Dinámica de Población en una Comunidad con Cinco Grupos de Edad

Problema: Dinámica de Población en una Comunidad con Cinco Grupos de Edad

Un ecólogo está investigando la dinámica de población de una especie animal dividida en cinco grupos de edad: **juveniles**, **subadultos jóvenes**, **subadultos mayores**, **adultos jóvenes** y **adultos maduros**. Cada grupo de edad tiene diferentes probabilidades de supervivencia y reproducción. El objetivo es modelar cómo cambia la población en cada grupo de edad de un año a otro y entender el comportamiento a largo plazo.

Definimos las siguientes variables:

- **Supervivencia**:

- s_1: probabilidad de que los juveniles sobrevivan y pasen a ser subadultos jóvenes en el próximo año.
- s_2: probabilidad de que los subadultos jóvenes sobrevivan y pasen a ser subadultos mayores.
- s_3: probabilidad de que los subadultos mayores sobrevivan y pasen a ser adultos jóvenes.
- s_4: probabilidad de que los adultos jóvenes sobrevivan y pasen a ser adultos maduros.
- s_5: probabilidad de que los adultos maduros sobrevivan en el próximo año y permanezcan en el mismo grupo.

- **Reproducción**:

- f_1: número de juveniles producidos por cada subadulto mayor.
- f_2: número de juveniles producidos por cada adulto joven.
- f_3: número de juveniles producidos por cada adulto maduro.

Modelo Matricial

Denotemos por $\mathbf{x}_n = \begin{bmatrix} x_{n,1} & x_{n,2} & x_{n,3} & x_{n,4} & x_{n,5} \end{bmatrix}^T$ el vector de población en el año n, donde: - $x_{n,1}$: número de juveniles en el año n. - $x_{n,2}$: número de subadultos jóvenes en el año n. - $x_{n,3}$: número de subadultos mayores en el año n. - $x_{n,4}$: número de adultos jóvenes en el año n. - $x_{n,5}$: número de adultos maduros en el año n.

La población en el año $n+1$ se puede expresar en términos de la población en el año n usando la siguiente matriz de transición A:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & f_1 & f_2 & f_3 & f_3 \\ s_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_4 & s_5 \end{bmatrix}$$

De esta forma, el sistema dinámico queda modelado por:

$$\mathbf{x}_{n+1} = A\mathbf{x}_n$$

Objetivo

Para entender la evolución de esta población a largo plazo, el ecólogo desea determinar:

- La **tasa de crecimiento poblacional** a largo plazo.
- La **distribución estable** de la población entre los cinco grupos de edad si existe un equilibrio.
- La **sensibilidad** de la tasa de crecimiento a las variaciones en las tasas de supervivencia y reproducción.

Para lograr estos objetivos, es necesario calcular los **autovalores y autovectores** de la matriz de transición A.

Preguntas

1. (a) Encuentre los autovalores de la matriz A resolviendo el polinomio característico $\det(A - \lambda I) = 0$.

2. (b) Determine el autovalor dominante (el autovalor con el mayor valor absoluto), ya que este autovalor representa la **tasa de crecimiento** a largo plazo de la población.

3. (c) Encuentre el autovector correspondiente al autovalor dominante. Este autovector describe la **distribución estable** de la población entre los cinco grupos de edad.

4. (d) Analice la estabilidad de la población: Dependiendo de si el autovalor dominante es mayor, menor o igual a 1, determine si la población total crecerá, decrecerá o se estabilizará con el tiempo.

5. (e) Simulación de Ejemplo: Suponga que $s_1 = 0.4$, $s_2 = 0.5$, $s_3 = 0.6$, $s_4 = 0.7$, $s_5 = 0.8$, $f_1 = 1.2$, $f_2 = 1.0$, y $f_3 = 0.8$. Calcule los autovalores y autovectores para esta matriz y determine la tendencia a largo plazo de la población con estos valores.