Se f è continua e derivabile su tutto R ed ha in x=π un massimo assoluto, allora

(a) ***$f''(\pi)=0$*** (b) $f''(\pi) > 0$

(c) $f''(\pi) < 0$ ***(d) nessuna delle risposte precedenti è corretta.***

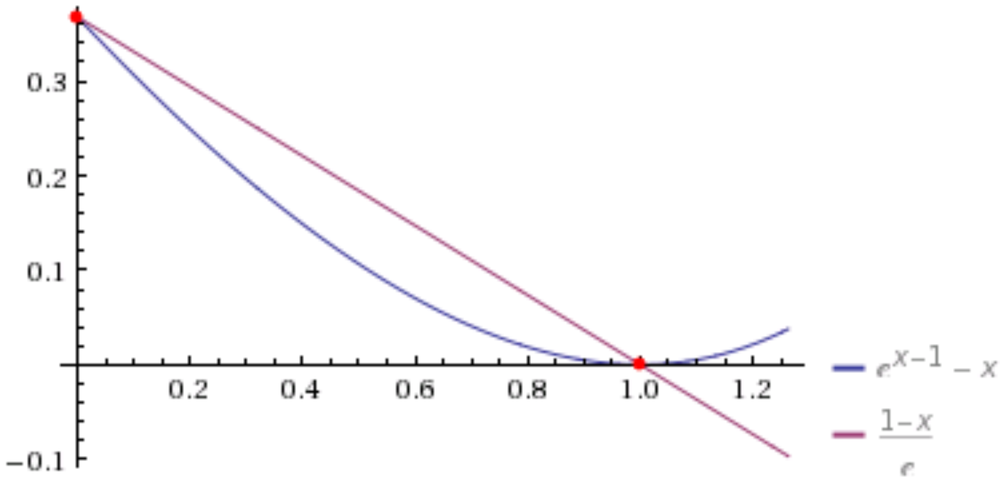
La risposta corretta è la (d) in quanto nessuna ipotesi è stata fatta sull'esistenza della derivata seconda di *f*.

Dimostrare che $e^{x-1} - x \leq \frac{1-x}{e}$ ***per ogni*** $x \in [0, 1]$.

Si riscrive la disequazione così:

$$e^x \leq (e-1)x + 1$$

la retta $y = (e-1)x + 1$ passa per $A(0,1) e\ B(1,e)$ e in tali punti interseca il grafico di $y = e^x$. La funzione $y = e^x$ è convessa su tutto R e quindi il suo grafico tra due punti A e B giace sotto ogni corda avente per estremi A e B.
Plottando le due funzioni $y = e^{x-1} - x$, $y = \frac{1-x}{e}$ si ottiene:



che conferma il risultato ottenuto.

Determinare per quali valori del parametro reale α la funzione

$$f(x) = -\frac{x^2}{2}\left(\ln x - \frac{3}{2} - \frac{\alpha x}{3}\right)$$

è convessa su tutto il suo dominio?

La funzione è definita su $D = R^+$ e su suo dominio risulta continua e derivabile infinite volte. La derivata prima di *f* è:

$$f'(x) = \frac{1}{2}x(\alpha x - 2lnx + 2)$$

mentre la sua derivata seconda è:

$$f''(x) = \alpha x - lnx.$$

Se vogliamo che la funzione rivolga sempre la concavità verso l'alto dobbiamo imporre la condizione $f''(x) > 0$:

