

TRAVAUX PRATIQUES

Étude d'un asservissement de position angulaire sous Matlab
Commande par Retour d'États

Abel DIDOUH Gianni PASSANANTE

Mars 2023

Résumé

On désire réaliser un asservissement de position angulaire d'un moteur à courant continu répondant à une dynamique fixée. La structure du correcteur sera celle d'un retour d'état complètement mesurable. Il s'agit de faire le calcul et les tests du correcteur sur un modèle linéarisé du moteur dans le cas d'une commande à temps continue, puis à temps discret.

Sommaire

3	Travail à effectuer	3
3.1	Détermination de la constante de temps mécanique et du gain statique en boucle ouverte et en régime linéaire	3
3.2	Équations simplifiées - linéarisation du comportement du moteur	4
3.2.1	Contrôle par retour d'état - Spécifications du cahier des charges	4
4	Commande en position sans action intégrale	7
4.1	Application au modèle linéaire	7
4.2	Application au modèle non linéaire	10
5	Commande en position avec action intégrale	10
5.1	Application au modèle linéaire	11
5.2	Application au modèle non linéaire	12
5.3	Discretisation du correcteur par retour d'état	13
6	Travail complémentaire	17
7	Conclusion	25

3 Travail à effectuer

3.1 Détermination de la constante de temps mécanique et du gain statique en boucle ouverte et en régime linéaire

Pour un échelon de tension aux bornes du moteur égal à 3V, on obtient cette courbe d'évolution.

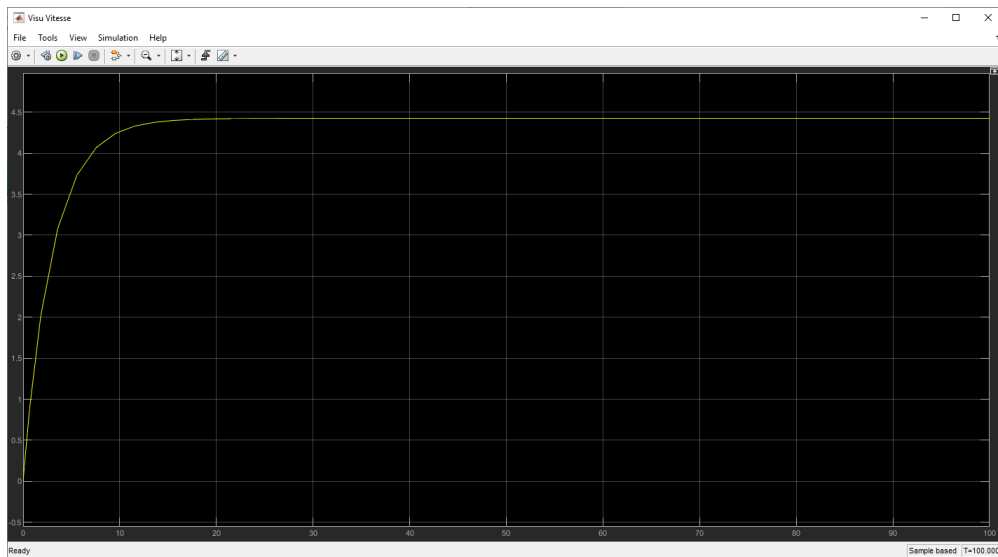


Figure 1: Courbe d'évolution de la tension en fonction du temps.

La relation entre la vitesse et la tension aux bornes du moteur est un modèle du premier ordre de constante de temps T_m et de gain statique G_m .

L'expression littérale de la fonction de transfert correspondante est :

$$H(p) = G_m * \frac{1}{1 + T_m * p} \quad (1)$$

Nous déterminons la constante de temps T_m à l'aide de la courbe d'évolution et de la méthode du 63% .

La tension à l'infini aux bornes du moteur est égale à : $V_\infty = 4.424V$.

$$0.63 * 4.424V = 2,787V \quad (2)$$

On obtient la constante de temps égale à 3.091 secondes.

On calcule le gain G_m :

$$G_m = \frac{V_\infty}{E0} * \frac{1}{Kv} = \frac{4.424}{3} * \frac{1}{0.0497} = 30.1811 \quad (3)$$

Finalement, nous obtenons $T_m = 3.091 \approx 3$ s. et $G_m = 30.1811 \approx 30$.

3.2 Équations simplifiées - linéarisation du comportement du moteur

On utilise la fonction `linmod()` pour déterminer les matrices d'état A_{mod} , B_{mod} , C_{mod} et D_{mod} en utilisant le modèle Simulink "Modele_Lin_BO.slx".

$$A_{mod} = \begin{bmatrix} 0 & 1.0000 \\ 0 & -0.3333 \end{bmatrix} B_{mod} = \begin{bmatrix} 0 \\ 9.8911 \end{bmatrix} C_{mod} = \begin{bmatrix} 0.0796 & 0 \\ 0 & 0.0497 \end{bmatrix} D_{mod} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

3.2.1 Contrôle par retour d'état - Spécifications du cahier des charges

On cherche à déterminer les gains du retour d'état afin qu'en boucle fermée le polynôme caractéristique du système corrigé soit donné par :

$$P_C(p) = (1 + 2\zeta \frac{p}{w_0} + \frac{p^2}{w_0^2})(1 + T * p) \quad (4)$$

Le dépassement D doit être inférieur à 10%.

On détermine l'amortissement ζ à l'aide de la loi qui associe le premier dépassement D et l'amortissement ζ .

$$D = 100 * e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \quad (5)$$

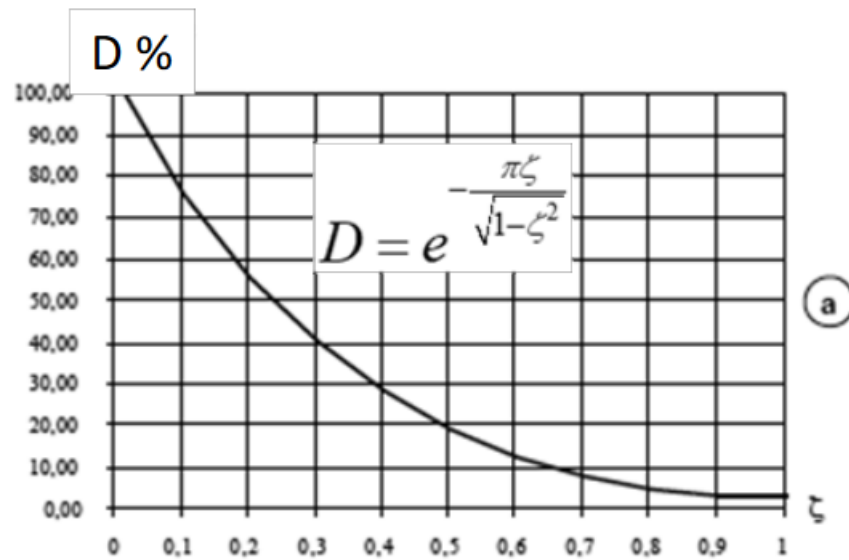


Figure 2: Dépassement d'un système du second ordre en fonction de l'amortissement

Pour un dépassement inférieur à 10% l'amortissement doit être égal à 0.7.

