Modelado Matemático y Simulación de la Dinámica 1D del Sistema Remero-Barco-Agua

RowLab - Olympic Rowing Dynamics Analysis

24 de diciembre de 2025

Resumen

Este documento detalla la formulación física y matemática implementada en el software *RowLab* para la simulación de la fase aérea del remo olímpico. Se describe el sistema de cuerpos vinculados (remero y barco), las fuerzas externas (arrastre hidrodinámico) y la derivación de las ecuaciones diferenciales de movimiento. Asimismo, se expone el método de imposición de cinemática del remero mediante polinomios de alto grado con condiciones de contorno y el cálculo de magnitudes energéticas derivadas.

1. Introducción

El remo de banco móvil es un deporte cíclico donde el movimiento relativo del atleta respecto a la embarcación juega un papel crucial en la hidrodinámica del sistema. Durante la fase aérea (o de recuperación), los remos no están en contacto con el agua y la única fuerza externa horizontal significativa es la resistencia hidrodinámica (drag) sobre el casco.

El objetivo de este modelo es predecir la evolución de la velocidad del barco $v_b(t)$ dado un perfil de movimiento del remero $x_r(t)$, permitiendo optimizar la técnica para minimizar las fluctuaciones de velocidad y el gasto energético.

2. Modelo Físico

2.1. Definición del Sistema

Consideramos un sistema unidimensional compuesto por dos masas:

- M: Masa del barco (kg).
- m: Masa del remero (kg).

Definimos las coordenadas de posición en un sistema de referencia inercial fijo en el agua:

- $y(t)$: Posición absoluta del barco.
- $x(t)$: Posición del remero relativa al barco.

Por tanto, la posición absoluta del remero es $y(t) + x(t)$.

2.2. Fuerzas Externas

La única fuerza externa considerada en el eje de movimiento es la fuerza de arrastre hidrodinámico (F_d) que actúa sobre el casco del barco. Se modela utilizando la ecuación cuadrática de arrastre turbulento:

$$F_d = -\frac{1}{2}\rho S C_d v|v| \tag{1}$$

Donde:

- ρ: Densidad del agua ($\approx 1000\,\mathrm{kg/m^3}$).
- S: Área de la sección transversal sumergida de referencia (m^2).
- C_d: Coeficiente de arrastre adimensional.
- $v = \dot{y}$: Velocidad instantánea del barco.

3. Desarrollo Matemático

3.1. Ecuaciones de Movimiento

Aplicamos la Segunda Ley de Newton al sistema completo. La masa total del sistema es $M + m$. La posición del centro de masas (Y_{CM}) está dada por:

$$Y_{CM} = \frac{My + m(y + x)}{M + m} = y + \frac{m}{M + m}x \tag{2}$$

Derivando dos veces respecto al tiempo para obtener la aceleración del centro de masas (A_{CM}):

$$A_{CM} = \ddot{y} + \frac{m}{M + m}\ddot{x} \tag{3}$$

La ecuación dinámica fundamental establece que la suma de fuerzas externas es igual a la masa total por la aceleración del centro de masas:

$$(M + m)A_{CM} = F_d \tag{4}$$

Sustituyendo las expresiones anteriores:

$$(M + m)\left(\ddot{y} + \frac{m}{M + m}\ddot{x}\right) = -\frac{1}{2}\rho S C_d \dot{y}|\dot{y}| \tag{5}$$

Despejando la aceleración del barco $\ddot{y}$:

$$(M + m)\ddot{y} + m\ddot{x} = -\frac{1}{2}\rho S C_d \dot{y}|\dot{y}| \tag{6}$$

$$\ddot{y} = -\frac{1}{2(M + m)}\rho S C_d \dot{y}|\dot{y}| - \frac{m}{M + m}\ddot{x} \tag{7}$$

Esta es la Ecuación Diferencial Ordinaria (EDO) de segundo orden que gobierna el sistema. En el código, se definen las constantes auxiliares:

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{1}{M + m} \\ A &= -\frac{1}{2}\rho S C_d \mu \\ B &= m\mu = \frac{m}{M + m} \end{aligned}$$

Quedando la ecuación implementada como:

$$\ddot{y}(t) = A \cdot \dot{y}(t) \cdot |\dot{y}(t)| - B \cdot \ddot{x}(t) \tag{8}$$

3.2. Cinemática del Remero (Condiciones de Contorno)

El movimiento del remero $x(t)$ es una entrada del sistema (input). Se modela como un polinomio de grado n definido en el intervalo $t \in [0, T]$, donde T es la duración de la fase.

$$x(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k \tag{9}$$

Se imponen las siguientes condiciones de contorno físicas para una fase de recuperación completa:

1. Posición inicial nula (referencia): $x(0) = 0 \implies a_0 = 0$.
2. Velocidad inicial nula (arranque desde reposo relativo): $\dot{x}(0) = 0 \implies a_1 = 0$.
3. Posición final igual al desplazamiento total L: $x(T) = L$.
4. Velocidad final nula (llegada a reposo relativo): $\dot{x}(T) = 0$.

Para un polinomio de grado mínimo $n = 3$, los coeficientes a_2 y a_3 se determinan resolviendo el sistema lineal derivado de las condiciones en $t = T$. El software permite grados superiores ($n > 3$), donde los coeficientes $a_4, \ldots, a_n$ son grados de libertad ajustables por el usuario para modificar la forma de la curva de aceleración.

4. Resolución Numérica

La EDO se resuelve numéricamente reduciéndola a un sistema de primer orden: Sea $v = \dot{y}$, entonces: $\begin{cases} \dot{y} = v \\ \dot{v} = Av|v| - B\ddot{x}(t) \end{cases}$

Se utiliza el integrador `scipy.integrate.solve_ivp` (método Runge-Kutta explícito) para obtener la evolución temporal de $y(t)$ y $v(t)$.

5. Análisis Energético

Una vez resuelta la cinemática, se calculan magnitudes energéticas clave:

5.1. Energía Mecánica del Sistema

$$E_{sys} = \frac{1}{2}(M + m)v_b^2 \tag{10}$$

La variación ΔE_{sys} representa la energía disipada por el arrastre hidrodinámico.

5.2. Trabajo del Remero

El trabajo mecánico realizado por el remero para mover su masa relativa al barco se estima integrando la potencia instantánea:

$$W_{rower} = \int_0^T F_{inercial} \cdot v_{rel}\, dt = \int_0^T m(\ddot{y} + \ddot{x}) \cdot \dot{x}\, dt \tag{11}$$

Donde $m(\ddot{y} + \ddot{x})$ es la fuerza neta sobre el remero (masa $\times$ aceleración absoluta) y $\dot{x}$ es la velocidad relativa de desplazamiento.

6. Conclusión

Este marco matemático permite desacoplar la cinemática del remero de la dinámica del barco, proporcionando una herramienta robusta para evaluar cómo diferentes perfiles de aceleración del atleta afectan a la velocidad media y la eficiencia de la embarcación, facilitando la optimización técnica basada en principios físicos fundamentales.