# Espacios Vectorial y Subespacios

Invalid Date

### Objetivo

Al finalizar esta presentación, los participantes serán capaces de comprender y aplicar los conceptos fundamentales de espacio vectorial y subespacio vectorial en $R^n$, identificando cómo estos conceptos se manifiestan en distintos contextos matemáticos y prácticos.

---

### Definición subespacio vectorial

Un subconjunto $W$ de un espacio vectorial $V$ sobre $\mathbb{R}$ es un subespacio vectorial de $V$ si $W$ es un espacio vectorial con las operaciones de adición y multiplicación por escalares de $V$.

### ejemplo

Sea $V = \mathbb{R}^3$ y $W$ el conjunto de todos los vectores de la forma $(x, y, 0)$ con $x, y \in \mathbb{R}$.

**Note que $W$ es un subespacio de $\mathbb{R}^3$**

---

### Definición una base de un espacio vectorial de dimensión finita

Un conjunto $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ de vectores en un espacio vectorial $V$ es una base de $V$ si:

1. $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ es linealmente independiente.
2. $V$ es el subespacio generado por $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$.

**La dimensión de un espacio vectorial** $V$ es el número de vectores en una base de $V$.

---

### Ejemplo

Sea $V = \mathbb{R}^3$ y $v_1 = (1, 0, 0)$, $v_2 = (0, 1, 0)$ y $v_3 = (0, 0, 1)$.

1. **Podemos afirmar que $\{v_1, v_2, v_3\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$?**
2. **Cuál es la dimensión de $\mathbb{R}^3$?**

---

### Ejemplo

Sea $V = \mathbb{R}^5$ y $v_1 = (1, 1, 0, 0, 0)$, $v_2 = (-1, 1, 0, 0, 0)$.

- **Podemos afirmar que $\{v_1, v_2\}$ es una base de $\mathbb{R}^5$?**
- **Cuál es la dimensión de $\mathbb{R}^5$?**

- Sea $W$ el subespacio generado por $\{v_1, v_2\}$.
  - **Cuál es la dimensión de $W$?**
  - **Cuál es una base de $W$?**

---

**Sea el siguiente sistema de ecuacias lineales**

$$\{x + 2y + 3z = 0$$
$$2x + 3y + 4z = -1$$
$$3x + 4y + 5z = -2$$

La solución del sistema es el vector $\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$

---

El sistema se puede escribir como una ecuación matricial $Ax = b$ donde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Note que el vector $b$ es una combinación lineal de las columnas de $A$ con coeficientes $-1, -1, 1$.

$$b = -1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} - 1 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

---

- **¿Cuál es el subespacio generado por las columnas de $A$?**
- **¿Cuál es la dimensión de este subespacio?**

---

**Ejemplo 2**

Sea el sistema de ecuaciones lineales

$$\{x + 2y = 4$$
$$2x + 3y = 7$$
$$3x - y = 5$$

Note que el vector $b$ es una combinación lineal de las columnas de la matriz de coeficientes.

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

---

- **¿Cuál es el subespacio generado por las columnas de $A$?**
- **¿Cuál es la dimensión de este subespacio?**

- **Puedo representar gráficamente este fenómeno**

---

**Ejemplo 3**

Sea el sistema de ecuaciones lineales

$$\{x + 2y = 4$$
$$2x + 3y = 0$$
$$3x - y = 5$$

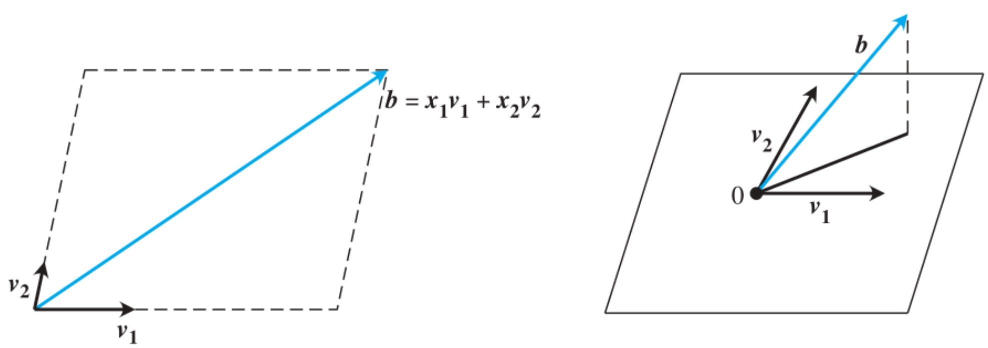
Note que el vector $b$ no es una combinación lineal de las columnas de la matriz de coeficientes.