On détermine $Tr_{5\%} * w_0$ à l'aide d'un abaque qui relie l'amortissement au temps de réponse réduit.

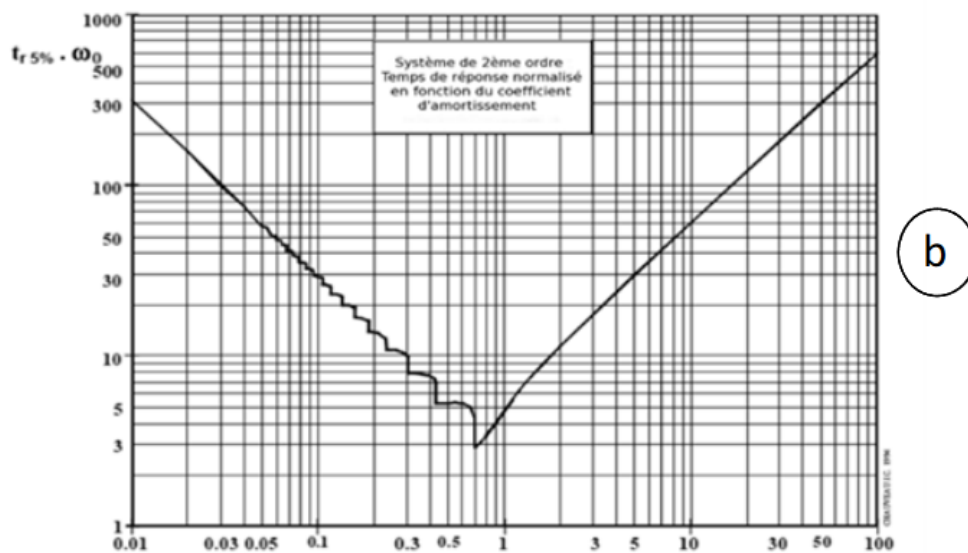


Figure 3: L'abaque des temps de réponses

On relève la valeur suivante : $Tr5\% * w_0 = 3$.

$$w_0 = \frac{3}{Tr5\%} \quad (6)$$

Ainsi, le temps de réponse à 5% est 3 fois la constante de temps :

$$Tr5\%B0 = 3 * T_m$$

$$Tr5\%BO = 3 * 3$$

$$Tr5\%BO = 9$$

Or le temps de réponse à 5% en boucle fermée est égal à un quart du temps de réponse à 5% en boucle ouverte.

$$Tr5\%BF = \frac{1}{4} * Tr5\%BO$$

$$Tr5\%BF = \frac{1}{4} * 9$$

$$Tr5\%BF = 2.25$$

Le temps de réponse à 5% en boucle fermée est égal à 2.25 .

On calcule w_0 :

$$w_0 = \frac{3}{Tr5\%}$$

$$w_0 = \frac{3}{2.25}$$

$$w_0 = \frac{4}{3} s^{-1}$$

La pulsation w_0 est égale à $\frac{4}{3} \approx 1.33 s^{-1}$.

Les constantes (ζ , w_0) étant déterminées, nous pouvons calculer les pôles afin de déterminer le gain de retour d'état.

On obtient, ainsi, une paire de pôles complexes :

$$p_1 = -\zeta w_0 + jw_0 \sqrt{1 - \zeta^2} \quad (7)$$

$$p_2 = -\zeta w_0 - jw_0 \sqrt{1 - \zeta^2}$$

Et un pôle réel :

$$p_3 = -\frac{1}{T}$$

Nous ajoutons ces pôles dans le fichier parametres.m . Finalement, le résultat suivant est obtenue :

$$p_1 = -0.93 + 0.95i$$

$$p_1 = -0.93 - 0.95i$$

On remarque que cette paire de pôles complexes possède une partie réelle négative. Le modèle est donc stable.

Pour déterminer le vecteur de gain de retour d'état, on place la paire de pôles complexes dans une matrice P. On détermine à l'aide de la fonction `place()` le vecteur K_c .

```
%*****
%   Gains et Constante de temps
%*****
TM= 3;           % constante de temps identifiée
GM = 1.5*1/Kv;   % gain en vitesse identifié
Tr= 3*TM/4 ;     % Temps de réponse identifié
w0 = 3/Tr;
zeta = 0.7;

p1 = -zeta*w0+j*w0*sqrt(1-zeta^2);
p2 = -zeta*w0-j*w0*sqrt(1-zeta^2);

P = [p1 p2];
```

Figure 4: parametres.m

Le vecteur de gain de retour d'état K_c :

$$K_c = [0.18 \quad 0.15]$$

4 Commande en position sans action intégrale

4.1 Application au modèle linéaire

On calcule le gain K_y :

$$u = -K_c * x$$

$$y = C * x$$

$$u = K_y * y$$

On remplace :

$$K_c = K_y * C$$

$$K_y = \frac{K_c}{C}$$

Le vecteur de retour de sortie noté K_y :

$$K_y = [2.26 \quad 3.12]$$

On construit le modèle linéaire en boucle fermée sans action intégrale. La consigne d'entrée sera un échelon de position de 1rd, appliqué à l'instant $t = 0$ secondes. La perturbation est également de type échelon de position d'amplitude 0.01 Nm appliquée à l'instant $t = 50$ secondes. A partir du fichier Modele_Lin_BO_.slx, nous construisons le fichier Simulink Modele_Lin_BF_C_Sans_Integral.slx.

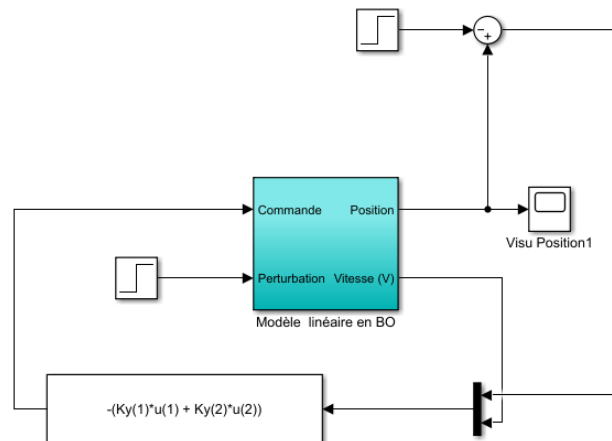


Figure 5: Simulink - Modèle lineaire en boucle fermée sans intégrale

Après simulation nous obtenons la courbe suivante :

