Calculo de Derivadas

Propiedades de las derivadas

Teorema

Sea f y g dos funciones diferenciables en el intervalo (a, b), entonces se cumple que:

a. $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$
b. $(f-g)'(x) = f'(x) - g'(x)$
c. $\alpha f(x)$, donde α es una constante, $(\alpha f)'(x) = \alpha f'(x)$
d. $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
e. $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$, si $g(x) \neq 0$

Ejemplo

Calcular la derivada de la función $f(x) = x^2(x^3 - 4)$ entonces su derivada es:

$$f'(x) = 2x(x^3 - 4) + x^2(3x^2)$$

$$= 2x^4 - 8x + 3x^4$$
$$= -8x + 5x^4$$

Ejemplo división

$$f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2 + 1},$$

Note que $x^2 + 1 \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, entonces

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(x^3 - 1)'(x^2 + 1) - (x^3 - 1)(x^2 + 1)'}{(x^2 + 1)^2} \\ &= \frac{3x^2(x^2 + 1) - (x^3 - 1)2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{x^4 + 3x^2 + 2x}{(x^2 + 1)^2} \end{aligned}$$

Taller de derivación

Derivada de funciones trigonométricas

Recordemos los siguientes limites

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$$

Derivada del seno Para calcular la derivada del $\sin x$, debemos recordar la identidad de ángulos dobles ¿Cuál?

$$\frac{d}{dx} \sin x = \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x + h) - \sin x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sin x(\cos h - 1) + \cos x \sin h}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sin x(\cos h - 1)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{\cos x \sin h}{h}$$

$$= \cos x$$

Derivada del coseno Para calcular la derivada del $\cos x$, debemos recordar la identidad de ángulos dobles ¿Cuál?

$$\frac{d}{dx}\cos x = \lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{\cos x\cos h - \sin x\sin h - \cos x}{h}$$

completa los pasos para encotrar la derivada del la función coseno

Sabiendo que las siguientes derivadas

$$\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$$

$$\frac{d}{dx}\sin x = \cos x$$

Calcula las derivadas de las siguientes funciones trigonométricas y establezca su dominio

- $f(x) = \tan x$
- $f(x) = \sec x$
- $f(x) = \csc x$

Ejercicios

1. Calcule la derivada de la funcioes

    a. $f(x) = \sin x\cos x$

    b. $f(x) = \sin x\tan x$

    c. $f(x) = x^3\cos x\sec x$

    d. $y = \frac{\sin x}{(x^2-3)}$

    e. $y = \frac{\sin x}{(x^2-3)}(\cos x)$

Regla de la cadena

Cuando tenemos una función compuesta, es decir,

$$f(x) = g(h(x)),$$

se pude usar la regla de la cadena para calcular su derivada, antes de comenzar veamos algunos ejemplos de funciones compuestas

- $f(x) = \sin(x^2)$, esta función se puede expresar como $f(x) = g(h(x))$, donde $g(x) = \sin x$ y $h(x) = x^2$

Teorema de la regla de la cadena

Sea $f(x) = g(h(x))$, donde g y h son funciones diferenciables, entonces la derivada de f esta dada por

$$f'(x) = g'(h(x))h'(x)$$

Este teorema tambien se puede expresar usando la notación de Leibniz como

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

Ejemplo

Calcule la derivada de la función $f(x) = \sin(x^2)$, entonces $f(x) = g(h(x))$, donde $g(z) = \sin z$ y $h(x) = x^2$, entonces

$$f'(x) = g'(h(x))h'(x)$$

como $g'(z) = \cos z$, y $h'(x) = 2x$, entonces

$$f'(x) = \cos(x^2)2x$$

Ejercicios

Calcule la derivada de las siguientes funciones

1. $f(x) = \sin(x^3)$
2. $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$
3. $f(x) = \sin(\cos x)$

4. $f(x) = \left(\frac{1}{x^2+1}\right)^2$
5. $f(x) = \sin^2 x$