Continuità e derivabilità

La derivabilità è una nozione *più forte* della continuità. Vale infatti il seguente:

Teorema. *Sia* $f : \operatorname{dom} f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. *Se* f *è derivabile in* x_0, *allora* f *è continua in* x_0.

Dimostrazione. Se f è derivabile in x_0, allora

$$\lim_{x \to x_0} \left(f\left(x\right) - f\left(x_0\right)\right) =$$

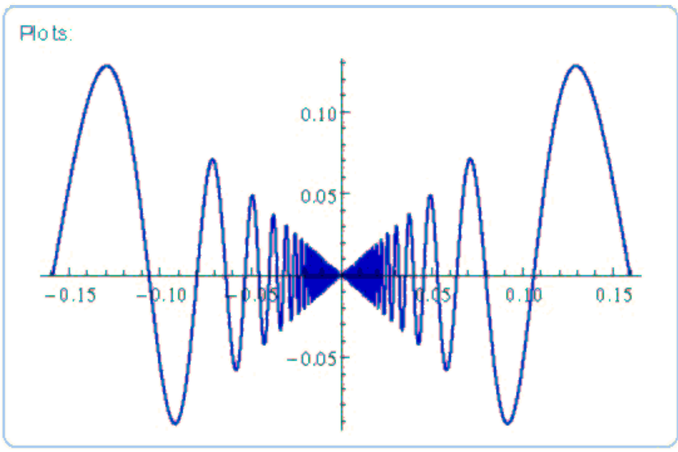
e quindi f è continua in x_0. ■

Non vale il viceversa: la continuità è *necessaria* alla derivabilità, *ma non sufficiente*.

Ad esempio, la funzione

$$f\left(x\right) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

è continua ma non derivabile in $x_0 = 0$ (il limite del rapporto incrementale in 0 non esiste).



Altri esempi tipici sono le funzioni $|x|$, $\sqrt[3]{x}$ e $\sqrt{|x|}$ nel punto $x_0 = 0$ (v. più avanti). Esistono inoltre funzioni continue su tutto $\mathbb{R}$ e non derivabili in alcun punto (ad esempio le già citate *funzioni di Weierstrass*).

Derivate unilaterali (destre o sinistre)

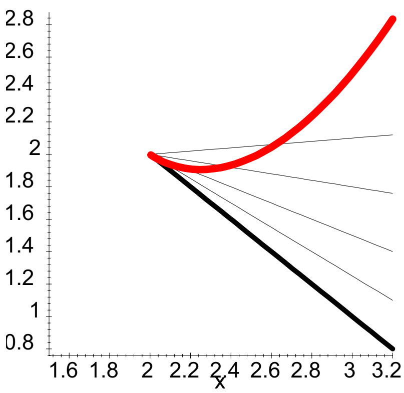
Si definiscono considerando i limiti unilaterali del rapporto incrementale.

Definizione. *Sia* $f : \operatorname{dom} f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definita in un intorno* $I\left(x_0^+\right)$ *di un punto* $x_0 \in \mathbb{R}$. *Chiamiamo* ***derivata destra*** *di* f *in* x_0 *il valore*

$$\boxed{f'_+\left(x_0\right) := \lim_{x \to x_0^+} \frac{f\left(x\right) - f\left(x_0\right)}{x - x_0}}$$ *se il limite esiste* *(finito o infinito).*

Se $f'_+\left(x_0\right) \in \mathbb{R}$, *diciamo che* f *è* ***derivabile da destra*** *in* x_0. *Analogamente per* $f'_-\left(x_0\right)$.

• Graficamente: considerare $x \to x_0^+$ significa guardare solo le secanti con punto variato $\left(x, f\left(x\right)\right)$ a destra del punto base $\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$.



Se $f'_+\left(x_0\right) \in \mathbb{R}$, *la retta* $\boxed{y = f\left(x_0\right) + f'_+\left(x_0\right)\left(x - x_0\right)}$ *è detta* ***tangente destra*** *ad* f *in* x_0.

Se $f'_+\left(x_0\right) = \pm\infty$ *ed* f *è continua da destra in* x_0, allora le secanti tendono a disporsi verticalmente e *si chiama* ***tangente destra*** *ad* f *in* x_0 *la retta* $\boxed{x = x_0}$.

