Dinámica de Población en una Colonia de Abejas con Cinco Roles

Problema: Dinámica de Población en una Colonia de Abejas con Cinco Roles

Un entomólogo está investigando la dinámica de población en una colonia de abejas que se divide en cinco grupos según el rol de cada grupo: **larvas**, **abejas jóvenes**, **abejas trabajadoras**, **abejas recolectoras**, y **abejas reinas**. Cada grupo tiene una función específica y diferentes probabilidades de supervivencia y transición a otros roles. El objetivo es modelar cómo cambia la población de cada grupo en la colonia de un año a otro y entender el comportamiento a largo plazo de la colonia.

Definimos las siguientes variables:
- **Supervivencia y Transición**:

- s_1: probabilidad de que las larvas sobrevivan y se conviertan en abejas jóvenes al siguiente año.
- s_2: probabilidad de que las abejas jóvenes sobrevivan y pasen a ser abejas trabajadoras.
- s_3: probabilidad de que las abejas trabajadoras sobrevivan y pasen a ser abejas recolectoras.
- s_4: probabilidad de que las abejas recolectoras sobrevivan y pasen a ser reinas.
- s_5: probabilidad de que las abejas reinas sobrevivan al próximo año y permanezcan en su rol.

- **Reproducción**:

- f_1: número de larvas producidas por cada abeja joven.
- f_2: número de larvas producidas por cada abeja trabajadora.
- f_3: número de larvas producidas por cada abeja recolectora.
- f_4: número de larvas producidas por cada abeja reina.

Modelo Matricial

Definimos el vector de población de la colonia en el año n como:

$$\mathbf{x}_n = \begin{bmatrix} x_{n,1} \\ x_{n,2} \\ x_{n,3} \\ x_{n,4} \\ x_{n,5} \end{bmatrix}$$

donde: - $x_{n,1}$: número de larvas en el año n. - $x_{n,2}$: número de abejas jóvenes en el año n. - $x_{n,3}$: número de abejas trabajadoras en el año n. - $x_{n,4}$: número de abejas recolectoras en el año n. - $x_{n,5}$: número de abejas reinas en el año n.

La población en el año $n+1$ puede expresarse en términos de la población en el año n utilizando la matriz de transición A como:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & f_1 & f_2 & f_3 & f_4 \\ s_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_4 & s_5 \end{bmatrix}$$

Así, el sistema dinámico queda modelado por la ecuación:

$$\mathbf{x}_{n+1} = A\mathbf{x}_n$$

Objetivo

El entomólogo desea comprender la evolución de esta colonia a largo plazo para determinar:

- La **tasa de crecimiento poblacional** a largo plazo de la colonia.
- La **distribución estable** de la población entre los cinco roles en la colonia, si existe un equilibrio.
- La **sensibilidad** de la tasa de crecimiento a las variaciones en las tasas de supervivencia y reproducción.

Para responder estas preguntas, es necesario calcular los **autovalores y autovectores** de la matriz de transición A.

Preguntas

1. (a) Encuentre los autovalores de la matriz A resolviendo el polinomio característico $\det(A - \lambda I) = 0$.

2. (b) Determine el autovalor dominante (el autovalor con el mayor valor absoluto), ya que este autovalor representa la **tasa de crecimiento** a largo plazo de la colonia.

3. (c) Encuentre el autovector correspondiente al autovalor dominante. Este autovector describe la **distribución estable** de la población entre los cinco roles en la colonia.

4. (d) Analice la estabilidad de la población: Dependiendo de si el autovalor dominante es mayor, menor o igual a 1, determine si la población total de la colonia crecerá, decrecerá o se estabilizará con el tiempo.

5. (e) Simulación de Ejemplo: Suponga que $s_1 = 0.3$, $s_2 = 0.5$, $s_3 = 0.6$, $s_4 = 0.4$, $s_5 = 0.7$, $f_1 = 1.1$, $f_2 = 0.9$, $f_3 = 0.7$, y $f_4 = 1.0$. Calcule los autovalores y autovectores para esta matriz y determine la tendencia a largo plazo de la población de la colonia con estos valores.

Resolución

1. **Cálculo de los Autovalores**

   Para encontrar los autovalores, planteamos la ecuación característica de A:

   $$\det(A - \lambda I) = 0$$

   Expandiendo el determinante, obtenemos un polinomio en λ cuya solución nos da los autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_5$.

2. **Identificación del Autovalor Dominante**

   El autovalor de mayor valor absoluto, λ_{dom}, representará la tasa de crecimiento a largo plazo de la colonia. Si $\lambda_{\text{dom}} > 1$, la población crecerá; si $\lambda_{\text{dom}} < 1$, la población decrecerá; y si $\lambda_{\text{dom}} = 1$, la población se estabilizará.

3. **Cálculo del Autovector Estable**

   El autovector asociado al autovalor dominante proporciona la **distribución estable** de la población en cada rol en la colonia. Este autovector se obtiene resolviendo el sistema $(A - \lambda_{\text{dom}} I)\mathbf{v} = 0$, donde $\mathbf{v}$ es el autovector correspondiente a λ_{dom}.

4. **Análisis de Estabilidad de la Población**

   - Si $\lambda_{\text{dom}} > 1$, la población de la colonia crecerá exponencialmente en el largo plazo.
   - Si $\lambda_{\text{dom}} < 1$, la población tenderá a decrecer hacia cero.
   - Si $\lambda_{\text{dom}} = 1$, la población alcanzará un estado estable, con una proporción fija entre los roles.

5. **Simulación de Ejemplo**

Con los valores específicos $s_1 = 0.3$, $s_2 = 0.5$, $s_3 = 0.6$, $s_4 = 0.4$, $s_5 = 0.7$, $f_1 = 1.1$, $f_2 = 0.9$, $f_3 = 0.7$, y $f_4 = 1.0$, la matriz de transición se convierte en:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1.1 & 0.9 & 0.7 & 1.0 \\ 0.3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0.7 \end{bmatrix}$$

Usando estos valores, calcule los autovalores y determine el autovalor dominante y el autovector asociado. Interprete los resultados para analizar la tendencia a largo plazo y la proporción estable de la población entre los roles en la colonia.