Taller de Álgebra Lineal

Abel Alvarez

2024-05-09

Objetivo Afianzar los conceptos fundamentales de espacios vectoriales, subespacios vectoriales, bases, independencia lineal, producto punto y proyección ortogonal.

1. Defina los siguientes términos y proporciona ejemplos
   - Espacios Vectoriales
   - Subespacio vectorial
   - Bases de un Espacio Vectorial
   - Independencia Lineal
2. Describa como podemos representar graficamente la suma de dos vectores en $\mathbb{R}^2$. Además, describa graficamente como podemos interpretar el producto por un escalar de un vector en $\mathbb{R}^2$ y proporcione un ejemplo en cada situación.
3. Escriba si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique su respuesta.
   - Un conjunto de vectores es linealmente independiente si al menos uno de los vectores es un múltiplo de otro.
   - Si un conjunto de vectores es linealmente independiente, entonces necesariamente es una base para el espacio vectorial.
   - En $\mathbb{R}^3$, el conjunto de vectores $\{(1,0,0),(0,1,-1),(1,0,1)\}$ es una base.
   - En $\mathbb{R}^2$, el conjunto de vectores $\{(1,0),(0,1),(1,1)\}$ es una base.
   - Si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son dos vectores ortogonales, entonces su producto punto es cero.
4. **Verificación de Espacio Vectorial:** Dado el conjunto de funciones $V = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$, donde cada función está definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$, con $a, b, c \in \mathbb{R}$. Verifica si V es un espacio vectorial bajo la suma y multiplicación escalar usuales.
5. **Cálculo de una Base:** Sean los vectores $\mathbf{v}_1 = (1,2,3)$, $\mathbf{v}_2 = (4,5,6)$ y $\mathbf{v}_3 = (5,7,9)$ en $\mathbb{R}^3$. Encuentra una base para el subespacio generado por estos vectores. ¿Cuál es la dimensión de este subespacio?

6. **Independencia Lineal:** Dado el conjunto de vectores $\mathbf{u}_1 = (1, 0, 1)$, $\mathbf{u}_2 = (0, 1, 0)$ y $\mathbf{u}_3 = (1, 1, 1)$ en $\mathbb{R}^3$, determina si estos vectores son linealmente independientes.

7. **Producto Punto:** Define el producto punto de dos vectores, escriba sus propiedades. Explica cómo se utiliza el producto punto para determinar si dos vectores son ortogonales.

8. **Proyección Ortogonal:** Explica el concepto de proyección ortogonal de un vector sobre otro. Proporciona una fórmula para calcularla la proyección de un vector sobre otro.

9. **Cálculo del Producto Punto:** Dados los vectores $\mathbf{a} = (1, 2, 3)$ y $\mathbf{b} = (1, 0, -1)$, calcula su producto punto. ¿Los vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ son ortogonales?

10. **Cálculo de la Proyección Ortogonal:** Dado el vector $\mathbf{u} = (3, 4, 3)$ encuentre una forma para calcular un vector ortogonal a $\mathbf{u}$.