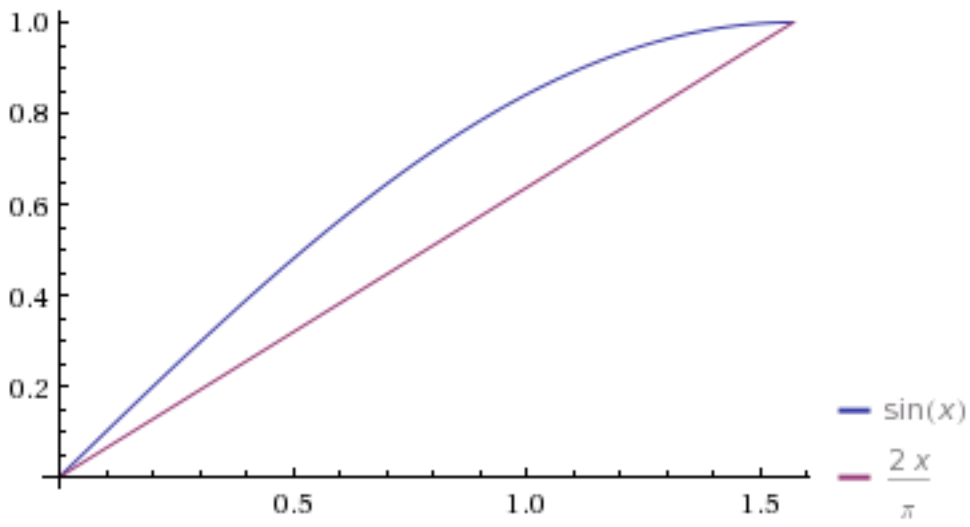
$$\alpha x - lnx > 0 \to \frac{lnx}{x} < \alpha.$$

Un semplice studio della funzione $g(x) = \frac{lnx}{x}$ porta a concludere che il suo massimo è $M\left(e; \frac{1}{e}\right)$ e quindi per $\alpha > \frac{1}{e}$ vale la proprietà richiesta.

Dopo aver dato la definizione di funzione convessa e concava su un intervallo, sfruttarla opportunamente per provare la validità della diseguaglianza $\boldsymbol{sinx \geq \frac{2}{\pi}x}$ sull'intervallo $\boldsymbol{\left[0, \frac{\pi}{2}\right]}$.

Dalla definizione di convessità e concavità sappiamo che una funzione f continua su un intervallo [a;b] è convessa (cioè concava verso l'alto) su [a;b] il suo grafico su [a;b] giace al di sopra della corda di estremi $A(a; f(a))$, $B(b; f(b))$. Se la funzione è derivabile due volte, invece, si dimostra che la concavità verso l'alto (o convessità) si traduce algebricamente nella condizione f"(x)>0 su [a;b] e geometricamente nella condizione di grafico al di sopra della retta tangente alla curva sull'intervallo [a;b]. La differenza tra le due definizioni è sostanziale: la prima è una proprietà più "globale" essendo riferita a ciò che accade su un intero intervallo mentre la seconda è chiaramente una definizione "puntuale" che richiede l'analisi di ciò che accade punto per punto.
La funzione $f(x) = sinx$, $D = R$ è continua e derivabile infinite volte con derivata continua sul suo dominio e in particolare su $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ la sua derivata seconda è negativa. Ciò significa che il grafico di f giace al disopra della corda di estremi $O(0; 0)$ e $\left(\frac{\pi}{2} ; 1\right)$. Tale corda ha equazione $y = \frac{2}{\pi}x$ e quindi risulta $sinx \geq \frac{2}{\pi}x$.

Il grafico mostra la validità del risultato ottenuto.



Siano f, g funzioni continue su [a,b] e derivabili su (a,b). Verificare che la funzione

$$\boldsymbol{H(x) = f(x)\big(g(b) - g(a)\big) - g(x)\big(f(b) - f(a)\big) - f(a)g(b) + f(b)g(a)}$$

soddisfa le ipotesi del teorema di Rolle su (a,b). Valutare, quindi, H(x) nel punto c di cui tale teorema garantisce l'esistenza e discutere il risultato ottenuto.

La funzione H risulta continua su [a;b] in quanto composizione di funzioni continue su tale intervallo. Inoltre è derivabile su (a;b) in quanto composizione di funzioni derivabili su (a;b). Resta da verificare l'ulteriore ipotesi $H(a) = H(b)$.
È facile verificare tale ipotesi:

$$H(a) = f(a)\big(g(b) - g(a)\big) - g(a)\big(f(b) - f(a)\big) - f(a)g(b) + f(b)g(a) = 0$$
$$H(b) = f(b)\big(g(b) - g(a)\big) - g(b)\big(f(b) - f(a)\big) - f(a)g(b) + f(b)g(a) = 0$$

Vale allora il teorema di Rolle, cioè esiste almeno un punto $c \in R: H'(c) = 0$.
La derivata prima di H è:

$$H'(x) = f'(x)\big(g(b) - g(a)\big) - g'(x)\big(f(b) - f(a)\big).$$

Se calcoliamo tale derivata in *x=c* abbiamo:

$$f'(c)\big(g(b) - g(a)\big) = g'(c)\big(f(b) - f(a)\big)$$

e se si ipotizza $g'(x) \neq 0 \ \forall x \in (a;b)$, segue l'enunciato del teorema di Cauchy.

