1) Esibire una funzione $f: R \to R$ che interseca una sola volta il suo asintoto orizzontale.

$$f(x) = \frac{x}{x^2+1} \qquad f: R \to R$$
$$D = (-\infty; +\infty), D\ simmetrico: se\ x \in D, allora - x \in D.$$
$$f(-x) = \frac{-x}{1+(-x)^2} = -f(x), \forall x, -x \in R \to f\ dispari$$
$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0, \quad f(0) = 0.$$

2) Esibire una funzione $f: R \to R$ che interseca esattamente due volte il suo asintoto orizzontale.

$$f(x) = \frac{x^6-1}{(x^4+1)^2} \qquad f: R \to R$$
$$D = (-\infty; +\infty), D\ simmetrico: se\ x \in D, allora - x \in D.$$
$$f(-x) = f(x), \forall x, -x \in R \to f\ pari$$
$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0, \quad f(0) = -1, \qquad f(\pm 1) = 0$$

3) Esibire una funzione $f: R \to R$ che interseca infinite volte il suo asintoto orizzontale.

$$f(x) = \begin{cases} 0, se\ x = 0 \\ \sin\left(\frac{1}{x}\right), x \neq 0 \end{cases}$$

La funzione interseca infinite volte la retta y=0 nei punti $x = \frac{1}{k\pi},\ k \in Z\ e\ nel\ punto\ x = 0.$

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$$

4) Esibire due funzioni $f: R \to R$ che presentano due asintoti orizzontali destro e sinistro distinti.

$$f(x) = arctgx; \quad f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

5) Esibire una funzione che nel suo dominio naturale presenta esattamente due asintoti verticali e nessun asintoto orizzontale.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad D = (-1; 1), D\ simmetrico, f(-x) = f(x)\ \forall x \in D.$$

$$f(0) = 1, \qquad \lim_{x \to 1^-} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x \to -1^+} f(x) = +\infty$$

6) Esibire due funzioni che nel suo dominio naturale presenta infiniti asintoti verticali e nessun asintoto orizzontale.

$$f(x) = \frac{1}{sinx}; \qquad f(x) = tgx.$$

7) Esibire una funzione che presenta due asintoti orizzontali differenti e un asintoto verticale.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & x > 0 \\ e^x - 1, & x \le 0 \end{cases}$$

8) Esibire una funzione che interseca il proprio asintoto verticale.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \le 0 \\ \dfrac{1}{x}, & x > 0 \end{cases}$$

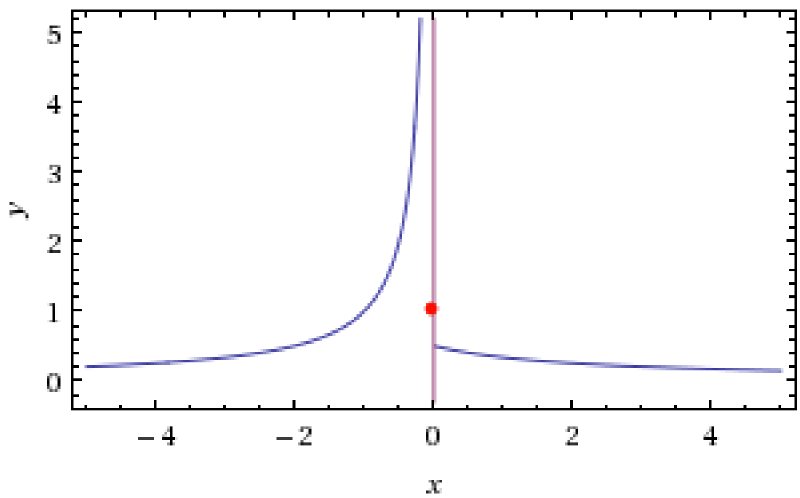
Un esempio molto particolare è:

$$F(x) = \frac{1}{(x+1) \cdot sgnx + 1} \quad .$$

Esplicitando la funzione signum si ha

$$F(x) = \frac{1}{(x+1) \cdot sgnx + 1} = \begin{cases} +\dfrac{1}{x+2} & se\ x > 0 \\ 1 & se\ x = 0 \\ -\dfrac{1}{x} & se\ x < 0 \end{cases}$$

Il grafico si traccia facilmente.



