$$

La tesi segue osservando che $\eta_{n+1} = x_0 + \vartheta(x - x_0)$ con una opportuna scelta di $\vartheta$ in $(0, 1)$. ■

Le formule di Taylor con il resto di Peano forniscono il comportamento asintotico di una funzione regolare quando $x \to x_0$: in pratica si sostituisce a $f$ un polinomio $P_n$ (quindi una funzione analiticamente semplice), commettendo un errore di ordine superiore a $(x - x_0)^n$. Ne segue che l'uso di queste formule è particolarmente importante nel calcolo dei limiti, in presenza di forme di indecisione, e in tutti i casi in cui sia necessaria un'informazione sull'ordine di infinitesimo di una funzione.
Il seguente risultato, la cui dimostrazione è una semplice applicazione del procedimento per assurdo, risulta utile nelle applicazioni.

**Teorema 1.20** *Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in (a, b)$. Se*

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j (x - x_0)^j + o((x - x_0)^n)$$

*e anche*

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n} \beta_j (x - x_0)^j + o((x - x_0)^n)$$

*allora* $\alpha_j = \beta_j$ *per ogni* $j = 0, 1, ..., h$.

Questo teorema afferma che i coefficienti che stabiliscono il comportamento asintotico per $x \to x_0$ sono univocamente determinati: se ad esempio $f$ è derivabile $n$-volte in $x_0$, necessariamente

$$\beta_j = \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!} \qquad j = 0, 1, ...n$$

e l'unico polinomio in potenze di $(x - x_0)$ di grado non superiore a $n$, approssimante $f$ a meno di infinitesimi di ordine superiore a $(x - x_0)^n$ è il polinomio di Taylor di ordine $n$.

**Esempi.** Calcoliamo le formule di Taylor con resto di Peano di alcune funzioni elementari con centro in $x_0 = 0$, note anche con il nome di **formule di McLaurin.** Tutte le funzioni che prendiamo in considerazione sono di classe $C^\infty$ e quindi la formula può essere arrestata a un qualsiasi ordine.

1. Sia $f(x) = e^x$. Poiché

$$f^{(k)}(x) = e^x \qquad f^{(k)}(0) = 1 \qquad k \geq 0 \ ,$$

si ha

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) = \sum_{j=0}^{n} \frac{x^j}{j!} + o(x^n) \ .$$

2. Sia $f(x) = \log(1 + x)$. Poiché

$$f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k} \qquad f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1}(k-1)! \qquad k \geq 1 \ ,$$

si ha

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + ... + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n) = \\ = \sum_{j=1}^{n} \frac{(-1)^{j-1} x^j}{j} + o(x^n) \ .$$

3. Sia $f(x) = \sin x$. Poiché

$$\begin{array}{ll} f^{(k)}(x) = \cos x & k = 1 \text{ mod } 4 \\ f^{(k)}(x) = -\sin x & k = 2 \text{ mod } 4 \\ f^{(k)}(x) = -\cos x & k = 3 \text{ mod } 4 \\ f^{(k)}(x) = \sin x & k = 4 \text{ mod } 4 \end{array}$$

e quindi

$$f^{(k)}(0) = 0 \qquad k \geq 0 \text{ pari} \qquad f^{(k)}(0) = (-1)^i \qquad k \text{ dispari } k = 2i{+}1 \ ,$$

si ha se $n = 2i + 1$

$$\begin{aligned}\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ... + \frac{(-1)^i x^{2i+1}}{(2i+1)!} + o(x^{2i+1}) = \\ &= \sum_{j=1}^{i} \frac{(-1)^j x^{2j+1}}{(2j+1)!} + o(x^{2i+1}) \ .\end{aligned}$$

