Espacios Vectorial y Subespacios

$\mathbb{R}^n$

Invalid Date

Objetivo

Al finalizar esta presentación, los participantes serán capaces de comprender y aplicar los conceptos fundamentales de espacio vectorial y subespacio vectorial en R^n, identificando cómo estos conceptos se manifiestan en distintos contextos matemáticos y prácticos.

Definición subespacio vectorial

Un subconjunto W de un espacio vectorial V sobre $\mathbb{R}$ es un subespacio vectorial de V si W es un espacio vectorial con las operaciones de adición y multiplicación por escalares de V.

ejemplo

Sea $V = \mathbb{R}^3$ y W el conjunto de todos los vectores de la forma $(x, y, 0)$ con $x, y \in \mathbb{R}$.

Note que W es un subespacio de $\mathbb{R}^3$

Definición una base de un espacio vectorial de dimensión finita

Un conjunto $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ de vectores en un espacio vectorial V es una base de V si:

1. $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es linealmente independiente.
2. V es el subespacio generado por $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$.

La dimensión de un espacio vectorial V es el número de vectores en una base de V.

Ejemplo

Sea $V = \mathbb{R}^3$ y $v_1 = (1,0,0)$, $v_2 = (0,1,0)$ y $v_3 = (0,0,1)$.

1. **Podemos afirmar que $\{v_1, v_2, v_3\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$?**
2. **Cuál es la dimensión de $\mathbb{R}^3$?**

Ejemplo

Sea $V = \mathbb{R}^5$ y $v_1 = (1,1,0,0,0)$, $v_2 = (-1,1,0,0,0)$.

- **Podemos afirmar que $\{v_1, v_2\}$ es una base de $\mathbb{R}^5$?**
- **Cuál es la dimensión de $\mathbb{R}^5$?**
- Sea W el subespacio generado por $\{v_1, v_2\}$.
  - **Cuál es la dimensión de W?**
  - **Cuál es una base de W?**

Sea el siguiente sistema de ecuacias lineales

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 2x + 3y + 4z = -1 \\ 3x + 4y + 5z = -2 \end{cases}$$

La solución del sistema es el vector $\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$

El sistema se puede escribir como una ecuación matricial $Ax = b$ donde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Note que el vector b es una combinación lineal de las columnas de A con coeficientes $-1, -1, 1$.

$$b = -1\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} - 1\begin{bmatrix}2\\3\\4\end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix}3\\4\\5\end{bmatrix}$$

- **¿Cuál es el subespacio generado por las columnas de A?**
- **¿Cuál es la dimensión de este subespacio?**

Ejemplo 2

Sea el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 2x + 3y = 7 \\ 3x - y = 5 \end{cases}$$

Note que el vector b es una combinación lineal de las columnas de la matriz de coeficientes.

$$\begin{bmatrix}4\\7\\5\end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix}2\\3\\-1\end{bmatrix}$$

- **¿Cuál es el subespacio generado por las columnas de A?**
- **¿Cuál es la dimensión de este subespacio?**
- **Puedo representar gráficamente este fenómeno**

Ejemplo 3

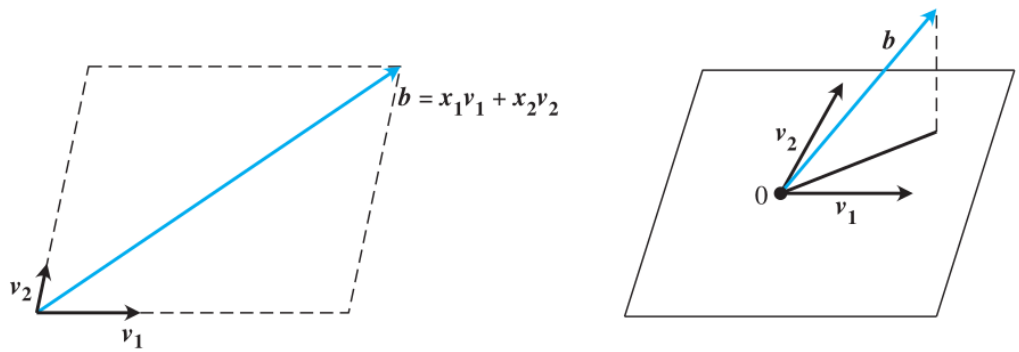
Sea el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 2x + 3y = 0 \\ 3x - y = 5 \end{cases}$$

Note que el vector b no es una combinación lineal de las columnas de la matriz de coeficientes.

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} \neq x \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

- **¿Cuál es el subespacio generado por las columnas de A?**
- **¿Cuál es la dimensión de ste subespacio?**
- **Puedo representar gráficamente este fenómeno**



- **Cual sería el mejor vector para representar el vector b en W?**
- ¿Como podemos encontrar este vector?

