

# Determinación de la función de probabilidad en cierres de círculos y simulación para $N$ iteraciones.

Abel Amado Gonzalez Bernad  
Universidad de Cantabria

Julio 2020 (revisión Junio 2021)

## Resumen

Se ha determinado la expresión analítica que proporciona la probabilidad en todo punto de que, estando dentro un círculo, este punto esté contenido en un nuevo círculo de radio menor inscrito en el primero con posición aleatoria. A partir de esta, se proponen ciertos cálculos numéricos para predecir dicha probabilidad tras sucesivos cierres de círculos. A su vez, se presentan simulaciones Montecarlo que respaldan las distribuciones halladas.

**Palabras clave:** *Función de probabilidad, cierre de círculos, caso favorable, iteración y simulación Montecarlo.*

## 1. Introducción

Se plantea un problema probabilístico, común en juegos Battle Royale, en el que, estando en un círculo de radio  $R$ , se dibuja uno más pequeño de radio  $r$  totalmente inscrito dentro del primero con posición aleatoria. El caso favorable es ubicarse dentro de este nuevo círculo, y no favorable lo contrario, estar fuera de él. Es obvio que fuera del primer círculo la probabilidad siempre será nula, debido a la condición de inscripción nombrada.

Ahora bien, es posible determinar una expresión analítica que ofrezca información sobre cuán probable es que el círculo pequeño,  $r$ , contenga cada punto del interior de círculo grande,  $R$ , original. Primeramente, debido a la geometría del problema, esta distribución de probabilidad debe depender exclusivamente de la distancia al centro,  $|\vec{r}|$ , del círculo grande, así pues, se define  $P(|\vec{r}|)$ . Se considera, además, una relación de círculos arbitraria,  $k$ , tal que

$$R = kr \quad \text{con} \quad k \geq 1$$

## 2. Desarrollo

### 2.1. Función de probabilidad: 1 cierre

Una circunferencia se define únicamente mediante su radio,  $\rho$ , y la posición de su centro,  $(x = a, y = b)$ , tal que,

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = \rho^2 \quad (1)$$

de esta forma se concluye que cada punto de una superficie define una única circunferencia de radio  $\rho$ . Por tanto, el área

de una superficie es proporcional a la cantidad de centros de circunferencias que puede contener,

$$A \propto n_{circ} \quad (2)$$

de esta forma, una superficie puede dar información acerca del número de centros de circunferencia en ella ubicados.

Resulta útil destacar la región en la que se pueden ubicar los centros de los círculos de radio  $\rho$  para contener un punto cualquiera, Pto. Esta, obviamente, es un círculo de mismo radio,  $\rho$ , Figura 1. Recordemos que contener al punto evaluado es el caso favorable del problema.

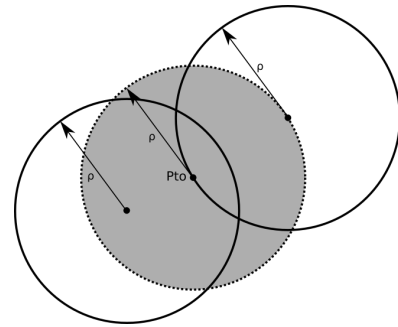


Figura 1: Representa en gris la región en la que pueden ubicarse los centros de los círculos de radio  $\rho$  para contener al Pto. Esta es un círculo de radio  $\rho$  sobre el propio punto.

Ahora bien, es necesario definir la región del interior del círculo grande en la que se pueden ubicar los centros de los

círculos pequeños teniendo en cuenta que deben estar completamente inscritos. Con este fin se define un nuevo radio tomado desde el origen o centro del círculo grande,  $R$ ,

$$\xi = R - r. \quad (3)$$

Con este radio, queda definido un nuevo círculo, que junto al grande,  $R$ , forman una corona circular, de radio interior  $\xi$ , Figura 2

$$a_\xi = \pi \xi^2 \propto N_{circ} \quad (4)$$

Esta superficie interior de la corona, Ec. (4), es la zona en la que se pueden ubicar los centros de los círculos pequeños,  $r$ , estando inscritos en el grande. Atendiendo a la Ec. (2), dicha área es proporcional al numero total de círculos,  $N_{circ}$ , posibles en el problema propuesto (favorables y no favorables).

