Taller Algebra lineal

1. Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y) = (x + y, 2y)$. ¿Es T una transformación lineal? Justifica tu respuesta.
2. Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(x, y) = (x - y, 2x + 3y, 4x)$. Determina si T es una transformación lineal.
3. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y, z) = (2x + y, y^2 + z)$. Determina si T es una transformación lineal.
4. Encuentra la matriz de la transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y) = (3x+4y, -x+2y)$.
5. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(x, y, z) = (2x - y + z, -x + 4y, 3x + 5z)$. Encuentra la matriz de T.
6. Encuentra la matriz de la transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(x, y) = (x+2y, -3x+4y, x-y)$.
7. Considera una transformación lineal que realiza una combinación de una rotación y una reflexión en el plano. La matriz de rotación es

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

   y la matriz de reflexión respecto al eje y es

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Encuentra la matriz compuesta que realiza primero una rotación de 60° y luego una reflexión respecto al eje y. Aplica la transformación al vector $(1, 2)$ y calcula su imagen.
8. En una aplicación económica, se utiliza una transformación lineal para proyectar los ingresos de una empresa en dos sectores diferentes. Si la transformación está definida por $T(x, y) = (2x+3y, 4x+y)$, donde x es la cantidad invertida en el sector 1 y y es la cantidad invertida en el sector 2, determina la proyección de ingresos para una inversión de \$1000 en el sector 1 y \$2000 en el sector 2.
9. En gráficos por computadora, una transformación de cizallamiento en el espacio tridimensional puede ser representada por la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & k_1 & k_2 \\ 0 & 1 & k_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Si $k_1 = 1$, $k_2 = -1$, y $k_3 = 2$, encuentra la imagen del punto $(1, 2, 3)$ bajo esta transformación. Luego, interpreta cómo esta transformación afecta la geometría de los objetos en un sistema de gráficos tridimensionales.