Verifica che nessuna retta tangente al grafico di

$$\boldsymbol{y = x + \frac{1}{x}}$$

passa per l'origine degli assi.

Scrivendo esplicitamente la retta tangente al grafico della funzione in un generico punto $(x_o; y_o)$ si ottiene q=2/x_0 e quindi tale retta non può passare per l'origine. Nei dettagli, il conto è il seguente. La funzione è definita in $D = R - \{0\}$ ed ivi risulta continua e derivabile, con derivata prima continua. La derivata prima è

$$y'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} \rightarrow y'(x_0) = 1 - \frac{1}{x_0^2}$$

e la retta tangente in $(x_o; y_o)$ è

$$y - \left(x_0 + \frac{1}{x_0}\right) = \left(1 - \frac{1}{x_0^2}\right)(x - x_0) \rightarrow m = 1 - \frac{1}{x_0^2}, q = \frac{2}{x^0}.$$

Siano a,b,c numeri reali non nulli e tali che $a \neq 2c$. Si consideri la funzione

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{ax^2 + 2bx + a}{cx^2 + bx + c}}$$

Verificare che se $2c - b = 0$ allora l'unico punto stazionario della funzione è x=1.

Se 2c=b allora la funzione *f* si riscrive come $f(x) = \frac{ax^2+2bx+a}{c(x^2+2x+1)}$. La funzione f è quindi definita su $D = \{x \in R: x \neq -1\}$. Sul suo domino f è continua e derivabile e la sua derivata prima è:

$$f'(x) = \frac{2(a-b)(x-1)}{c(x+1)^3}$$

Essendo per ipotesi $a \neq 2c$ allora $a \neq b$, la derivata non è identicamente nulla e l'unico punto stazionario di *f* è x=1.

Sia f una funzione continua e derivabile sull'intervallo [1,2] e tale che $f(2) = 1$. Si consideri quindi la funzione

$$\boldsymbol{G(x) = \left[f(x) - sin\left(\frac{\pi}{x}\right)\right] \cdot lnx.}$$

Dimostrare che esiste almeno un punto stazionario per G sull'intervallo (1;2).

La funzione G è continua su [1;2] e derivabile su (1;2) e risulta

$$G(1) = \left[f(1) - sin\left(\frac{\pi}{1}\right)\right] \cdot ln1 = 0$$

$$G(2) = \left[f(2) - sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] \cdot ln2 = 0 \cdot ln2 = 0$$

quindi G soddisfa le ipotesi del teorema di Rolle. Possiamo quindi garantire l'esistenza di almeno un punto $c \in (1; 2)$ in cui $G'(x) = 0$.

Verificare che la funzione $f(x) = \frac{lnx}{x}$ risulta monotona strettamente decrescente su $(e; +\infty)$ e dedurre la validità della disuguaglianza $\pi^e < e^\pi$.

La funzione $f(x) = \frac{lnx}{x}$ ha dominio naturale $D = \{x \in R: x > 0\}$. Su D la funzione risulta continua e derivabile con derivata prima

$$f'(x) = \frac{1 - lnx}{x^2}.$$

Un rapido studio del segno di $f'(x)$ porta a concludere che la funzione f risulta monotona strettamente decrescente su $(e; +\infty)$, monotona strettamente crescente su $(0; e)$ e che il punto $x = e$ risulta un massimo (assoluto) per f.
In particolare, poiché $\pi > e$, si deve avere

$$f(\pi) < f(e) \to \frac{ln\pi}{\pi} < \frac{lne}{e} \to eln\pi < \pi lne \to ln\pi^e < lne^\pi \to \pi^e < e^\pi.$$

L'equazione $lnx + arctgx - 2016 = 0$ ammette soluzioni su $D = (0; +\infty)$? In caso affermativo, cosa si può dire circa il numero di tali soluzioni?