4. Sia $f(x) = \cos x$. Poiché

$$\begin{array}{ll} f^{(k)}(x) = -\sin x & k = 1 \bmod 4 \\ f^{(k)}(x) = -\cos x & k = 2 \bmod 4 \\ f^{(k)}(x) = \sin x & k = 3 \bmod 4 \\ f^{(k)}(x) = \cos x & k = 4 \bmod 4 \end{array}$$

e quindi

$$f^{(k)}(0) = 0 \qquad k \geq 0 \text{ dispari} \qquad f^{(k)}(0) = (-1)^i \qquad k \text{ pari } k = 2i \ ,$$

si ha se $n = 2i$

$$\begin{aligned}\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ... + \frac{(-1)^i x^{2i}}{(2i)!} + o(x^{2i}) = \\ &= \sum_{j=0}^{i} \frac{(-1)^j x^{2j}}{(2j)!} + o(x^{2i}) \ .\end{aligned}$$

5. Sia $f(x) = \mathrm{Sh}\, x$. Poiché

$$f^{(k)}(x) = \mathrm{Ch}\, x \qquad k \text{ dispari} \qquad f^{(k)}(x) = \mathrm{Sh}\, x \qquad k \text{ pari}$$

e quindi

$$f^{(k)}(0) = 1 \qquad k \text{ dispari} \qquad f^{(k)}(0) = 0 \qquad k \text{ pari} \ ,$$

si ha se $n = 2i + 1$

$$\mathrm{Sh}\, x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ... + \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!} + o(x^{2i+1}) = \sum_{j=1}^{i} \frac{x^{2j+1}}{(2j+1)!} + o(x^{2i+1}) \ .$$

6. Sia $f(x) = \mathrm{Ch}\, x$. Poiché

$$f^{(k)}(x) = \mathrm{Sh}\, x \qquad k \text{ dispari} \qquad f^{(k)}(x) = \mathrm{Ch}\, x \qquad k \text{ pari}$$

e quindi

$$f^{(k)}(0) = 0 \qquad k \text{ dispari} \qquad f^{(k)}(0) = 1 \qquad k \text{ pari}\ ,$$

si ha se $n = 2i$

$$\operatorname{Ch} x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ... + \frac{x^{2i}}{(2i)!} + o(x^{2i}) = \sum_{j=0}^{i} \frac{x^{2j}}{(2j)!} + o(x^{2i})\ .$$

7. Sia $f(x) = (1+x)^\alpha$, con $\alpha \in \mathbb{R}$. Poiché se $k \geq 1$

$$f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1)...(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}$$
$$f^{(k)}(0) = \alpha(\alpha-1)...(\alpha-k+1),$$

definendo (come estensione del coefficiente binomiale)

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-k+1)}{k!}\ ,$$

si ha

$$(1+x)^\alpha = 1+\alpha x+\binom{\alpha}{2}x^2+...+\binom{\alpha}{n}x^n+o(x^n) = \sum_{j=0}^{n}\binom{\alpha}{j}x^j+o(x^n)\ .$$

Se $\alpha = n \in \mathbb{N}$, per ogni $k > n$ si ha $\binom{\alpha}{k} = \binom{n}{k} = 0$ e quindi ritroviamo la ben nota formula di Newton

$$(1+x)^n = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}x^j\ .$$

## 1.5 Convessità e concavità

Questa sezione è dedicata allo studio di una proprietà del grafico di una funzione reale di variabile reale che gioca un ruolo molto importante, anche per le implicazioni che ha con la regolarità della funzione stessa, la convessità. Per brevità, ci limitiamo ad enunciare i risultati relativi, senza presentarne le dimostrazioni, tranne quando queste siano una applicazione significativa delle formule di Taylor.
Ricordiamo prima di tutto la definizione di insieme convesso nel caso bidimensionale (è quello di nostro interesse in questo momento), anche se in realtà l'ambiente naturale per questa definizione è uno spazio vettoriale.

