Taller Algebra lineal

1. Dada la transformación $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que
$$T(x, y) = (2x + y, 3x - 4y),$$
determina si T es una transformación lineal. Si lo es, encuentra su matriz asociada.

2. Dada la matriz de transformación
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix},$$
encuentra la imagen de los vectores
$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$
bajo la transformación lineal $T(v) = Av$.

3. Encuentra el núcleo y la imagen de la transformación lineal representada por la matriz
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

4. Demuestra si la transformación lineal dada por
$$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$$
con matriz
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$
es inyectiva, sobreyectiva o ninguna de las dos.

Nota Inyectiva (o uno a uno): Si $T(v) = 0$ solo tiene la solución trivial $v = 0$. Sobreyectiva (o sobre): Si para cada $b \in \mathbb{R}^2$ existe un $v \in \mathbb{R}^3$ tal que $T(v) = b$.

5. Sean $T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ y $T_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dos transformaciones lineales cuyas matrices asociadas son
$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$
y
$$A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$
respectivamente. Encuentra la matriz de la transformación $T_3 = T_2 \circ T_1$.

Nota $T_3 = T_2 \circ T_1$ significa que primero se aplica T_1 y luego T_2.

6. Dado el vector
$$v = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix},$$
calculaR la norma euclidiana $\|v\|_2$,$\|v\|_\infty$,$\|v\|_1$

7. Dado el vector
$$v = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix},$$
y la nueva base
$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\},$$
encuentra las coordenadas del vector v en la base B.

8. Encuentra la matriz de cambio de base que transforma las coordenadas de la base canónica $\{e_1, e_2\}$ a la base
$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

9. Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una transformación lineal con matriz asociada
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
en la base canónica. Si la base cambia a
$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$
encuentra la matriz de T en la nueva base.

10. En un circuito resistivo de 3 nodos, las corrientes I_1, I_2, I_3 que pasan por las resistencias R_1, R_2, R_3 están relacionadas mediante una transformación lineal dada por la matriz:
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Supón que las resistencias se miden en una nueva base $B = \{b_1, b_2, b_3\}$, donde:
$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

- Encuentra la matriz de la transformación T_B que relaciona las corrientes en esta nueva base.
- Calcula las corrientes I_B en la base B cuando los voltajes aplicados son $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ en la base canónica.

11. Dada la transformación $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2 - x_3, 3x_1 - x_2 + x_3, x_2 + 4x_3),$$

determina si T es una transformación lineal. En caso de que lo sea, encuentra su matriz asociada.

12. Encuentra la inversa de la transformación lineal dada por la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

si existe. En caso de que no exista, explica por qué.