Data la forma dell'intervallo, non possiamo utilizzare direttamente il teorema degli zeri. Poniamo $\varphi(x) = lnx + arctgx - 2016$ iniziamo con il calcolare i limiti agli estremi di D, che è il dominio della funzione:

$$\varphi(x) \to -\infty \; se \; x \to 0^+, \quad \varphi(x) \to +\infty \; se \; x \to +\infty$$

ma allora per il teorema della permanenza del segno esistono due intorni $U(0), U(+\infty)$ sui quali si ha rispettivamente $\varphi(x) < 0 \; e \; \varphi(x) > 0$:

$$\lim_{x \to 0^+} \varphi(x) = -\infty \to \exists U(0): \varphi(x) < 0 \to \exists \; a \in U(0): \varphi(a) < 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} \varphi(x) = +\infty \; \to \; \exists U(+\infty): \varphi(x) > 0 \to \exists \; b \in U(+\infty): \varphi(b) > 0$$

e abbiamo creato quindi un intervallo $[a; b]$ sul quale vale il teorema degli zeri e possiamo quindi garantire l'esistenza di un punto $c \in (a; b)$ tale che $\varphi(c) = 0$.

La funzione $\varphi(x) = lnx + arctgx - 2016$ è derivabile su D e si ha:

$$\varphi'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{1 + x^2} > 0 \; \forall x \in D$$

e quindi possiamo garantire l'unicità dello zero di cui sopra abbiamo dimostrato l'esistenza.

Il metodo utilizzato in questo esercizio può essere esteso a tutti casi analoghi in cui è richiesto di verificare l'esistenza di una soluzione di un'equazione sul suo dominio. Pur essendo un metodo molto formale, evita di ricercare direttamente l'intervallo sul quale applicare il teorema degli zeri, ricerca che a volte può risultare non agevole.

Verificare che la funzione

$$\boldsymbol{f_\lambda(x) = \lambda x^3 + \lambda x^2 + 2\lambda x + 1, \qquad \lambda \in R, \lambda \neq 0}$$

ammette un solo zero x_0 <0 se $\lambda > 0$ e ammette un solo zero x_1>0 se $\lambda < 0$.

Di questo quesito forniamo solo la traccia della soluzione.
Applicando opportunamente il teorema degli zeri si ottiene l'esistenza degli zeri. Derivando la funzione ed osservandone la monotonia stretta segue l'unicità di tali zeri.

Per dimostrare l'esistenza degli zeri ragionare come di seguito:

se λ è positivo $f \to -\infty \; per \; x \to -\infty$ allora per il teorema della permanenza del segno esiste un intorno $I(-\infty)$ tale che

$$f(x) < 0 \;\forall x \in I(-\infty), con\; I(-\infty) = (-\infty, \alpha), \alpha < 0.$$

Ma allora esiste in tale intorno un punto *x=a* tale che *f(a)<0*. Osservando che f(0)=1, si ha allora che su [a,0] risulta verificato il teorema degli zeri e quindi la funzione *f* ammette almeno un zero *x=x_0 <0*. Seguendo un ragionamento analogo si dimostra che se λ<0 la funzione ammette uno zero positivo.

Esistono valori del parametro reale b per i quali la funzione

$$\boldsymbol{f(x) = ln\,(x^2 + bx)}$$

risulta convessa su tutto il suo insieme di definizione?

Il dominio della funzione dipende dal parametro reale b:

$$\begin{gathered} Se\; b = 0\; D = \; R - \{0] \\ Se\; b < 0\;\; D = (-\infty; 0) \cup (-b; +\infty) \\ Se\; b > 0\; D = (-\infty; -b) \cup (0;\; +\infty) \end{gathered}$$

La funzione *f* è continua e derivabile due volte su tutto il suo dominio D e le derivate prima e seconda sono:

$$f'(x) = \frac{2x + b}{x^2 + bx}$$

$$f''(x) = \frac{-(2x^2 + 2bx + b^2)}{(x^2 + bx)^2}.$$

Il trinomio

$$2x^2 + 2bx + b^2$$

si può riscrivere come:

$$2x^2 + 2bx + b^2 = x^2 + 2bx + b^2 + x^2 = (x + b)^2 + x^2 > 0 \ \forall x \in R$$

e quindi *f* risulta sempre concava verso il basso su tutto il suo dominio per qualsiasi valore del parametro reale b.