**Definizione 1.21** *Sia $E \subseteq \mathbb{R}^2$. Diciamo che $E$ è convesso se presi due qualsiasi punti dell'insieme il segmento che li unisce è contenuto nell'insieme stesso, cioè*

$$\underline{p}, \underline{q} \in E \qquad \Rightarrow \qquad \lambda\underline{p} + (1-\lambda)\underline{q} \in E \quad \textit{per ogni } \lambda \in [0,1].$$

**Definizione 1.22** *Sia $f$ una funzione reale definita su un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$. Consideriamo i seguenti sottinsiemi di $\mathbb{R}^2$*

$$\Gamma^* = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in I \ , \ y \geq f(x)\}$$
$$\Gamma_* = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in I \ , \ y \leq f(x)\}.$$

*$\Gamma^*$ e $\Gamma_*$ sono detti rispettivamente sopragrafico e sottografico di $f$ su $I$. Diciamo che $f$ è convessa su $I$ se $\Gamma^*$ è convesso, diciamo che $f$ è concava su $I$ se $\Gamma_*$ è convesso.*

Osserviamo prima di tutto che $f$ è concava se e solo se $(-f)$ è convessa e quindi fissiamo la nostra attenzione sulla convessità. Inoltre l'intersezione $\Gamma^* \cap \Gamma_*$ coincide con il grafico di $f$ su $I$; ne segue che se $f$ è convessa, in particolare il segmento congiungente due qualsiasi punti del grafico di $f$, siano $A = (a, f(a))$ e $B = (b, f(b))$, deve appartenere al sopragrafico, vale a dire il grafico di $f$ sull'intervallo di estremi $a$ e $b$ deve trovarsi non al di sopra di tale segmento. Analiticamente scriviamo

$$a, b \in I \ , \ \lambda \in [0, 1] \Rightarrow f(\lambda a + (1 - \lambda)b) \leq \lambda f(a) + (1 - \lambda)f(b) \ ; \qquad (1.16)$$

infatti nella disuguaglianza, a primo membro c'è l'ordinata sul grafico del punto di ascissa $(\lambda a + (1 - \lambda)b)$, mentre a destra c'è l'ordinata sulla retta passante per i punti $A$ e $B$ del punto di ascissa $(\lambda a + (1 - \lambda)b)$. È immediato verificare che vale anche il viceversa e quindi possiamo affermare che $f$ è convessa se e solo se vale la (1.16). In questa disuguaglianza il segno di $=$ vale non solo per $\lambda = 0$ oppure $\lambda = 1$, ma anche ogni volta che il grafico di $f$ contiene tratti rettilinei; il caso limite è rappresentato dalla funzione $f(x) = mx + q$, $x \in \mathbb{R}$, (il grafico è una retta!!) che risulta ovviamente essere sia convessa che concava su $\mathbb{R}$.
L'importanza della convessità su un intervallo aperto è messa in luce dal seguente teorema.

**Teorema 1.23** *Sia $f : (\alpha, \beta) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Supponiamo che $f$ sia convessa. Allora*

1. *$f$ è continua in tutti i punti di $(\alpha, \beta)$*
2. *$f$ è derivabile da destra e da sinistra in ogni punto di $(\alpha, \beta)$*
3. *per ogni $x \in (\alpha, \beta)$ si ha $f'_-(x) \leq f'_+(x)$*
4. *se $f$ è derivabile su $(\alpha, \beta)$ allora la derivata $f'$ è una funzione monotona non decrescente.*

Osserviamo brevemente che la prima affermazione è falsa se l'intervallo di convessità non è aperto: basta considerare $f(x) = 0$ se $x \in (0, 1]$ e $f(0) = 1$.

Inoltre la convessità su un intervallo aperto non implica la derivabilità: basta considerare $f(x) = |x|$ su $\mathbb{R}$. Infine per le funzioni regolari è il segno della derivata seconda che caratterizza la convessità, come afferma il seguente teorema.

**Teorema 1.24** *Sia $f : (\alpha, \beta) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Supponiamo che $f$ sia derivabile due volte su $(\alpha, \beta)$. Allora $f$ è convessa su $(\alpha, \beta)$ se e solo se $f''(x) \geq 0$ per ogni $x \in (\alpha, \beta)$.*

Accanto alla convessità (globale) su un intervallo, nella letteratura si introduce anche il concetto (locale) di convessità in un punto e di retta supporto per il grafico, che viene poi esteso in ambiti ben più generali.