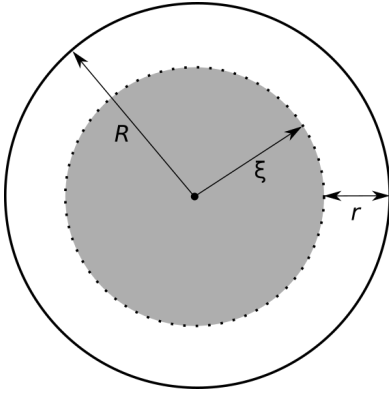


Figura 2: Representa el círculo grande,  $R$ , y en gris (radio  $\xi$ ), la zona en la que pueden ubicarse los círculos de radio  $r$ .

Dicho esto, parece razonable pensar que si existiese un punto que estuviese contenido en cualquier círculo cuyo centro este ubicado en el interior de la corona, todos los círculos posibles serían favorables, por tanto, existiría una probabilidad del 100 % en ese punto.

Bajo este razonamiento, es posible juntar las dos ideas antes propuestas, Figura 3.

-La región en la que pueden ubicarse los centros de los círculos de radio  $r$  para que contengan cierto punto no es más que otro círculo del mismo radio cuyo centro es el propio punto.

-En cuanto al ejercicio, la única zona en la que pueden situarse los centros de los círculos de radio,  $r$ , es la superficie interior de una corona circular de radio interior,  $\xi$ , Ec. (3).

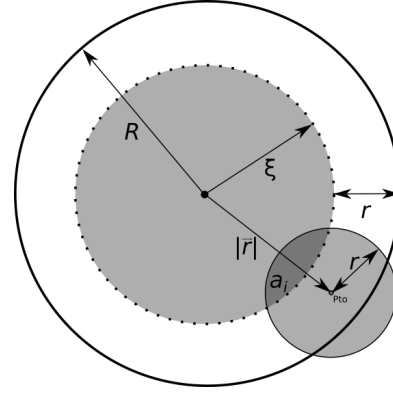


Figura 3: El círculo gris de radio  $\xi$  representa la región en la que deben ubicarse todos los círculos (de radio  $r$ ) del problema. El otro círculo gris, de radio  $r$ , representa la zona en la que deben ubicarse los círculos (de radio  $r$ ) para que contengan al Pto. evaluado (casos favorables). Así pues, la intersección,  $a_i$ , es la zona en la que se puede ubicar los círculos posibles y favorables.

Así pues, según la Figura 3 la intersección entre ambas superficies nombradas,  $a_i$ , será la región del plano en la que pueden ubicarse los círculos favorables al punto escogido que, atendiendo a la Eq. (2), proporciona información sobre la cantidad de círculos.

Llegados a este punto, se trata de determinar el área de intersección,  $a_i$ , de dos círculos de radios  $\xi$  y  $r$  separados una distancia  $|\vec{r}|$ , Figura 3. Dicha separación no puede ser otra que el módulo del vector posición del punto arbitrario evaluado en el que se centra el círculo de radio  $r$ .

Se aborda el problema mediante la siguiente disposición por simplicidad de los cálculos.

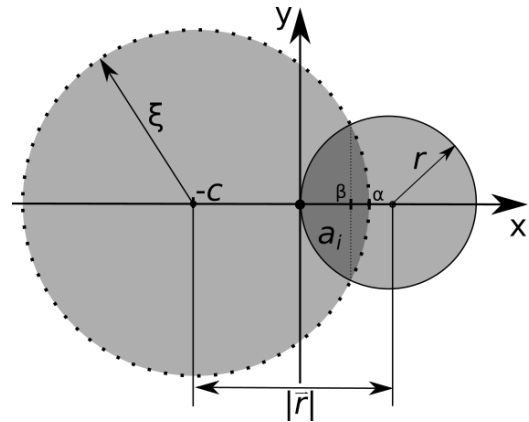


Figura 4: Disposición de los círculos en el plano XY. La región de superposición es la superficie en la que se centran todos los círculos,  $r$ , que contienen al Pto. (ubicaciones favorables). Así pues se debe obtener el valor de dicho área.