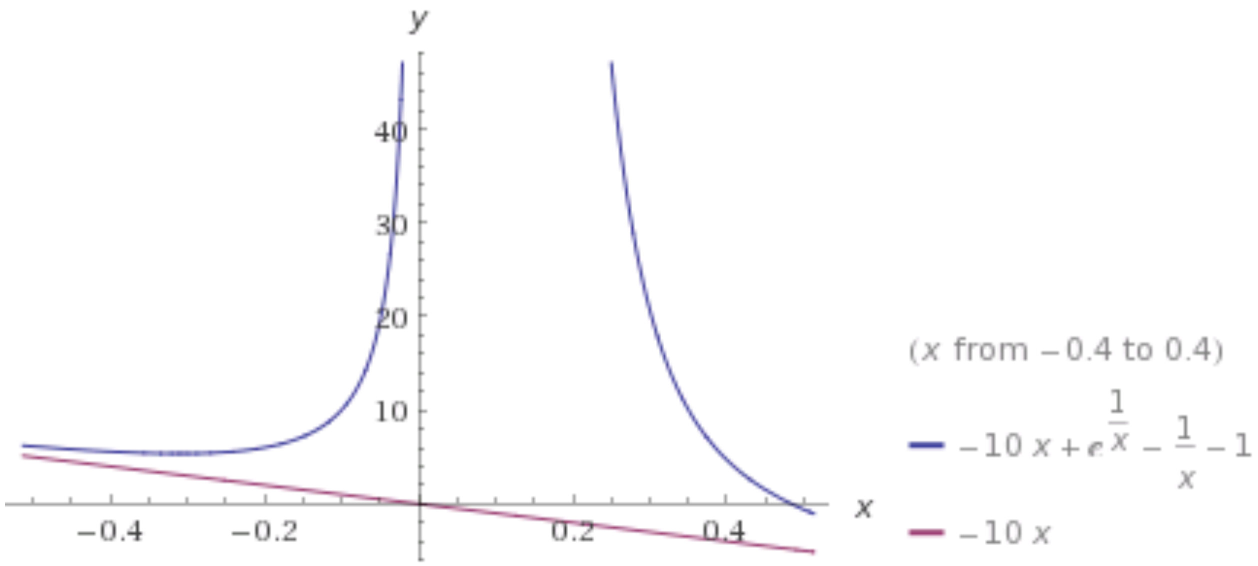
Determinare l'asintoto obliquo della funzione

$$\boldsymbol{f(x) = e^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x} - 10x - 1}$$

La funzione diverge a $\mp\infty \; per \; x \to \pm\infty$ ed è quindi verificata la condizione necessaria per avere asintoto obliquo.
Calcolando $m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$ si ottiene senza fatica $m = -10$. La valutazione di q non presenta problemi e conduce a $q = 0$:

$$f(x) + 10x = e^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x} - 10x - 1 + 10x = e^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x} - 1 \to 0 = q \;\; per \; x \to \pm\infty.$$

Nel grafico seguente è evidente l'asintoto obliquo della funzione data.



La funzione

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{x^2 + 1} - 1}$$

è continua su tutto il suo dominio e per ogni a<0 ed ogni b>0 appartenenti al dominio di f risulta $f(a) \cdot f(b) > 0$. Essa non soddisfa quindi le ipotesi del teorema degli zeri. Tuttavia $f(0) = 0$. Spiegare perché questo fatto non è in contraddizione con il teorema degli zeri.

La contraddizione è apparente poiché il teorema degli zeri è una condizione solo sufficiente ma non necessaria per garantire l'esistenza di eventuali zeri della funzione *f*: se tale teorema è verificato allora esiste almeno uno zero nell'intervallo in esame, se il teorema non è verificato, nulla si può dire senza ulteriori indagini.

Una funzione $f: R \to R$ continua e derivabile infinite volte nel suo dominio presenta derivata seconda negativa nell'intervallo [0,4]. Inoltre $f(0) = f(4) = 3$. Si può concludere che la funzione presenta un solo punto estremante in (0,4)? Tale punto può essere un minimo?