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix} \neq x \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

---

- **¿Cuál es el subespacio generado por las columnas de $A$?**
- **¿Cuál es la dimensión de este subespacio?**
- **Puedo representar gráficamente este fenómeno**

---




- **Cual sería el mejor vector para representar el vector $b$ en W?**

- ¿Como podemos encontrar este vector?

---

**Producto punto**

En $\mathbb{R}^n$ el producto punto de dos vectores $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ y $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ se define como

$$x \cdot y = \langle x, y \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n = \sum_{i=1}^{n} x_iy_i$$

** Propiedades del producto punto**

1. $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$
2. $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$

3. $\langle x, \alpha y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$
4. $\langle x, x\rangle \geq 0$ y $\langle x, x\rangle = 0$ si y solo si $x = 0$

---

**Ejemplo**

Sea $x = (1, 2, 3)$ y $y = (4, 5, 6)$, entonces

$$\langle x, y\rangle = 1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6 = 4 + 10 + 18 = 32$$

---

**Propiedad fundamental del producto punto**

Si $x$ y $y$ son vectores en $\mathbb{R}^n$, entonces

$$\langle x, y\rangle = 0$$

si y solo si $x$ y $y$ son ortogonales.

---

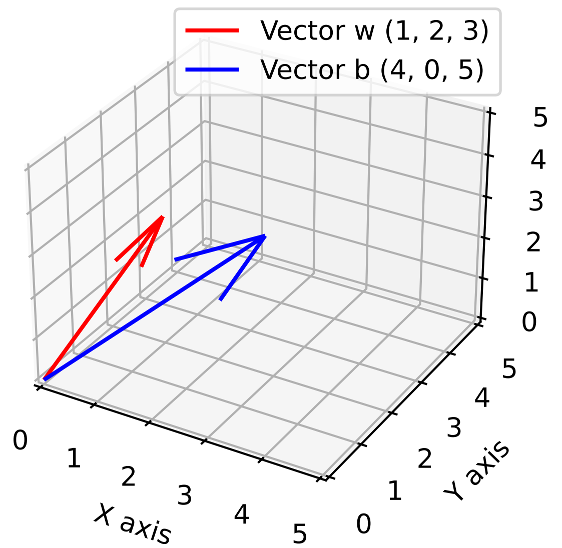
Para responder la pregunta anterior, vamos a buscar el mejor vector $b = (4, 0, 5)$ y el subespacio $W$ generado solo por la primera columna de la matriz de coeficientes $A$ que es $v_1 = (1, 2, 3)$.

**Note que $b$ es una combinación lineal de $v_1$**

---

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D

# Definiendo los vectores
w = np.array([1, 2, 3])
b = np.array([4, 0, 5])

# Creando la figura para el gráfico
fig = plt.figure()
ax = fig.add_subplot(111, projection='3d')

# Origen de los vectores
origin = np.array([0, 0, 0])

# Graficando el vector w
ax.quiver(*origin, *w, color='r', label='Vector w (1, 2, 3)')

# Graficando el vector b
ax.quiver(*origin, *b, color='b', label='Vector b (4, 0, 5)')

# Estableciendo los límites para los ejes
ax.set_xlim([0, 5])
ax.set_ylim([0, 5])
```

```
ax.set_zlim([0, 5])

# Añadiendo etiquetas para los ejes
ax.set_xlabel('X axis')
ax.set_ylabel('Y axis')
ax.set_zlabel('Z axis')

# Añadiendo una leyenda
ax.legend()

# Mostrar el gráfico
plt.show()
```




---

Note que para encontrar un vector $z \in W$ que sea el mejor aproximación a $b$ en $W$, debemos encontrar el vector $z$

$$z = \alpha v_1$$

$$\alpha v_1 + v_1^{\perp} = b$$

al multiplicar por $v_1$ ambos lados de la ecuación anterior, obtenemos

$$\alpha v_1 \cdot v_1 + v_1 \cdot v_1^{\perp} = b \cdot v_1$$

$$\alpha \parallel v_1 \parallel^2 = b \cdot v_1$$

$$\alpha = \frac{b \cdot v_1}{\| v_1 \|^2}$$

**Esto lo podemos llamar la proyección de $b$ en $W$**

---

Sea $\{v_1, v_2\}$ vectores linealmente independientes en $\mathbb{R}^3$.

1. **Podemos afirmar que $\{v_1, v_2\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$?**
2. Sea $W$ el subespacio generado por $\{v_1, v_2\}$.
   - **Cuál es la dimensión de $W$?**
   - **Cuál es una base de $W$?**
3. Sea $v_3 \in W$, ¿ Que significa esto?

---