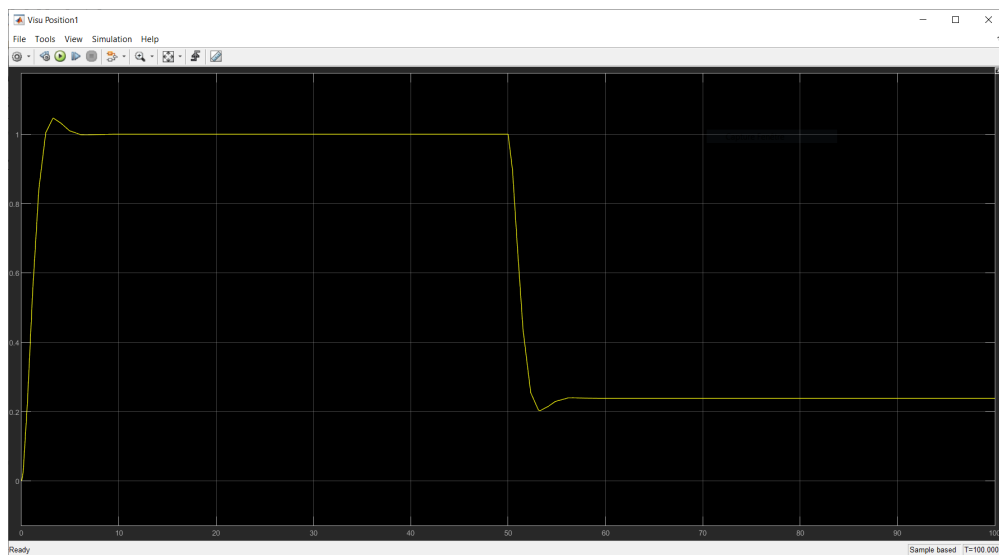


Figure 6: Simulation - Modèle linéaire en boucle fermée sans intégrale

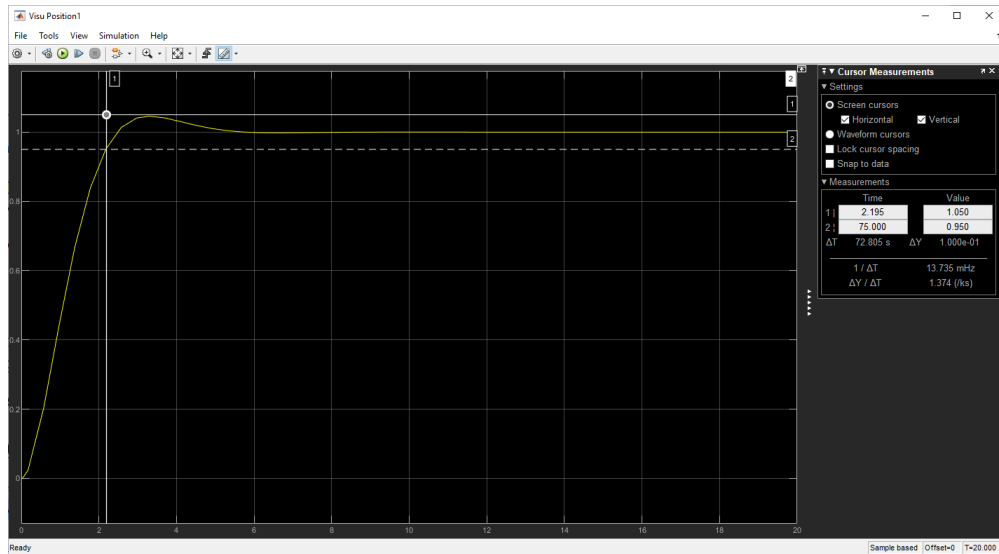


Figure 7: Simulation - Modèle linéaire en boucle fermée sans intégrale

Le temps de réponse à 5% en boucle fermée (graphiquement) est égal à 2.19 secondes. Ainsi, pour une consigne égale à 1 ($y = 1$), le système a besoin de 2.19 secondes pour pouvoir se stabiliser. La perturbation à $t = 50$ secondes n'est pas corrigée. Le système se fixe alors à 0.24 ($y = 0.24$). Finalement, le temps de réponse à 5% en boucle fermée est proche du temps de réponse à 5% théorique calculé précédemment. Le système n'est pas précis vis-à-vis d'une perturbation constante. Le système ne répond pas aux spécifications du cahier des charges.

4.2 Application au modèle non linéaire

On construit le schéma sous Simulink de la non linéarité du système.

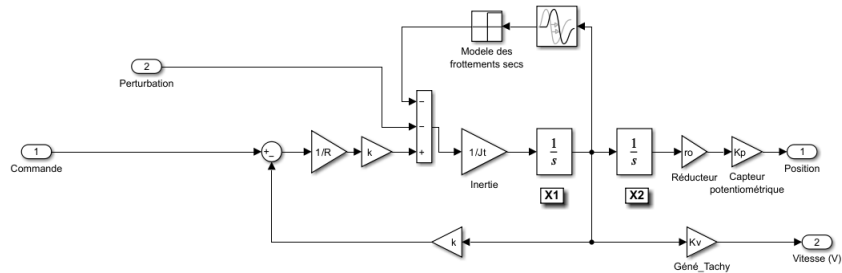


Figure 8: Simulink - Modèle non linéaire en boucle fermée sans intégrale.

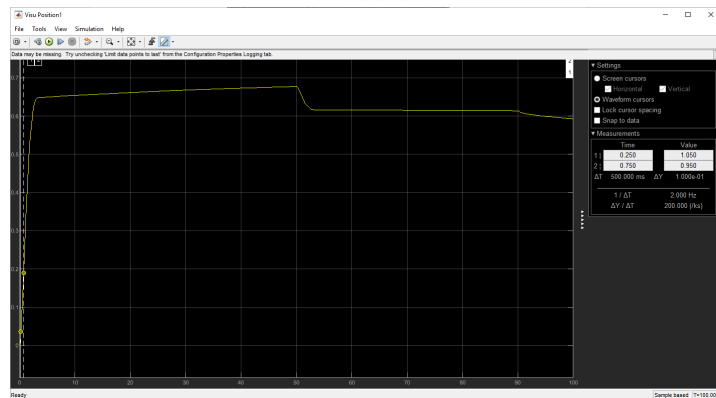


Figure 9: Simulation - Modèle non linéaire en boucle fermée sans intégrale.

Le modèle des frottements secs ne permet pas d'atteindre la consigne d'entrée. C'est pourquoi nous voyons sur la figure 10 un ralentissement aux alentours de notre consigne. Ce modèle ne répond donc pas au cahier des charges.

5 Commande en position avec action intégrale

Avec l'action intégrale, le système devient un troisième ordre caractérisé par les 3 variables d'état x_1 , x_2 et x_3 . Nous déterminons les nouvelles matrices d'état A_i , B_i , C_i et D_i de ce système.

```
%*****
%  MATRICES D'ETAT DU MODELE LINEAIRE AVEC ACTION INTEGRALE
%*****
[Ai, Bi, Ci, Di] = linmod('Modele_Lin_BO[Avec_Integral'];
```

Figure 10: Matlab - Paramètre Linmod.