Producto punto

En $\mathbb{R}^n$ el producto punto de dos vectores $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ y $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ se define como

$$x \cdot y = \langle x, y \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n = \sum_{i=1}^{n} x_iy_i$$

** Propiedades del producto punto**

1. $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$

2. $\langle x, y+z\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle$
3. $\langle x, \alpha y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$
4. $\langle x, x\rangle \geq 0$ y $\langle x, x\rangle = 0$ si y solo si $x = 0$

Ejemplo

Sea $x = (1, 2, 3)$ y $y = (4, 5, 6)$, entonces

$$\langle x, y\rangle = 1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6 = 4 + 10 + 18 = 32$$

Propiedad fundamental del producto punto

Si x y y son vectores en $\mathbb{R}^n$, entonces

$$\langle x, y\rangle = 0$$

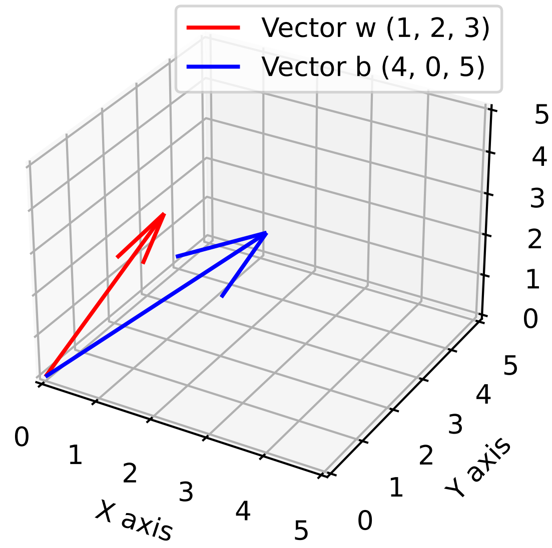
si y solo si x y y son ortogonales.

Para responder la pregunta anterior, vamos a buscar el mejor vector $b = (4, 0, 5)$ y el subespacio W generado solo por la primera columna de la matriz de coeficientes A que es $v_1 = (1, 2, 3)$.

Note que b es una combinación lineal de v_1

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D

# Definiendo los vectores
w = np.array([1, 2, 3])
b = np.array([4, 0, 5])

# Creando la figura para el gráfico
```

```python
fig = plt.figure()
ax = fig.add_subplot(111, projection='3d')