**Definizione 1.25** *Sia $f : (\alpha, \beta) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in (\alpha, \beta)$. Diciamo che $f$ è convessa in $x_0$ se esistono un intorno $U$ di $x_0$ e una retta passante per $(x_0, f(x_0))$ tali che il grafico di $f$ sia non al di sotto del grafico della retta su $U$, cioè se esistono un intorno $U$ e un numero reale $m$ tali che*

$$x \in U \quad \Rightarrow \quad f(x) \geq f(x_0) + m(x - x_0). \tag{1.17}$$

*La retta di equazione $y = f(x_0) + m(x - x_0)$ è detta retta supporto del grafico in $(x_0, f(x_0))$.*
*Diciamo poi che $f$ è concava in $x_0$ se $(-f)$ è convessa in $x_0$.*

Osserviamo prima di tutto che possono esistere più rette supporto del grafico in un punto di convessità: la funzione $f(x) = |x|$ ha come supporto del grafico in $(0, 0)$ qualsiasi retta $y = mx$ con $|m| \leq 1$. D'altra parte se $f$ è convessa e derivabile in $x_0$, la retta supporto è unica e coincide con la retta tangente al grafico in $(x_0, f(x_0))$; infatti, se vale la (1.17), si ha

$$f(x) - f(x_0) \geq m(x - x_0) \ .$$

Dividiamo per $(x - x_0)$ e passiamo al limite per $x \to x_0$: si ottiene

$$f'_+(x_0) \geq m \qquad\qquad f'_-(x_0) \leq m$$

e quuindi $f'(x_0) = m$ per l'ipotesi di derivabilità.
Come conseguenza, dalla convessità locale in un punto si ottiene una stima dal di sotto, almeno di tipo locale, dell'incremento della variabile dipendente (la funzione) mediante una funzione lineare nell'incremento della variabile indipendente.
Osserviamo anche che la convessità in un punto non garantisce la convessità su un intervallo contenente il punto (un intorno, ad esempio): la funzione

$$f(x) = \left(x \sin \frac{1}{x}\right)^2$$

definita per continuità nell'origine con $f(0) = 0$, è convessa in $x_0 = 0$, con retta supporto $y = 0$ (è la retta tangente in $(0, 0)$), ma non è convessa su alcun intervallo $(-\delta, \delta)$, dove il suo grafico presenta infinite oscillazioni.
Come per la convessità su un intervallo, una funzione è sia convessa che concava in ogni punto di un intervallo aperto su cui il suo grafico è rettilineo; in particolare, il segno di $=$ nella (1.17) può valere anche in punti distinti da $x_0$, come mostra l'esempio precedente.
Infine la convessità in un punto $x_0 \in (\alpha, \beta)$ non garantisce la continuità in $x_0$: un esempio banale si ottiene considerando la funzione nulla tranne che in $x_0 = 0$ dove poniamo $f(0) = -1$, che ha come retta supporto locale in $(0, -1)$ una qualsiasi retta passante per il punto. Si osservi che questa funzione è convessa anche in tutti i punti $x_0 \in \mathbb{R}$, con $x_0 \neq 0$ con retta supporto $y = 0$.
Quest'ultimo esempio fa capire che la convessità in tutti i punti di un intervallo non equivale alla convessità sull'intervallo. Si può però dimostrare il seguente teorema.

**Teorema 1.26** *Sia $f : (\alpha, \beta) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora $f$ è convessa su $(\alpha, \beta)$ se e solo se $f$ è convessa in ogni punto di $(\alpha, \beta)$.*

Per funzioni regolari, anche la convessità e la concavità in un punto sono legate al segno della derivata seconda nel punto. Infatti si ha

**Teorema 1.27** *Sia $f : (\alpha, \beta) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in (\alpha, \beta)$. Supponiamo che $f$ sia derivabile due volte in $x_0$. Allora*

1. *condizione sufficiente affinchè $f$ sia convessa in $x_0$ è che $f''(x_0) > 0$*
2. *condizione sufficiente affinchè $f$ sia concava in $x_0$ è che $f''(x_0) < 0$*
3. *condizione necessaria affinchè $f$ sia convessa in $x_0$ è che $f''(x_0) \geq 0$*
4. *condizione necessaria affinchè $f$ sia concava in $x_0$ è che $f''(x_0) \leq 0$*