Le nouveau modèle possède 3 pôles : p_1 , p_2 et p_3 . Les deux premiers pôles seront maintenus identiques au précédent. Le troisième pôle sera choisi de manière à ce qu'il soit moins dominant pour ne pas affecter la dynamique imposée par p_1 et p_2 . Ainsi, nous prenons arbitrairement, $p_3 = 5 * (-\zeta w_0)$

```
%*****
%   MATRICES D'ETAT DU MODELE LINEAIRE AVEC ACTION INTEGRALE
%*****
[Ai, Bi, Ci, Di] = linmod('Modele_Lin_BO_Avec_Integral');
p3 = 5 * (-zeta * w0);
Pi = [p1 p2 p3];
Kci = place(Ai,Bi, Pi)
Kyi = Kci*inv(Ci);
```

Figure 11: Matlab - Paramètre K_c et K_y

Nous obtenons K_c et K_y :

$$K_c = [1.06 \quad 0.63 \quad 10.53]$$

$$K_y = [13.32 \quad 12.61 \quad 10.53]$$

5.1 Application au modèle linéaire

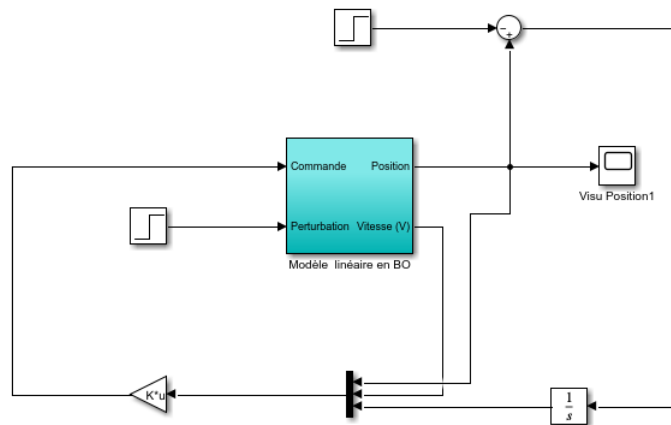


Figure 12: Simulation - Modèle Linéaire en boucle fermée avec intégral

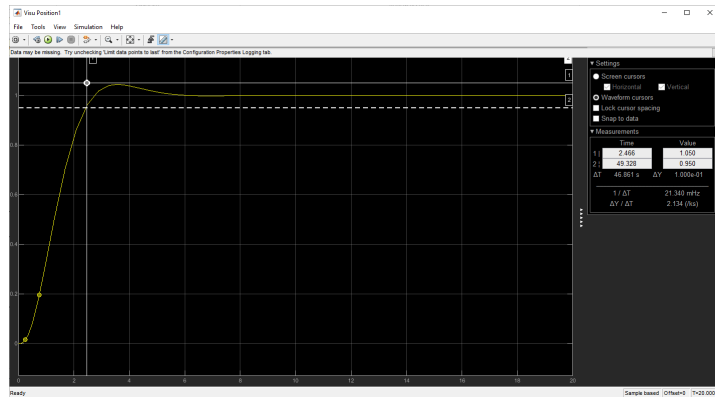


Figure 13: Simulation - Modèle Linéaire en boucle fermée avec intégral

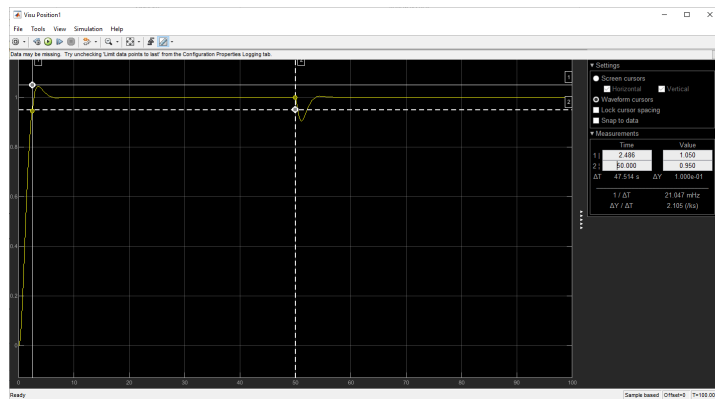


Figure 14: Simulation - Modèle Linéaire en boucle fermée avec intégral

L'ajout de l'action intégrale permet de corriger l'erreur statique. Ainsi, lors de la perturbation à $t = 50$ le système se stabilise à la consigne d'entrée. Le temps de réponse à 5% en boucle fermée (graphiquement) est égal à 2.46 secondes. Le temps de réponse à 5% en boucle fermée avec action intégral est proche du temps de réponse à 5% théorique. Cet asservissement est conforme aux spécifications initialement demandées.

5.2 Application au modèle non linéaire

Nous reprenons le fichier `Modele.Lin.BF.C.Avec.Integral`. On modifie le fichier en rajoutant la non-linéarité. Nous sauvegardons le fichier obtenu sous le nom `Modele.NLin.BF.C.Avec.Integral`. Nous obtenons la simulation suivante pour une durée égale à 20 secondes.

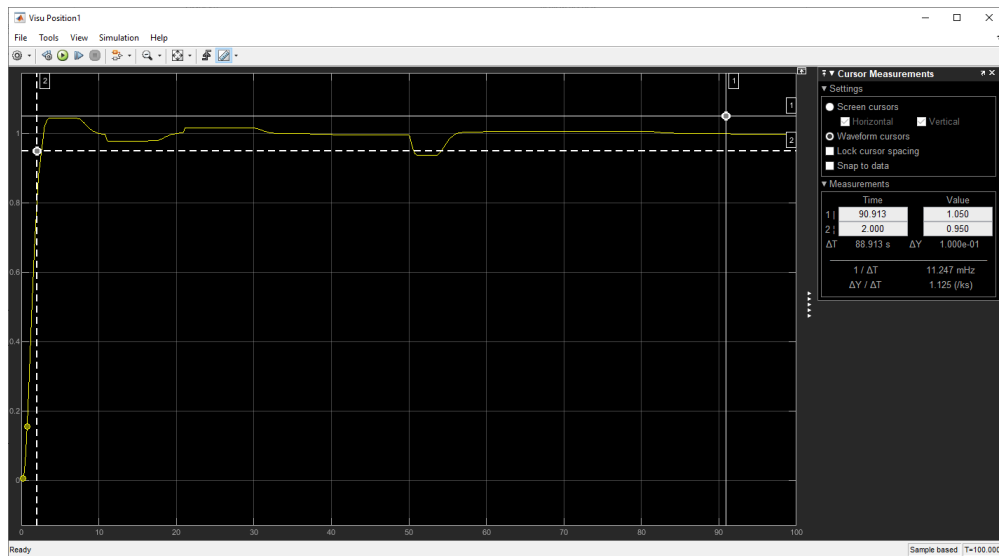


Figure 15: Simulation - Modèle non linéaire en boucle fermée avec intégral

L'ajout du modèle des frottements secs modifie la courbe de position. Néanmoins, l'action intégrale permet de corriger l'erreur de position. Le temps de réponse à 5% pour le modèle non linéaire en boucle fermée avec intégral (2.67 s.) est proche du temps de réponse à 5% en boucle fermée (2.25 s.).