# Origen de los vectores
origin = np.array([0, 0, 0])

# Graficando el vector w
ax.quiver(*origin, *w, color='r', label='Vector w (1, 2, 3)')

# Graficando el vector b
ax.quiver(*origin, *b, color='b', label='Vector b (4, 0, 5)')

# Estableciendo los límites para los ejes
ax.set_xlim([0, 5])
ax.set_ylim([0, 5])
ax.set_zlim([0, 5])

# Añadiendo etiquetas para los ejes
ax.set_xlabel('X axis')
ax.set_ylabel('Y axis')
ax.set_zlabel('Z axis')

# Añadiendo una leyenda
ax.legend()

# Mostrar el gráfico
plt.show()
```



Note que para encontrar un vector $z \in W$ que sea el mejor aproximación a b en W, debemos encontrar el vector z

$$z = \alpha v_1$$
$$\alpha v_1 + v_1^{\perp} = b$$

al multiplicar por v_1 ambos lados de la ecuación anterior, obtenemos

$$\alpha v_1 \cdot v_1 + v_1 \cdot v_1^{\perp} = b \cdot v_1$$

$$\alpha \|v_1\|^2 = b \cdot v_1$$

$$\alpha = \frac{b \cdot v_1}{\|v_1\|^2}$$

Esto lo podemos llamar la proyección de b en W

Sea $\{v_1, v_2\}$ vectores linealmente independientes en $\mathbb{R}^3$.

1. **Podemos afirmar que $\{v_1, v_2\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$?**
2. Sea W el subespacio generado por $\{v_1, v_2\}$.
   - **Cuál es la dimensión de W?**
   - **Cuál es una base de W?**
3. Sea $v_3 \in W$, ¿ Que significa esto?

Ejemplo

Recordemos que el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 2x + 3y = 0 \\ 3x - y = 5 \end{cases}$$

Note que el vector b no es una combinación lineal de las columnas de la matriz de coeficientes.

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} \neq x \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Recordemos que podemos generar el subespacio W con los vectores $v_1 = (1, 2, 3)$ y $v_2 = (2, 3, -1)$.

Note que b no es una combinación lineal de v_1 y v_2

Lo que queremos encontrar es el vector $z \in W$ que sea la mejor aproximación a b en W.

luego

$$z = \alpha v_1 + \beta v_2$$

Note que este procedimiento se llama proyección de b en W y se simboliza como

$$\text{proy}_W(b)$$

$$\alpha v_1 + \beta v_2 = b$$

si multiplicamos, usando el producto punto, la igualdad por un vector v_1 que sea sea perpendicular
y que

$$z + R = b$$

$$\langle v_1, \alpha v_1 + \beta v_2 \rangle + \langle v_1, R \rangle = \langle v_1, b \rangle$$

---

usando las propiedades del producto punto, obtenemos

$$\alpha \langle v_1, v_1 \rangle + \beta \langle v_1, v_2 \rangle = \langle v_1, b \rangle$$

De forma similar multiplicando por v_2 obtenemos

$$\langle v_2, \alpha v_1 + \beta v_2 \rangle + \langle v_1, R \rangle = \langle v_2, b \rangle$$

$$\alpha \langle v_2, v_1 \rangle + \beta \langle v_2, v_2 \rangle = \langle v_2, b \rangle$$

De esta forma tenemos un sistema de ecuaciones lineales

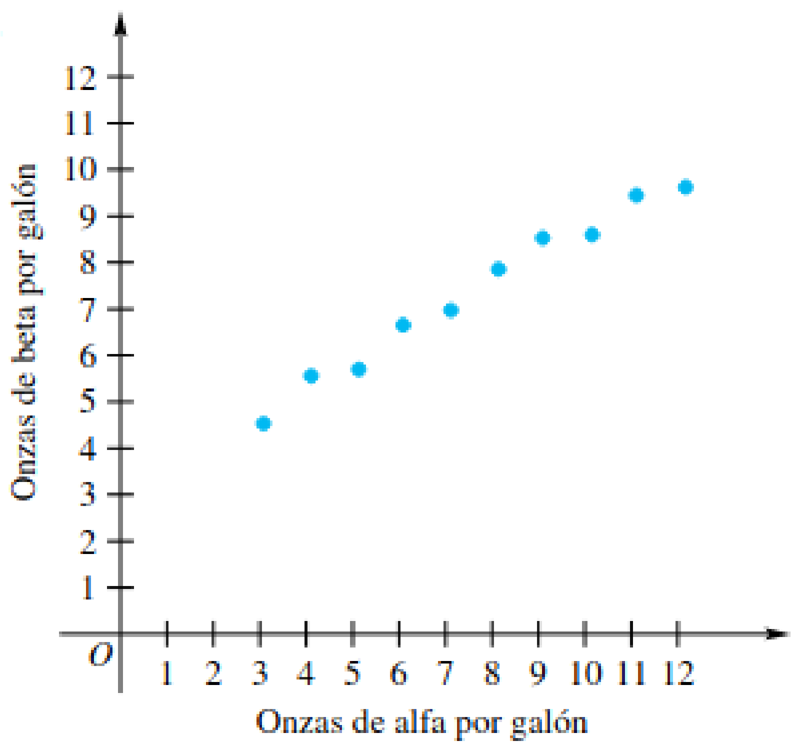
$$\begin{cases} \langle v_1, v_1 \rangle \alpha + \langle v_1, v_2 \rangle \beta = \langle v_1, b \rangle \\ \langle v_2, v_1 \rangle \alpha + \langle v_2, v_2 \rangle \beta = \langle v_2, b \rangle \end{cases}$$

Encuentre los valores de α y β

Ejemplo

En la fabricación del producto XXX, la cantidad de compuesto beta presente es controlada por la cantidad del ingrediente alfa utilizada en el proceso. Al fabricar un galón de XXX, se registraron la cantidad de alfa usada y la cantidad de beta presente, obteniéndose los siguientes datos

Alfa usada (onzas/galón)	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Beta presente (onzas/galón)	4.5	5.5	5.7	6.6	7.0	7.7	8.5	8.7	9.5	9.7