La ecuación de las circunferencias ilustradas en la Figura 4, de definen tal que,

$$\begin{aligned}(x+c)^2 + y^2 &= \xi^2 \\ (x-r)^2 + y^2 &= r^2\end{aligned}\quad (5)$$

Se definen ciertos valores de interés,

$$c = |\vec{r}| - r ; \quad \alpha = \xi - |\vec{r}| + r.$$

Resolviendo el sistema, Ec. (5) se halla el valor del eje de abscisas en el que se produce la intersección de ambas circunferencias.

$$\beta = \frac{\xi^2 - (|\vec{r}| - r)^2}{2|\vec{r}|}$$

De acuerdo con el teorema de Fubini, es posible realizar la integral iterando sobre cada variable, dependiendo los límites de la primera integral de la segunda variable. Así pues se plantean los límites en cartesianas,

$$y \in \begin{cases} \left[ -\sqrt{r^2 - (x-r)^2}, \sqrt{r^2 - (x-r)^2} \right] & \text{si } 0 < x < \beta \\ \left[ -\sqrt{\xi^2 - (x+c)^2}, \sqrt{\xi^2 - (x+c)^2} \right] & \text{si } \beta < x < \alpha \end{cases}$$

Por tanto, la integral queda,

$$a_i = \int_0^\beta \int_{-\sqrt{r^2 - (x-r)^2}}^{\sqrt{r^2 - (x-r)^2}} dy dx + \int_\beta^\alpha \int_{-\sqrt{\xi^2 - (x+c)^2}}^{\sqrt{\xi^2 - (x+c)^2}} dy dx. \quad (6)$$

Tras resolver y simplificar la Ec. (6) se llega a que el área de intersección entre ambos círculos, Figura 4,

$$\begin{aligned}a_i &= \sqrt{\beta(2r-\beta)} \left( \frac{2r^2 \arctan \sqrt{\frac{\beta}{2r-\beta}}}{\sqrt{\beta(2r-\beta)}} - r + \beta \right) \\ &+ \xi^2 \frac{\pi}{2} - (c+\beta) \sqrt{\xi^2 - (c+\beta)} \\ &- \xi^2 \arctan \frac{c+\beta}{\sqrt{\xi^2 - (c+\beta)^2}}\end{aligned}\quad (7)$$

donde  $c$  y  $\beta$  ya han sido definidos.

Recordando la Ec. (4), si el área interior da cuenta de todos los círculos posibles, el área determinada (Ec. (7)) refleja la cantidad de círculos favorables. Por tanto, el cociente entre ambos resultados y normalizado a 100 resulta en una función de probabilidad en tanto por ciento tal que,

$$\begin{aligned}P_{\%}(|\vec{r}|) &= \left[ \sqrt{\beta(2r-\beta)} \left( \frac{2r^2 \arctan \sqrt{\frac{\beta}{2r-\beta}}}{\sqrt{\beta(2r-\beta)}} - r + \beta \right) \right. \\ &+ \xi^2 \frac{\pi}{2} - (c+\beta) \sqrt{\xi^2 - (c+\beta)} \\ &\left. - \xi^2 \arctan \frac{c+\beta}{\sqrt{\xi^2 - (c+\beta)^2}} \right] \times \frac{100}{\pi \xi^2}\end{aligned}\quad (8)$$