• **Proposizione.** *Se* f *è definita in un intorno* ***completo*** *di* x_0, *allora:*

$$f \text{ è derivabile in } x_0 \iff f'_+\left(x_0\right) \text{ ed } f'_-\left(x_0\right) \text{ esistono finite e sono uguali.}$$

In tal caso, $f'\left(x_0\right) = f'_+\left(x_0\right) = f'_-\left(x_0\right)$.

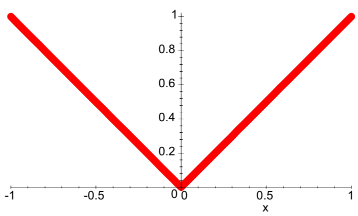
Punti di non derivabilità

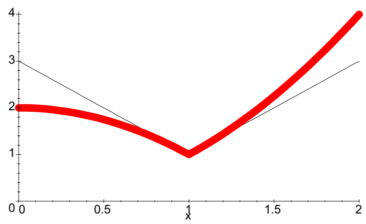
Approfondiamo lo studio dei punti in cui non c'è derivabilità.

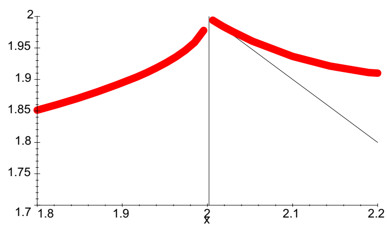
È ovvio che *se f non è continua in x_0 allora non è derivabile in x_0* (derivabile $\Rightarrow$ continua), quindi il caso interessante è quello dei punti x_0 in cui f sia *continua ma non derivabile.*

Definizione (punti di non derivabilità notevoli). *Sia $f : \operatorname{dom} f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita in un $I(x_0)$ completo e continua in x_0. Supponiamo inoltre che $f'_+(x_0)$ ed $f'_-(x_0)$ esistano.*

$\boxed{\mathbf{1}}$ *Se $f'_+(x_0) \neq f'_-(x_0)$ ed almeno una è finita, si dice che x_0 è un* ***punto angoloso*** (le tangenti destra e sinistra formano un angolo)

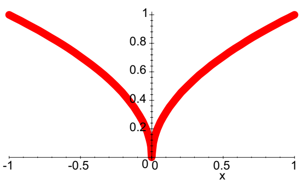




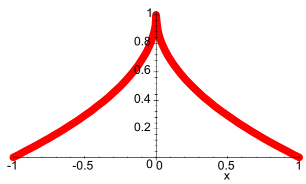


$f(x) = |x|, \quad f'_\pm(0) = \pm 1$ $\qquad$ $f'_-(x_0), f'_+(x_0) \in \mathbb{R}$ $\qquad$ $f'_-(x_0) = +\infty, \ f'_+(x_0) \in \mathbb{R}$

$\boxed{\mathbf{2}}$ *Se $f'_+(x_0) \neq f'_-(x_0)$ sono entrambe infinite, si dice che x_0 è un* ***punto di cuspide*** ($x = x_0$ è tangente sia destra che sinistra)

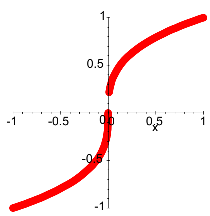


$$f(x) = \sqrt{|x|}$$
$$f'_\pm(0) = \pm\infty$$

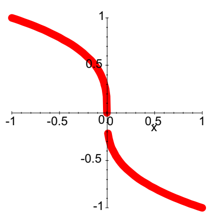


$$f(x) = 1 - \sqrt{|x|}$$
$$f'_\pm(0) = \mp\infty$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ *Se $f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$ sono entrambe infinite, si dice che x_0 è un* ***punto di flesso a tangente verticale*** ($x = x_0$ è tangente sia destra che sinistra)



$$f(x) = \sqrt[3]{x}$$
$$f'_\pm(0) = +\infty$$



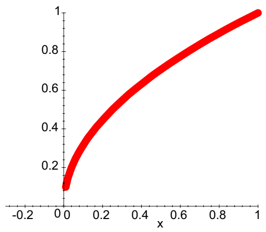
$$f(x) = -\sqrt[3]{x}$$
$$f'_\pm(0) = -\infty$$

Osservazioni.

