# Espacios Vectorial y Subespacios

Invalid Date

**Objetivo de esta clase** Definir y comprender los conceptos fundamentales de álgebra lineal, incluyendo espacio vectorial, combinación lineal, espacio generado, independencia lineal, base y subespacio, con el fin de aplicar estos conceptos en la resolución de problemas relacionados con estructuras vectoriales y sus propiedades.

## Espacios Vectorial $\mathbb{R}^n$

### Definición

Un espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ es el conjunto de todas las n-tuplas ordenadas de números reales. Es decir, $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}\}$.

**¿Cómo podemos definir un vector?**

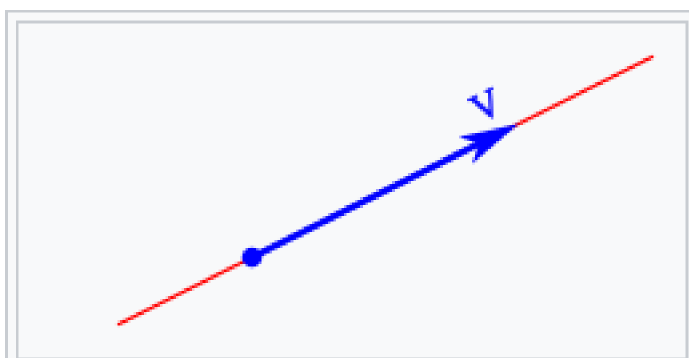


Figure 1: vector

Es la única forma de definir un vector en $\mathbb{R}^n$.

**Notación:** En general, denotamos un vector en $\mathbb{R}^n$ como $(x_1, x_2, ..., x_n)$, o de forma matricial como $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

---

### Operaciones

Dadas dos n-tuplas $(x_1, x_2, ..., x_n)$ y $(y_1, y_2, ..., y_n)$, se definen las siguientes operaciones:

1. **Suma**: $(x_1, x_2, ..., x_n) + (y_1, y_2, ..., y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)$.
2. **Multiplicación por un escalar**: $k(x_1, x_2, ..., x_n) = (kx_1, kx_2, ..., kx_n)$.

## Propiedades

1. **Conmutatividad de la suma**: $(x + y) = (y + x)$.
2. **Asociatividad de la suma**: $(x + y) + z = x + (y + z)$.
3. **Elemento neutro de la suma**: Existe un elemento $0 = (0, 0, ..., 0)$ tal que $x + 0 = x$.
4. **Elemento opuesto de la suma**: Para cada $x$ existe un elemento $-x$ tal que $x + (-x) = 0$.
5. **Distributividad de la multiplicación por un escalar respecto a la suma de vectores**: $k(x + y) = kx + ky$.
6. **Distributividad de la multiplicación por un escalar respecto a la suma de escalares**: $(k + l)x = kx + lx$.
7. **Asociatividad de la multiplicación por un escalar**: $k(lx) = (kl)x$.
8. **Elemento neutro de la multiplicación por un escalar**: $1x = x$.

---

Note que para definir un espacio vectorial debemos definir un conjunto y dos operaciones. En este caso, el conjunto es el conjunto de n-tuplas de números reales y las operaciones son la suma y la multiplicación por un escalar.

## Ejemplos

1. $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$, con la definición usual de la suma y la multiplicación por un escalar.
2. $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$, con la definición usual de la suma y la multiplicación por un escalar.

---

3. Un ejemplo de un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}^2$ que no sea el usual es el espacio de matrices simétricas de $2 \times 2$ con entradas en $\mathbb{R}$. Este espacio se puede definir como:

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

Este conjunto $V$ cumple con las propiedades de un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$:

Este espacio vectorial no es el usual $\mathbb{R}^2$, ya que sus elementos no son pares ordenados $(x, y)$, sino matrices simétricas de $2 \times 2$.

---

#### Espacios vecotoriales en general

4. Los polinomios de grado menor o igual a $n$ forman un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Este espacio se puede definir como:

$$P_n = \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n \mid a_i \in \mathbb{R}\}$$

con las operaciones de suma y multiplicación por un escalar usuales.

5. $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$, con la definición de suma y multiplicación por un escalar dadas por $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, 0)$ y $k(x, y) = (kx, y)$.

---

# combinación lineal

## Definición

Dado un conjunto de vectores $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ en un espacio vectorial $V$, una combinación lineal de estos vectores es un vector de la forma:

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n = v$$

Aqui se dice que $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ son los coeficientes de la combinación lineal y que $v$ se escribió como una combinación lineal de los vectores $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$.

## Ejemplo

$$e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)$$

$$v = (2, 3, 4) = 2(1, 0, 0) + 3(0, 1, 0) + 4(0, 0, 1)$$

Lo cual quiere decir que $v$ es una combinación lineal de los vectores $e_1, e_2, e_3$.

---

¿Todo vector de $\mathbb{R}^3$ es una combinación lineal de $e_1, e_2, e_3$?

## Definición

Se dice que el espacio generado por un conjunto de vectores $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ es el conjunto de todas las combinaciones lineales de estos vectores. Se denota por $\langle v_1, v_2, ..., v_n \rangle$.

---

- Supongamos que tenemos los vectores $v_1 = (1, 1)$ y $v_2 = (-5, -5)$.

¿Cuál es el espacio generado por estos vectores?

- Supongamos que tenemos los vectores $v_1 = (1, 1)$ y $v_2 = (-1, 1)$

¿Cuál es el espacio generado por estos vectores?

¿Cómo podemos determinar si un vector $v$ está en el espacio generado por un conjunto de vectores $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$?

---

# Linealmente independientes

## Definición

Un vector es linealmente independiente de un conjunto de vectores $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ si no puede ser escrito como una combinación lineal de los otros vectores.

### Ejemplo

Dado el conjunto de vectores $\{v_1 = (1,1), v_2 = (5,5)\}$,

$$\alpha_1(1,1) + \alpha_2(5,5) = (3,0)$$

Como no existen $\alpha_1, \alpha_2$ tales que se cumpla la ecuación, el vector $(3,0)$ es linealmente independiente de los vectores $v_1, v_2$.

¿Por qué? Se puede explicar graficamente en $\mathbb{R}^2$.

### Ejemplo

Dado el conjunto de vectores $\{v_1 = (1,1), v_2 = (1,-1)\}$,

$$\alpha_1(1,1) + \alpha_2(1,-1) = (2,0)$$

$v$ es linealmente dependiente de de los vectores $v_1, v_2$.

---

## Bases

### Definición

Un conjunto de vectores $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ es una base de un espacio vectorial $V$ si:

1. Los vectores son linealmente independientes.
2. Cualquier vector en $V$ puede ser escrito como una combinación lineal de los vectores de la base.

### Ejemplo

Dado el espacio vectorial $\mathbb{R}^2$, los vectores $e_1 = (1,0)$ y $e_2 = (0,1)$ forman una base de $\mathbb{R}^2$.

¿Por qué?

---

## Subespacios

### Definición

Un subespacio de un espacio vectorial $V$ es un subconjunto $W$ de $V$ que es un espacio vectorial con las operaciones de suma y multiplicación por un escalar de $V$.