Ahora bien, es posible particularizar la Ec. (8). Tomando el caso en el que  $R = 2r$ , la expresión se simplifica y es válida para cualquier punto del interior del círculo,

$$\begin{aligned}P_{\%}(|\vec{r}|) &= \left[ 2r^2 \arctan \left( \sqrt{\frac{r - |\vec{r}|/2}{r + |\vec{r}|/2}} \right) + \frac{\pi}{2} r^2 \right. \\ &- |\vec{r}| \sqrt{r^2 - (|\vec{r}|/2)^2} \\ &\left. - r^2 \arctan \left( \frac{|\vec{r}|/2}{\sqrt{r^2 - (|\vec{r}|/2)^2}} \right) \right] \times \frac{100}{\pi \xi^2} \\ &\text{con } |\vec{r}| \in (0, R)\end{aligned}\quad (9)$$

Llegados a este resultado, existen relaciones  $R$ - $r$  en las que, en cierta región del plano, la evaluación antes realizada del área de intersección no tiene sentido, ya que no se produce el corte de circunferencias. Se trata de los casos en los que  $R \neq 2r$ .

En el caso en el que  $R < 2r$ , existe una zona en la que todos los círculos de radio,  $r$ , cubren completamente el interior de la corona circular, presentando por tanto una probabilidad del 100 %. Así pues separando por partes la distribución teniendo en cuenta los límites en los que ya no se produce el corte de circunferencias, se define,

$$P_{\% R < 2r}(|\vec{r}|) = \begin{cases} 100 & \text{si } 0 \leq |\vec{r}| \leq R - 2(R-r) \\ \text{Ec. (8)} & \text{si } R - 2(R-r) < |\vec{r}| \leq R \end{cases}\quad (10)$$

El último caso a tener en cuenta es  $R > 2r$ , en el que existe una zona central en la que el círculo  $r$  se encuentra completamente contenido en el interior de la corona circular (radio  $\xi$ ). De nuevo, teniendo en cuenta el intervalo de  $|\vec{r}|$  en el que esto se produce y la normalización a tanto por ciento,

$$P_{\% R > 2r}(|\vec{r}|) = \begin{cases} \left( \frac{r}{R-r} \right)^2 \times 100 & \text{si } 0 \leq |\vec{r}| \leq R - 2r \\ \text{Ec. (8)} & \text{si } R - 2r < |\vec{r}| \leq R \end{cases}\quad (11)$$

Para visualizar estas funciones se presenta una representación gráfica para unos valores  $R$  y  $r$  dados.

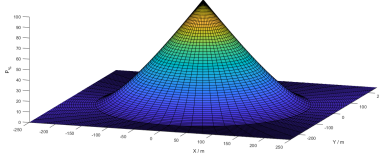


Figura 5: Representación gráfica sobre el plano XY de la probabilidad de cierre, Ec. (9). Relación  $R = 2r$

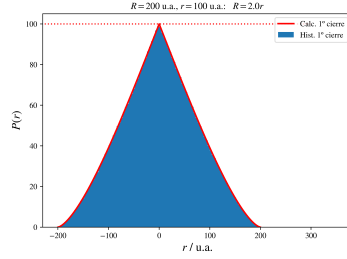


Figura 6: Histograma de la simulación Montecarlo para una relación de círculos  $R = 2r$  junto al cálculo de la predicción (curva). La distribución concuerda con la expresión analítica, Ec. (9).

Como cabe esperar, de acuerdo con las Figuras 5 y 6, la función de probabilidad crece al acercarse al centro, y es precisamente en este punto en que la probabilidad de estar dentro del nuevo círculo es 100 %, ya que cualquier círculo, esté donde esté, contendrá dicho punto.

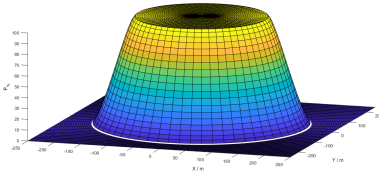


Figura 7: Representación gráfica sobre el plano XY de la probabilidad de cierre, Ec. (10). Relación  $R = 1,25r$

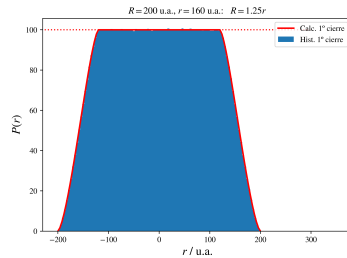


Figura 8: Histograma generado mediante una simulación Montecarlo para una relación de círculos  $R = 1,25r$  junto al cálculo de la predicción (curva). La distribución concuerda con la expresión analítica, Ec. (10).