La continuità su [0,4] e la derivabilità su (0,4) e l'ipotesi $f(0) = f(4) = 3$ implicano la validità del teorema di Rolle. Esiste quindi un punto c nell'aperto (0,4) in cui f' si annulla. Se tale punto non fosse unico, allora ci sarebbero due estremanti e quindi la funzione avrebbe cambi di concavità. Per ipotesi f'' <0 su tutto l'intervallo (0,4) quindi c è unico in x=c la funzione presenta un massimo.

a) Determina l'equazione della retta tangente al grafico di $f(x) = lnx$ nel suo punto $A(e; 1)$.
b) Determina l'equazione della retta tangente al grafico di $f(x) = lnx$ e passante per l'origine degli assi.

La prima parte del quesito è semplice:

$$y - f(e) = f'(e) \cdot (x - e) \to y - 1 = \frac{1}{e}(x - e) \to t: y = \frac{x}{e} \ .$$

A questo punto è evidente che questa retta sarà la tangente che passa per l'origine degli assi che si deve cercare nel secondo punto.
Per la seconda parte, ipotizziamo che il punto do tangenza sia $T(\alpha; ln\alpha)$. Possiamo allora scrivere

$$y - f(\alpha) = f'(\alpha) \cdot (x - \alpha) \to y - ln\alpha = \frac{1}{\alpha}(x - \alpha) \to \tau: y = \frac{x}{\alpha} + ln\alpha - 1$$

ed imponendo il passaggio per l'origine si ottiene

$$O(0; 0) \in \tau \to \ 0 = \frac{0}{\alpha} + ln\alpha - 1 \to \ ln\alpha = 1 \to \alpha = 0 \to \tau: y = \frac{x}{e}$$

e quindi effettivamente le due tangenti richieste coincidono.

Siano $m \in R$ ed $f: R \to R$ definita da:

$$f(x) = \begin{cases} e^{7x}, x \geq 0 \\ mx + 1, x < 0 \end{cases}$$

Allora:

f è continua in x=0 se e solo se (sse) m≠7
f è derivabile in x=0 sse m≠ 1/7
f è derivabile in x=0 sse m≠7
f è derivabile in x=0 sse m=7
f è continua in x=0 sse m≠1
f è derivabile in x=0 sse m≠1
f è continua e derivabile in x=0 sse m≠0

Per la continuità è sufficiente calcolare i limiti dalla destra e dalla sinistra ed imporne l'uguaglianza:

$$\lim_{x \to 0^+} mx + 1 = 1 \; \forall m \in R$$
$$\lim_{x \to 0^-} e^{7x} = 1$$

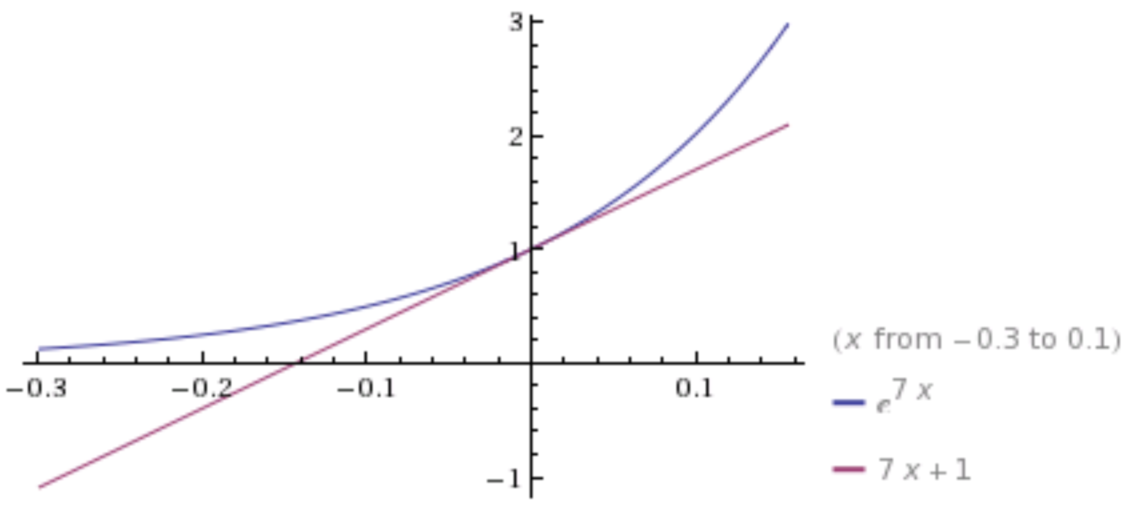
ne segue che f è continua per ogni m reale.
Per la derivabilità esaminiamo