**Dim.** La derivabilità della funzione in $x_0$, implica che la retta supporto in $(x_0, f(x_0))$, se esiste, è la retta tangente al grafico; mediante la formula di Taylor con centro in $x_0$ arrestata al secondo ordine, con resto di Peano, si ha

$$\begin{aligned} f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) &= \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + o\left((x - x_0)^2\right) = \\ &= (x - x_0)^2 \left\{ \frac{f''(x_0)}{2} + o(1) \right\} \end{aligned}$$

Ma allora, visto che la quantità in parentesi graffa è positiva in un intorno di $x_0$ se $f''(x_0) > 0$, si ha

$$f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \qquad x \in U(x_0) \qquad x \neq x_0$$

e analogamente se $f''(x_0) < 0$,

$$f(x) < f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \qquad x \in U(x_0) \qquad x \neq x_0 \ .$$

In questo modo si dimostrano le prime due affermazioni, anzi si ottiene una forma più forte, vista la disuguaglianza, e precisamente il grafico di $f$ in un intorno di $x_0$ coincide con la retta supporto solo nel punto $(x_0, f(x_0))$.
Le altre due affermazioni seguono banalmente: infatti se $f$ è convessa in $x_0$, non può essere $f''(x_0) < 0$ (altrimenti per il punto 2......)e quindi deve essere $f''(x_0) \geq 0$. ■
Consideriamo ora solo funzioni $f$ derivabili in un punto $x_0$; la retta tangente nel punto $(x_0, f(x_0))$ divide il piano in due regioni (semipiani) e la convessità o concavità di $f$ nel punto $x_0$ affermano che il grafico di $f$ stia localmente nello stesso semipiano. Una situazione importante che si può presentare è quella evidenziata dalla definizione seguente.

**Definizione 1.28** *Sia $f : (\alpha, \beta) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in (\alpha, \beta)$. Supponiamo che $f$ sia derivabile in $x_0$. Diciamo che $x_0$ è un punto di flesso se esiste un intorno $U$ di $x_0$ tale che*

$$\begin{aligned} x \in U, \quad x < x_0 \qquad &\Rightarrow f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \\ x \in U, \quad x > x_0 \qquad &\Rightarrow f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \end{aligned}$$

*oppure, scambiando le disuguaglianze,*

$$\begin{aligned} x \in U, \quad x < x_0 \qquad &\Rightarrow f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \\ x \in U, \quad x > x_0 \qquad &\Rightarrow f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \ . \end{aligned}$$

Se consideriamo le mutue posizioni del grafico di $f$ e della tangente, possiamo dire che $x_0$ è un punto di flesso se il grafico passa da una parte all'altra della tangente (da un semipiano all'altro) passando dalla destra alla sinistra del punto $x_0$.
In analogia a questa situazione, se $f$ non è derivabile in $x_0$, ma il suo grafico ha tangente verticale in $x_0$, si dice che $x_0$ è un punto di flesso a tangente verticale: infatti il grafico di $f$ passa da una parte all'altra della retta $x = x_0$ passando dalla destra alla sinistra di $x_0$.
A titolo d'esempio, consideriamo le funzioni

$$f_n(x) = x^{2n+1} \qquad g_n(x) = x^{\frac{1}{2n+1}} \qquad n \geq 1, \ n \text{ intero.}$$

Ogni $f_n$ ha derivata nulla in $x = 0$ e quindi la retta tangente al grafico in $(0, 0)$ è $y = 0$. Ovviamente $f_n(x)$ è positivo sui positivi e negativo sui negativi; quindi $x = 0$ è un punto di flesso a tangente orizzontale, poiché il grafico passa dal semipiano inferiore a quello superiore passando da sinistra a destra di $x = 0$.

