polinomical solution air phase

abelgonzalezbernad

September 2025

1 Introduction

1.1 Polinomio de grado arbitrario con condiciones de contorno

Queremos construir un polinomio $p(t)$ de grado $n \geq 3$ que cumpla las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} p(0) &= 0, \\ p(T) &= L, \\ p'(0) &= 0, \\ p'(T) &= 0, \end{aligned}$$

donde p' denota la derivada de p respecto a t, y T, L son constantes dadas.

1. Forma general del polinomio

Sea el polinomio de grado n:

$$p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \cdots + a_n t^n$$

con coeficientes $a_0, a_1, \ldots, a_n$ a determinar. La derivada es:

$$p'(t) = a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2 + \cdots + n a_n t^{n-1}.$$

2. Aplicando las condiciones en $t = 0$

De $p(0) = 0$ obtenemos:

$$a_0 = 0.$$

De $p'(0) = 0$ obtenemos:

$$a_1 = 0.$$

Por lo tanto, el polinomio se reduce a:

$$p(t) = a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + \cdots + a_n t^n.$$

3. Condiciones en $t = T$

Aplicando las condiciones restantes:

$$\begin{aligned} p(T) &= a_2 T^2 + a_3 T^3 + \cdots + a_n T^n = L, \\ p'(T) &= 2a_2 T + 3a_3 T^2 + \cdots + n a_n T^{n-1} = 0. \end{aligned}$$

Estas son dos ecuaciones lineales en los coeficientes a_2, a_3, dejando los coeficientes $a_4, \dots, a_n$ como parámetros libres que podemos elegir arbitrariamente.

4. Resolviendo para a_2 y a_3

Sea $\{a_4, \dots, a_n\}$ los coeficientes libres. Entonces las ecuaciones se escriben como:

$$\begin{aligned} a_2 T^2 + a_3 T^3 &= L - \sum_{k=4}^{n} a_k T^k, \\ 2a_2 T + 3a_3 T^2 &= - \sum_{k=4}^{n} k a_k T^{k-1}. \end{aligned}$$

Resolviendo este sistema para a_2 y a_3 se obtiene:

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{3L}{T^2} + \sum_{k=4}^{n} (k-3) a_k T^{k-2}, \\ a_3 &= -\frac{2L}{T^3} - \sum_{k=4}^{n} (k-2) a_k T^{k-3}. \end{aligned}$$

5. Expresión general del polinomio

Finalmente, el polinomio de grado arbitrario n que cumple todas las condiciones es:

$$\boxed{p(t) = a_2 t^2 + a_3 t^3 + \sum_{k=4}^{n} a_k t^k, \quad \text{con } a_2, a_3 \text{ dados por las ecuaciones anteriores y } a_4, \dots, a_n \text{ libres.}}$$

De esta forma, se puede elegir arbitrariamente el grado n y los coeficientes libres $a_4, \dots, a_n$, y los coeficientes a_2, a_3 se ajustan automáticamente para garantizar que se cumplan las cuatro condiciones:

$$p(0) = 0, \quad p(T) = L, \quad p'(0) = 0, \quad p'(T) = 0.$$

6. Nota

- Para el caso mínimo $n = 3$ no hay coeficientes libres y el polinomio cúbico resultante es único:

$$p(t) = \frac{3L}{T^2}t^2 - \frac{2L}{T^3}t^3.$$

- Para $n > 3$, se pueden ajustar los parámetros libres para cambiar la forma del polinomio sin violar las condiciones.

1.2 Planteaamiento del problema de optimizaacion

$$J = k \int_0^T \dot{y}(t)^3 \, dt \tag{1}$$

sujeto a la restricción diferencial

$$\ddot{y} = A\dot{y}^2 - B\ddot{p} \tag{2}$$

y las condiciones de frontera

$$\dot{y}(t = 0) = V_0, \tag{3}$$
$$\dot{x}(t = 0) = 0, \tag{4}$$
$$\dot{x}(t = T) = 0, \tag{5}$$
$$x(t = 0) = 0, \tag{6}$$
$$x(t = T) = L. \tag{7}$$