5.3 Discrétisation du correcteur par retour d'état

```
%*****
%   DISCRETISATION DU CORRECTEUR
%*****
% Matrices d'etat du modele discretise
[Aid, Bid] = c2d(Ai, Bi, Te);
Cid = Ci;
Did = Di;
% Cahier de charge du correcteur discret
% Correcteur discret
Pd = exp(Pi * Te);
Kcid = place(Aid,Bid,Pd);
Kyid = Kcid*inv(Cid);
```

Figure 16: Paramètre - Discrétisation du correcteur

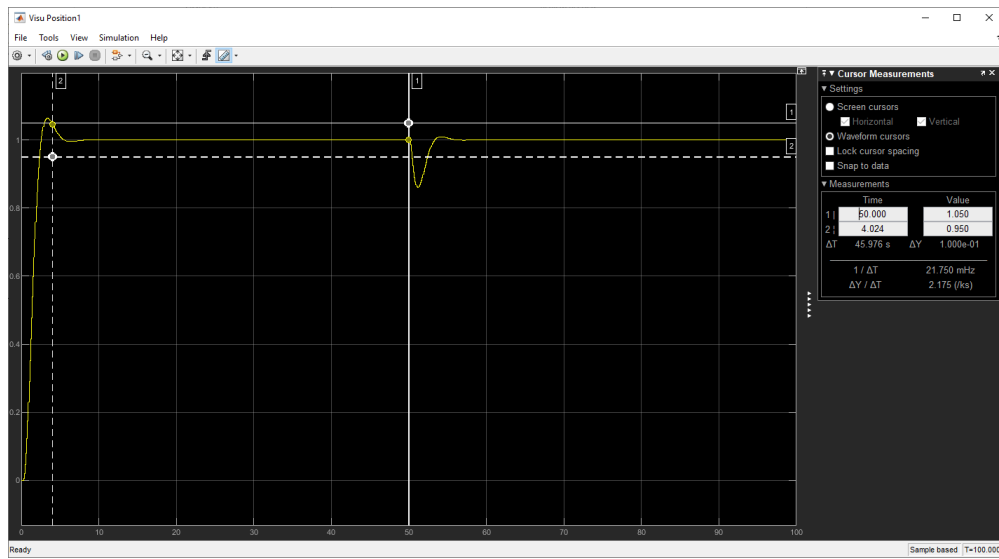


Figure 17: Simulation - Discretisation du modèle linéaire avec intégrale $T_e = 0.1$

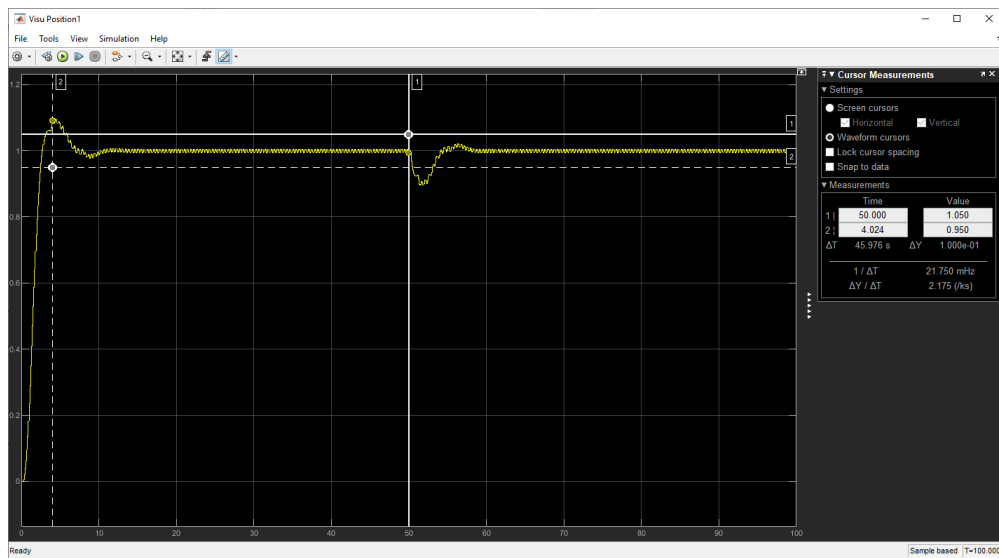


Figure 18: Simulation - Discretisation du modèle non linéaire avec intégrale $T_e = 0.1$

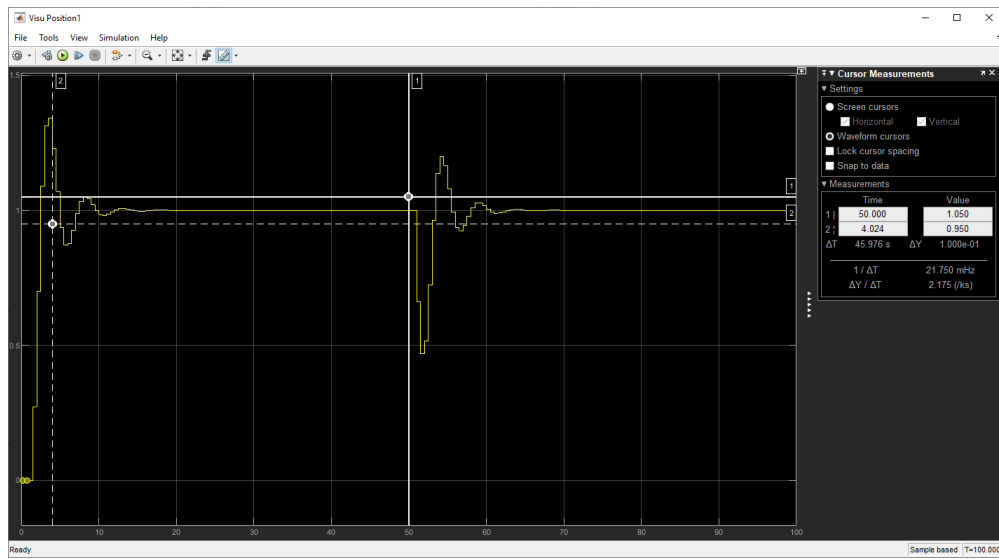


Figure 19: Simulation - Discretisation du modèle linéaire avec intégrale $T_e = 0.5$

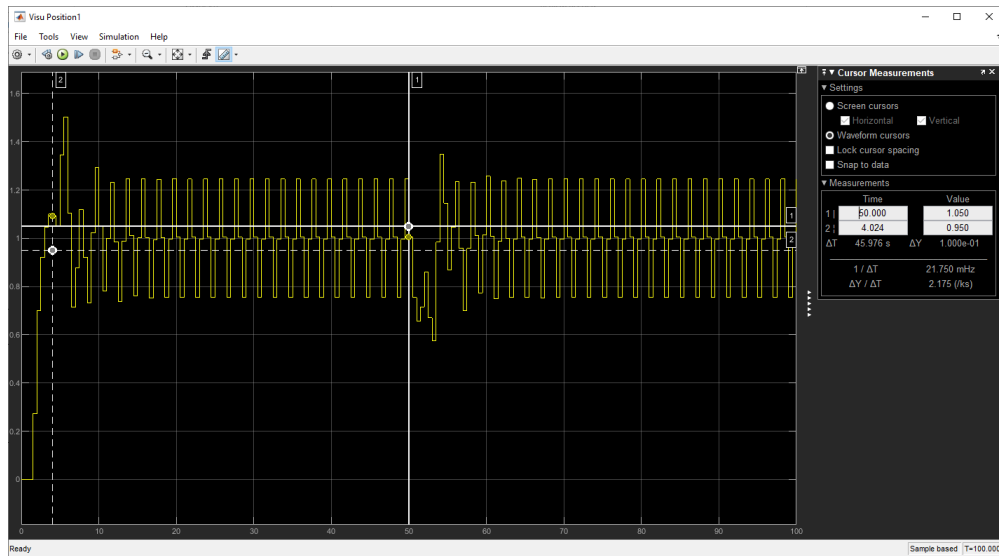


Figure 20: Simulation - Discretisation du modèle non linéaire avec intégrale $T_e = 0.5$

