Problema de Animación en 3D: Transformaciones Temporales con Autovalores y Autovectores

Problema

Un equipo de animadores está trabajando en un proyecto en 3D que involucra la transformación de un objeto a lo largo del tiempo para simular efectos de rotación, expansión y cizallamiento. En esta animación, el objeto experimenta una serie de transformaciones que dependen del tiempo t, permitiendo que la forma y orientación del objeto cambien en cada instante.

El objeto en 3D está representado por un conjunto de puntos $\mathbf{p_1}, \mathbf{p_2}, \ldots, \mathbf{p_n}$ en el espacio tridimensional. Las transformaciones de escala, rotación y cizallamiento actúan sobre el objeto, y se representan mediante una matriz de transformación temporal $T(t)$, que es función del tiempo t.

Transformaciones Dependientes del Tiempo

1. **Escalamiento**: La primera transformación es un escalamiento no uniforme que varía en el tiempo. La matriz de escala en función del tiempo es:

$$S(t) = \begin{bmatrix} 1 + 0.5t & 0 & 0 \\ 0 & 1 + 0.3t & 0 \\ 0 & 0 & 1 - 0.2t \end{bmatrix}$$

donde t es el tiempo en segundos. Esto significa que el objeto se expande en el eje x, se estira en el eje y, y se contrae en el eje z a medida que pasa el tiempo.

2. **Rotación**: La segunda transformación rota el objeto en el eje z a una velocidad constante de $45°$ por segundo. La matriz de rotación en el tiempo t es:

$$R(t) = \begin{bmatrix} \cos(45°t) & -\sin(45°t) & 0 \\ \sin(45°t) & \cos(45°t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. **Cizallamiento**: La tercera transformación aplica un cizallamiento en el eje y en función de la posición en el eje x y depende del tiempo. La matriz de cizallamiento es:

$$C(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0.2t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0.1t & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La transformación total $T(t)$ aplicada al objeto en cada instante t es la composición de estas tres transformaciones:

$$T(t) = C(t) \cdot R(t) \cdot S(t)$$

Objetivo

Para analizar cómo esta transformación dependiente del tiempo afecta al objeto en la animación, los animadores deben calcular:

1. Las **direcciones principales** en las que el objeto se transforma y cómo estas cambian en función del tiempo. 2. Los **factores de transformación** en esas direcciones principales, que dependen de los autovalores de $T(t)$ para cada instante t.

Preguntas

1. (a) **Calcule la matriz de transformación total** $T(t)$ en función del tiempo multiplicando $S(t)$, $R(t)$, y $C(t)$ en el orden dado.

2. (b) **Calcule los autovalores de** $T(t)$ **en función de** t para analizar cómo cambia el factor de escala en las direcciones principales con el tiempo.

3. (c) **Calcule los autovectores de** $T(t)$ **en función de** t para identificar las direcciones principales a lo largo de las cuales actúan los factores de transformación en cada instante t.

4. (d) **Interpretación temporal de los autovalores y autovectores**:

   - ¿En qué direcciones se expandirá o contraerá el objeto con el tiempo?
   - ¿Cómo afectan los autovalores en función de t a la transformación en cada dirección?

5. (e) **Aplicación de** $T(t)$ **a los Puntos Originales**: Si los puntos originales del objeto son dados por

$$\mathbf{p_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p_3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

   aplique $T(t)$ a estos puntos para $t = 1$ segundo, $t = 2$ segundos, y $t = 3$ segundos y determine sus nuevas posiciones.

6. (f) **Evolución en la Animación con el Tiempo**: Si la transformación $T(t)$ se aplica continuamente en cada cuadro de la animación, analice cómo el objeto se comportará a lo largo del tiempo. Utilice los autovalores y autovectores en función de t para predecir el comportamiento a largo plazo en la animación:

- ¿El objeto se expandirá indefinidamente en alguna dirección?
- ¿En qué dirección (o direcciones) se contraerá?
- ¿Cómo cambia la rotación en función del tiempo y cómo afecta a la orientación general del objeto?