- Non si classificano i casi in cui almeno una tra $f'_+(x_0)$ ed $f'_-(x_0)$ non esiste.

- *Se f è definita* ***solo a destra*** *di x_0, è continua in x_0 e risulta $f'_+(x_0) = \pm\infty$, si dice semplicemente che x_0 è un* ***punto a tangente verticale****.*

Analogamente a sinistra.



$$f(x) = \sqrt{x}, \quad f'_+(0) = +\infty$$

Due esercizi svolti (sullo studio della derivabilità)

Esercizio 1. Studiare la derivabilità di $f(x) = x \sin \sqrt[3]{x}$ e calcolare $f'(x)$, ove esista.

Svolgimento. Si ha $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}$.

- Se $x_0 \neq 0$, allora f è derivabile in x_0 per i teoremi sulle regole di derivazione. Infatti $f(x)$ è il prodotto di $f_1(x) = x$, che è derivabile ovunque, ed $f_2(x) = \sin \sqrt[3]{x}$, che è derivabile in $x_0 \neq 0$ in quanto composta delle funzioni $\sqrt[3]{x}$ (derivabile in $x_0 \neq 0$) e $\sin x$ (derivabile su $\mathbb{R}$ e quindi in $\sqrt[3]{x_0}$). La derivata $f'(x)$ in $x \neq 0$ si ottiene tramite regole di derivazione:

$$f'(x) = \sin \sqrt[3]{x} + xD(\sin \sqrt[3]{x}) = \sin \sqrt[3]{x} + x\cos(\sqrt[3]{x})D\sqrt[3]{x} = \sin \sqrt[3]{x} + \tfrac{1}{3}\sqrt[3]{x}\cos \sqrt[3]{x}.$$

- La derivabilità in $x_0 = 0$ non segue dalle regole di derivazione e quindi va studiata tramite la definizione (v. anche teorema del tappabuchi più avanti). Si ha

$$\lim_{x\to 0} \tfrac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \tfrac{x \sin \sqrt[3]{x}}{x} = \lim_{x\to 0} \sin \sqrt[3]{x} = 0,$$

per cui f è derivabile anche in 0 ed $f'(0) = 0$.

Esercizio 2. Studiare la derivabilità di $f(x) = \begin{cases} g_1(x) & \text{se } x \geq a \quad \text{con } g_1, g_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ g_2(x) & \text{se } x < a \quad \text{derivabili ovunque.} \end{cases}$

Nello studio delle funzioni definite a tratti, è utile tener presente che, poiché la derivata è un limite, dal carattere locale del limite segue quello della derivata:
se $f(x) = g(x)$ in un $I(x_0)$, allora f è derivabile in x_0 se e solo se g è derivabile in x_0; in tal caso, $f'(x_0) = g'(x_0)$.
Analogamente per le derivate destre e sinistre se $f(x) = g(x)$ in un $I(x_0^{\pm})$.

Svolgimento.

• Se $x_0 \neq a$, allora f coincide con g_1 o g_2 in tutto un $I(x_0)$ e quindi f è derivabile in x_0 (perché lo sono g_1 e g_2) con $f'(x_0) = g_1'(x_0)$ se $x_0 > a$ ed $f'(x_0) = g_2'(x_0)$ se $x_0 < a$. Dunque

$$f'(x) = \begin{cases} g_1'(x) & \text{se } x > a \\ g_2'(x) & \text{se } x < a \end{cases}.$$

• Se $x_0 = a$, allora f coincide con g_1 in tutto un $I(x_0^+)$ e quindi f è derivabile da destra in $x_0 = a$ (perché lo è g_1) con $f_+'(a) = g_1'(a)$.

• La derivabilità completa di f in $x_0 = a$ va studiata calcolando $f_-'(a) = \lim_{x \to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ (v. anche teorema del tappabuchi) e controllando se $f_-'(a)$ coincide con $f_+'(a)$ o meno.