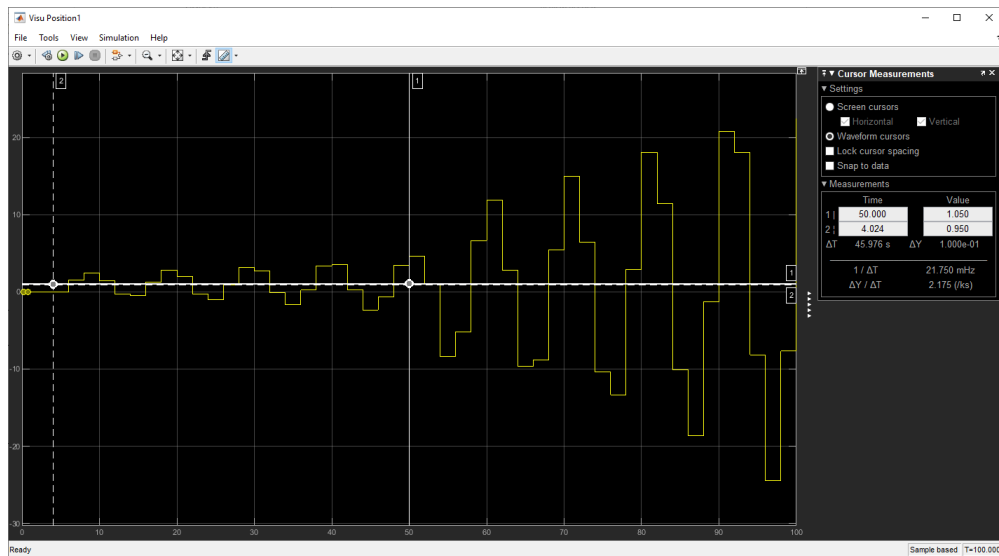


Figure 21: Simulation - Discretisation du modèle linéaire avec intégrale $T_e = 2$

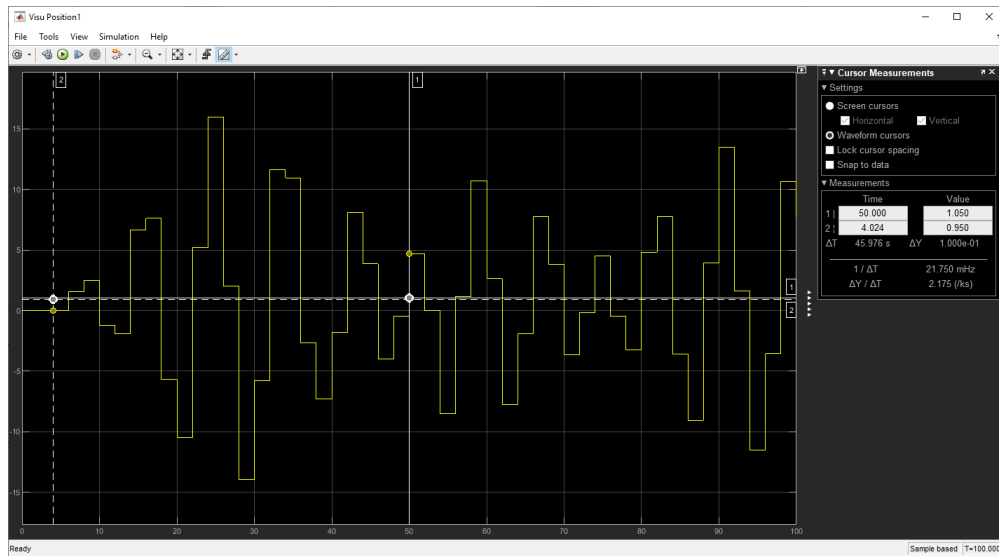


Figure 22: Simulation - Discretisation du modèle non linéaire avec intégrale $T_e = 2$

La sélection de la période d'échantillonnage a un impact sur le modèle, et il est donc essentiel de choisir une période d'échantillonnage optimale pour assurer le bon fonctionnement du système.

6 Travail complémentaire

En choisissant comme vecteur d'état :

$$x = \begin{bmatrix} \theta \\ \omega \\ \rho K p \int \theta dt \end{bmatrix}$$

Nous déterminons le modèle d'état théorique du système à partir des équations données dans l'énoncé du sujet.

Nous avons le vecteur d'état :

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta \\ \omega \\ \rho K p \int \theta dt \end{bmatrix}$$

Le modèle théorique du système est de la forme :

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

$$\text{où } \dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix}$$

Nous calculons \dot{x} :

$$\dot{x}_1 = \frac{d\theta}{dt} = \omega = x_2$$

$$\dot{x}_2 = \frac{d\omega}{dt}$$

On utilise l'expression 4 de la partie 2.1 de l'énoncé :

$$c(t) = J_t \frac{d\omega(t)}{dt} + f \cdot \omega(t)$$

On obtient :

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{c(t) - f\omega(t)}{J_t}$$

Or $c(t) = Ki(t)$ ce qui nous donne :

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{Ki(t) - f\omega(t)}{J_t}$$

Or $i(t) = \frac{u(t) - e(t)}{R}$ ce qui nous donne :

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{K \frac{u(t) - e(t)}{R} - f\omega(t)}{J_t}$$

On développe :

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{K}{RJ_t}u(t) - \frac{K}{RJ_t}e(t) - \frac{f}{J_t}w(t)$$

Or $e(t) = K\omega(t)$ ce qui nous donne :

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{K}{RJ_t}u(t) - \frac{K^2}{RJ_t}w(t) - \frac{f}{J_t}w(t)$$

Finalement, nous obtenons :

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{K}{RJ_t}u(t) - \left(\frac{K^2+fR}{RJ_t}\right)w(t)$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{K}{RJ_t}u(t) - \left(\frac{K^2+fR}{RJ_t}\right)x_2(t)$$

Pour \dot{x}_3 nous avons :

$$\dot{x}_3 = \frac{d}{dt}\rho K_p \int \theta dt$$

$$\dot{x}_3 = \rho K_p \theta$$

$$\dot{x}_3 = \rho K_p x_1$$

Le vecteur \dot{x} est égale à :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{K}{RJ_t}u(t) - \left(\frac{K^2+fR}{RJ_t}\right)x_2 \\ \rho K_p x_1 \end{bmatrix}$$

Pour établir l'équation $\dot{x} = Ax + Bu$ nous décomposons le vecteur x . On procède ensuite à une identification.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{K}{RJ_t}u(t) - \left(\frac{K^2+fR}{RJ_t}\right)x_2 \\ \rho K_p x_1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{-K^2-fR}{RJ_t} & 0 \\ \rho K_p & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{K}{RJ_t} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Nous obtenons les matrices suivantes :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{-K^2-fR}{RJ_t} & 0 \\ \rho K_p & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{K}{RJ_t} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Déterminons le vecteur $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$ tel que $y = Cx + Du$.