$$f'(x) = \begin{cases} 7e^{7x}, x < 0 \\ m, x < 0 \end{cases}$$

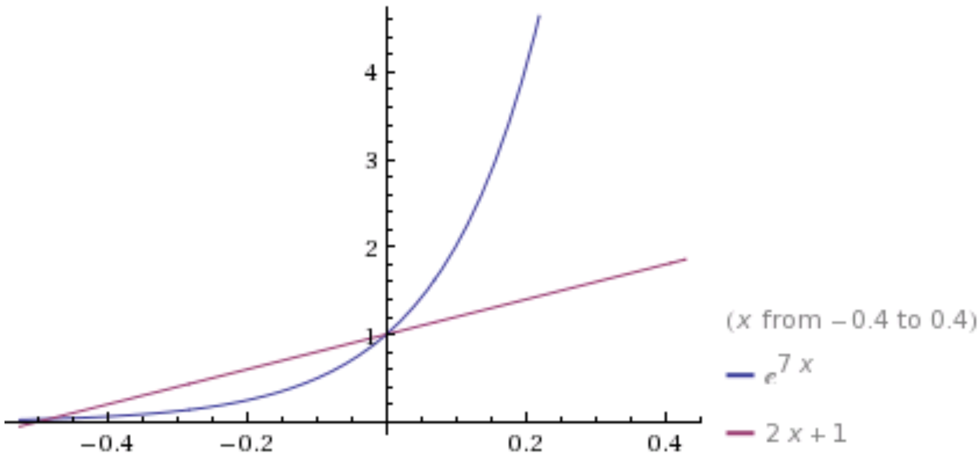
$$\lim_{x \to 0^+} m = m$$
$$\lim_{x \to 0^-} 7e^{7x} = 7$$

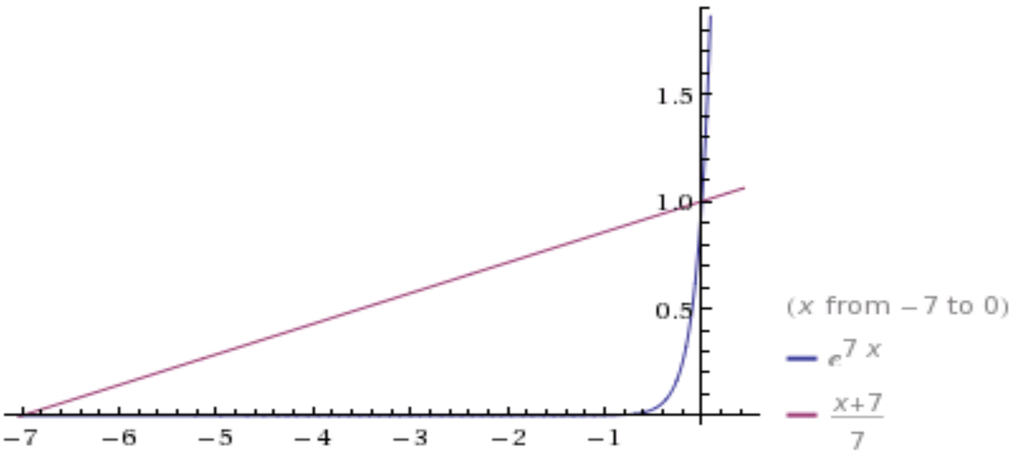
La derivabilità in x=0 si ha quindi solo per m=7. La risposta corretta è quindi la quarta.

Dalla figura è evidente cosa accade per m=7.



Per valori di m≠7 si otterrebbero grafici di questo tipo:





ed è chiaro che, pur essendoci continuità, la derivabilità viene a mancare.

La funzione

$$\boldsymbol{f(x) = ln\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 3x + 2}}$$

è pari o dispari sul suo dominio?