Ogni $g_n$ non è derivabile in $x = 0$, ma, poiché $g_n'(x) \to +\infty$ se $x \to 0$, il grafico di $g_n$ ha tangente verticale in $x = 0$ (si veda il corollario (1.15); $x = 0$ è un punto di flesso a tangente verticale (il grafico di $g_n$ passa da sinistra a destra della retta $x = 0$ passando dai negativi ai positivi).
Osserviamo infine che le definizioni di convessità e concavità in un punto e di punto di flesso non esauriscono le situazioni he si possono presentare: potrebbe infatti capitare che in ogni intorno del punto $x_0$ il grafico di $f$ e della tangente al grafico si scambiassero tra di loro: un esempio è fornito dalla funzione $f(x) = x^3 \sin(1/x)$ se $x \neq 0$ e per continuità $f(0) = 0$. La funzione $f$ si annulla infinite volte.in ogni intorno di $x = 0$ e quindi il grafico incontra infinite volte la retta $y = 0$, cioè la tangente in $x = 0$.
Concludiamo questa sezione con due teoremi riguardanti la determinazione dei punti di flesso e dei punti estremanti, che risultano utili nello studio dell'andamento del grafico di una funzione (negli enunciati, l'intervallo $(\alpha, \beta)$ fa la parte di un intorno del punto $x_0$).

**Teorema 1.29** *Sia $f : (\alpha, \beta) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in (\alpha, \beta)$. Supponiamo che $f$ sia derivabile due volte su $(\alpha, \beta)$. Allora*

1. *condizione necessaria affinchè $x_0$ sia un punto di flesso è che $f''(x_0) = 0$*

2. *condizione sufficiente affinchè $x_0$ sia un punto di flesso è che $f''(x_0) = 0$ e $f''(x)$ cambi degno passando da sinistra a destra di $x_0$.*

**Dim.** La prima affermazione segue ovviamente dal teorema (1.27) e dalla definizione di punto di flesso. Quanto alla seconda, supponiamo, per fissare le idee, $f''(x) < 0$ per $x < x_0$ e $f''(x) > 0$ per $x > x_0$; scriviamo la formula di Taylor con centro in $x = x_0$, al secondo ordine e resto di Lagrange. Esiste quindi un punto $\xi$ nell'intervallo di estremi $x$ e $x_0$ tale che

$$f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = \frac{f''(\xi)}{2}(x - x_0)^2.$$

Il secondo membro è positivo se $x > x_0$ e negativo se $x < x_0$ e quindi, per definizione, $x_0$ è un punto di flesso. ■

**Teorema 1.30** *Sia $f : (\alpha, \beta) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in (\alpha, \beta)$. Supponiamo che $f$ sia derivabile $n$-volte in $x_0$, dove $n > 1$, e*

$$f'(x_0) = f''(x_0) = .... = f^{(n-1)}(x_0) = 0 \qquad f^{(n)}(x_0) \neq 0\ .$$

*Allora*

1. *se $n$ è pari e $f^{(n)}(x_0) > 0$ il punto $x_0$ è un punto di minimo*

2. *se $n$ è pari e $f^{(n)}(x_0) < 0$ il punto $x_0$ è un punto di massimo*

*3. se $n$ è dispari il punto $x_0$ è un punto di flesso a tangente orizzontale.*

**Dim.** Cominciamo da $n$ pari e scriviamo la formula di Taylor arrestata all'ordine $n$ con resto di Peano. Si ha

$$
\begin{aligned}
f(x) - f(x_0) &= \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n) = \qquad (1.18)\\
&= (x-x_0)^n \left\{ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + o(1) \right\} .
\end{aligned}
$$

La tesi segue osservando che il secondo membro ha il segno della derivata $n$-esima.
Se $n$ è dispari (quindi $n \geq 3$), osserviamo prima di tutto che $x_0$ è un punto stazionario; la retta tangente è $y = f(x_0)$ e la stessa formula (1.18) ci dice che il grafico di $f$ si scambia con quello della tangente (cioè la differenza $(f(x) - f(x_0))$ cambia segno) passando da una parte all'altra di $x_0$, poiché il segno del secondo membro questa volta dipende dal fattore $(x - x_0)^n$. ■

