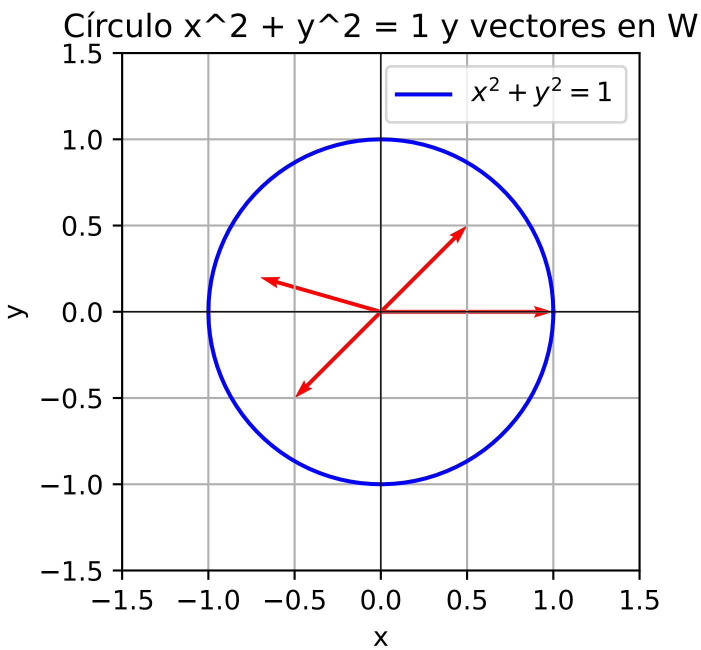
# Taller Espacios Vectoriales

Abel Alvarez

2025-07-09

## Taller de Algebra lineal

1. En el plano $xy$, considere el círculo centrado en el origen y cuya ecuación es $x^2 + y^2 = 1$. Sea $W$ el conjunto de todos los vectores cuya cola está en el origen y cuya cabeza es un punto interior al círculo o en la circunferencia. ¿Es $W$ un subespacio de $\mathbb{R}^2$? Explique.




2. Sea $V = \mathbb{R}^3$. Determine si

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

es un subespacio de $V$. Justifique su respuesta.

3. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos de vectores en $R^3$ son linealmente dependientes? Cuando lo sean, exprese un vector del conjunto como combinación lineal de los demás.

(b) $\{(0,0,0),(1,1,1),(-2,-2,-2)\}$

(c) $\{(1,3,0),(2,-3,0),(0,2,0)\}$

(d) $\{(2,4,1),(-1,2,1)\}$

4. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos de vectores generan a $R^3$?

(a) $\{(1,-1,2),(0,1,1)\}$

(b) $\{(1,2,-1),(3,2,5)\}$

(c) $\{(4,2,1),(2,6,-5),(1,-2,3)\}$

5. Determine si los vectores

$$\begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix}$$

son una base para $\mathbb{R}^4$.

6. Determine si los vectores

$$\begin{bmatrix}1\\1\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\\1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$$

son una base para $\mathbb{R}^4$.

7. En un sistema biológico, se estudian las concentraciones de tres compuestos químicos dentro de una célula. Se sabe que las concentraciones de estos compuestos se pueden describir utilizando los siguientes tres vectores:

$$\mathbf{v_1}=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\quad\text{(Concentración del compuesto A)}$$

$$\mathbf{v_2}=\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}\quad\text{(Concentración del compuesto B)}$$

$$\mathbf{v_3} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{(Concentración del compuesto C)}$$

Cualquier estado de concentración de estos tres compuestos en la célula puede describirse como una combinación de estos vectores.

¿Es posible representar cualquier combinación de concentraciones de estos tres compuestos con los vectores dados? Justifique su respuesta.

8. Un economista está analizando cómo varía el consumo $C$ en función del ingreso $I$ de los hogares en una región determinada. Después de realizar encuestas a tres hogares, obtiene los siguientes datos:

$$I_1 = 1 \text{ (mil dólares)}, \quad C_1 = 2.1 \text{ (mil dólares)}$$
$$I_2 = 2 \text{ (mil dólares)}, \quad C_2 = 2.9 \text{ (mil dólares)}$$
$$I_3 = 3 \text{ (mil dólares)}, \quad C_3 = 3.8 \text{ (mil dólares)}$$

El economista quiere ajustar una función lineal de la forma $C = \alpha I + \beta$ para describir la relación entre el ingreso y el consumo, utilizando el método de mínimos cuadrados.

(a) Escriba el sistema de ecuaciones generado por el ajuste de mínimos cuadrados para encontrar los coeficientes $\alpha$ y $\beta$ que mejor describen la relación entre el ingreso y el consumo.

(b) Encuentre la proyección del vector de consumos observado

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2.1 \\ 2.9 \\ 3.8 \end{bmatrix}$$

sobre el subespacio generado por las columnas de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

(c) ¿Cómo se relaciona esta proyección con el concepto de bases en espacios vectoriales? ¿Por qué se necesita encontrar la proyección de $\mathbf{C}$ para minimizar los errores de ajuste?

(d) Grafique los puntos correspondientes a las observaciones del ingreso y consumo, junto con la recta de mejor ajuste obtenida a partir de los cálculos anteriores. ¿Qué nos dice la recta de mejor ajuste sobre la relación entre el ingreso y el consumo?

(e) Como podemos interpretar el valor de $\alpha$ y $\beta$ obtenidos.

9. Una empresa de transporte ha desarrollado un sistema de predicción para estimar los tiempos de entrega de sus envíos. El **error** en este contexto se define como la diferencia entre el tiempo de entrega predicho por el modelo y el tiempo de entrega real de un paquete, medido en horas.

Para evaluar la precisión de su modelo, la empresa ha registrado los siguientes errores en tres entregas recientes (en horas):

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} -1.5 \\ 2.0 \\ -0.5 \end{bmatrix}$$

La empresa desea analizar la magnitud de los errores utilizando tres métricas comunes: la norma $l_1$, la norma $l_2$ y la norma $l_\infty$.

(a) **Calcule la norma** $l_1$ (suma de los valores absolutos de los errores) e interprete su significado. ¿Qué nos dice esta métrica sobre el **error total** en todas las predicciones de tiempo de entrega?

(b) **Calcule la norma** $l_2$ (raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de los errores) y explique cómo esta norma mide el **error cuadrático medio**. ¿Por qué esta métrica es útil cuando los errores grandes son más importantes que los pequeños?

(c) **Calcule la norma** $l_\infty$ (el valor absoluto más grande de los errores) e interprete qué representa en este contexto. ¿Qué nos dice sobre el **error máximo** cometido en las predicciones de la empresa?

(d) Si la empresa quiere minimizar el impacto de los errores grandes, ¿qué norma debería priorizar y por qué?

10. Calcule el error obtenido del punto 8. de la siguiente manera:

$$||\hat{y} - y||_i$$

para $i = 1, 2, \infty$, donde $\hat{y} = [\hat{y}_1, \hat{y}_2, \hat{y}_3]$ es el vector de los valores ajustados y $y = [2.1, 2.9, 3.8]$ es el vector de los valores observados. Interprete los resultados obtenidos. Recuerde que los valores ajustados son $\hat{y}_i = \alpha + \beta I_i$.

Ahora, realice una pequeña perturbación en los valores de $y$ de la siguiente manera:

$$\alpha_{new} = \alpha + 0.01$$

y calcule nuevamente el error para $i = 1, 2, \infty$. Compre con los resultados obtenidos anteriormente e interprete los resultados obtenidos.