Según la Figura 7, la distribución propone una región en la que la probabilidad crece hacia el centro resultando un

círculo central cuya probabilidad es del 100 %. Se concluye pues, que para el caso  $R < 2r$ , existe una zona central en la que cualquier punto va a estar contenido por todos los círculos.

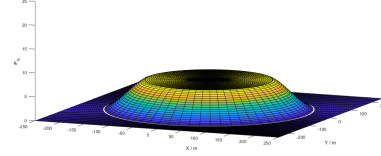


Figura 9: Representación gráfica sobre el plano XY de la probabilidad de cierre, Ec. (11). Relación  $R = 5r$

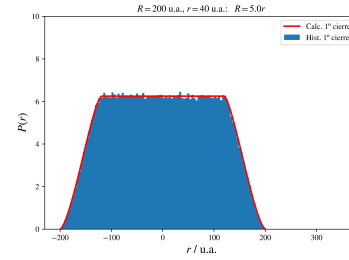


Figura 10: Histograma generado mediante simulación Montecarlo para una relación de círculos  $R = 5r$  junto al cálculo de la predicción (curva). La distribución concuerda con la expresión analítica, Ec. (11).

Atendiendo a la Figura 9, se aprecia, al igual que el caso anterior una región equiprobable en el centro, pero siendo esta menor que el 100 % y no alcanzando este valor en ningún punto.

Por último, se ofrece un histograma en 2D obtenido, de nuevo, mediante una simulación Montecarlo en la que se evalúa las veces que un punto está contenido en un círculo generado.

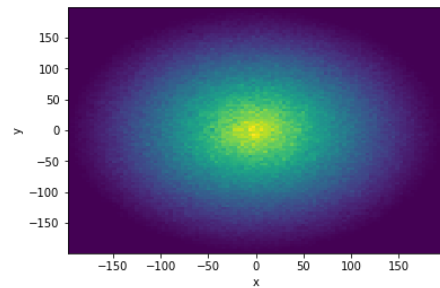


Figura 11: Histograma en el plano XY generado mediante números aleatorios para la relación de círculos  $R = 2r$ . Colores claros representan una mayor frecuencia y o oscuros menor. La distribución concuerda con la expresión analítica, Ec. (9) y Figura 5.

## 2.2. Cálculo de probabilidad del 2º cierre

Una vez obtenida la función de probabilidad,  $P(\vec{r})$ , la cual proporciona la probabilidad de que el nuevo círculo contenga el punto evaluado,  $\vec{r}$ , es posible plantearse la situación en la que hubiese varios cierres de círculos sucesivos en vez de uno, Figura 12. Se trataría, pues, de un proceso de  $N$  iteraciones de cierre.

Notar que el problema aquí planteado es continuar con el cálculo de la probabilidad de un punto de estar contenido en sucesivas reducciones de círculo sin conocer en ningún momento dónde se han ido ubicando los sucesivos círculos, Figura 12.

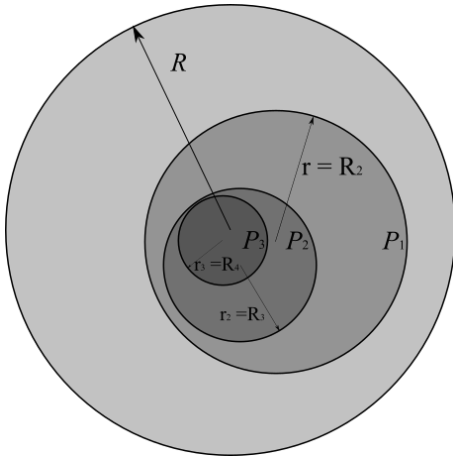


Figura 12: Caso posible de cierre de sucesivos círculos, donde, en el proceso el círculo de radio  $r_i$ , pasa a ser el nuevo círculo de radio  $R_{i+1}$ .  $P_i$  es la probabilidad de estar contenido en el el nuevo círculo en esa reducción de zona,  $i$ , en concreto.