Il dominio della funzione è

$$D = \left\{x \in R \colon \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 3x + 2} > 0\right\} = (-\infty; -2) \cup (-1; 1) \cup (2; +\infty)$$

e trattandosi di un dominio simmetrico rispetto all'asse delle ordinate, ha senso chiedersi se la funzione f è pari o dispari. Se il dominio non fosse simmetrico rispetto all'asse delle ordinate non

accadrebbe necessariamente che $x \in D$ implichi $-x \in D$ e non avrebbe senso studiare eventuali simmetrie notevoli.
Calcoliamo $f(-x)$:

$$f(-x) = ln\frac{(-x)^2 - 3(-x) + 2}{(-x)^2 + 3(-x) + 2} = ln\frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 3x + 2} = ln\left(\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 3x + 2}\right)^{-1} =$$

$$= -ln\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 3x + 2} = -f(x) \;\; \forall x, -x \in D$$

ma allora la funzione è dispari sul suo dominio.

La funzione

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}} \;\; .$$

è detta funzione sigmoidea per il tipico andamento ad "S" del suo grafico.
Verificare che la funzione sigmoidea f è soluzione delle equazione differenziali:

$$\boldsymbol{y' - y(1 - y) = 0} \qquad\qquad \boldsymbol{y" - y(1 - y)(1 - 2y) = 0}.$$

La funzione f è definita su tutto R ed ivi risulta continua e derivabile infinite volte. La sua derivata prima è

$$f'(x) = \frac{e^{-x}}{(1 + e^{-x})^2}$$

ma allora

$$f(x) \cdot \left(1 - f(x)\right) = \frac{1}{1 + e^{-x}} \cdot \left(1 - \frac{1}{1 + e^{-x}}\right) = \frac{1}{1 + e^{-x}} \cdot \left(\frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}}\right) = f'(x)$$

e quindi la prima equazione differenziale ha come soluzione la funzione *f*.
La derivata seconda di *f* è

$$f"(x) = -\frac{e^x(-1 + e^x)}{(1 + e^x)^3}$$

e si ha

$$f(x) \cdot \left(1 - f(x)\right) \cdot \left(1 - 2f(x)\right) = \frac{e^{-x}}{(1 + e^{-x})^2} \cdot \left(1 - \frac{2}{1 + e^{-x}}\right) =$$

$$= \frac{e^{-x}}{(1 + e^{-x})^2} \cdot \frac{(-1 + e^{-x})}{(1 + e^{-x})} = f"(x)$$

e anche la seconda equazione differenziale ha come soluzione la funzione *f*.

Sia $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{R} \rightarrow \boldsymbol{R}^{+}$ una funzione continua e derivabile su R e tale che

$$\boldsymbol{f(0) = 4}, \quad \boldsymbol{f'(0) = 8}.$$

Detta $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}) = \sqrt{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})}$, scrivere l'equazione della retta tangente ad h nel punto di ascissa x=0.

La funzione h ben definita (f ha come codominio R^{+}) ed è continua e derivabile sul suo dominio. Dal teorema della derivata della funzione composta abbiamo

$$h'(x) = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} \rightarrow h'(0) = \frac{f'(0)}{2\sqrt{f(0)}} = \frac{8}{2\sqrt{4}} = 2.$$

La retta tangente in x=0 al grafico di h ha quindi equazione

$$y - h(0) = h'(0)(x - 0) \rightarrow y - 4 = 2(x - 0) \rightarrow y = 2x + 4.$$

Dopo aver verificato che la funzione $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{sin}(\boldsymbol{\pi x})$ soddisfa le ipotesi del teorema di Lagrange sull'intervallo $\boldsymbol{I} = [\boldsymbol{-1}; \boldsymbol{2}]$, determinare i punti di cui tale teorema garantisce l'esistenza.

La funzione risulta continua e derivabile su tutto I e quindi, in particolare, continua sul chiuso e limitato $[-1; 2]$ e derivabile sull'aperto $(-1; 2)$. Su tale intervallo si ha

$$\frac{\sin(2\pi) - \sin(-\pi)}{2 - (-1)} = \pi \cos(\pi c), \qquad c \in (-1; 2).$$

Da cui

$$\cos(\pi c) = 0 \rightarrow \pi c = \frac{\pi}{2} + k\pi \rightarrow c = \frac{1}{2} + k, \;\; k \in Z.$$

Bisogna ora discutere i valori di k per i quali $c \in (-1; 2)$

$$-1 < \frac{1}{2} + k < 2, k \in Z \rightarrow k = 0, \pm 1 .$$