## 1.6 Lo studio del grafico

Consideriamo una funzione $f$ reale di variabile reale: in realtà dovremmo precisare il suo insieme di definizione, poiché una funzione non è solo la legge che, nel nostro caso, ad un numero reale associa un altro numero reale, ma è anche l'insieme degli elementi su cui opera. Di fatto è invalsa l'abitudine di assegnare la legge $f$ e chiamare con il nome di insieme di definizione, che nel seguito denoteremo con $E$, il più ampio sottinsieme di $\mathbb{R}$ su cui tale legge può agire, dando luogo a valori reali. Ad esempio, le funzioni

$$
\begin{array}{ll}
f(x) = \sqrt{x} & \qquad x \in [0,5) \\
g(x) = \sqrt{x} & \qquad x \in (0,100] \\
h(x) = \sqrt{x} & \qquad x \in [5,+\infty)
\end{array}
$$

sono diverse fra loro e hanno proprietà differenti: $f$ non è derivabile in tutti i punti, mentre $g$ e $h$ lo sono; $f$ e $g$ sono limitate, mentre $h$ non lo è; $h$ ha minimo positivo, mentre $f$ e $g$ hanno estremo inferiore nullo. Infine nulla vieta di considerare $f(x) = \sqrt{x}$ come applicazione a più (due) valori definita su $\mathbb{C}$.
Ma convenzionalmente, cioè se non ci sono precisazioni a riguardo, l'insieme di definizione della funzione a valori reali $f(x) = \sqrt{x}$ è inteso come l'intervallo $[0, +\infty)$.
Se si vuole dare una rappresentazione del grafico di $f$ sul suo insieme di definizione $E$, occorrono delle informazioni: che cosa occorre sapere?
Possiamo dire che serve conoscere la regolarità di $f$, cioè la continuità, con l'individuazione di eventuali punti di discontinuità (precisandone il tipo), la

derivabilità con l'individuazione di eventuali punti angolosi, cuspidi o punti a tangente verticale; inoltre occorre conoscere i limiti alla frontiera (che possono anche coincidere con valori assunti dalla funzione, se è continua), il segno, il crescere e il decrescere, con gli eventuali punti estremanti relativi, la convessità e la concavità, con gli eventuali punti di flesso.
Abbiamo presentato questi argomenti volutamente alla rinfusa, poiché alle volte non è possibile ottenere alcune informazioni (il segno di $f$ o i suoi zeri, gli zeri di $f'$ o di $f''$,...), anzi in certi casi lo studio di funzione serve proprio ad avere qualcuna di queste informazioni; in ogni caso non esiste un ordine precostituito in cui procedere e ciascuno si comporta a suo modo cercando di minimizzare la fatica.
Alla fine di questo paragrafo, vogliamo precisare una situazione, e precisamente quello delle rette asintoto per il grafico. Ricordiamo che se $x_0 \in E'$, cioè è un punto di accumulazione di $E$, e se si ha

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty \qquad \text{oppure} \lim_{x\to x_{0_+}} f(x) = +\infty \qquad \text{oppure} \lim_{x\to x_{0_-}} f(x) = +\infty$$

(dove a $+\infty$ si può sostituire $-\infty$), diciamo che la retta $x = x_0$ è asintoto verticale per il grafico di $f$.
Se l'insieme di definizione $E$ non è limitato superiormente diciamo che la retta $y = c$ è asintoto orizzontale per il grafico di $f$ per $x \to +\infty$ (analogamente per $x \to -\infty$ nel caso che $E$ non sia limitato inferiormente, sostituendo $-\infty$ a $+\infty$) se

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = c \in \mathbb{R}.$$

Quest'ultima situazione dice che il grafico di $f$ è "essenzialmente rettilineo" per $x$ grande, poiché per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $M = M(\varepsilon)$ tale che

$$c - \varepsilon < f(x) < c + \varepsilon \qquad \text{per ogni } x \in E,\ x > M.$$

Evidentemente non c'è alcun motivo per prediligere le rette orizzontali a quelle con coefficiente angolare $m \neq 0$; siamo quindi condotti alla seguente definizione.