Dare queste funzioni per intervalli non è difficile ma averne un'espressione analitica è raro.
Altro esempio:

$$f(x) = \frac{1}{xsgn(x-1) + 1}$$

8) Esibire una funzione che presenta, nel suo dominio naturale, due asintoti verticali distinti , un asintoto orizzontale e che intersechi il suo asintoto orizzontale una sola volta.

$$f(x) = e^x \sqrt{\frac{x^2}{x^2 - 1}}$$

$$f(0) = 0$$

9) Esibire una funzione che ha due asintoti obliqui differenti:

$$f(x) = x \cdot \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$

10) Esibire una funzione che ammette nel suo dominio naturale un asintoto obliquo e uno orizzontale.

$$f(x) = \frac{x}{e^{2x} - 1}$$

11) Esibire una funzione che nel suo dominio naturale ammette due asintoti obliqui paralleli.

$$f(x) = arctgx + x$$

OSSERVAZIONE SUGLI ASINTOTI OBLIQUI: trattiamo un caso particolare. Negli altri casi analoghi si hanno gli stessi risultati.
Supponiamo che

$$\lim_{x \to +\infty} f(x)$$

e che f ammetta asintoto obliquo y=mx+q. È quindi chiaro che debba risultare

$$|f(x) - (mx + q)| \to 0, x \to +\infty.$$

Deve allora essere:

$$f(x) - mx - q \to 0, x \to +\infty.$$

$$x\left(\frac{f(x)}{x} - m - \frac{q}{x}\right) \to 0, x \to +\infty \qquad [*]$$

possiamo avere quattro casi distinti:

$$\frac{f(x)}{x} \to \left[\frac{\infty}{\infty}\right], x \to +\infty; \quad \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \begin{cases} \pm\infty \ assurdo\ perch\grave{e}\ [*]\ diveregerebbe \\ 0,\ \ assurdo\ poich\grave{e}\ \ [*] divergerebbe \\ L \neq m\ assurdo, poich\grave{e}\ [*] divergerebbe \\ L = m, va\ bene\ perch\grave{e}\ ottengo\ [0 \cdot \infty] \end{cases}$$

il fatto di ottenere una forma di indecisione [0∞] è interessante, poiché noi per ipotesi sappiamo che quel limite vale zero e quindi sappiamo a priori che quella forma di indecisione si risolve in 0!
Assumiamo quindi che

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = m, \ \ m \neq 0, m \neq "\infty"$$

Osserviamo anche che:

$$f(x) - mx - q \to 0\ , \qquad x \to +\infty\ \ significa\ che\ \ f(x) - mx \to\ \ q$$

Anche in questo caso è facile osservare che $f(x) - mx \to [\infty - \infty]$. Infatti se f(x) + positiva in U(∞), per forza l'eventuale asintoto obliquo per x->+∞ avrà m>0 (analizzando gli altri casi si ottengono risultati analoghi).
Questa forma di indecisione si risolve, appunto $f(x) - mx \to\ \ q \neq +\infty, x \to +\infty.$

L'asintoto obliquo è quindi

$$y = mx + q$$

Osserviamo anche che se esiste un asintoto obliquo

$$f(x) - mx + q \to 0, x \to +\infty, \Rightarrow f(x) = mx + q + o(1)$$

o(1) è un infinitesimo generico (simbolo di Landau).

$$\frac{f(x)}{x} = m + \frac{q}{x} + \frac{o(1)}{x} \to m\ , x \to +\infty, \ \ f(x) - mx = q + o(1), x \to +\infty.$$