Note que estamos buscando una recta de la forma

$$y = \alpha x + \beta$$

que aproxime los datos.

Encontremos el mejor ajuste

$$\alpha \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 4.5 \\ 5.5 \\ 5.7 \\ 6.6 \\ 7.0 \\ 7.7 \\ 8.5 \\ 8.7 \\ 9.5 \\ 9.7 \end{bmatrix}$$

Podemos reescribir el sistema como

$$\alpha X + \beta Y = b$$

Donde $X = (3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12)$, $Y = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$ y $b = (4.5, 5.5, 5.7, 6.6, 7.0, 7.7, 8.5, 8.7, 9.5, 9.$

De esta forma encontramos que el problema se resuelve encontrando la proyección de b en el subespacio generado por X y Y.

Lo cual es equivalente de resolver el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} \langle X, X\rangle\alpha + \langle X, Y\rangle\beta = \langle X, b\rangle \\ \langle Y, X\rangle\alpha + \langle Y, Y\rangle\beta = \langle Y, b\rangle \end{cases}$$

Ejercicio

Si Escribimos el problema de forma matricial

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \\ 5 & 1 \\ 6 & 1 \\ 7 & 1 \\ 8 & 1 \\ 9 & 1 \\ 10 & 1 \\ 11 & 1 \\ 12 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 4.5 \\ 5.5 \\ 5.7 \\ 6.6 \\ 7.0 \\ 7.7 \\ 8.5 \\ 8.7 \\ 9.5 \\ 9.7 \end{bmatrix}$$

---

como

$$Ax = b$$

Muestre el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} \langle X, X\rangle\alpha + \langle X, Y\rangle\beta = \langle X, b\rangle \\ \langle Y, X\rangle\alpha + \langle Y, Y\rangle\beta = \langle Y, b\rangle \end{cases}$$

es equivalente a resolver el sistema

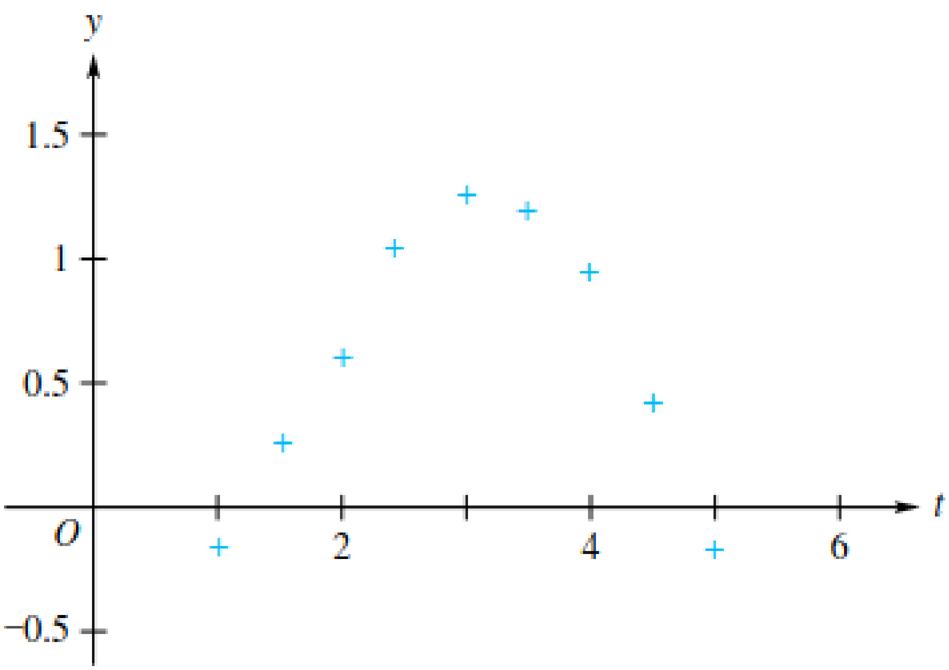
$A^T Ax = A^T b$

Ejercicio

los sgiguientes datos representan los contaminantes atmosféricos y_i (respecto con cierta norma de calidad del aire) en intervalos de media hora t_i

t_i	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5
y_i	−0.15	0.24	0.68	1.04	1.21	1.15	0.86	0.41	−0.08

La siguiente gráfica muestra la evolución de los contaminantes en el tiempo,



por conjeturas podemos ver que los datos se ajustan a un polinomio cudarático de la forma

$$y(t) = a_2 t^2 + a_1 t + a_0$$

Encuentre los coeficientes a_2, a_1 y a_0 que mejor ajustan los datos

---

Ejercicio 2

Los datos periódicos requieren modelos periódicos. Las temperaturas del aire exterior, por ejemplo, siguen ciclos en numerosas escalas de tiempo, incluidos los ciclos diarios y anuales, que están gobernados por la rotación de la Tierra y la revolución de la Tierra alrededor del Sol. Como primer ejemplo, los datos de temperatura por hora se ajustan a senos y cosenos.

Ajusta las temperaturas registradas en Washington, D.C., el 1 de enero de 2001, como se muestra en la siguiente tabla, a un modelo periódico:

---

time of day	t	temp (C)
12 mid.	0	−2.2
3 am	$\frac{1}{8}$	−2.8
6 am	$\frac{1}{4}$	−6.1
9 am	$\frac{3}{8}$	−3.9
12 noon	$\frac{1}{2}$	0.0
3 pm	$\frac{5}{8}$	1.1
6 pm	$\frac{3}{4}$	−0.6
9 pm	$\frac{7}{8}$	−1.1

Elegimos el modelo

$$y = c_1 + c_2 cos\ (2\pi t) + c_3 sin\ (2\pi t)$$

para coincidir con el hecho de que la temperatura es aproximadamente periódica con un período de 24 horas, al menos en ausencia de movimientos de temperatura a largo plazo. El modelo utiliza esta información fijando el período exactamente en un día, donde estamos usando días como unidades para t. La variable t se presenta en estas unidades en la tabla.