En se basant sur la figure numéro 1 de l'énoncé : "Modèle du moteur", on en déduit le vecteur y .

Nous obtenons la position mesurée par l'intermédiaire du réducteur ro et du capteur potentiométrique K_p , ainsi $y_1 = \rho K_p x_1$ où x_1 est la position angulaire.

Nous obtenons la vitesse mesurée par l'intermédiaire du capteur de vitesse K_v , ainsi $y_2 = K_v x_2$ où x_2 est la vitesse angulaire.

D'après l'énoncé de la partie 5.1 "Application au modèle linéaire"

$y_3 = \int \epsilon(t)dt = \int (y_1 - r)dt$ ce qui correspond à l'intégrale de l'écart entre la position mesurée et la consigne.

Finalement, le vecteur y s'écrit :

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho K_p x_1 \\ K_v x_2 \\ \int (y_1 - r)dt \end{bmatrix} = Cx + Du$$

Simplifions y_3 , nous pouvons exprimer \dot{x}_3 en fonction de x_1 .

$$\begin{aligned} x_3 &= \rho K_p \int \theta dt = \rho K_p \int (y_1 - r)dt \\ \dot{x}_3 &= \frac{d}{dt}(\rho K_p \int \theta dt) = \frac{d}{dt}(\rho K_p \int (y_1 - r)dt) \\ \dot{x}_3 &= \rho K_p \theta = \rho K_p (y_1 - r) \\ \dot{x}_3 &= \rho K_p (y_1 - r) \\ \dot{x}_3 &= \rho K_p (\rho K_p x_1 - r) \\ \dot{x}_3 &= (\rho K_p)^2 x_1 - \rho K_p r \end{aligned}$$

On obtient

$$x_1 = \frac{\dot{x}_3 + \rho K_p r}{(\rho K_p)^2}$$

On utilise l'équation ci dessus pour simplifier y_3 .

$$\begin{aligned} y_3 &= \int (y_1 - r)dt = \int (\rho K_p x_1 - r)dt \\ y_3 &= \int (\rho K_p) \frac{\dot{x}_3 + \rho K_p r}{(\rho K_p)^2} - r dt \\ y_3 &= \int \frac{\dot{x}_3 + \rho K_p r}{(\rho K_p)} - r dt \end{aligned}$$

Après simplification on obtient :

$$\begin{aligned} y_3 &= \int \frac{\dot{x}_3}{\rho K_p} dt \\ y_3 &= \frac{1}{\rho K_p} x_3 \end{aligned}$$

Le vecteur y s'écrit :

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho K_p x_1 \\ K_v x_2 \\ \frac{1}{\rho K_p} x_3 \end{bmatrix} = Cx + Du$$

$$y = \begin{bmatrix} \rho K_p & 0 & 0 \\ 0 & K_v & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\rho K_p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

Nous obtenons les matrices suivantes :

$$C = \begin{bmatrix} \rho K_p & 0 & 0 \\ 0 & K_v & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\rho K_p} \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Le modèle d'état théorique du système est le suivant :

L'équation d'état de la partie dynamique est : $\dot{x} = Ax + Bu$.

Les matrices de la représentation d'état sont :

A est une matrice d'état.

B est une matrice d'entrée.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{-K^2 - fR}{RJ_t} & 0 \\ \rho K_p & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{K}{RJ_t} \\ 0 \end{bmatrix}$$

L'équation de sortie de la partie statique est : $y = Cx + Du$.

Les matrices de la représentation d'état sont :

C est une matrice de sortie.

D est une matrice de couplage.

$$C = \begin{bmatrix} \rho K_p & 0 & 0 \\ 0 & K_v & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\rho K_p} \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Les spécifications étant celles de la section 3.2.1 de l'énoncé. Calculons les valeurs théoriques du gain du retour d'état K_c et de K_y .

Pour déterminer les valeurs théoriques du gain de retour d'état, il nous faut nous assurer de la commandabilité du système. Calculons le rang de la matrice W_c .

$$W_c = [B|AB]$$

$$AB = \begin{bmatrix} \frac{K}{RJ_t} \\ \frac{-K^3 - KfR}{(RJ_t)^2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$W_c = [A|AB]$$

$$W_c = \begin{bmatrix} 0 & \frac{K}{RJ_t} \\ \frac{K}{RJ_t} & \frac{-K^3 + KfR}{(RJ_t)^2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Les lignes de la matrice W_r sont linéairement indépendants. Ainsi, $\text{rang}(W_c) = 3$ donc le système est commandable. On peut alors déterminer le polynôme caractéristique du système.

$$P_c(p) = \det(pI_3 - (A - BK)) \text{ où } K = K_c = [K_1 \quad K_2 \quad K_3]$$

$$P_c(p) = \det \left(\begin{bmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{-K^2 - fR}{RJ_t} & 0 \\ \rho K_p & 0 & 0 \end{bmatrix} - BK \right)$$

$$BK = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{K}{RJ_t} \\ 0 \end{bmatrix} [K_1 \quad K_2 \quad K_3] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{KK_1}{RJ_t} & \frac{KK_2}{RJ_t} & \frac{KK_3}{RJ_t} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P_c(p) = \det \left(\begin{bmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{bmatrix} - \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{-K^2 - fR}{RJ_t} & 0 \\ \rho K_p & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{KK_1}{RJ_t} & \frac{KK_2}{RJ_t} & \frac{KK_3}{RJ_t} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \right)$$

$$P_c(p) = \det \left(\begin{bmatrix} p & -1 & 0 \\ \frac{KK_1}{RJ_t} & p + \frac{K^2 + fR}{RJ_t} + \frac{KK_2}{RJ_t} & \frac{KK_3}{RJ_t} \\ -\rho K_p & 0 & p \end{bmatrix} \right)$$

Nous pouvons déterminer $P_c(p)$ grâce à la méthode des cofacteurs.

$$P_c(p) = p * \det \left(\begin{bmatrix} p + \frac{K^2 + fR + KK_2}{RJ_t} & \frac{KK_3}{RJ_t} \\ 0 & p \end{bmatrix} \right) - (-1) * \det \left(\begin{bmatrix} \frac{KK_1}{RJ_t} & \frac{KK_3}{RJ_t} \\ -\rho K_p & p \end{bmatrix} \right)$$

Après calcul et simplification nous obtenons :

$$P_c(p) = p^3 + p^2\left(\frac{K^2 + fR + KK_2}{RJ_t}\right) + p\left(\frac{KK_1}{RJ_t}\right) + \rho\frac{K_pKK_3}{RJ_t}$$

On peut effectuer une identification de chaque terme en utilisant la section 3.2.1 de l'énoncé.