Es bien conocido que la probabilidad,  $P$  de que dos sucesos,  $A$  y  $B$  independientes ocurran simultáneamente es la multiplicación de ambas probabilidades,  $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ , de esta forma, la consideración de más sucesos, en este caso, estar contenido en  $N$  círculos es,

$$P = P_1 \cdot P_2 \cdot P_3 \cdot P_4 \dots \quad (12)$$

donde  $P_1$  es la probabilidad de que el punto esté contenido en el primer cierre de círculo,  $P_2$  lo propio para el segundo cierre, y así sucesivamente.

Primeramente es posible plantearse el cálculo para dos cierres de círculo. Tomando  $P_1$  como la probabilidad de que el punto evaluado,  $\vec{r}$ , este dentro del nuevo círculo, y  $P_2$  como la probabilidad de que esté contenido en el segundo nuevo círculo debido al segundo cierre, su multiplicación resultará en la probabilidad de que tras dos cierres el punto siga contenido. Así pues,  $P_1$  es trivial, se trata de sustituir

en la expresión analítica,  $P(\vec{r})$  hallada, ya sea Ec. 9, 10 ó 11, según la relación de círculos,  $R = kr$ . Sin embargo, la nombrada  $P_2$  resulta en un cálculo más complejo.

Se debe recordar que conociendo la distancia del centro de círculo al punto evaluado la probabilidad de estar contenido tras el cierre es conocida pero, ahora, la ubicación del nuevo centro no es conocida. Sin embargo, la superficie sobre la que esta puede estar sí está bien definida, pudiendo centrarse en cualquier punto de esta de manera equiprobable ya que su posición es completamente aleatoria. De esta forma, si el primer cierre fuese favorable, la posición del centro del nuevo círculo es,

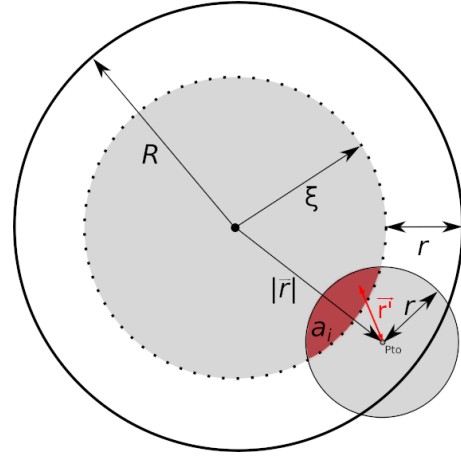


Figura 13: La zona roja resulta en la zona,  $a_i = S$ , en la que se ha podido ubicar el centro del círculo pequeño,  $r$ , en el primer cierre.<sup>en</sup> el caso de haber sido favorable. En rojo,  $\vec{r}$ , marca una de las supuestas distancias del punto evaluado a un posible centro de círculo.

En la Figura 13 se aprecia la superficie en la que ha podido ubicarse el círculo pequeño,  $r$ , ya que su posición no está definida. Ahora bien, se pueden tener en cuenta todas las posibles ubicaciones de los círculos ahí centrados para un segundo cierre realizando una integral de superficie sobre la región nombrada (zona roja) operando sobre la función de probabilidad ya conocida, la cual solo depende de la distancia centro círculo a punto. Notar además, que aunque  $P(\vec{r})$  presenta solo la variable  $\vec{r}$  (distancia centro-punto), a la cual la llamará  $\vec{r}_2$  para el nuevo cierre, se requieren los parámetros  $R$  radio del círculo grande y  $r$  radio del círculo pequeño, en el que realiza la reducción de zona, por tanto deben considerarse nuevos valores, tal que,  $R_2 = R/k$  y  $r_2 = r/k$ . Una vez realizada la integral interesa la media de la contribución de todos los puntos de la superficie a la probabilidad total, por tanto, se divide por la superficie integrada (región roja de la Figura 13). Este cálculo se presenta tal que,