**Definizione 1.31** *Sia $E \subseteq \mathbb{R}$ non limitato superiormente e $f : E \to \mathbb{R}$. Diciamo che la retta $y = mx + q$ è asintoto per il grafico di $f$ per $x \to +\infty$ se*

$$f(x) = mx + q + o(1).,\tag{1.19}$$

*dove $o(1)$ denota un infinitesimo per $x \to +\infty$. In particolare, se $m \neq 0$, parliamo di asintoto obliquo.*
*Una definizione analoga si ha sostituendo $-\infty$ a $+\infty$, se $E$ non è limitato inferiormente.*

La (1.31) afferma che la distanza nel piano tra il punto sul grafico e il punto sulla retta asintoto aventi la medesima ascissa è infinitesima per $x \to +\infty$; infatti la distanza tra $(x, f(x))$ e $(x, mx + q)$ è

$$\sqrt{(f(x) - mx - q)^2} = |f(x) - mx - q| = o(1).$$

È immediato verificare che il grafico di $f$ presenta asintoto per $x \to +\infty$ se e solo se

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = m \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to+\infty} [f(x) - mx] = q \ . \tag{1.20}$$

Infatti, se vale la (1.19), per $x \to +\infty$ si ha

$$\frac{f(x)}{x} = m + \frac{q}{x} + \frac{o(1)}{x} \to m$$

$$f(x) - mx = q + o(1) \to q$$

Viceversa, se vale la seconda delle (1.20) (con $m$ determinato dalla prima), ovviamente per $x \to +\infty$

$$f(x) - mx = q + o(1) \ .$$

Come esempio, le funzioni scritte nella tabella hanno come asintoto le rette scritte sulla medesima riga

| | | |
|---|---|---|
| $f(x) = -x + \operatorname{artg} x$ | $x \to \pm\infty$ | $y = -x \pm \pi/2$ |
| $f(x) = 5x + \frac{\sin x}{x}$ | $x \to \pm\infty$ | $y = 5x$ |
| $f(x) = \frac{x^2+\log x}{3x^2+\cos x}$ | $x \to +\infty$ | $y = \frac{1}{3}$ |
| $f(x) = \sqrt{(1-x)(3-x)} + 3 + \frac{1}{x}$ | $\begin{cases} x \to +\infty \\ x \to -\infty \end{cases}$ | $\begin{cases} y = x + 1 \\ y = -x + 5 \end{cases}$ |

Osserviamo che, se $f$ è derivabile su un intervallo non limitato, sia ad esempio $(b, +\infty)$, e $f'$ ammette limite finito e non nullo per $x \to +\infty$, dal teorema di de L'Hopitâl segue che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} f'(x)$$

cioè il limite della funzione derivata è il coefficiente angolare dell'eventuale (!!) asintoto obliquo. La determinazione dell'ordinata all'origine, e quindi dell'esistenza o meno dell'asintoto obliquo, va poi affrontata con la seconda delle (1.20). Non basta quindi che $f'$ abbia limite finito per $x \to +\infty$; ad esempio la funzione

$$f(x) = x + \log x$$

ovviamente non ha asintoto obliquo a $+\infty$, pur essendo $f'(x) \to 1$.
D'altra parte, può capitare che esista l'asintoto obliquo, ma $f'$ non abbia limite a $+\infty$: in questo caso, l'esempio è fornito dalle funzioni

$$f(x) = mx + q + \frac{\sin(x^2)}{x} \qquad m, q \in \mathbb{R},$$

i cui grafici hanno come asintoto le rette $y = mx + q$, visto che l'ultimo addendo è infinitesimo a $+\infty$, mentre le funzioni derivate

$$f'(x) = m - \frac{\sin(x^2)}{x^2} + 2\cos(x^2)$$

non hanno limite a $+\infty$.

Carlamaria Maderna
Professore Associato
Dipartimento di Matematica
Università degli Studi di Milano