$$\begin{aligned} P_c(p) &= (1 + 2\zeta\frac{p}{w_0} + \frac{p^2}{w_0^2})(1 + Tp) \\ P_c(p) &= 1 + Tp + 2\zeta\frac{p}{w_0} + 2\zeta\frac{Tp^2}{w_0} + \frac{p^2}{w_0^2} + \frac{Tp^3}{w_0^2} \\ P_c(p) &= p^3\frac{T}{w_0^2} + p^2\left(\frac{2\zeta T}{w_0} + \frac{1}{w_0^2}\right) + p\left(T + \frac{2\zeta}{w_0}\right) + 1 \end{aligned}$$

On isole K_1, K_2, K_3 pour obtenir le vecteur K :

$$\begin{aligned} p^3 &= p^3\frac{T}{w_0^2} \Leftrightarrow w_0^2 = T \\ p^2\frac{K^2 + fR + KK_2}{RJ_t} &= p^2\left(\frac{2\zeta T}{w_0} + \frac{1}{w_0^2}\right) \end{aligned}$$

Après simplification, nous trouvons K_2

$$\begin{aligned} K_2 &= \frac{RJ_t}{K}\left(\frac{2\zeta T}{w_0} + \frac{1}{w_0^2}\right) - \frac{fR}{K} - K \\ p\frac{KK_1}{RJ_t} &= p\left(T + \frac{2\zeta}{w_0}\right) \\ \frac{KK_1}{RJ_t} &= T + \frac{2\zeta}{w_0} \end{aligned}$$

Après simplification, nous trouvons K_1

$$\begin{aligned} K_1 &= \frac{RJ_t}{K}\left(T + \frac{2\zeta}{w_0}\right) \\ \rho K_p\frac{KK_3}{RJ_t} &= 1 \end{aligned}$$

On isole K_3 et nous trouvons

$$K_3 = \frac{RJ_t}{\rho K_p K}$$

Ainsi, le vecteur K s'écrit

$$\begin{aligned} K_c &= [K_1 \quad K_2 \quad K_3] \\ K_c &= \left[\frac{RJ_t}{K}\left(T + \frac{2\zeta}{w_0}\right) \quad \frac{RJ_t}{K}\left(\frac{2\zeta T}{w_0} + \frac{1}{w_0^2}\right) - \frac{fR}{K} - K \quad \frac{RJ_t}{\rho K_p K} \right] \end{aligned}$$

Nous pouvons calculer le gain de retour de sortie K_y . Ce gain s'exprime par : $K_y = K_c * C^{-1}$.

Déterminons la matrice inverse de C c'est à dire C^{-1} :

$$C = \begin{bmatrix} \rho K_p & 0 & 0 \\ 0 & K_v & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\rho K_p} \end{bmatrix}$$

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\rho K_p} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{K_v} & 0 \\ 0 & 0 & \rho K_p \end{bmatrix}$$

Déterminons K_y

$$K_y = K_c * C^{-1}$$

$$K_y = \left[\frac{RJ_t}{K} \left(T + \frac{2\zeta}{w_0} \right) \quad \frac{RJ_t}{K} \left(\frac{2\zeta T}{w_0} + \frac{1}{w_0^2} \right) - \frac{fR}{K} - K \quad \frac{RJ_t}{\rho K_p K} \right] \begin{bmatrix} \frac{1}{\rho K_p} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{K_v} & 0 \\ 0 & 0 & \rho K_p \end{bmatrix}$$

$$K_y = \left[\frac{RJ_t}{\rho K K_p} \left(T + \frac{2\zeta}{w_0} \right) \quad \frac{RJ_t}{K K_v} \left(\frac{2\zeta T}{w_0} + \frac{1}{w_0^2} \right) - \frac{fR}{K K_v} - \frac{K}{K_v} \quad \frac{RJ_k}{K} \right]$$

Calculons les valeurs théoriques de K_c et K_y .

Pour K_c :

$$K_1 = \frac{RJ_t}{K} \left(T + \frac{2\zeta}{w_0} \right)$$

$$K_1 = \frac{5.8*5.8743*10^{-4}}{0.0337} \left(\frac{16}{9} + \frac{2*0.7}{\frac{4}{3}} \right)$$

$$K_1 = 0.2858$$

$$K_2 = \frac{RJ_t}{K} \left(\frac{2\zeta T}{w_0} + \frac{1}{w_0^2} \right) - \frac{fR}{K} - K$$

$$K_2 = \frac{5.8*5.8743*10^{-4}}{0.0337} \left(\frac{2*0.7*\frac{16}{9}}{\frac{4}{3}} + \frac{1}{\frac{16}{9}} \right) - \frac{0.005*5.8}{0.0337} - 0.0337$$

$$K_2 = -0.6486$$

$$K_3 = \frac{RJ_t}{\rho K_p K}$$

$$K_3 = \frac{5.8*5.8743*10^{-4}}{\frac{1}{20} * \frac{10}{6.28} * 0.0337}$$

$$K_3 = 1.2698$$

On obtient la valeur théorique du gain de retour d'état K_c :

$$K_c = \begin{bmatrix} 0.2858 & -0.6486 & 1.2698 \end{bmatrix}$$

On effectue les applications numériques. Ainsi, nous obtenons la valeur théorique du gain de retour de sortie K_y :

$$K_y = [3.5907 \quad -13.0512 \quad 0.1011]$$

Les valeurs expérimentales sont les suivantes :

$$K_c = [1.0604 \quad 0.6268 \quad 0.8387]$$

$$K_y = [13.3190 \quad 12.6121 \quad 10.5348]$$

Les valeurs théoriques sont les suivantes :

$$K_c = [0.2858 \quad -0.6486 \quad 1.2698]$$

$$K_y = [3.5907 \quad -13.0512 \quad 0.1011]$$

Les valeurs théoriques du gain de retour d'état K_c sont proches des valeurs expérimentales du gain de retour d'état K_c . Cependant, les valeurs sont différentes. La matrice de commande théorique est différente de la matrice de commande expérimentale. On peut alors observer une fluctuation entre les valeurs théoriques et expérimentales. Les valeurs théoriques du gain de sortie K_y sont différentes des valeurs expérimentales du gain de sortie K_y . En effet, la matrice d'état (A) théorique est différente de la matrice d'état (A) expérimentale. La matrice de sortie (C) théorique est également différente de la matrice de sortie (C) expérimentale.

7 Conclusion

Au travers des différents modèles étudiées, nous remarquons que le modèle linéaire avec intégrateur répond mieux aux cahiers des charges que le modèle non linéaire avec ou sans intégrateur. En effet un modèle avec intégrateur permet de corriger l'erreur statique. Cependant, le modèle linéaire ne prend pas en compte les frottements secs et visqueux du modèle moteur. Ainsi, ce modèle est moins représentatif du modèle réel. Dans la première partie du sujet, le signal mesuré et la commande étaient en temps continu, tandis que dans la seconde partie, le signal mesuré et la commande étaient en temps discret. Ainsi, nous devons faire attention au choix de la période d'échantillonnage. Finalement, il convient de souligner que le modèle non linéaire avec intégrateur demeure le plus fidèle à la réalité, car il prend en compte les frottements secs tout en corrigeant les erreurs.

**** FIN ****