Taller de Álgebra Lineal: Autovalores, Autovectores y Diagonalización

Parte Teórica

1. **Dimensión geométrica y algebraica:** Explica las diferencias entre la dimensión algebraica y la dimensión geométrica de un autovalor. Da ejemplos de cómo estas dimensiones pueden diferir en una matriz 3×3, y cómo esto afecta la diagonalización de la matriz.

2. **Criterios de diagonalización:** Explica los criterios necesarios para que una matriz cuadrada sea diagonalizable. En tu explicación, incluye la relación entre los autovalores distintos, la multiplicidad algebraica y la multiplicidad geométrica.

3. **Significado geométrico de los autovalores y autovectores:** Describe el significado geométrico de los autovalores y autovectores de una matriz 2×2 con autovalores complejos. ¿Cómo afectan a la interpretación geométrica de la transformación lineal?

4. **Matrices no diagonalizables:** Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. Discute por qué no es diagonalizable, y explica cómo la diferencia entre dimensión geométrica y algebraica juega un papel en esta propiedad.

5. **Aplicaciones de la diagonalización:** ¿Por qué la diagonalización es importante en la resolución de sistemas dinámicos y en la obtención de potencias de matrices? Explica cómo la diagonalización ayuda en el análisis a largo plazo de sistemas dinámicos.

Parte Práctica (Cálculos)

6. **Verificar diagonalización (Matriz 2×2):** Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, determina si es diagonalizable. Si lo es, encuentra su matriz diagonal y la matriz de cambio de base. Discute los autovalores y autovectores.

7. **Verificar diagonalización (Matriz 3×3):** Considera la matriz $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$. Determina si es diagonalizable, y si lo es, encuentra su forma diagonal y la matriz de autovectores. Comenta sobre los autovalores complejos y su interpretación.

8. **Verificar diagonalización (Matriz 3×3):** Para la matriz $C = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, determina si es diagonalizable. Si lo es, proporciona la matriz diagonal y la matriz de cambio de base correspondiente.

9. **Aplicación (Transformaciones geométricas en $\mathbb{R}^3$):** Considera la matriz $D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, que representa una transformación lineal en $\mathbb{R}^3$. Encuentra sus autovalores y autovectores, y describe cómo esta transformación afecta a los vectores en el espacio tridimensional. ¿Qué interpretaciones geométricas se pueden hacer sobre la transformación?

10. **Aplicación (Sistemas dinámicos):** Un sistema dinámico discreto está modelado por la ecuación $\mathbf{x}_{n+1} = A\mathbf{x}_n$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.8 & 0.1 \\ 0.2 & 0.1 & 0.9 \end{pmatrix}.$$

Determina los autovalores y autovectores de A. Con base en los autovalores, ¿cómo se comportará el sistema a largo plazo?