$$\overline{P_2} = \frac{\int_S P(\vec{r}_2; R_2, r_2) dS}{S} \quad (13)$$

Disponiendo de la Ec. 13 se obtiene pues la probabilidad de estar contenido en una segunda reducción de zona,  $P_2$  y, de manera trivial,  $P_1$  se obtiene sustituyendo en  $P(\vec{r})$ . Multiplicando ambos resultados se consigue la probabilidad,  $P_{12}$ , como afirma la Ec. 12.

Es posible pararse a pensar en el valor de la superficie evaluada,  $S$ , presente en la Figura 13. En ese caso, toma la forma de la intersección de dos círculos y su calculo ya ha sido realizado (aunque con otro significado) en el sección 3.1. Podría darse en otros puntos que la intersección no se produjese, en tal caso la superficie de integración, como ya se ha explicado, es aquella en la que se ubican los centros de los círculos nuevos favorables (que contengan el punto en un cierre dado), pudiéndose tratar de todo el círculo de radio  $\xi$  o  $r$  de la Figura 13.

Cabe destacar que el resultado del cálculo de la Ec. 13 ha sido obtenido numéricamente con un ordenador debido a la falta de solución analítica de la integral ahí propuesta.

Al final de la siguiente sección son recogidas las representaciones gráficas de lo explicado aquí.

### 2.3. Cálculo de probabilidad para $N$ cierres sucesivos.

En cuanto a un tercer cierre y sucesivos el calculo se complica, ya que en el caso anterior (segundo cierre) el centro del nuevo círculo no estaba definido pero la superficie en la que se podía ubicar sí lo estaba. Sin embargo, en un tercer cierre la superficie en la que este se puede ubicar no está definida. Por tanto se propone evaluar todas las superficies posibles para todas las posiciones posibles de los centros, Ec. 14

$$\overline{P_{23}} = \frac{\int_S P(\vec{r}_2; R_2, r_2) \frac{\int_{S_3} P(\vec{r}_3; R_3, r_3) dS_3}{S_3} dS}{S} \quad (14)$$

Atendiendo a la Ec. 14 se tiene que  $\overline{P_{23}}$  es la probabilidad de que el punto este contenido en un segundo y tercer cierre. Esta expresión toma la misma forma que la Ec. 13 sin embargo añade un nuevo término:  $\frac{\int_{S_3} P(\vec{r}_3; R_3, r_3) dS_3}{S_3}$  a la integral siendo la probabilidad de estar contenido en un tercer cierre suponiendo que el centro del primer cierre de círculo esta en un punto dado de la superficie  $S$ . Destacar que este término, no es constante si no que la superficie  $S_3$  de dicha integral depende del punto evaluado en la superficie  $S$ , por tanto debe estar incluido en la integración  $\int_S \chi dS$ .

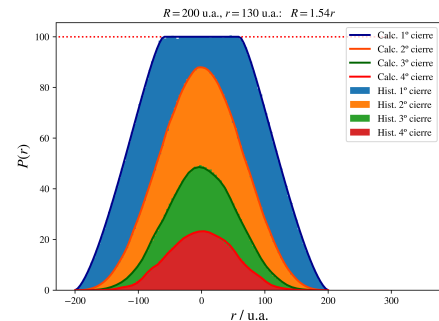
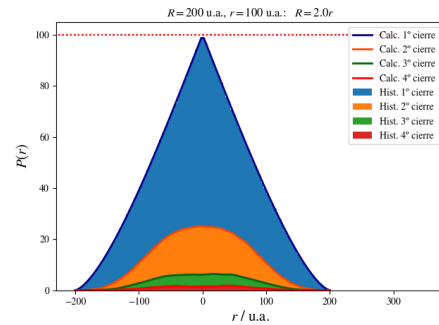
Se trata de un cálculo extremadamente complejo y falto de solución analítica. Sin embargo es posible intuir una extensión de la Ec. 14 y proponer una expresión similar pero

válida para el cálculo de  $N$  cierres, concatenando así integrales de superficie a cada punto evaluado en la integral de superficie del cierre anterior, teniendo así en cuenta todas las probabilidades posibles. Esta idea, multiplicada por la probabilidad del primer cierre resulta en,

$$\overline{P_{Total}} = P(\vec{r}; R, r) \cdot \frac{\int_S P(\vec{r}_2; R_2, r_2) \frac{\int_{S_3} P(\vec{r}_3; R_3, r_3) \frac{\int_{S_4} P(\vec{r}_4; R_4, r_4) \dots dS_4}{S_4} dS_3}{S_3} dS}{S} \quad (15)$$

La Ec. 15 es, por fin, la que proporciona la probabilidad de que un punto, ubicando a una distancia  $|\vec{r}|$  del centro, esté contenido en los nuevos  $N$  círculos, es decir, tras repetir el proceso de generar nuevos círculos más pequeños de radio  $r$  y que el punto elegido siga estando contenido en estos.

Por último, es posible simular el proceso aquí estudiado. Para ello se ha tomado una partición de la distancia al centro del círculo,  $\vec{r}$ , de  $-R$  hasta  $R$ , y se evalúa si está o no contenido en sucesivos círculos (similar a la Figura 12) generados aleatoriamente (método Montecarlo) contenidos en el círculo  $R$  correspondiente a ese cierre. Los eventos favorables son recogidos en histogramas que son normalizados a tanto por ciento, representado cuán probable es estar contenido en los círculos tras los  $N$  cierres. A su vez, se representa la curva teórica hallada a partir de la Ec. 15 resuelta por métodos numéricos.



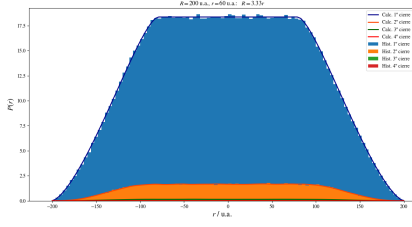


Figura 14: Histogramas de los eventos favorables en la simulación Montecarlo normalizados a % junto a la curva calculada teóricamente para 4 cierres sucesivos. La relación de radios es  $R = 2r$ ,  $R = 1,54r$  y  $R = 3,33r$

En la Figura 14 se aprecia una gran correlación entre los histogramas (simulación) y las curvas (predicción teórica) evidenciando la validez de los cálculos. Es evidente la reducción de la probabilidad a medida que se suceden más reducciones de zona (cierres) como cabe esperar. A la vez, es notorio un mayor valor en las regiones centrales. De manera razonable la probabilidad decrece más rápido para los sucesivos cierres para círculos de cierre  $r$  más pequeños.

### 3. Conclusión

Queda determinada una expresión que proporciona la probabilidad en todo punto del plano XY contenido en un círculo de radio  $R$ , de estar contenido en un nuevo círculo de radio  $r$  menor inscrito en el primero. Esta propone, como cabe esperar, una mayor probabilidad en el centro, alcanzándose el 100 % sólo en los casos en los que  $R \leq 2r$ , apareciendo una región equiprobable menor al 100 % en el resto de casos. La simulación Montecarlo del problema mediante números aleatorios, concuerda a la perfección con dicha expresión.

Por otra parte, resulta satisfactorio el cálculo numérico propuesto para estimar dicha probabilidad para  $N$  procesos de reducción de zona sucesivos concordando a la perfección con la simulación Montecarlo a pesar de la naturaleza numérica de la solución. De nuevo, es razonable un menor valor de la probabilidad a medida que se suceden los cierres, especialmente para reducciones a radios más pequeños y mayor en las zonas centrales, como cabía esperar.